Cálculo Numérico Computacional

Aula 09

Zeros de Funções Reais

Método de Newton-Raphson

Cálculo Numérico Computacional

Agenda:

1. Método de Newton-Raphson;
2. Demonstração;
3. Interpretação Geométrica;
4. Critérios de Parada;
5. Exemplo;
6. Exercícios.

Cálculo Numérico Computacional

1. Método de Newton-Raphson

- É uma das técnicas mais populares para se determinar raízes de equações não lineares;

- Vamos deduzir o método baseando-se no método de iteração linear. Seja

$$\boldsymbol{f(x) = 0}$$

E assumimos $\boldsymbol{x = \psi(x)}$, de maneira que qualquer solução de $\boldsymbol{x = \psi(x)}$ seja também solução de $\boldsymbol{f(x) = 0}$.

Cálculo Numérico Computacional

- Vamos dizer que:

$$\psi(x) = x + A(x) \times f(x)$$
$$f'(x) \neq 0$$

Onde a função $A(x)$ deve ser escolhida tal que $A(\overline{x}) \neq 0$.

- Existe um teorema que garante a convergência se $\text{máx}|\psi'(x)| < 1$ para $x \in I$. Assim, se escolhermos $A(x)$ tal que $\psi'(\overline{x}) = 0$, teremos que para $x \in I$ (I suficientemente pequeno), $\text{máx}|\psi'(x)| < 1$, garantindo a convergência do método.

Cálculo Numérico Computacional

- Derivando $\psi(x) = x + A(x) \times f(x)$ em relação a x:

$$\psi'(x) = 1 + A'(x) \times f(x) + A(x) \times f'(x)$$

- Fazendo $x = \bar{x}$, temos que:

$$\psi'(\bar{x}) = 1 + A(\bar{x}) \times f'(\bar{x})$$

Pois $f(\bar{x})$=0. Colocando:

$\psi'(\bar{x}) = 0$, teremos $A(\bar{x}) = -\dfrac{1}{f'(\bar{x})} \neq 0$

Cálculo Numérico Computacional

- Desde que $f'(\overline{x}) \neq 0$.

- Tomando então: $A(x) = -\frac{1}{f'(x)}$, obtemos $\psi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ e o

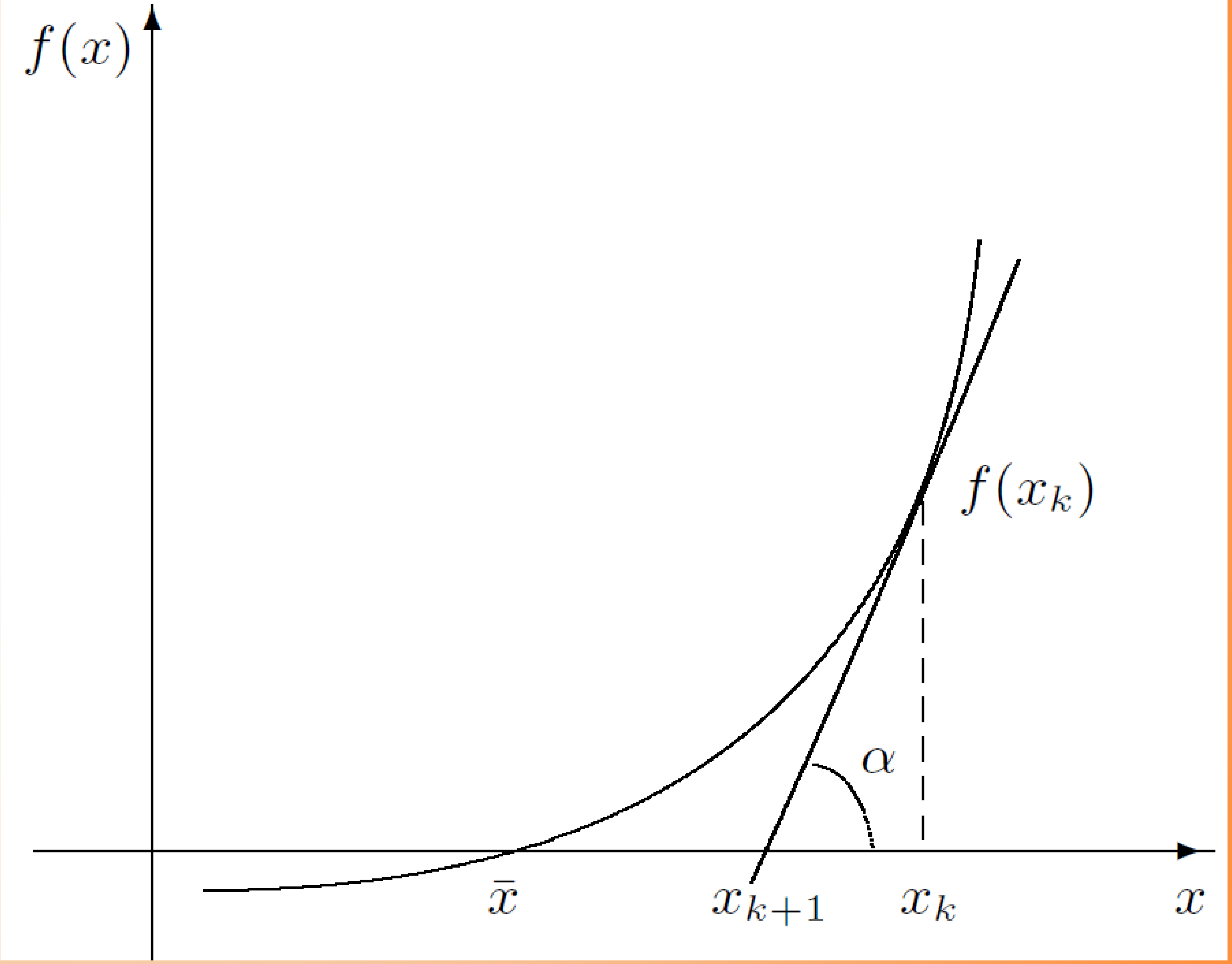
processo iterativo então definido por:

