Cálculo Numérico Computacional

Aula 08

Zeros de Funções Reais

Método da Bisseção

Prof. Lucas Zanovello lucas.tahara@unesp.br

Cálculo Numérico Computacional

Agenda:

1. Zeros de funções reais;
2. Método Gráfico;
3. Método da Bisseção;
4. Interpretação Geométrica;
5. Exemplo;
6. Exercícios.

Cálculo Numérico Computacional

1. Zeros de funções reais

- Desejamos resolver a equação $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ onde $\boldsymbol{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

- Definição: Dizemos que $\xi \in \mathbb{R}$ é um zero de $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ ou uma raiz da equação $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ se $\boldsymbol{f}(\xi) = \mathbf{0}$;

- Os métodos numéricos determinam valores aproximados par ao valor exato da raiz ξ.

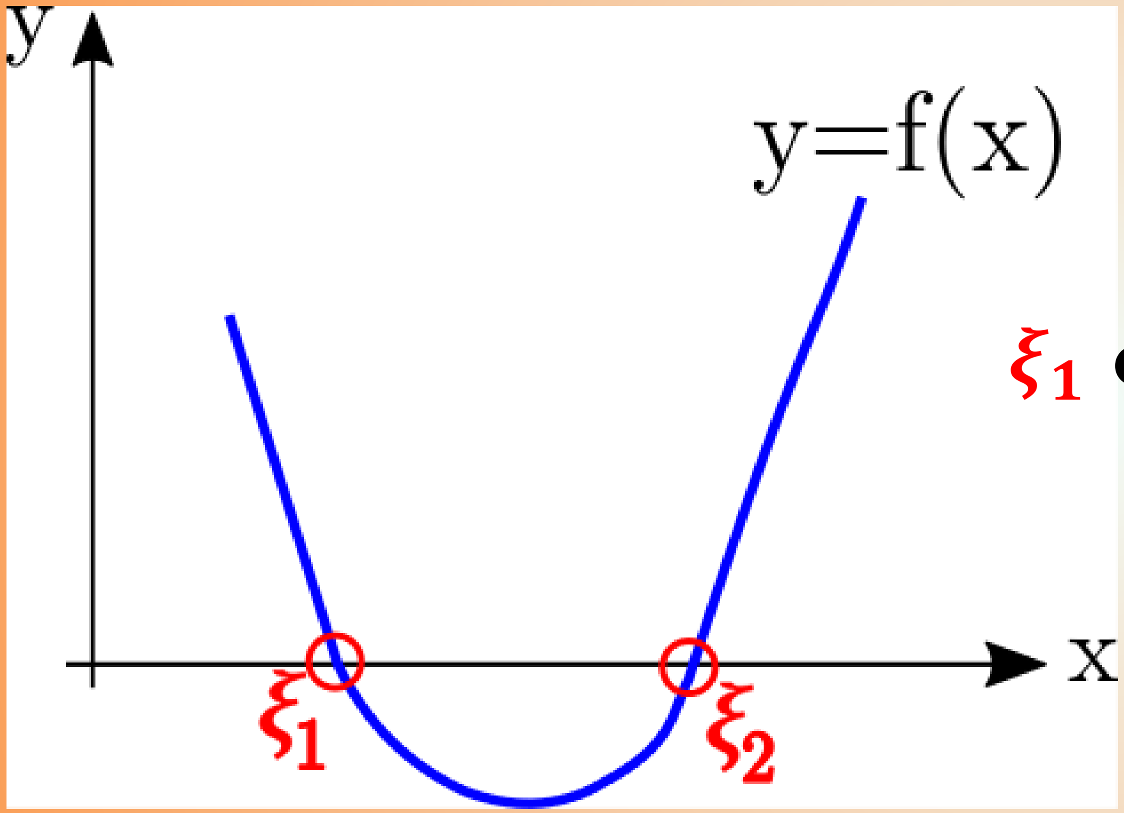
Cálculo Numérico Computacional

2. Método Gráfico

- Uma primeira aproximação para a raiz ξ pode ser determinada através do método gráfico;

- Construir o gráfico de $f(x)$ e determinar os pontos de interseção do gráfico com o eixo $\overrightarrow{OX}$.

