Monitoria de MA327
semana 4

Monitor: Lucas

September 8, 2021

Exercício 3.48 *Considere os seguintes subespaços vetoriais de* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ 3

$$U = \{\, p(x) = a + bx + cx^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \; / \; a - 2c = 0 \,\} \qquad [2+x^2, x]$$

$+$

$$W = [1 - x \,,\, x - x^2]$$

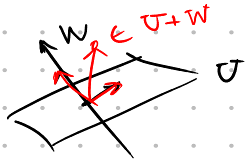
Determine uma base para o subespaço $U + W$.

$2c + bx + cx^2$

$\in P_2(\mathbb{R}) \quad c(2+x^2) + bx$

$\to (1,0,2)$

$\to (0,1,0)$



$U + W = \{u + w : u \in U,\ w \in W\}$

$U + W = [1 - x,\ x - x^2,\ \cancel{2 + x^2},\ x]$

Esse conjunto ainda gera $U + W$?

$2 + x^2 = a(1-x) + b(x - x^2) + cx$

$= 2(1-x) + (-1)(x - x^2) + 3x$

$(1,0,2) = a(0,-1,1) + b(-1,1,0) + c(0,1,0)$

$+2 \quad -1 \quad 3$

$1-x \rightsquigarrow (0,-1,1)$ $\quad x-x^2 \rightsquigarrow (-1,1,0)$ $\quad 2+x^2 \rightsquigarrow (1,0,2)$

$x \rightsquigarrow (0,1,0)$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & -1^{\,2} & 1 \\ -1^{\,-1} & 1^{\,1} & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1^{\,-3} & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} -2 \\ +1 \\ \\ -3 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\{1, x, x^2\}$

$$u \neq v$$

$$\underbrace{/\!/}_{} = \underbrace{/\!/}_{}$$

$$(x_1 + x_2, 0)$$

$$u + v = (x_1 + x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0) = (x_2 + x_1, 0) = v + u$$

$$\|$$

$$(x_2, y_2) + (x_1, y_1)$$

$$
\begin{array}{ccc}
 & & 1 \quad\quad n \quad\quad n \\
n & \left\{ \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{12} & x_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & \cdots & & x_{nn} \end{bmatrix} \right. & \begin{array}{l} \\ n-1 \\ n-3 \\ \vdots \\ 1 \end{array}
\end{array}
\qquad
a \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}
$$

$$
\frac{(1+n)n}{2} \qquad n = 2 \qquad \frac{2(3)}{2} = 3
$$

$$
\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}
$$

Exercício 4.9

Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por:

$$T(x, y, z) = (x - y - z, 2z - x)$$

Determine uma base bara $\ker(T)$ e uma base para $\operatorname{im}(T)$

Resolução

Núcleo

Por definição,

$$\ker(T) = \{(x, y, z) \mid T(x, y, z) = 0\}.$$

Temos:

$$\begin{aligned} T(x, y, z) = 0 &\iff (x - y - z, 2z - x) = (0, 0) \\ &\iff x = y + z \wedge 2z = x \\ &\iff x = y + z \wedge 2z = y + z \\ &\iff x = y + z \wedge z = y \\ &\iff x = 2y \wedge z = y \end{aligned}$$

Assim, $\ker(T) = \{(2y, y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$. Uma base desse espaço é $\{(2, 1, 1)\}$.

Imagem

Podemos escrever T da seguinte forma:

$$T(x, y, z) = x(1, -1) + y(-1, 0) + z(-1, 2)$$

Isso mostra que $\mathrm{im}(T) = [(1, -1), (-1, 0), (-1, 2)]$. Agora, notamos que $\mathrm{im}(T) = \mathbb{R}^2$, pois:

$$\begin{aligned}
(1, 0) &= -1(-1, 0) && \in [(1, -1), (-1, 0), (-1, 2)] \\
(0, 1) &= -1(1, -1) + (-1, 0) && \in [(1, -1), (-1, 0), (-1, 2)]
\end{aligned}$$

Assim, $\{(1, 0), (0, 1)\}$ é base de $\mathrm{im}(T)$.

Exercício 4.10

Seja $U \subset M_3(\mathbb{R})$ o subespaço das matrizes diagonais. Considere a transformação linear $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to U$ definida por:

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{bmatrix} a - b + 2c & 0 & 0 \\ 0 & 2a + b & 0 \\ 0 & 0 & -a + 2b + 2c \end{bmatrix}.$$

Determine uma base para $\ker(T)$ e uma base para $\operatorname{im}(T)$

Resolução

Núcleo

$T(a + bx + cx^2) = 0$, se, e somente se,

$$\begin{cases} a - b + 2c = 0 \\ 2a + b = 0 \\ -a + 2b + 2c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = b - 2c \\ 2(b-2c) + b = 0 \\ -(b-2c) + 2b + 2c = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = b - 2c \\ 3b = 4c \\ b = -4c \end{cases}$$

$$\iff a = b = c = 0$$

Então $\{\}$ é uma base (o conjunto vazio).

Imagem

Podemos escrever T como:

$$\begin{aligned} T(a+bx+cx^2) &= \begin{bmatrix} a-b+2c & 0 & 0 \\ 0 & 2a+b & 0 \\ 0 & 0 & -a+2b+2c \end{bmatrix} \\ &= a\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &=: aA + bB + cC \end{aligned}$$

Ou seja, $\mathrm{im}(T) = [A, B, C]$. Já vimos que $aA + bB + cC = 0 \implies a = b = c = 0$. Isso significa precisamente que $\{A, B, C\}$ é um conjunto LI, portanto é uma base (já que ele também gera o espaço $\mathrm{im}(T)$).