UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA
COLLEGIO ALESSANDRO VOLTA

TUTORATO DI ALGEBRA

Luca Teodori

Anno accademico 2016/2017

Novembre 2017

Introduzione alla prima versione

In questo documento sono presenti delle note che ho scritto durante il mio periodo di tutorato di algebra lineare e geometria presso il collegio Alessandro Volta. Ciò che ho fatto è quello di trascrivere brevemente ciò che è stato svolto durante le varie giornate di tutorato (svolto per 12 giorni, due ore per giorno nel periodo tra Novembre 2016 e Gennaio 2017). Per questi motivi almeno per questa prima versione siamo lontani da qualsiasi pretesa di completezza, ma ho voluto comunque mischiare un certo rigore formale nell'esprimere i concetti con un tono più colloquiale e diretto tipico del tipo di tutorato che ho svolto (insegnavo a 5, massimo 6 persone).

Lascio queste note a chiunque ne voglia usufruire, in particolare per chi voglia proseguire l'attività di tutorato di algebra presso il collegio Volta e sia interessato ad integrare varie parti (sperando ne tenga lo spirito) e/o correggere errori o sviste che potrebbero essere presenti qua e là, tenendo presente che la licenza sotto la quale questo documento è rilasciato è la Creative Commons *Attribuzione - Non commerciale - Condividi allo stesso modo 4.0 Internazionale*. Ciò significa che questo documento (incluso il suo codice sorgente) può essere modificato e ridistribuito liberamente, a condizione che sia sempre citata la fonte del documento originale, che sia rilasciato sempre sotto questa licenza e che non venga utilizzato per scopi commerciali o di lucro.

Novembre 2017
Luca Teodori

Indice

Capitolo 1

Generalità su spazi vettoriali, esempi, concetto di linearità, dimensione

Definizione 1.1 (SPAZIO VETTORIALE)**.** *Sia dato un insieme V e un campo K (considereremo sempre $K=\mathbb{R}$ salvo diverso avviso), la coppia (V, K) si dice SPAZIO VETTORIALE se $\forall \boldsymbol{v},\boldsymbol{w} \in V$, $\forall k, h \in K$, $k\boldsymbol{w} + h\boldsymbol{v} \in V$ (Proprietà di linearità).*

Questa è la definizione cardine dell'intero corso, ma cerchiamo di capirla un po', che significato ha il concetto di spazio vettoriale? In matematica le definizioni sono spesso e volentieri astratte in quanto si vuole più generalità possibile, generalità che permette di applicare i risultati che la teoria (in questo caso degli spazi vettoriali) riesce a sviluppare a più concetti possibili; nonostante ciò esse e i loro nomi si rifanno a certi esempi prototipo. Quando si pensa ad uno spazio vettoriale la prima cosa che viene in mente è il classico insieme dei vettori in $\mathbb{R}^3$ (o più generalmente in $\mathbb{R}^n$ con n arbitrario). Lo spazio dei vettori in tre dimensioni (o meno) è effettivamente uno "spazio" nel senso usuale del termine.

Il concetto cardine che caratterizza gli spazi vettoriali è la proprietà di linearità, e ogni volta che si voglia controllare se effettivamente un insieme qualsiasi ha la struttura di spazio vettoriale tocca sempre controllare che combinazioni lineari degli elementi di un insieme appartengano ancora all'insieme. Facciamo i seguenti esempi:

Esempio 1.2. Lo spazio dei vettori di norma unitaria (ovvero con lunghezza uguale a 1) i cui punti individuati sul piano formano una circonferenza e i punti individuati sullo spazio formano una sfera (attenzione! Presso il linguaggio dei matematici per sfera si indica la superficie sferica!). Esso NON è uno spazio vettoriale in quanto è facile vedere che combinazioni lineari di vettori dell'insieme "escono" dall'insieme stesso (Figura 1.1).

Esempio 1.3. Lo spazio dei polinomi di grado n, infatti sommando polinomi e/o moltiplicarli per SCALARI (ovvero per numeri o se i matematici preferiscono per elementi del campo K) non si "esce" dall'insieme dei polinomi. Questo è un esempio di spazio vettoriale che non si riferisce a vettori, infatti sebbene l'esempio dei vettori sia l'esempio primo di spazio vettoriale ciò non deve far pensare assolutamente che sia l'unico: gli spazi vettoriali sono insiemi vastissimi e ne fanno parte per esempio

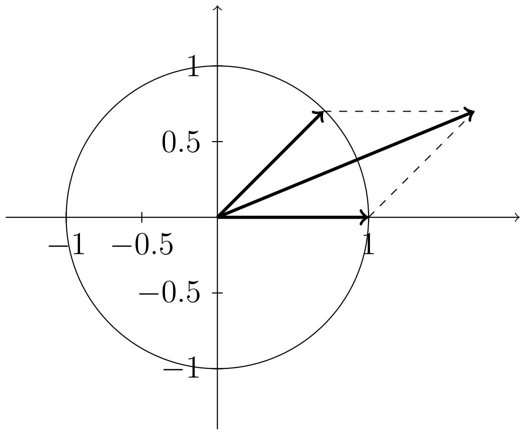

Figura 1.1: *I vettori di norma unitaria non formano uno spazio vettoriale, infatti una loro combinazione lineare può molto facilmente uscire dal sottoinsieme.*

anche le funzioni continue (per combinazioni lineari di funzioni continue si hanno sempre funzioni continue).

Ciò che caratterizza gli spazi vettoriali è il concetto di linearità e questo deve essere molto chiaro.

Definizione 1.4. *Sia V uno spazio vettoriale, un insieme $W \subseteq V$ si dice sottospazio vettoriale di V se W soddisfa i requisiti per chiamarlo spazio vettoriale.*

In particolare si dovrà controllare sempre che con combinazioni lineari di elementi del sottoinsieme non si esca dal sottoinsieme stesso (nell'esempio 1.2 ci riferiamo a un sottoinsieme dello spazio dei vettori ma di certo non è un sottospazio).

Definizione 1.5. *Dato un insieme $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ si dice che i suoi elementi sono linearmente dipendenti se è possibile esprimere uno come combinazione linearee degli altri (da cui implicherà che ciò è possibile farlo per tutti), si dicono linearmente indipendenti se una loro combinazione lineare col vettore nullo obbliga i coefficienti della combinazione lineare a essere tutti nulli (da cui implicherà che non possono essere linearmente dipendenti), si dicono generatori di uno spazio vettoriale V se con combinazioni lineari di essi è possibile esprimere ogni elemento di V.*

Esercizio 1.6. Dire se un certo insieme di vettori è linearmente indipendente o meno (improvvisato). Riflessioni e tecniche sulla cosa.

Definizione 1.7. *Un insieme di vettori linearmente indipendenti e generatori di uno spazio vettoriale V si dicono base di V.*

Si dimostra che basi diverse di uno stesso spazio vettoriale hanno lo stesso numero di elementi, e quindi ha senso la definizione seguente (soprattutto per i matematici controllare sempre che le definizioni abbiano senso!):

Definizione 1.8. *Dato uno spazio vettoriale V si dice dimensione di V il numero di elementi di una base di V.*

In particolare ciò è concorde col senso usuale del termine se ci riferiamo allo spazio dei vettori, ma ancora una volta avere un'immagine della cosa aiuta ma bisogna sempre ricordarsi che ciò che conta sono ciò che definizioni e teoremi dicono (sempre per il discorso generalità).

