Universidade Federal do Rio Grande
Instituto de Matemática, Estatística e Física
Teoria da Relatividade

Geferson Lucatelli

Geometria de Schwarzschild, Buracos Negros e Lentes Gravitacionais

22/06/2015

Contents

Introdução

- A relatividade começou com Galileu-Galilei (1564-1642), mas tratava os referenciais como absolutos;
- Na dinâmica Newtoniana o movimento de uma partícula é descrita pelas suas coordenadas (x, y, z) em um instante t, ou $(x, y, z; t)$;
- Surge um problema $\longrightarrow$ a separação do espaço (x, y, z) e do tempo t;
- A ideia de tempo e referenciais absolutos tem de ser modificada;
- Depois anos 1900, o esforço dos cientistas foi unificar o espaço e tempo, estando ambos dependentes entre si.
- O principal trabalho é atribuído a Albert Einstein (1879-1955) e a Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928);
- O que mudou: $(x, y, z; t)$ para $\longrightarrow$ (t, x, y, z)
- Surge o termo *espaço-tempo*;
- Referenciais inerciais (t, x, y, z) (S) e (t', x', y', z') (S');

Coordenadas e Invariância

- Nas coordenadas cartesianas ou euclidianas temos que um elemento de linha é dado por

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 \tag{1}$$

- O cálculo do perímetro C de um círculo usando a equação (1) pode ser complicado:

$$C = \oint dS = \oint \left[dx^2 + dy^2\right]^{1/2}$$

$$= 2\int_{-r}^{+r} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$= 2\int_{-r}^{+r} \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}\, dx = 2r \int_{-1}^{+1} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = 2\pi r$$

- Que tal fazermos uma transformação de coordenadas, digamos, para polares (r, θ):

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \tag{2}$$

Diferenciando e elevando ao quadrado, o elemento de linha fica apenas

$$dS^2 = r^2 d\theta^2 \tag{3}$$

assim

$$C = \oint dS = \oint_0^{2\pi} r d\theta = 2\pi r \tag{4}$$

Coordenadas e Invariância

- O elemento de linha de uma esfera em coordenadas cartesianas:

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{5}$$

pode ser transformado para o mesmo elemento em coordenadas esféricas (r, θ, ϕ):

$$dS^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta^2 d\phi^2 \tag{6}$$

onde

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \sin \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \phi \end{cases} \tag{7}$$

- O comprimento do círculo é definido sobre quantidades que são INDEPENDENTES da escolha do sistema de coordenadas;
- Coordenadas são apenas conveniências, uma maneira de localizar pontos em uma geometria, há muitos outros sistemas de coordenadas, e todos são equivalentes.

Coordenadas e Invariância

- Do ponto de vista da relatividade especial, a invariância é dada por um elemento ds, o qual mede a distância quadridimensional, ou a distância no espaço-tempo, entre dois pontos, a partir de dois sistemas de referências diferentes, e essa distância deve ser invariante sobre a escolha do sistema de referências e das coordenadas;
- Uma prova bem simples pode ser feita para mostrar que:

$$\Delta s^2 = -(c\Delta t)^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \tag{8}$$

$$= -(c\Delta t')^2 + \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 \tag{9}$$

- Essa é a geometria do espaço-tempo em quatro dimensões da relatividade especial, e para um espaço plano. Chamada também de *Espaço de Minkowski*;
- Geometria não-euclidiana;

Worldlines e cones de luz

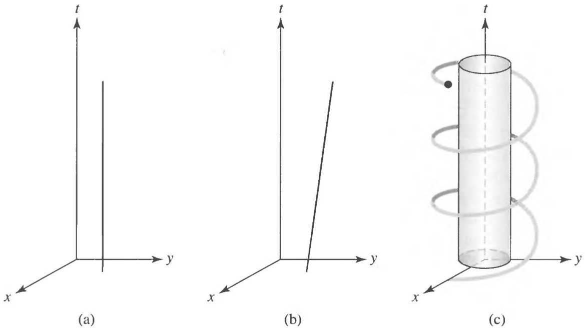

FIGURE 17.12 Worldlines for (a) a man at rest, (b) a woman running with constant velocity, and (c) a satellite orbiting Earth.

Figura: Worldlines

Worldlines e cones de luz

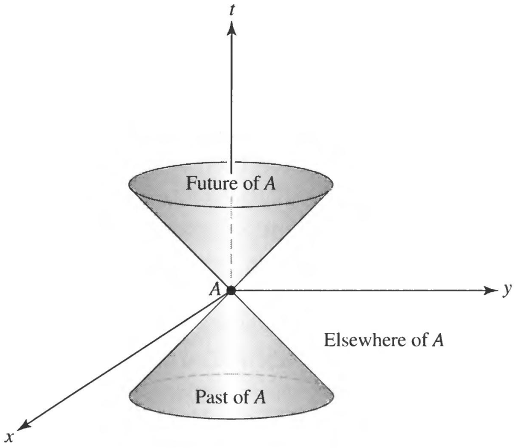

Figura: Cone de luz

- Na geometria euclidiana, dois eventos (pontos), (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) possui uma separação

$$\Delta S^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

- Na geometria do espaço-tempo, dois eventos (t_A, x_A, y_A, z_A) e (t_B, x_B, y_B, z_B) possuem uma separação dada por (8),

$$\Delta s^2 = [-c(t_B - t_A)]^2 + (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2$$

- Essa separação é chamada de *intervalo de espaço tempo*;
- Definido como: o quadrado do intervalo é igual ao quadrado da distância percorrida pela luz em um intervalo de tempo entre os eventos, menos a distância espacial entre os eventos;
- Três tipos de intervalos:

$$\begin{cases} (\Delta s)^2 > 0 \\ (\Delta s)^2 < 0 \\ (\Delta s)^2 = 0 \end{cases} \tag{10}$$

- O sinal nos diz se a luz teve tempo suficiente para viajar entre dois eventos;

Intervalos espaço-tempo, tempo próprio e distância própria

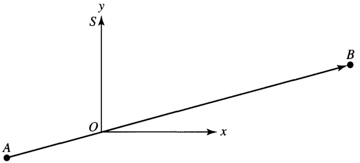

FIGURE 17.14 An inertial reference frame S moving along the timelike worldline connecting events A and B. Both events occur at the origin of S.

