



SCC-223 Estruturas de Dados I

Árvores AVL – Parte 1

Profa. Elaine Parros Machado de Sousa



Aula baseada em material do professor
Rudinei Goularte.





Relembrando... Árvores Binárias de Busca

- **Altura** de uma árvore binária (AB) => igual à profundidade, ou nível máximo, de suas folhas
- A **eficiência** da busca em árvore depende do seu **balanceamento**
- Algoritmos de inserção e remoção em ABB não garantem que a árvore gerada a cada passo seja balanceada

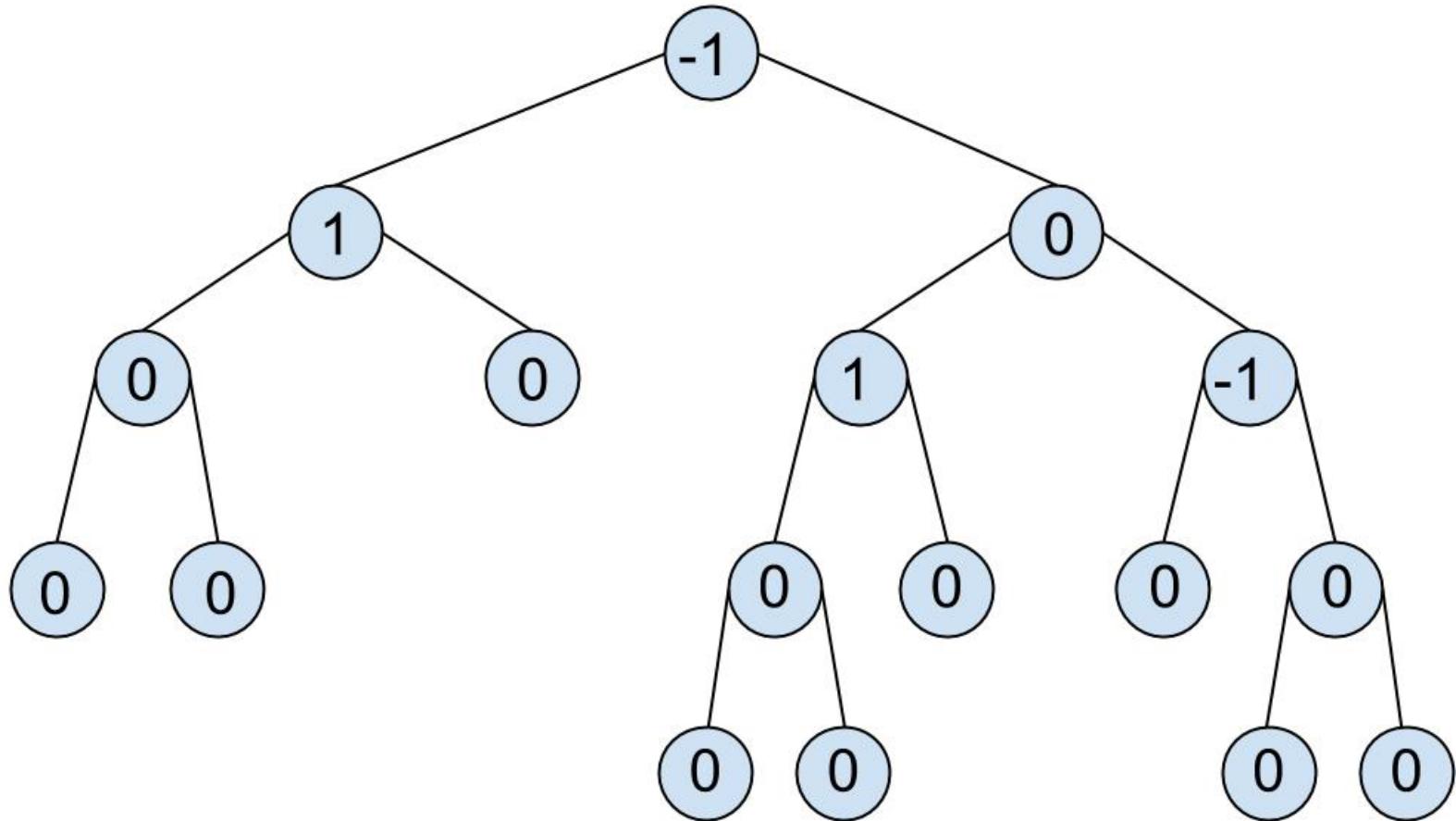
Árvores AVL

- **Árvore AVL =>** ABB balanceada
 - para todo nó, as alturas das sub-árvore esquerda e direita nunca diferem em mais de 1
- **Fator de Balanceamento** do nó => a altura de sua sub-árvore esquerda menos a altura de sua sub-árvore direita
 - $FB(p) = h(T_E(p)) - h(T_D(p))$

AVL

Todo nó tem **fator de balanceamento** igual a **1, -1 ou 0**

Árvores AVL – Fator de Balanceamento



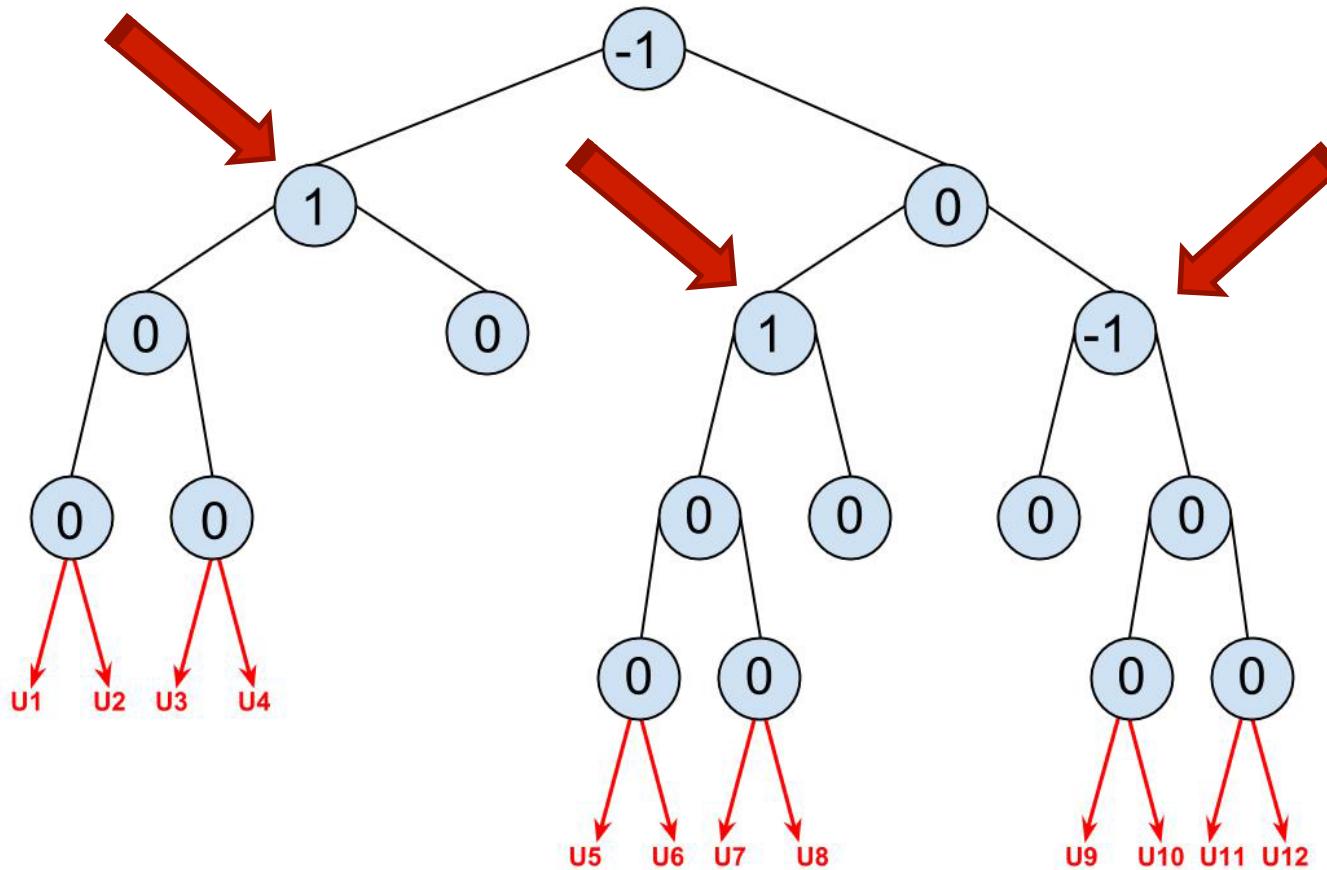


Árvores AVL

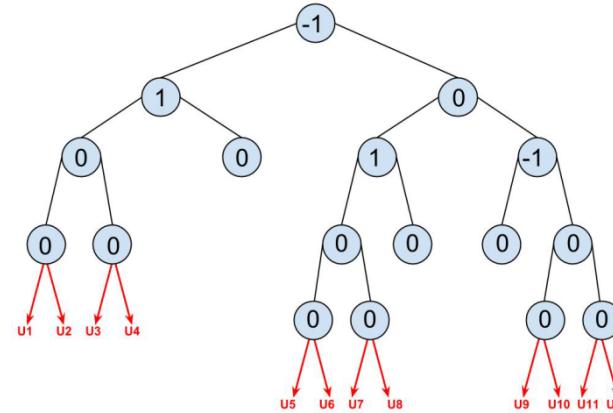
- Problema das árvores AVL e das árvores balanceadas de um modo geral => como manter a estrutura balanceada após operações de inserção e remoção?

Árvores AVL

- As seguintes inserções (**U1** a **U12**), como feitas na ABB, tornariam a árvore desbalanceada



Árvores AVL



- Generalizando... as seguintes inserções poderiam levar ao desbalanceamento de uma árvore AVL
 - o nó inserido é **descendente esquerdo** de um nó que tinha **FB = 1**
 - ex: **U1** a **U8**
 - O nó inserido é **descendente direito** de um nó que tinha **FB = -1**
 - ex: **U9** a **U12**



Árvores AVL

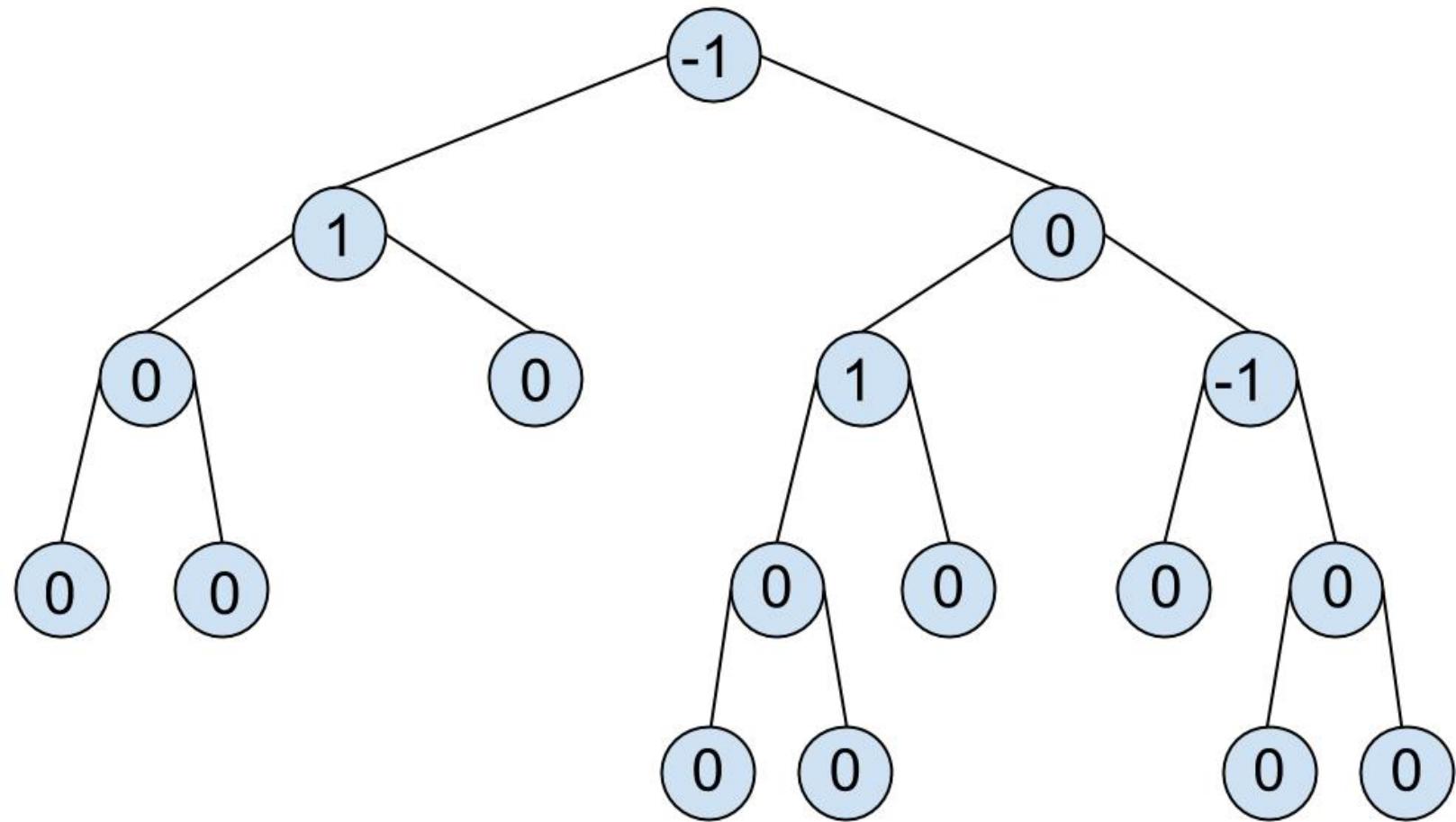
- Para manter uma AVL **balanceada** é necessário aplicar uma **transformação** na árvore tal que:
 - 1) O percurso **em-ordem** na árvore transformada seja **igual** ao da árvore original
 - **isto é, a árvore transformada continua sendo uma ABB**
 - 2) A árvore transformada fique **balanceada**