Esercizio 1.9. Dire la dimensione dello spazio dei polinomi.

Soluzione: basta trovare una base, la dimensione è $n+1$ se n è il grado massimo dei polinomi considerati.

Capitolo 2

Geometria analitica: equazioni parametriche, cartesiane, esercizi

Definizione 2.1. *Sia S un insieme geometrico "lineare" (retta, piano ..., tecnicamente dovremmo parlare di spazi affini ma qui non voglio complicare troppo la trattazione) definito tramite uno spazio vettoriale $W \subseteq V$ con $\dim(V) = n$. Scelta una base di W $\{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_s\}$, con $s = \dim(S)$ e un punto Q per cui si vuole "passi" S, si può esprimere ogni punto P di coordinate $(x_1, \ldots, x_n)$ tramite:*

$$\overrightarrow{\boldsymbol{QP}} = t_1\boldsymbol{w}_1 + \ldots + t_s\boldsymbol{w}_s \ , \tag{2.1}$$

per opportuni parametri $t_1, \ldots, t_s \in \mathbb{R}$. Esplicitando le coordinate si ottiene:

$$\begin{aligned} x_1 &= q_1 + t_1 w_{11} + \ldots + t_s w_{1s} \ , \\ x_2 &= q_2 + t_1 w_{21} + \ldots + t_s w_{2s} \ , \\ &\vdots \\ x_n &= q_n + t_1 w_{n1} + \ldots + t_s w_{ns} \ . \end{aligned} \tag{2.2}$$

Le (2.2) sono dette equazioni parametriche di S.

In pratica la formula da usare che mi individua l'insieme geometrico che voglio trattare una volta individuato il punto Q per cui passa e i vettori che lo generano è la (2.1), poi le (2.2) si otterranno semplicemente esplicitando la formula vettoriale in componenti. Si noti che si hanno s vettori linearmente indipendenti e s parametri che formeranno uno spazio di dimensione s, mentre n è la dimensione dello spazio vettoriale in cui è "immerso" l'insieme geometrico.

Esempio 2.2. Pensiamo al caso concreto del piano in uno spazio vettoriale di dimensione 3, allora detti $\boldsymbol{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $\boldsymbol{w} = \{w_1, w_2, w_3\}$ i vettori che lo generano e detto $Q = \{x, y, z\}$ le equazioni parametriche del piano si scrivono:

$$\begin{aligned} x &= q_1 + t_1 w_1 + t_2 v_1 \ , \\ y &= q_2 + t_1 w_2 + t_2 v_2 \ , \\ z &= q_3 + t_1 w_3 + t_2 v_3 \ . \end{aligned} \tag{2.3}$$

Notare: 3 coordinate come la dimensione dello spazio in cui è immerso e 2 parametri come la dimensione del piano;

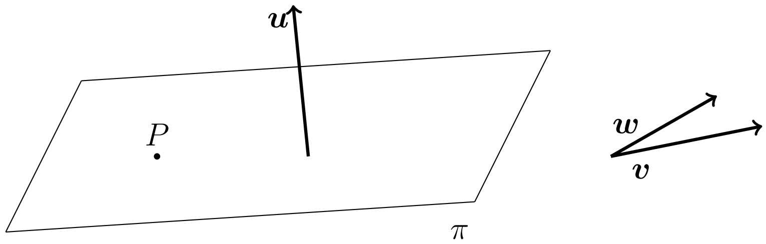

Figura 2.1: *un piano π, il punto P per cui "passa", i vettori $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ che lo generano e un vettore $\boldsymbol{u}$ ortogonale al piano.*

Le coordinate cartesiane invece si ottengono mettendo a sistema le parametriche ed eliminando i parametri, si otterrà per il piano un'equazione del tipo

$$ax + by + cz = 0 \ , \tag{2.4}$$

dove è interessante notare che il vettore di componenti $\{a, b, c\}$ è ortogonale (preciseremo tra un attimo che significa) al piano (cioè a qualsiasi vettore giacente su esso)

Definizione 2.3. *Sia V uno spazio vettoriale, un prodotto scalare su V è un'applicazione bilineare (,): $V \times V \to \mathbb{R}$ tale che:*

$$(v, w) = (w, v) \ \forall v, w \in V \ \textit{(simmetria)} \ , \tag{2.5}$$

$$(v, v) \geq 0 \ \forall v \in V \ \textit{ e } (v, v) = 0 \iff v = 0 \ \textit{(definito positivo)} \ . \tag{2.6}$$

Due vettori v, w si dicono ortogonali se $(v, w) = 0$.

In particolare noi tratteremo il solito prodotto scalare euclideo su $\mathbb{R}^n$.

Esercizio 2.4. (preso da prove in itinere) dati i vettori $\boldsymbol{u} = \hat{\boldsymbol{\imath}} - \hat{\boldsymbol{\jmath}}$ e $\boldsymbol{v} = \hat{\boldsymbol{k}} - \hat{\boldsymbol{\jmath}}$ determinare:

1. un versore $\hat{\boldsymbol{w}} \in \text{Span}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})$;

2. l'equazione cartesiana di $\text{Span}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$;

3. un vettore $\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$;

4. un vettore $\boldsymbol{x} \in \text{Span}(u, v)$ con $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{v}$.

Capitolo 3

Determinanti, rango, teorema di Rouchè-Capelli, esercizi

Definizione 3.1. *Data una matrice $A \in M(n,m)$ (cioè matrice con n righe e m colonne), chiamo rango il numero massimo di colonne linearmente indipendenti (o equivalentemente la dimensione dello spazio generato dalle colonne).*

Si dimostra che il rango di una matrice A è invariante per trasposizione, cioè $\mathrm{r}(A^\top) = \mathrm{r}(A)$ quindi il rango è anche il numero di righe linearmente indipendenti. Se ne conclude che sarà sempre $\mathrm{r}(A \in M(n,m)) \leq \min\{n,m\}$. Per calcolare il rango di una matrice bisogna "contare" quante colonne o righe linearmente indipendenti ci sono nella matrice stessa, e nel fare ciò si può sfruttare la proprietà notevole del determinante delle matrici quadrate, che è diverso da zero se e solo se la matrice contiene colonne linearmente indipendenti. Ricordiamo il metodo di calcolo per il determinante:

$$\det(A) = a \text{ se } A \text{ è martice corrispondente a un solo numero } a \tag{3.1}$$

$$\det(A) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det(A_{ik}) \ , \tag{3.2}$$

dove nella (3.2) si intende il determinante sviluppato presso la riga i-esima per una matrice con n colonne (naturalmente lo si può sviluppare anche per colonna con formula analoga) e A_{ik} indica la matrice ottenuta da quella di partenza togliendo la i-esima riga e la k-esima colonna. Si noti che il determinante è definito in modo induttivo e ha senso solo per matrici quadrate.