Figura: Referencial S se movendo com a worldline.

Intervalos espaço-tempo, tempo próprio e distância própria

- $\Delta s^2 > 0$: o intervalo é dito de tipo-tempo $\longrightarrow$ tempo suficiente para viajar entre os dois eventos;
- Um referencial se movendo em juntamente com a worldline de dois eventos consecutivos, implica em os dois eventos ocorrerem no mesmo ponto do referencial.
- Assim o intervalo de tempo medido entre os dois eventos é $\Delta s/c$;
- Esse é o chamado de *tempo próprio*,

$$\Delta\tau = \frac{\Delta s}{c} \tag{11}$$

- Mesma coisa que um observador em sua worldline observando dois eventos;
- $\Delta s^2 = 0$: o intervalo é nulo $\longrightarrow$ exato tempo para viajar entre os dois eventos, os fótons;
- $\Delta s^2 < 0$: o intervalo é dito tipo-espaço $\longrightarrow$ não teve tempo o suficiente para viajar entre os dois eventos, pois é requerido uma velocidade maior do que c;
- A distância medida entre dois eventos em um referencial em que ocorrem dois eventos simultaneamente, $t_A = t_B$, é chamada de distância própria,

$$\Delta\mathcal{L} = \sqrt{-(\Delta s)^2} \tag{12}$$

O quadrivetor

- O quadrivetor é o vetor do espaço tempo, que carrega junto com as coordenadas espaciais, a coordenada temporal,

$$\mathbf{a} = a^t \hat{e}_t + a^x \hat{e}_x + a^y \hat{e}_y + a^z \hat{e}_z = a^o \hat{e}_o + a^1 \hat{e}_1 + a^2 \hat{e}_2 + a^3 \hat{e}_3$$

$$= (a^0, a^1, a^2, a^3) = \sum_{\alpha=0}^{3} a^\alpha \hat{e}_\alpha$$

onde $\hat{e}_\alpha$ é a base que representa as componentes a^α do quadrivetor **a**.

- A variação Δx do espaço-tempo entre dois eventos A e B pode agora ser escrita como

$$\Delta x^\alpha = x^\alpha_B - x^\alpha_A \tag{13}$$

- Produto escalar de dois quadrivetores **a** e **b**:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a^\alpha \hat{e}_\alpha) \cdot (b^\beta \hat{e}_\beta)$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{3} \sum_{\beta=0}^{3} (\hat{e}_\alpha \cdot \hat{e}_\beta) a^\alpha b^\beta \tag{14}$$

Na expressão anterior,

$$\hat{e}_\alpha \cdot \hat{e}_\beta = \begin{cases} 0 & \alpha \neq \beta \\ 1 & \alpha = \beta \end{cases} \tag{15}$$

Métrica do espaço-tempo plano

- É conveniente definir

$$\eta_{\alpha\beta} \equiv \hat{e}_\alpha \cdot \hat{e}_\beta \tag{16}$$

-

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \eta_{\alpha\beta} a^\alpha b^\beta$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{\alpha=0}^{3} \sum_{\beta=0}^{3} \eta_{\alpha\beta} a^\alpha b^\beta \tag{17}$$

- Para o produto escalar ser possível, $\eta_{\alpha\beta}$ deve ser conhecido;
- $\eta_{\alpha\beta}$ é determinado se

$$\Delta s^2 = \Delta \mathbf{x} \cdot \Delta \mathbf{x}$$

assim

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \longrightarrow \Delta \mathbf{x}^\alpha \cdot \Delta \mathbf{x}^\alpha = \eta_{\alpha\alpha} \Delta a^\alpha \Delta a^\alpha$$

então

$$\Delta x^\alpha \Delta x^\beta = \eta_{\alpha\beta} \Delta a^\alpha \Delta b^\beta$$

O termo $\eta_{\alpha\beta}$ é um tensor, e é chamado de *métrica do espaço-tempo plano*. Fica então definido como

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{18}$$

Métrica do espaço-tempo plano

- $dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \longrightarrow$ métrica do espaço tridimensional euclidiano;
- A distância entre dois pontos, 1 e 2 em um caminho P é

$$\Delta S = \int_1^2 \sqrt{dS^2} = \int_1^2 \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \tag{19}$$

- Espaço plano $\longrightarrow$ menor distância é uma linha reta;
- "Linha mais reta possível" $\longrightarrow$ ΔS é um mínimo (princípio variacional);
- No espaço tempo, a worldline não é necessariamente uma linha reta;
- Sem presença de massa, uma worldline W que conecta dois pontos, é dada pela *métrica* para o espaço-tempo plano,

$$ds^2 = (cdt)^2 - dS^2 = (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \tag{20}$$

$$\Delta s = \int_A^B \sqrt{ds^2} = \int_A^B \sqrt{(cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = \int_1^2 \sqrt{\eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta} \tag{21}$$

A curvatura do espaço-tempo

- Início entre 1907 e 1915 com a Teoria Geral da Relatividade, por Albert Einstein;
- Elaborada a partir dos conceitos da Relatividade Restrita;
- A presença da matéria afeta a estrutura do espaço tempo;
- A gravitação é provocada por essa deformação;
- A curvatura do espaço-tempo modifica a taxa de evolução temporal dos relógios;

$$taxa = 1 + \frac{\phi}{c^2} \tag{22}$$

com ϕ sendo o potencial gravitacional;

