Cálculo Numérico Computacional

Aula 11

Interpolação

Interpolação Polinomial

E

Forma de Lagrange

Prof. Lucas Zanovello lucas.tahara@unesp.br

Cálculo Numérico Computacional

Agenda:

1. O Conceito de Interpolação;
2. Interpolação Polinomial;
3. Forma de Lagrange;
4. Exemplo;
5. Exercícios.

Cálculo Numérico Computacional

1. O Conceito de Interpolação

- A aproximação de funções por polinômios é uma das ideias mais antigas de análise numérica, e ainda uma das mais usadas;

- Os polinômios são facilmente computáveis, suas derivadas e integrais são novamente polinômios, suas raízes podem ser encontradas com relativa facilidade etc.

Cálculo Numérico Computacional

- A aproximação polinomial pode ser obtida de várias formas: Interpolação, Método dos Mínimos Quadrados, Mini-Max etc;

- Além disso, o Teorema de Weirstrass afirma que *toda função contínua pode ser arbitrariamente aproximada por um polinômio*;

- Normalmente se faz uma aproximação para $f(x)$ quando não se conhece a expressão analítica de $f(x)$ (dados experimentais) ou $f(x)$ é de difícil manejo (complicada).

Cálculo Numérico Computacional

A seguinte tabela relaciona calor específico da água e temperatura:

temperatura (ºC)	20	25	30	35	40
calor específico	0.99907	0.99852	0.99826	0.99818	0.99828

