# Cálculo Numérico Computacional

## Aula 18

# Soluções Numéricas de Equações Diferenciais Ordinárias

# Métodos de Runge-Kutta

# Cálculo Numérico Computacional

**Agenda:**

1. Considerações iniciais;
2. Métodos de Runge-Kutta de 1ª ordem;
3. Métodos de Runge-Kutta de 2ª ordem;
4. Exemplo;
5. Método de Runge-Kutta de 4ª ordem;
6. Método de Runge-Kutta Fehlberg;
7. Exemplo;
8. Exercícios.

# Cálculo Numérico Computacional

## 1. Considerações iniciais

- A ideia básica destes métodos é aproveitar as qualidades dos métodos de série de Taylor e ao mesmo tempo eliminar seu maior defeito (cálculo de derivadas de $f(x, y)$;

- Estes métodos caracterizam-se por três propriedades:

i) São de passo um;
ii) Não exigem o cálculo de qualquer derivada de $f(x, y)$;
iii) Após expandir $f(x, y)$ por Taylor para função de duas variáveis em torno de $(x_n, y_n)$ e agrupar os termos semelhantes, sua expressão coincide com a do método de série de Taylor de mesma ordem.

# Cálculo Numérico Computacional

## 2. Métodos de Runge-Kutta de 1ª ordem

- Vimos que o método de Euler é um método de série de Taylor de 1ª ordem:

$$\boldsymbol{y_{n+1} = y_n + h.\, y'_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots}$$

Assim:

$$\boldsymbol{y_{n+1} = y_n + h.\, f(x_n, y_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots}$$

E o método de Euler satisfaz as três propriedades anteriores, que o caracterizam como um método de Runge-Kutta de ordem $\boldsymbol{p = 1}$.

# Cálculo Numérico Computacional

## 3. Métodos de Runge-Kutta de 2ª ordem

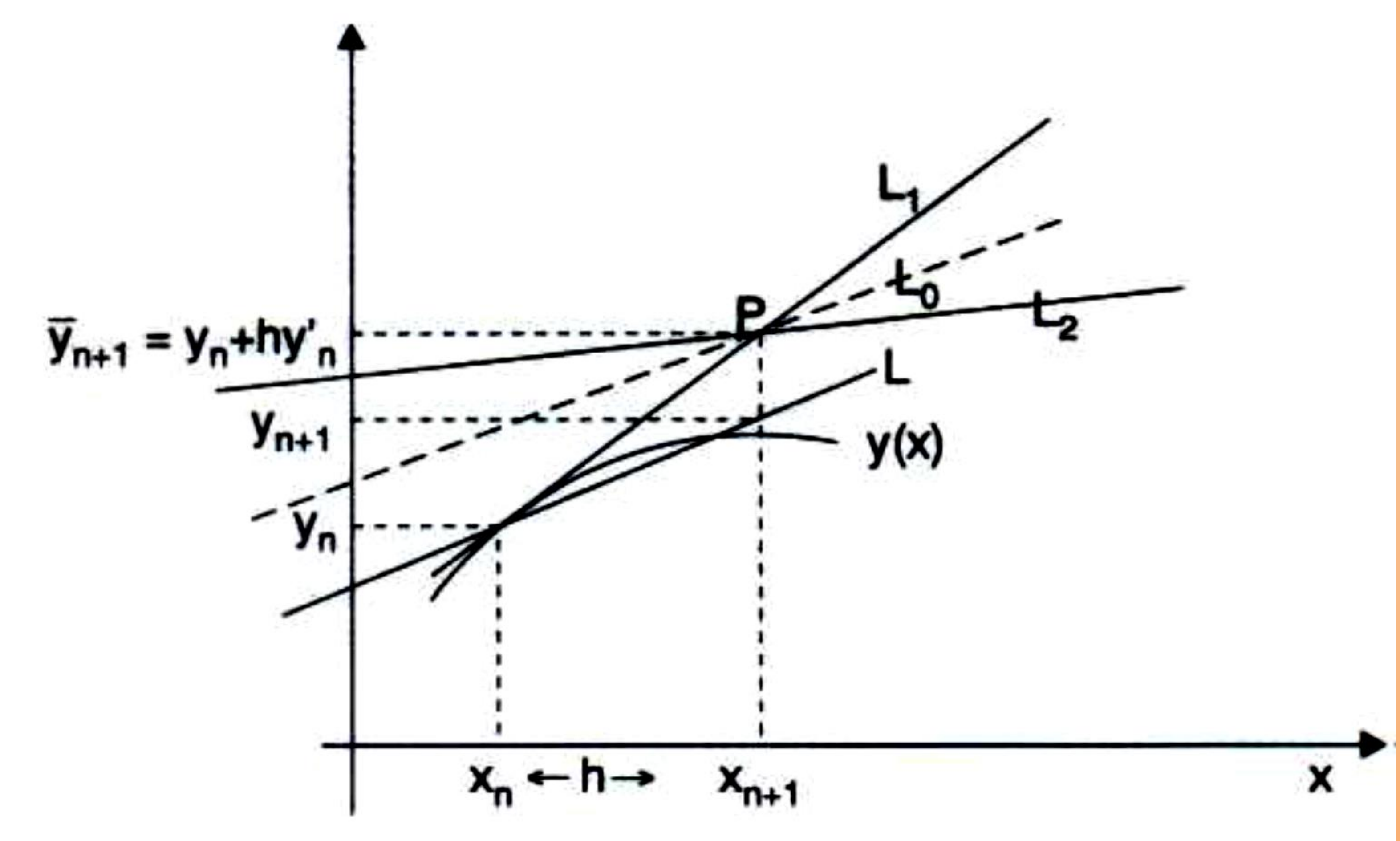
- Vamos expor inicialmente um método particular, que é o método de Heun, ou método de Euler Aperfeiçoado;

