Cálculo Numérico Computacional

Aula 05

Solução Numérica de Sistemas de Equações Lineares

Métodos Diretos: Método de Decomposição LU

Prof. Lucas Zanovello lucas.tahara@unesp.br

Cálculo Numérico Computacional

Agenda:

1. Breve revisão da aula passada: Método de Eliminação de Gauss;
2. Método de Decomposição LU;
3. Exemplo;
4. Fórmulas gerais e Teorema;
5. Pseudocódigo;
6. Exercícios;
7. Encerramento.

Cálculo Numérico Computacional

1. Breve revisão da aula passada: Método de Eliminação de Gauss

- Consiste em transformar o sistema linear original num sistema linear equivalente com matriz dos coeficientes sendo uma matriz triangular superior, pois assim tem-se resolução imediata;

- Isso é feito por meio de operações elementares sobre as linhas;

Cálculo Numérico Computacional

Sistema linear: $\boldsymbol{A.x=b}$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \ddots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Cálculo Numérico Computacional

- Operações Elementares:

1. Trocar duas equações;
2. Multiplicar uma equação por uma constante não nula;
3. Adicionar um múltiplo de uma equação.

- Cada etapa consiste em efetuar estar 3 operações. Após um número finito de etapas, tem-se a solução do sistema.

$$\boldsymbol{A}.\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Longleftrightarrow \tilde{\boldsymbol{A}}.\boldsymbol{x} = \tilde{\boldsymbol{b}}$$

Cálculo Numérico Computacional

Exemplo

Seja o sistema de equações lineares:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Inicialmente, monta-se um matriz da forma $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]$, ou seja:

Cálculo Numérico Computacional

$$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{}_{[\boldsymbol{A}]} \quad \underbrace{}_{\{\boldsymbol{b}\}}$$

O primeiro passo é então eliminar da variável $\boldsymbol{x_1}$ das equações $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{2}, \dots, \boldsymbol{n}$. Para isso, precisamos dos elementos multiplicadores e do pivô.

Nesse caso, o pivô vale 3

$$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}] = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{-2} & \mathbf{3} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \longrightarrow L_0 \\ \longrightarrow L_1 \\ \longrightarrow L_2 \end{array}$$

Vamos denotar por $\boldsymbol{L_i}$ cada $\boldsymbol{i}$-ésima linha da matriz, sendo $\boldsymbol{L_0}$ a primeira linha. Assim, tem-se o processo inicial:

$$\boldsymbol{L_1 = L_1 - c.L_0}$$

Cálculo Numérico Computacional

A constante c, para a linha $\boldsymbol{i} = \mathbf{1}$, ou seja, a segunda linha, vale:

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{m}_{\mathbf{10}} = \frac{\boldsymbol{a}_{\mathbf{10}}}{\boldsymbol{a}_{\mathbf{00}}}$$

Sendo $\boldsymbol{a}_{\mathbf{00}}$ o pivô, ou seja, 3, e $\boldsymbol{a}_{\mathbf{10}}$ o primeiro multiplicador, isto é, 1. Assim:

$$\boldsymbol{m}_{\mathbf{10}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

Cálculo Numérico Computacional

Considerando então que estamos na etapa $\boldsymbol{k}$, e que $\boldsymbol{k}$ agora vale 1 (primeira etapa), denotamos o seguinte:

$$\boldsymbol{L_1^{(1)} = L_1^{(0)} - m_{10}.L_0^{(0)} = [1\ \ 1\ \ 2\ \ 2] - \frac{1}{3}.[3\ \ 2\ \ 4\ \ 1]}$$

$$\boxed{\boldsymbol{L_1^{(1)} = \left[0\ \ \frac{1}{3}\ \ \frac{2}{3}\ \ \frac{5}{3}\right]}}$$

Cálculo Numérico Computacional

Agora, para L_2, ainda na etapa $k = 1$ (primeira etapa), denotamos o seguinte:

$$m_{20} = \frac{a_{20}}{a_{00}} = \frac{4}{3}$$

$$L_2^{(1)} = L_2^{(0)} - m_{20}.L_0^{(0)} = [4\ \ 3\ \ -2\ \ 3] - \frac{4}{3}.[3\ \ 2\ \ 4\ \ 1]$$

$$L_2^{(1)} = [0\ \ \frac{1}{3}\ \ \frac{-22}{3}\ \ \frac{5}{3}]$$

Reescrevendo $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]$, temos:

$$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}] \cong \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1/3} & \mathbf{2/3} & \mathbf{5/3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1/3} & \mathbf{-22/3} & \mathbf{5/3} \end{bmatrix}$$