Esercizio 3.2. Si determini il rango della seguente matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Soluzione: si tratterà di calcolare determinanti delle sottomatrici quadrate, si ricorda che basta una sottomatrice quadrata n con determinante non nullo per poter concludere che il rango della matrice di partenza è maggiore o uguale a n ma per dire che è minore di n bisogna mostrare (a meno di metodi più furbi per casi così semplici) che tutte le sottomatrici quadrate di ordine n hanno determinante nullo. Altri esercizi simili sono stati improvvisati e si è rispiegato meglio il concetto di dipendenza e indipendenza lineare e associati.

Il concetto di rango è utile per la discussione di sistemi lineari. Si ha il seguente

Teorema 3.3 (Rouchè-Capelli)**.** *Dato un sistema lineare, sia A la matrice dei coefficienti e Ab la matrice dei coefficienti orlata con i termini noti. Il sistema è risolubile* $\iff \mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(Ab)$.

Dimostrazione. Un sistema lineare può essere visto come

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + \cdots + x_m \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} . \tag{3.3}$$

Rango della matrice Ab maggiore di quello si A significa che non è possibile esprimere il vettore colonna $\boldsymbol{b}$ come combinazione lineare degli altri vettori colonna $\boldsymbol{a}_j$ ovvero non esiste nessuna m-upla $\{x_1, \ldots, x_m\}$ che possa risolvere il ssistema. □

Esercizio 3.4. Si discuta e risolva il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x + y + 7z = 2 \ , \\ x - 5y = 0 \ . \end{cases} \tag{3.4}$$

Capitolo 4

Sottospazi, formula di Grassman, somma diretta, esercizi

Teorema 4.1 (Formula di Grassman)**.** *Siano W, U sottospazi vettoriali di V rispettivamente di dimensione s, t, n, allora*

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) + \dim(W \cap U) \ . \tag{4.1}$$

Dimostrazione. Sia $\{\boldsymbol{x_1}, \ldots, \boldsymbol{x_l}\}$ base di $W \cap U$ con l dimensione di $W \cap U$, allora essendo nell'intersezione posso completarle sia ad una base di $U\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_l, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{t-l}\}$ che ad una base di $W\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_s, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_{s-l}\}$. Banalmente la base
$B = \{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_l, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{t-l}, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_{s-l}\}$ genera il sottospazio somma, sommandone gli indici trovo che è formata da $t + s - l$ elementi, quindi la tesi seguirà se dimostro la loro indipendenza lineare. Siano a_i, b_j, c_k coefficienti rispettivamente dei $\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{w}_j, \boldsymbol{u}_k$ della combinazione lineare dei vettori di B con il vettore nullo, si avrà

$$b_1\boldsymbol{w}_1 + \ldots + b_{s-l}\boldsymbol{w}_{s-l} = -(a_1\boldsymbol{x}_1 + \ldots + a_l\boldsymbol{x}_l + c_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + c_{t-l}\boldsymbol{u}_{t-l}) \ , \tag{4.2}$$

dove il primo membro della (4.2) apparterrà a W quindi necessariamente il secondo deve appartenere a $U \cap W$, quindi guardando solo il secondo membro sarà possibile esprimerlo come combinazione lineare dei soli $\boldsymbol{x}_j$ con certi coefficienti e_j, si avrà

$$a_1\boldsymbol{x}_1 + \ldots + a_l\boldsymbol{x}_l + c_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + c_{t-l}\boldsymbol{u}_{t-l} = e_1\boldsymbol{x}_1 + \ldots + e_l\boldsymbol{x}_l \ , \tag{4.3}$$

o riordinando

$$(a_1 - e_1)\boldsymbol{x}_1 + \ldots + (a_l - e_l)\boldsymbol{x}_l + c_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + c_{t-l}\boldsymbol{u}_{t-l} = 0 \ , \tag{4.4}$$

e si vede subito che nella (4.4) ho combinazione lineare di vettori linearmente indipendenti col vettore nullo, quindi tutti i coefficienti, in particolare i c_k, saranno nulli. Allora con l'informazione che i c_k sono nulli ritorniamo nella (4.2) e riordinando otteniamo

$$a_1\boldsymbol{x}_1 + \ldots + a_l\boldsymbol{x}_l + b_1\boldsymbol{w}_1 + \ldots + b_{s-l}\boldsymbol{w}_{s-l} = 0 \ . \tag{4.5}$$

Ancora una volta abbiamo una combinazione lineare con vettore nullo di vettori che sappiamo linearmente indipendenti per ipotesi in quanto formano una base per W. Ho dimostrato che tutti i coefficienti sono nulli e quindi l'indipendenza lineare dei vettori di B; essi dunque formano una base di $U + W$. □

Definizione 4.2. *Si dice che $U + W$ con U, W sottospazi vettoriali di V sono in somma diretta se* $\dim(U \cap W) = 0$.

Esercizio 4.3. Si considerino i seguenti vettori in $\mathbb{R}^4$:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} h \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \\ h \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

con $h \in \mathbb{R}$. Siano $V = \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ e $U = \mathrm{Span}(\boldsymbol{u})$.

1. Calcolare al variare di h la dimensione di V;
2. Stabilire per quali h, $\boldsymbol{u} \in U$;
3. Dire per quali h, U e V sono in somma diretta.

Capitolo 5

Applicazioni e sistemi lineari, teorema delle dimensioni

Definizione 5.1. *Sia $f : V \to W$, essa si dice lineare se $\forall\ \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V, \forall h, k \in K, f(h\boldsymbol{v}_1 + k\boldsymbol{v}_2) = hf(\boldsymbol{v}_1) + kf(\boldsymbol{v}_2)$.*

Teorema 5.2. *Data $f : V \to W$, fissate delle basi $\{\boldsymbol{v_i}\}, \{\boldsymbol{w_j}\}$ rispettivamente di V, W, $\exists A \in M(n,m)$ tale che $f(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}\ \forall\ \boldsymbol{v} \in V$ (ovvero posso rappresentare l'azione della mia applicazione lineare per mezzo di una matrice, detta matrice associata a f).*

Dimostrazione. Posso vedere $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{v}_i$ per certi coefficienti a_i e $f(\boldsymbol{v}_k) = \sum_{j=1}^{m} b_{kj} \boldsymbol{w}_j\ \forall k$ per certi b_{kj}, allora $f(\boldsymbol{v}) = \sum_{i,j} a_i b_{ij} \boldsymbol{w}_j$. La matrice di elementi (b_{ij}) è la matrice A che cercavamo, essa fissate le basi è unica. $\square$

Questo teorema ci dice che le applicazioni lineari sono in corrispondenza biunivoca con le matrici, quindi possiamo parlare indifferentemente di applicazioni lineari o delle loro matrici associate. Le seguenti definizioni vengono date per le applicazioni lineari ma sono estendibili in modo ovvio anche per le matrici.

Definizione 5.3. *Data $f : V \to W$, chiamo* $\mathrm{Ker}(f) = \{\boldsymbol{v} \in V \mid f(\boldsymbol{v}) = 0\}$*, chiamo* $\mathrm{Im}(f) = \{\boldsymbol{w} \in W \mid \exists \boldsymbol{v} \in V \mid f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}\}$.