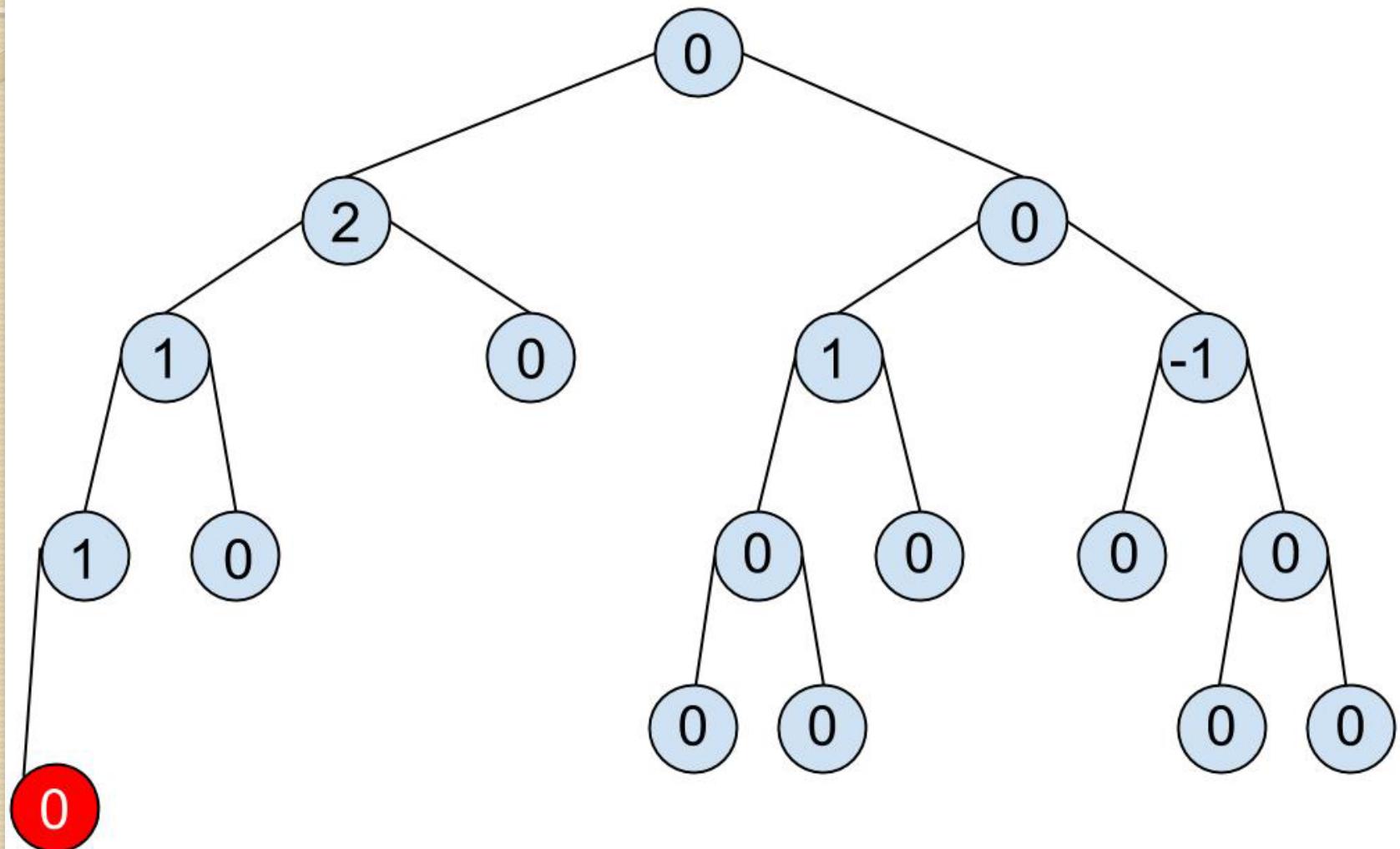
Árvores AVL

- **ROTAÇÃO => transformação** que mantém a árvore balanceada
 - a rotação pode ser feita à esquerda ou à direita, dependendo do desbalanceamento a ser tratado
 - a rotação deve ser realizada de maneira a respeitar as regras 1 e 2 definidas no *slide* anterior
- Dependendo do desbalanceamento a ser tratado, uma única rotação pode não ser suficiente

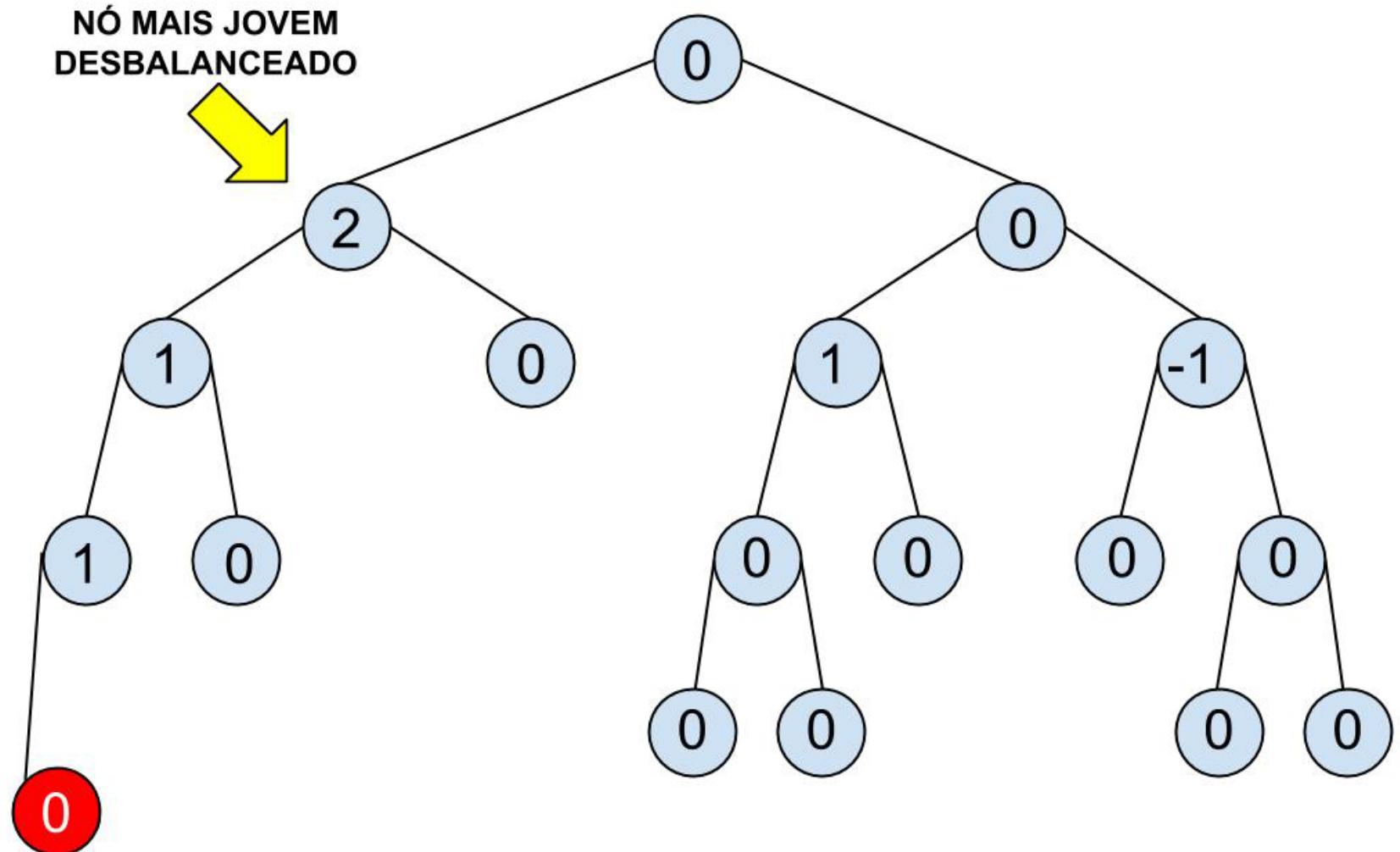
Árvores AVL - Rotação Direita



Árvores AVL - Rotação Direita

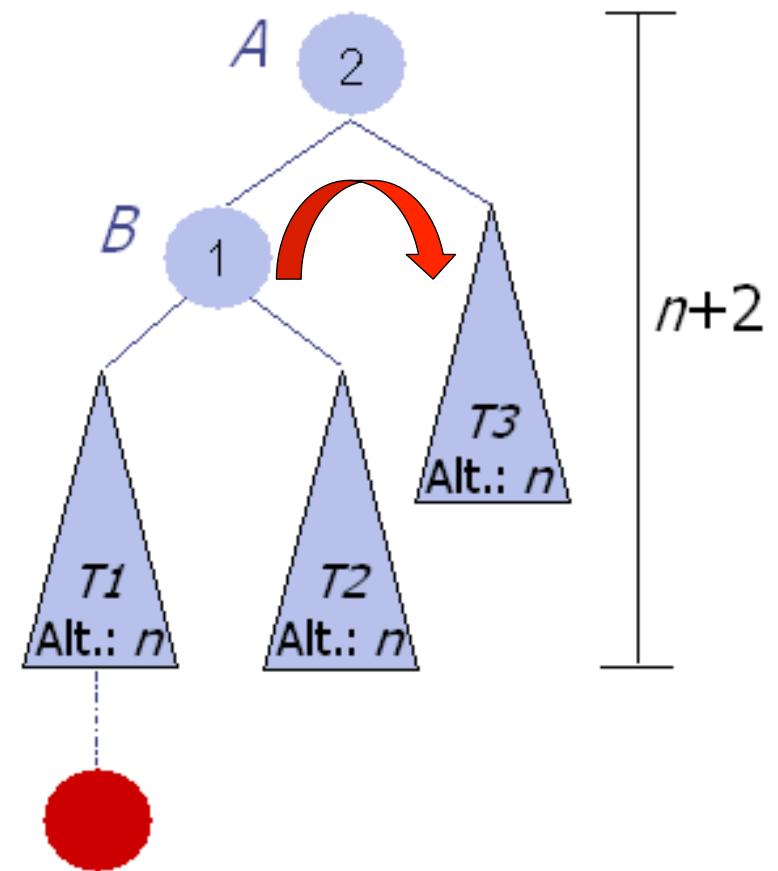


Árvores AVL - Rotação Direita



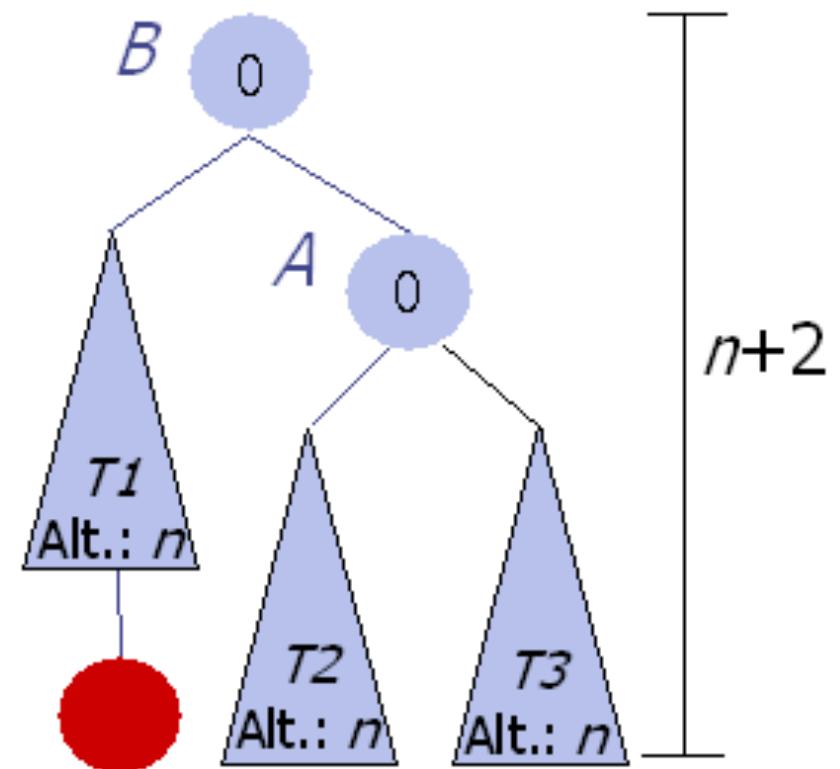
Árvores AVL - Rotação Direita

- Cenário inicial para **rotação à direita**:
 - T1, T2 e T3 podem ser subárvores de qualquer altura, inclusive **0**, ou subárvores vazias
 - A é o nó **mais jovem** a se tornar **desbalanceado**
 - A tem **fator de balanceamento positivo**