Cálculo Numérico Computacional



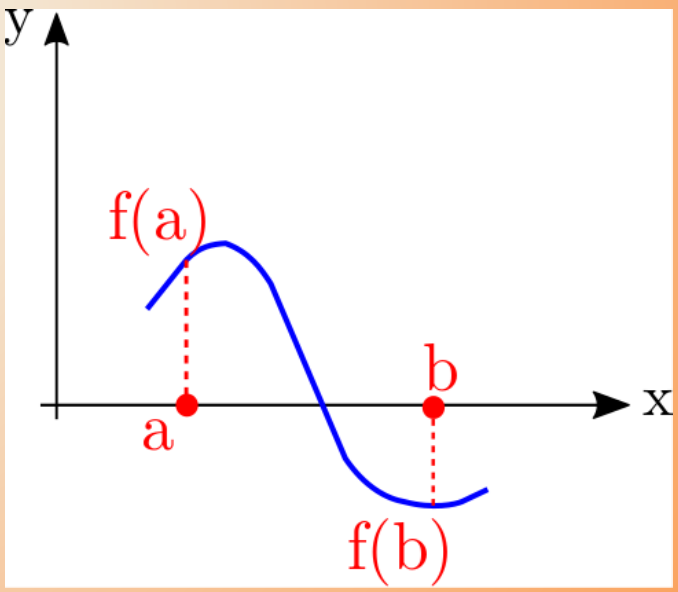
ξ_1 e ξ_2 **são raízes de** $\boldsymbol{f(x) = 0}$

Cálculo Numérico Computacional

3. Método da Bisseção

- Este método considera um intervalo $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ para o qual $\boldsymbol{f(a) \times f(b) < 0}$. Calculamos o valor da função $\boldsymbol{f(x)}$ no ponto médio, ou seja:

$$\boxed{x_1 = \frac{a+b}{2}}$$



Cálculo Numérico Computacional

- O método baseia-se no teorema de Bolzano, do qual:

Teorema: Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}, y = f(x)$ *é uma função contínua, tal que* $f(a) \times f(b) < 0$, *então existe* $x^* \in (a,b)$ *tal que* $f(x^*) = 0$.

Em outras palavras, se $f(x)$ é uma função contínua em um dado intervalo no qual ela troca de sinal, então ela tem pelo menos um zero neste intervalo.