Teorema 5.4. *Sia $f : V \to W$ lineare e iniettiva, allora* $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

Dimostrazione. Per una applicazione lineare si ha sempre $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ in quanto per linearità si ha che

$$f(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = f(\mathbf{0}) + f(\mathbf{0}) \Rightarrow f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}\ . \tag{5.1}$$

Essendo la funzione iniettiva, lo $\mathbf{0}$ sarà l'unico vettore che la funzione manda in zero. $\square$

Teorema 5.5 (DELLE DIMENSIONI)**.** *Sia $f : V \to W$ lineare, siano n, k, r le dimensioni rispettivamente di V,* $\mathrm{Ker}(f)$ *e* $\mathrm{Im}(f)$*, allora si ha*

$$n = k + r\ . \tag{5.2}$$

Teorema 5.6. *Sia $f : V \to W$ lineare, se ne esiste una biunivoca tra i due spazi allora essi hanno la stessa dimensione.*

Dimostrazione. Sia $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{v}_i$ con $\{\boldsymbol{v}_i\}$ base di V, allora

$$f(\boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(\boldsymbol{v}_i) \ .$$

I $\{f(\boldsymbol{v}_i)\}$ generano l'immagine di f, ma essa corrisponderà a W per l'ipotesi di suriettività, ora non resta che applicare il 5.5 sapendo che per l'ipotesi di iniettività $\mathrm{Ker}(f) = \{\boldsymbol{0}\}$ per il 5.4. □

Per la corrispondenza biunivoca introdotta prima tra matrici e sistemi lineari e grazie alla possibilità di rappresentare un sistema del tipo

$$\begin{aligned} b_1 &= a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \ , \\ b_2 &= a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n \ , \\ &\vdots \\ b_m &= a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \ , \end{aligned} \tag{5.3}$$

come $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ e trasferire il tutto a operazioni sulle matrici.

Teorema 5.7 (STRUTTURA SISTEMI LINEARI)**.** *Le soluzioni di un sistema lineare si compongono della generale soluzione del sistema omogeneo e di una soluzione particolare*

Dimostrazione. Posso vedere il sistema come $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, se si indica con $\boldsymbol{x}_0$ una soluzione del sistema omogeneo e con $\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}}$ una soluzione particolare, si avrà

$$A(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}_{\mathrm{p}}) = A\boldsymbol{x}_0 + A\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}} = A\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}} = b$$

ovvero $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}_{\mathrm{p}}$ risolve anche essa il sistema. In particolare si avrà che la dimensione delle soluzioni del sistema eguaglierà la dimensione del $\mathrm{Ker}(A)$. □

Capitolo 6

Cambiamenti di base e matrici associate

Teorema 6.1. *Dato uno spazio vettoriale V e una base $\{\boldsymbol{e}_i\}$, è possibile esprimere ogni vettore $\boldsymbol{v} \in V$ come*

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{e}_i \ , \tag{6.1}$$

dove i coefficienti a_i, dette coordinate di $\boldsymbol{v}$ rispetto alla base di $\{\boldsymbol{e}_i\}$ sono univocamente determinati.

Dimostrazione. I coefficienti esistono in quanto per ipotesi $\{\boldsymbol{e}_i\}$ è una base, in particolare sono generatori, ora voglio l'unicità, supponiamo che ci siano altri coefficienti b_j che soddisfano, allora

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{e}_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \boldsymbol{e}_j \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{0} \ , \tag{6.2}$$

dove nell'ultimo passaggio della (6.2) si è scritta una combinazione lineare di vettori linearmente indipendenti con il vettore nullo, che obbliga, per definizione di lineare indipendenza, i coefficienti $(a_i - b_i)$ a essere nulli ovvero $a_i = b_i$, la tesi.

$\square$

In pratica una base può essere considerata a tutti gli effetti un sistema di riferimento, in quanto ad ogni vettore vengono associate una unica n-upla di numeri che possono essere considerati a tutti gli effetti come coordinate. Ci si pone il problema allora di come cambino le coordinate di uno specifico vettore se cambio sistema di riferimento, ovvvero cambio base. Per la risoluzione di questo problema vengono in aiuto le matrici, in quanto si può associare all'operazione di cambio di base una matrice, detta matrice di cambiamento di base. Si ha quindi il seguente

Teorema 6.2. *Siano $\{\boldsymbol{v}_i\}$, $\{\boldsymbol{w}_j\}$ due basi di uno stesso spazio vettoriale, allora la matrice di cambiamento di base A, ovvero la matrice tale per cui $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$ dove $\boldsymbol{v}$ è un vettore espresso rispetto alla base $\{\boldsymbol{v}_i\}$ e $\boldsymbol{w}$ lo stesso vettore espresso rispetto alla base $\{\boldsymbol{w}_i\}$, ha per colonne le coordinate dei $\boldsymbol{v}_i$ espressi rispetto ai $\boldsymbol{w}_j$.*

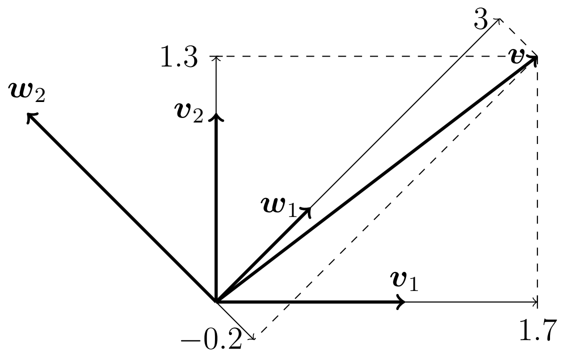

Figura 6.1: *Esempio di vettore espresso rispetto a basi differenti.*

Dimostrazione. Esprimiamo i vettori $\{\boldsymbol{v}_i\}$ rispetto alla base $\{\boldsymbol{w}_j\}$, mentre considereremo un generico vettore $\boldsymbol{v}$ espresso come $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{v}_i$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_1 &= a_{11}\boldsymbol{w}_1 + \ldots + a_{1n}\boldsymbol{w}_n \ , \\
\boldsymbol{v}_2 &= a_{21}\boldsymbol{w}_1 + \ldots + a_{2n}\boldsymbol{w}_n \ , \\
&\vdots \\
\boldsymbol{v}_n &= a_{n1}\boldsymbol{w}_1 + \ldots + a_{nn}\boldsymbol{w}_n \ ,
\end{aligned} \tag{6.3}$$

considerando $\boldsymbol{v}$, esso potrà essere scritto come

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i,j} x_i a_{ij} \boldsymbol{w}_j \ , \tag{6.4}$$

ovvero, chiamando A la matrice dei coefficienti (a_{ij}) trasposta, come $A\boldsymbol{w}$, che riguardando il sistema ci si accorge che è la tesi. □

Esercizio 6.3. trovare la matrice del cambiamento di base tra i seguenti insiemi di vettori:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \ ,$$

e

$$\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \ , \ \boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ \boldsymbol{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

Sono stati proposti poi altri esercizi simili.

