Soluções Numéricas de Equações Diferenciais Ordinárias

Equações de Ordem Superior

Cálculo Numérico Computacional

Agenda:

1. Considerações iniciais;
2. Exemplos

Cálculo Numérico Computacional

1. Considerações iniciais

- Este tipo de equação pode ser transformado em um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem;

- Como exemplo, considerando o PVI:

$$y'' = x^2 + y^2 . sen(x + y) + \left(x^2 - 1\right) . y - cos(x) . y'$$
$$y(0) = 1,1 \qquad y'(0) = 2,2$$

- Devemos efetuar uma mudança de variável na forma $y' = z$, para transformar esta equação em duas equações de 1ª ordem, ou seja:

Cálculo Numérico Computacional

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = x^2 + y^2 . sen(x + y) + \left(x^2 - 1\right) . y - cos(x) . z \end{cases}$$

Com as condições iniciais: $y(0) = 1,1 \qquad z(0) = 2,2$

Ou então:

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z) \\ z' = g(x, y, z) \end{cases}$$

$$y(x_0) = y_0 \qquad z(x_0) = z_0$$

Cálculo Numérico Computacional

- De modo geral, uma EDO de ordem n pode ser transformada em um sistema com n EDOs de primeira ordem.

- EXEMPLO

Dado o PVI

$$y'' = 4.y' - 3.y - x$$

$$y(0) = \frac{4}{9} \qquad y'(0) = \frac{7}{3}$$

Faça uma iteração do método de Heun de 2ª ordem usando $h = 0,25$.

Cálculo Numérico Computacional

- Inicialmente, vamos fazer uma mudança de variável na forma:

$$y' = z$$

Dessa forma, teremos:

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = 4.z - 3.y - x \end{cases}$$

Com: $y(0) = \frac{4}{9}$ $\quad z(0) = \frac{7}{3}$

Cálculo Numérico Computacional

- DADOS DO PROBLEMA:

$$f(x, y, z) = z$$
$$g(x, y, z) = 4.z - 3.y - x$$

Vamos efetuar apenas uma iteração, ou seja:

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{0,25}$$

$$x_0 \qquad x_1$$

Cálculo Numérico Computacional

- Devemos então adaptar nosso método para resolver este sistema;

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}.[f(x_n, y_n, z_n) + f(x_n + h, y_n + h.y'_n, z_n + h.z'_n)]$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2}.[g(x_n, y_n, z_n) + g(x_n + h, y_n + h.y'_n, z_n + h.z'_n)]$$

Cálculo Numérico Computacional

- 1ª iteração: $n = 0$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}.[f(x_0, y_0, z_0) + f(x_0 + h, y_0 + h.y_0', z_0 + h.z_0')]$$

$$z_1 = z_0 + \frac{h}{2}.[g(x_0, y_0, z_0) + g(x_0 + h, y_0 + h.y_0', z_0 + h.z_0')]$$

Temos que:

- $y_0 + h.y_0' = \frac{4}{9} + 0,25.\frac{7}{3} = 1,027778$

Cálculo Numérico Computacional

- $z_0 + h.z_0' = \frac{7}{3} + 0,25.\left(4.\frac{7}{3} - 3.\frac{4}{9} - 0\right) = 4,333333$

- Assim:

$$y_1 = \frac{4}{9} + \frac{0,25}{2}.\left[\frac{7}{3} + 4,333333\right] = 1,27777778$$

- Agora, para z:

$$z_1 = z_0 + \frac{h}{2}.[g(x_0, y_0, z_0) + g(x_0 + h, y_0 + h.y_0', z_0 + h.z_0')]$$

Cálculo Numérico Computacional

- $z_1 = \frac{7}{3} + \frac{0{,}25}{2} . \left[\left(4 . \frac{7}{3} - 3 . \frac{4}{9} - 0 \right) + (4 . 4{,}333333 - 3 . 1{,}027777778 - 0{,}25) \right]$

- $z_1 = 5{,}08333336$

Assim:

$$y(0{,}25) \approx y_1 = 1{,}2777778$$
$$y'(0{,}25) \approx z_1 = 5{,}0833336$$

EXEMPLOS COMPUTACIONAIS

MUITO OBRIGADO!