

Monitoria de MA327

semana 2

Lucas Viana Reis

August 25, 2021

Exercício 3.23 Considere os seguintes subespaços

$$U = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y = 0 \text{ e } z - t = 0 \}$$

$$W = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - y - z + t = 0 \}$$

Pede-se:

- (a) Determine um sistema de geradores para o subespaço $U \cap W$.
- (b) Determine um sistema de geradores para o subespaço $U + W$.
- (c) O subespaço $U + W$ é uma soma direta? Justifique sua resposta.

Parte (a)

Se $(x, y, z, t) \in U \cap W$, então:

$$\begin{array}{l} 1. \left\{ \begin{array}{l} x+y=0 \\ z-t=0 \end{array} \right\} \text{ def. } U \\ 2. \left\{ \begin{array}{l} x+y=0 \\ z-t=0 \end{array} \right\} \text{ def. } U \\ 3. \left\{ x-y-z+t=0 \right\} \text{ def. } W \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x+y=0 \\ z-t=0 \\ x-y=0 \end{array} \right. \quad (3. - 2.) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x=y=0 \\ z-t=0 \end{array} \right.$$

Então $U \cap W = \{(0, 0, t, t) : t \in \mathbb{R}\}$.

Assim, um exemplo de sistema de geradores é $\{(0, 0, 1, 1)\}$,

pois $\{\lambda(0, 0, 1, 1) : \lambda \in \mathbb{R}\} = U \cap W$.

Parte (b)

Vamos encontrar um sist. de geradores de $U+W$. Por definição,

$$U+W = \{u+w : u \in U, w \in W\}$$

→ Lema: Suponha que $[S_1]=U$, $[S_2]=W$. Então $[S_1 \cup S_2]=U+W$

Usando esse fato, precisamos apenas encontrar um sistema de geradores de U , e um de W . A união será um sistema gerador de $U+W$.

→ [Caso U] Para U , temos:

$$(x, y, z, w) \in U \iff \begin{cases} x+y=0 \\ z-t=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-y \\ z=t \end{cases} \iff (x, y, z, t) = (-y, y, t, t) \\ \text{para } y, t \in \mathbb{R}$$

Então $U = \{(-y, y, t, t) : t, y \in \mathbb{R}\}$. Um possível sist. de geradores seria $\{(-1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}$.

→ [Caso W]. Nesse caso,

$(x, y, z, t) \in W \Leftrightarrow x - y - z + t = 0 \Leftrightarrow t = y - x + z$, para $y, x, z \in \mathbb{R}$. Então podemos escrever $W = \{(x, y, z, y - x + z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$. Um possível sistema de geradores seria $\{(1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1)\}$.

Assim, a união $\{(1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, 1), (-1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}$ é sist. gerador de $U + W$.