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

É chamado Método de Newton, que converge sempre que $|x_0 - \overline{x}|$ for suficientemente pequeno.

Cálculo Numérico Computacional

3. Interpretação Geométrica



Cálculo Numérico Computacional

- Dado x_k,o valor x_{k+1} pode se obtido graficamente traçando-se pelo ponto $(x_k, f(x_k))$ a tangente à curva $y = f(x)$. O ponto de interseção da tangente com o eixo dos x determina x_{k+1};

- De fato, pela lei da tangente:

$$f'(x_k) = tg\,\alpha = \frac{f(x_k)}{x_k - x_{k+1}}$$

$$x_k - x_{k+1} = \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad \rightarrow \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Cálculo Numérico Computacional

4. Critérios de Parada

- Os critérios de parada são dados por:

(a) $|x_{k+1} - x_k| < \epsilon$ (Desvio Absoluto);

(b) $\frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|} < \epsilon$ (Desvio Relativo);

(c) $|f(x_{k+1})| < \epsilon$

Cálculo Numérico Computacional

5. Exemplo

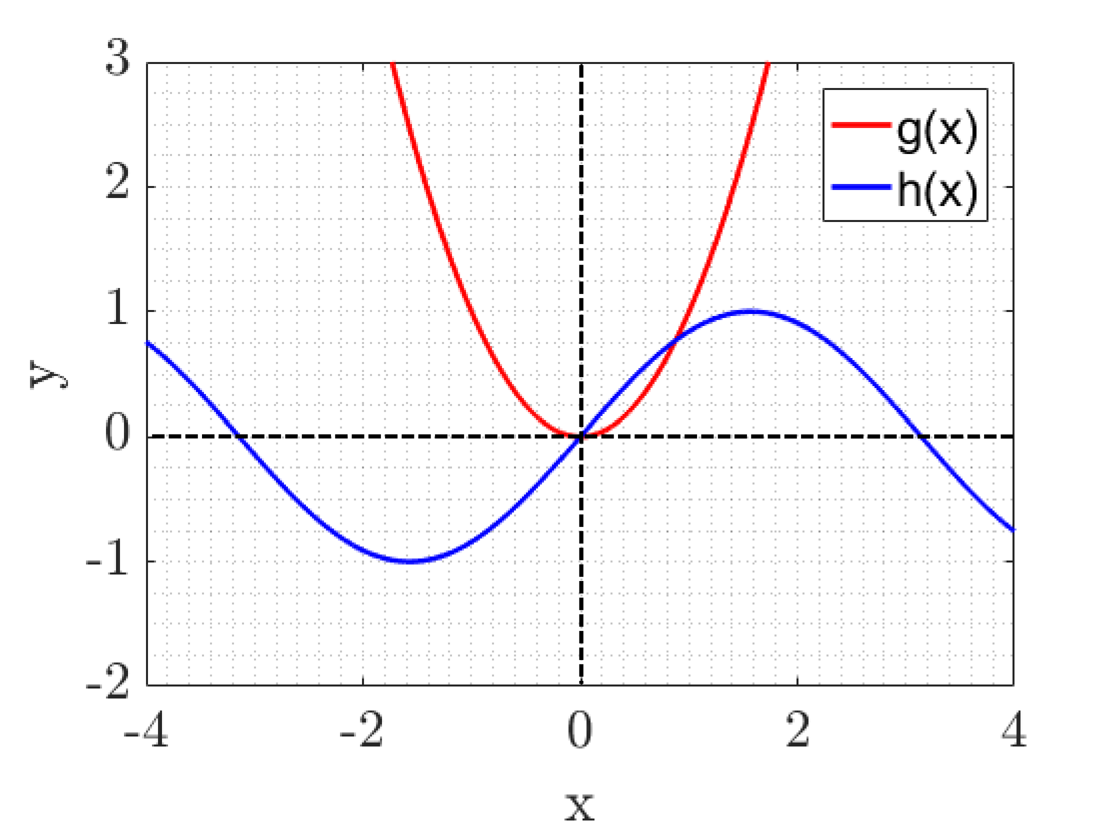
- Usando o Método de Newton-Raphson, calcular a raiz positiva da equação $x^2 - sen(x) = 0$. Utilizar como critério de parada o Desvio Absoluto com $\epsilon = 10^{-3}$.

