Astrofísica
Teorema do Virial e Aplicações

Geferson Lucatelli

8 de outubro de 2015

1 Introdução

O *teorema do virial* teve seu início a partir do estudo do *calor*, feito por Rudolf Clausius, entre 1851 e 1870, com o trabalho *On a Mechanical Theorem Applicable to Heat*. Isso o levou na formulação do teorema do virial. O enunciado de Claussius para o virial é o seguinte:

The mean vis viva of the system is equal to its virial.

onde *vis viva* significa energia cinética total. Então, *A média da energia cinética total do sistema é igual ao seu virial.*

Como motivação, é interessante observar uma sequência histórica de pessoas que contribuíram para o virial. Anterior à Clausius, o virial foi derivado a partir da *identidade de Lagrange* no problema de três corpos, em 1772. Também, Karl Jacobi generalizou o problema para n corpos, com o mesmo procedimento. Depois de Clausius, a popularização e evolução começou mesmo com James Clerk Maxwell, onde ressaltou a importância do virial em 1855. Lord Rayleigh formulou uma generalização do teorema em 1903, e na mesma época, Eugene Parker apresentou a forma tensorial do virial. Em 1911, Henri Poincaré usou o teorema do virial para estudar estabilidade de teorias cosmológicas. Na década de 40, a forma variacional do virial foi feita por Paul Ledoux, para obter períodos de pulsações de estrelas. Em 1953, Enrico Fermi e Subrahmanyan Chandrasekhar incluíram campos magnéticos no teorema. E um desenvolvimento extensivo da forma tensorial se deu a Chandrasekhar, na década de 60, dentre muitas outras aplicações, por último, Fritz Zwicky utilizou o teorema do virial para identificar que há matéria não vista em torno das galáxias.

Uma primeira ideia do que seria o virial em suas aplicações, é descrever problemas físicos em quantidades escalares, ou seja, transformar equações vetoriais nestes tipos de variáveis. Comparando o trabalho que se tem com vetores e com energias, geralmente, a descrição do problema pela energia apresenta menos quantidades escalares que os vetores (componentes dos vetores), e isso facilita. Outro ponto de vista, é observar que energia é normalmente uma primeira integral da força.

2 Derivação do Teorema do Virial - Nuvem de Partículas

É possível fazer uma derivação elegante do virial e do teorema do virial aplicando a 2ªLei de Newton a uma nuvem de partículas.

Seja m_i a massa de uma partícula, e seja $X_i^{(j)}$ as componentes da força atuando sobre a partícula, e seja $x_i^{(j)}$ a posição da partícula i. Aplicando a segunda Lei de Newton à partícula m_i temos

$$m_i \frac{d^2 r_i}{dt^2} = m_i \sum_{j=1}^{3} \frac{d^2 x_i^{(j)}}{dt^2} \tag{1}$$

Para uma partícula, temos uma elação interessante

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\frac{d^2(m_i x_i^{(j)2})}{dt^2} = \sum_{j=1}^{3}\frac{d}{dt}\left(m_i x_i^{(j)}\frac{dx_i^{(j)}}{dt}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{3}\left[m_i x_i^{(j)}\frac{d^2x_i^{(j)}}{dt^2} + m_i\frac{dx_i^{(j)}}{dt}\frac{dx_i^{(j)}}{dt}\right] = \sum_{j=1}^{3}\left[m_i x_i^{(j)}\frac{d^2x_i^{(j)}}{dt^2} + m_i\left(\frac{dx_i^{(j)}}{dt}\right)^2\right] \tag{2}$$

ou ainda

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\frac{d^2(m_i x_i^{(j)2})}{dt^2} = m_i\sum_{j=1}^{3}x_i^{(j)}\frac{d^2x_i^{(j)}}{dt^2} + m_i\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{dx_i^{(j)}}{dt}\right)^2 \tag{3}$$

Observe que o último termo é duas vezes o valor da energia cinética T da partícula, ou seja

$$2T = m_i\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{dx_i^{(j)}}{dt}\right)^2 \tag{4}$$

O termo da esquerda pode ser escrito como

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\frac{d^2(m_i x_i^{(j)2})}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{d^2(m_i r_i^2)}{dt^2} \tag{5}$$

mas

$$I = mr_i^2 \tag{6}$$

é o momento de inércia em relação ao centro devido a contribuição da partícula em r_i. Dessa forma temos

$$\frac{1}{2}\frac{d^2I}{dt^2} = 2T + m_i\sum_{j=1}^{3}x_i^{(j)}\frac{d^2x_i^{(j)}}{dt^2} \tag{7}$$

