Cálculo Numérico Computacional

Aula 12

Interpolação
Forma de Newton

Prof. Lucas Zanovello lucas.tahara@unesp.br

Cálculo Numérico Computacional

Agenda:

1. Breve revisão da aula passada;
2. A Forma de Newton;
3. Operador Diferenças Divididas;
4. Forma de Newton para o Polinômio Interpolador;
5. Exemplo;
6. Exercícios.

Cálculo Numérico Computacional

A seguinte tabela relaciona calor específico da água e temperatura:

temperatura (ºC)	20	25	30	35	40
calor específico	0.99907	0.99852	0.99826	0.99818	0.99828

temperatura (ºC)	45	50
calor específico	0.99849	0.99878

Cálculo Numérico Computacional

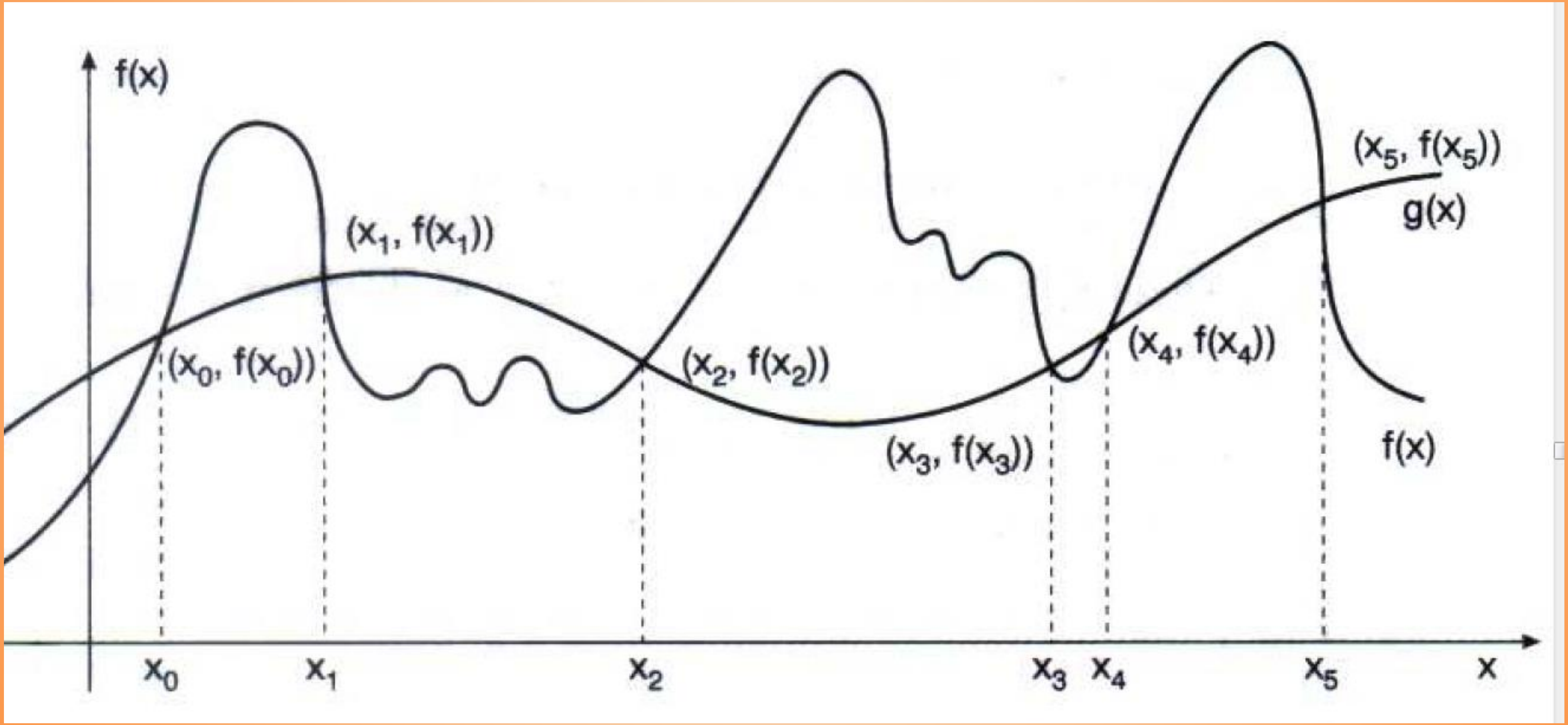
Interpolação polinomial

- Neste caso, dados $x_0, x_1, \ldots, x_n$; $(n+1)$ pontos distintos em um intervalo I da curva, onde são conhecidos os valores da função $y_i = f(x_i)$. Desejamos determinar o polinômio de grau menor ou igual a n, $p_n(x) = a_n \times x^n + a_{n-1} \times x^{n-1} + \cdots + a_1 \times x + a_0$ tal que $p_n(x_i) = f(x_i)$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

- Teorema: O polinômio de interpolação é único!

Cálculo Numérico Computacional

Graficamente, temos:



Cálculo Numérico Computacional

Forma ou Fórmula de Lagrange

- O polinômio de interpolação é definido por:

$$p_n(x) = f(x_0) \times L_0(x) + f(x_1) \times L_1(x) + \cdots + f(x_n) \times L_n(x)$$

Onde:

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0) \times (x - x_1) \dots (x - x_{k-1}) \times (x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \times (x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1}) \times (x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}$$

Para $k = 0, 1, 2, \dots, n$

Cálculo Numérico Computacional

Exemplo

Usando a forma de Lagrange, determinar o polinômio de interpolação para a função $f(x)$ tabelada por:

	x_0	x_1	x_2
x	-1	0	2
$f(x)$	4	1	-1
	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$

Cálculo Numérico Computacional

Solução:

- Neste caso, temos $\boldsymbol{n+1=3}$ (número de pontos)