- SOLUÇÃO:

I) Método Gráfico

Inicialmente, vamos separar a função $f(x)$ em duas funções com gráficos conhecidos. Seja então:

Cálculo Numérico Computacional



$$g(x) = x^2$$

$$h(x) = sen(x)$$

Dizer que $g(x) = h(x)$ é o mesmo que dizer que $f(x) = 0$. Portanto, pelo gráfico, nota-se que a raiz positiva se encontra próxima do valor 1, isto é, $\xi \approx 1$.

Lembrando de usar o argumento em funções trigonométricas SEMPRE em radianos!

Cálculo Numérico Computacional

II) Método de Newton-Raphson

Primeiramente, vamos derivar $f(x)$ em relação à x:

$$f'(x) = 2 \times x - cos(x)$$

Vamos escolher a aproximação inicial: $x_0 = 1$.

1ª Iteração $\quad k = 0$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0.8913960$$

Cálculo Numérico Computacional

Aplicando o Critério de Parada:

$$|x_1 - x_0| = 0.108 > \epsilon$$

Assim, prosseguimos com o método.

2ª Iteração $k = 1$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.8769848$$

Cálculo Numérico Computacional

Aplicando o Critério de Parada:

$$|x_2 - x_1| = 0.014 > \epsilon$$

Prosseguimos com o método.

3ª Iteração $\quad k = 2$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0.8767263$$

Cálculo Numérico Computacional

Aplicando o Critério de Parada:

$$|x_3 - x_2| = 0.00026 < \epsilon$$

Portanto:

$$\boxed{\xi \approx x_3 = 0.8767263}$$

Cálculo Numérico Computacional

OUTRO EXEMPLO

Exemplo 3.9 - *Determinar, usando o método de Newton, a menor raiz positiva da equação:*

$$4 \cos x - e^x = 0 ,$$

com erro inferior a 10^{-2}.

Solução: O processo mais simples e eficaz para se obter um valor inicial é o método gráfico. Com esse objetivo dividimos a equação inicial $f(x) = 0$ em outras duas equações mais simples, que chamaremos de y_1 e y_2. Note que o rearranjo para obter essas duas equações deve apenas levar em consideração a igualdade $f(x) = 0$.

Tomando: $y_1 = 4 \cos x$, $y_2 = e^x$, observe que poderíamos ter tomado $y_1 = \cos x$ e $y_2 = \frac{e^x}{4}$, e colocando as duas funções no mesmo gráfico, obtemos a Figura 3.10.