A curvatura do espaço-tempo

- Antes de entrar fundo na GTR, é interessante dar atenção a uma das primeiras equações a descrever o espaço-tempo curvo, é baseada na gravitação de Newton, e vale somente para campos fracos. A métrica é dada por

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\phi(x^i)}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(I - \frac{2\phi(x^i)}{c^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{23}$$

com $\phi(x^i)$ sendo uma função da posição, satisfazendo a equação de campo de Newton,

$$\nabla^2 \phi(\vec{x}) = 4\pi G \mu(\vec{x}) \tag{24}$$

onde pode ser escrito como, por exemplo para a Terra,

$$\phi(r) = -\frac{GM_\oplus}{r} \tag{25}$$

A curvatura do espaço-tempo

- Sem um campo gravitacional, um raio de luz percorre uma linha reta no espaço-tempo;
- Mas o que ocorre quanto está próximo a um campo gravitacional, por exemplo o do Sol?
- A curvatura do espaço-tempo altera a trajetória do fóton, mesmo ele não tendo massa!
- O fóton NÃO é desviado pela interação gravitacional, e sim pela curvatura na região;

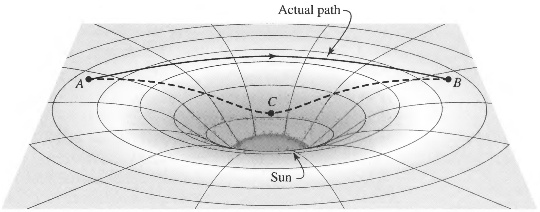

Figura: Desvio de um fóton devido a curvatura do espaço-tempo.

A curvatura do espaço-tempo

- Um fóton se desloca de A até B, nas proximidades do Sol;
- Ele poderá seguir uma trajetória que minimize a distância entre dois pontos?;
- Em quantas dimensões se dá a deformação do espaço-tempo?
- Isso parece causar uma violação de um dos postulados da STR;
- Todo o observador, seja em A, B ou C medirá o mesmo valor de c;
- No caminho pontilhado, o fóton deve percorrer uma distância maior, e o tempo deve ser dilatado nesse caminho;
- Isso retarda a passagem do tempo para do raio de luz, e aumenta a distância a ser percorrida, assim o princípio não é violado;

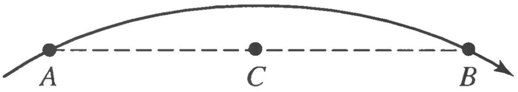

Figura:

A curvatura do espaço-tempo

- A GTR explica então que a dilatação ocorre em *slow down in time* e *slow down in space*. Há a contribuição das duas formas para o desvio da luz em um campo gravitacional;
- De fato a distância a ser percorrida pelo fóton, é a menor distância. E esse caminho é exatamente o caminho que se dá ao longo da curvatura;
- O tempo passa mais devagar em um espaço-tempo curvo;
- Uma comparação muito semelhante do que foi descrito acima é mostrado na figura abaixo

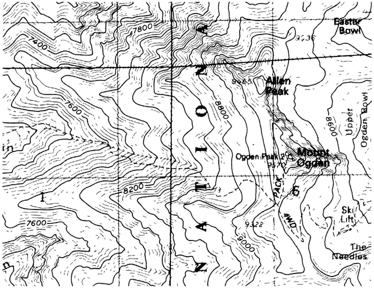

Figura: Curvas de níveis em uma mapa topográfico. Qual é a menor distância entre dois pontos?

Coordenadas

- No espaço-tempo um elemento de linha foi utilizado para conectar dois pontos, nos dando o intervalo espacial-temporal entre eles;
- Ressaltando, a escolha das coordenadas é arbitrária, elas são uma maneira de satisfazer a descrição de pontos no espaço-tempo;
- Um elemento de linha $\longrightarrow$ geometria $\longrightarrow$ métrica$= ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$;
- Transformando a métrica anterior para coordenadas polares esféricas:

$$x = r\cos\theta\sin\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\phi$$

$$dx = dr\cos\theta\sin\phi + r\cos\theta\cos\phi d\phi - r\sin\theta\sin\phi d\theta$$

$$dy = dr\sin\theta\sin\phi + r\sin\theta\cos\phi d\phi + r\cos\theta\sin\phi d\theta$$

$$dz = dr\cos\phi - r\sin\phi d\phi$$

Coordenadas

$$
\begin{gathered}
dx^2+dy^2+dz^2 = \overbrace{dr^2\cos^2\theta\sin^2\phi + dr^2\sin^2\theta\sin^2\phi}^{dr^2\sin^2\phi} + \overbrace{r^2\cos^2\theta\cos^2\phi d\phi^2 + r^2\sin^2\theta\cos^2\phi d\phi^2}^{r^2 d\phi^2\cos^2\phi} + \\
\overbrace{r^2\sin^2\theta\sin^2\phi d\theta^2 + r^2\cos^2\theta\sin^2\phi d\theta^2}^{r^2 d\theta^2\sin^2\phi} + dr^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi d\phi^2 + \\
2rdrd\phi\cos^2\theta\cos\phi\sin\phi - \cancel{2rdrd\theta\cos\theta\sin\theta\sin^2\phi} \cancel{-2r^2 d\phi d\theta\cos\theta\sin\theta\cos\phi\sin\phi} + \\
2rdrd\phi\sin^2\theta\cos\phi\sin\phi + \cancel{2rdrd\theta\cos\theta\sin\theta\sin^2\phi} \cancel{+2r^2 d\theta d\phi\cos\theta\sin\theta\cos\phi\sin\phi} + \\
-2rdrd\phi\cos\phi\sin\phi
\end{gathered}
$$

$$
= dr^2\sin^2\phi + dr^2\cos^2\phi + r^2 d\phi^2\cos^2\phi + r^2 d\theta^2\sin^2\phi + r^2 d\phi^2\sin^2\phi + 2rdrd\phi\cos\phi\sin\phi - 2rdrd\phi\cos\phi\sin\phi
$$

$$
= dr^2 + r^2 d\phi^2 + r^2 d\theta^2\sin^2\phi \tag{26}
$$

e

$$
ds^2 = c^2dt^2 - dr^2 - r^2d\phi^2 - r^2 d\theta^2\sin^2\phi \tag{27}
$$

Essa é uma geometria de um espaço plano, mas apenas escrita em em um outro sistema de coordenadas com ”nomes diferentes“;

