Universidade Federal do Rio Grande

Geferson Lucatelli

Aplicação dos Autovalores e Autovetores

Introdução

- Veremos nessa apresentação duas aplicações de autovalores e autovetores;
- Aplicação em genética;
- Aplicação em massas acopladas;
- Os autovalores e autovetores são de extrema importância em muitos outos fenômenos físicos.

Aplicação em Genética

- Um par de genes dá uma certa característica hereditária;
- A e $a \longrightarrow AA, Aa, aa$;
- Aplicação na evolução de uma certa plantação de plantas de um agricultor
- O agricultor inicialmente tem uma quantidade igual de plantas, do gene $AA, Aa\ aa$, σ_o, ξ_o e ϕ_o respectivamente;

Aplicação em Genética - Evolução de Plantas

- Designamos:
- σ_n sendo a fração de plantas do genótipo AA na geração n;
- ξ_n sendo a fração de plantas do genótipo Aa na geração n;
- ϕ_n sendo a fração de plantas do genótipo aa na geração n;

Aplicação em Genética - Evolução de Plantas

- O cruzamento que o agricultor quer fazer é que cada tipo de planta se fertilize com o mesmo tipo que é;
- A tabela 1 mostra a probabilidade dos cruzamentos;
- Se AA recebe dele mesmo, o resultado é AA. O mesmo ocorre para aa
- Agora se Aa recebe de Aa o reultado é, ou uma chance em quatro de ser aa ou AA ou duas em quatro de ser Aa;

Genótipo	$AA - AA$	$AA - Aa$	$AA - aa$	$Aa - Aa$	$Aa - aa$	$aa - aa$
AA	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0
Aa	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
aa	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

Table: 1

Aplicação em Genética - Evolução de Plantas

- Resumindo essas funções temos

$$\begin{cases} \sigma_n = \sigma_{n-1} \\ \xi_n = \frac{1}{4}\sigma_{n-1} + \frac{1}{2}\xi_{n-1} + \frac{1}{4}\phi_{n-1} \\ \phi_n = \phi_{n-1} \end{cases} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{1}$$

Aplicação em Genética - Evolução de Plantas

- Operações matriciais:
- Um vetor coluna armazena os termos σ_n, ξ_n e ϕ_n, da forma

$$\mathbf{x}^{(n)} = \begin{bmatrix} \sigma_n \\ \xi_n \\ \phi_n \end{bmatrix} \tag{2}$$

um outro vetro coluna armazena os termos em $n-1$ da forma

$$\mathbf{x}^{(n-1)} = \begin{bmatrix} \sigma_{n-1} \\ \xi_{n-1} \\ \phi_{n-1} \end{bmatrix} \tag{3}$$

Aplicação em Genética - Evolução de Plantas

- O termos númericos formam uma matriz das probabilidades

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

- Logo, a expressão geral é

$$\mathbf{x}^{(n)} = M\mathbf{x}^{(n-1)} \tag{5}$$

que é igual a

$$\mathbf{x}^{(n)} = M\mathbf{x}^{(n-1)} = M^2\mathbf{x}^{(n-2)} = ... = M^n\mathbf{x}^{(0)} \tag{6}$$

Aplicação em Genética - Evolução de Plantas

- Se encontrarmos M^n encontramos $\mathbf{x}^n$, para isso precisamos diagonalizar a matriz M,

$$D = P^{-1}MP \longrightarrow D^n = P^{-1}M^nP \tag{7}$$

ou

$$M^n = PD^nP^{-1} \tag{8}$$

onde P é uma matriz invertível e diagonaliza M;

- Precisamos encontrar os autovalores e autovetores para a diagonalização.

Aplicação em Genética - Evolução de Plantas

- Utilizamos

$$(M - \lambda I)\mathbf{x} = 0 \tag{9}$$

- Então segue que

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}-\lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{10}$$

$$(1-\lambda)(1/2-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

e obtemos

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{11}$$

Aplicação em Genética - Evolução de Plantas

- A matriz P é formada pelos vetores coluna $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ e $\mathbf{p}_3$, e cada um é um autovetor;
- Dois autovalores são repetidos, e resultam em várias possíveis soluções. Mas podemos escolher dois autovetores linearmente independentes dessas possíveis soluções que são

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Aplicação em Genética - Evolução de Plantas

- E para λ_3

$$\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

- Portanto

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{14}$$

- A inversa de P é A inversa de P é

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Aplicação em Genética - Evolução de Plantas