Se abrirmos o último termo, obtemos

$$m_i\left(x_i^{(1)}\frac{d^2x_i^{(1)}}{dt^2} + x_i^{(2)}\frac{d^2x_i^{(2)}}{dt^2} + x_i^{(3)}\frac{d^2x_i^{(3)}}{dt^2}\right)$$

ou ainda

$$x_i^{(1)}X_i^{(1)} + x_i^{(2)}X_i^{(2)} + x_i^{(3)}X_i^{(3)} \qquad , \qquad m_i\frac{d^2x_i^{(j)}}{dt^2} = X_i^{(j)} \tag{8}$$

Essa última expressão é conhecida como o *virial de Claussius*.

Seja agora um sistema de duas partículas, m_1 e m_2, e suas posições dadas por $(x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, x_1^{(3)})$ e $(x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, x_2^{(3)})$. Suponhamos que a força de m_2 em m_1 esteja nas direções $(+\hat{e}^{(1)}, +\hat{e}^{(2)}, +\hat{e}^{(3)})$, então a força de m_1 sobre m_2 está na direção $(-\hat{e}^{(1)}, -\hat{e}^{(2)}, -\hat{e}^{(3)})$. A resultante para o virial é portanto

$$(x_1^{(1)} - x_2^{(1)})\hat{e}^{(1)} + (x_1^{(2)} - x_2^{(2)})\hat{e}^{(2)} + (x_1^{(3)} - x_2^{(3)})\hat{e}^{(3)} \tag{9}$$

que de forma compacta fica

$$\sum_{j=1}^{3}(x_1^{(j)} - x_2^{(j)})\hat{e}_j = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \tag{10}$$

O virial fica então definido como, somando-se para todas as partículas

$$\text{virial} = \sum_{i}^{N-1} \sum_{k}^{N-1} [\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k] \quad , \quad i \neq k \tag{11}$$

Vamos considerar os componentes $(\hat{e}^{(1)}, \hat{e}^{(2)}, \hat{e}^{(3)})$ os componentes da força gravitacional

$$F = -\frac{Gm_1 m_2}{r_{12}^2} \tag{12}$$

onde está na direção

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{Gm_1 m_2}{r_{12}^2} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{r_{12}} = -\frac{Gm_1 m_2}{r_{12}} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{r_{12}^2} \tag{13}$$

e é definido aqui também como sendo o virial do sistema o termo

$$\text{virial} = -\frac{Gm_1 m_2}{r_{12}} \tag{14}$$

ou para todas as partículas

$$\text{virial} = -\sum_{i}^{N-1} \sum_{k}^{N-1} \frac{Gm_i m_k}{r_{ik}} \tag{15}$$

Essa é exatamente a energia potencial Ω das partículas. Cada termo dentro da somatória que é igual ao trabalho necessário para separar cada partícula em ralação as outras na nuvem. Dessa forma, pela equação (7), podemos escrever [1]

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} = 2T + \Omega \tag{16}$$

Se o sistema está é estável, I é constante, por exemplo um sistema gravitacional, temos

$$2T + \Omega = 0 \tag{17}$$

que é o teorema do virial.

3 Aplicações do Teorema do Virial

3.1 A Lei de Stefan-Boltzmann

Vamos aplicar o teorema do virial para um objeto que contém radiação. Seja esse objeto um *corpo negro* perfeito onde suas paredes refletem a luz perfeitamente. Seja T a temperatura do objeto. Em um estado estável, uma radiação de corpo negro atravessa as paredes do objeto de temperatura T. Vamos considerar processos quase estáticos e que a radiação é homogênea em todo o interior da fronteira do objeto. A uma energia interna U está associada uma energia por unidade de volume u, que pode ser escrita como

$$U = U\frac{V}{V} = uV \tag{18}$$

[1] Equação derivada por Poincaré e Eddington.

