Álgebra Linear

Monitoria de 18 de agosto 13h

PAD: Lucas

August 17, 2021

1.1

Exercício 1.1 *Verifique se* $(E, \star)$ *tem uma estrutura de grupo abeliano. Em caso negativo, dizer quais propriedades não são satisfeitas.*

(a) $E = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2 \cdots\}$ *e* $x \star y = x + y$

(b) $E = \mathbb{Z}$ *e* $x \star y = x + y - 1$

(c) $E = \mathbb{Z}$ *e* $x \star y = x + y + 1$

(d) $E = \mathbb{Z}$ *e* $x \star y = 2 \times x + y$

(e) $E = \mathbb{Z}$ *e* $x \star y = x \times y$

onde $+$ *indica a operação usual de adição e* $\times$ *indica a operação usual de multiplicação.*

Resolução

1.2

Exercício 1.2 *Considere o conjunto dos números reais* $\mathbb{R}$ *munido da operação* $\star$ *definida por* $x \star y = x + y + 4$. *Mostre que* $(\mathbb{R}, \star)$ *tem uma estrutura de grupo comutativo.*

Resolução

1.3

Exercício 1.3 *Considere o conjunto dos números reais* $\mathbb{R}$ *munido da operação* $\star$ *definida por* $x \star y = x + 2 \times y - 4$. *Verifique se* $(\mathbb{R}, \star)$ *tem uma estrutura de grupo comutativo. Em caso negativo, dizer quais propriedades não são satisfeitas.*

Resolução

1.5

Exercício 1.5 *Considere o conjunto dos números reais positivos* $\mathbb{R}^+$ *munido da operação* $\star$ *definida por* $x \star y = x + y - 6$*. Verifique se* $(\mathbb{R}^+, \star)$ *possui uma estrutura de grupo comutativo.*

Resolução

1.7

Exercício 1.7 *Verifique se* $(\mathbb{M}_n(\mathbb{R}), \star)$ *tem uma estrutura de grupo multiplicativo, onde* $\star$ *é a operação usual de multiplicação de matrizes.*

Resolução

1.12

Exercício 1.12 *Considere o conjunto* $G = \{\, e, a, b, c \,\}$. *Se* $(G, \star)$ *tem uma estrutura de grupo, complete a tabela abaixo.*

⋆	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a			
b	b	c		
c	c	e	a	

A regra de operação na tabela é de forma que o elemento $a_{ij} = a_i \star a_j$.

Resolução

3.2

$$\lambda \begin{bmatrix} 0 & \\ 0 & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \\ 0 & \end{bmatrix}$$

Exercício 3.2 *Mostre que o conjunto de todas as matrizes reais de ordem n, que denotamos por $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, com a operação de adição de elementos, $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$, definida por: $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$ e a operação de multiplicação por escalar definida por: $\lambda A = [\lambda a_{ij}]$, é um espaço vetorial real.*

Resolução

$(V, +, \cdot)$ Ser espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ significa:

- Assoc. na soma

$$(v+w)+x = v+(w+x)$$

- Elemento inverso soma:

$\forall v \in V, \exists \bar{v}$ tal que $v+\bar{v} = \bar{v}+v = \theta_V$

- Existe $\theta_V \in V$

$$\theta_V + v = v + \theta_V = v$$

- Soma comutativa

$a+b = b+a$

} Soma

Produto por escalar em $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}, \dots\}$

$\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$ precisa cumprir:

Para todos $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $a, b, v \in V$

- $\lambda \cdot (a+b) = \lambda \cdot a + \lambda \cdot b$
- $1_{\mathbb{F}} \cdot v = v$
- $(\lambda \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$
- $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$

} Multiplicação por escalar

3.4

$+$ $\oplus$ $\cdot$ $\odot$

Exercício 3.4 *Considere o conjunto* $V = \{ x \in \mathbb{R} \;/\; x > 0 \}$. *Definimos as seguintes operações em* V:

1. $x \oplus y = xy, \quad \forall\, x, y \in V;$
2. $\alpha \odot x = x^\alpha, \quad \forall\, x \in V, \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}.$

Verifique se $(V, \oplus, \odot)$ *é um espaço vetorial real.* → É sim

$\theta_v \in V$

$\theta_v \oplus x = x$

$\theta_v x = x$

$\theta_v = 1 \in \mathbb{R}$

$x \oplus \theta_v \stackrel{?}{=} x$

$x \cdot \theta_v = x \cdot 1$ ✓

$= x$

Zero existe

Inverso aditivo ✓

$x \in V$

$\bar{x} \in V$ tal que $x \oplus \bar{x} = \theta_v$

$x \bar{x} = 1$

$\bar{x} = 1/x$

$\bar{x} \oplus x = \theta_v$

Resolução

Associatividade

$\forall\ x, y, z \in V,\quad x \oplus (y \oplus z) \overset{?}{=} (x \oplus y) \oplus z$

$= x(yz) = (xy)z$ ✓

Comutatividade

$xy = yx$ ✓

Distributividade $\quad \mu \in \mathbb{F} = \mathbb{R},\ a, b \in V$

$\mu \odot (a \oplus b) \overset{?}{=} (\mu \odot a) \oplus (\mu \odot b)$

$\mu \odot (a \oplus b) = \mu \odot (ab) = (ab)^{\mu} = a^{\mu} \cdot b^{\mu} = (a^{\mu}) \oplus (b^{\mu})$ ✓

$= (\mu \odot a) \oplus (\mu \odot b)$

Identidade

$1 \odot x \overset{?}{=} x$

$1 \odot x = x^1 = x$ ✓

Associativo: $\lambda, \mu \in \mathbb{R},\ x \in V$

$(\lambda\mu) \odot x \overset{?}{=} \lambda \odot (\mu \odot x)$

$(\lambda\mu) \odot x = x^{(\lambda\mu)} = (x^{\mu})^{\lambda}$ ✓

$= \lambda \odot (x^{\mu})$

$= \lambda \odot (\mu \odot x)$

Distributividade ?

$$(\mu+\lambda)\odot x = x^{(\mu+\lambda)} = x^{\mu}x^{\lambda} = (x^{\mu}) \oplus (x^{\lambda}) = \mu\odot x \oplus \lambda\odot x$$

$$\stackrel{?}{=} \mu\odot x \oplus \lambda\odot x$$