Cálculo Numérico Computacional

Aula 06

Solução Numérica de Sistemas de Equações Lineares

Métodos Iterativos: Gauss-Jacobi

Prof. Lucas Zanovello lucas.tahara@unesp.br

Cálculo Numérico Computacional

Agenda:

1. Métodos iterativos;
2. Método de Gauss-Jacobi com exemplo;
3. Teorema e critério de convergência;
4. Pseudocódigo;
5. Exercícios;
6. Encerramento.

Cálculo Numérico Computacional

1. Métodos iterativos

- Em certos casos, tais métodos são melhores do que os exatos, por exemplo, quando a matriz dos coeficientes é uma matriz esparsa (muitos elementos iguais a zero);

- Utilizam menos memória de máquina;

- Vantagem de se auto corrigir se um erro é cometido, e eles podem ser usados para reduzir os erros de arredondamento na solução obtida por métodos exatos.

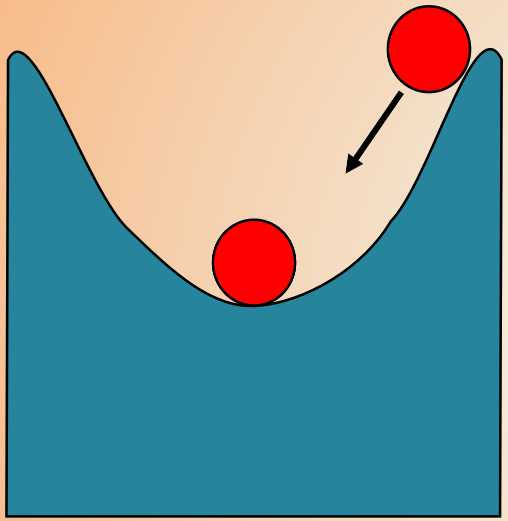
Cálculo Numérico Computacional

- Um método é iterativo quando fornece uma sequência de aproximantes da solução, cada uma das quais obtida das anteriores pela repetição do mesmo tipo de processo;

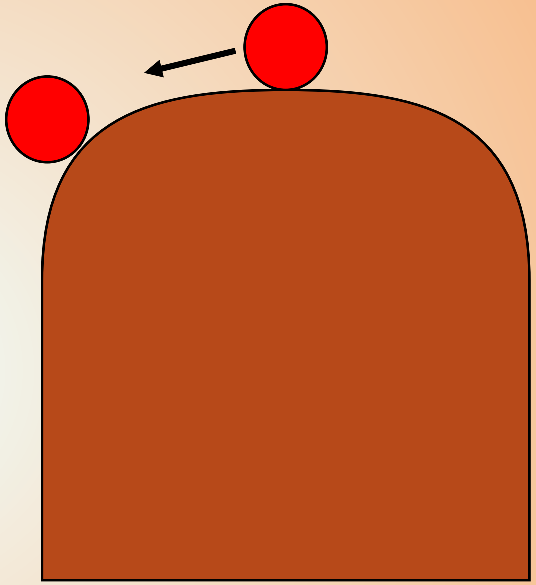
- No caso de métodos iterativos precisamos sempre saber se a sequência que estamos obtendo está convergindo ou não para a solução desejada (verificar conceitos de norma de vetor e norma de matriz);

- Dados uma sequência de vetores $\boldsymbol{x}^{(k)} \in \boldsymbol{E}$ e uma norma sobre $\boldsymbol{E}$, onde $\boldsymbol{E}$ é um espaço vetorial, dizemos que a sequência $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$converge para $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$ se $\left\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}\right\| \to \mathbf{0}$ quando $\boldsymbol{k} \to \infty$.

Cálculo Numérico Computacional



Convergência



Não Convergência

Cálculo Numérico Computacional

- Nos métodos iterativos, aproximamos o sistema linear $\boldsymbol{A}.\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ onde $\boldsymbol{A}$ é uma matriz $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$, na forma:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}.\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}$$

- Onde $\boldsymbol{C}$ é uma matriz $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$, denominada matriz de iteração, e $\boldsymbol{g}$ é um vetor do $\Re^{\boldsymbol{n}}$;

- Dessa forma, define-se o processo iterativo:

$$\boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})} = \boldsymbol{C}.\boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{k})} + \boldsymbol{g} \quad , \qquad \boldsymbol{k} = \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots$$

Cálculo Numérico Computacional

- A sequência gerada pode ou não convergir para a solução do sistema linear.