De acordo com a teoria eletromagnética da luz, a pressão que a radiação [2] exerce é

$$p = \frac{1}{3}u \tag{19}$$

Com a consideração do processo quase-estático, deixamos que o envoltório do objeto se expanda dessa maneira, e mantendo a temperatura constante (processo isotérmico). Deixamos a expansão ocorrer também de forma que u e p não variem. O incremento de volume do sistema em um processo infinitesimal quase estático é dV. Se u não variar, U deve variar, pois se o volume aumenta, e u é constante, então U aumenta na quantidade

$$dU = udV \tag{20}$$

e deixando explícito o processo isotérmico

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = u \tag{21}$$

Podemos reescrever essa equação de outra forma. Considere a primeira lei da termodinâmica na forma diferencial

$$dU = TdS - pdV \tag{22}$$

Derivando essa equação em relação ao volume, mas não mantendo a entropia constante, e sim somente a temperatura, obtemos

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T - p \tag{23}$$

e existe uma relação de Maxwell que nos fornece

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \tag{24}$$

portanto

$$u = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p \tag{25}$$

Utilizando a equação (19), eliminando p na equação anterior, obtemos de forma direta uma relação entre apenas u e T, ou seja

$$u = \frac{T}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_V - \frac{u}{3} \tag{26}$$

Essa equação é muito importante, pois reescrevendo-a como

$$u + \frac{u}{3} = \frac{T}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_V$$

$$\frac{4u}{3} = \frac{T}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_V$$

ou

$$T\frac{du}{dT} = 4u \tag{27}$$

Integrando essa última equação, se obtém

$$\int \frac{du}{u} = \int 4\frac{dT}{T}$$

[2] Compressão de um campo eletromagnético uniforme

$$\ln(u) = 4\ln(T) + \text{constante} = \ln(T^4) + \text{constante}$$

e aplicando a exponencial, resulta em

$$u = cT^4 \tag{28}$$

que é exatamente a Lei de Stefan-Boltzmann, c é uma constante e é chamada de *constante de Stefan-Boltzmann*, muitas vezes denotada por σ. A pressão também fica escrita da forma

$$p = \frac{cT^4}{3} \tag{29}$$

Como comentário histórico, Stefan descobriu essa lei de forma empírica, enquanto Boltzmann a demonstrou da mesma forma que foi feito acima.

3.2 Gás Perfeito em Equilíbrio Gravitacional - Estabilidade Dinâmica

Nessa aplicação, podemos imaginar que o gás em questão se trata de uma estrela em equilíbrio. Um elemento de gás ou massa dm em uma temperatura T possui uma quantidade de energia cinética K, de acordo com o teorema da equipartição, de

$$dK = \frac{3}{2}k_B T dN \tag{30}$$

onde dN representa quantas moléculas de do gás fornecem a energia dK, e k_B é a constante de Boltzmann. Pela primeira lei da termodinâmica, a energia interna do sistema é

$$dU = \eth Q - PdV$$

Se o sistema está estável, $dV = 0$, portanto

$$dU = \eth Q$$

Considerando que a energia interna seja função da temperatura $U = U(T)$, então

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT$$

mas pela definição do calor específico para o elemento de massa dm, a volume constante

$$c_V = \frac{1}{dm}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \tag{31}$$

então

$$dU = c_V T dm = \eth Q \tag{32}$$

ou simplesmente

$$dU = c_V T dm$$

é a energia interna do elemento de gás dm.

Voltando à equação (30) , ela pode ser escrita ainda como

$$dK = \frac{3}{2}RTdm = \frac{3}{2}(c_p - c_V)Tdm \tag{33}$$

pois $NR = c_p - c_V$ (gás ideal). Então

$$dK = \frac{3c_pTdm}{2} - \frac{3c_VTdm}{2} = \frac{3c_pTdm}{2} - \frac{3dU}{2}$$

ou ainda

$$dK = \frac{3}{2}\left(\frac{c_p T dm}{dU} - 1\right) dU = \frac{3}{2}\left(\frac{c_p}{c_V} - 1\right) dU = \frac{3}{2}\left(\gamma - 1\right) dU \tag{34}$$

com $\gamma = c_p/c_V$. Essa última equação relaciona à um elemento de massa uma quantidade de energia interna e a isso está associado uma quantidade de energia cinética. Podemos concluir então que a energia interna e a energia cinética de todo o sistema se relacionam por

$$K = \frac{3}{2}\left(\gamma - 1\right) U \tag{35}$$

Aqui entra o teorema do virial deduzido na Seção 1, ou seja

$$2K + \Omega = 0$$

então

$$2\left(\frac{3}{2}(\gamma - 1)\right) U + \Omega = 0 \Longrightarrow 3(\gamma - 1)U + \Omega = 0$$

então

$$\Omega = 3(1-\gamma)U \qquad \text{ou} \qquad U = \frac{\Omega}{3(1-\gamma)} \tag{36}$$