- Vamos determinar um polinômio de grau menor ou igual a 2 tal que $\boldsymbol{p_2(x_i)=f(x_i)}$

- O polinômio interpolador é dado por:

$$\boldsymbol{p_2(x)=f(x_0)\times L_0(x)+f(x_1)\times L_1(x)+f(x_2)\times L_2(x)}$$

Cálculo Numérico Computacional

Agora, determinado $L_0(x), L_1(x)$ e $L_2(x)$:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1) \times (x - x_2)}{(x_0 - x_1) \times (x_0 - x_2)} = \frac{(x - 0) \times (x - 2)}{(-1 - 0) \times (-1 - 2)} = \frac{x^2 - 2 \times x}{3}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0) \times (x - x_2)}{(x_1 - x_0) \times (x_1 - x_2)} = \frac{(x + 1) \times (x - 2)}{(0 + 1) \times (0 - 2)} = \frac{x^2 - x - 2}{-2}$$

Cálculo Numérico Computacional

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0) \times (x - x_1)}{(x_2 - x_0) \times (x_2 - x_1)} = \frac{(x + 1) \times (x - 0)}{(2 + 1) \times (2 - 0)} = \frac{x^2 + x}{6}$$

Assim, na forma de Lagrange, teremos:

$$p_2(x) = 4 \times \left(\frac{x^2 - 2 \times x}{3}\right) + 1 \times \left(\frac{x^2 - x - 2}{-2}\right) + (-1) \times \left(\frac{x^2 + x}{6}\right)$$

$$\boxed{p_2(x) = \frac{2}{3} \times x^2 - \frac{7}{3} \times x + 1}$$

Cálculo Numérico Computacional

Verificando:

$$p_2(-1) = 4$$
$$p_2(0) = 1$$
$$p_2(2) = -1$$

OK!

2 condições básicas:

- Grau de $p_n(x) \leq n$
- $p_n(x_i) = f(x_i),\ i = 0, 1, \ldots, n$

Cálculo Numérico Computacional

2. A Forma de Newton

- A forma de Newton para o polinômio $p_n(x)$ que interpola $f(x)$ em $x_0, x_1, \dots, x_n$, $(n+1)$ pontos distintos é a seguinte:

$$p_n(x) = d_0 + d_1 \times (x - x_0) + d_2 \times (x - x_0) \times (x - x_1) + \cdots + d_n \times (x - x_0) \times (x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

Cálculo Numérico Computacional

- Vamos assim estudar o operador diferenças divididas, já que os coeficientes d_k anteriormente mencionados são diferenças divididas de ordem k entre os pontos $(x_j, f(x_j))$ e vamos estudar também a expressão de $p_n(x)$.

