Cálculo Numérico Computacional

Aula 15

Diferenciação e Integração Numéricas
Regra dos Trapézios

Cálculo Numérico Computacional

Agenda:

1. Considerações iniciais;
2. Diferenciação Numérica;
3. Exemplo;
4. Integração Numérica;
5. Regra dos Trapézios
6. Exemplo;
7. Exercícios.

Cálculo Numérico Computacional

1. Considerações iniciais

- Sejam $x_0, x_1, \dots, x_n$, $(n+1)$ pontos igualmente espaçados, ou seja, $x_{i+1} - x_i = h$ para $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, e suponha conhecidos os valores $y_i = f(x_i)$;

- Inicialmente, determinamos o polinômio interpolador sobre os pares de pontos $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$;

- Então, a derivada do polinômio interpolador $p_n(x)$ é considerada uma aproximação para $f'(x)$.

Cálculo Numérico Computacional

- Dessa forma:

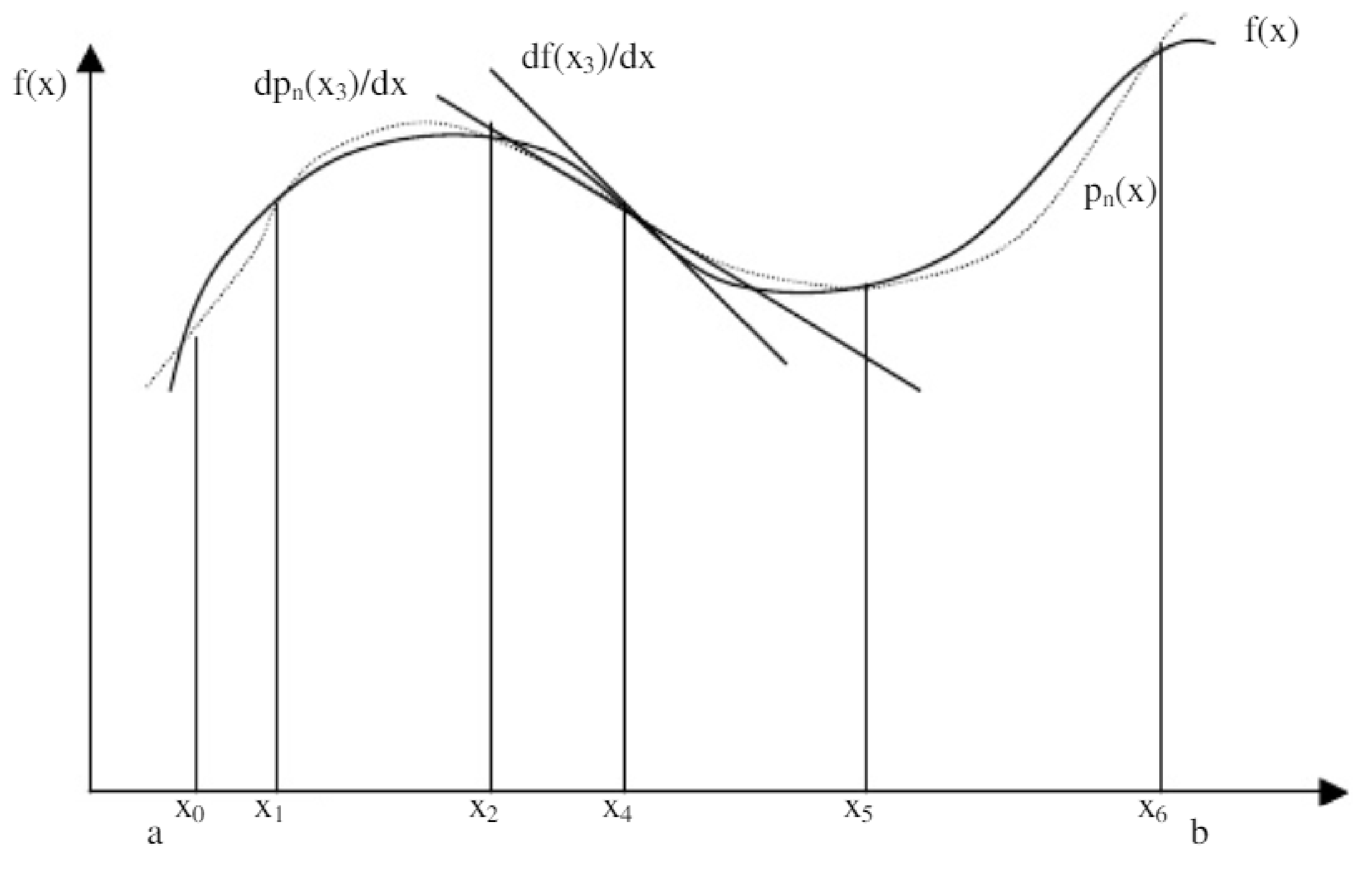
$$\boxed{p_n'(x) \approx f'(x)}$$

Para qualquer x.

- A derivação numérica é uma aproximação menos precisa do que a integração, e normalmente não podemos esperar uma grande precisão nesta aproximação.

Cálculo Numérico Computacional

- Graficamente:



Cálculo Numérico Computacional

- Vamos deduzir aqui a fórmula para 3 pontos. Temos a tabela (pontos igualmente espaçados):

x	x_0	x_1	x_2
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$

- O polinômio interpolador de Lagrange é:

$$p_2(x) = f(x_0) \times \frac{(x - x_1) \times (x - x_2)}{(x_0 - x_1) \times (x_0 - x_2)} + f(x_1) \times \frac{(x - x_0) \times (x - x_2)}{(x_1 - x_0) \times (x_1 - x_2)} + f(x_2) \times \frac{(x - x_0) \times (x - x_1)}{(x_2 - x_0) \times (x_2 - x_1)}$$

Cálculo Numérico Computacional

- Sabendo-se que $(x_0 - x_1) = -h$, $(x_0 - x_2) = -2h$, $(x_1 - x_0) = h$, $(x_1 - x_2) = -h$, $(x_2 - x_0) = 2h$ e $(x_2 - x_1) = h$, segue:

$$p_2(x) = f(x_0) \times \frac{(x - x_1) \times (x - x_2)}{2h^2} + f(x_1) \times \frac{(x - x_0) \times (x - x_2)}{-h^2} + f(x_2) \times \frac{(x - x_0) \times (x - x_1)}{2h^2}$$

- Os termos $\frac{f(x_0)}{2h^2}$, $\frac{f(x_1)}{h^2}$ e $\frac{f(x_2)}{2h^2}$ são constantes. Assim, derivando $p_2(x)$ em relação a x:

Cálculo Numérico Computacional

$$p_2'(x) = \frac{f(x_0)}{2h^2}[(x - x_2) + (x - x_1)] - \frac{f(x_1)}{h^2}[(x - x_2) + (x - x_0)] + \frac{f(x_2)}{2h^2}[(x - x_1) + (x - x_0)]$$

- Logo, $p_2'(x) \approx f'(x)$, para qualquer x.

- Para $x = x_0$, segue que:

Cálculo Numérico Computacional

$$p_2'(x_0) = \frac{f(x_0)}{2h^2} \times (-3h) - \frac{f(x_1)}{h^2} \times (-2h) + \frac{f(x_2)}{2h^2} \times (-h)$$

$$p_2'(x_0) = -\frac{3}{2h} \times f(x_0) + \frac{2}{h} \times f(x_1) - \frac{1}{2h} \times f(x_2)$$

$$\boxed{p_2'(x_0) = \frac{1}{2h}[-3 \times f(x_0) + 4 \times f(x_1) - f(x_2)]}$$