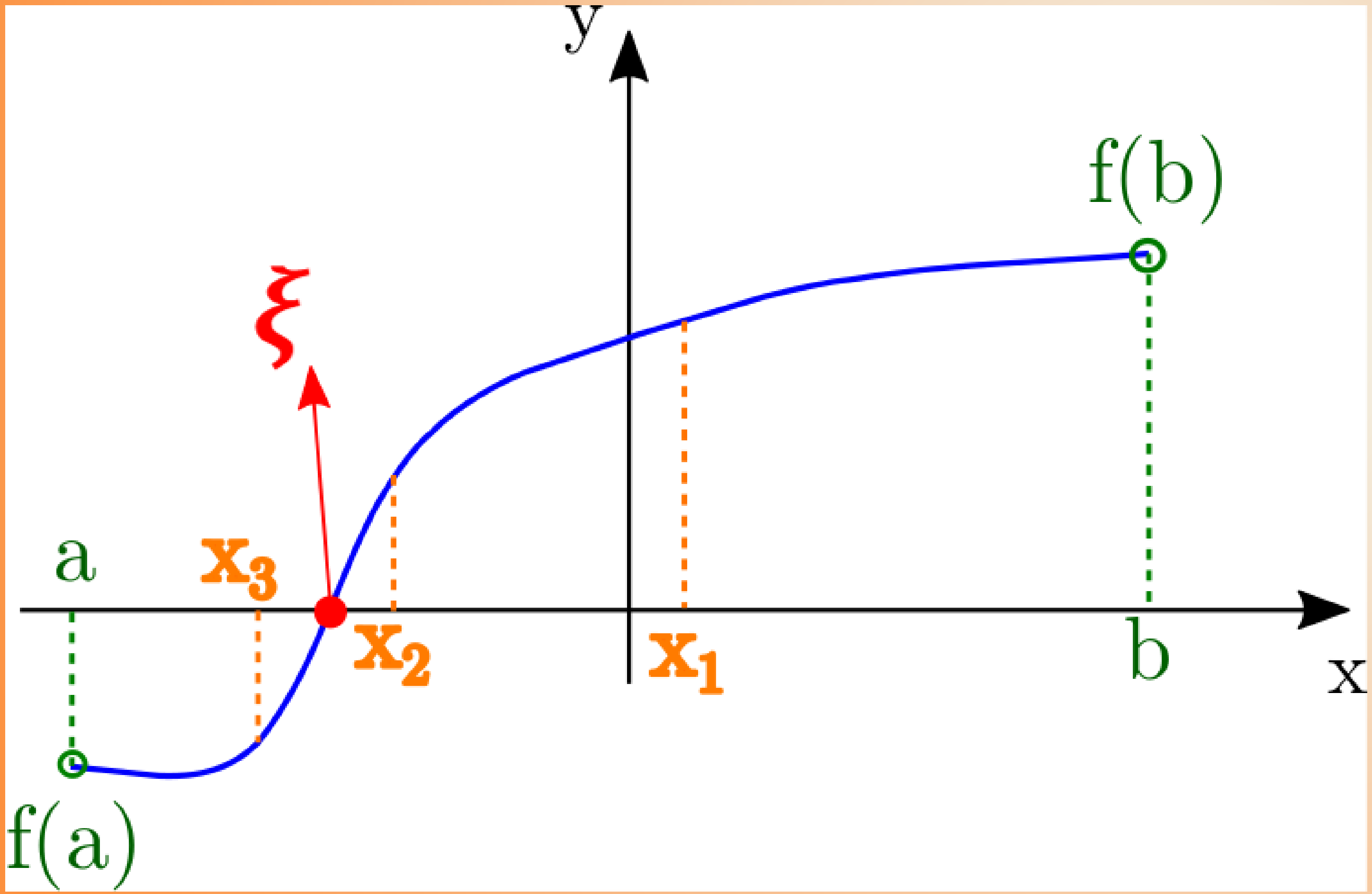
Cálculo Numérico Computacional

- Temos três possibilidades neste método:

$$\textbf{Se } \boldsymbol{f(a) \times f(x_k)} \begin{cases} < 0 \quad \textit{então} \quad b = x_k \\ > 0 \quad \textit{então } a = x_k \\ = 0 \quad \textit{então encontramos a raiz} \rightarrow x_k \end{cases}$$

Cálculo Numérico Computacional

4. Interpretação Geométrica



1ª iteração: $x_1 = \frac{a+b}{2}$

$f(a) \times f(x_1) < 0$

$b = x_1$

2ª iteração: $x_2 = \frac{a+b}{2}$

$f(a) \times f(x_2) < 0$

$b = x_2$

3ª iteração: $x_3 = \frac{a+b}{2}$

$f(a) \times f(x_3) > 0$

$a = x_3$

Cálculo Numérico Computacional

5. Exemplo

- Para ilustrar o método da bisseção, vamos considerar que desejamos calcular a raiz positiva de:

$$f(x) = (x+1)^2 \times e^{x^2-2} - 1 = 0$$

Iniciando com o intervalo $[0,1]$. Para essa equação, temos que $f(0) < 0$ e $f(1) > 0$. O ponto médio é $x_1 = 0.5$ com $f(x_1) = -0.6090086$. Desde que $f(0) \times f(0.5) > 0$, deduzimos que a raiz da equação está em $[0.5, 1]$. Os primeiros passos do método da bisseção, para esta equação, estão mostrados na tabela a seguir:

Cálculo Numérico Computacional

k	a	b	x_k	$f(x_k)$
1	0	1	0.5	-0.609009
2	0.5	1	0.75	-0.272592
3	0.75	1	0.75	0.023105
4	0.75	0.875	0.8125	-0.139662
5	0.8125	0.875	0.84375	-0.062448
		$\vdots$		

Cálculo Numérico Computacional

- Continuando o processo, obteremos $\boldsymbol{x_{16} = 0.866868}$ e $\boldsymbol{x_{17} = 0.866876}$. Isso significa que o intervalo $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ foi reduzido ao intervalo $[\mathbf{0.866868}, \mathbf{0.866876}]$, e portanto a raiz positiva da equação dada é aproximadamente $\overline{\boldsymbol{x}} = \mathbf{0.86687}$.

Cálculo Numérico Computacional

Outro exemplo

- Usando o método da bisseção, calcular o valor aproximado da raiz da equação:

$$\boldsymbol{x \times log(x) - 1 = 0}$$

Com precisão $\mathbf{0.07}$.

SOLUÇÃO Sabemos que $\xi \in [2, 3]$. De fato:

$$\boldsymbol{f(2) = 2 \times log(2) - 1 < 0}$$
$$\boldsymbol{f(3) = 3 \times log(3) - 1 > 0}$$

Cálculo Numérico Computacional

- Como $f(x)$ é uma função contínua, então pelo teorema de Bolzano, temos que $\xi \in [2,,3]$;

- Dessa forma, tem-se o intervalo inicial $[a, b]$ onde $a = 2$ e $b = 3$;

1ª Iteração: k=1

$$x_1 = \frac{(2+3)}{2} = 2.5$$

- Como $f(2.5) < 0$, obedecendo à regra disposta no slide 8, então o novo intervalo será $[2.5,\ 3]$

Cálculo Numérico Computacional

- Vamos estabelecer um critério de parada como sendo a <u>amplitude</u> do intervalo, ou seja:

$$|3 - 2.5| = 0.5 > \color{red}{0.07}$$

2ª Iteração: k=2

$$x_2 = \frac{(2.5 + 3)}{2} = 2.75$$

- Como $f(2.75) > 0$, então o novo intervalo será $[2.5,\ 2.75]$

Cálculo Numérico Computacional

- Critério de parada:

$$|2.75 - 2.5| = 0.25 > \mathbf{0.07}$$

3ª Iteração: k=3

$$x_3 = \frac{(2.5 + 2.75)}{2} = 2.625$$

- Como $f(2.625) > 0$, então o novo intervalo será $[2.5,\ 2.625]$

Cálculo Numérico Computacional

- Critério de parada:

$$|2.625 - 2.5| = 0.125 > 0.07$$

4ª Iteração: k=4

$$x_4 = \frac{(2.5 + 2.625)}{2} = 2.5625$$

- Como $f(2.5625) > 0$, então o novo intervalo será $[2.5,\ 2.5625]$

Cálculo Numérico Computacional

- Critério de parada:

$$|2.5625 - 2.5| = 0.0625 < \mathbf{0.07}$$

Portanto:

$$\xi \approx x_5 = \frac{(2.5 + 2.5625)}{2} = 2.53125$$

- Esta última etapa denominamos ajuste final.

EXERCÍCIOS

Cálculo Numérico Computacional

EXERCÍCIOS

1. Considere a equação $\sqrt{x} = cos(x)$. Use o método da bisseção com intervalo inicial $[a, b] = [0, 1]$ para calcular a aproximação x_4 da solução. Solução: 0.6875

2. Use o método da bisseção para calcular uma solução de $e^x = x + 2$ no intervalo $[-2, , 0]$ com precisão 10^{-1}.
   Solução: $\overline{x} \approx -1.8125$.