3. Operador Diferenças Divididas

- Vamos tabelar a função $f(x)$ em $n+1$ pontos distintos: $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Tabela de Diferenças Divididas

x_i	$f[x_i]$	$[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	$\dots$
x_0	$f[x_0] = f_0$			
		$f[x_0, x_1] = \dfrac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$		
x_1	$f[x_1] = f_1$		$f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$	
		$f[x_1, x_2] = \dfrac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$		$\dots$
x_2	$f[x_2] = f_2$		$f[x_1, x_2, x_3] = \dfrac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$	
		$f[x_2, x_3] = \dfrac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2}$		$\dots$
x_3	$f[x_3] = f_3$		$f[x_2, x_3, x_4] = \dfrac{f[x_3, x_4] - f[x_2, x_3]}{x_4 - x_2}$	
		$f[x_3, x_4] = \dfrac{f[x_4] - f[x_3]}{x_4 - x_3}$	$\vdots$	$\dots$
x_4	$f[x_4] = f_4$	$\vdots$		
$\vdots$	$\vdots$			

Cálculo Numérico Computacional

- A primeira coluna é constituída dos pontos $x_k, k = 0, 1, \ldots, n$;
- A segunda coluna contém os valores de $f(x)$ nos pontos $x_k, k = 0, 1, 2, \ldots, n$;
- Nas colunas 3, 4, 5, . . . , estão as diferenças divididas de ordem 1, 2, 3, ... Cada uma dessas diferenças é uma fração cujo numerador é sempre a diferença entre duas diferenças divididas consecutivas e de ordem imediatamente inferior e cujo denominador é a diferença entre os dois extremos dos pontos envolvidos.

Cálculo Numérico Computacional

Seja f(x) tabelada abaixo

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
x	–1	0	1	2	3
f(x)	1	1	0	–1	–2

Cálculo Numérico Computacional

Sua tabela de diferenças divididas é:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	Ordem 4
–1	1				
		0			
0	1		$-\frac{1}{2}$		
		–1		$\frac{1}{6}$	
1	0		0		$-\frac{1}{24}$
		–1		0	
2	–1		0		
		–1			
3	–2				

Cálculo Numérico Computacional

Onde

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{1-1}{1} = 0$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{0-1}{1-0} = -1$$

$$\vdots$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{-1-0}{1+1} = \frac{-1}{2}$$

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} = \frac{-1+1}{2-0} = 0$$

$$\vdots$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} = \frac{0+1/2}{2+1} = \frac{1}{6}$$

OUTRO EXEMPLO

Cálculo Numérico Computacional

Exemplo 10.8 - *Para a seguinte função tabelada:*

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-2	29	30	31	62

construir a tabela de diferenças divididas.

Cálculo Numérico Computacional

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	$f[x_i, \ldots, x_\ell]$	$f[x_i, \ldots, x_m]$
-2	-2				
		$\frac{29-(-2)}{-1-(-2)} = 31$			
-1	29		$\frac{1-(-31)}{0-(-2)} = -15$		
		$\frac{30-29}{0-(-1)} = 1$		$\frac{0-(-15)}{1-(-2)} = 5$	
0	30		$\frac{1-1}{1-(-1)} = 0$		$\frac{5-5}{2-(-2)} = 0$
		$\frac{31-30}{1-0} = 1$		$\frac{15-0}{2-(-1)} = 5$	
1	31		$\frac{31-1}{2-0} = 15$		
		$\frac{62-31}{2-1} = 31$			
2	62				

Cálculo Numérico Computacional

4. Forma de Newton para o Polinômio Interpolador

O polinômio interpolador de Newton é definido então, por:

$$p_n(x) = f[x_0] + (x - x_0) \times f[x_0, x_1] + (x - x_0) \times (x - x_1) \times f[x_0, x_1, x_2] + \cdots + (x - x_0) \times (x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) \times f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

5. Exemplo

Usando a forma de Newton, o polinômio $p_2(x)$, que interpola $f(x)$ nos pontos dados abaixo

x	−1	0	2
f(x)	4	1	−1

, é:

$$p_2(x) = f(x_0) + (x - x_0)\, f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)\, f[x_0, x_1, x_2].$$

