Cálculo Numérico Computacional

Aula 07

Solução Numérica de Sistemas de Equações Lineares

Métodos Iterativos: Gauss-Seidel

Prof. Lucas Zanovello lucas.tahara@unesp.br

Cálculo Numérico Computacional

Agenda:

1. Revisão da aula passada – Gauss-Jacobi;
2. Método de Gauss-Seidel;
3. Exemplo;
4. Critério de Sassenfeld;
5. Exercícios;
6. Encerramento.

Cálculo Numérico Computacional

1. Revisão da aula passada – Gauss-Jacobi

- Aproximação do sistema $\boldsymbol{A}.\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ na forma $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}.\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}$;

- Define-se o processo iterativo:

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{C}.\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{g} \ , \qquad \boldsymbol{k} = \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots$$

- Também define-se algum critério de convergência.

Cálculo Numérico Computacional

- Vimos o exemplo:

$$\begin{cases} 10.x_1 & +2.x_2 & +x_3 & = 7 \\ x_1 & +5.x_2 & +x_3 & = -8 \\ 2.x_1 & +3.x_2 & +10.x_3 & = 6 \end{cases}$$

Reescrevendo na forma $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}.\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}$:

Cálculo Numérico Computacional

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 1/10 \quad (7 \quad -2.\,x_2^{(k)} \quad -x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = 1/5 \quad (-5 \quad -x_1^{(k)} \quad -x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = 1/10 \quad (6 \quad -2.\,x_1^{(k)} \quad -3.\,x_2^{(k)}) \end{cases}$$

- Após algumas iterações, com um valor definido para a tolerância ϵ, chegamos na solução aproximada.

Cálculo Numérico Computacional

2. Método de Gauss-Seidel

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 1/10\,(7 - 2.x_2^{(k)} - x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = 1/5\,(-5 - x_1^{\boxed{(k+1)}} - x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = 1/10\,(6 - 2.x_1^{\boxed{(k+1)}} - 3.x_2^{\boxed{(k+1)}}) \end{cases}$$

- Processo de atribuição progressiva.
- O método atualiza as variáveis durante o processo

3. Exemplo

$$\begin{cases} 5.x_1 & +x_2 & +x_3 & = 5 \\ 3.x_1 & +4.x_2 & +x_3 & = 6 \\ 3.x_1 & +3.x_2 & +6.x_3 & = 0 \end{cases}$$

Reescrevendo na forma $x = C.x + g$:

$$\begin{cases} x_1 = & 1/5 & (5 & -x_2 & -x_3) \\ x_2 = & 1/4 & (6 & -3.x_1 & -x_3) \\ x_3 = & 1/6 & (0 & -3.x_1 & -3.x_2) \end{cases}$$

Cálculo Numérico Computacional

Por Gauss-Seidel, estabelecemos:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 1/5\ (5 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = 1/4\ (6 - 3.x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = 1/6\ (0 - 3.x_1^{(k+1)} - 3.x_2^{(k+1)}) \end{cases}$$

Vamos atribuir inicialmente $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$

$x_1^{(0)}$ $x_2^{(0)}$ $x_3^{(0)}$

Cálculo Numérico Computacional

1ª Iteração – k=0:

$$\begin{cases} x_1^{(0+1)} = 1/5\ (5 \quad -x_2^{(0)} \quad -x_3^{(0)}) \\ x_2^{(0+1)} = 1/4\ (6 \quad -3.x_1^{(0+1)} \quad -x_3^{(0)}) \\ x_3^{(0+1)} = 1/6\ (0 \quad -3.x_1^{(0+1)} \quad -3.x_2^{(0+1)}) \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{5}.(5-0-0) = 1 \\ \frac{1}{4}.(6-3.(1)-0) = 0,75 \\ \frac{1}{6}.(-3.(1)-3.(0,75)) = -0,875 \end{cases}$$

Dessa forma, $x^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0,75 \\ -0,875 \end{Bmatrix}$