temperatura (ºC)	45	50
calor específico	0.99849	0.99878

Cálculo Numérico Computacional

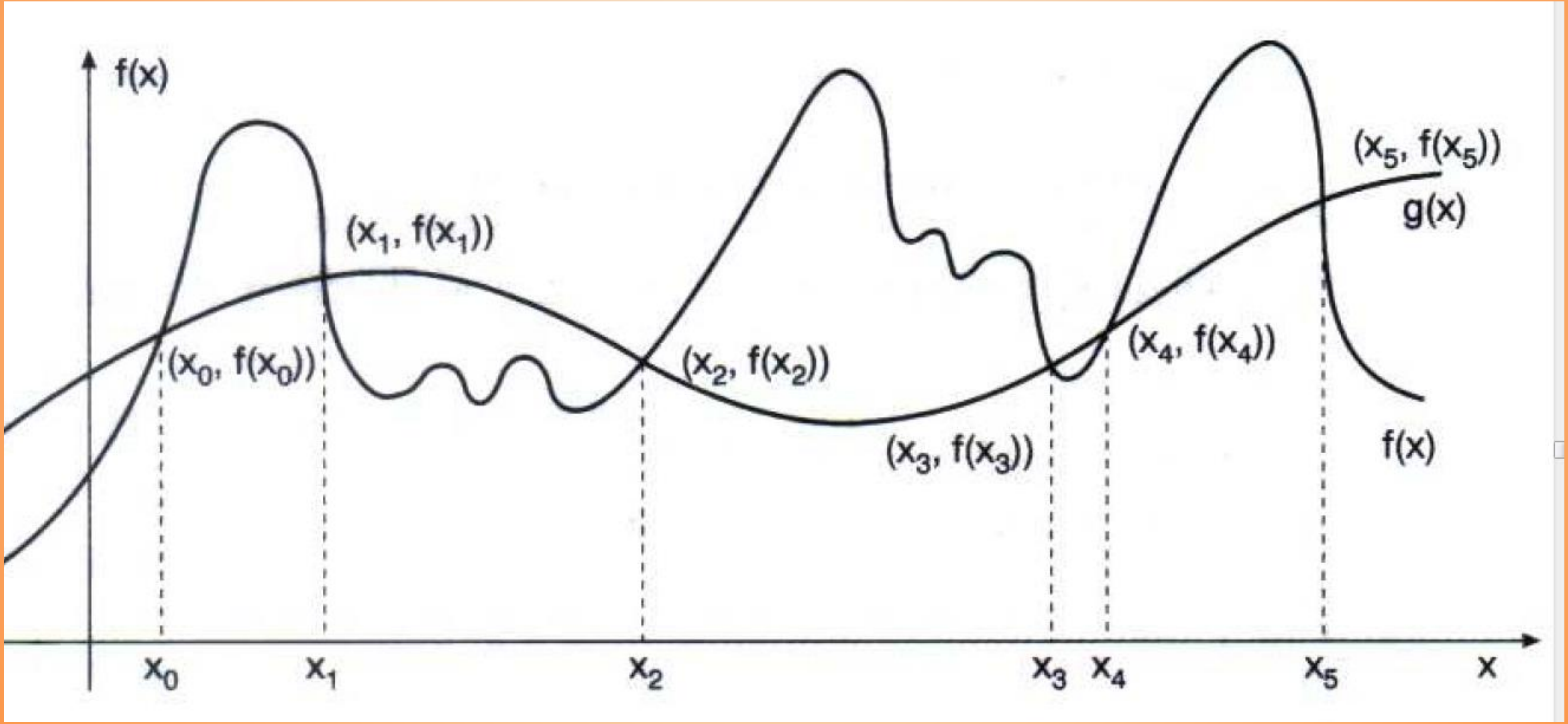
2. Interpolação polinomial

- Neste caso, dados $x_0, x_1, \dots, x_n$; $(n+1)$ pontos distintos em um intervalo I da curva, onde são conhecidos os valores da função $y_i = f(x_i)$. Desejamos determinar o polinômio de grau menor ou igual a n, $p_n(x) = a_n \times x^n + a_{n-1} \times x^{n-1} + \cdots + a_1 \times x + a_0$ tal que $p_n(x_i) = f(x_i)$ para $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

- Teorema: O polinômio de interpolação é único!

Cálculo Numérico Computacional

Graficamente, temos:



Cálculo Numérico Computacional

3. Forma ou Fórmula de Lagrange

- O polinômio de interpolação é definido por:

$$p_n(x) = f(x_0) \times L_0(x) + f(x_1) \times L_1(x) + \cdots + f(x_n) \times L_n(x)$$

Onde:

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0) \times (x - x_1) \dots (x - x_{k-1}) \times (x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \times (x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1}) \times (x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}$$

Para $k = 0, 1, 2, \dots, n$

Cálculo Numérico Computacional

4. Exemplo

Usando a forma de Lagrange, determinar o polinômio de interpolação para a função $f(x)$ tabelada por:

	x_0	x_1	x_2
x	-1	0	2
$f(x)$	4	1	-1
	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$

Cálculo Numérico Computacional

Solução:

- Neste caso, temos $n + 1 = 3$ (número de pontos)
- Vamos determinar um polinômio de grau menor ou igual a 2 tal que $p_2(x_i) = f(x_i)$
- O polinômio interpolador é dado por:

$$p_2(x) = f(x_0) \times L_0(x) + f(x_1) \times L_1(x) + f(x_2) \times L_2(x)$$

Cálculo Numérico Computacional

Agora, determinado $L_0(x), L_1(x)$ e $L_2(x)$:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1) \times (x - x_2)}{(x_0 - x_1) \times (x_0 - x_2)} = \frac{(x - 0) \times (x - 2)}{(-1 - 0) \times (-1 - 2)} = \frac{x^2 - 2 \times x}{3}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0) \times (x - x_2)}{(x_1 - x_0) \times (x_1 - x_2)} = \frac{(x + 1) \times (x - 2)}{(0 + 1) \times (0 - 2)} = \frac{x^2 - x - 2}{-2}$$

Cálculo Numérico Computacional

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0) \times (x - x_1)}{(x_2 - x_0) \times (x_2 - x_1)} = \frac{(x + 1) \times (x - 0)}{(2 + 1) \times (2 - 0)} = \frac{x^2 + x}{6}$$

Assim, na forma de Lagrange, teremos:

$$p_2(x) = 4 \times \left(\frac{x^2 - 2 \times x}{3}\right) + 1 \times \left(\frac{x^2 - x - 2}{-2}\right) + (-1) \times \left(\frac{x^2 + x}{6}\right)$$

$$\boxed{p_2(x) = \frac{2}{3} \times x^2 - \frac{7}{3} \times x + 1}$$

Cálculo Numérico Computacional

Verificando:

$$p_2(-1) = 4$$
$$p_2(0) = 1$$
$$p_2(2) = -1$$

OK!

2 condições básicas:

- Grau de $p_n(x) \leq n$
- $p_n(x_i) = f(x_i),\ i = 0, 1, \dots, n$

OUTRO EXEMPLO

*caderno

EXERCÍCIOS

Cálculo Numérico Computacional

Próxima aula:

Aula 12

- Interpolação: Forma de Newton