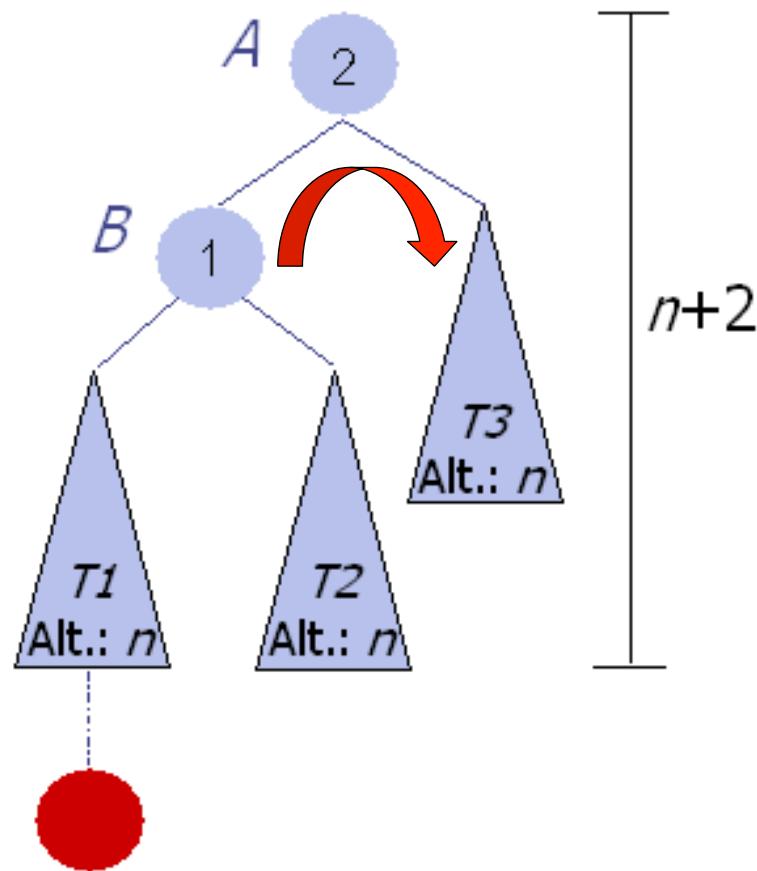


Árvores AVL - Rotação Direita

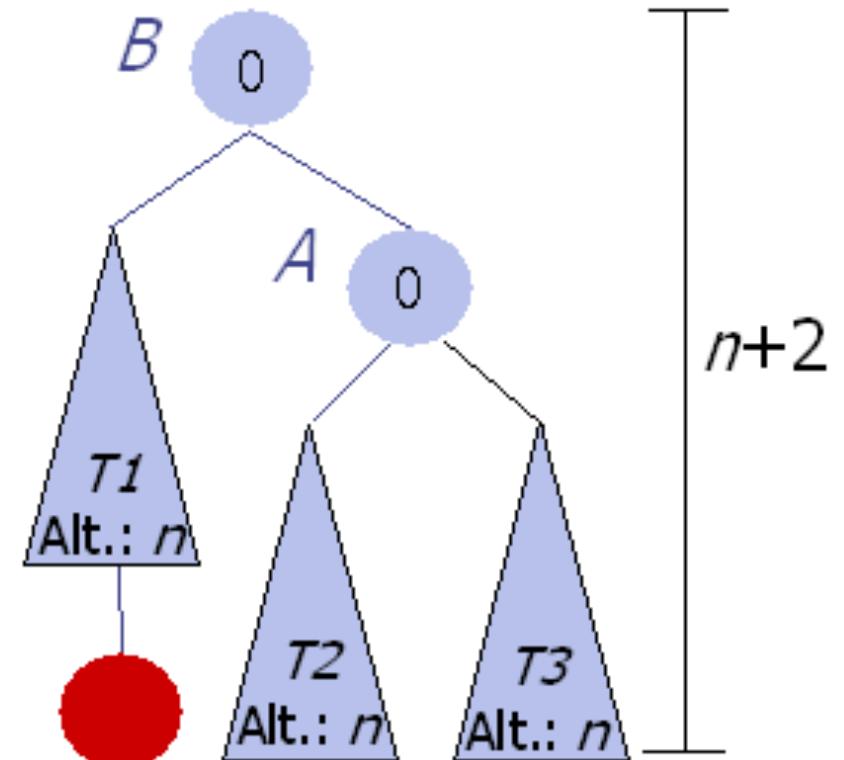
- Cenário após a **rotação à direita**:
 - B “assume” o lugar de A
 - A passa a ser filho direito de B
 - T2 passa a ser filho esquerdo de A
- => nós平衡ados