Critérios de Parada

I) $M^{(k+1)} = máximo\left\{\left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right|\right\} < \epsilon \quad , 1 \le i \le n$ **Desvio Absoluto**

II) $M_r^{(k+1)} = \dfrac{M^{(k+1)}}{máximo\left\{\left|x_i^{(k+1)}\right|\right\}} < \epsilon \quad , \ 1 \le i \le n$ **Desvio Relativo**

ϵ é a tolerância ou precisão estabelecida

Cálculo Numérico Computacional

2. Método de Gauss-Jacobi com exemplo

Seja o sistema linear dado por:

$$\begin{cases} 10.x_1 & +2.x_2 & +x_3 & = 7 \\ x_1 & +5.x_2 & +x_3 & = -8 \\ 2.x_1 & +3.x_2 & +10.x_3 & = 6 \end{cases}$$

$$A.x = b$$

Cálculo Numérico Computacional

Podemos reescrever na forma: $\boxed{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}.\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}}$

$$\begin{cases} x_1 = & 1/10 & (7 & -2.x_2 & -x_3) \\ x_2 = & 1/5 & (-8 & -x_1 & -x_3) \\ x_3 = & 1/10 & (6 & -2.x_1 & -3.x_2) \end{cases}$$

Onde:

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{-2/10} & \boldsymbol{-1/10} \\ \boldsymbol{-1/5} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{-1/5} \\ \boldsymbol{-2/10} & \boldsymbol{-3/10} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \quad ; \quad \boldsymbol{g} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{7/10} \\ \boldsymbol{-8/5} \\ \boldsymbol{6/10} \end{Bmatrix}$$

Cálculo Numérico Computacional

Temos o processo iterativo:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 1/10\,(7 - 2.x_2^{(k)} - x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = 1/5\,(-8 - x_1^{(k)} - x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = 1/10\,(6 - 2.x_1^{(k)} - 3.x_2^{(k)}) \end{cases}$$

Usando a aproximação inicial:

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = (\underset{\boldsymbol{x}_1^{(0)}}{\mathbf{0}}, \underset{\boldsymbol{x}_2^{(0)}}{\mathbf{0}}, \underset{\boldsymbol{x}_3^{(0)}}{\mathbf{0}})^{\boldsymbol{T}}$$

Temos:

Cálculo Numérico Computacional

1ª Iteração (k=0)

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 1/10 \quad (7 \quad -2.x_2^{(0)} \quad -x_3^{(0)}) \\ x_2^{(1)} = 1/5 \quad (-8 \quad -x_1^{(0)} \quad -x_3^{(0)}) \\ x_3^{(1)} = 1/10 \quad (6 \quad -2.x_1^{(0)} \quad -3.x_2^{(0)}) \end{cases} = \begin{matrix} 1/10 \quad (7 - 2.0 - 0) \\ 1/5 \quad (-8 - 0 - 0) \\ 1/10 \quad (6 - 2.0 - 3.0) \end{matrix} = \begin{matrix} 0.7 \\ -1.6 \\ 0.6 \end{matrix}$$

Vamos escolher como critério de parada o desvio absoluto com $\boldsymbol{\epsilon = 0.05}$. Assim:

$$\boldsymbol{M^{(1)} = máx\left\{\left|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}\right|, \left|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}\right|, \left|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}\right|\right\}}$$

Cálculo Numérico Computacional

$$M^{(1)} = máx\{|0.7 - 0|, |-1.6 - 0|, |0.6 - 0|\} = 1.6 > \epsilon$$

Critério não satisfeito.