Cálculo Numérico Computacional

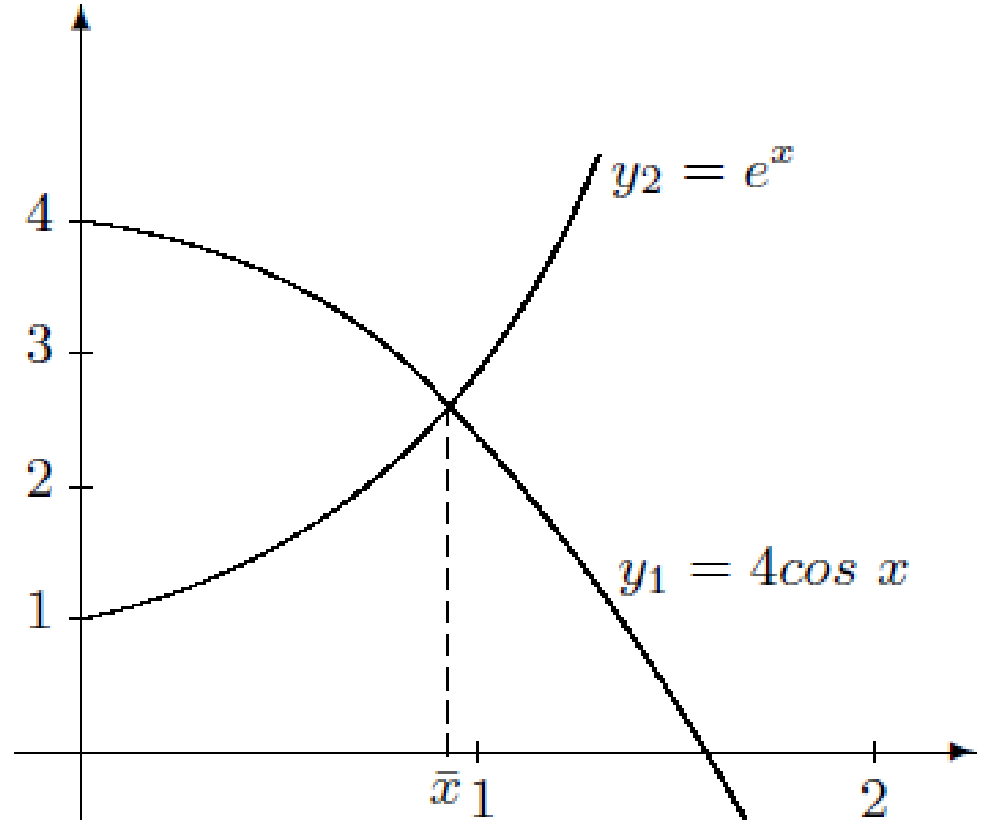


Figura 3.10

Como já dissemos anteriormente, o ponto de interseção das duas curvas é a solução $\bar{x}$ procurada. Analisando a Figura 3.10, vemos que $\bar{x}$ está nas vizinhanças do ponto 1.0 e portanto vamos tomar $x_0 = 1.0$. Por outro lado, da equação original, obtemos:

$$f(x_k) \;=\; 4\ cos\ x_k \;-\; e^{x_k}\ ;$$

$$f'(x_k) \;=\; -4\ sen\ x_k \;-\; e^{x_k}\ .$$

Para efetuar os cálculos seguintes, observe se sua calculadora está em radianos, pois a função dada envolve operações trigonométricas. Além disso, como queremos o resultado com erro inferior a 10^{-2} basta efetuar os cálculos com três casas decimais. Assim:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= f(1.0) \;=\; 4\ cos\ (1.0) - e^{1.0} \\ &= 4 \times (0.540) - 2.718 \;=\; -0.557\ ; \\ f'(x_0) &= f'(1.0) \;=\; -4\ sen\ (1.0) - e^{1.0} \\ &= -4 \times (0.841) - 2.718 \;=\; -6.084\ ; \end{aligned}$$

Cálculo Numérico Computacional

Usando (3.7), obtemos:

$$x_1 = 1.0 - \frac{f(1.0)}{f'(1.0)} \Rightarrow x_1 = 1.0 - \frac{(-0.557)}{(-6.048)} \Rightarrow x_1 = 0.908 .$$

Calculando o erro relativo, temos:

$$\left| \frac{x_1 - x_0}{x_1} \right| \simeq 0.101 .$$

que é maior que 10^{-2}. Devemos fazer uma nova iteração, para tanto calculemos:

$$\begin{aligned}
f(x_1) &= f(0.908) = 4 \cos(0.908) - e^{0.908} \\
&= 4 \times (0.615) - 2.479 = -0.019 , \\
f'(x_1) &= f'(0.908) = -4 \operatorname{sen}(0.908) - e^{0.908} \\
&= -4 \times (0.788) - 2.479 = -5.631 .
\end{aligned}$$

Novamente, usando (3.7), obtemos:

$$x_2 = 0.908 - \frac{f(0.908)}{f'(0.908)} \Rightarrow x_2 = 0.908 - \frac{(-0.019)}{(-5.631)} \Rightarrow x_2 = 0.905 .$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad (3.7)$$

Cálculo Numérico Computacional

Calculando o erro relativo, segue que:

$$\left|\frac{x_2 - x_1}{x_2}\right| \simeq 0.0033 \, ,$$

ou seja a aproximação $x_2 = 0.905$ possui duas casas decimais corretas. De fato, a solução exata é 0.9047882. Logo, a menor raiz positiva da equação $4 \, cos \; x - e^x = 0$, com $\epsilon < 0.01$, é $\bar{x} = 0.905$. Observe, da Figura 3.10, que a raiz encontrada é a única raiz positiva da equação dada.

EXERCÍCIOS

EXERCÍCIOS

1. Usando o método de Newton, com erro inferior a $\mathbf{10^{-2}}$, determinar uma raiz das seguintes equações:

a) $\boldsymbol{2 \times x = tg(x)}$;
b) $\boldsymbol{5 \times x^3 + x^2 - 12 \times x + 4 = 0}$;
c) $\boldsymbol{sen(x) - e^x = 0}$;
d) $\boldsymbol{x^4 - 8 = 0}$.

Cálculo Numérico Computacional

Próxima aula:

Aula 10

- Zeros de funções reais: Método da Secante