Árvores AVL - Rotação Direita

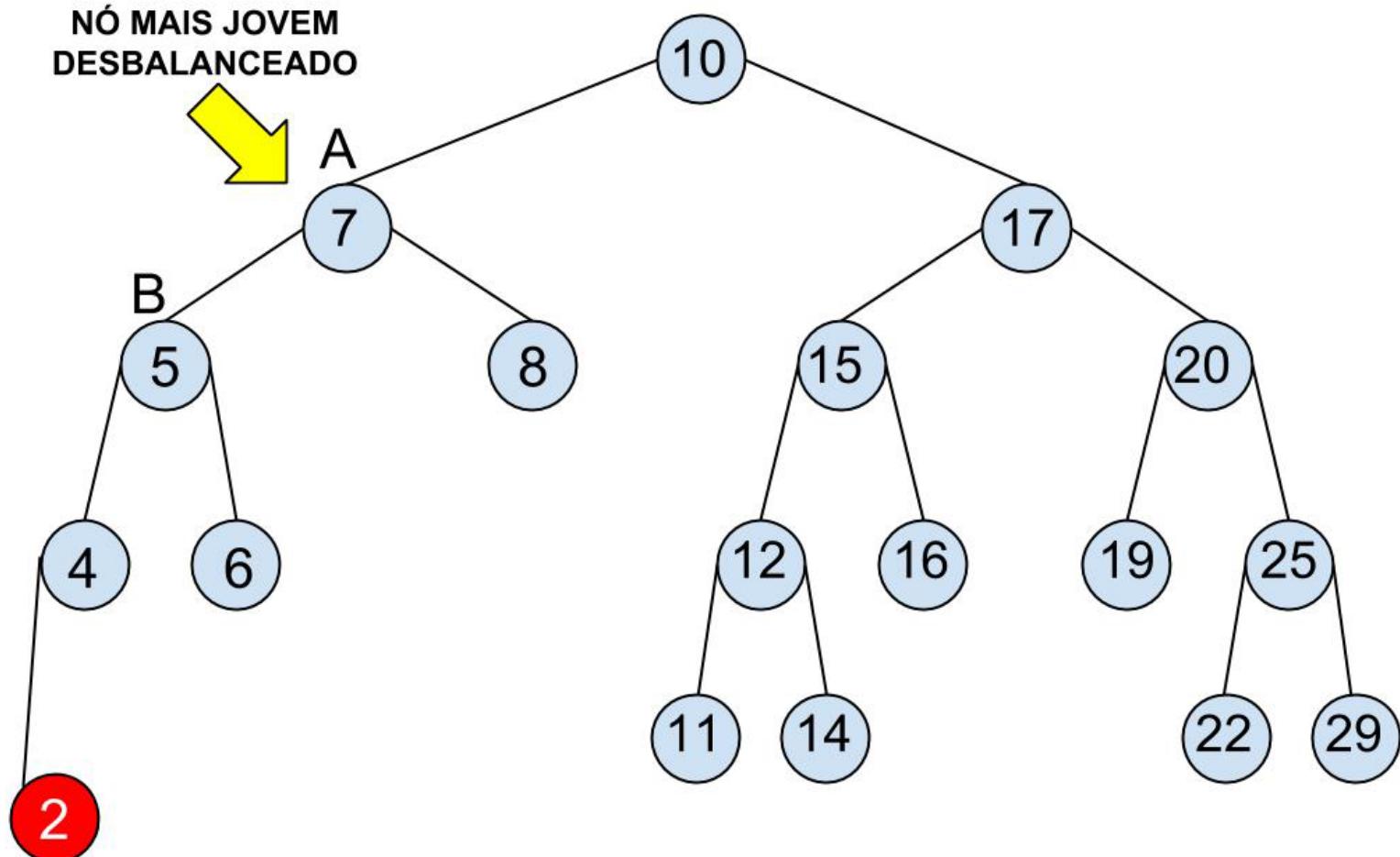


ANTES

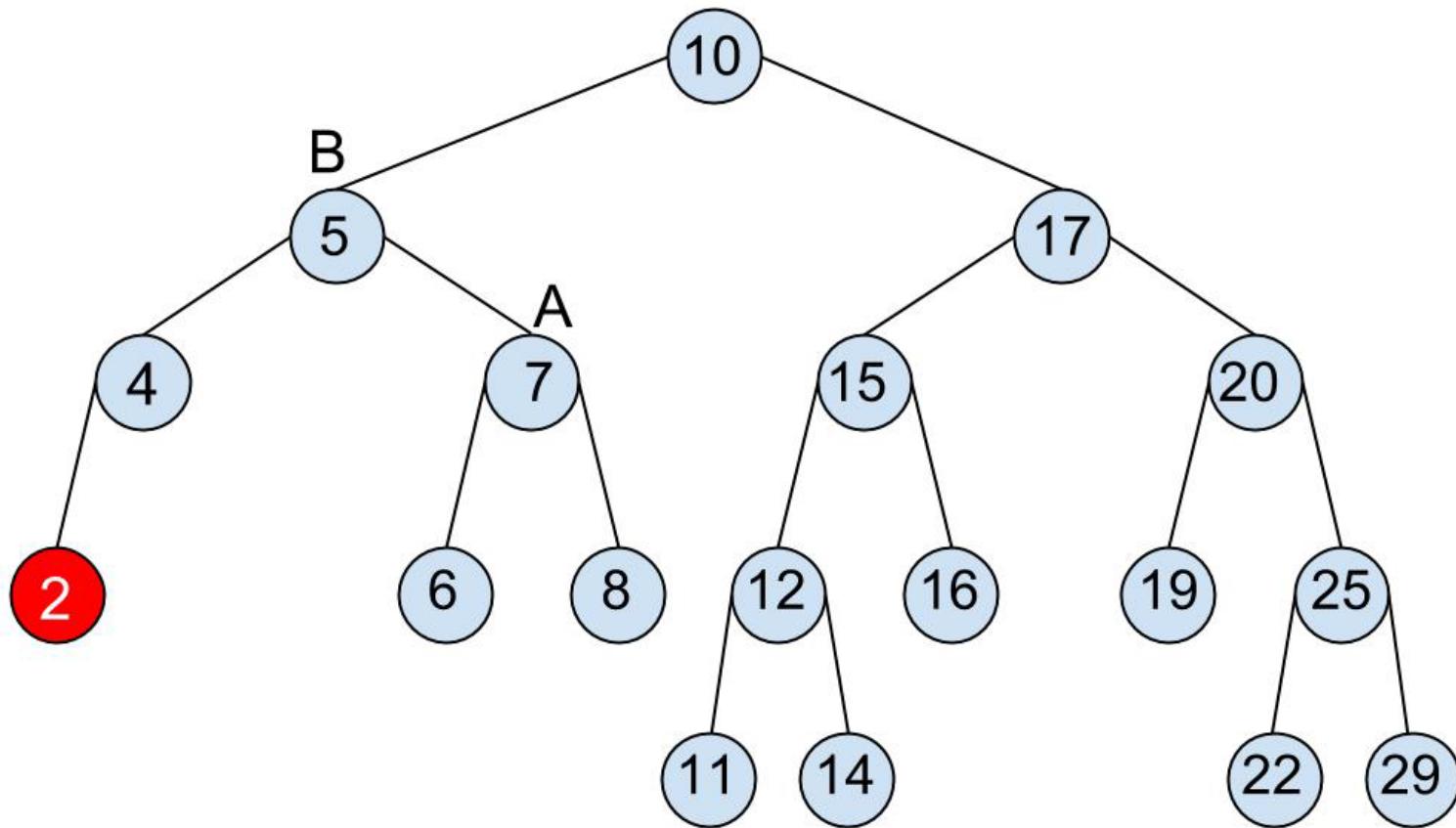


DEPOIS

Árvores AVL - Rotação Direita



Árvores AVL - Rotação Direita



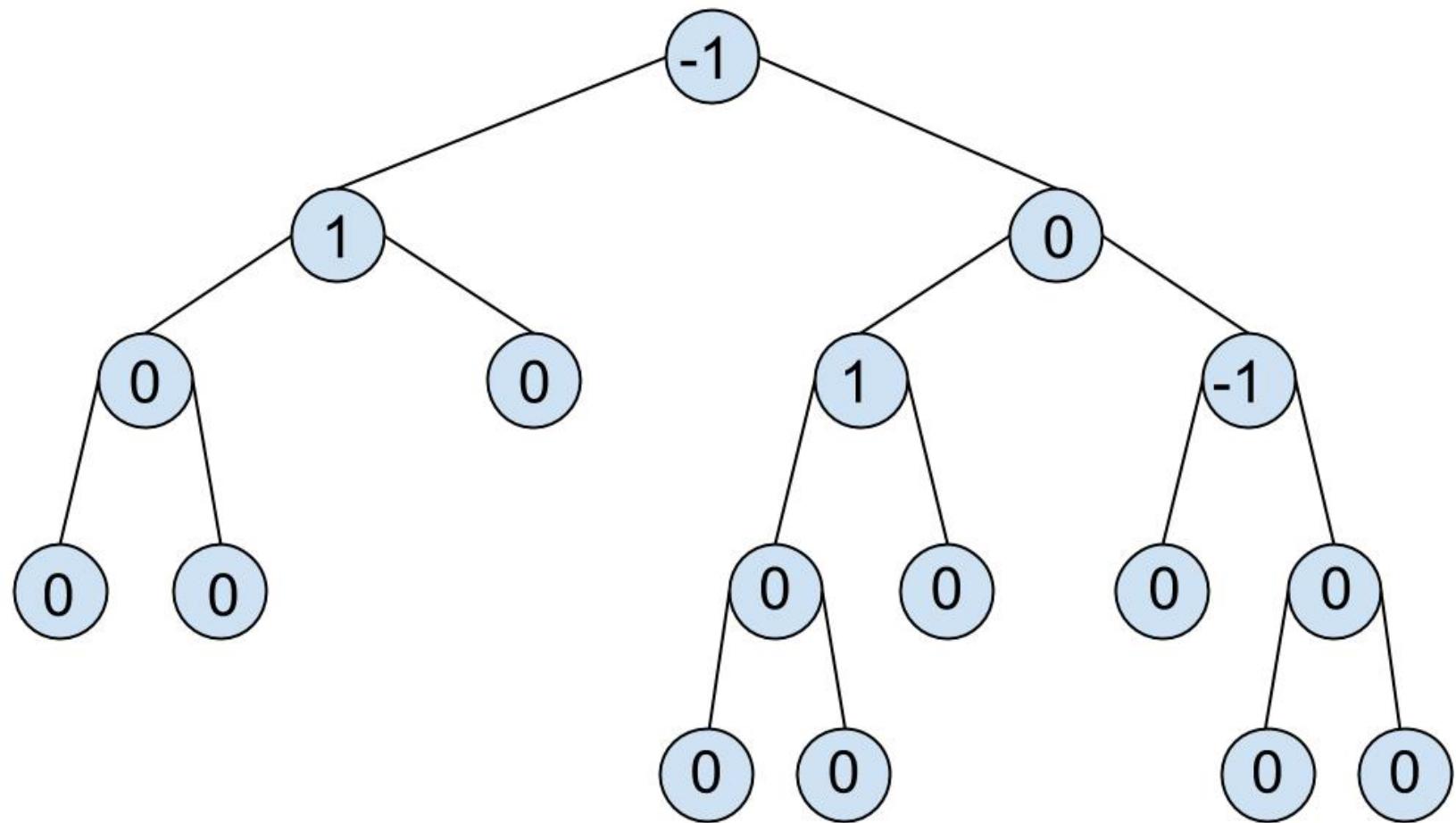
APÓS A ROTAÇÃO DIREITA



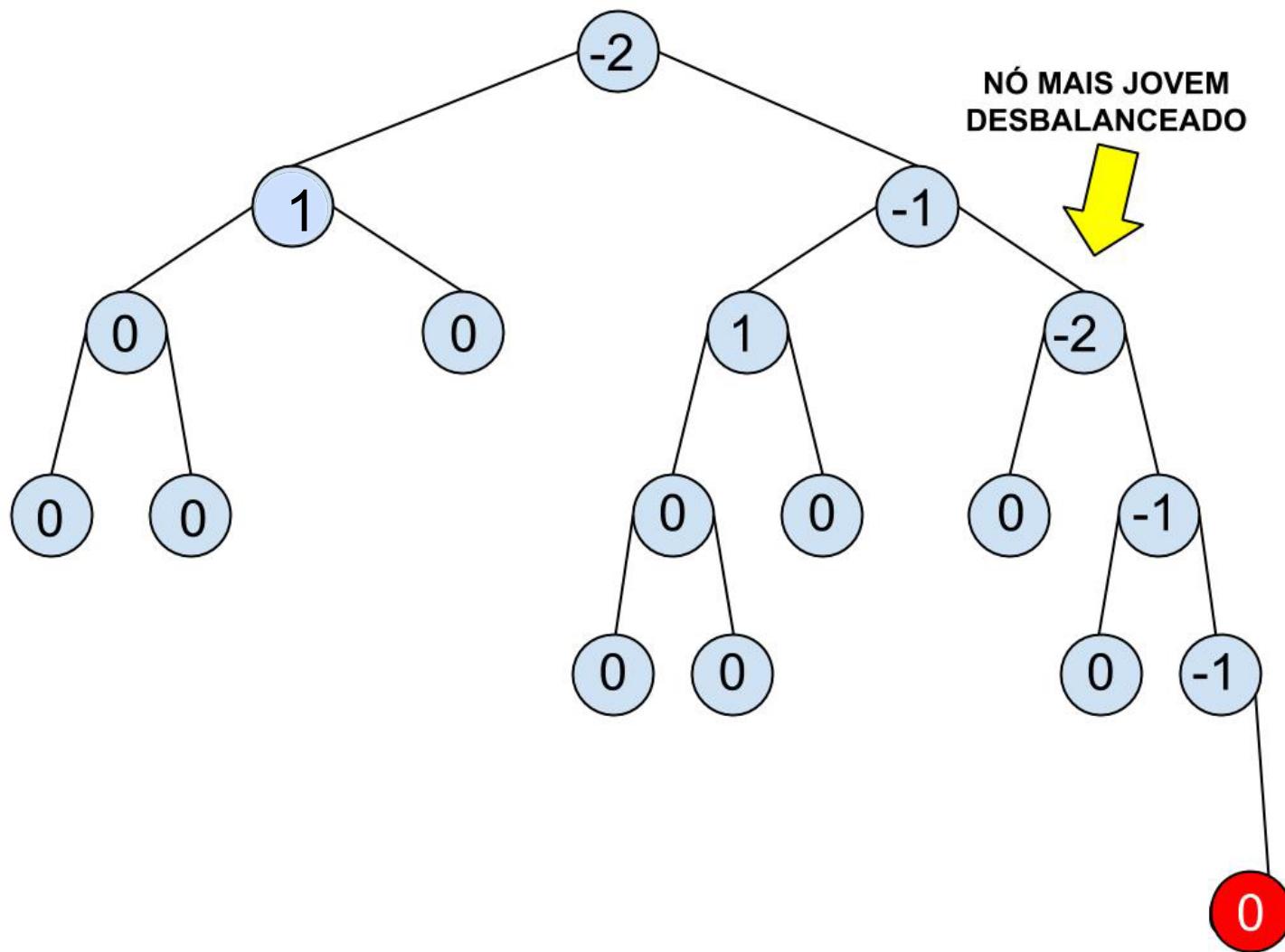
Árvores AVL - Rotação Direita

- Exercício
 - Insira em uma **árvore AVL** a sequência de valores: 5, 4, 3, 2, 1 (nesta ordem)
 - ilustre todos os passos

Árvores AVL - Rotação Esquerda

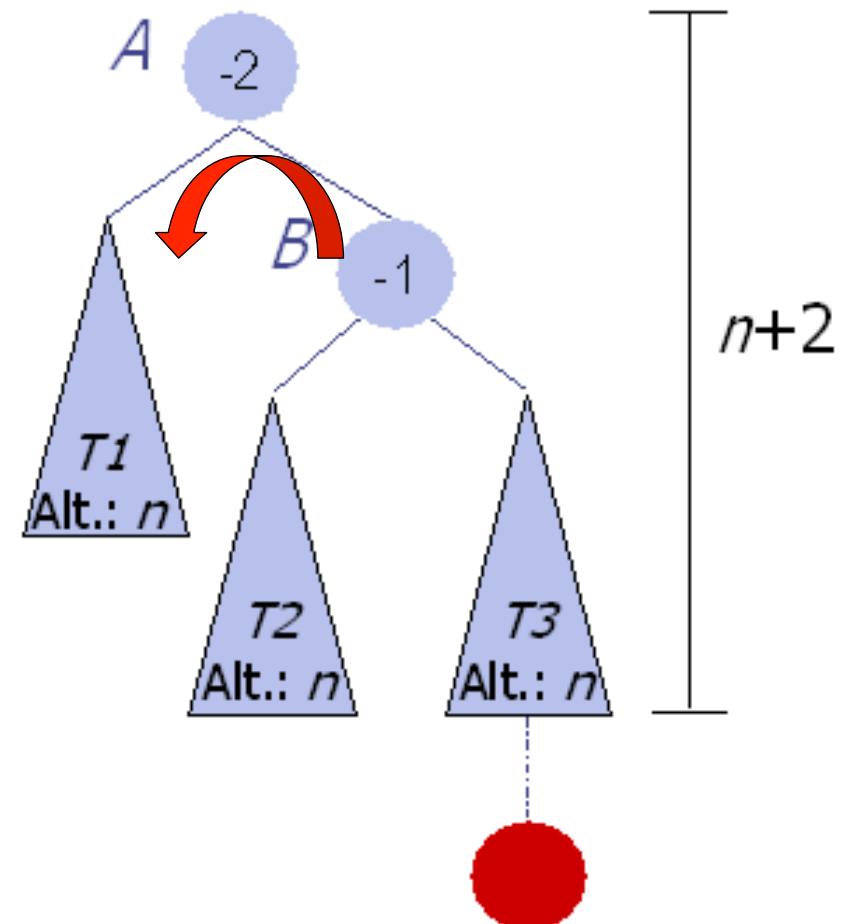


Árvores AVL - Rotação Esquerda



Árvores AVL - Rotação Esquerda

- Cenário inicial para **rotação à esquerda**:
 - T1, T2 e T3 podem ser subárvores de qualquer altura, inclusive 0, ou subárvores vazias
 - A é o nó **mais jovem** a se tornar **desbalanceado**
 - A tem **fator de balanceamento negativo**

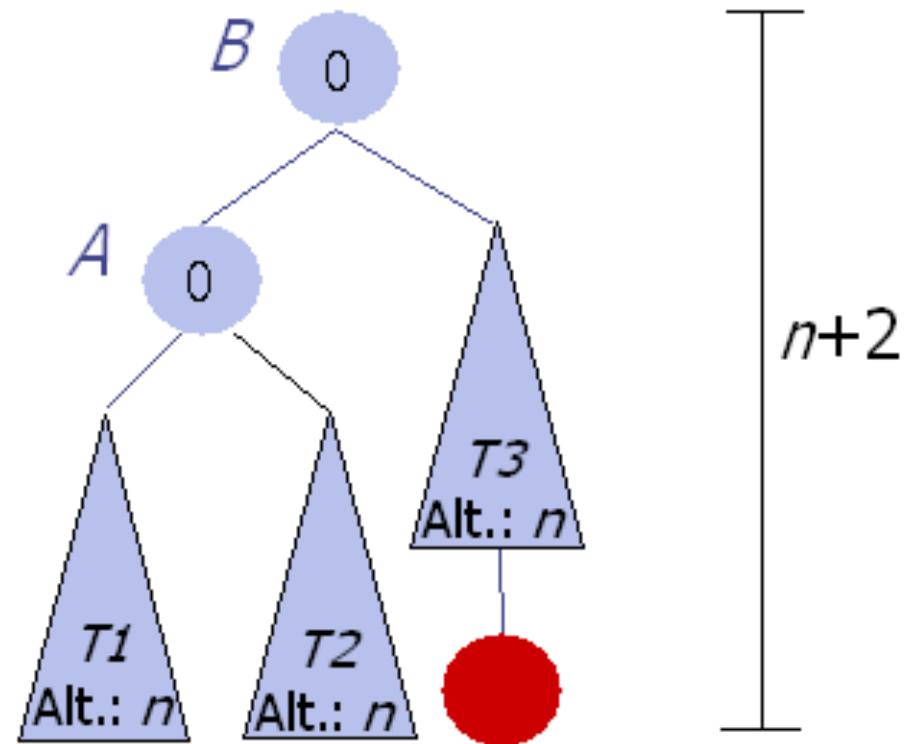


Árvores AVL - Rotação Esquerda

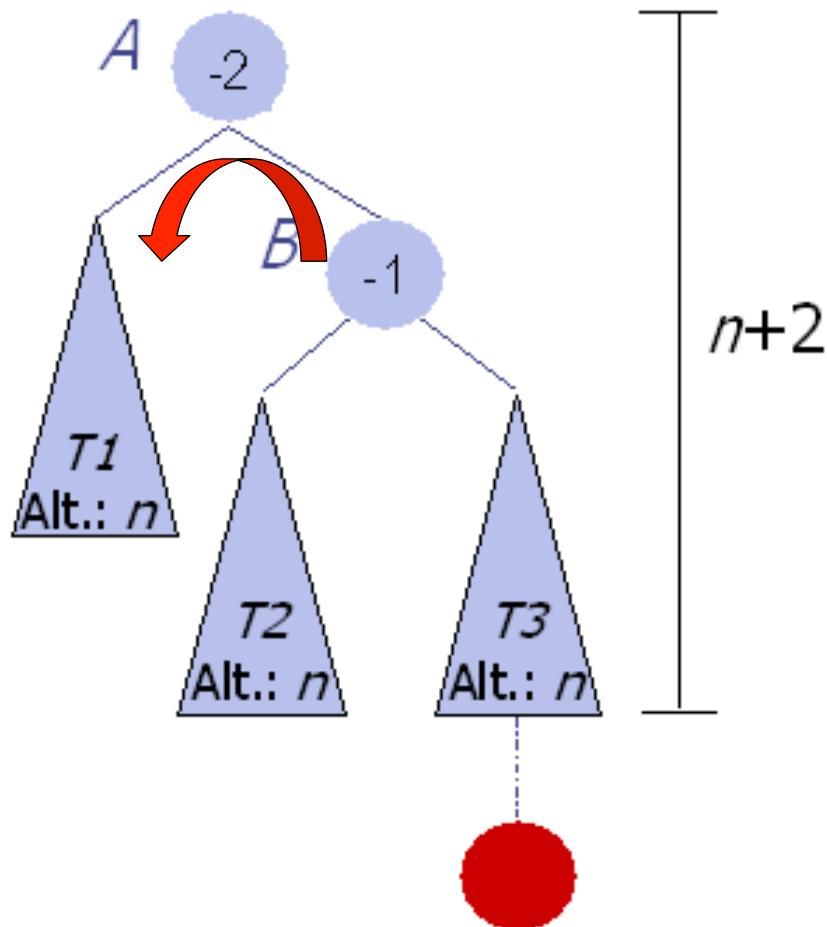
- Cenário após a **rotação à esquerda**:

- B “assume” o lugar de A
- A passa a ser filho esquerdo de B
- T2 passa a ser filho direito de A

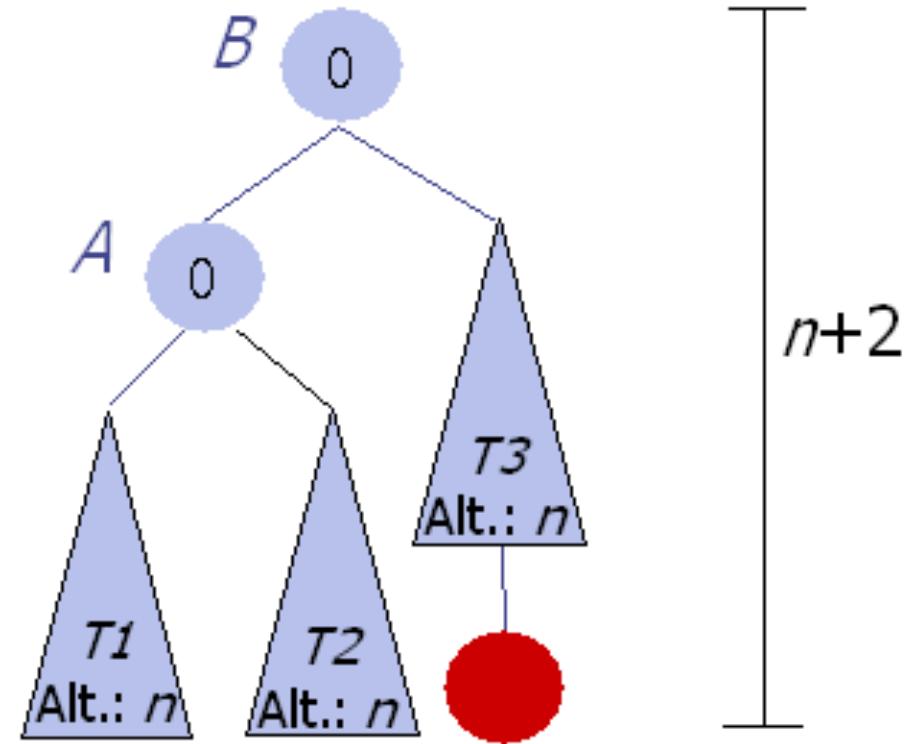
=> nós平衡ados



Árvores AVL - Rotação Esquerda

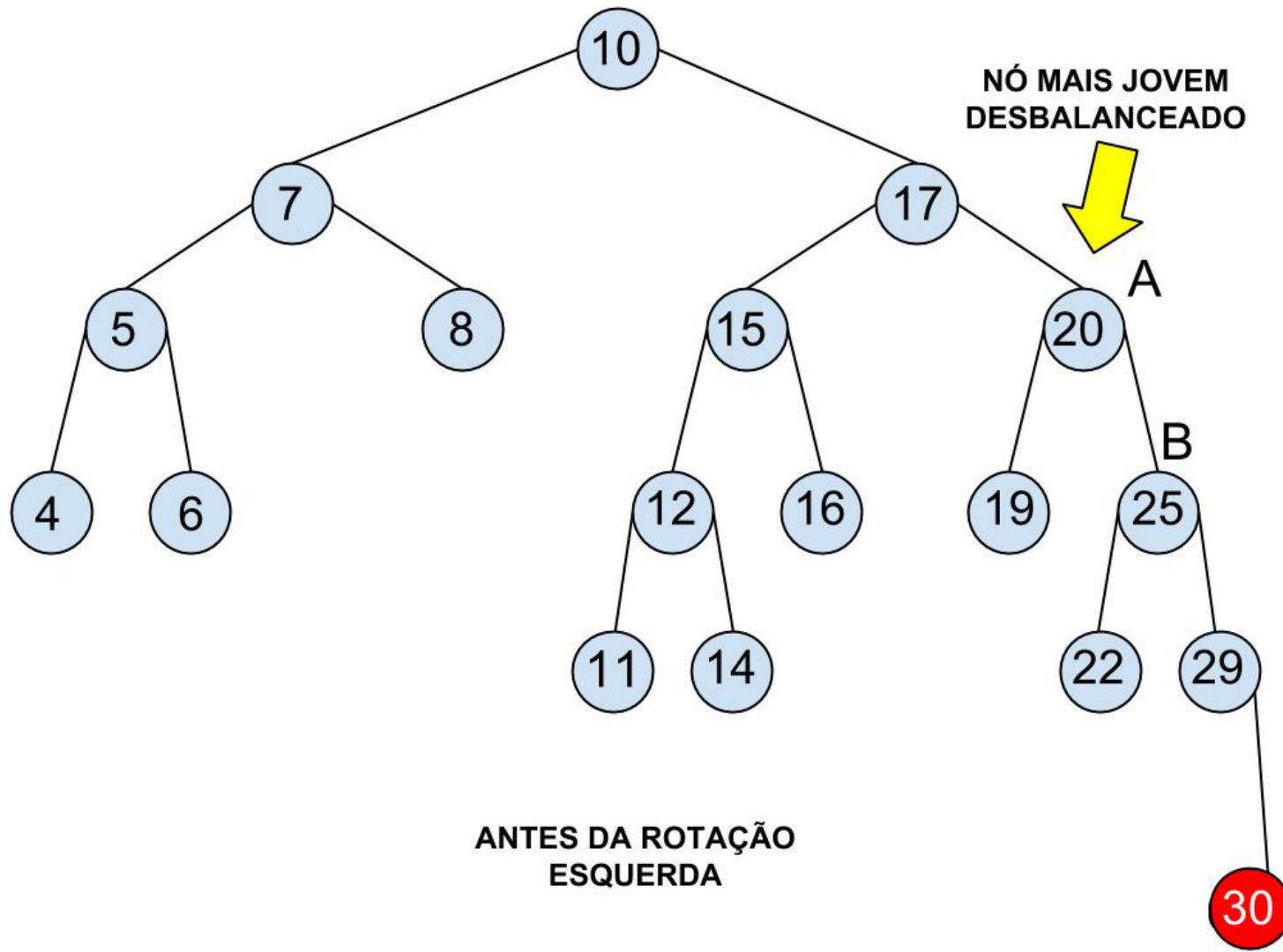


ANTES

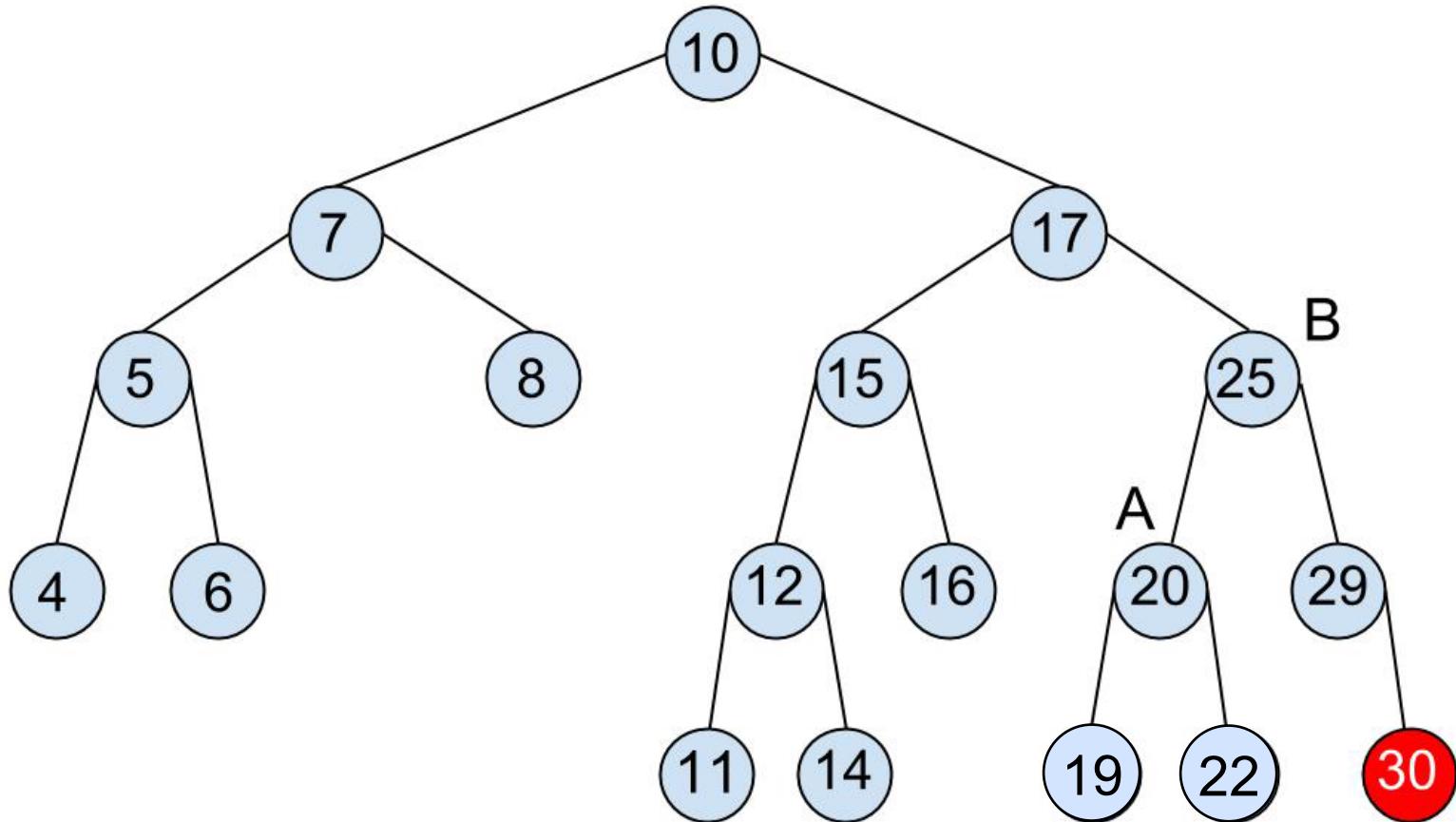


DEPOIS

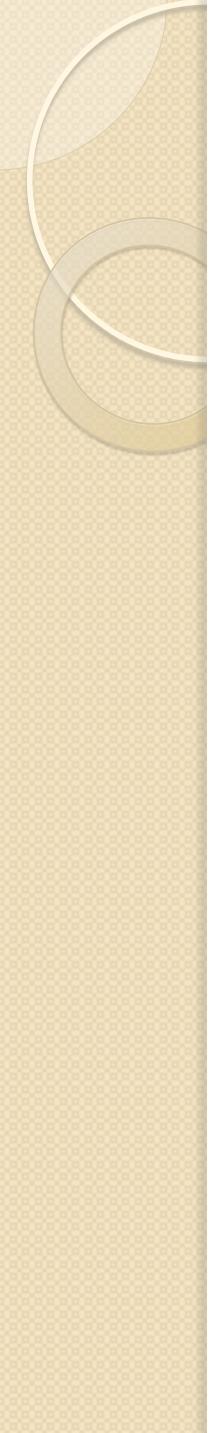
Árvores AVL - Rotação Esquerda



Árvores AVL - Rotação Esquerda



APÓS A ROTAÇÃO ESQUERDA

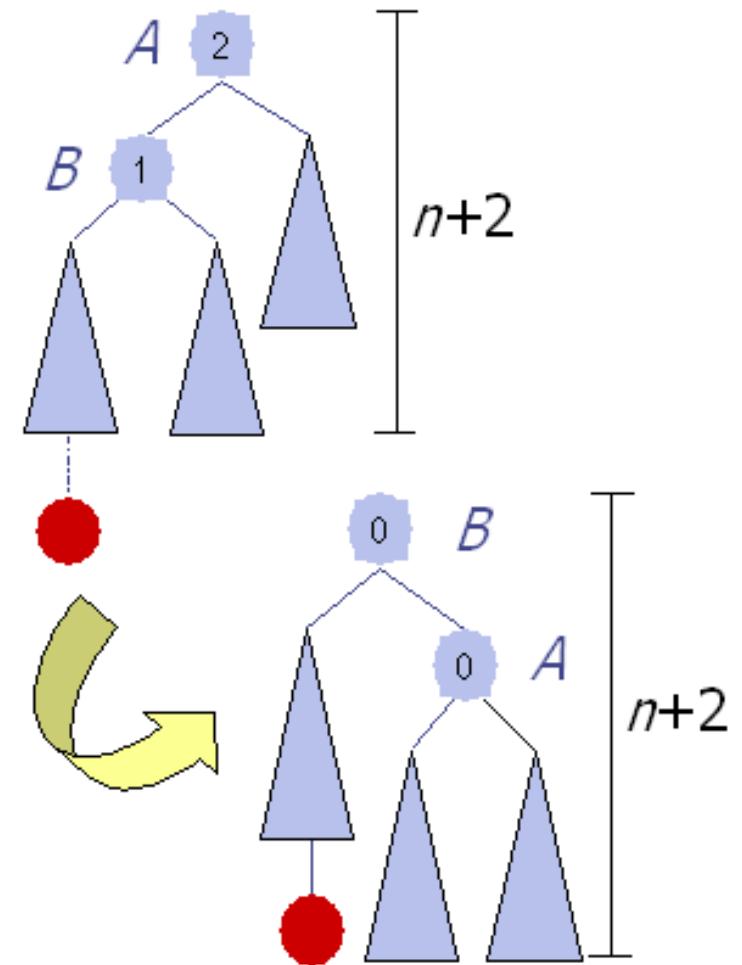


Árvores AVL - Rotação Esquerda

- Exercício
 - Insira em uma **árvore AVL** a sequência de valores: 1, 2, 3, 4, 5 (nesta ordem)
 - ilustre todos os passos

