Monitoria de MA327
semana 6

Monitor: Lucas

September 22, 2021

Exercício 4.42

Considere o operador linear T sobre $\mathbb{R}^2$ definido por

$$T(x, y) = (x + 2y, 2x + 4y).$$

Determine $[T]_{\beta}^{\beta}, [T]_{\alpha}^{\alpha}, [T]_{\beta}^{\alpha}$ e $[T]_{\alpha}^{\gamma}$, onde as bases β, α e γ são dadas por:

$$\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}, \alpha = \{(1, -1), (0, 1)\} \text{ e } \gamma = \{(1, -1), (1, 1)\}.$$

Resolução

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

(dica: aplique os vetores da base β *em* T*, e o resultado já sai na base* β*)*

Agora, notamos que podemos escrever:

$$[T]_\alpha^\beta = [I]_\alpha^\beta [T]_\beta^\beta$$
$$[T]_\beta^\alpha = [T]_\beta^\beta [I]_\beta^\alpha$$
$$[T]_\alpha^\gamma = [T]_\alpha^\beta [I]_\beta^\gamma$$

então o maior trabalho é encontrar as mudanças de base.

Encontrando as matrizes mudança de base

Precisamos encontrar: $[I]^{\beta}_{\alpha}$, $[I]^{\alpha}_{\beta}$ e $[I]^{\gamma}_{\beta}$.

Temos:

$$[I]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[I]^{\gamma}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(pois α e γ já foram dados nas coordenadas da base canônica β)

Para encontrar $[I]^{\beta}_{\alpha}$, invertemos a primeira matriz.

$$[I]^{\beta}_{\alpha} = ([I]^{\alpha}_{\beta})^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 1 - 0 \cdot (-1)} \begin{bmatrix} 1 & -0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$[T]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$[T]_\alpha^\gamma = [T]_\alpha^\beta \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$