Capitolo 7

Il metodo di eliminazione di Gauss

Il metodo di eliminazione di Gauss è un metodo per risolvere i sistemi lineari. Si basa sull'uso di operazioni (dette elementari) che non cambiano le soluzioni del sistema ma che possono ridurlo in una forma "a scaletta". Questo metodo permette anche di stabilire se un sistema sia risolubile o meno e la dimensione dello spazio delle soluzioni. Se ne può capire la versatilità anche nel campo matriciale ricordando che un sistema può essere visto come un'equazione matriciale del tipo

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \ , \tag{7.1}$$

dove, al solito, A indica la matrice dei coefficienti, $\boldsymbol{b}$ il "vettore" termini noti e $\boldsymbol{x}$ il "vettore" incognite. In particolare se le operazioni elementari su un sistema non cambiano le soluzioni del sistema stesso, allora anche le loro analoghe sulle matrici non ne cambiano il rango in quanto collegato alle soluzioni del sistema (ricordiamo che il rango di una matrice si traduce come la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema associato, ammesso sia risolubile). In particolare sarà conveniente ridurre la matrice di partenza ad una matrice a scala con rango invariato proprio per calcolare quest'ultimo con il metodo dei determinanti discusso nelle lezioni precedenti (il determinante di una matrice a scala è ovviamente molto più facile da calcolare).

Guardiamo quali sono queste operazioni elementari:

1. Scambiare una riga con un'altra (banale che la cosa non cambi le soluzioni di un sistema, non poi così banale che un'operazione del genere su una matrice ne lasci invariato il rango)

$$\begin{cases} b_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \ \vdots \\ b_i = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \\ \ \vdots \\ b_m = a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b_i = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \\ \ \vdots \\ b_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \ \vdots \\ b_m = a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

2. Moltiplicare per uno stesso scalare una intera riga (si può fare lo stesso commento fatto per il punto precedente)

$$\begin{cases} b_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ b_i = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \\ \vdots \\ b_m = a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ \lambda b_i = \lambda a_{i1}x_1 + \ldots + \lambda a_{in}x_n \\ \vdots \\ b_m = a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

3. Sommare una riga ad un'altra riga (si sfrutta il fatto che se $a = b$ (prima riga), e $c = d$ (l'altra riga), allora $a + c = b + d$)

$$\begin{cases} b_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ b_i = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \\ \vdots \\ b_m = a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ b_i + b_1 = a_{i1}x_1 + a_{11}x_1 + \ldots + a_{in}x_n + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ b_m = a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{i1} + a_{11} & a_{i2} + a_{12} & \cdots & a_{in} + a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Queste operazioni andranno applicate su un sistema per ridurlo nella forma seguente (non ci mettiamo nel caso in cui non ci siano equazioni linearmente dipendenti, in particolare non ci siano più equazioni che incognite, cioè $m > n$ in quanto se siamo in questo caso potremmo ridurci subito al caso che prendiamo in considerazione eliminando quelle linearmente dipendenti dalle altre)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{m,m}x_m + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a_{12}x_2 + \ldots + a_{m,m}x_m + \ldots + a_{1n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad a_{m,m}x_{m,m} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{7.2}$$

A questo punto si parte dall'ultima equazione ponendo come parametri $n - m$ incognite (infatti in generale la dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema sarà $n-r$ con r il rango della matrice associata che nelle ipotesi in cui ci siamo messi, ovvero di equazioni linearmente indipendenti, sarà proprio m) e poi sostituendo in quella sopra si va avanti fino ad aver esaurite tutte le incognite. Se nell'affrontare questo procedimento ci si imbatte in assurdi come $0 = 1$ si potrà decretare immediatamente la non risolubilità del sistema.

Si sono svolti esercizi su risoluzione di sistemi e calcolo di rango di matrici usando il metodo sopra esposto

Capitolo 8

Autovettori e autovalori

Definizione 8.1. *Sia $f : V \to W$ lineare, si chiama autovettore un $\boldsymbol{v} \in V$, $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ tale che $f(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}$ per qualche $\lambda \in K$, mentre λ è detto autovalore relativo all'autovettore $\boldsymbol{v}$.*

Definizione 8.2. *Si chiama spettro di f l'insieme degli autovalori di f, autospazio relativo all'autovalore λ lo spazio generato dagli autovettori relativi a λ, degenerazione dell'autospazio la sua dimensione (se ha dimensione 1 si dice che non ha degenerazione).*

Si ricordi anche la seguente

Definizione 8.3. *Due matrici A e B si dicono simili se $\exists M \in \mathrm{GL}(n, K)$ (gruppo lineare delle matrici invertibili sul campo K) tale che*

$$A = M^{-1} B M \ . \tag{8.1}$$

Teorema 8.4. *Due matrici simili rappresentano la stessa applicazione lineare in basi diverse, in particolare M rappresenta la matrice di cambio di base*

Dimostrazione. Usiamo la notazione matriciale, allora sapendo per ipotesi che $B = M^{-1} A M$, interpretando M come la matrice cambiamento di base da W a V (possibile in quanto invertibile)

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{v}_V = \boldsymbol{w}_V &\Rightarrow AM\boldsymbol{v}_W = M\boldsymbol{w}_W \Rightarrow M^{-1}AM\boldsymbol{v}_W = M^{-1}M\boldsymbol{w}_W \\ &\Rightarrow B\boldsymbol{v}_W = \boldsymbol{w}_W \end{aligned} \tag{8.2}$$

dove con $\boldsymbol{v}_V$ si è indicato il vettore $\boldsymbol{v}$ espresso rispetto alla base V, con $\boldsymbol{v}_W$ il vettore $\boldsymbol{v}$ espresso rispetto alla base W ecc. □

Definizione 8.5. *Una matrice si dice diagonalizzabile se è simile ad una matrice diagonale, ovvero una matrice del tipo*

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} , \tag{8.3}$$

con i λ_i autovalori della matrice.

Nota bene: tutte le definizioni e teoremi per le matrici hanno un perfetto analogo per le applicazioni lineari in quanto c'è corrispondenza biunivoca tra le due, in particolare si potrà parlare anche di diagonalizzabilità di una applicazione lineare, che si tradurrà col fatto che sia possibile trovare una base di autovettori di f.

Definizione 8.6. *Sia $A \in M_n(K)$ e sia t un'indeterminata. Si dice polinomio caratteristico di A il polinomio di grado n definito da*

$$P_A(t) = \det(A - t\mathbb{I}) = \begin{vmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - t \end{vmatrix} \tag{8.4}$$

dove si è indicato con $\mathbb{I}$ la matrice identità di grado n.

Il polinomio caratteristico è utile per trovare gli autovalori di una matrice, infatti si ha il seguente

Teorema 8.7. *Gli autovalori di una matrice A (ricordiamoci sempre che il tutto varrebbe anche considerando applicazioni lineari) sono le radici del polinomio caratteristico.*

Dimostrazione. Da $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ possiamo arrivare a $(A - \lambda\mathbb{I}) = 0$ che ha soluzioni non banali se e solo se $\det(A - \lambda\mathbb{I}) = 0$ in quanto se fosse diverso da zero $A - \lambda\mathbb{I}$ sarebbe invertibile e otterrei come unica soluzione moltiplicando a sinistra ambo i membri per $(A - \lambda\mathbb{I})^{-1}$ la soluzione identicamente nulla. Ma notiamo che ci riduciamo a $\det(A - \lambda\mathbb{I}) = P_n(\lambda) = 0$ ovvero sono autovalori quei λ che sono radici del polinomio caratteristico □

Quindi per trovare gli autovalori basta trovare le radici del polinomio caratteristico, mentre per trovare gli autovettori relativi ad un autovalore λ si dovrà risolvere il sistema $(A - \lambda\mathbb{I})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ dove le incognite sono rappresentate dalle componenti di $\boldsymbol{v}$.

