

# Cap. 8

## Seção 8.1

### 8.1.1

Como hipótese do exercício, suponha que  $V_{p^{m+1}} = V_{p^m}$  para algum  $m \geq 0$ , e por hipótese de indução seja  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  tal que  $V_{p^m} = V_{p^{m+k}}$ . Seja  $v \in V$  um vetor qualquer. Pelas hipóteses acima,

$$p^m(T)(v) = 0 \iff p^{m+1}(T)(v) = 0 \quad (1)$$

$$p^m(T)(p(T)(v)) = 0 \iff p^{m+k}(T)(p(T)(v)) = 0. \quad (2)$$

Mas:

$$p^m(T)(p(T)(v)) = p^{m+1}(T)(v)$$

$$p^{m+k}(T)(p(T)(v)) = p^{m+k+1}(T)(v)$$

assim, o lado direito de (1) é igual ao lado direito de (2), e portanto

$$p^{m+k+1}(T)(v) = 0 \iff p^m(T)(v) = 0$$

como queríamos. Para provar (8.1.5), note que como  $V_{p^i} \subseteq V_{p^{i+1}}$  e a dimensão de  $V$  é finita,  $\dim(V_{p^i}) \leq \dim(V_{p^{i+1}})$  e vale a igualdade se, e somente se,  $V_{p^i} = V_{p^{i+1}}$ . Assim,

$$V_{p^0} \subseteq V_p \subseteq V_{p^2} \subseteq \cdots \subseteq V_{p^n}$$

deve ser tal que  $\dim(V_{p^m}) = \dim(V_{p^{m+1}})$  para algum  $0 \leq m \leq n$ , caso contrário teríamos  $\dim(V_{p^{n+1}}) > n = \dim(V)$ , um absurdo. Usando o resultado acima, concluímos que  $V_p^\infty = V_{p^n} = V_{p^m}$ .

# Cap. 9

## Seção 9.2

### 9.2.5

Seja  $W = \mathbb{F}^m$  e considere  $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$  dado por  $T(v) = \sum_{i=1}^m f_i(v)e_i$ , onde  $\{e_i\}_{i=1}^m$  é a base canônica de  $W$ . Suponha por contradição que  $T$  não é sobrejetora, de forma que poderíamos escrever  $W = U \oplus T(V)$  onde  $U \neq \{0\}$ . Seja  $g \in W^*$  o funcional linear definido por  $g(u) = 1$  para todo  $u$  em uma base  $\{u_i\}_{i \in I}$  de  $U$  e  $g(w) = 0$  se  $w \in T(V)$ , ou seja,  $g \neq 0$  e  $g \circ T = 0$ . Então:

$$\begin{aligned}(g \circ T)(v) &= g\left(\sum_{i=1}^m f_i(v)e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^m g(e_i)f_i(v) \\ \implies g \circ T &= \sum_{i=1}^m g(e_i)f_i = 0\end{aligned}$$

Mas como  $\{e_i\}_{i=1}^m$  é base de  $W$ ,  $g(e_i) \neq 0$  para algum  $i$ ; ou seja, um dos coeficientes da última combinação linear é diferente de zero, contradizendo a hipótese que  $\{f_i\}_{i=1}^m$  é l.i.. Portanto,  $T$  é sobrejetora e basta, para cada  $1 \leq j \leq m$ , escolher  $v$  tal que  $T(v) = e_j$ .

### 9.2.11

- (a) Claro que  $0 \in V_\lambda$ , e se  $a, b \in V_\lambda$ , então  $T(a + \gamma b) = T(a) + \gamma T(b) = \lambda(T)a + \gamma \lambda(T)b = \lambda(T)(a + \gamma b)$  para toda  $T \in \mathcal{T}$ . Agora, seja  $V'_\lambda = \{v \in V : T(v) = \lambda(T)v, \forall T \in \mathbb{T}\}$ . Claro que  $V'_\lambda \subset V_\lambda$ . Se  $v \in V_\lambda$ , então para toda  $Q = \sum_i x_i T_i$  com  $T_i \in \mathcal{T}$ ,

$$Q(v) = \sum_i x_i T_i(v) = \sum_i x_i \lambda(T_i)v = \lambda\left(\sum_i x_i T_i\right)v = \lambda(Q)v.$$

- (b) Suponha que  $\lambda, \lambda' \in \mathbb{T}^*$  com  $\lambda \neq \lambda'$ . Seja  $v \in V_\lambda \cap V_{\lambda'}$ . Então existe ao menos um

$T \in \mathbb{T}$  tal que  $\lambda(T) \neq \lambda'(T)$ . Mas pelo item (a) sabemos que  $T(v) = \lambda'(T)v = \lambda(T)v$ , logo  $v = 0$ .