Métrica

- A métrica fica

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x)dx^\alpha dx^\beta \tag{28}$$

$$g_{\alpha\beta}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{29}$$

- $g_{\alpha\beta}(x)$ é uma matriz diagonal simétrica, onde é a métrica para o espaço plano em coordenadas (r, ϕ, θ);
- A separação no espaço-tempo entre dois eventos A e B em uma worldline tipo-tempo nessas coordenadas é

$$\Delta s = \int_A^B \sqrt{g_{\alpha\beta}(x)dx^\alpha dx^\beta} \tag{30}$$

Dinâmica Newtoniana

- Pierre Simon Marquis de Laplace (1749 - 1827) e John Michell (1724-1793): Primeira ideia de um corpo com uma imensa massa em um pequeno volume (ambos independentes);
- Discussão sobre estrelas que tivessem como velocidade de escape $v_{esc} = c$;
- Descrição clássica do que seria esse objeto:

$$F = -G\frac{Mm}{r^2} \tag{31}$$

e integrando obtemos o potencial gravitacional a uma distância r da região onde M se encontra,

$$\Phi = -\int F dr = -\int_r^{r\infty}\left[-G\frac{Mm}{r^2}\right]dr = -G\frac{Mm}{r}\Big|_r^{\infty}$$

então

$$\Phi = G\frac{Mm}{r} \tag{32}$$

- Considerações de Laplace e Michell:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \Longrightarrow K_{esc} = \frac{1}{2}mv_{esc}^2 \longrightarrow v_{esc} = c \tag{33}$$

igualando a (32),

$$\frac{1}{2}mc^2 = G\frac{Mm}{r} \longrightarrow r = \frac{2GM}{c^2} \tag{34}$$

- Na época já se sabia que c tem um valor alto;
- Devemos prestar muita atenção nessa última expressão;

Dark Star

- Supondo $M = M_{\odot}, M_{\odot} = 1,98 \times 10^{3}0\text{kg}$, e para $c = 299792458\text{m/s}$ e $G = 6,673 \times 10^{-11}\text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$, a equação (34) nos dá um raio de

$$r = \frac{2 \times (6,673 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}) \times (1,98 \times 10^{30} kg)}{(299792458 m/s)^2} \approx 2,94 km \tag{35}$$

- Quão denso é um objeto desses?

$$V = \frac{4}{3}\pi R_{\odot}^3 \qquad \rho_m = \frac{3M}{4\pi R_{\odot}^3}$$

substituindo r nessa última expressão é encontrado

$$\rho_m = \frac{3M_{\odot}}{4\pi}\left(\frac{c^2}{2M_{\odot}G}\right)^3 = \frac{3M_{\odot}c^6}{4\pi 8 M_{\odot}^3 G^3} = \frac{3c^6}{32\pi M_{\odot}^2 G^3} \tag{36}$$

- **A densidade cai com o inverso do quadrado da massa!!!**
- Laplace e Michell nomearam esse objeto de *Dark Star*, e podemos tê-lo com uma densidade relativamente baixa;
- Seja um objeto desse tipo, com uma massa de $10^9 M_{\odot}$, então

$$\rho_m = \frac{3 \times (3 \times 10^8 m/s)^6}{32\pi \times (1,98 \times 10^{30} kg)^2 \times (6,673 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2})^3} \approx 18,67 kg/m^3$$

Geometria de Schwarzschild

- No espaço tempo curvo (presença de massa), a worldline também se curva. Sobre o que ela se curva, é chamada de *geodésica*;
- Espaço-tempo plano $\longrightarrow$ geodésica $\longrightarrow$ linha reta;
- ds tipo-tempo entre dois eventos é um extremante, máximo ou mínimo;
- Para um fóton, o intervalo ds é zero, $\int \sqrt{(ds)^2} = 0$, está sobre a worldline, intervalo nulo;
- A GTR implica que o caminho do fóton está sobre a geodésica;

Três fundamentos principais da GRT são:

1. A massa atua no espaço tempo, dizendo como se curvar;
2. O espaço tempo devolve a tarefa, e diz para a massa como se mover;
3. Qualquer partícula livre, até mesmo um fóton que não tem massa, segue a linha de uma geodésia, e mesmo uma worldline, através do espaço. Para uma partícula massiva, a geodésica tem um máximo ou mínimo de intervalo, e para a luz, a geodésica tem um intervalo nulo.

Geometria de Schwarzschild

O que descreve a geometria de Schwarzschild:

1. O exterior e (posteriormente) o interior de um objeto esférico;
2. Um buraco-negro sem rotação, estático;
3. Efeitos de precessão das órbitas planetárias;
4. A deflexão da luz em um campo gravitacional, que nos levará depois as lentes gravitacionais;
5. O exato desvio gravitacional da frequência.