Cálculo Numérico Computacional

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
–1	4		
		–3	
0	1		$\frac{2}{3}$
		–1	
2	–1		

$$p_2(x) = 4 + (x + 1)(-3) + (x + 1)(x - 0)\,\frac{2}{3}\,.$$

EXERCÍCIOS

Exemplo 10.9 - *Conhecendo-se a seguinte tabela:*

x	-1	0	3
$f(x)$	15	8	-1

calcular $f(1)$, *usando polinômio de interpolação de Newton.*

Cálculo Numérico Computacional

Solução: Temos:

$$\begin{aligned} x_0 &= -1\,, & f_0 &= f(x_0) = 15\,, \\ x_1 &= 0\,, & f_1 &= f(x_1) = 8\,, \\ x_2 &= 3\,, & f_2 &= f(x_2) = -1\,, \end{aligned}$$

e portanto $n = 2$. Assim o polinômio de interpolaçào na forma de Newton é dado por::

$$P_2(x) = f[x_0] + (x - x_0)\, f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)\, f[x_0, x_1, x_2] \;.$$

Em primeiro lugar, construímos a tabela de diferenças divididas. Assim:

x	f(x)		
-1	15		
		-7	
0	8		1
		-3	
3	-1		

Cálculo Numérico Computacional

Portanto: $P_2(x) = 15 + (x+1)(-7) \; + \; (x+1)(x-0)(1).$

Agrupando os termos semelhantes obtemos: $P_2(x) = x^2 - 6\,x + 8.$

Os valores de $f(1)$ é dado por $P_2(1)$, lembrando que este é um valor aproximado. Assim: $P_2(1) = 3 \simeq f(1).$

Cálculo Numérico Computacional

Exemplo 10.11 - *Dada a tabela:*

x	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	0.13	0.19	0.27	0.38	0.51	0.67

determinar:

a) *o polinômio de interpolação de grau adequado,*

b) *calcular* $f(4.5)$,

Solução: Inicialmente construímos a tabela de diferenças divididas. Assim:

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_j]$	
2	0.13		
		0.06	
3	0.19		0.01
		0.08	
4	0.27		0.015
		0.11	
5	0.38		0.01
		0.13	
6	0.51		0.015
		0.16	
7	0.67		

Cálculo Numérico Computacional

a) Como as diferenças divididas de 2ª ordem são praticamente constantes podemos adotar um polinômio de 2º grau para interpolá-la. Além disso, como queremos avaliar $f(4.5)$, escolhemos 3 pontos na vizinhança de 4.5. Seja então: $x_0 = 4$, $x_1 = 5$ e $x_2 = 6$. Assim:

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f[x_0] + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] \\ &= 0.27 + (x - 4)(0.11) + (x - 4)(x - 5)(0.01) \\ &= 0.01\, x^2 + 0.02\, x + 0.03\,. \end{aligned}$$

b) Agora, $f(4.5) \simeq P_2(4.5) = 0.01\ (4.5)^2 + 0.02\ (4.5) + 0.03 = 0.3225.$

Exercícios

10.18 - *Seja a função tabelada:*

x	-2	-1	1	2
$f(x)$	0	1	-1	0

a) *Determinar o polinômio de interpolação de Newton.*

b) *Calcular* $f(0.5)$.

Cálculo Numérico Computacional

10.19 - *Dada a função tabelada:*

x	0	1	1.5	2.5	3.0
$f(x)$	1.0	0.5	0.4	0.286	0.25

a) *Determinar o polinômio de interpolação de Newton sobre 2 pontos (interpolação linear).*

a) *Determinar o polinômio de interpolação de Newton sobre 3 pontos (interpolação quadrática).*

b) *Calcular $f(0.5)$, usando o item* a) *e o item* b).

Lembre-se que o polinômio de Newton sobre 3 pontos é igual ao polinômio sobre 2 pontos adicionado ao termo de ordem 2. Além disso, o ponto x_0 deve ser comum aos 2 polinômios. Portanto tome cuidado ao escolher os pontos.

Cálculo Numérico Computacional

Próxima aula:

Aula 13

- Estudo do erro na interpolação;
- Extrapolação.