Cálculo Numérico Computacional

Aula 10

Zeros de Funções Reais

Método da Secante

Cálculo Numérico Computacional

Agenda:

1. Método da Secante;
2. Critérios de Parada;
3. Interpretação Geométrica;
4. Exemplo;
5. Comparação entre métodos;
6. Exercícios.

Cálculo Numérico Computacional

1. Método da Secante

- Uma desvantagem do método de Newton é a necessidade de se obter a derivada da função e calcular seu valor numérico a cada passo;

- Uma modificação consiste em substituir a derivada $f'(x_k)$ pelo quociente das diferenças:

$$\boxed{f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}}$$

Cálculo Numérico Computacional

- Onde x_k, x_{k-1} são duas aproximações quaisquer para a raiz $\bar{x}$;

- O método de Newton, quando modificado desta forma, é conhecido por Método das Secantes;

- Sendo $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, substituindo em $f'(x_k) \approx \frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$, tem-se:

Cálculo Numérico Computacional

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\dfrac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}} = x_k - \frac{f(x_k) \times (x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Ou então:

$$\boxed{x_{k+1} = \frac{x_{k-1} \times f(x_k) - x_k \times f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}}$$

Cálculo Numérico Computacional

- Isto significa que a partir das aproximações iniciais x_0 e x_1, geramos a sequência x_2, x_3, ... que poderá ou não convergir para a raiz ξ.

2. Os critérios de parada são os mesmos do método de Newton-Raphson:

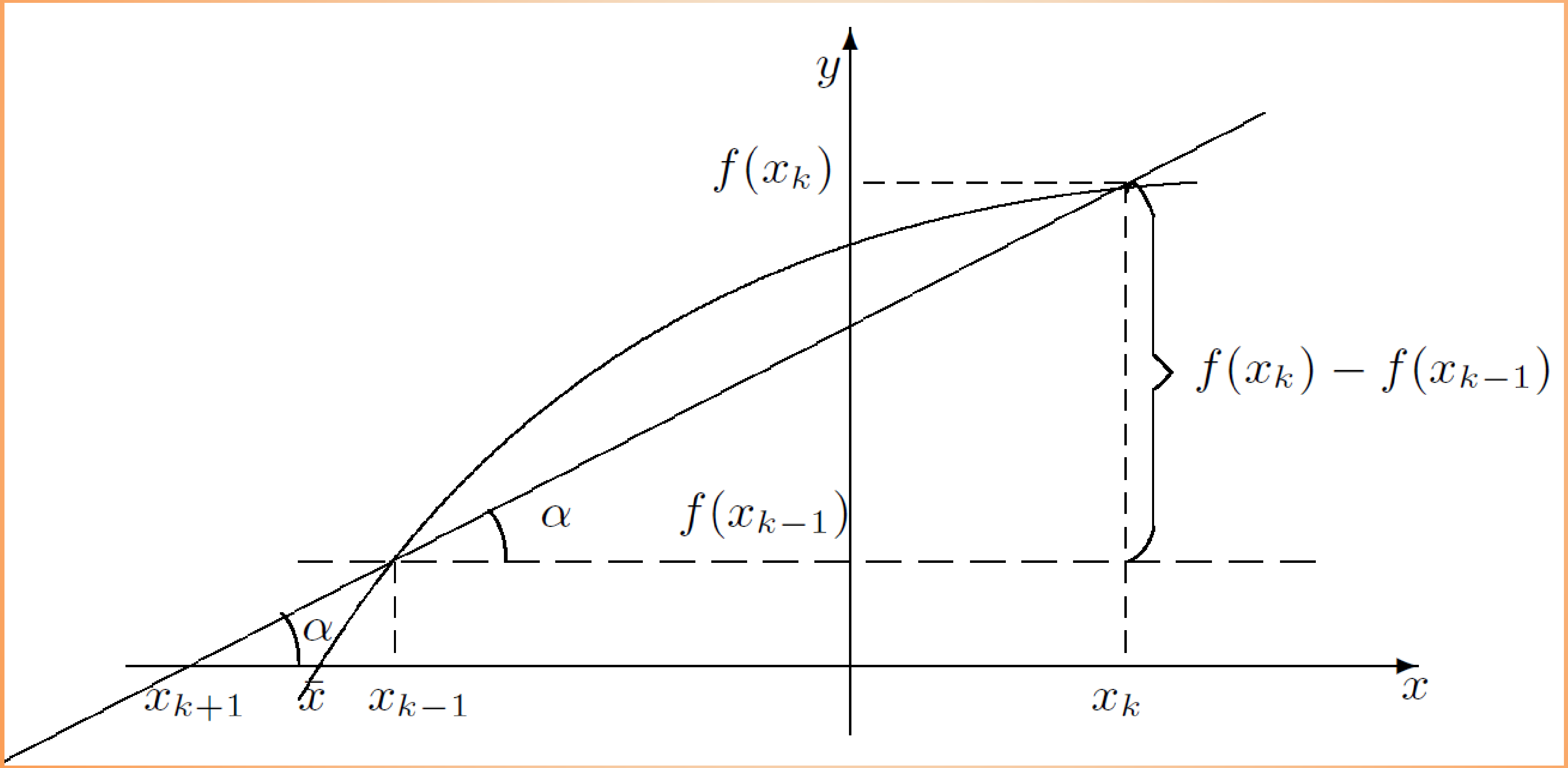
a) $|x_{k+1} - x_k| < \epsilon$ (Desvio Absoluto);