Geometria de Schwarzschild

- Para começar a descrever a geometria de Schwarzschild, é conveniente começarmos do simples:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\phi^2 - r^2 d\theta^2 \sin^2 \phi \tag{37}$$

- Como substituir essa equação por uma outra, que descreverá a curvatura do espaço-tempo;
- Um corpo massivo, "diz" para o espaço-tempo como se curvar. Mas de que forma isso é feito?
- Coordenadas $(t, r, \phi, \theta) \longrightarrow$ usadas por um observador no infinito em relação a origem;
- Para medir a distância até a massa central;
- r é usado para medir intervalos radiais entre dois pontos;
- O tempo medido por relógios t NO sistema de coordenadas, deve sempre ter a mesma taxa de variação, em qualquer lugar;

Dedução conceitual

- Podemos usar a métrica (7) para se chegar a geometria de Schwarzschild;
- Não usar a origem como ponto de referência (está dentro do corpo);
- Imagine uma série de superfícies esféricas de raio r centradas na origem, com área $A = 4\pi r^2$;
- Agora, $r \longrightarrow$ distância até a superfície;
- Com cuidado, (7) pode ser usada para descrever o espaço-tempo curvo;
- *coordenada velocidade* é simplesmente a taxa de variação das coordenadas espaciais;
- $r \to \infty$ espaço-tempo plano;
- O termo do desvio gravitacional

$$\sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}} \tag{38}$$

  consegue descrever o espaço-tempo nas redondezas do corpo;
- Lembre que, na curvatura ocorre o *slow down in time* e o *slow down in space*;
- Implicação de que ambos efeitos devem ser "regulados" por (38);

- Em 1916, dois meses depois de Einstein ter publicado a GTR, Karl Schwarzschild (1873-1916) resolveu uma equação de campo de Einstein;
- A métrica é dada pela expressão:

$$ds^2 = \left(cdt\sqrt{1-\frac{2GM}{rc^2}}\right)^2 - \left(\frac{dr}{\sqrt{1-\frac{2GM}{rc^2}}}\right)^2 - r^2 d\phi^2 - r^2 d\theta^2 \sin^2\phi \tag{39}$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1-\frac{2GM}{rc^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{dr}{1-\frac{2GM}{rc^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{40}$$

- Essa é uma solução esfericamente simétrica para a ausência de matéria, vácuo absoluto;
- A métrica inclui a dilatação temporal, dilatação espacial e redshift gravitacional;
- É válida somente para a parte externa ao corpo massivo;

Solução de Schwarzschild para uma estrela colapsada

- O resultado encontrado em (35) dado por (34), foi de muito interesse para astrônomos até a metade do século XX;
- 1939, físicos J. Robert Oppenheimer (1904 - 1967) e Hartland Snyder (1913-1962);
- Descrição do colapso gravitacional de uma estrela que esgotou suas energias de fusão nuclear;
- Oppenheimer e Volkoff $\longrightarrow$ primeiro modelo de estrelas de nêutrons;
- Esse tipo não pode exceder $3M_{\odot}$, mas se exceder?
- ....

Solução de Schwarzschild para uma estrela colapsada - Raio de Schwarzschild

- A resposta está na equação (39),

$$ds^2 = \left(cdt\sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}}\right)^2 - \left(\frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}}}\right)^2 - r^2 d\phi^2 - r^2 d\theta^2 \sin^2\phi$$

- Um ponto crítico da métrica está em

$$\sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}} = 0 \longrightarrow 2GM = rc^2 \quad \therefore \quad \mathcal{R}_s = \frac{2GM}{c^2} \tag{41}$$

- Este é o *raio de Schwarzschild*;
- Tem a mesma forma que (34);
- O que ocorre neste ponto?

Slow down in time

- Primeiro recorremos ao tempo próprio, $d\tau = \dfrac{ds}{c}$,

$$d\tau = \frac{ds}{c} = dt\sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}} \tag{42}$$

e tiramos a conclusão que $d\tau = 0$, **o tempo para nessa região** quando medido a uma grande distância dali;

- E o contrário, $dt \to \infty$;
- A dilatação temporal é imensa;
- O que acontece com um fóton?
- O resultado implica que até a luz está ”presa“?

$$0 = \left(cdt\sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}}\right)^2 - \left(\frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}}}\right)^2 - r^2 d\phi^2 - r^2 d\theta^2 \sin^2\phi$$

Slow down in time

escolhendo $d\phi = d\theta = \phi = \theta = 0$,

$$cdt\sqrt{1-\frac{2GM}{rc^2}} = \frac{dr}{\sqrt{1-\frac{2GM}{rc^2}}}$$

$$\frac{dr}{dt} = c\left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right) = c\left(1-\frac{\mathcal{R}}{r}\right) \tag{43}$$

- Se fizermos $r = \mathcal{R}$, $\frac{dr}{dt} = 0$, **o fóton não escapa da superfície**;
- Não recebemos informação a cerda do que está dentro desse limite;
- Uma estrela que colapsa e fica confinada dentro desse limite, tem o famoso nome de *buraco-negro* ou *black-hole*;
- A superfície esférica de raio $\mathcal{R}$ é denominada de *horizonte de eventos*;
- Consideremos agora a variação temporal de um fóton indo para um objeto desses, equação (43),

$$dt = \frac{1}{c}\frac{dr}{1-\frac{\mathcal{R}}{r}}$$

integrando obtemos a variação temporal Δt

$$\Delta t = \frac{1}{c}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{1-\mathcal{R}/r} = \frac{1}{c}\int_{r_1}^{r_2}\frac{rdr}{r-\mathcal{R}} \tag{44}$$

Slow down in time

integrando por partes,

$$u = r \longrightarrow du = dr, \qquad dv = \frac{1}{r-\mathcal{R}}dr \longrightarrow v = \ln|r-\mathcal{R}|$$

$$\frac{1}{c}\int_{r_1}^{r_2}\frac{rdr}{r-\mathcal{R}} = \frac{1}{c}\left[r\ln|r-\mathcal{R}| - \int_{r_1}^{r_2}\ln|r-\mathcal{R}|dr\right]\Bigg|_{r_1}^{r_2}$$

$$= \frac{1}{c}\left[r\ln|r-\mathcal{R}| - \{-r + (r-\mathcal{R})\ln|r-\mathcal{R}|\}\right]$$

$$\Delta t = \frac{1}{c}\left[r_2 - r_1 + R\ln\left|\frac{r_2-\mathcal{R}}{r_1-\mathcal{R}}\right|\right] \tag{45}$$