Cálculo Numérico Computacional

- Para $\boldsymbol{x = x_1}$, segue que:

$$p_2'(x_1) = \frac{1}{2h}[-f(x_0) + f(x_2)]$$

- Para $\boldsymbol{x = x_2}$, segue que:

$$p_2'(x_2) = \frac{1}{2h}[f(x_0) - 4 \times f(x_1) + 3 \times f(x_2)]$$

Cálculo Numérico Computacional

3. Exemplo: Calcular o valor aproximado de $f'(3.15)$ usando fórmula para 3 pontos, onde $f(x)$ é tabelada por:

x	3.15	3.25	3.35
$f(x)$	16.088375	17.640625	19.327875

Solução: Devemos utilizar a fórmula anteriormente calculada:

$$p_2'(x) = \frac{f(x_0)}{2h^2}[(x-x_2)+(x-x_1)] - \frac{f(x_1)}{h^2}[(x-x_2)+(x-x_0)] + \frac{f(x_2)}{2h^2}[(x-x_1)+(x-x_0)]$$

Cálculo Numérico Computacional

- Nesse caso, temos $\boldsymbol{h = 0.1}$ e $\boldsymbol{x_0 = 3.15}$. Assim:

$$p_2'(3.15) = \frac{1}{2(0.1)}[-3 \times (16.088375) + 4 \times (17.640625) - 19.327875]$$

$$p_2'(3.15) = 14.8475 \approx f'(3.15)$$

OBS: Neste exemplo, $f(x) = x^3 - 3 \times x^2 + 4 \times x + 2$.
Dessa forma: $f'(3.15) = 14.8675$ (valor exato)
O erro, assim: $EA = |14.8675 - 14.8475| = 0.02$

Cálculo Numérico Computacional

- Ainda mais, sabemos que:

$$f(x) = p_2(x) + E_2(x)$$

Onde:

$$E_2(x) = (x - x_0) \times (x - x_1) \times (x - x_2) \times \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}$$

Sendo $\xi \in [x_0, x_2]$

Logo, $f'(x) = p_2'(x) + E_2'(x)$

Cálculo Numérico Computacional

- Assim, $E_2'(x)$ é definido como sendo o erro nas fórmulas de diferenciação para 3 pontos;

- Temos que:

$$E_2(x_0) = \frac{h^2}{3} \times f^{(3)}(\xi_0)$$
$$E_2(x_1) = \frac{-h^2}{6} \times f^{(3)}(\xi_1)$$
$$E_2(x_2) = \frac{h^2}{3} \times f^{(3)}(\xi_2)$$

Sendo ξ_0, ξ_1 e ξ_2 estão entre x_0 e x_1

Cálculo Numérico Computacional

4. Integração Numérica

- Integrar numericamente uma função $y = f(x)$ num dado intervalo $[a, b]$ é integrar um polinômio $P_n(x)$ que aproxime $f(x)$ no dado intervalo;

- Em particular, quando $y = f(x)$ é dada por uma tabela (conjunto de pares ordenados), é possível usar como polinômio de aproximação o seu polinômio de interpolação;

- O polinômio de interpolação no intervalo $[a, b]$ pode ser usado para aproximar a integral de $f(x)$ em qualquer subintervalo de $[a, b]$.

Cálculo Numérico Computacional

- Entre as vantagens de se integrar um polinômio que aproxima $y = f(x)$ ao invés de $f(x)$, elencam-se:

a) A função $f(x)$ pode ser uma função de difícil integração, ou de integração praticamente impossível, por exemplo:

$$\int_0^t \frac{s}{\left(t^{\frac{3}{2}} - s^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}} \times ds$$

b) Se conhece a solução analítica do resultado da integral, mas o seu cálculo só pode ser obtido aproximadamente.

Cálculo Numérico Computacional

c) A função é dada simplesmente através de uma tabela de pares ordenados obtidos experimentalmente. Dessa forma, não se conhece a expressão analítica da função em termos do argumento.

