Cálculo Numérico Computacional

Aula 17

Soluções Numéricas de Equações Diferenciais Ordinárias
Método de Passo Um (Euler)
Método de Série de Taylor

Cálculo Numérico Computacional

Agenda:

1. Considerações iniciais;
2. Exemplo;
3. Método de Passo Um (Euler);
4. Exemplo;
5. Método de Série de Taylor;
6. Exemplo;
7. Exercícios.

Cálculo Numérico Computacional

1. Considerações iniciais

Equações diferenciais aparecem com grande freqüência em modelos que descrevem quantitativamente fenômenos em diversas áreas, como por exemplo mecânica de fluidos, fluxo de calor, vibrações, reações químicas e nucleares, economia, biologia etc.

Considere, por exemplo, o circuito mostrado na Figura 8.1. A caixa quadrada representa um diodo de Esaki com a função característica f(v) representando a corrente como função da tensão, v. As leis de Kirchoff aplicadas a este circuito nos fornecem a seguinte relação entre a corrente i e a tensão v;

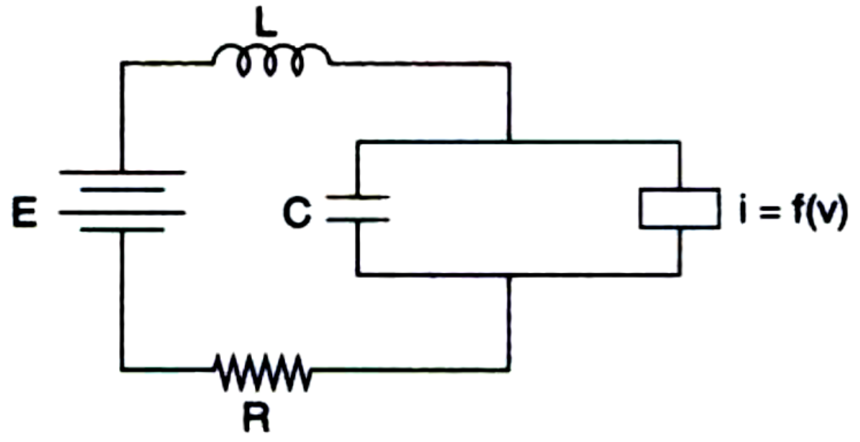


Figura 8.1

Cálculo Numérico Computacional

$$\begin{cases} L\dfrac{di}{dt} = E - Ri - v = I(i, v) \\ -C\dfrac{dv}{dt} = f(v) - i = V(i, v) \end{cases}$$

onde E, R, C e L são constantes positivas e $vf(v) \geqslant 0, \forall\ v$. Temos assim um sistema de duas equações para ser resolvido.

As equações do problema anterior são chamadas *equações diferenciais*, uma vez que envolvem derivada das funções.

Se uma equação diferencial tem apenas uma variável independente, como é o caso das duas equações do nosso exemplo, então ela é uma *equação diferencial ordinária*, que é o assunto do nosso estudo neste capítulo. São exemplos de equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{dy}{dx} = x + y; \quad y' = x^2 + y^2; \quad y'' + (1 - y^2)y' + y = 0 \quad \text{e} \quad u'' + e^{-u} - e^{u} = f(x).$$

Cálculo Numérico Computacional

- Uma equação diferencial é uma equação que envolve uma função incógnita e suas derivadas;

- Exemplo: $\frac{dy}{dx} = 5x + 3,$ $\qquad y' = x^2 + y^2,$

$$y'' + (1 - y^2)y' + y = 0, \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

- A equação diferencial é chamada ordinária se a função incógnita depende de apenas 1 varável independente;

Cálculo Numérico Computacional

- A ordem de uma equação diferencial é a ordem da mais alta derivada que nela comparece;

