Cálculo Numérico Computacional

Aula 04

Solução Numérica de Sistemas de Equações Lineares

Métodos Diretos:

Método de Eliminação de Gauss

Prof. Lucas Zanovello lucas.tahara@unesp.br

Cálculo Numérico Computacional

Agenda:

1. Solução Numérica de Sistemas de Equações Lineares: Métodos diretos;
2. Descrição do Método de Eliminação de Gauss;
3. Exemplo;
4. Pseudocódigo;
5. Exercícios;
6. Encerramento.

Cálculo Numérico Computacional

1. Solução Numérica de Sistemas de Equações Lineares: Métodos diretos

- Problemas que contém muitas variáveis dependentes;
- Engenharia, negócios, estatística, economia etc.
- Dois tipos de métodos para solução de um sistema linear (numericamente falando).

Cálculo Numérico Computacional

Métodos Diretos

Teoricamente, fornecem a solução exata após um número finito de operações. Devido aos erros de arredondamento, entretanto, isso não ocorre na prática.

Métodos Iterativos

A partir de um valor inicial $\boldsymbol{x_0}$, são determinadas sucessivas aproximações para a solução do sistema (iterações).

Cálculo Numérico Computacional

2. Descrição do Método de Eliminação de Gauss

- Consiste em transformar o sistema linear original num sistema linear equivalente com matriz dos coeficientes sendo uma matriz triangular superior, pois assim tem-se resolução imediata;

- Sistemas lineares equivalentes são aqueles que possuem a mesma solução.

Cálculo Numérico Computacional

Sistema linear: $\boldsymbol{A.x = b}$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ddots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Cálculo Numérico Computacional

- Resolvendo o sistema na forma de matriz triangular superior, anteriormente, tem-se a solução do problema, pois:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

E assim:

$$\boxed{x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}}$$

Cálculo Numérico Computacional

- O objetivo do método é, dessa forma, partindo de um sistema linear, obter uma matriz triangular superior, em que a solução é a mesma do sistema original;

- Isso é feito por meio de operações elementares sobre as linhas;

- Mais informações acerca do teorema que suporta esse processo podem ser encontradas em BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. I. R.; RIBEIRO, V. L. F. & WETZLER, H. G., *Álgebra Linear*. Harbra, 1980.

Cálculo Numérico Computacional

- Operações Elementares:

1. Trocar duas equações;
2. Multiplicar uma equação por uma constante não nula;
3. Adicionar um múltiplo de uma equação.

- Cada etapa consiste em efetuar estar 3 operações. Após um número finito de etapas, tem-se a solução do sistema.

$$\boldsymbol{A.x = b} \Longleftrightarrow \boldsymbol{\tilde{A}.x = \tilde{b}}$$

Cálculo Numérico Computacional

3. Exemplo

Seja o sistema de equações lineares:

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 \\
x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\
4x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 3
\end{aligned}
$$

Inicialmente, monta-se um matriz da forma $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]$, ou seja:

Cálculo Numérico Computacional

$$[A|b] = \left[\begin{matrix} \underbrace{\begin{matrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{matrix}}_{[A]} & \underbrace{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}}_{\{b\}} \end{matrix}\right]$$

O primeiro passo é então eliminar da variável x_1 das equações $i = 2, \ldots, n$. Para isso, precisamos dos elementos multiplicadores e do pivô.

Cálculo Numérico Computacional

Nesse caso, o pivô vale 3

$$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}] = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{-2} & \mathbf{3} \end{array}\right] & \begin{array}{l} \longrightarrow L_0 \\ \longrightarrow L_1 \\ \longrightarrow L_2 \end{array} \end{array}$$

Vamos denotar por $\boldsymbol{L_i}$ cada $\boldsymbol{i}$-ésima linha da matriz, sendo $\boldsymbol{L_0}$ a primeira linha. Assim, tem-se o processo inicial:

$$\boldsymbol{L_1 = L_1 - c.L_0}$$

Cálculo Numérico Computacional

A constante c, para a linha $\boldsymbol{i} = \mathbf{1}$, ou seja, a segunda linha, vale:

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{m}_{\mathbf{10}} = \frac{\boldsymbol{a}_{\mathbf{10}}}{\boldsymbol{a}_{\mathbf{00}}}$$

Sendo $\boldsymbol{a}_{\mathbf{00}}$ o pivô, ou seja, 3, e $\boldsymbol{a}_{\mathbf{10}}$ o primeiro multiplicador, isto é, 1. Assim:

$$\boldsymbol{m}_{\mathbf{10}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

Cálculo Numérico Computacional

Considerando então que estamos na etapa $\boldsymbol{k}$, e que $\boldsymbol{k}$ agora vale 1 (primeira etapa), denotamos o seguinte:

$$\boldsymbol{L_1^{(1)} = L_1^{(0)} - m_{10}.\,L_0^{(0)} = [1\ \ 1\ \ 2\ \ 2] - \frac{1}{3}.\,[3\ \ 2\ \ 4\ \ 1]}$$

$$\boxed{\boldsymbol{L_1^{(1)} = \left[0\ \ \frac{1}{3}\ \ \frac{2}{3}\ \ \frac{5}{3}\right]}}$$