- Vamos considerar aqui duas fórmulas de Newton-Cotes, as quais consistem em calcular o valor aproximado da integral definida por:

$$\boldsymbol{I = \int_a^b f(x) \times dx \approx \int_a^b p_n(x) \times dx}$$

Cálculo Numérico Computacional

Onde $\boldsymbol{p_n(x)}$ é o polinômio de interpolação sobre os $(\boldsymbol{n+1})$ pontos igualmente espaçados $\boldsymbol{x_0, x_1, \dots, x_n}$;

- Assim, $\boldsymbol{x_{i+1} - x_i = h = \frac{b-a}{n}}$

Com $\boldsymbol{a = x_0}$ e $\boldsymbol{b = x_n}$

5. Regra dos Trapézios

- Nesta aproximação, consideramos apenas 2 pontos, $\boldsymbol{x_0 = a}$ e $\boldsymbol{x_1 = b}$. Assim:

Cálculo Numérico Computacional

$$I = \int_a^b f(x) \times dx \approx \int_a^b p_1(x) \times dx$$

Onde $p_1(x)$ é o polinômio de interpolação para os pontos

x	x_0	x_1
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$

$$I \approx \int_a^b p_1(x) \times dx = \int_{a=x_0}^{b=x_1} \left[f(x_0) \times \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + f(x_1) \times \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} \right] \times dx$$

Cálculo Numérico Computacional

$$I \approx \frac{f(x_0)}{-h} \int_{x_0}^{x_1} (x - x_1) \times dx + \frac{f(x_1)}{h} \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0) \times dx$$

Aqui fazemos uma mudança de variável, de forma que:

$$\frac{x - x_0}{h} = u$$

Ou

$$x - x_0 = u \times h$$

Cálculo Numérico Computacional

- Se $\boldsymbol{x = x_0 \to u = 0}$

- Se $\boldsymbol{x = x_1 \to u = 1}$

- $\boldsymbol{dx = h \times du}$

$$\boldsymbol{x - x_1 = x - (x_0 + h)}$$
$$\boldsymbol{x - x_1 = x - x_0 - h}$$
$$\boldsymbol{x - x_1 = u \times h - h = h \times (u - 1)}$$

Portanto: $\boldsymbol{I \approx \frac{f(x_0)}{-h} \int_0^1 h \times (u - 1) \times h \times du + \frac{f(x_1)}{h} \int_0^1 u \times h \times h \times du}$

Cálculo Numérico Computacional

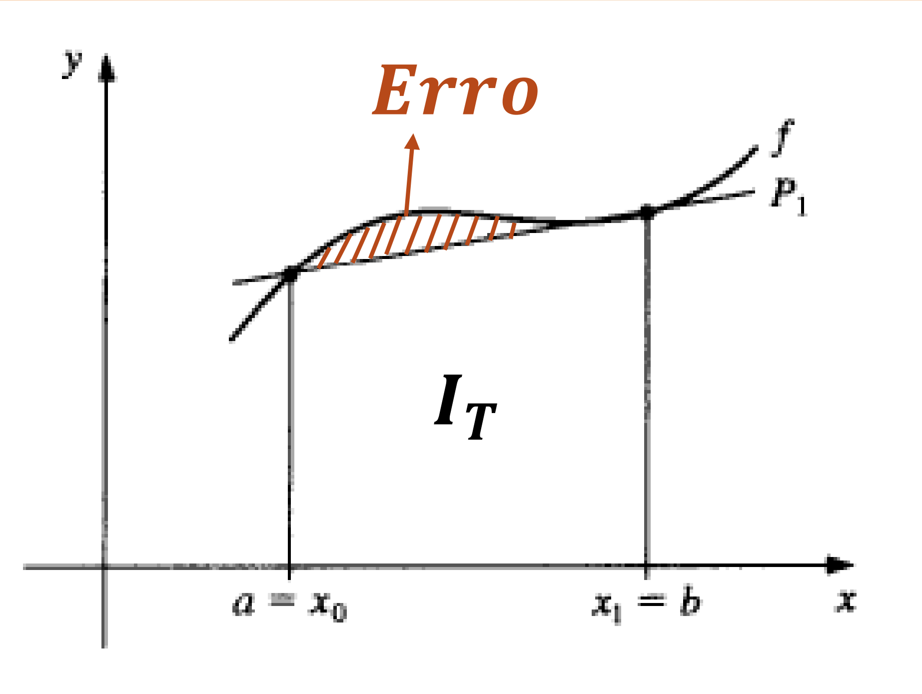
$$I \approx -h \times f(x_0) \times \int_0^1 (u-1) \times du + h \times f(x_1) \times \int_0^1 u \times du$$