Esercizio 8.8. Trovare autovalori e autovettori dell'applicazione lineare la cui azione su vettori di una specifica base è:

$$f(1,2,0) = (0,1,1) \ ,$$

$$f(1,0,1) = (3,1,0) \ ,$$

$$f(0,2,1) = (2,2,2) \ .$$

Capitolo 9

Applicazioni bilineari, congruenza, calcolo della segnatura

Definizione 9.1. *Sia V spazio vettoriale, si chiama applicazione bilineare una applicazione*

$$b : V \times V \to \mathbb{R} \ , \tag{9.1}$$

che sia bilineare. In più l'applicazione si dice:

1. *simmetrica se $b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = b(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})$ $\forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$;*

2. *antisimmetrica se $b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = -b(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})$ $\forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$;*

Esattamente come le applicazioni lineari, anche le applicazioni bilineari possono essere rappresentate tramite una matrice, infatti si ha il seguente

Teorema 9.2. *La matrice A associata ad una applicazione bilineare, ovvero la matrice per cui si ha che, fissata una base $\{\boldsymbol{e}_i\}$,*

$$b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v}^t A \boldsymbol{w} \ \forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V \ , \tag{9.2}$$

è la matrice i cui elementi sono dati da $a_{ij} = b(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$.

Dimostrazione. Assumendo la dimensione dello spazio essere n, sviluppiamo i vettori $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ rispetto alla base $\{\boldsymbol{e}_i\}$, $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^n c_i \boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{w} = \sum_{j=1}^n d_j \boldsymbol{e}_j$; allora per bilinearità

$$b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \sum_{i,j} c_i d_j b(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) \ . \tag{9.3}$$

Quindi se A è costruita come da enunciato, si ha

$$\boldsymbol{v}^t A \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \ , \tag{9.4}$$

che sviluppato corrisponderà a

$$\boldsymbol{v}^t A\boldsymbol{w} = \sum_{i,j} c_i a_{ij} d_j = \sum_{i,j} c_i d_j b(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) \;, \tag{9.5}$$

per come abbiamo costruito gli a_{ij}. □

Esattamente come per le matrici associate ad applicazioni lineari è associato il concetto di similitudine, così per le matrici associate ad applicazioni bilineari è associato il concetto di congruenza.

Definizione 9.3. *Due matrici A, B si dicono congruenti se $\exists M$ invertibile tale che $M^t AM = B$*

Notiamo esplicitamente che nel caso di matrici ortogonali, ovvero matrici tali che $C^\top = C^{-1}$, i concetti di congruenza e similitudine coincidono

Teorema 9.4. *Due matrici congruenti rappresentano la stessa applicazione bilineare in due basi diverse.*

Dimostrazione. Siano A,B due matrici congruenti tramite la M, dimostreremo che M è la matrice del cambiamento base. Infatti (indicheremo con i primati i vettori dell'altra base e M la relativa matrice di cambiamento base)

$$\boldsymbol{v}^t A\boldsymbol{w} = (M\boldsymbol{v}')^t A(M\boldsymbol{w}') = \boldsymbol{v}'^t M^t AM\boldsymbol{w}' = \boldsymbol{v}'^t B\boldsymbol{w}'. \tag{9.6}$$

□

Ci si pone allora anche per le applicazioni bilineari il problema della diagonalizzazione, si hanno i seguenti teoremi (che non dimostriamo)

Teorema 9.5 (Di Lagrange)**.** *Ogni matrice simmetrica è congruente ad una matrice diagonale.*

Teorema 9.6 (Di Sylvester)**.** *Data una applicazione bilineare simmetrica in uno spazio vettoriale di dimensione $n \geq 1$, esiste una base in cui la matrice associata assume la forma*

$$\begin{pmatrix} \mathbb{I}_p & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;, \tag{9.7}$$

dove, posto $q = r - p$ con r rango della matrice, la coppia (p, q) si chiama segnatura della matrice associata alla applicazione bilineare simmetrica.

Alcuni esercizi d'esame potranno riguardare il calcolo della segnatura, per calcolarla, visto che trovare "a mano" la base che rende la matrice associata all'applicazione bilineare nella forma (9.7) può essere proibitivo, si può sfruttare il seguente criterio. Si calcolano i sottodeteminanti di ordine crescente a partire dal determinante di ordine uno; facendo partire p, q da zero, se il primo determinante (che corrisponderà ad un numero) è positivo, si incrementa p, se è negativo si incrementa n, poi andando avanti ad ogni cambio di segno si incrementa q e ad ogni permanenza del segno si incrementa p. Questo procedimento alla fine consegnerà la segnatura della matrice in questione. Attenzione: il criterio funziona se le matrici di ordine superiore su cui si fanno i determinanti contengono quelle precedenti e se non si incappa in determinanti nulli. Quindi se si conosce il rango r della matrice, si dovranno trovare le sottomatrici con determinante non nullo fino all'r-esimo ordine, con quelle di ordine superiore che contengono quelle di ordine inferiore.

Esercizio 9.7. Si calcoli la segnatura di

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Soluzione: partiamo da in alto a sinistra, il primo determinante corrisponde al numero 5 che è positivo, per ora $p = 1$, $q = 0$; il secondo determinate di ordine superiore è

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9 ,$$

negativo, c'è cambio segno, quindi aumentiamo $q = 1$ e lasciamo invariato $p = 1$. Infine il determinante di tutta la matrice è -8, c'è permanenza segno, quindi aumentiamo $p = 2$ e lasciamo invariato $q = 1$. La segnatura è $(2, 1)$.

Capitolo 10

Teorema spettrale

Il teorema spettrale che enunceremo tra poco vale sia per i reali che per i complessi. Per arrivare alla sua formulazione dobbiamo richiamare il prodotto scalare che è stato definito in 2.3, ma per i complessi si ha una richiesta differente dalla bilinearità, ovvero la sesquilinearità, cioè

$$b(\lambda \boldsymbol{v}_1 + \mu \boldsymbol{v}_2, w) = \bar{\lambda} b(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w}) + \bar{\mu} b(\boldsymbol{v}_2, w) \ , \tag{10.1}$$

ovvero l'antilinearità a sinistra (la linearità a destra resta). Questo prodotto scalare si dice hermitiano. Da ora per semplicità di notazioni useremo solo le parentesi per indicare il prodotto scalare.

Teorema 10.1. *Sia $f : V \to W$ applicazione lineare con V, W spazi vettoriali. Allora $\exists!$ f^* applicazione lineare tale che*

$$(f(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{v}, f^*(\boldsymbol{w})) \ . \tag{10.2}$$

f^* è detto aggiunto di f e se a f è associata la matrice A, allora a f^* è associata la matrice $\bar{A}^\top$.