b) $\frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|} < \epsilon$ (Desvio Relativo);

c) $|f(x_{k+1})| < \epsilon$.

Cálculo Numérico Computacional

2. Interpretação Geométrica



Cálculo Numérico Computacional

- O método das secantes consiste em considerar, como aproximação seguinte, a interseção da corda que une os pontos $(\boldsymbol{x_{k-1}}, \boldsymbol{f(x_{k-1})})$ *e* $(\boldsymbol{x_k}, \boldsymbol{f(x_k)})$, com o eixo dos $\boldsymbol{x}$. Tomando:

$$\boldsymbol{\frac{x_{k+1}-x_k}{f(x_k)} = \frac{x_k-x_{k-1}}{f(x_k)-f(x_{k-1})}}$$

Segue que:

$$\boldsymbol{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k) \times (x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}}$$

Cálculo Numérico Computacional

- Então:

$$\frac{f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = tg\,\alpha$$

4. Exemplo

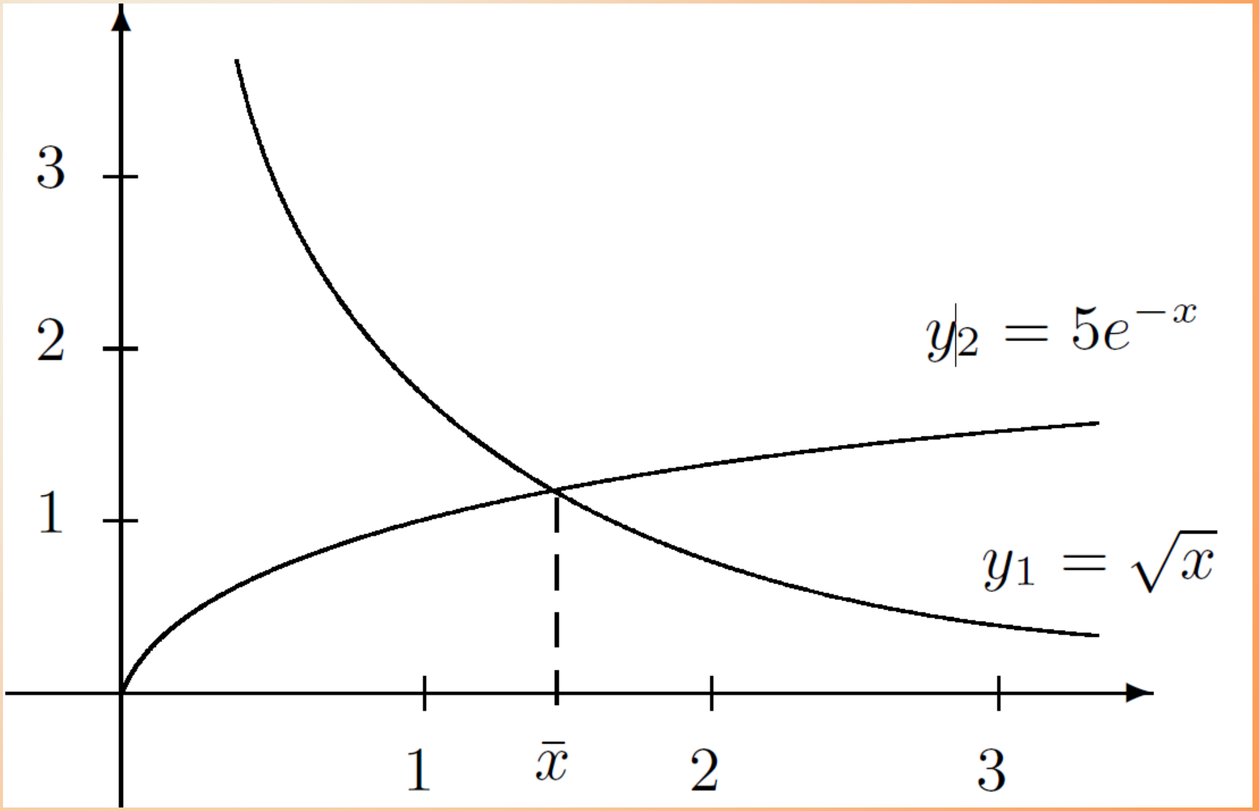
- Para ilustrar o método da secante, vamos considerar que desejamos calcular a raiz positiva de:

$$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x} - 5 \times e^{-x} = 0}$$

Com erro inferior a $\mathbf{10^{-2}}$.

Cálculo Numérico Computacional

- Vamos inicialmente dividir $f(x)$ em duas outras equações, tal que $y_1 = g(x) = \sqrt{x}$ e $y_2 = h(x) = 5 \times e^{-x}$. Graficamente, temos:



Cálculo Numérico Computacional

- O ponto de interseção das curvas é a solução $\bar{x}$ procurada. Este ponto está nas vizinhanças do ponto 1.4. Dessa forma, tomando inicialmente $\boldsymbol{x_0 = 1.4}$ e $\boldsymbol{x_1 = 1.5}$:

$$\boldsymbol{f(x_0) = f(1.4) = \sqrt{1.4} - 5 \times e^{-1.4} = 1.183 - 5 \times 0.247 = -0.052}$$

$$\boldsymbol{f(x_1) = f(1.5) = \sqrt{1.5} - 5 \times e^{-1.5} = 1.225 - 5 \times 0.223 = 0.110}$$

A partir da equação iterativa do método, temos:

Cálculo Numérico Computacional

$$x_2 = \frac{1.4 \times f(1.5) - 1.5 \times f(1.4)}{f(1.5) - f(1.4)}$$

$$x_2 = \frac{1.4 \times 0.110 - 1.5 \times (-0.052)}{0.110 - (-0.052)}$$

$$x_2 = 1.432$$

Cálculo Numérico Computacional

- Calculando o erro relativo:

$$\left|\frac{x_2 - x_1}{x_2}\right| \approx 0.047$$

Observamos que este é maior que 10^{-2}. Vamos fazer mais uma iteração:

$$f(x_2) = f(1.432) = \sqrt{1.432} - 5 \times e^{-1.432} = 1.197 - 5 \times 0.239 = 0.002$$

Cálculo Numérico Computacional

Aplicando o método novamente:

$$x_3 = \frac{1.5 \times f(1.432) - 1.432 \times f(1.5)}{f(1.432) - f(1.5)}$$

$$x_3 = \frac{1.5 \times 0.002 - 1.432 \times 0.110}{0.002 - 0.110}$$

$$x_3 = 1.431$$

Cálculo Numérico Computacional

- Calculando o erro relativo:

$$\left|\frac{x_3 - x_2}{x_3}\right| \approx 0.0007 < 10^{-2}$$

Assim, a raiz positiva da equação $\sqrt{x} - 5 \times e^{-x} = 0$, com $\epsilon < 10^{-2}$, é $\bar{x} = 1.431$.