Agora, vamos para a segunda etapa, ou seja, $\boldsymbol{k} = \mathbf{2}$. Devemos aplicar o método novamente:

Cálculo Numérico Computacional

Para a linha 2 apenas, pois já eliminamos o suficiente da linha 1 ($\boldsymbol{L_1}$):

$$\boldsymbol{m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 1}$$

$$\boldsymbol{L_2^{(2)} = L_2^{(1)} - m_{21}.L_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & -\frac{22}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix} - 1.\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}}$$

$$\boldsymbol{L_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -8 & 0 \end{bmatrix}}$$

Cálculo Numérico Computacional

Reescrevendo $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]$, temos:

$$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}] \cong \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1/3} & \mathbf{2/3} & \mathbf{5/3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-8} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Assim, concluímos que:

$$\mathbf{-8}\boldsymbol{x_3} = \mathbf{0} \rightarrow \boldsymbol{x_3} = \mathbf{0}$$

Cálculo Numérico Computacional

Aplicando a solução retroativa, temos a solução do sistema:

$$x_3 = 0, \;\; x_2 = 5 \;\; \text{e} \;\; x_1 = -3$$

Vetorialmente:

$$\boxed{x = \begin{Bmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{Bmatrix}}$$

Estratégia de Pivoteamento Parcial

Esta estratégia consiste em:

1. No início da etapa $\boldsymbol{k}$ da fase de eliminação, escolher para pivô o elemento de maior módulo entre os coeficientes $\boldsymbol{a_{ik-1}^{(k-1)}}$, $\boldsymbol{i = k-1, k, k+1, \dots, n}$;

2. Trocar as linhas $\boldsymbol{k-1}$ e $\boldsymbol{i}$ se for necessário.

Cálculo Numérico Computacional

2. Método de Decomposição LU

- Também conhecido por *fatoração LU*, é um método que consiste em decompor a matriz A (dos coeficientes) em um produto de dois ou mais fatores e assim resolver uma sequência de sistemas lineares que levará à solução do sistema linear original.

- Considere $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{CD}$, de forma que $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ pode ser escrito por:

$$(\boldsymbol{CD})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

Cálculo Numérico Computacional

- Se $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{x}$, então resolver $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ é o mesmo que resolver $\boldsymbol{C}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ e, na sequência, $\boldsymbol{D}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$;

- A vantagem da fatoração é a possibilidade de se resolver qualquer sistema linear que tenha $\boldsymbol{A}$ como matriz de coeficientes;

- Mais detalhes podem ser encontrados em FRANCO, N. B., Cálculo numérico. Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2007.

Cálculo Numérico Computacional

3. Exemplo

- Vamos estudar o método a partir de um exemplo. Seja a matriz ***A*** dada por:

$$[A] = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{-2} \end{bmatrix}$$

Buscamos uma fatoração na forma:

Cálculo Numérico Computacional

$$[A] = [L].[U]$$

E que satisfaça o seguinte:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{10} & 1 & 0 \\ l_{20} & l_{21} & 1 \end{bmatrix}}_{[L]} . \underbrace{\begin{bmatrix} u_{00} & u_{01} & u_{02} \\ 0 & u_{11} & u_{12} \\ 0 & 0 & u_{22} \end{bmatrix}}_{[U]}$$

A matriz L é triangular inferior com diagonal unitária e a matriz U é triangular superior