2ª Iteração (k=1)

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 1/10\,(7 - 2.x_2^{(1)} - x_3^{(1)}) \\ x_2^{(2)} = 1/5\,(-8 - x_1^{(1)} - x_3^{(1)}) \\ x_3^{(2)} = 1/10\,(6 - 2.x_1^{(1)} - 3.x_2^{(1)}) \end{cases} = \begin{matrix} 1/10\,(7 - 2*(-1.6) - 0.6) \\ 1/5\,(-8 - 0.7 - 0.6) \\ 1/10\,(6 - 2*0.7 - 3*(-1.6)) \end{matrix} = \begin{matrix} 0.96 \\ -1.86 \\ 0.94 \end{matrix}$$

$$M^{(2)} = máx\left\{\left|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}\right|, \left|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}\right|, \left|x_3^{(2)} - x_3^{(1)}\right|\right\}$$

$$M^{(2)} = máx\{|0.96 - 0.7|, |-1.86 - (-1.6)|, |0.94 - 0.6|\} = 0.34 > \epsilon$$

Critério não satisfeito.

Cálculo Numérico Computacional

3ª Iteração (k=2)

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = 1/10\ (7 - 2.x_2^{(2)} - x_3^{(2)}) \\ x_2^{(3)} = 1/5\ (-8 - x_1^{(2)} - x_3^{(2)}) \\ x_3^{(3)} = 1/10\ (6 - 2.x_1^{(2)} - 3.x_2^{(2)}) \end{cases} = \begin{matrix} 1/10\ (7 - 2 * (-1.86) - 0.94) \\ 1/5\ (-8 - 0.96 - 0.94) \\ 1/10\ (6 - 2 * 0.96 - 3 * (-1.86)) \end{matrix} = \begin{matrix} 0.978 \\ -1.98 \\ 0.966 \end{matrix}$$

$$\boldsymbol{M^{(3)} = m\acute{a}x\left\{\left|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}\right|, \left|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}\right|, \left|x_3^{(3)} - x_3^{(2)}\right|\right\}}$$

$$\boldsymbol{M^{(3)} = m\acute{a}x\{|0.978 - 0.96|, |-1.98 - (-1.86)|, |0.966 - 0.94|\} = 0.12 > \epsilon}$$

Critério não satisfeito.

Cálculo Numérico Computacional

4ª Iteração (k=3)

$$\begin{cases} x_1^{(4)} = 1/10 \quad (7 \quad -2.x_2^{(3)} \quad -x_3^{(3)}) \\ x_2^{(4)} = 1/5 \quad (-8 \quad -x_1^{(3)} \quad -x_3^{(3)}) \\ x_3^{(4)} = 1/10 \quad (6 \quad -2.x_1^{(3)} \quad -3.x_2^{(3)}) \end{cases} = \begin{matrix} 1/10 & (7-2*(-1.98)-0.966) \\ 1/5 & (-8-0.978-0.966) \\ 1/10 & (6-2*0.978-3*(-1.98)) \end{matrix} = \begin{matrix} 0.9994 \\ -1.9888 \\ 0.966 \end{matrix}$$

$$\boldsymbol{M^{(4)} = m\acute{a}x\left\{\left|x_1^{(4)} - x_1^{(3)}\right|, \left|x_2^{(4)} - x_2^{(3)}\right|, \left|x_3^{(4)} - x_3^{(3)}\right|\right\}}$$

$$\boldsymbol{M^{(4)} = m\acute{a}x\{|0.9994 - 0.978|, |-1.9888 - (-1.98)|, |0.9984 - 0.966|\} = 0.032 < \epsilon}$$

Critério satisfeito.

Cálculo Numérico Computacional

Portanto:

$$\boxed{\bar{x} \approx x^{(4)} = (0.9994, -1.9888, 0.9984)^T}$$

3. Teorema e critério de convergência

Vamos estabelecer agora uma condição suficiente para avaliar a convergência do método de Gauss-Jacobi.

Teorema: Dado o sistema linear $\boldsymbol{A}.\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ onde $\boldsymbol{A}$ é uma matriz $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$, defina:

Cálculo Numérico Computacional

Critério das linhas

$$\boldsymbol{\alpha_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}| \ \ / \ \ |a_{kk}| \quad , \qquad para\ k = 1, 2, \dots, n}$$

Se $\boldsymbol{\alpha_k = máximo\{\alpha_k\} < 1}$, então o método de Gauss-Jacobi gera uma sequência que converge para a solução do sistema linear $\boldsymbol{A.x = b}$, independentemente da escolha da aproximação inicial $\boldsymbol{x^{(0)}}$.

EXERCÍCIOS

Cálculo Numérico Computacional

Próxima aula:

Aula 07

- Métodos iterativos: Gauss-Seidel;
- Exercícios.