Cálculo Numérico Computacional

Exemplo 18

$f(x) = e^{-x^2} - \cos(x)$; $\xi \in (1, 2)$; $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-4}$

	Bissecção	Posição Falsa	MPF $\varphi(x) = \cos(x) - e^{-x^2} + x$	Newton	Secante
Dados Iniciais	[1, 2]	[1, 2]	$x_0 = 1.5$	$x_0 = 1.5$	$x_0 = 1;\ x_1 = 2$
$\bar{x}$	1.44741821	1.44735707	1.44752471	1.44741635	1.44741345
$f(\bar{x})$	2.1921×10^{-5}	-3.6387×10^{-5}	7.0258×10^{-5}	1.3205×10^{-6}	-5.2395×10^{-7}
Erro em x	6.1035×10^{-5}	.552885221	1.9319×10^{-4}	1.7072×10^{-3}	1.8553×10^{-4}
Número de Iterações	14	6	6	2	5

Cálculo Numérico Computacional

Exemplo 19

$f(x) = x^3 - x - 1; \quad \xi \in (1, 2); \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-6}$

	Bissecção	Posição Falsa	MPF $\varphi(x) = (x+1)^{1/3}$	Newton	Secante
Dados Iniciais	[1, 2]	[1, 2]	$x_0 = 1$	$x_0 = 0$	$x_0 = 0;\ x_1 = 0.5$
$\bar{x}$	0.1324718×10^1	0.1324718×10^1	0.1324717×10^1	0.1324718×10^1	0.1324718×10^1
$f(\bar{x})$	$-0.1847744 \times 10^{-5}$	$-0.7897615 \times 10^{-6}$	$-0.52154406 \times 10^{-6}$	0.1821000×10^{-6}	$-0.8940697 \times 10^{-7}$
Erro em x	0.9536743×10^{-6}	0.6752825	0.3599538×10^{-6}	0.6299186×10^{-6}	0.8998843×10^{-5}
Número de Iterações	20	17	9	21	27

Cálculo Numérico Computacional

No método de Newton, o valor inicial $x_0 = 0$, além de estar muito distante da raiz $\xi(\approx 1.3)$, gera para x_1 o valor $x_1 = 0.5$ que está próximo de um zero da derivada de f(x); $f'(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}/3 \approx 0.5773502$. Isto é uma justificativa para o método ter efetuado 21 iterações.

Argumentos semelhantes podem ser usados para justificar as 27 iterações do método da secante.

Cálculo Numérico Computacional

No método de Newton, o valor inicial $x_0 = 0$, além de estar muito distante da raiz $\xi(\approx 1.3)$, gera para x_1 o valor $x_1 = 0.5$ que está próximo de um zero da derivada de f(x); $f'(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}/3 \approx 0.5773502$. Isto é uma justificativa para o método ter efetuado 21 iterações.

Argumentos semelhantes podem ser usados para justificar as 27 iterações do método da secante.

Cálculo Numérico Computacional

Exemplo 20

$f(x) = 4\text{sen}(x) - e^x$; $\xi \in (0, 1)$; $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-5}$

	Bissecção	Posição Falsa	MPF $\varphi(x) = x - 2\,\text{sen}(x) + 0.5e^x$	Newton	Secante
Dados Iniciais	[0, 1]	[0, 1]	$x_0 = 0.5$	$x_0 = 0.5$	$x_0 = 0$; $x_1 = 1$
$\bar{x}$	0.370555878	0.370558828	.370556114	.370558084	.370558098
$f(\bar{x})$	-1.3755×10^{-5}	1.6695×10^{-6}	-4.5191×10^{-6}	-2.7632×10^{-8}	5.8100×10^{-9}
Erro em x	7.6294×10^{-6}	.370562817	1.1528×10^{-4}	$+1.3863 \times 10^{-4}$	5.7404×10^{-6}
Número de Iterações	17	8	5	3	7

Cálculo Numérico Computacional

Exemplo 21

$f(x) = x\log(x) - 1; \quad \xi \in (2, 3); \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-7}$

	Bissecção	Posição Falsa	MPF $\varphi(x) = x - 1.3(x \log x - 1)$	Newton	Secante
Dados Iniciais	[2, 3]	[2, 3]	$x_0 = 2.5$	$x_0 = 2.5$	$x_0 = 2.3;\ x_1 = 2.7$
$\bar{x}$	2.506184413	2.50618403	2.50618417	2.50618415	2.50618418
$f(\bar{x})$	1.2573×10^{-8}	-9.9419×10^{-8}	2.0489×10^{-8}	4.6566×10^{-10}	2.9337×10^{-8}
Erro em x	5.9605×10^{-8}	.49381442	3.8426×10^{-6}	3.9879×10^{-6}	8.0561×10^{-5}
Número de Iterações	24	5	5	2	3

EXERCÍCIOS

Cálculo Numérico Computacional

Próxima aula:

Aula 11

- Interpolação: Interpolação polinomial