Álgebra $\mathbb{L}$inear

Monitoria de 18 de agosto 13h

PAD: Lucas

August 17, 2021

3.2

$$\lambda \begin{bmatrix} o & \\ o & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} o & \\ o & \end{bmatrix}$$

Exercício 3.2 *Mostre que o conjunto de todas as matrizes reais de ordem* n, *que denotamos por* $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, *com a operação de adição de elementos,* $A = [a_{ij}]$ *e* $B = [b_{ij}]$, *definida por:* $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$ *e a operação de multiplicação por escalar definida por:* $\lambda A = [\lambda a_{ij}]$, *é um espaço vetorial real.*

Resolução

$(V, +, \cdot)$ Ser espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ significa:

- Assoc. na soma

$$(v+w)+x = v+(w+x)$$

- Existe $0_V \in V$

$$0_V + v = v + 0_V = v$$

- Elemento inverso soma:

$\forall v \in V, \exists \bar{v}$ tal que $v+\bar{v} = \bar{v}+v = 0_V$

- Soma comutativa

$a+b = b+a$

Soma

Produto por escalar em $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}, \dots\}$

$\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$ precisa cumprir:

Para todos $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $a, b, v \in V$

$\sim \lambda \cdot (a+b) = \lambda \cdot a + \lambda \cdot b$

$\sim 1_{\mathbb{F}} \cdot v = v$

$\sim (\lambda \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$

Multiplicação por escalar

3.4

$\boxed{\begin{matrix} + \\ \oplus \end{matrix}}$ $\boxed{\begin{matrix} \cdot \\ \odot \end{matrix}}$

Exercício 3.4 *Considere o conjunto* $V = \{ x \in I\!R \ / \ x > 0 \}$. *Definimos as seguintes operações em* V:

1. $x \oplus y = xy \,, \quad \forall\, x, y \in V;$
2. $\alpha \odot x = x^{\alpha} \,, \quad \forall\, x \in V, \quad \forall\, \alpha \in I\!R.$

Verifique se $(V, \oplus, \odot)$ *é um espaço vetorial real.* → É sim

$\theta_v \in V$

$\theta_v \oplus x = x$

$\theta_v x = x$

$\theta_v = 1 \in \mathbb{R}$

$x \oplus \theta_v \stackrel{?}{=} x$

$x \cdot \theta_v = x \cdot 1$ ✓

$= x$

Zero existe

Inverso aditivo ✓

$x \in V$

$\bar{x} \in V$ tal que $x \oplus \bar{x} = \theta_v$

$x \bar{x} = 1$

$\bar{x} = 1/x$

$\bar{x} \oplus x = \theta_v$

Resolução

Associatividade

$\forall\ x, y, z \in V, \quad x \oplus (y \oplus z) \overset{?}{=} (x \oplus y) \oplus z$

$= x(yz) = (xy)z$ ✓

Comutatividade

$xy = yx$ ✓

Distributividade $\quad \mu \in \mathbb{F} = \mathbb{R}, \quad \underline{a, b \in V}$

$\mu \odot (a \oplus b) = \mu \odot (ab) = (ab)^{\mu} = a^{\mu} . b^{\mu} = (a^{\mu}) \oplus (b^{\mu})$ ✓

$= (\mu \odot a) \oplus (\mu \odot b)$

$= (\mu \odot a) \oplus (\mu \odot b)$

Identidade

$1 \odot x = x^1 = x$ ✓

$1 \odot x = x$

Associativo: $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad x \in V$

$(\lambda\mu) \odot x = x^{(\lambda\mu)} = (x^{\mu})^{\lambda}$ ✓

$= \lambda \odot (\mu \odot x)$

$= \lambda \odot (x^{\mu})$

$= \lambda \odot (\mu \odot x)$

3.5

Exercício 3.5 *Sejam* V *e* W *espaços vetoriais sobre o corpo* $\mathbb{F}$. *Mostre que*

$$Z = V \times W = \{ (v, u) \ / \ v \in V \quad e \quad w \in W \}$$

munido das seguintes operações:

$$(v_1 , w_1) + (v_2 , w_2) = (v_1 + v_2 , w_1 + w_2)$$

$$\lambda(v , w) = (\lambda v , \lambda w) \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{F}$$

é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$.