- Da expressão geral tiramos $\mathbf{x}^{(n)} = M^n\mathbf{x}^0 = PD^nP^{-1}\mathbf{x}^0$;
- A matriz D é a matriz diagonal dos auto valores, e já elevando-a a n temos

$$D^n = \begin{bmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{2})^n \end{bmatrix} \tag{16}$$

- E assim

$$\mathbf{x}^{(n)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{2})^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_n \\ \xi_n \\ \phi_n \end{bmatrix}$$

Aplicação em Genética - Evolução de Plantas

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^{n+1} & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^{n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^{n+1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_o \\ \xi_o \\ \phi_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_n \\ \xi_n \\ \phi_n \end{bmatrix} \tag{17}$$

- Agora obtemos as fórmulas recurssivas para a evolução da população das plantas

$$\sigma_n = \sigma_o + \xi_o \left\{ \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right\} \tag{18}$$

$$\xi_n = \xi_o \left(\frac{1}{2} \right)^{n} \tag{19}$$

$$\phi_n = \phi_o + \xi_o \left\{ \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right\}. \tag{20}$$

Aplicação em Genética - Evolução de Plantas

- Tomando o limite das últimas três equações para n indo para infinito, temos o seguinte:

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n = \lim_{n\to\infty} \xi_o \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \tag{21}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \left[\sigma_o + \xi_o \left\{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}\right] = \sigma_o + \frac{\xi_o}{2} \tag{22}$$

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n = \lim_{n\to\infty} \left[\phi_o + \xi_o \left\{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}\right] = \phi_o + \frac{\xi_o}{2} \tag{23}$$

- Essas últimas duas equações mostram que o genotipo Aa desaparece, e permanece apenas AA e aa em proporções iguais;

Autovalores e Autovetores nas massas acopladas

- Consideremos um problema de duas massas acopladas;
- Presas a três molas, de constantes elásticas, k_1, k_2 e k_3;

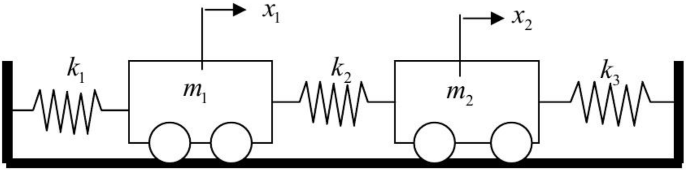

Figure: 1

Autovalores e Autovetores nas massas acopladas

- Considerando o sentido positivo para a direita, aplicando a segunda lei de Newton, têm-se as equações

$$m_1 \ddot{x}_1 = k_1 x_1 + k_2 x_2 - k_2 x_2$$

$$m_1 \ddot{x}_1 = (k_1 + k_1) x_1 - k_2 x_2$$

e

$$m_2 \ddot{x}_2 = k_3 x_2 + k_2 x_2 - k_2 x_1$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = (k_2 + k_3) x_2 - k_2 x_1$$

Autovalores e Autovetores nas massas acopladas

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = (k_1 + k_1)x_1 - k_2 x_2 \\ m_2\ddot{x}_2 = (k_2 + k_3)x_2 - k_2 x_1 \end{cases} \tag{24}$$

- A equação geral de um ocilador sem interferência de qualquer força externa é $m\ddot{x} + kx = 0$ e sua solução é da forma
$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \tag{25}$$
- Aplicando isso para a equação (24), temos duas soluções idêntico a (25) do tipo

$$x(t)_1 = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \tag{26}$$

$$x(t)_2 = C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t) \tag{27}$$

Massas Acopladas

- Derivando duas vezes cada equação e substituindo $\ddot{x}(t)_1$, $\ddot{x}(t)_2$, $x(t)_1$ e $x(t)_2$ na equação (24) temos

$$\left\{\begin{array}{l} m_1\omega^2 A = -(k_1+k_2)A + k_2 C \\ m_1\omega^2 B = -(k_1+k_2)B + k_2 D \\ m_2\omega^2 C = k_2 A - (k_3+k_2)C \\ m_2\omega^2 D = k_2 B - (k_3+k_2)D \end{array}\right. \tag{28}$$

- Esse conjunto de expressões pode ser escrito em forma matricial e por simplicidade vamos fazer $m_1 = m_2 = m$.

Massas Acopladas

$$\begin{bmatrix} -(k_1+k_2) & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & -(k_1+k_2) & 0 & k_2 \\ k_2 & 0 & -(k_2+k_3) & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & (k_2+k_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix}$$

$$= m\omega^2 \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} \tag{29}$$

- Percebemos que o autovalor da matriz é $\lambda = m\omega^2$.