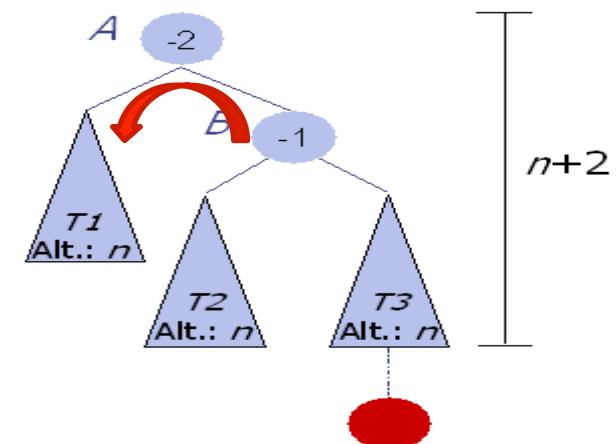
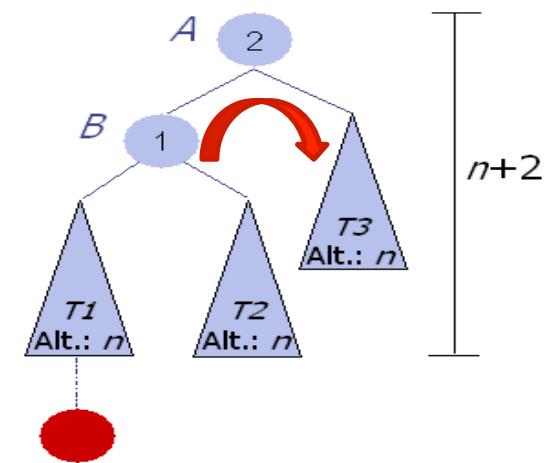
Rotações Simples

- **Rotação direita** => a subárvore resultante tem como altura a mesma altura da subárvore original
 - análogo para rotação esquerda
- Consequentemente... o **fator de balanceamento de nenhum nó acima de A é afetado**



Rotações Simples

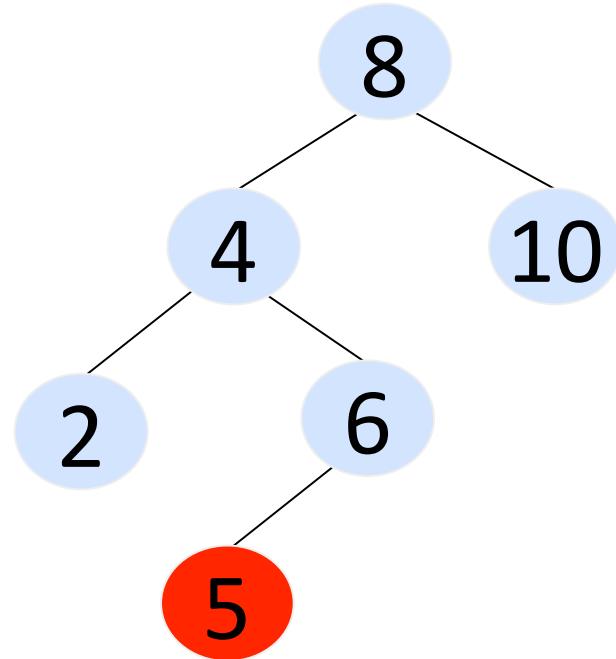
- Quando utilizar a rotação direita ou esquerda?
 - **rotação direita =>** quando o fator de balanceamento do nó A é **positivo**
 - **rotação esquerda =>** quando o fator de balanceamento do nó A é **negativo**



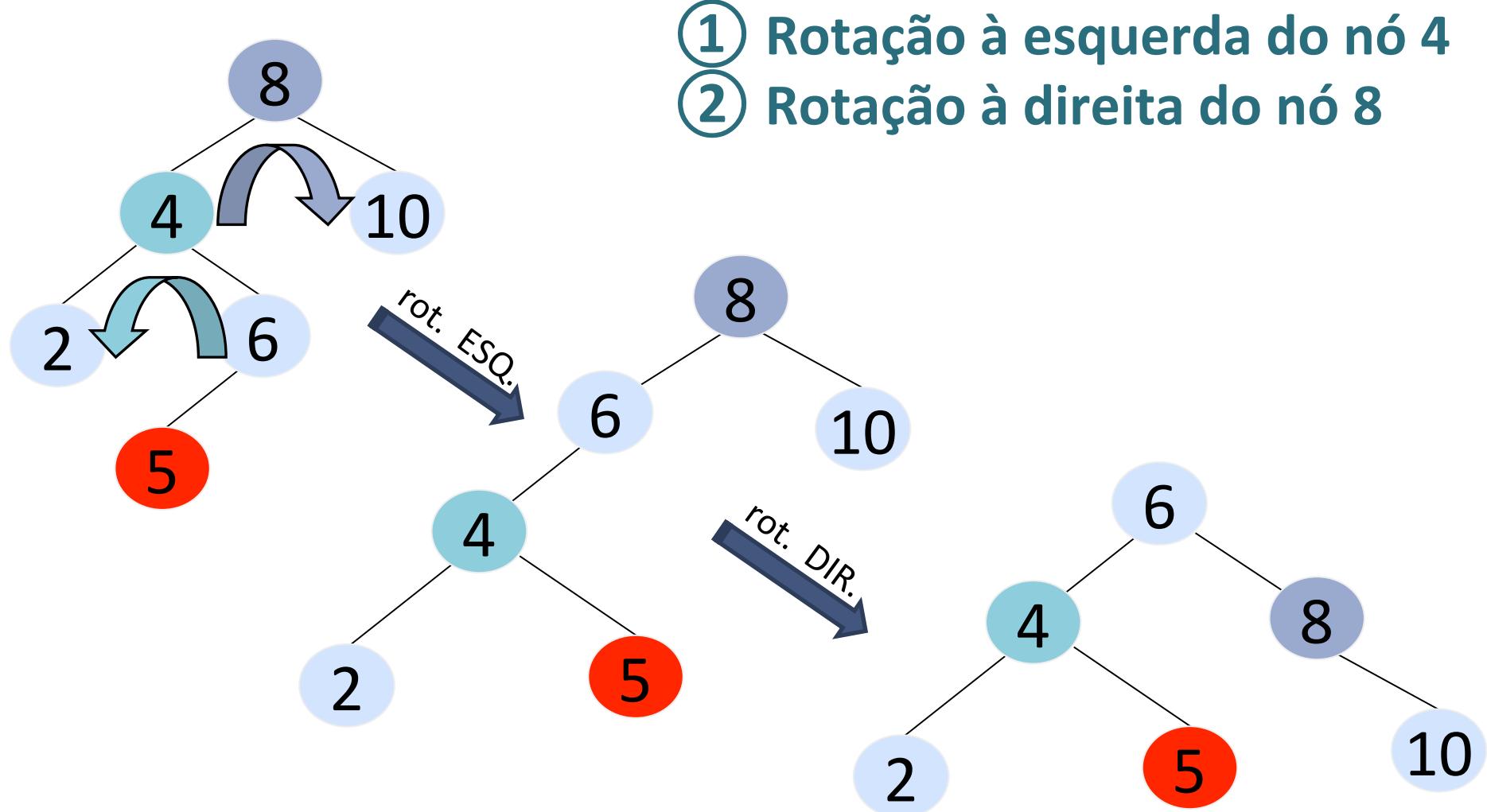
Rotações

- Rotações simples
solucionam todos os
tipos de
desbalanceamento?
 - Infelizmente... não!!

=> Rotação dupla

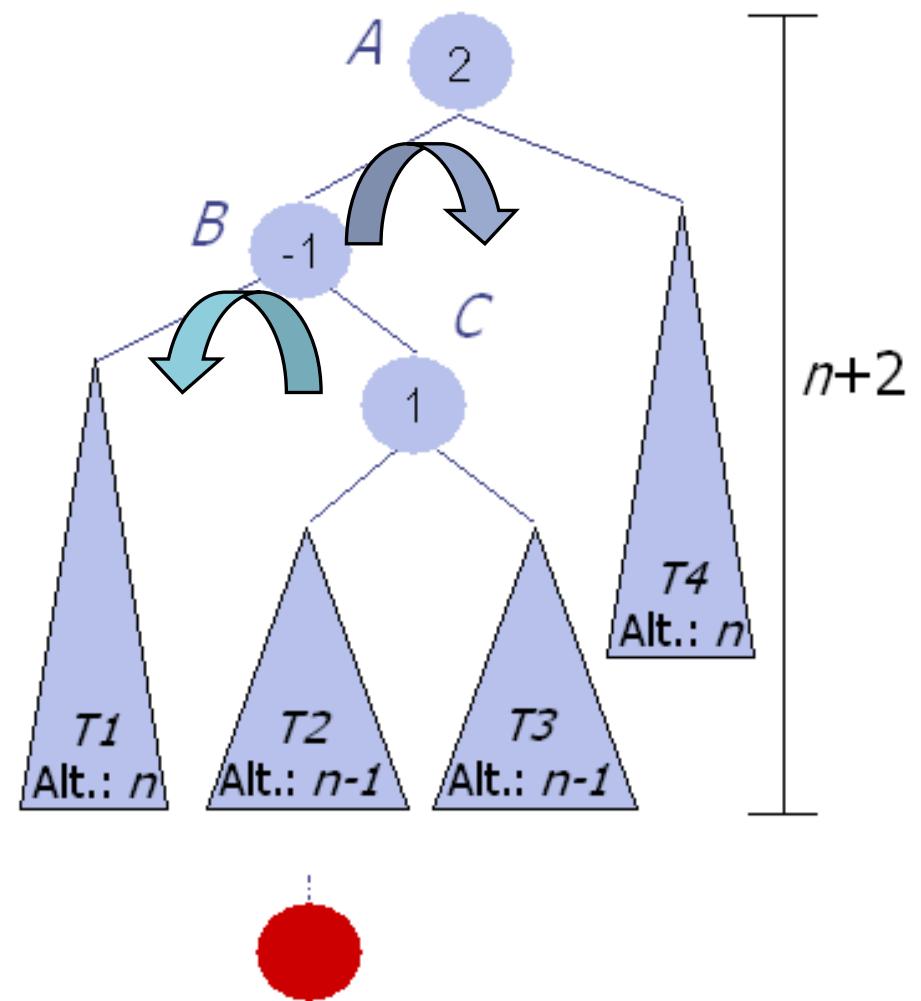


Rotação Dupla



Árvores AVL - Rotação Esq./Dir.

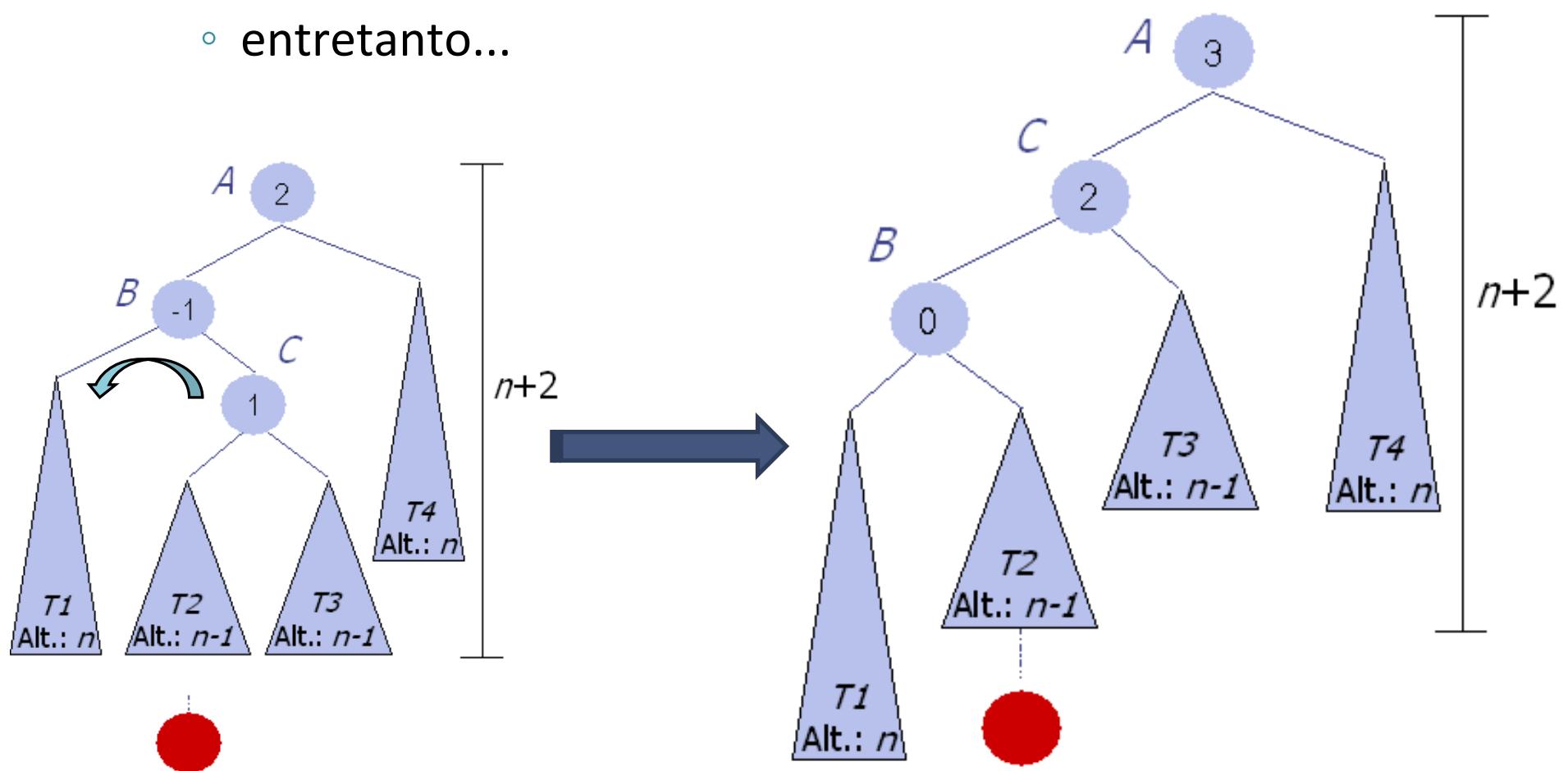
- Cenário inicial para **rotação dupla esquerda/direita**
 - T1, T2, T3 e T4 podem ser subárvores de qualquer altura, inclusive 0, ou subárvores vazias
 - A é o **nó mais jovem** a se tornar **desbalanceado**



Árvores AVL - Rotação Esq./Dir.