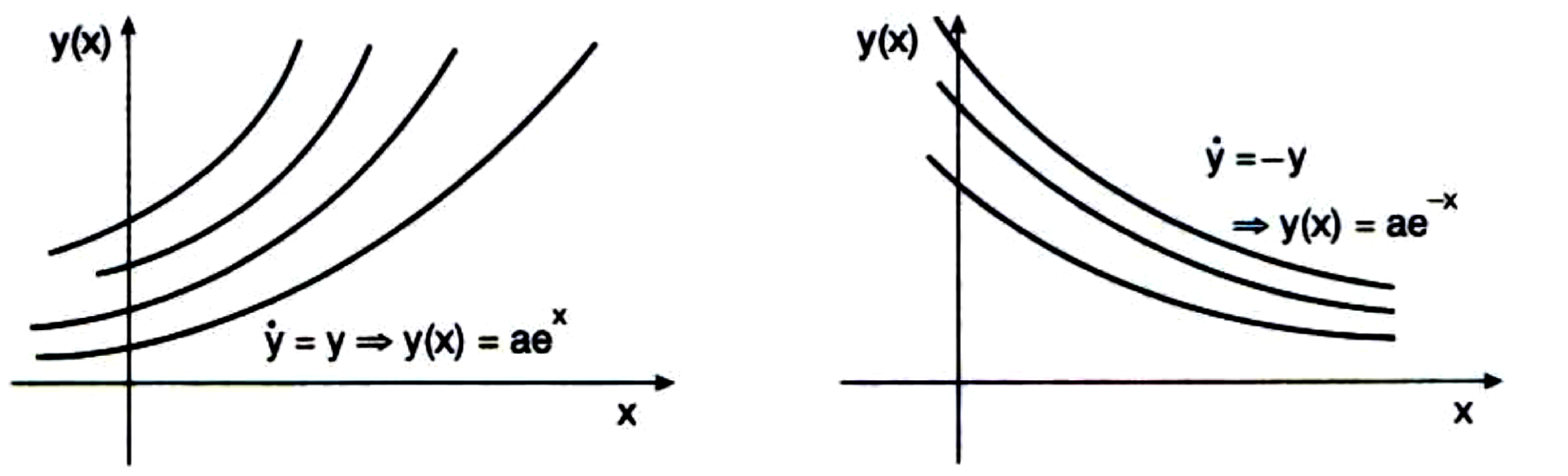
- Uma solução de uma EDO é uma função da variável independente que satisfaça a equação;

2. Exemplo

- A equação $\boldsymbol{y' = y}$ possui a família de soluções $\boldsymbol{y(x) = a \times e^{x}, a \in \mathbb{R}}$;

- Assim, estabelecemos o conceito de problema de valor inicial para encontrar uma solução única para a equação.

Cálculo Numérico Computacional



Cálculo Numérico Computacional

- Um problema de valor inicial (PVI) consiste em uma equação diferencial, juntamente com condições subsidiárias relativas à função incógnita, as quais são especificadas para um mesmo ponto;

- Exemplo: O PVI $y' = y,\ y(0) = 1$ possui a solução única $y(x) = e^x$;

- Consideremos aqui métodos numéricos para a resolução do seguinte problema de valor inicial:

Cálculo Numérico Computacional

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

- Os métodos numéricos determinam soluções aproximadas $y_i \approx y(x_i)$ onde $x_1, x_2, \ldots$ são pontos dados com $x_{i+1} - x_i = h$ escolhidos arbitrariamente;

- Geralmente, quanto menor h, melhor será a aproximação para a solução;

- Se para calcular y_i utilizamos apenas y_{i-1} teremos um método de passo um ou passo simples, e se usarmos mais valores, teremos um método de passo múltiplo.

Cálculo Numérico Computacional

3. Método de Passo Um (Euler)

- Vamos considerar:

- $y_1 = r(x_1),\ y' = f(x, y)$

Onde $r(x) = y_0 + (x - x_0) \times f(x_0, y_0)$

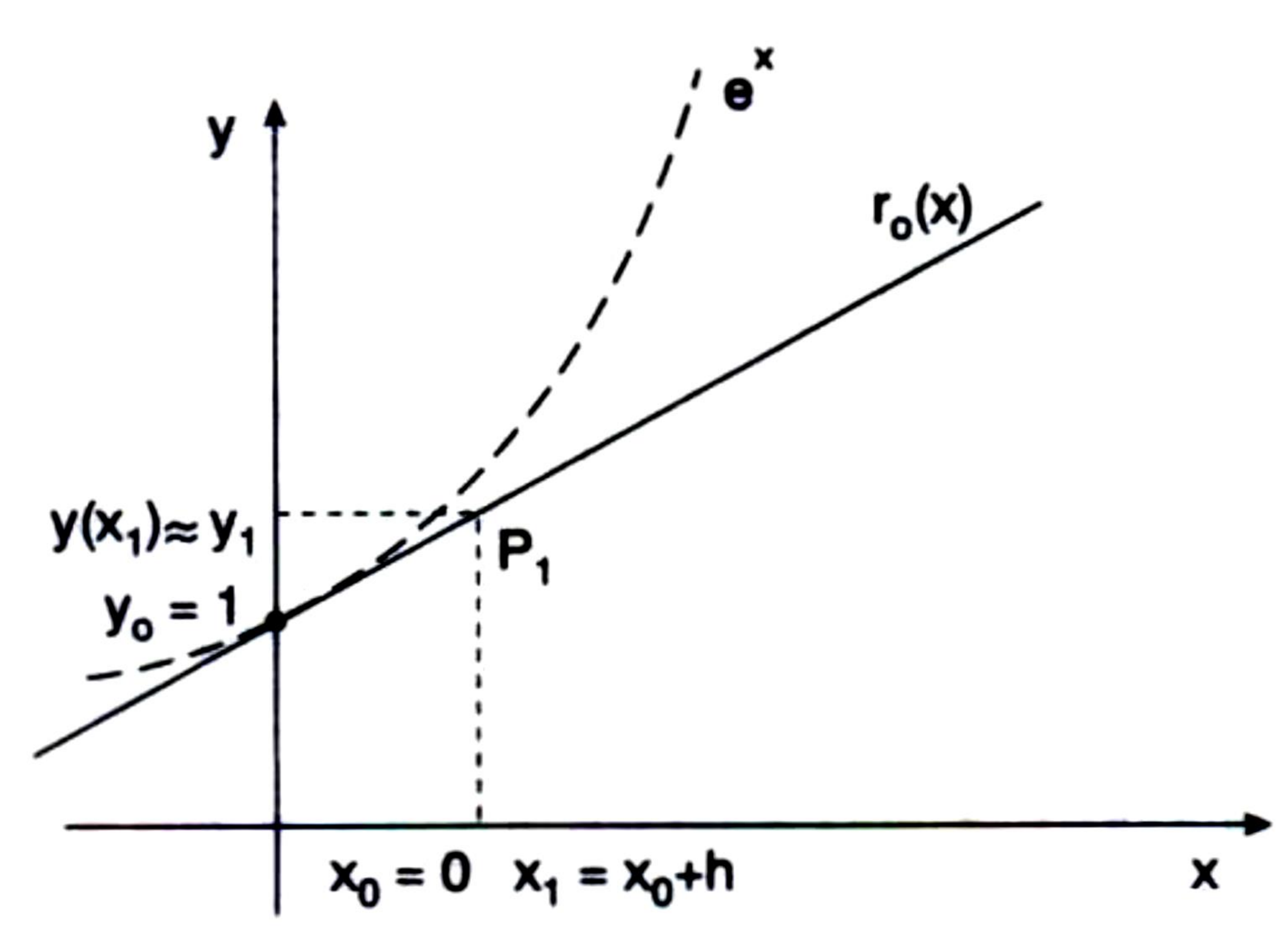
- Logo: $r(x_1) = y_0 + (x_1 - x_0) \times f(x_0, y_0)$