- Esse método consiste em fazer mudanças no método de Euler para assim conseguir um método de ordem mais elevada;

- Vamos ver posteriormente que estes métodos possuem uma forma geral, o que possibilita infinitos métodos pertencentes a esta classe.

# Cálculo Numérico Computacional

- Graficamente:



# Cálculo Numérico Computacional

Dada a aproximação $(x_n, y_n)$, supomos a situação ideal em que a curva desenhada com linha cheia seja a solução $y(x)$ da nossa equação (isto só acontece mesmo em $(x_0, y_0)$).

Por $(x_n, y_n)$ traçamos a reta $L_1$ cujo coeficiente angular é $y'_n = f(x_n, y_n)$, ou seja,

$$\boxed{L_1 : z_1(x) = y_n + (x - x_n)y'_n = y_n + (x - x_n)f(x_n, y_n).}$$

Assim, dado o passo h, $z_1(x_{n+1}) = z_1(x_n + h) = y_{n+1}$ do método de Euler, que chamamos aqui de $\bar{y}_{n+1}$. Seja $P = (x_n + h, y_n + hy'_n) = (x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})$. Por P agora, traçamos a reta $L_2$, cujo coeficiente angular é $f(x_n + h, y_n + hy'_n) = f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})$:

$$\boxed{L_2 : z_2(x) = (y_n + hy'_n) + [x - (x_n + h)]\, f(x_n + h, y_n + hy'_n)}$$

# Cálculo Numérico Computacional

A reta pontilhada $L_0$ passa por P e tem por inclinação a média das inclinações das retas $L_1$ e $L_2$, ou seja, sua inclinação é $[f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hy'_n)]/2$.

A reta L passa por $(x_n, y_n)$ e é paralela à reta $L_0$, donde

$$\boxed{L : z(x) = y_n + (x - x_n)\,[f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hy'_n)]/2.}$$

O valor fornecido para $y_{n+1}$ pelo método de Euler Aperfeiçoado é $z(x_n + h) = z(x_{n+1})$, ou seja

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\,[f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hy'_n)], \quad n = 0, 1, 2, \ldots}$$

- Pode-se mostrar que este método é um método de RK de 2ª ordem. Maiores detalhes podem ser encontrados nas referências contidas no Plano de Ensino.

# EXEMPLO

# Cálculo Numérico Computacional

- Calcule $y(1,6)$ para o P.V.I.: $y' = 2.x,\ y(1) = 1$ pelo método de Heun de 2ª ordem com $h = 0,2$.

