Aplicação dos Autovalores e Autovetores

Geferson Lucatelli

16 de julho de 2015

1 Aplicação em Genética - Evolução de Plantas

Vamos supor que a característica hereditária de algum indivíduo é controlada por um par de dois genes (hereditariedade autossômica). Seja os genes A e a. Três combinações podem ser feitas a partir desses dois genes, as combinações AA, Aa e aa. Seja A o gene dominante e a o ressesivo. Em alguns casos, a única maneira do gene a trazer caratcterísticas ao indivíduo é aparcer de forma dupla, ou seja aa, pois ele é ressesivo. Por exemplo, a cor do olho humano castanha pode vir de AA e Aa, e o gene aa traz a cor azul. Em outros casos, o genótipo AA pode ser uma cor, aa outra, e Aa uma mistura dos dois.

Também há os genes que estão ligados ao sexo de cada indivíduo. Neste tipo, o macho possui apenas um dois dois possíveis genes, A ou a. A fêmea por outro lado possui um par deles, AA, Aa ou aa.

Vamos construir matrizes que poderão dar os genótipos dos descendentes em função dos genótipos dos pais. Um agricultor tem uma grande quantidades de plantas, elas tem genótipos AA, Aa e aa. Mas ele que cada planta seja fertilizada como o sei próprio gene, qual é a expressão da distribuição dos três genótipos para um número n de gerações? Designamos:

- σ_n sendo a fração de plantas do genótipo AA na geração n;
- ξ_n sendo a fração de plantas do genótipo Aa na geração n;
- ϕ_n sendo a fração de plantas do genótipo aa na geração n;

ele inicia com uma distribuição σ_o, ξ_o e ϕ_o, e como são razões em relação a população total, temos $\sigma_o + \xi_o + \phi_o = 1$, e também $\sigma_n + \xi_n + \phi_n = 1$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$. Usamos a Tabela 1 para tirarmos a distribuição dos indivíduos. Se o gene for AA e ele recebe dele mesmo a probabilidade dele ser AA é 1, então $\sigma_n = \sigma_{n-1}$. Se o gene é Aa e ele recebe dele mesmo, ele tem entre

Genótipo	$AA-AA$	$AA-Aa$	$AA-aa$	$Aa-Aa$	$Aa-aa$	$aa-aa$
AA	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0
Aa	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
aa	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

Tabela 1:

quatro chances, uma de ser AA, uma de ser aa e duas de ser ele mesmo, Aa. Então a expressão que diz isso é $\xi_n = \frac{1}{2}\xi_{n-1} + \frac{1}{4}\phi_{n-1} + \frac{1}{4}\sigma_{n-1}$. Para o indivíduo aa, a probabilidade é 1, a mesma que AA, então $\phi_n = \phi_{n-1}$. Resumindo essas funções, temos

$$\begin{cases} \sigma_n = \sigma_{n-1} \\ \xi_n = \frac{1}{4}\sigma_{n-1} + \frac{1}{2}\xi_{n-1} + \frac{1}{4}\phi_{n-1} \\ \phi_n = \phi_{n-1} \end{cases} \qquad n = 1, 2, 3, ... \tag{1}$$

É agora que entramos com as operações matriciais. A equação 1 pode ser escrita da seguinte forma. Um vetor coluna armazena os termos σ_n, ξ_n e ϕ_n, da forma

$$\mathbf{x}^{(n)} = \begin{bmatrix} \sigma_n \\ \xi_n \\ \phi_n \end{bmatrix} \tag{2}$$

um outro vetro coluna armazena os termos em $n-1$ da forma

$$\mathbf{x}^{(n-1)} = \begin{bmatrix} \sigma_{n-1} \\ \xi_{n-1} \\ \phi_{n-1} \end{bmatrix} \tag{3}$$

e os fatores numéricos nada mais são do que uma matriz. E essa matriz é a matriz que contém as probabilidades,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

e a expressão geral fica

$$\mathbf{x}^{(n)} = M\mathbf{x}^{(n-1)} \tag{5}$$

Se trabalharmos com um pouco de contas na última equação, obtemos a seguinte expressão

$$\mathbf{x}^{(n)} = M\mathbf{x}^{(n-1)} = M^2\mathbf{x}^{(n-2)} = ... = M^n\mathbf{x}^{(0)} \tag{6}$$

e isso pode ser facilmente provado, elevando a matriz M ao quadrado, e calcular os termos da equação (1) até $n = 2$, colocando tudo em função de σ_o, ξ_o e ϕ_o e depois comparar os resultados, que darão exatamente iguais, e continuam ser iguais até qualquer n.