- Se emitimos o fóton em r_2 em direção ao buraco negro até r_1 temos algumas conclusões bizarras;
- $\Delta t \to \infty$, na medida que $r_1 \to \mathcal{R}$. Porque?
- Isso vale não só para o fóton, mas para qualquer entidade;
- Quando a coordenada r chegar ao horizonte de eventos, a coordenada velocidade tende a zero;
- Importante, isso não está relacionado com o referencial, e sim com o observador, para o referencial isso muda;

Buraco Negro - Singularidade

- Fugimos da singularidade da métrica, mas não fugimos da singularidade $r = 0$;
- A real singularidade está presente em $r = 0$, e ali o espaço-tempo está infinitamente curvado;
- Dentro do horizonte de eventos, temos uma região que está eternamente fora do nosso alcance;
- Buraco negro sem rotação $\longrightarrow$ estrutura "simples";
- centro $r \to 0$, $V \to 0$, $\rho \to \infty$;

Slow down in space

- A equação (12) nos diz que a distância entre dois eventos (nesse caso consideremos radial) é $d\mathcal{L} = \sqrt{-(ds)^2}$;
- Fazendo $d\phi = 0$, $d\theta = 0$, e $\phi = \theta = 0$, e para um t fixo, temos

$$ds^2 = -\left(\frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}}}\right)^2$$

e calculando

$$d\mathcal{L} = \sqrt{-\left[-\left(\frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}}}\right)^2\right]} = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}}}$$

- A distância $d\mathcal{L}$ é extremamente maior em relação ao próprio dr;

$$\mathcal{L} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}}}$$

Slow down in space

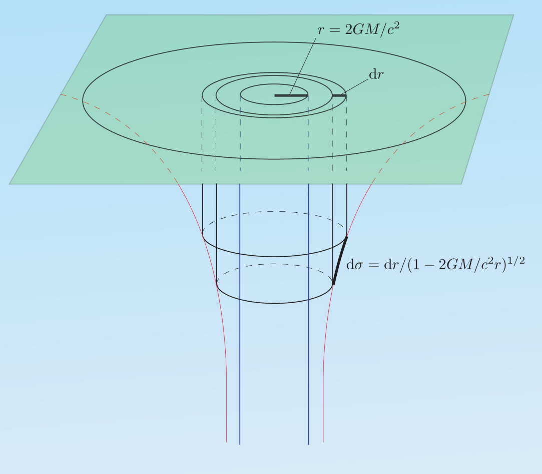

Figura: Variação de ds com dr.

- O que ocorre com o tempo próprio de uma partícula no no buraco-negro?
- Queda livre em linha reta por uma partícula ;
- Dilatação temporal grande (tempo próprio $d\tau$) $\longrightarrow$ variação da coordenada dr muito pequena;
- Na medida que $r \to \mathcal{R}$,

$$\frac{dr}{d\tau} \longrightarrow 0$$

- Consultando em [4], é possível mostrar que os tempos envolvidos são os seguintes;
- De r_o (exterior) até $\mathcal{R}$ têm-se um tempo de

$$\tau_H = \frac{r_o^{3/2}}{c\sqrt{\mathcal{R}}} \left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \left[\frac{\mathcal{R}}{r_o} \right]^{3/2} \right\} \tag{46}$$

  o contrário do que é medido por um observador;
- Já internamente, o tempo para atingir a singularidade é

$$\tau_s = \frac{\pi r_o^{3/2}}{2c\sqrt{\mathcal{R}}} \tag{47}$$

Lentes Gravitacionais

- A geometria de Schwarzschild tem muitas aplicações na astrofísica;
- Uma delas é a explicação das lentes gravitacionais;
- Foi visto que a curvatura do espaço tempo faz desviar um raio de luz;
- Vários raios de luz $\longrightarrow$ vários desvios
- Mais de uma imagem pode ser produzida de uma mesma fonte;
- O que cria esses desvios, ou a distribuição de massa, é chamada de *lente gravitacional*;

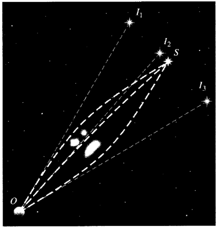

Figura:

Lentes Gravitacionais

- Nos dão informação da fonte;
- Do objeto que age como lente;
- Da geometria em larga escala do universo;
- Distâncias cosmológicas;
- Exemplos de objetos que atuam como lentes são clusters de galáxias distantes;
- Eles não precisam ser simétricos, podem possuir qualquer forma;
- Caso simples, cluster esférico;

Lentes Gravitacionais

- Começamos pelo simples, o ângulo de deflexão α de um raio passando por uma massa M e com um parâmetro de impacto b ($b >> M$) é dado por

$$\alpha = \frac{4GM}{bc^2} \equiv \frac{2\mathcal{R}}{b} \tag{48}$$

Lentes Gravitacionais

- Geometria de uma lente gravitacional:

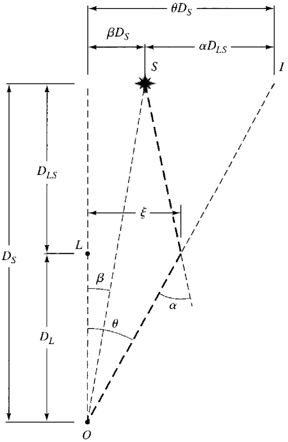

Figura:

Lentes Gravitacionais

- O é o observador;
- S é a fonte emitidora de luz;
- D_L é a distância da concentração de matéria que atua como lente em relação ao observador, está no ponto L;
- ξ é o parâmetro de impacto, então (48) fica

$$\alpha = \frac{4GM}{c^2 \xi} \tag{49}$$

- θ é o ângulo entre uma imagem que é formada pelo desvi da luz, em relação à lente, o desvio é α;
- β é o ângulo real até S;
- D_s é a distância da fonte em relação ao observador;
- D_L é a distância da lente em relação ao observador;
- D_{LS} é a distância da lente em relação a fonte;
- K_S é a distância horizontal do observador em relação a fonte;
- K_I é a distância horizontal do observador em relação a um ponto I aparente de onde a imagem é formada;
- K_α é a distância horizontal da lente em relação ao ponto I onde a imagem é formada;