$$I \approx -h \times f(x_0) \times \left(-\frac{1}{2}\right) + h \times f(x_1) \times \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$I \approx \frac{h}{2} \times [f(x_0) + f(x_1)] \rightarrow \boxed{I_T = \frac{h}{2} \times [f(x_0) + f(x_1)]}$$

Cálculo Numérico Computacional

- Graficamente:



- Área do trapézio $= \frac{h}{2} \times [f(x_0) + f(x_1)]$

Cálculo Numérico Computacional

- Sabemos que $f(x) = p_1(x) + E_1(x)$, e dessa forma:

$$I = \int_a^b f(x) \times dx + \int_a^b p_1(x) \times dx + \int_a^b E_1(x) \times dx$$

$$I = \frac{h}{2} \times [f(x_0) + f(x_1)] + E_T$$

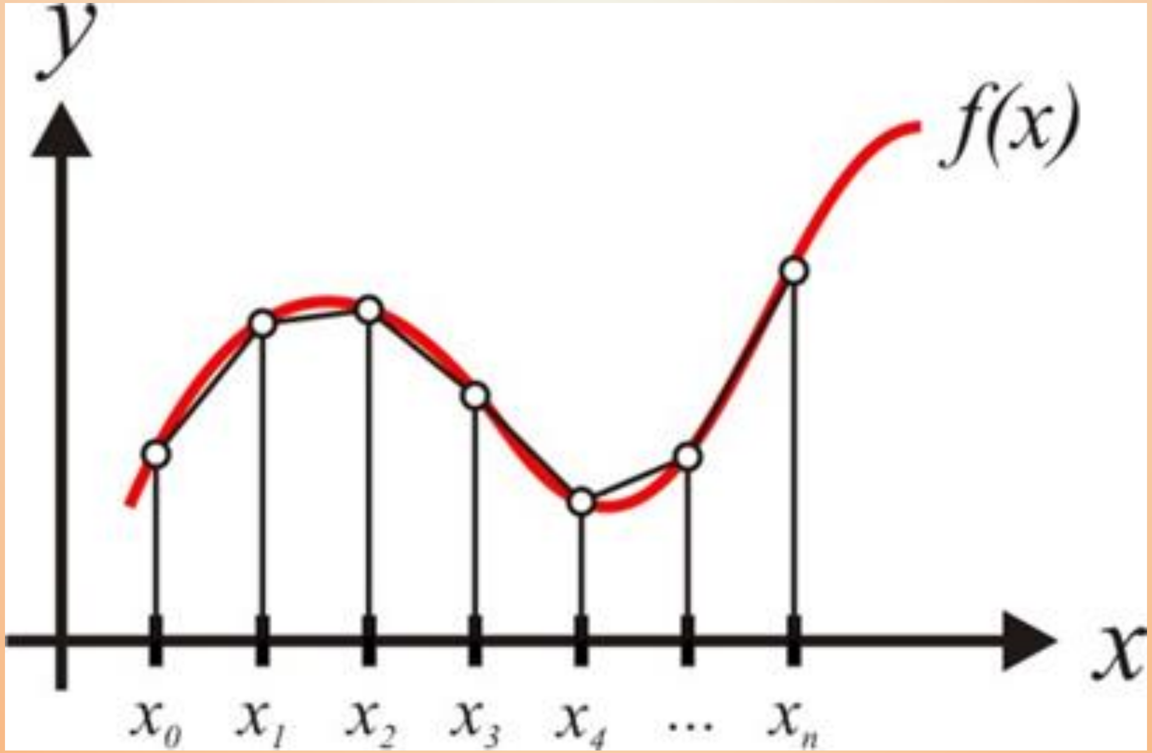
Logo: $E_T = \int_a^b (x - x_0) \times (x - x_1) \times \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!} \times dx\,, \quad \xi \in [a, b]$