Cálculo Numérico Computacional

Agora, para L_2, ainda na etapa $k = 1$ (primeira etapa), denotamos o seguinte:

$$m_{20} = \frac{a_{20}}{a_{00}} = \frac{4}{3}$$

$$L_2^{(1)} = L_2^{(0)} - m_{20}.L_0^{(0)} = [4\ \ 3\ \ -2\ \ 3] - \frac{4}{3}.[3\ \ 2\ \ 4\ \ 1]$$

$$L_2^{(1)} = \left[0\ \ \frac{1}{3}\ \ \frac{-22}{3}\ \ \frac{5}{3}\right]$$

Cálculo Numérico Computacional

Reescrevendo $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]$, temos:

$$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}] \cong \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1/3} & \mathbf{2/3} & \mathbf{5/3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1/3} & \mathbf{-22/3} & \mathbf{5/3} \end{bmatrix}$$

Agora, vamos para a segunda etapa, ou seja, $\boldsymbol{k} = \mathbf{2}$. Devemos aplicar o método novamente:

Cálculo Numérico Computacional

Para a linha 2 apenas, pois já eliminamos o suficiente da linha 1 ($\boldsymbol{L_1}$):

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 1$$

$$L_2^{(2)} = L_2^{(1)} - m_{21}.L_1^{(1)} = \left[0 \quad \frac{1}{3} \quad -\frac{22}{3} \quad \frac{5}{3}\right] - 1.\left[0 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{5}{3}\right]$$

$$L_2^{(2)} = [0 \quad 0 \quad -8 \quad 0]$$

Cálculo Numérico Computacional

Reescrevendo $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]$, temos:

$$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}] \cong \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1/3} & \mathbf{2/3} & \mathbf{5/3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-8} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Assim, concluímos que:

$$-\mathbf{8}\boldsymbol{x}_{\mathbf{3}} = \mathbf{0} \;\rightarrow\; \boldsymbol{x}_{\mathbf{3}} = \mathbf{0}$$

Cálculo Numérico Computacional

Aplicando a solução retroativa, temos a solução do sistema:

$$\boldsymbol{x_3 = 0,\ \ x_2 = 5\ \ \text{e}\ \ x_1 = -3}$$

Vetorialmente:

$$\boxed{\boldsymbol{x = \begin{Bmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{Bmatrix}}}$$

Cálculo Numérico Computacional

4. Pseudocódigo

Seja um sistema linear $\boldsymbol{A.x = b}$ sendo $\boldsymbol{A_{n\times n}}$, $\boldsymbol{x_{n\times 1}}$ e $\boldsymbol{b_{n\times 1}}$.

Supor que o elemento que está na posição $\boldsymbol{a_{kk}}$ é diferente de zero no início da etapa $\boldsymbol{k}$. Na fase de eliminação, temos:

```
Para k = 1, ..., n − 1
    Para i = k + 1, ..., n
        m = a_ik / a_kk
        a_ik = 0
        Para j = k + 1, ..., n
            a_ij = a_ij − m.a_kj
            b_i = b_i − m.b_k
        Fim
    Fim
Fim
```

Cálculo Numérico Computacional

Agora, para a fase de resolução do sistema:

$x_n = b_n / a_{nn}$
Para $k = (n-1), \dots, 2, 1$
    $s = 0$
    Para $j = (k+1), \dots, n$
        $s = s + a_{kj} x_j$
        $x_k = (b_k - s)/a_{kk}$
    Fim
Fim

Cálculo Numérico Computacional

- Nós vimos que o método da Eliminação de Gauss exige o cálculo de multiplicadores em cada etapa do processo. Mas, e se o pivô for nulo? E se o pivô estiver próximo de zero?

- Nestes casos, considerando que a máquina opera com aritmética de precisão finita, os pivôs próximos de zero dão origem a multiplicadores bem maiores que a unidade, e isto resulta na ampliação dos erros de arredondamento;

- Para contornar esta situação, usamos *estratégias de pivoteamento.*

Cálculo Numérico Computacional

Estratégia de Pivoteamento Parcial

Esta estratégia consiste em:

1. No início da etapa $\boldsymbol{k}$ da fase de eliminação, escolher para pivô o elemento de maior módulo entre os coeficientes $\boldsymbol{a_{ik-1}^{(k-1)}}$, $\boldsymbol{i = k-1, k, k+1, \ldots, n}$;

2. Trocar as linhas $\boldsymbol{k-1}$ e $\boldsymbol{i}$ se for necessário.

Veremos um caso nos exercícios.

EXERCÍCIOS

Cálculo Numérico Computacional

Próxima aula:

Aula 05

- Métodos diretos: decomposição LU;
- Exercícios.