Recorrendo à energia total de um sistema gravitacional ou um sistema ligante,

$$E = U + \Omega \tag{37}$$

e usando esses resultados, obtém-se a seguinte expressão para a energia

$$E = \Omega + \frac{\Omega}{3(1-\gamma)} = \frac{3(1-\gamma)+1}{3(1-\gamma)}\Omega = \frac{4-3\gamma}{3(1-\gamma)}\Omega = U + 3(1-\gamma)U = (4-3\gamma)U \tag{38}$$

Esse resultado chega a ser incrível, pois relacionamos diretamente a energia total de um sistema auto-gravitante com a sua energia interna ou potencial, de acordo com o tipo de gás que o forma (fator γ).

O fator γ demonstra como se dá a formação de esferas gasosas, tal como estrelas. A razão entre os calores específicos mostra quando um sistema é instável ou estável. Por exemplo, se $\gamma = 4/3$, a energia total do sistema é 0. Ou seja, esse valor para o fator, é um valor de transição do estável→instável ou instável→estável. Sabemos que s a energia total de um sistema gravitacional é positiva, isto é $\gamma < 4/3$, não é possível que a matéria que o gás se acumule e condense cada vez mais para formar uma estrela por exemplo. Se a energia total for negativa, ou seja $\gamma > 4/3$, será possível o acúmulo de gás para formar uma estrutura, e é a única maneira [3] de isso ocorrer (sistema isolado). Se $\gamma = 1$, $\Omega = 0$, o que nos dá informação de que temos um sistema que não pode adquirir uma configuração estável.

Considerando novamente o valor de $\gamma > 4/3$. Isso permite que a matéria se acumule, e também que se contraia, devido a energia potencial ser menor que a energia total, ou a energia total ser negativa. Na medida que a contração ocorre, uma variação de potencial Ω ocorre, consequentemente,

$$\Delta E = \frac{4-3\gamma}{3(1-\gamma)}\Delta\Omega = (4-3\gamma)\Delta U \tag{39}$$

Como a energia total está diminuindo (contração), a energia potencial deve estar diminuindo. Essa variação da energia total é liberada em forma de radiação pela quantidade

$$-\Delta E = -\frac{4-3\gamma}{3(1-\gamma)}\Delta\Omega \tag{40}$$

[3] Ritter e Emden.

Pela equação (36), se a energia interna aumentar, a energia potencial diminui. Que podemos ainda escrever como

$$\Delta U = -\frac{\Delta\Omega}{3(\gamma - 1)} \tag{41}$$

Com isso concluí-se que o fator $1/3(\gamma - 1)$ relaciona um aumento da energia interna, ou seja, o aumento da temperatura do sistema. Já o termo $(4 - 3\gamma)/3(1 - \gamma)$ relaciona a energia perdida por radiação.

3.3 Outras Aplicações no Teorema do Virial

Existem muitas outras aplicações que podem ser encontradas nas referências [1], [2] e [3]. Como por exemplo fazendo uma lista delas:

- estudar estabilidade e instabilidade dinâmica sistemas onde se tem a presença de campos magnéticos [4];
- aplicação a uma distribuição cilíndrica infinita de matéria;
- estudar as pulsações adiabáticas de estrelas magnéticas (*White Dwarfs*);
- estudar a influência devido a rotação e a presença de campos magnéticos para a instabilidade gravitacional em estrelas White Dwarfs;
- estudar a estabilidade de Estrelas de Nêutrons;
- aplicações na mecânica quântica;
- na relatividade especial;

4 Referências

[1] Chandrasekhar, S.; *An Introduction to the Study of Stellar Structure*, New York, 1939.
[2] Chandrasekhar, S.; Fermi, E.; *Problems of gravitational stability in the presence of magnetic field*, 1953.
[3] Collins, G. W.; *The Virial Theorem In Stellar Astrophysics*, 2003.
[4] Chandrasekhar, S.; Lebovitz, N. R.; *The potentials and the superpotentials of homogeneous ellipsoids*, 1962.
[5] Wikipedia, `https://en.wikipedia.org/wiki/Virial_theorem`

[4] Existem 17 aplicações na referência [2].