Monitoria de MA327
semana 3

Monitor: Lucas

September 1, 2021

(Callioli). Seja V o conjunto dos pares ordenados de números reais. V não é um espaço vetorial em relação a nenhum dos dois seguintes pares de operações sobre V :
a) (x1, y1) + (x2, y2) = (x1 + x2, y1 + y2) e α(x, y) = (x, αy);
b) (x1, y1) + (x2, y2) = (x1, y1) e α(x, y) = (αx, αy).
Diga em cada caso quais dos 8 axiomas não se verificam.

$$\alpha(\beta(x,y)) = (x,(\alpha\beta)y) = (\alpha\beta)(x,y) \quad ✓$$

$$= (x, \alpha(\beta y))$$

$\alpha \qquad \alpha$

$$(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u \;\star$$

$$u = (x,y)$$

$$(\alpha+\beta)(x,y) = (x,(\alpha+\beta)y) = (\overset{1}{x}, \alpha y + \beta y) \neq$$

$$\star = \alpha(x,y) + \beta(x,y) = (x,\alpha y) + (x,\beta y) = (\overset{2}{2x}, (\alpha+\beta)y)$$

$$\overbrace{\alpha(u+v)}^{1.} = \overbrace{\alpha u + \alpha v}^{2.}$$

$$u = (x,y) \qquad v = (a,b)$$

1.) $\alpha((x,y)+(a,b)) = \alpha(x+a,\ y+b) = (x+a,\ \alpha(y+b))$

$=$ ✓

2.) $\alpha(x,y) + \alpha(a,b) = (x,\ \alpha y) + (a,\ \alpha b) = (x+a,\ \alpha(y+b))$

b) $u+v = v+u$

$u \neq v$

$(1,0) \neq (0,1)$ ✗

$u+(v+w) = (u+v)+w$

$u+v \qquad u+w$

$u = u$ ✓

$u+(-u) = 0$

$u = 0$ ✗

$(1,0) \neq 0$

$\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$

$\alpha(u) \qquad \alpha u$ ✓

$\alpha u = \alpha u$

$(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$

$(\alpha+\beta)u = \alpha u$

$\alpha = \beta = 1 \qquad u = (1,0)$ ✗

$(1+1)\cdot(1,0) \neq 1\cdot(1,0)$

$(2,0) \neq (1,0)$

$(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$ ✓

$1 \cdot u = u$ ✓

$0+u = u+0 = u$

$0 \neq u \qquad u$ ✗

3.ª Questão (Callioli). No espaço vetorial $M_{3x2}(\mathbb{R})$, consideremos os vetores

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Existem $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ de maneira que $A = t_1 B + t_2 C$?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t_1 \\ 2t_1 & 2t_1 \\ t_1 & t_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_2 & 2t_2 \\ t & 0 \\ 0 & -t_2 \end{pmatrix}$$

- $t_2 = 1$
- $t_1 = 0$
- $0 = 0 + 0$
- $0 \neq 0 - 1 = -1$

Falso (não existem)

Exercício 4.3

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ associada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Considere o círculo unitário centrado na origem S. Faça a representação gráfica da imagem do círculo S pela transformação linear T.

Resolução 1 - desenhando

Quais pontos estão em S?

Dica: podemos parametrizar S por $(\cos t, \sin t)$ para $t \in \mathbb{R}$.

Como é a imagem desses pontos?

Vamos aplicar a função T!

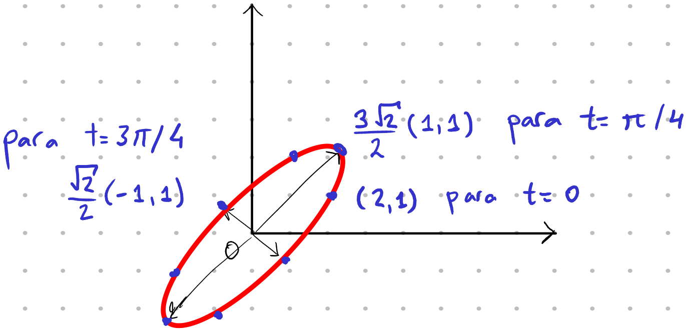
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos t + 1\sin t \\ 1\cos t + 2\sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

podemos testar alguns pontos, como $t \in \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2 \dots\}$.

$\pi/4,\ 3\pi/4, \dots$

Esboço

(fazer vários pontos)



É uma elipse?

Sim! Por que? Para justificar, eu precisaria falar de autovetores ou transformações inversas...

Uma intuição:

Existem duas direções "especiais" para a transformação T:

1. Se $v = \lambda(1, 1)$, então $T(v) = 3v$.
2. Se $v = \lambda(1, -1)$, então $T(v) = v$.

Esses eixos são ortogonais, e o cículo é esticado ~~em~~ para formar uma elipse ao longo desses eixos. Mais tarde, veremos que eles são autovetores.

Exercício 4.4

Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$T(x, y) = (2x - y, -x + 2y).$$

Determine uma base para cada subespaço:

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid T(x, y) = 3(x, y)\}$$
$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid T(x, y) = (x, y)\}$$

Resolução

Para o subespaço W:

Se $T(x,y) = 3(x,y)$, então:

$$
\begin{aligned}
&(2x - y, -x + 2y) = (3x, 3y) \\
\iff\ & 2x - y = 3x \wedge -x + 2y = 3y \\
&\iff y = -x \wedge 4x - 2y = 0 \\
&\iff y = -x \wedge 4x - 2(-x) = 6x = 0 \\
&\iff x = y = 0
\end{aligned}
$$

Então $\{\}$ é base (isso mesmo, o conjunto vazio).

Para o subespaço U:

Se $T(x, y) = (x, y)$, então:

$$\begin{aligned}
& (2x - y, -x + 2y) = (x, y) \\
\iff & (2x - y, -x + 2y) - (x, y) = (0, 0) \\
\iff & (x - y, -x + y) = (0, 0) \\
\iff & x = y \wedge x = y
\end{aligned}$$

Chamando $x = y$ de t, então

$$U = \{(t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

que possui base $\{(1, 1)\}$.

Exercício 4.6

Determine a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ tal que:

$$T(1,1) = x^2 - 1 \qquad\qquad T(1,-1) = x^3 + 1.$$

Resolução

Vamos encontrar $T(1,0)$ e $T(0,1)$ para determinar os valores de T na base canônica:

1. pela linearidade de T, sabemos que

$$T(1,0) = \frac{T(2,0)}{2} = \frac{T(1,1) + T(1,-1)}{2}$$

2. da mesma forma,

$$T(0,1) = \frac{T(0,2)}{2} = \frac{T(1,1) - T(1,-1)}{2}$$

Falta substituir $T(1,1)$ e $T(1,-1)$.

Pela linearidade de T,

$$T(a,b) = T(a,0) + T(0,b) = aT(1,0) + bT(0,1)$$

$\square$

observação

(obs.: em geral, podemos resolver um sistema linear para obter os vetores da base canônica como combinação linear dos vetores dados pela questão.)