Ou $r(x_1) = y_0 + h \times f(x_0, y_0)$

- De modo geral: $\boxed{y_{k+1} = y_k + h \times f(x_k, y_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots}$

Cálculo Numérico Computacional

- Graficamente:



EXEMPLO

Cálculo Numérico Computacional

5. Método de Série de Taylor

- Suponha conhecidas as aproximações $y_1, y_2, \ldots, y_n$ para $y(x)$ em $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e considerando-se a série de Taylor de $y(x)$ em torno de $x = x_n$, ou:

Se y for suficientemente "suave", a série de Taylor de y(x) em torno de $x = x_n$ é

$$y(x) = y(x_n) + y'(x_n)(x - x_n) + y''(x_n)\frac{(x - x_n)^2}{2!} + \ldots + \frac{y^{(k)}(x_n)}{k!}(x - x_n)^k +$$

$$+ \frac{y^{(k+1)}(\xi_x)}{(k+1)!}(x - x_n)^{k+1}, \quad \xi_x \text{ entre } x_n \text{ e } x.$$

Cálculo Numérico Computacional

Assim,

$$y(x_{n+1}) \cong y(x_n) + y'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + y''(x_n)\frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{2!} + \dots +$$

$$+ y^{(k)}(x_n)\frac{(x_{n+1} - x_n)^k}{k!}$$

Cálculo Numérico Computacional

Se $y_n^{(j)}$ representa a aproximação para a j-ésima derivada da função y(x) em x_n: $y^{(j)}(x_n)$ e $h = x_{n+1} - x_n$, teremos:

$$y(x_{n+1}) \sim y_{n+1} = y_n + y_n' h + y_n'' \frac{h^2}{2} + \ldots + y_n^{(k)} \frac{h^k}{k!}$$

e o erro de truncamento é dado por

$$e(x_n) = \frac{y^{(k+1)}(\xi_{x_n})}{(k+1)!} h^{k+1}$$

Cálculo Numérico Computacional

Agora,

$y'(x) = f(x, y(x))$. Então

$y''(x) = f_x(x, y(x)) + f_y(x, y(x))y'(x) = f_x + f_y f$ em uma notação simplificada.

Assim, por exemplo, o método de série de Taylor de 2ª ordem é

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}[f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n)\, f(x_n, y_n)], \quad n = 0, 1, \ldots$$

Analogamente,

$$y'''(x) = f_{xx}(x, y(x)) + f_{xy}(x, y(x))y'(x) +$$

$$+ [f_{yx}(x, y(x)) + f_{yy}(x, y(x))y'(x)]y'(x) + f_y(x, y(x))\, y''(x) =$$

$$= f_{xx} + f_{xy}f + (f_{yx} + f_{yy}f)f + f_y(f_x + f_y f),$$

EXEMPLO

EXERCÍCIOS

Cálculo Numérico Computacional

Próxima aula:

Aula 18

- Solução Numérica de EDOs: Métodos de Runge-Kutta