➤ Passo 1: rotação esquerda em B

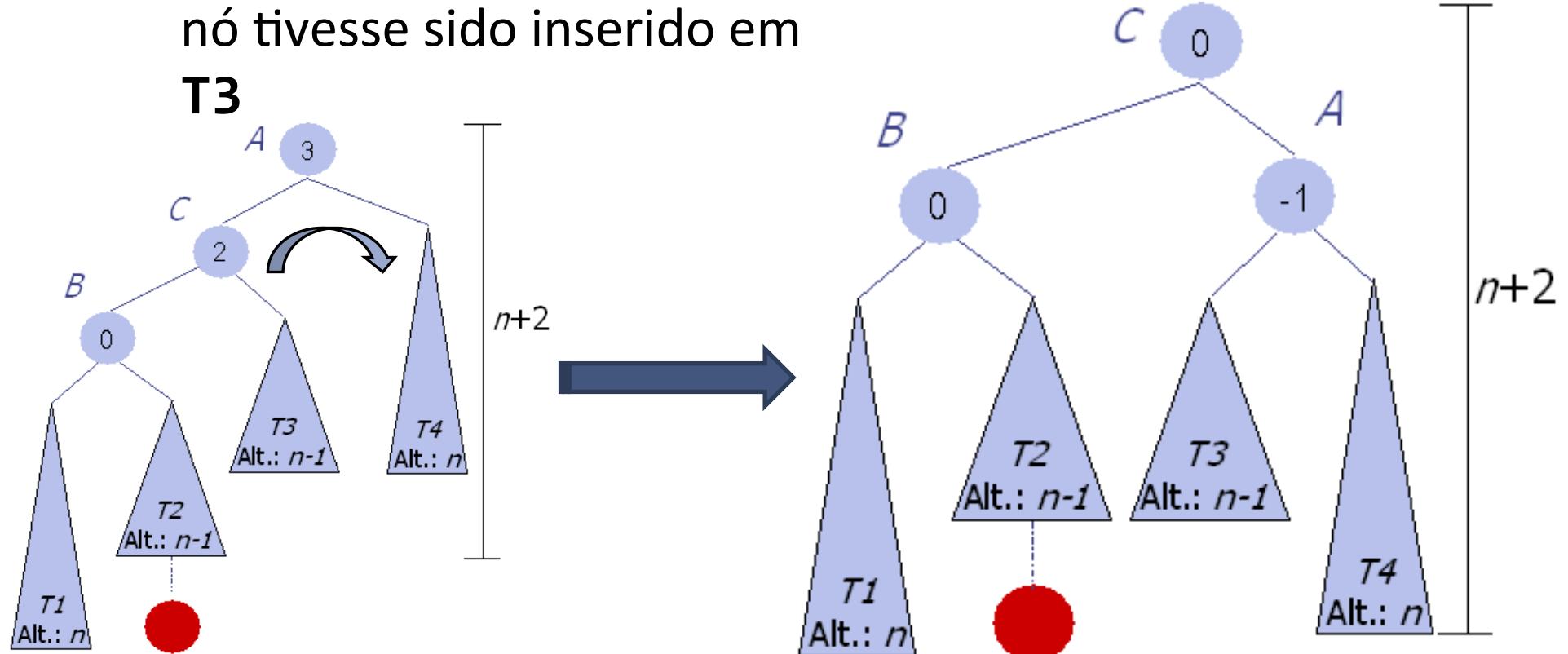
- a rotação esquerda parece deixar a árvore ainda mais desbalanceada
- entretanto...



Árvores AVL - Rotação Esq./Dir.

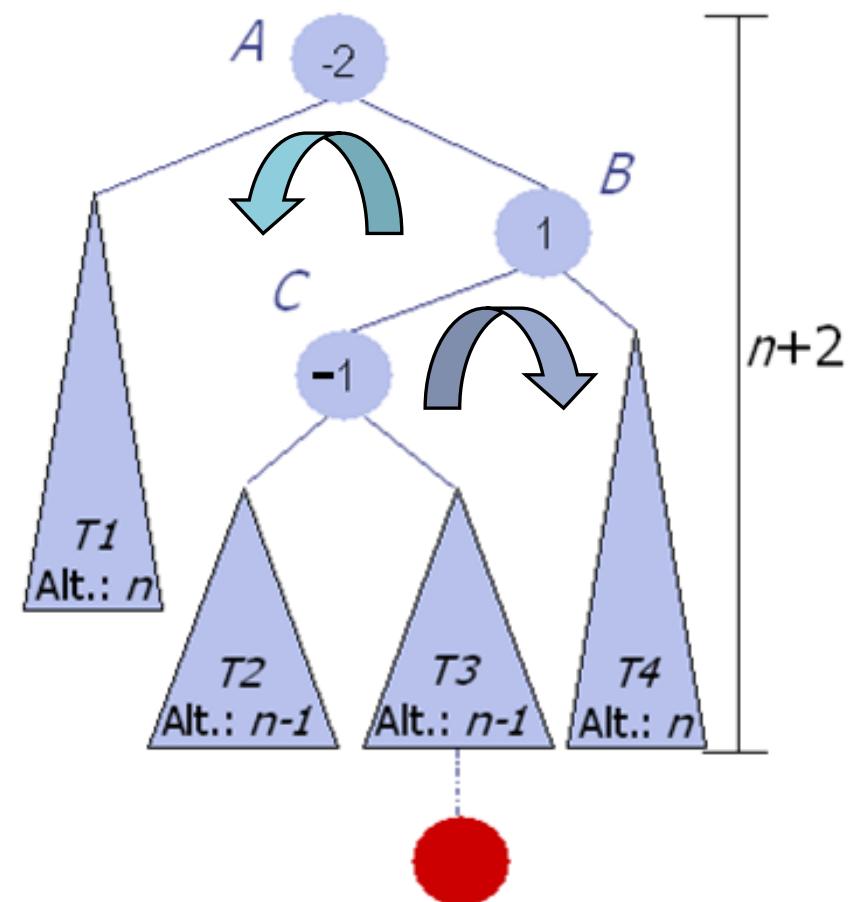
➤ Passo 2: rotação direita em A

- note que a altura final da subárvore continua sendo $n+2$
- funciona também se o novo nó tivesse sido inserido em T3



Árvores AVL - Rotação Dir./Esq.

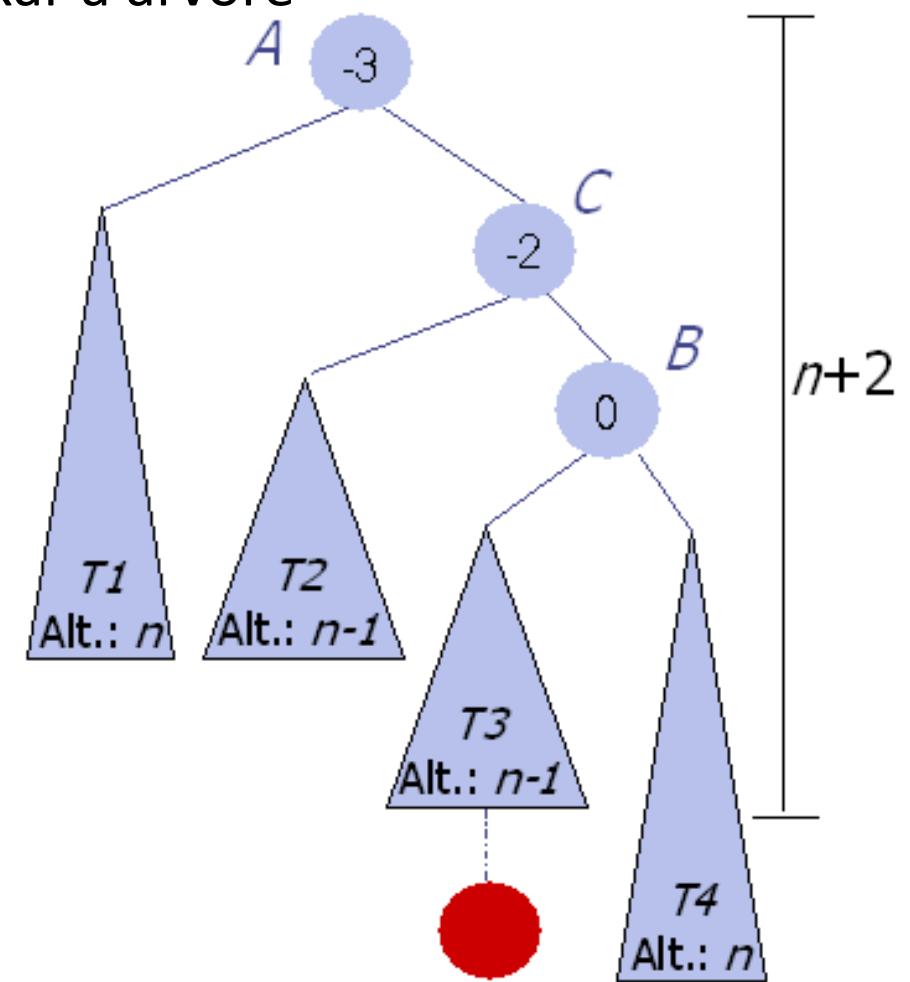
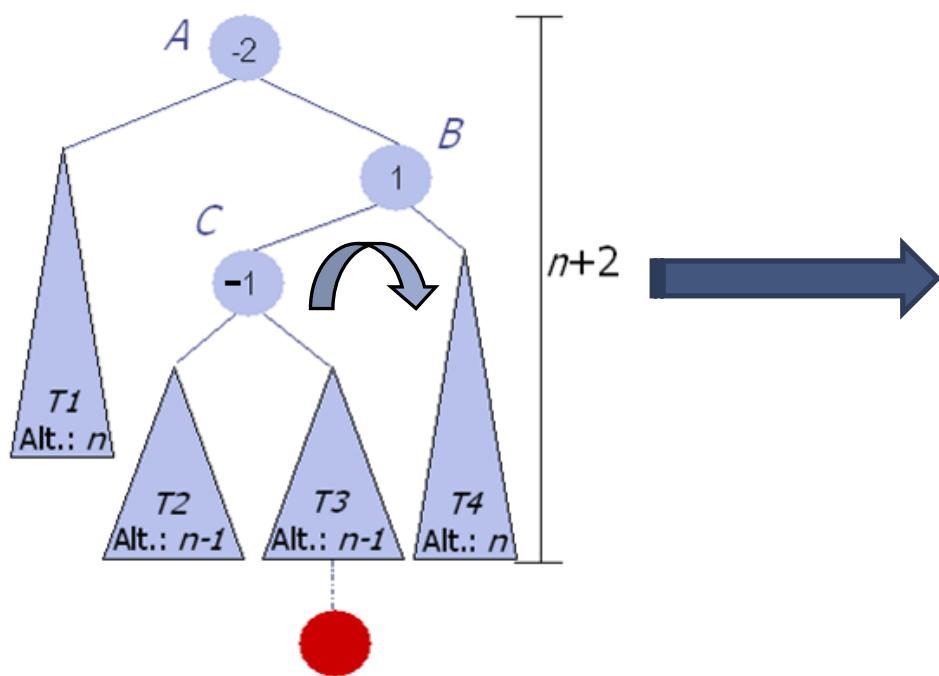
- Cenário inicial para **rotação dupla direita/esquerda**
 - T₁, T₂, T₃ e T₄ podem ser subárvores de qualquer altura, inclusive 0, ou subárvores vazias
 - A é o **nó mais jovem** a se tornar desbalanceado



Árvores AVL - Rotação Dir./Esq.

