Exercício 9.2.11

(a) Claro que $0 \in V_\lambda$, e se $a, b \in V_\lambda$, então $T(a + \gamma b) = T(a) + \gamma T(b) = \lambda(T)a + \gamma\lambda(T)b = \lambda(T)(a + \gamma b)$ para toda $T \in \mathcal{T}$. Agora, seja $V'_\lambda = \{v \in V : T(v) = \lambda(T)v,\ \forall\, T \in \mathbb{T}\}$. Claro que $V'_\lambda \subset V_\lambda$. Se $v \in V_\lambda$, então para toda $Q = \sum_i x_i T_i$ com $T_i \in \mathcal{T}$,

$$Q(v) = \sum_i x_i T_i(v) = \sum_i x_i \lambda(T_i) v = \lambda\left(\sum_i x_i T_i\right) v = \lambda(Q)v.$$

(b) Suponha que $\lambda, \lambda' \in \mathbb{T}^*$ com $\lambda \neq \lambda'$. Seja $v \in V_\lambda \cap V_{\lambda'}$. Então existe ao menos um $T \in \mathbb{T}$ tal que $\lambda(T) \neq \lambda'(T)$. Mas pelo item (a) sabemos que $T(v) = \lambda'(T)v = \lambda(T)v$, logo $v = 0$.

(c) Seja $\{\tau_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ a referida base de $\mathbb{T}$, e note que a questão é equivalente a existir uma base $\nu = \{v_j\}_{j \in \mathcal{J}}$ de V em que os elementos de τ são simultaneamente diagonais: se isso é verdade, para cada $j \in \mathcal{J}$, seja $\lambda_j \in \mathbb{T}^*$ o funcional definido por $\lambda_j(\tau_i) = ([\tau_i]^\nu_\nu)_{j,j}$. Assim, $v_j \in V_{\lambda_j}$, e como $\{v_j\}_{j \in \mathcal{J}}$ é base, fica claro que $V = \bigoplus_{j \in \mathcal{J}} V_{\lambda_j}$. Por outro lado, se $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{T}^*} V_\lambda$, tomando α_j base de V_{λ_j} para todo $j \in \mathcal{J}$ a família $\nu = \bigcup_{j \in \mathcal{J}} \alpha_j$ é uma base de V com $[\tau_i]^\nu_\nu$ diagonal para todo $i \in \mathcal{J}$.

Agora, precisamos mostrar que $\{v_j\}_{j \in \mathcal{J}}$ existe. Fixando $i \in \mathcal{I}$, seja $\omega = \{w_j\}_{j \in \mathcal{J}}$ base de V que diagonaliza τ_i e para cada $j \in \mathcal{J}$ defina $a_j = ([\tau_i]^\omega_\omega)_{j,j}$. Como da primeira hipótese temos $\tau_{i'}\tau_i = \tau_i\tau_{i'}$ para todo $i' \in \mathcal{I}$ (estão no subespaço gerado por $\mathcal{T}$), vale $\tau_i(\tau_{i'} w_j) = \tau_{i'}\tau_i w_j = a_j(\tau_{i'} w_j)$, ou seja, o subespaço $\mathcal{N}(\tau_i - a_j \mathrm{id})$ é invariante por $\tau_{i'}$.