- Solução: Neste caso, temos $f(x,y) = 2.x,\ x_0 = 1,\ y_0 = 1,\ h = 0,2.$

- Queremos calcular $y(1,6)$, ou seja, teremos que calcular 3 iterações.

$$\begin{array}{cccc} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline 1 & 1,2 & 1,4 & 1,6 \end{array}$$

# Cálculo Numérico Computacional

- **1ª Iteração: $n = 0$**

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}.\left[f(x_0, y_0) + f\left(x_0 + h, y_0 + h.f(x_0, y_0)\right)\right]$$

$$y_1 = 1 + \frac{0,2}{2}.\left[f(1,1) + f\left(1,2\ ,1 + 0,2.\left(f(1,1)\right)\right)\right]$$

$$y_1 = 1,44$$

# Cálculo Numérico Computacional

- 3ª Iteração: $n = 2$

$$y_3 = y_2 + \frac{h}{2}.\left[f(x_2, y_2) + f\left(x_2 + h, y_2 + h.f(x_2, y_2)\right)\right]$$

$$y_3 = 1,96 + \frac{0,2}{2}.\left[f(1,4\,,1,96) + f\left(1,6\ \,,1,96 + 0,2.\left(f(1,4\,,1,96)\right)\right)\right]$$

$$y_3 = 2,56$$

# Cálculo Numérico Computacional

- 2ª Iteração: $n = 1$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2}.\left[f(x_1, y_1) + f\left(x_1 + h, y_1 + h.f(x_1, y_1)\right)\right]$$

$$y_2 = 1,44 + \frac{0,2}{2}.\left[f(1,2\,,1,44) + f\left(1,4\ \ ,1,44 + 0,2.\left(f(1,2\,,1,44)\right)\right)\right]$$

$$y_2 = 1,96$$

# Cálculo Numérico Computacional

- Algumas observações:

(a) A solução analítica do exemplo anterior é $y(x) = x^2$ . Assim, $y(1,6) = 2,56$, ou seja, neste caso o método numérico fornece o valor exato;

(b) Os métodos de RK de 2ª ordem possuem a forma geral dada por:

$$y_{n+1} = y_n + h.a_1.f(x_n, y_n) + h.a_2.f(x_n + b_1.h\ , y_n + b_2.h.y_n')$$

# Cálculo Numérico Computacional

- Os coeficientes $a_1, a_2, b_1$ e $b_2$ devem obedecer às seguintes condições:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 1 \\ a_2 . b_1 = 1/2 \\ a_2 . b_2 = 1/2 \end{cases}$$

Para que se caracterize então um método de RK de 2ª ordem.

- O método de Heun de 2ª ordem é um caso particular onde:

$$a_1 = a_2 = \frac{1}{2}, \qquad b_1 = b_2 = 1$$

# Cálculo Numérico Computacional

(c) A principal desvantagem dos método de RK é não possuírem uma expressão simples para o erro, o que dificulta a escolha de um $\boldsymbol{h}$ ideal, por exemplo. Para o método de Heun de 2ª ordem, o erro local de truncamento é dado por:

$$\boldsymbol{e_{loc} = \frac{h^3}{12}.\left[f_{xx} + 2.f.f_{xy} + f^2.f_{yy} - 2.f_x.f_y - 2.f.f_y^2\right]}$$

**Métodos de Runge-Kutta de ordens superiores**

De forma análoga pode-se construir métodos de 3ª ordem, 4ª ordem, etc.

A seguir serão fornecidas apenas fórmulas para métodos de Runge-Kutta de 3ª e 4ª ordens:

*3ª ordem:* $$y_{n+1} = y_n + \frac{2}{9}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{4}{9}k_3 \text{ onde}$$

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = hf(x_n + \frac{3}{4}h, y_n + \frac{3}{4}k_2).$$

# Cálculo Numérico Computacional

*4ª ordem:* $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$, onde

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + h/2, y_n + k_1/2)$$

$$k_3 = hf(x_n + h/2, y_n + k_2/2)$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3).$$