Cálculo Numérico Computacional

Assim:

$$[A] = \begin{bmatrix} u_{00} & u_{01} & u_{02} \\ l_{10}.\,u_{00} & l_{10}.\,u_{01} + u_{11} & l_{10}.\,u_{02} + u_{12} \\ l_{20}.\,u_{00} & l_{20}.\,u_{01} + l_{21}.\,u_{11} & l_{20}.\,u_{02} + l_{21}.\,u_{12} + u_{22} \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, imediatamente, tem-se:

$$u_{00} = 3,\ u_{01} = 2,\ u_{02} = 4$$

Cálculo Numérico Computacional

Resolvendo para os outros termos:

$$l_{10}.3 = 1$$
$$\boxed{l_{10} = \frac{1}{3}}$$

$$\frac{1}{3}.2 + u_{11} = 1$$
$$\boxed{u_{11} = \frac{1}{3}}$$

$$\frac{1}{3}.4 + u_{12} = 2$$
$$\boxed{u_{12} = \frac{2}{3}}$$

$$l_{20}.3 = 4$$
$$\boxed{l_{20} = \frac{4}{3}}$$

$$\frac{4}{3}.2 + l_{21}.\frac{1}{3} = 3$$
$$\boxed{l_{21} = 1}$$

$$\frac{4}{3}.4 + 1.\frac{2}{3} + u_{22} = -2$$
$$\boxed{u_{22} = -8}$$

Cálculo Numérico Computacional

Portanto:

$$[\boldsymbol{L}] = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{l_{10}} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{l_{20}} & \boldsymbol{l_{21}} & \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1/3} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{4/3} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{U}] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u_{00}} & \boldsymbol{u_{01}} & \boldsymbol{u_{02}} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{u_{11}} & \boldsymbol{u_{12}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{u_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1/3} & \mathbf{2/3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-8} \end{bmatrix}$$

Cálculo Numérico Computacional

Se $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}.\boldsymbol{U}$, então para $\boldsymbol{A}.\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, tem-se $\boldsymbol{L}.\boldsymbol{U}.\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

- Definindo $\boldsymbol{U}.\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, tem-se $\boldsymbol{L}.\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$;
- A solução destes dois sistemas triangulares fornece a solução do sistema linear original.

Cálculo Numérico Computacional

Resolvendo:

Usando o método de Decomposição LU, resolva o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 3.x_1 + 2.x_2 + 4.x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2.x_3 = 2 \\ 4.x_1 + 3.x_2 - 2.x_3 = 3 \end{cases}$$

Cálculo Numérico Computacional

Temos que:

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad \{b\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{10} & 1 & 0 \\ l_{20} & l_{21} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 4/3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[U] = \begin{bmatrix} u_{00} & u_{01} & u_{02} \\ 0 & u_{11} & u_{12} \\ 0 & 0 & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

Cálculo Numérico Computacional

Por definição, temos:

$$\boldsymbol{L}.\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 4/3 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} y_1 = 1 \\ y_2 = 5/3 \\ y_3 = 0 \end{matrix}$$

Cálculo Numérico Computacional

E, finalmente:

$$\boldsymbol{U.x = y}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 5/3 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = -3 \\ x_2 = 5 \\ x_3 = 0 \end{matrix}$$

Cálculo Numérico Computacional

4. Fórmulas gerais e Teorema

As fórmulas gerais para obtenção das matrizes $\boldsymbol{L}$ e $\boldsymbol{U}$ são:

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}.u_{kj} \quad , \qquad i \leq j$$

$$l_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}.u_{kj} \right) / u_{jj} \quad , \qquad i > j$$

Cálculo Numérico Computacional

- O teorema a seguir fornece condições sob as quais a matriz $\boldsymbol{A}$ pode ser decomposta no produto $\boldsymbol{L}.\boldsymbol{U}$:

Teorema: A matriz $\boldsymbol{A} = \left[\boldsymbol{a_{ij}}\right]_{\boldsymbol{n \times n}}$ pode ser decomposta no produto $\boldsymbol{L}.\boldsymbol{U}$ onde $\boldsymbol{L}$ é uma matriz triangular inferior e $\boldsymbol{U}$ triangular superior se os menores principais $\boldsymbol{A_k}$ de $\boldsymbol{A}$ forem não singulares, isto é:

$$|\boldsymbol{a_{11}}| \neq \boldsymbol{0}\ , \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} \end{vmatrix} \neq \boldsymbol{0}\ , \ldots , |\boldsymbol{A}| \neq \boldsymbol{0}$$

Cálculo Numérico Computacional

- Do exemplo anterior:

$$|a_{11}| = 3 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Assim, é possível a decomposição.