Ou $E_T = -\frac{h^3}{12} \times f^{(2)}(\xi), \quad \xi \in [a, b]$

Cálculo Numérico Computacional

- Vamos ver agora a Regra dos Trapézios Generalizada (Repetida)

- Neste caso, subdividimos o intervalo $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ em $\boldsymbol{n}$ subintervalos e aplicamos a regra para cada um desses subintervalos;



Cálculo Numérico Computacional

- Formalmente:

$$I_{TR} = \frac{h}{2} \times [f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2} \times [f(x_1) + f(x_2)] + \cdots + \frac{h}{2} \times [f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$\boxed{I_{TR} = \frac{h}{2} \times \left[f(x_0) + 2\left(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})\right) + f(x_n)\right]}$$

- O erro é dado pela soma dos erros de cada subintervalo. Assim:

$$E_{TR} = \sum_{i=1}^{n} (E_T)_i = -\frac{h^2}{12} \times (b - a) \times f^{(2)}(\xi), \qquad \xi \in [a, b]$$

Cálculo Numérico Computacional

- Uma majoração para o erro é dada por:

$$|E_{TR}| \leq \frac{h^2}{12} \times (b-a) \times máximo|f^{(2)}(x)|, \qquad x \in [a,b]$$

EXEMPLO: Seja $I = \int_0^1 e^x \times dx$

(a) Calcule uma aproximação para I usando 10 subintervalos e a regra dos trapézios repetida. Estime o erro cometido;

(b) Qual o número mínimo de subintervalos de modo que o erro seja inferior a 10^{-3}?

Cálculo Numérico Computacional

- Solução: Neste caso, $f(x) = e^x, a = 0, b = 1$.
- Temos $n = 10$, ou seja, 11 pontos;
- Assim: $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = 0.1$, temos os pontos:

x	0	0.1	0.2	0.3	…	1
$f(x)$	e^0	$e^{0.1}$	$e^{0.2}$	$e^{0.3}$	…	e^1

$$I_{TR} = \frac{h}{2} \times \left[f(x_0) + 2\big(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_9)\big) + f(x_{10})\right]$$

Cálculo Numérico Computacional

$$I_{TR} = \frac{0.1}{2} \times \left[e^0 + 2\left(e^{0.1} + e^{0.2} + \cdots + e^{0.9}\right) + e^1\right] = 1.719713$$

Uma majoração para o erro é dada por:

$$|E_{TR}| \leq \frac{(0.1)^2}{12} \times (1 - 0) \times e = 0.00227$$

O valor exato de $I = 1.7182818$, logo:

$$EA = |1.7182818 - 1.719713| = 0.00143$$

Cálculo Numérico Computacional

- Para o segundo item da questão, da expressão do erro, temos:

$$\frac{\boldsymbol{h^2}}{\mathbf{12}} \times (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{máximo}\left|\boldsymbol{f^{(2)}(x)}\right| < \mathbf{10^{-3}}$$

$$\frac{\boldsymbol{h^2}}{\mathbf{12}} \times (\mathbf{1} - \mathbf{0}) \times \boldsymbol{e} < \mathbf{10^{-3}}$$

$$\boldsymbol{h^2} < \frac{\mathbf{12} \times \mathbf{10^{-3}}}{\boldsymbol{e}} \rightarrow \boldsymbol{h} = \mathbf{0.0665}$$

Logo: $\boldsymbol{n} > \frac{\boldsymbol{b-a}}{\boldsymbol{h}} \rightarrow \boldsymbol{n} > \frac{\mathbf{1-0}}{\mathbf{0.0665}} \approx \mathbf{15.037}$. Portanto, $\boldsymbol{n} = \mathbf{16}$

EXERCÍCIOS

Cálculo Numérico Computacional
Próxima aula:

Aula 16

- Integração Numérica: Regra 1/3 de Simpson, Regra 1/3 de Simpson com repetição e Estudo do erro.