- (c) Seja  $\{\tau_i\}_{i \in \mathcal{I}}$  a referida base de  $\mathbb{T}$ , e note que a questão é equivalente a existir uma base  $\nu = \{v_j\}_{j \in \mathcal{J}}$  de  $V$  em que os elementos de  $\tau$  são simultaneamente diagonais: se isso é verdade, para cada  $j \in \mathcal{J}$ , seja  $\lambda_j \in \mathbb{T}^*$  o funcional definido por  $\lambda_j(\tau_i) = ([\tau_i]_\nu^\nu)_{j,j}$ . Assim,  $v_j \in V_{\lambda_j}$ , e como  $\{v_j\}_{j \in \mathcal{J}}$  é base, fica claro que  $V = \bigoplus_{j \in \mathcal{J}} V_{\lambda_j}$ . Por outro lado, se  $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{T}^*} V_\lambda$ , tomando  $\alpha_j$  base de  $V_{\lambda_j}$  para todo  $j \in \mathcal{J}$  a família  $\nu = \bigcup_{j \in \mathcal{J}} \alpha_j$  é uma base de  $V$  com  $[\tau_i]_\nu^\nu$  diagonal para todo  $i \in \mathcal{I}$ .

Agora, precisamos mostrar que  $\{v_j\}_{j \in \mathcal{J}}$  existe. Fixando  $i \in \mathcal{I}$ , seja  $\omega = \{w_j\}_{j \in \mathcal{J}}$  base de  $V$  que diagonaliza  $\tau_i$  e para cada  $j \in \mathcal{J}$  defina  $a_j = ([\tau_i]_\omega^\omega)_{j,j}$ . Como da primeira hipótese temos  $\tau_{i'}\tau_i = \tau_i\tau_{i'}$  para todo  $i' \in \mathcal{I}$  (estão no subespaço gerado por  $T$ ), vale  $\tau_i(\tau_{i'}w_j) = \tau_{i'}\tau_iw_j = a_j(\tau_{i'}w_j)$ , ou seja, o subespaço  $\mathcal{N}(\tau_i - a_j\text{id})$  é invariante por  $\tau_{i'}$ .

### 9.2.12

Seja  $K = \mathbb{F}^m$  e considere  $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, K)$  dado por  $T(v) = \sum_{i=1}^m f_i(v)e_i$ , onde  $\alpha = \{e_i\}_{i=1}^m$  é a base canônica de  $K$ . Claro que  $W = \bigcap_{j=1}^m \mathcal{N}(f_j) = \mathcal{N}(T)$ . Por isso,  $V/W \cong T(V) \subset K$ , e segue que  $\dim(V/W) \leq \dim(K) = m$ . Além disso, vimos no exercício 9.2.5 que se  $\{f_i\}_{i=1}^m$  for l.i., então  $T(V) = K$ , e reciprocamente, se  $\dim(V/W) = m$  então  $T$  é sobrejetora; nesse caso, considere  $a_i \in \mathbb{F}$  tal que  $a_1f_1 + \dots + a_mf_m = 0$ . Podemos definir um funcional  $g \in K^*$  por  $g(e_i) = a_i$  para  $1 \leq i \leq m$ , e dessa forma:

$$(T^tg)(v) = g\left(\sum_{i=1}^m f_i(v)e_i\right) = \sum_{i=1}^m g(e_i)f_i(v) = \sum_{i=1}^m a_if_i(v) = 0$$

Mas como  $T$  é sobrejetora, para todo  $1 \leq i \leq m$  existe  $v_i \in V$  tal que  $T(v_i) = e_i$ , de forma que  $a_i = g(e_i) = (T^tg)(v_i) = 0$ , ou seja,  $\{f_i\}_{i=1}^m$  é l.i..

## Seção 9.4

### 9.4.6

Seja  $\psi(v, w) = \langle v, w \rangle$ . abc