➤ Passo 1: rotação direita em B

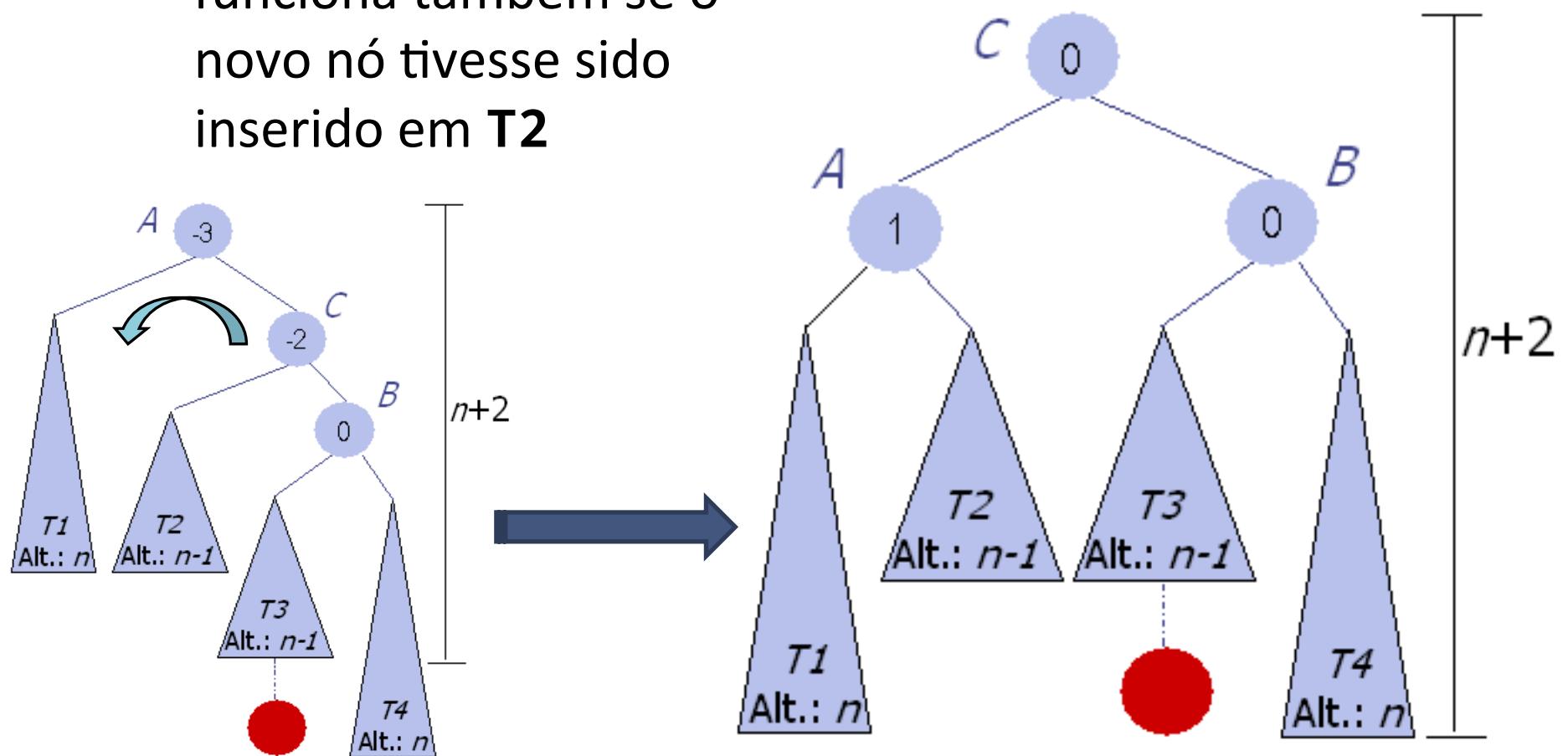
- a rotação direita parece deixar a árvore ainda mais desbalanceada
- entretanto...



Árvores AVL - Rotação Dir./Esq.

➤ Passo 2: rotação esquerda em A

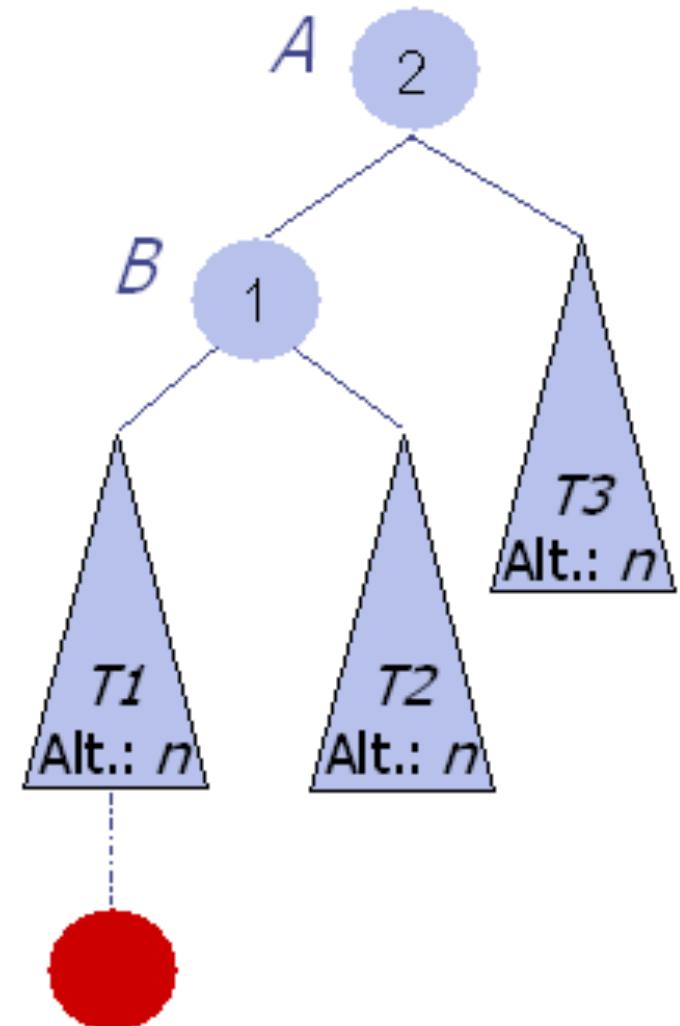
- note que a altura final da subárvore continua sendo $n+2$
- funciona também se o novo nó tivesse sido inserido em T2



Como decidir qual rotação usar?

- **Caso 1:**

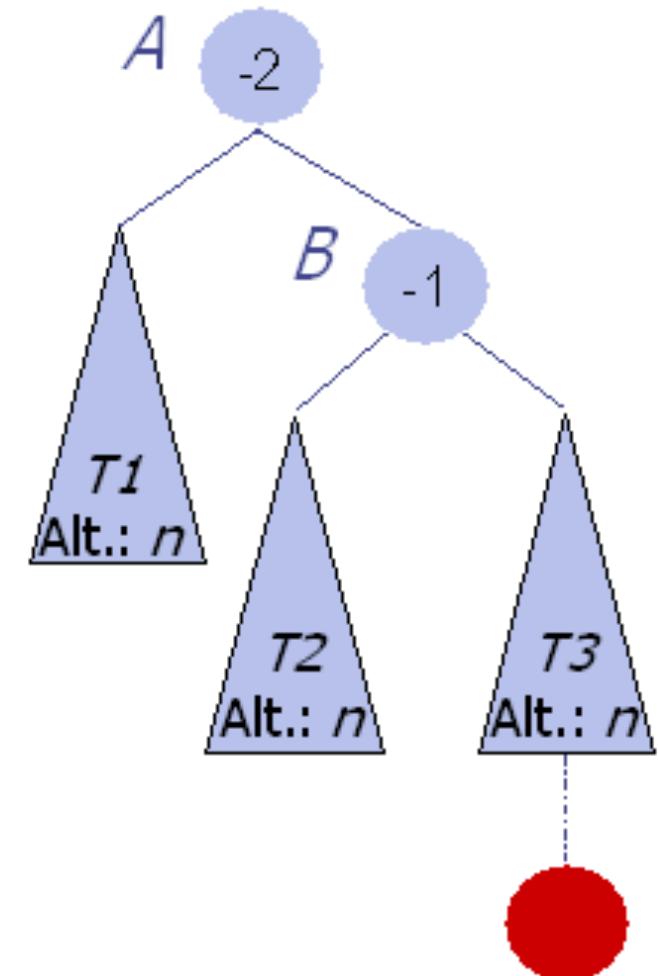
- os **sinais** do nó A e do nó B
são **iguais** => **rotação simples**
- o **fator de balanceamento**
do nó A (nó mais jovem a
se tornar desbalanceado) é
positivo => **rotação direita**



Como decidir qual rotação usar?

- Caso 2:

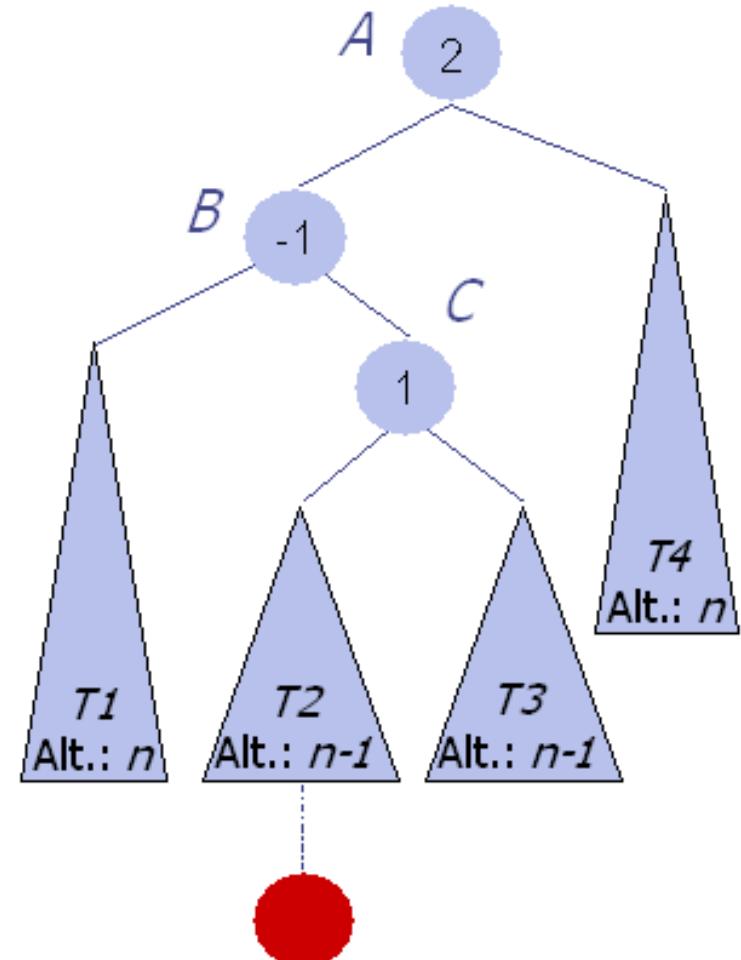
- os **sinais** do nó A e do nó B são **iguais** => **rotação simples**
- o **fator de balanceamento** do nó A (nó mais jovem a se tornar desbalanceado) é **negativo** => **rotação esquerda**



Como decidir qual rotação usar?

- Caso 3:

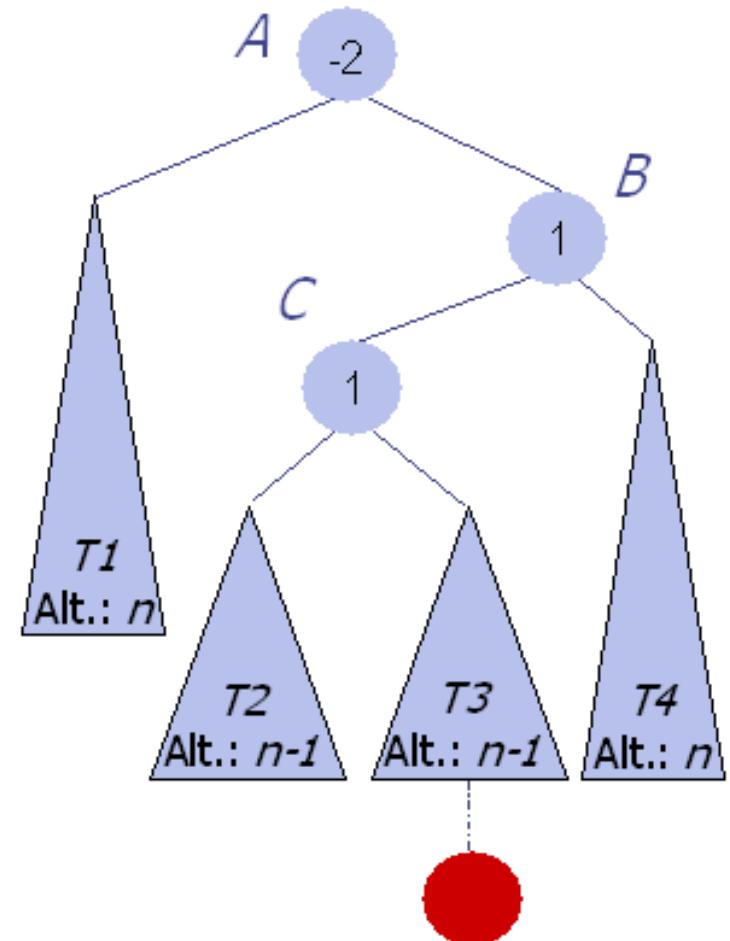
- os **sinais** do nó A e do nó B são **diferentes** => **rotação dupla**
- o **fator de balanceamento** do nó A (nó mais jovem a se tornar desbalanceado) é **positivo** => **rotação esquerda/direita**



Como decidir qual rotação usar?

- **Caso 4:**

- os **sinais** do nó A e do nó B são **diferentes** => **rotação dupla**
- o **fator de balanceamento** do nó A (nó mais jovem a se tornar desbalanceado) é **negativo** => **rotação direita/esquerda**





Exercício

- 1) Simule a inserção da seguinte sequência de valores em uma árvore AVL:

10, 7, 20, 15, 17, 25, 30, 5, 1

- faça o passo-a-passo: ilustre todos os estados da AVL a cada inserção e indique o fator de balanceamento de cada nó a cada passo



Exercício Extra – para entrega individual – somente presentes na aula...

- 2) Simule a inserção da seguinte sequência de valores em uma árvore AVL:

10, 5, 20, 1, 3, 4, 8, 30, 40, 35, 50, 45, 55, 51, 100

- faça o passo-a-passo: ilustre todos os estados da AVL a cada inserção e indique o fator de balanceamento de cada nó a cada passo