Se obtivermos uma expressão para M^n poderemos determinar $\mathbf{x}^n$. Para fazermos isso, precisamos diagonalizar a matriz M.

A diagonalização da matriz relacionada por

$$D = P^{-1}MP \tag{7}$$

onde P é uma matriz invertível que será responsável pela diagonalização de M. A equação anterior também é escrita da forma $M = PDP^{-1}$, que é a expressão que a precisáva-mos para M. Sem demonstração de deduções, o índice n pode ser levado para essa equação, para M e D, então o resultado que esparamos foi encontrado

$$M^n = PD^nP^{-1} \tag{8}$$

note a troca da ordem de P e P^{-1}. Para diagonalizar a matriz, precisamos encontrar os auto valores e autovetores de M. Com os autovetores é construída a matriz P, e depois precisamos encontrar a sua inversa. Então segue-se que

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}-\lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{9}$$

$$(1-\lambda)(1/2-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

e obtemos

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{10}$$

Dois autovalores repetem. A matriz P é formada pelos vetores coluna $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ e $\mathbf{p}_3$, e cada um deles é um autovetor. Para o autovalor λ_3=1/2 encontramos o autovetor

$$\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Para os autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ econtra-se que $x_2^{(1)} = x_2^{(2)} = 0$, e temos quaisquer valores possíveis para $x_1^{(1)}$, $x_3^{(1)}$, $x_1^{(2)}$ e $x_3^{(2)}$. De forma correta, escolhemos dois autovetores linearmente independentes para λ_1 e λ_2, que são

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

assim a matriz P é

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

A inversa de P é

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Vamos colocar a expressão (8) em (6), já elevando D no índice n. D é a matriz dos autovalores,

$$D^n = \begin{bmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{2})^n \end{bmatrix} \tag{15}$$

e finalmente obtemos $\mathbf{x}^{(n)} = M^n \mathbf{x}^0 = PD^nP^{-1}\mathbf{x}^0$, portanto

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(n)} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{2})^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_n \\ \xi_n \\ \phi_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^{n+1} & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^{n+1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_o \\ \xi_o \\ \phi_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_n \\ \xi_n \\ \phi_n \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{16}$$

assim finalmente obtemos as fórmulas recursivas para a evolução da população das plantas.

$$\sigma_n = \sigma_o + \xi_o \left\{ \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right\} \tag{17}$$

$$\xi_n = \xi_o \left(\frac{1}{2} \right)^n \tag{18}$$

$$\phi_n = \phi_o + \xi_o \left\{ \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right\}. \tag{19}$$

Essas três equações são a resposta para o nosso problema. Basta agora apenas analizá-las. As plantas do genótipo Aa são calculadas a partir de ξ_n, mas tomando o limite para $n \to \infty$ observa-se que esse genotipo desaparece,

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n = \lim_{n\to\infty} \xi_o \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \tag{20}$$

Tomando o limite das outras duas expressões temos

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \left[\sigma_o + \xi_o \left\{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}\right] = \sigma_o + \frac{\xi_o}{2} \tag{21}$$

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n = \lim_{n\to\infty} \left[\phi_o + \xi_o \left\{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}\right] = \phi_o + \frac{\xi_o}{2} \tag{22}$$

assim fica claro, que os genotipos que prevalecerão é o AA e o aa.

Referências

[1] Howard Anton e Chris Rorres, Álgebra Linear com Aplicacoes, 8ed , Editora Bookman, Porto Alegre, 2001.