Definizione 10.2. *$f : V \to W$ è normale se $f \circ f^* = f^* \circ f$, autoaggiunto se $f = f^*$, antiautoaggiunto se $f = -f^*$, unitario se $f \circ f^* = \mathbb{I}$.*

Tutte queste definizioni hanno il loro analogo matriciale, basterà mettere la matrice trasposta coniugata al posto dell'aggiunto. Finalmente passiamo al

Teorema 10.3 (Spettrale)**.** *f è normale $\iff$ ammette una base unitaria di autovettori (ovvero autovettori tali che $(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) = \delta_{ij}$). Equivalentemente, ogni matrice hermitiana può essere diagonalizzata con matrici unitarie (ovvero tali che $U\bar{U}^\top = \mathbb{I}$).*

Ricordiamo che la delta di Kronecker δ_{ij} è definita come

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j \\ 0 \text{ se } i \neq j \end{cases} \tag{10.3}$$

Notiamo che, limitandoci al caso reale, il teorema spettrale afferma che le matrici simmetriche sono diagonalizzabili con matrici ortogonali. Ciò ha una grande importanza anche in fisica, infatti nello spazio euclideo le matrici ortogonali rappresentano le rotazioni, e diagonalizzare una matrice si traduce nel poter trovare un sistema di riferimento ottenuto tramite rotazioni (le matrici ortogonali) in cui la matrice assume la decisamente più semplice forma diagonale.

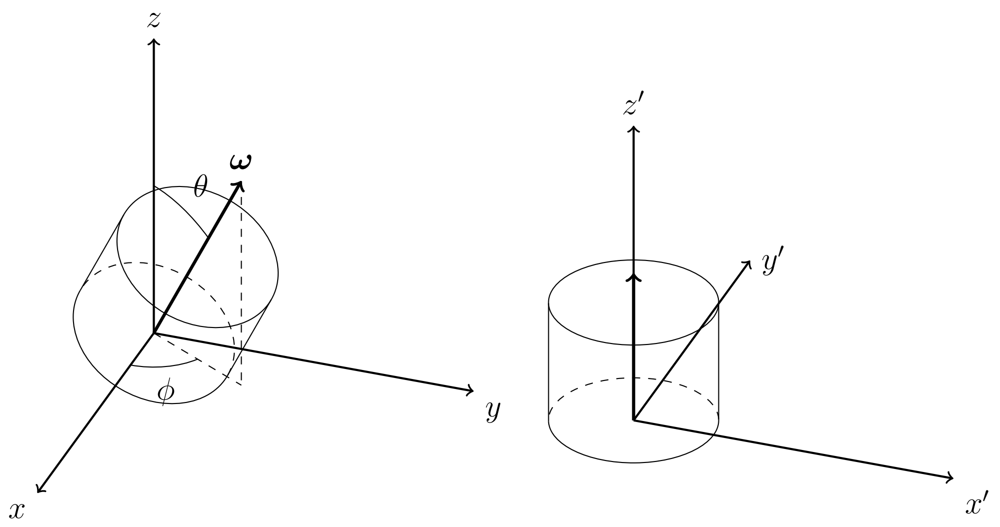

Figura 10.1: rappresentazione della diagonalizzazione del tensore di inerzia, con $\boldsymbol{\omega}$ si è indicato il vettore velocità angolare. Nel secondo sistema di riferimento (x', y', z') il tensore di inerzia risulta diagonalizzato tramite una rotazione degli assi (ruotati in modo da far corrispondere la direzione di $\boldsymbol{\omega}$ con la direzione di z').

Esempio 10.4. Il tensore di inerzia è la matrice

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{zz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \,, \tag{10.4}$$

tale che $\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega}$. Essa è una matrice simmetrica e in quanto tale può essere diagonalizzata, ovvero esiste un sistema di riferimento ottenibile tramite rotazione degli assi in cui essa assume la forma

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \,. \tag{10.5}$$

Capitolo 11

Preparazione allo scritto

Si è svolta una prova d'esame, di alcuni esercizi che hanno procurato le maggiori difficoltà sono riportate qua le soluzioni.

Esercizio 11.1. Dato un sistema di riferimento cartesiano, siano P_1, P_2 e Q punti di coordinate rispettivamente $(1, 1, -1)$, $(3, 2, 3)$, e $(3, 1, 0)$, $\boldsymbol{v}$ il vettore $(2, 2, 1)^\top$, π_1 il piano di equazione $x-y+2z-2 = 0$ e S_1, S_2 le due sfere di equazione rispettivamente $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 2z - 2 = 0$ e $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y - 6z + 8 = 0$.

1. Trovare il centro C_1 e il raggio R_1 della sfera S_1, C_2, R_2 di S_2 e un'equazione cartesiana della retta passante per P_1 e P_2.
2. trovare equazione cartesiana di π_2 passante per Q la cui giacitura contiene r e il vettore $\boldsymbol{v}$ e determinare se S_1 e S_2 sono secanti, tangenti o esterne l'uno all'altra;
3. se esiste trovare un'equazione parametrica per la retta s intersezione di π_2 e π_1 e equazioni cartesiane per le rette contenenti i punti che hanno distanza 2 dal piano π_1 e 3 dal piano π_2.

Soluzione:

1. Posso scrivere S_1 come $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2 = 16$ e S_2 come $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 6$. Ricordando che la generica sfera può essere scritta come $(x - C_x)^2 + (y - C_y)^2 + (z - C_z)^2 = R^2$ concludiamo che $C_1 = (2, 3, -1)$ e $C_2 = (-2, -1, 3)$ mentre $R_1 = 4$ e $R_2 = \sqrt{6}$. Ora scriviamo l'equazione parametrica della retta (si riguardi la sezione 2) passante per P e avendo per giacitura il vettore $\overrightarrow{P_2 - P_1}$ (quindi una retta che passerà sicuramente sia per P_1 che per P_2):

$$r : \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix} \implies \begin{cases} 1+2t = x \\ 1+t = y \\ -1+4t = z \end{cases} \implies \begin{cases} 2y-1 = x \\ 4y-5 = z \end{cases}$$

Le ultime due sono le equazioni cartesiane cercate.

2. Analogamente a prima, mettendo le giaciture $\boldsymbol{v}$ e $\overrightarrow{P_2 - P_1}$

$$\pi_2 : \begin{pmatrix}3 & 1 & 0\end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 3 + 2t_1 + 2t_2 = x \\ 1 + t_1 + 2t_2 = y \\ 4t_1 + t_2 = z \end{cases}$$
$$\Longrightarrow -x + 6y + 2z + 15 = 0 \ .$$

   Per la seconda richiesta sarà sufficiente calcolare la distanza $d(C_1, C_2) = \|C_1 - C_2\| = 4\sqrt{3}$, sono esterne in quanto la distanza tra i due centri è maggiore della somma dei raggi.

3. Intersechiamo π_1 e π_2:

$$\begin{cases} -x + 6y + 2z + 15 = 0 \\ x - y + 2z - 2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{-13 - 4z}{5} \\ x = y - 2z + 2 \end{cases}$$

   Per trovare un punto per cui passa la retta basterà porre ad esempio $z = 1$ e otteniamo il punto $P' = (-17/5, -17/5, 1)$ mentre per trovare il vettore di giacitura basterà risolvere il sistema omogeneo e porre per esempio $y = 1$:

$$\begin{cases} -x + 6y + 2z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z = -\dfrac{5}{4} y \\ x = y - 2z \end{cases}$$

   quindi un'equazione parametrica è la seguente:

$$\begin{pmatrix}-\frac{17}{5} & -\frac{17}{5} & 1\end{pmatrix} + t \begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\1\\-\frac{5}{4}\end{pmatrix} \ .$$

   Per l'ultimo punto si applica la seguente che mi dà la distanza piano-punto e si mette a sistema per i due casi

$$d(P, \pi) = \frac{|\sum_{i=1}^3 a_i c_i + b|}{\sqrt{\sum_{i=1}^3 a_i^2}} \ ,$$

   dove gli a_i sono i coefficienti dell'equazione del piano, b il termine noto (eventualmente nullo) e i c_i le coordinate del punto.