Cálculo Numérico Computacional

Devemos verificar o critério de parada. Vamos assumir o erro absoluto $\epsilon = 0,05$. Assim:

$$M^{(1)} = máx\left\{\left|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}\right|, \left|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}\right|, \left|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}\right|\right\} =$$

$$máx\{|1-0|, |0,75-0|, |-0,875-0|\} = 1 > \epsilon$$

Critério não satisfeito

Cálculo Numérico Computacional

2ª Iteração – k=1:

$$\begin{cases} x_1^{(1+1)} = 1/5\ (5 \quad -x_2^{(1)} \quad -x_3^{(1)}) \\ x_2^{(1+1)} = 1/4\ (6 \quad -3.x_1^{(1+1)} \quad -x_3^{(1)}) \\ x_3^{(1+1)} = 1/6\ (0 \quad -3.x_1^{(1+1)} \quad -3.x_2^{(1+1)}) \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{5}.(5 - 0,75 - (-0,875)) = 1,025 \\ \frac{1}{4}.(6 - 3.(1,025) - (-0,875)) = 0,95 \\ \frac{1}{6}.(-3.(1,025) - 3.(0,95)) = -0,9875 \end{cases}$$

Dessa forma, $x^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1,025 \\ 0,95 \\ -0,9875 \end{Bmatrix}$

Cálculo Numérico Computacional

Devemos verificar o critério de parada. Vamos assumir o erro absoluto $\epsilon = 0,05$. Assim:

$$M^{(2)} = máx\left\{\left|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}\right|, \left|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}\right|, \left|x_3^{(2)} - x_3^{(1)}\right|\right\} =$$

$$máx\{|1,025 - 1|, |0,95 - 0,75|, |-0,9875 - (-0,875)|\} = 0,2 > \epsilon$$

Critério não satisfeito

Cálculo Numérico Computacional

3ª Iteração – k=2:

$$\begin{cases} x_1^{(2+1)} = 1/5 \; (5 \quad -x_2^{(2)} \quad -x_3^{(2)}) \\ x_2^{(2+1)} = 1/4 \; (6 \quad -3.\,x_1^{(2+1)} \quad -x_3^{(2)}) \\ x_3^{(2+1)} = 1/6 \; (0 \quad -3.\,x_1^{(2+1)} \quad -3.\,x_2^{(2+1)}) \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{5}.\,(5 - 0,95 - (-0,9875)) = 1,0075 \\ \frac{1}{4}.\,(6 - 3.\,(1,0075) - (-0,9875)) = 0,99125 \\ \frac{1}{6}.\,(-3.\,(1,0075) - 3.\,(0,99125) = -0,999375 \end{cases}$$

Dessa forma, $x^{(3)} = \begin{Bmatrix} 1,0075 \\ 0,99125 \\ -0,999375 \end{Bmatrix}$

Cálculo Numérico Computacional

Devemos verificar o critério de parada. Vamos assumir o erro absoluto $\epsilon = 0,05$. Assim:

$$M^{(3)} = máx\left\{\left|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}\right|, \left|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}\right|, \left|x_3^{(2)} - x_3^{(1)}\right|\right\} =$$

$$máx\{|1,0075 - 1,025|, |0,991255 - 0,95|, |-0,999375 - (-0,9875)|\} = 0,04125 < \epsilon$$

Critério satisfeito

Dessa forma: $\bar{x} \approx x^{(3)} = \begin{Bmatrix} 1,0075 \\ 0,99125 \\ -0,999375 \end{Bmatrix}$

Cálculo Numérico Computacional

4. Critério de Sassenfeld

- No método de Gauss-Seidel, vamos utilizar o critério das linhas e o critério de Sassenfeld para verificar a convergência;

- Critério das linhas: $\boldsymbol{\alpha_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \left|a_{kj}\right| \;\; / \;\; \left|a_{kk}\right|}$

- $\boldsymbol{\alpha_k = máximo\{\alpha_k\} < 1}$

Cálculo Numérico Computacional

- Critério de Sassenfeld:

$$\beta_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}| + \cdots + |a_{1n}|}{|a_{11}|}$$

$$\beta_j = \frac{|a_{j1}|\beta_1 + |a_{j2}|\beta_2 + \cdots + |a_{jj-1}|\beta_{j-1} + |a_{jj+1}| + \cdots + |a_{jn}|}{|a_{jj}|}$$

Se $\beta = máximo\{\beta_j\} < 1$, então o método de Gauss-Seidel gera uma sequência convergente qualquer que seja $x^{(0)}$. Além disso, quanto menor for β, mais rápida será a convergência.

EXEMPLOS

EXERCÍCIOS

Cálculo Numérico Computacional

Próxima aula:

Aula 08

- Zeros de funções reais: Método da Bisseção