Lentes Gravitacionais

- A figura é ilustrativa, na realidade os ângulos são muito pequenos, e as distâncias longitudinais também são muito maiores do que as horizontais;

$$M \sim 10^{11} M_{\odot} \qquad \mathcal{R} \sim 10^{11} km$$

$$D_S \sim D_L \sim D_{LS} \sim 1Gpc \sim 3 \times 10^{22} km$$

- Da geometria tiramos que:

$$K_S = D_S \sin\beta \approxeq D_S \beta \tag{50}$$

$$K_I = D_S \sin\theta \approxeq D_S \theta \tag{51}$$

$$K_\alpha = D_{LS} \sin\alpha \approxeq \alpha D_{LS} \tag{52}$$

- Temos

$$\theta D_S = \beta D_S + \alpha D_{LS} = \beta D_S + D_{LS} \frac{4GM}{c^2 \xi} \tag{53}$$

esta equação é chamada de *equação da lente*;

- Considerando ainda que

$$\sin\theta \approx \theta \approx \frac{\xi}{D_L} \longrightarrow \xi = \theta D_L \tag{54}$$

reconstruísse (53) da forma

$$\theta D_S = \beta D_S + D_{LS}\frac{4GM}{c^2\theta D_L} \quad \longrightarrow \quad \theta = \beta + \frac{D_{LS}}{D_S D_L}\frac{4GM}{\theta} \tag{55}$$

onde definimos uma quantidade, o parâmetro θ_o, chamado de *raio ou ângulo de Einstein* (θ_o é um raio angular),

$$\theta_o = 2\sqrt{\frac{D_{LS}}{D_L D_S}\frac{GM}{c^2}} \tag{56}$$

assim

$$\theta = \beta + \frac{\theta_o^2}{\theta} \tag{57}$$

- As raízes de (57) determinam a posição angular das imagens no céu;

- Resolvendo

$$\theta^2 - \beta\theta - \theta_o^2 = 0$$

encontra-se

$$\theta\pm = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\theta_o^2}}{2} = \frac{1}{2}\left[\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\left(2\sqrt{\frac{D_{LS}}{D_L D_S}\frac{GM}{c^2}}\right)^2}\right] \quad (58)$$

$$\theta\pm = \frac{1}{2}\left[\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 8\mathcal{R}\frac{D_{LS}}{D_L D_S}}\right] \quad (59)$$

- Caso especial, a a fonte e observador estão alinhados com a distribuição que cria a lente gravitacional;
- Isso nos permite interpretar θ_o;
- A simetria faz com que os raios desviados sejam vistos em forma de um círculo ou anel, chamado de *anel de Einstein*;

Lentes Gravitacionais

- Neste caso, o ângulo β entre a imagem original e a lente é zero;
- Isso implica $\theta = \theta_o$;
- A imagem do objeto é vista como um anel;

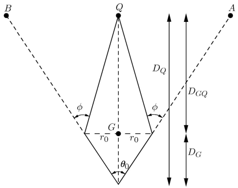

Figure 11.4: The Einstein ring. Here, Q is the observed object, and G is the gravitational lens.

Figura:

- Considerando o redshift;

$$z = H_o \frac{r}{c} \tag{60}$$

- Consideramos que a fonte se afasta do observador pela relação

$$H_o D_S = cz_S$$

e a lente, também, pela relação

$$H_o D_L = cz_L$$

- Isolando as distâncias e substituindo em (57), temos

$$\theta_o = 2\sqrt{\frac{D_{LS} H_0^2 GM}{c^4 z_S z_L}}$$

mas

$$D_{LS} = D_S - D_L = \frac{cz_S - cz_l}{H_o}$$

portanto

$$\theta_o = 2\sqrt{\frac{cz_S - cz_L}{H_o} \frac{H_0^2 GM}{c^4 z_S z_L}} = 2\sqrt{\frac{z_S - z_L}{z_S z_L} \frac{H_o GM}{c^3}} \tag{61}$$

Lentes Gravitacionais

- Se isolarmos a massa, descobrimos a massa do aglomerado que cria a lente gravitacional;

$$M = \frac{z_S z_L}{z_S - z_L} \frac{c^3}{4H_o G} \theta_o^2 \tag{62}$$

onde θ_o pode ser facilmente obtido na observação;

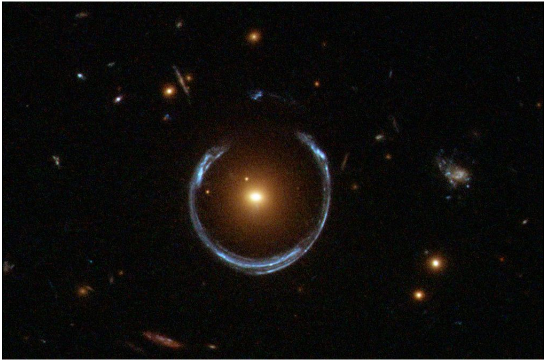

Figura: Cosmic Horseshoe Einstein Ring

Lentes Gravitacionais

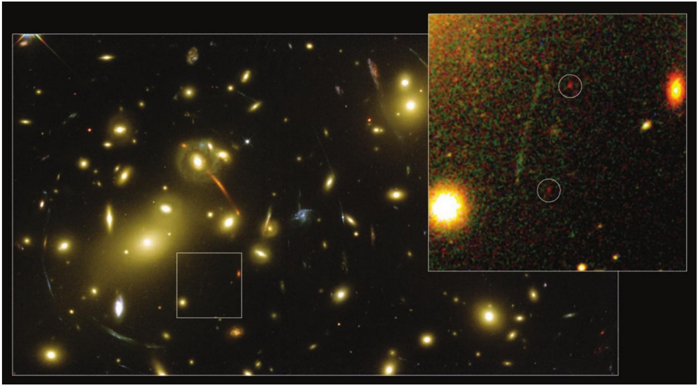

Figura: Abell 2218

Microlensing

- Não é somente objetos grandes que podem interagir com a propagação da luz a grandes distâncias;
- Estrela passando na frente de outra;
- Se S, L e O estiverem alinhados algo característico ocorre;
- S_1 é a estrela pronta para se alinhar;
- Em S ocorre o alinhamento;
- S_2 depois do alinhamento;

