

## Soluções Numéricas de Equações Diferenciais Ordinárias Equações de Ordem Superior



#### Agenda:

- 1. Considerações iniciais;
- 2. Exemplos



#### 1. Considerações iniciais

- Este tipo de equação pode ser transformado em um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem;
- Como exemplo, considerando o PVI:

$$y'' = x^2 + y^2 \cdot sen(x + y) + (x^2 - 1) \cdot y - cos(x) \cdot y'$$
  
 $y(0) = 1, 1$   $y'(0) = 2, 2$ 

• Devemos efetuar uma mudança de variável na forma y' = z, para transformar esta equação em duas equações de 1ª ordem, ou seja:



$$\begin{cases} y' = z \\ z' = x^2 + y^2 . sen(x + y) + (x^2 - 1) . y - cos(x) . z \end{cases}$$

Com as condições iniciais: y(0) = 1, 1 z(0) = 2, 2

Ou então:

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z) \\ z' = g(x, y, z) \end{cases}$$
$$y(x_0) = y_0 \qquad z(x_0) = z_0$$



• De modo geral, uma EDO de ordem n pode ser transformada em um sistema com n EDOs de primeira ordem.

#### EXEMPLO

Dado o PVI

$$y'' = 4. y' - 3. y - x$$
$$y(0) = \frac{4}{9} \qquad y'(0) = \frac{7}{3}$$

Faça uma iteração do método de Heun de  $2^a$  ordem usando h = 0, 25.



• Inicialmente, vamos fazer uma mudança de variável na forma:

$$y' = z$$

Dessa forma, teremos:

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = 4 \cdot z - 3 \cdot y - x \end{cases}$$

Com: 
$$y(0) = \frac{4}{9}$$

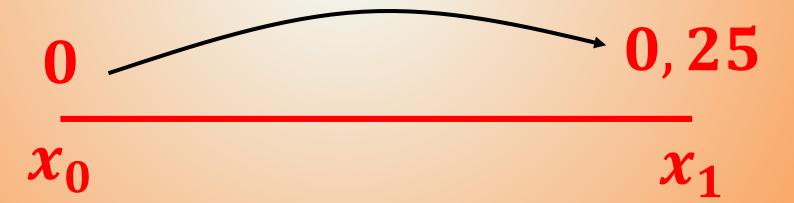
$$\mathbf{z}(\mathbf{0}) = \frac{7}{3}$$



DADOS DO PROBLEMA:

$$f(x, y, z) = z$$
  
 $g(x, y, z) = 4.z - 3.y - x$ 

Vamos efetuar apenas uma iteração, ou seja:





• Devemos então adaptar nosso método para resolver este sistema;

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \cdot [f(x_n, y_n, z_n) + f(x_n + h, y_n + h, y'_n, z_n + h, z'_n)]$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2} \cdot [g(x_n, y_n, z_n) + g(x_n + h, y_n + h, y'_n, z_n + h, z'_n)]$$



•  $1^{\text{a}}$  iteração: n = 0

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} \cdot [f(x_0, y_0, z_0) + f(x_0 + h, y_0 + h, y'_0, z_0 + h, z'_0)]$$

$$z_1 = z_0 + \frac{h}{2} \cdot [g(x_0, y_0, z_0) + g(x_0 + h, y_0 + h, y_0', z_0 + h, z_0')]$$

#### Temos que:

• 
$$y_0 + h.y_0' = \frac{4}{9} + 0.25.\frac{7}{3} = 1.027778$$



• 
$$z_0 + h.z_0' = \frac{7}{3} + 0.25.\left(4.\frac{7}{3} - 3.\frac{4}{9} - 0\right) = 4.3333333$$

• Assim:

$$y_1 = \frac{4}{9} + \frac{0,25}{2} \cdot \left[ \frac{7}{3} + 4,333333 \right] = 1,27777778$$

• Agora, para z:

$$z_1 = z_0 + \frac{h}{2} \cdot [g(x_0, y_0, z_0) + g(x_0 + h, y_0 + h, y_0', z_0 + h, z_0')]$$



• 
$$\mathbf{z_1} = \frac{7}{3} + \frac{0.25}{2} \cdot \left[ \left( \mathbf{4} \cdot \frac{7}{3} - \mathbf{3} \cdot \frac{4}{9} - \mathbf{0} \right) + (4.4, 3333333 - 3.1, 027777778 - 0, 25) \right]$$

•  $z_1 = 5,08333336$ 

#### Assim:

$$y(0,25) \approx y_1 = 1,2777778$$
  
 $y'(0,25) \approx z_1 = 5,0833336$ 



# EXEMPLOS COMPUTACIONAIS



### MUITO OBRIGADO!