Cálculo Numérico Computacional

- É possível obter as matrizes $\boldsymbol{L}$ e $\boldsymbol{U}$ a partir do método de Gauss;

EXEMPLO NA LOUSA

- Esse processo permite a utilização de pivoteamento parcial;

- Isso requer o conhecimento do que é uma matriz de permutação.

- Uma matriz quadrada de ordem n é uma *matriz de permutação* se pode ser obtida da matriz identidade de ordem n permutando-se suas linhas ou colunas;

- Pré-multiplicando-se uma matriz A por uma matriz de permutação P, obtém-se a matriz $P.A$ com as linhas permutadas, e esta permutação de linhas é a mesma efetuada na matriz identidade para se obter P.

Cálculo Numérico Computacional

- Exemplo:

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \text{ e } \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{9} \\ \mathbf{2} & \mathbf{6} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}.\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{9} \\ \mathbf{2} & \mathbf{6} & \mathbf{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{9} \\ \mathbf{2} & \mathbf{6} & \mathbf{5} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

Cálculo Numérico Computacional

- Neste caso, pode-se notar que foram feitas as permutações:

$$\boldsymbol{L_1} \leftarrow \boldsymbol{L_2}$$
$$\boldsymbol{L_2} \leftarrow \boldsymbol{L_3}$$
$$\boldsymbol{L_3} \leftarrow \boldsymbol{L_1}$$

- Ao se obter os fatores $\boldsymbol{L}$ e $\boldsymbol{U}$ por meio deste processo com pivoteamento parcial, deve-se atentar para o fato de que $\boldsymbol{A'}$ é a matriz com linhas permutadas, e por consequência, o vetor $\boldsymbol{b'}$ é o vetor com linhas permutadas, ou seja, $\boldsymbol{b'} = \boldsymbol{P}.\boldsymbol{b}$.

Cálculo Numérico Computacional

- Assim, resolve-se os sistemas triangulares:

a) $\boldsymbol{L.y = P.b;}$

b) $\boldsymbol{U.x = y}$

- Vamos resolver o seguinte sistema com pivoteamento parcial por meio de decomposição $\boldsymbol{LU}$: LOUSA

$$\begin{cases} 3.x_1 - 4.x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 2.x_2 + 2.x_3 = 3 \\ 4.x_1 - 3.x_3 = -2 \end{cases}$$

Este exemplo está no livro RUGGIERO, M.A.G., LOPES,V.L.R., Cálculo Numérico – Aspectos teóricos e Computacionais, 2ª edição, MAKRON Books, 1996.

Cálculo Numérico Computacional

5. Pseudocódigo

Cálculo dos fatores:

```
Para i=1,...,n
        p(i)=i
Fimpara
```

```
Para k=1,...,(n-1)
        pv=|a(k,k)|
        r=k
        Para i=(k+1),...,n
                Se (|a(i,k)|>pv),faça
                pv=|a(i,k)|
                r=i
                Fimse
        Fimpara
        Se pv=0, pare → A é singular
        Se r ≠ k, faça
                aux=p(k)
                p(k)=p(r)
                p(r)=aux
                Para j=1,...,n
                        aux=a(k,j)
                        a(k,j)=a(r,j)
                        a(r,j)=aux
                Fimpara
        Fimse
        Para i=(k+1),...,n
                m=a(i,k)/a(k,k)
                a(i,k)=m
                Para j=(k+1),...,n
                        a(i,j)=a(i,j)-m*a(k,j)
                Fimpara
        Fimpara
Fimpara
```

Cálculo Numérico Computacional

Resolução dos sistemas triangulares

```
Para i=1,...,n
        r=p(i)
        c(i)=b(r)
Fimpara
```

$$c = P.b$$

```
Para i=1,...,n
        soma=0
        Para j=1,...,(i-1)
                soma=soma+a(i,j)*y(j)
        Fimpara
                y(i)=c(i)-soma
Fimpara
```

$$\Rightarrow L.y = c$$

```
Para i=n,(n-1)...,1
        soma=0
        Para j=(i+1),...,n
                soma=soma+a(i,j)*x(j)
        Fimpara
                x(i)=(y(i)-soma)/a(i,i)
Fimpara
```

$$\Rightarrow U.x = y$$

EXERCÍCIOS

Cálculo Numérico Computacional

Próxima aula:

Aula 06

- Métodos iterativos: Gauss-Jacobi;
- Exercícios.