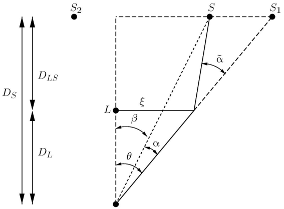

Figura:

- Trabalhando com a geometria, chegamos as mesmas equações encontradas no tópico anterior;
- A magnificação μ de uma imagem é definido como sendo o raio dentre os ângulos sólidos das imagens e da fonte;

$$d\Omega_{Si} = \sin\theta d\theta \approx \theta d\theta$$

$$d\Omega_S = \sin\beta d\beta \approx \beta d\beta$$

$$\mu = \frac{d\Omega_{Si}}{d\Omega_S} \approx \frac{\theta d\theta}{\beta d\beta} \tag{63}$$

- O que é facilmente medido aqui é θ, então usando (57),

$$\beta = \theta - \frac{\theta_o^2}{\theta} \qquad d\beta = d\theta + \frac{\theta_o^2}{\theta^2} d\theta = d\theta\left(1 + \frac{\theta_o^2}{\theta^2}\right)$$

$$\mu = \frac{\theta d\theta}{\left[\theta - \frac{\theta_o^2}{\theta}\right]\left[1 + \frac{\theta_o^2}{\theta^2}\right] d\theta}$$

$$\mu = \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta_o}{\theta}\right)^4} \tag{64}$$

Parâmetro de Hubble

- Medindo a diferença de tempo entre dois raios de luz, é possível se obter H_o;
- Omitindo deduções aqui, elas podem ser encontradas em [6] página 288, pode se determinar que a variação temporal entre dois feixes desviados é dada pela relação

$$\Delta t = \frac{1}{2H_o} \frac{z_S z_L}{z_S - z_L} (\theta_A^2 - \theta_B^2) \tag{65}$$

equação chamada de *Refsdal's equation*;

- Então H_o é obtido diretamente de observações,

$$H_o = \frac{1}{2\Delta t} \frac{z_S z_L}{z_S - z_L} (\theta_A^2 - \theta_B^2) \tag{66}$$

- Uma dedução mais detalhada incluindo modelos de universo,e distribuições de massa, obtêm-se

$$H_o = W_L W_U \left(\frac{v}{v_o}\right)^2 \frac{z_S z_L}{z_S - z_L} (\theta_A^2 - \theta_B^2) \frac{1}{\Delta t} \tag{67}$$

com W_L sendo um fator numérico representando a distribuição de massa nas lentes, W_U é um fator representando propriedades geométricas do universo; v é a velocidade radial de dispersão das estrelas na galáxia da lente e v_o é uma velocidade de dispersão radial de uma galáxia imaginária que é tão massiva que ela se produz uma lente própria. Para uma distribuição de massa do tipo $M(r) \propto r^n$ têm-se

$$W_L = 1 - \frac{n}{2}$$

Parâmetro de Hubble

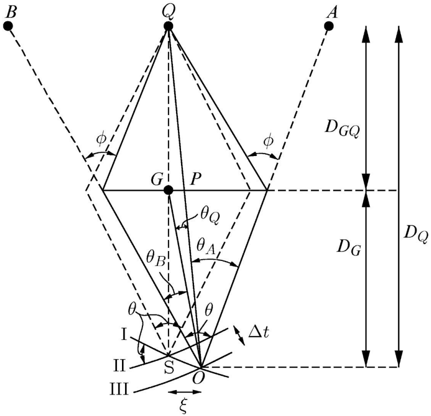

Figura:

Exemplo

- Exemplo: A primeira lente gravitacional detectada foi em 1979, uma imagem dubla do quasar Q0957+561. O redshift do quasar é $z_S = 1.41$ e da lente $z_L = 0.36$. As separações angulares das lentes a partir do centro são $\theta_A = 5.24$ segundos de arco, e $\theta_B = 0.9$ segundos de arco, ainda $\Delta t = 1.4$ anos, $M(r) \propto r^{4/3} \to W_L = 1/3, W_U \to 1, v_o = 390\text{km/s}, v = 360\text{km/s}$. Com esses dados se obtém um valor para a constante de Hubble de $H_o = 57\text{km/s/Mpc}$.

Referências

[1] Carrol, W. Bradley, Ostlie, A. Dale, *An Introduction to Modern Astrophysics*, 2ed, Pearson,San Francisco, USA, 2007;
[2] Ferraro, Rafael, *Einstein's Space-Time: An Introduction to Special and General Relativity*, Springer, Buenos Aires, Argentina, 2007;
[3] Hartle, B. James,*Gravity: An Introduction To Einstein's General Relativity*, Pearson, San Francisco, USA, 2003;
[4] Lambourne, J. A. Robert, *Relativity, Gravitation and Cosmology*, Cambridge;
[5] Rindler, Wolfgang, *Relativity: Special, General, and Cosmological*, 2ed, OXFORD, New York, USA, 2006
[6] Grøn, Øyvind, *Einstein's General Theory of Relativity With Modern Applications in Cosmology, Springer, Oslo, Norway, 2007.*

Gracie a tuti!