Massas Acopladas

- Para encontrarmos os autovalores e autovetores de uma matriz, devemos utilizar um operador representado por uma matriz, que é escrito em uma dada base. A forma é a seguinte
$$M\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \tag{30}$$
o escalar λ é um auto valor de A e $\mathbf{x}$ é um autovalor de M;
- Comparando com o que obtemos na equação (29), temos que M é a matriz de acoplamento das massas e $\mathbf{x}$ é $(A, B, C, D)^T$.
- Podemos reescrever essa última expressão da forma
$$M\mathbf{x} - \lambda I\mathbf{x} = \mathbf{x}(M - \lambda I) \tag{31}$$
em que I é a matriz identidade;

Autovalores e Autovetores nas massas acopladas

- Uma solução de nosso problema é a solução trivial **x**=0, $A = B = C = D = 0$, mas não queremos isso;
- A solução que queremos é algum autovetor não nulo de $M - \lambda I$;
- Existirão certas frequências de ocilação que o sistema deverá respeitar, e a cada frequência estaŕa relacionado um autovetor.
- Lembrando, o autovalor é $\lambda = m\omega^2$, mas não é único, pois existem certas frequências ω de ocilação;

Autovalores e Autovetores nas massas acopladas

- Essas frequências são calculadas fazendo o descriminante da matriz abaixo

$$\begin{bmatrix} -(k_1+k_2)-m\omega^2 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & -(k_1+k_2)-m\omega^2 & 0 & k_2 \\ k_2 & 0 & -(k_2+k_3)-m\omega^2 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & (k_2+k_3)-m\omega^2 \end{bmatrix} = 0 \tag{32}$$

e igualando-o a zero e encontrando ω;

Autovalores e Autovetores nas massas acopladas

- Usando o software Mathematica, foi obtido quatro frequências possíveis de ocilação, portanto quatro autovalores e consequentemente quatro autovetores. As frequências são as seguintes:

$$\omega_1 = -\frac{\sqrt{-k_1 - 2k_2 - k_3 + \sqrt{(k_1 - k_3)^2 + 4k_2^2}}}{\sqrt{2m}} \tag{33}$$

$$\omega_2 = \frac{\sqrt{-k_1 - 2k_2 - k_3 + \sqrt{(k_1 - k_3)^2 + 4k_2^2}}}{\sqrt{2m}} \tag{34}$$

Autovalores e Autovetores nas massas acopladas

$$\omega_3 = -\frac{\sqrt{-k_1 - 2k_2 - k_3 - \sqrt{(k_1 - k_3)^2 + 4k_2^2}}}{\sqrt{2m}} \tag{35}$$

$$\omega_4 = \frac{\sqrt{-k_1 - 2k_2 - k_3 - \sqrt{(k_1 - k_3)^2 + 4k_2^2}}}{\sqrt{2m}} \tag{36}$$

- As quatro frequências anteriores são imaginárias para quaisquer valores de k_1, k_2 e k_3, e isso era esperado;
- Por simplicidade, podemos dizer que os autovalores são os ω e não mais $\lambda = m\omega^2$ para cada ω;

Autovalores e Autovetores nas massas acopladas

- Para cada autovalor desses existe um autovetor relacionado;
- Novamente usando o Mathematica, os autovalores obtidos foram

$$\mathbf{x}_1 = \left\{ 0, -\frac{k_1 - k_3 + \sqrt{(k_1 - k_3)^2 + 4k_2^2}}{2k_2}, 0, 1 \right\} \tag{37}$$

$$\mathbf{x}_2 = \left\{ -\frac{k_1 - k_3 + \sqrt{(k_1 - k_3)^2 + 4k_2^2}}{2k_2}, 0, 1, 0 \right\} \tag{38}$$

Autovalores e Autovetores nas massas acopladas

- $$\mathbf{x}_3 = \left\{ 0, -\frac{k_1 - k_3 - \sqrt{(k_1 - k_3)^2 + 4k_2^2}}{2k_2}, 0, 1 \right\} \tag{39}$$

  e

  $$\mathbf{x}_4 = \left\{ -\frac{k_1 - k_3 - \sqrt{(k_1 - k_3)^2 + 4k_2^2}}{2k_2}, 0, 1, 0 \right\} \tag{40}$$

Autovalores e Autovetores nas massas acopladas

- A solução do problema agora está completa, ele pode ocilar de quatro maneiras distintas, e depende das constantes elásticas das molas;

- *http : //astro.physics.ncsu.edu/urca/course_files/Lesson10/index.h*
- Howard Anton e Chris Rorres, Álgebra Linear com Aplicacoes, 8ed , Editora Bookman, Porto Alegre, 2001.