# Cálculo Numérico Computacional

## EXEMPLO

*Resolver o* **(p.v.i)**:

$$\begin{cases} y' = -y + x + 2 \quad ; \\ y(0) = 2 \qquad\qquad 0 \leq x \leq 0.3 \quad ; \quad h = 0.1 \, , \end{cases}$$

# Cálculo Numérico Computacional

**Solução:** Temos que $y_0 = 2$. Fazendo $n = 0$ em (12.40), obtemos:

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}[k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4] \ ,$$

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= \frac{h}{6}[k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4] \ , \text{onde :} \\ k_1 &= f(x_n, y_n) \ , \\ k_2 &= f(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_1) \ , \\ k_3 &= f(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_2) \ , \\ k_4 &= f(x_n + h, y_n + hk_3) \ , \end{aligned} \tag{12.40}$$

# Cálculo Numérico Computacional

onde:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_0, y_0) = 0 \ , \\
k_2 &= f(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}hk_1) \ , \\
&= f(0 + \frac{0.1}{2}, 2 + \frac{0.1}{2}(0)) = f(0.05, 2) = 0.05 \ , \\
k_3 &= f(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}hk_2) \ , \\
&= f(0 + \frac{0.1}{2}, 2 + \frac{0.1}{2}(0.05)) = f(0.05, 2.0025) = 0.0475 \ , \\
k_4 &= f(x_0 + h, y_0 + hk_3) \ , \\
&= f(0 + 0.1, 2 + 0.1(0.0475)) = f(0.1, 2.0048) = 0.0952
\end{aligned}
$$

# Cálculo Numérico Computacional

Portanto:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 2 + \frac{0.1}{6}[0 + \ 2(0.05 + 0.0475) + 0.0952] \\
&= 2.00484 \simeq y(x_1) = y(0.1) \ ,
\end{aligned}
$$

Fazendo $n = 1$ em (12.40), obtemos:

$$
y_2 = y_1 + \frac{h}{6}[k_1 + \ 2(k_2 + k_3) + k_4] \ ,
$$

onde:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_1, y_1) = f(0.1, 2.00484) = 0.0952 \ , \\
k_2 &= f(x_1 + \frac{1}{2}h, y_1 + \frac{1}{2}hk_1) \ , \\
&= f(0.1 + \frac{0.1}{2}, 2.00484 + \frac{0.1}{2}(0.0952)) = f(0.15, 2.0096) = 0.1404 \ ,
\end{aligned}
$$

# Cálculo Numérico Computacional

$$
\begin{aligned}
k_3 &= f(x_1 + \frac{1}{2}h, y_1 + \frac{1}{2}hk_2)\ , \\
&= f(0.1 + \frac{0.1}{2}, 2.00484 + \frac{0.1}{2}(0.1404)) = f(0.15, 2.0119) = 0.1381 \\
k_4 &= f(x_1 + h, y_1 + hk_3)\ , \\
&= f(0.1 + 0.1, 2.00484 + 0.1(0.1381)) = f(0.2, 2.0187) = 0.1813\ .
\end{aligned}
$$

# Cálculo Numérico Computacional

Portanto:

$$y_2 = 2.00484 + \frac{0.1}{6}[0.0952 + \ 2(0.1404 + 0.1381) + 0.1813]$$

$$= \quad 2.01873 \simeq y(x_2) = y(0.2) \ ,$$

Finalmente, fazendo $n = 2$ em (12.40), obtemos:

$$y_3 = y_2 + \frac{h}{6}[k_1 + \ 2(k_2 + k_3) + k_4] \ ,$$

onde:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_2, y_2) = f(0.2, 2.01873) = 0.1813 \ , \\ k_2 &= f(x_2 + \frac{1}{2}h, y_2 + \frac{1}{2}hk_1) \ , \\ &= f(0.2 + \frac{0.1}{2}, 2.01873 + \frac{0.1}{2}(0.1813)) = f(0.25, 2.0278) = 0.2222 \ , \end{aligned}$$

# Cálculo Numérico Computacional

$$
\begin{aligned}
k_3 &= f(x_2 + \frac{1}{2}h, y_2 + \frac{1}{2}hk_2) \ , \\
&= f(0.2 + \frac{0.1}{2}, 2.01873 + \frac{0.1}{2}(0.2222)) = f(0.25, 2.0298) = 0.2202 \ , \\
k_4 &= f(x_2 + h, y_2 + hk_3) \ , \\
&= f(0.2 + 0.1, 2.01873 + 0.1(0.2202)) = f(0.3, 2.0408) = 0.2592 \ .
\end{aligned}
$$