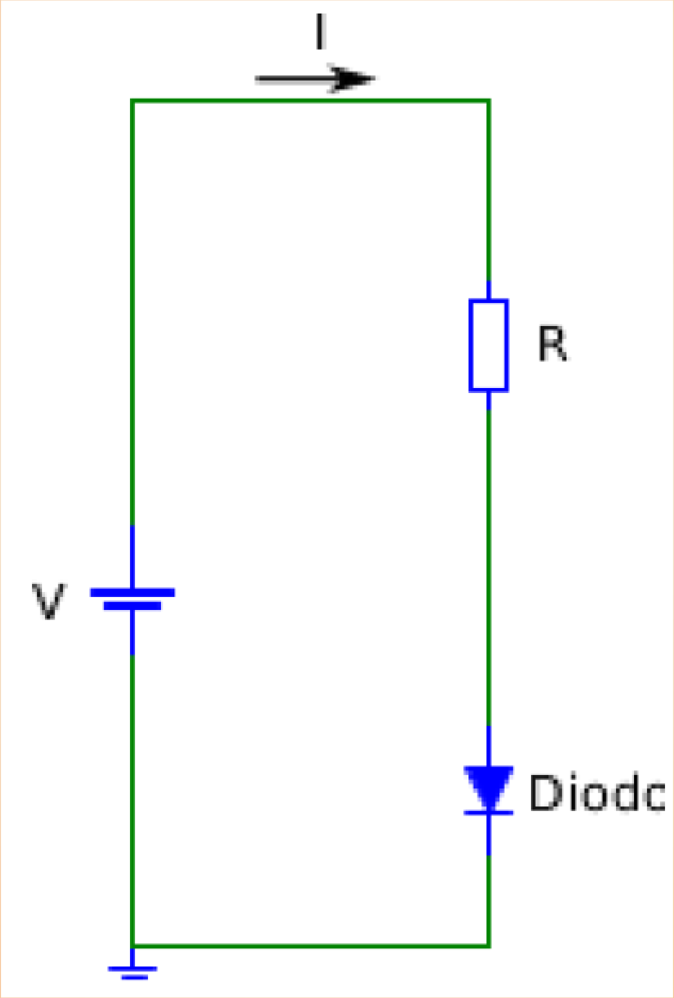
Cálculo Numérico Computacional

3. (Eletrônica) O desenho abaixo mostra um circuito não linear envolvendo uma fonte de tensão constante, um diodo retificador e um resistor. Sabendo que a relação entre a corrente (I_d) e a tensão (v_d) no diodo é dada pela seguinte expressão:

$$I_d = I_R\left(\exp\left(\frac{v_d}{v_t}\right) - 1\right)$$

onde I_R é a corrente de condução reversa e v_t, a tensão térmica dada por $v_t = \frac{kT}{q}$ com k, a constante de Boltzmann, T a temperatura de operação e q, a carga do elétron. Aqui $I_R = 1\,pA = 10^{-12}\,A$, $T = 300$ K. Escreva o problema como uma equação na incógnita v_d e, usando o método da bisseção, resolva este problema com 3 algarismos significativos para os seguintes casos:

Cálculo Numérico Computacional



Cálculo Numérico Computacional

3. (a) $\boldsymbol{V = 30}$ V e $\boldsymbol{R = 1\ k\Omega}$. Solução: 0.623

(b) $\boldsymbol{V = 3}$ V e $\boldsymbol{R = 1\ k\Omega}$. Solução: 0.559

(c) $\boldsymbol{V = 3}$ V e $\boldsymbol{R = 10\ k\Omega}$. Solução: 0.5

(b) $\boldsymbol{V = -30}$ V e $\boldsymbol{R = 10\ k\Omega}$. Solução: -30

Cálculo Numérico Computacional

Próxima aula:

Aula 09

- **Zeros de funções reais: Método de Newton-Raphson**