Esercizio 11.2. $F_t(1, 0, 0, 0) = (2t^2, 0, 0, 0)$, $F_t(t, 1, 0, 0) = (2t^3 + t, t, 0, 0)$, $F_t(0, 3, 1, 0) = (3t - 3, 3t + 3, 2, -t)$ e $F_t(0, 0, 1, -1) = (0, 0, 2 - t, -t - 4)$.

1. Trovare la matrice associata nelle basi canoniche

2. Dire per quali valori reali t, A_t è diagonalizzabile sui reali.

3. Calcolare autovalori e autovettori di A_1.

4. Calcolate la segnatura di $A_0^t + A_0$

Soluzione:

1. Dobbiamo semplicemente vedere i vettori di base come combinazioni lineari dei vettori dati e poi mettere nelle rispettive colonne della matrice le loro immagini rispetto a F_t. A titolo di esempio, possiamo vedere $\boldsymbol{e}_2$ come $(t,1,0,0)-t\boldsymbol{e}_1$, quindi $F_t(\boldsymbol{e}_2)=F_t(t,1,0,0)-tF_t(\boldsymbol{e}_1)=(t,t,0,0)$ che corrisponderà alla seconda colonna (notare che la prima praticamente l'abbiamo già). La matrice è
$$A_t=\begin{pmatrix}2t^2 & t & -3 & -3\\ 0 & t & 3 & 3\\ 0 & 0 & 2 & t\\ 0 & 0 & -t & 4\end{pmatrix}$$

2. Calcoliamo il polinomio caratteristico:
$$\det(A_t-x\mathbb{I})=\begin{vmatrix}2t^2-x & t & -3 & -3\\ 0 & t-x & 3 & 3\\ 0 & 0 & 2-x & t\\ 0 & 0 & -t & 4-x\end{vmatrix}=(2t^2-x)(t-x)(x^2-6x+8+t^2)\,.$$
Le radici del polinomio caratteristico, i candidati autovalori, sono $x_1=2t^2$, $x_2=t$, $x_{3,4}=3\pm\sqrt{1-t^2}$. Per essere diagonalizzabile, deve ammettere una base di autovettori, o equivalentemente la somma di tutti gli autospazi relativi agli autovalori deve essere uguale alla dimensione dello spazio. Dalle ultime due ricaviamo che sicuramente dovrà essere $-1\le t\le 1$; in questo dominio, x_1 e x_2 non saranno mai uguali a x_3 e x_4 (verificare!) quindi possiamo affermare che ci saranno 4 autovalori distinti per tutti i t eccezion fatta per $t=0,1/2$ (caso $x_1=x_2$) e per $t=\pm1$ (caso $x_3=x_4$); si verifica facilmente che per $t=0$, il rango di $A_t-x\mathbb{I}$ è 2, in particolare $\dim(\mathrm{Ker}(A_0-0\mathbb{I}))=2$ che è anche la dimensione dell'autospazio (praticamente questo è vero per definizione), quindi dovendo essere le dimensioni degli altri autospazi necessariamente maggiori o uguali a uno, si può concludere che la somma delle dimensioni degli autospazi per A_0 è effettivamente 4 e concludere che per $t=0$ A_t è diagonalizzabile. Con stesso ragionamento concludo che per $t=\pm1,1/2$ A_t non è diagonalizzabile in quanto il rango di $A_t-x\mathbb{I}$ è uguale a 3 e quindi gli autospazi relativi avranno dimensione 1.

   Conclusione: A_t diagonalizzabile per $-1<t<1$, $t\neq 1/2$.

3. Gli autovalori li abbiamo già, sono gli x_i dell'esercizio precedente con $t=1$, per gli autovettori basterà risolvere i sistemi omogenei.

4. Con il metodo discusso nell'esercizio 9.7, si trova che ha segnatura (2,1) (si consiglia di partire a calcolare determinanti da in basso a destra)
$$A_0^t+A_0=\begin{pmatrix}0 & 0 & -3 & -3\\ 0 & t & 3 & 3\\ -3 & 3 & 4 & 0\\ -3 & 3 & 0 & 8\end{pmatrix}\,. \tag{11.1}$$

Esercizio 11.3. Date A, B matrici reali quadrate e simmetriche di ordine 4, abbia A segnatura $(2, 2)$ e B definita positiva. Vero o falso:

1. $A - B$ è sempre invertibile.
2. $A - B$ può avere segnatura $(1, 3)$.
3. La matrice complessa $C = A + \mathrm{i}B$ può avere determinante zero

Soluzione:

1. falso, controesempio:
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \; A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ,$$
e $A - B$ non è invertibile (non ha rango massimo)
$$A - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} .$$

2. Vero, esempio
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
prendere B come prima e
$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} .$$

3. Falso, poniamo $C\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, allora anche $\boldsymbol{v}^\top C\boldsymbol{v} = 0$ ovvero $\boldsymbol{v}^\top A\boldsymbol{v} + \mathrm{i}\boldsymbol{v}^\top B\boldsymbol{v} = 0$, ma essendo le matrici simmetriche reali, per forza $\boldsymbol{v}^\top A\boldsymbol{v} = 0$, $\boldsymbol{v}^\top B\boldsymbol{v} = 0$, ma B è definita positiva, quindi per forza $\boldsymbol{v} = 0$. Siamo arrivati a dire che se $C\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ allora per forza $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ cioè C è invertibile.

Capitolo 12

Preparazione all'orale

Si è cercato di risolvere gli ultimi dubbi riguardo gli argomenti del corso e si è fatta una simulazione di prova orale, alcune delle domande che sono state fatte e che potrebbero di diritto essere fatte anche all'esame sono qui riportate:

1. Dare la definizione di spazio vettoriale, ci sono altri esempi notevoli di spazi vettoriali oltre ai soliti vettori? Discutere;
2. Definizioni di indipendenza e dipendenza lineare e proprietà relative a queste definizioni. Enunciare e dimostrare il teorema della base;
3. Enunciare il teorema relativo alla formula di Grassman e darne la dimostrazione;
4. Discutere i legami tra sistemi lineari e matrici. Enunciare e dimostrare il teorema di Rouchè-Capelli;
5. Quali sono le proprietà del determinante? Qual è il legame tra determinante e invertibilità di una matrice?
6. Enunciare e dimostrare il teorema delle dimensioni. Discutere il legame tra matrici e applicazioni lineari;
7. Qual è la differenza tra equazioni cartesiane ed equazioni parametriche?
8. Prodotti scalari, disuguaglianza di Schwarz;
9. Dare definizioni di matrici simili e matrici congruenti e discutere cosa rappresentano;
10. Definizione di autovalore e autovettore. Discutere la loro importanza nel problema di diagonalizzazione;
11. Enunciare il teorema spettrale e dare qualche sua applicazione.