Portanto:

$$
\begin{aligned}
y_2 &= 2.01873 + \frac{0.1}{6}[0.1813 + 2(0.2222 + 0.2202) + 0.2592] \\
&= 2.04082 \simeq y(x_3) = y(0.3) \ ,
\end{aligned}
$$

# Cálculo Numérico Computacional

Assim a solução do **(p.v.i.)** dado é:

| $x_n$ | $y_n$ |
|---|---|
| 0 | 2 |
| 0.1 | 2.00484 |
| 0.2 | 2.01873 |
| 0.3 | 2.04082 |

# Cálculo Numérico Computacional

- Os métodos de Runge-Kutta de 3ª e 4ª ordem são aplicados computacionalmente, como vimos na nossa aula prática. Mas o conceito deve ser guardado;

- O método de Runge-Kutta Fehlberg será apresentado a seguir, porém devido à sua complexidade de cálculo, iremos abordá-lo melhor na aula prática;

- Nesta aproximação, não calculamos 4 vezes $f(x, y)$ como no RK de 4ª ordem, mas 6 vezes. No método de Runge-Kutta-Felhberg se calcula a solução por um esquema de quarta ordem e um de quinta ordem e pela comparação dos valores podemos obter não só o erro local como também uma estimativa para o h ideal estabelecendo um esquema adaptativo, ou seja, um esquema em que o valor de h varia automaticamente a partir de um valor de tolerância imposto pelo usuário. O esquema do método é o que se segue:

# Cálculo Numérico Computacional

## Método de Runge-Kutta Fehlberg

$$k_1 = hf(t_k, y_k),$$

$$k_2 = hf\left(t_k + \frac{1}{4}h,\ y_k + \frac{1}{4}k_1\right),$$

$$k_3 = hf\left(t_k + \frac{3}{8}h,\ y_k + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2\right),$$

$$k_4 = hf\left(t_k + \frac{12}{13}h,\ y_k + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3\right),$$

$$k_5 = hf\left(t_k + h,\ y_k + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4\right),$$

$$k_6 = hf\left(t_k + \frac{1}{2}h,\ y_k - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right).$$

# Cálculo Numérico Computacional

## A aproximação de 4ª ordem é calculada por:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4101}k_4 - \frac{1}{5}k_5,$$

## E a aproximação de 5ª ordem é calculada por:

$$z_{k+1} = y_k + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12{,}825}k_3 + \frac{28{,}561}{56{,}430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6.$$

# Cálculo Numérico Computacional

onde o erro local pode ser determinado por $E = \frac{k_1}{360} - \frac{128}{4275}k_3 - \frac{2197}{75240}k_4 + \frac{k_5}{50} + \frac{2}{55}k_6$

O valor ótimo para h é obtido multiplicando o valor atual de h pelo valor dado pela fórmula abaixo:

$$s = \left( \frac{\text{tol}\, h}{2|z_{k+1} - y_{k+1}|} \right)^{1/4} \approx 0.84 \left( \frac{\text{tol}\, h}{|z_{k+1} - y_{k+1}|} \right)^{1/4}$$

Onde tol ***h*** é a tolerância definida pelo usuário.

# EXERCÍCIOS

# Cálculo Numérico Computacional

Dado o PVI abaixo, estime $y(1)$ pelos métodos de Euler, Euler Aperfeiçoado e por Runge-Kutta de 3ª ordem, para $h = 0,5$. Compare os resultados obtidos entre si e com a solução exata.

$$\begin{cases} y' = 0.04y \Rightarrow f(x, y) = 0.04y \\ y(0) = 1000 \end{cases}$$

Sabemos que a solução exata é $y(x) = 1000\, e^{0.04}$ donde $y(1) = 1000\, e^{0.04} = 1040.8108$

# Cálculo Numérico Computacional
## Próxima aula:

## Aula 19

- Solução Numérica de EDOs: Métodos de Passo Múltiplo