Università della Calabria

Progetto di Fondamenti di Automatica

Luca Timpano 240236

Corso di Studio in Ingegneria Informatica

2023/2024

Contents

1 Introduzione

Il seguente progetto,mira ad esaminare e comprendere il comportamento dei sistemi continui e discreti. I riquadri grigi conterranno le istruzioni usate per il software Mathematica, strumento usato per gestire in modo efficiente le operazioni matematiche complesse necessarie per questa analisi.

Nella trattazione dei sistemi, sia continui che discreti, si è deciso di focalizzarsi principalmente sul tempo continuo per la semplicità di espressione e dimostrazione delle formule. Questa scelta è motivata dalla somiglianza tra i comportamenti dei sistemi nel dominio del tempo continuo e discreto in molte situazioni pratiche, rendendo le conclusioni e le analisi estensibili e comprensibili in entrambi i domini.
Si andranno a toccare punti come:

- Studiare i modi naturali dei sistemi e la loro evoluzione nel tempo.
- Analizzare le risposte libere e forzate dei sistemi sia nel dominio del tempo che in quello della frequenza.
- Esplorare la stabilità dei sistemi e le condizioni per la stabilità asintotica e BIBO.
- Implementare modelli ARMA per la rappresentazione ingresso-uscita dei sistemi.

2 Tempo Continuo

2.1 Dati

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{1}$$

dove

- $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è una matrice dinamica.
- $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ è la matrice degli ingressi
- $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ è la matrice di uscita
- $D \in \mathbb{R}^{n\times m}$ è la matrice di ingresso-uscita, in questo caso $D = 0$

Supponendo che:

- n è il numero di stati
- m è il numero degli ingressi
- p è il numero delle uscite

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1225}{2} & 1198 & 1076 & \frac{2883}{2} \\ \frac{1227}{2} & -1196 & -1077 & -\frac{2887}{2} \\ -\frac{3675}{2} & 3591 & 3229 & \frac{8657}{2} \\ \frac{1225}{2} & -1197 & -1076 & -\frac{1885}{2} \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{15}{2} \end{pmatrix} \tag{4}$$

2.2 Modi naturali del sistema

I **modi naturali** di un sistema dinamico rappresentano le modalità intrinseche con cui un sistema varia nel tempo in assenza di stimoli esterni ma influenzato solo dai vincoli o dalle sue caratteristiche fisiche. *Questi sono fondamentali per la comprensione del sistema nel tempo.* Un passo preliminare per il calcolo dei modi naturali è quello di verificare che la matrice sia diagonalizzabile.

2.2.1 La matrice A è diagonalizzabile?

Per verificare che la matrice sia diagonalizzabile, è necessario calcolarsi:

- Gli **autovalori**. Si definisce autovalore quello scalare $\lambda \in (\mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C})$, tale che esista un vettore v non nullo che verifichi la seguente condizione:

$$A\lambda = \lambda v \tag{5}$$

- ***Molteplicità algebrica***: è il numero di volte in cui l'autovalore appare come radice dell'equazione caratteristica della matrice
- **Molteplicità geometrica:** è la dimensione dello spazio generato dagli autovettori corrispondenti a quell'autovalore.

Una matrice si dice diagonalizzabile quando:

- tutti gli autovalori sono distinti
- se siamo in presenza di autovalori multipli, la matrice è diagonalizzabile se e solo se la molteplicità geometrica coincide con la molteplicità algebrica

$$\lambda = \text{Eigenvalues}[A]$$

$$\{-8, -8, -3+5i, -3-5i\}$$

In questo caso avremo che l'autovalore:

- **-8** ha molteplicità algebrica pari a 2
- **-3 + 5i** ha molteplicità algebrica pari a 1
- **-3 - 5i** ha molteplicità algebrica pari a 1

Possiamo notare subito la presenza di **autovalori multipli**, è quindi necessario calcolarsi la molteplicità geometrica:

$$\text{NullSpace}[8\text{IdentityMatrix}[4] + A]$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{623}{639} & \frac{511}{639} & -\frac{25}{9} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{NullSpace}[A - (-3+5i)\text{IdentityMatrix}[4]]$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1203}{1189} + \frac{390i}{8323} & \frac{6667}{8323} - \frac{1660i}{8323} & -\frac{115}{41} + \frac{10i}{41} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{NullSpace}[A - (-3-5i)\text{IdentityMatrix}[4]]$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1203}{1189} - \frac{390i}{8323} & \frac{6667}{8323} + \frac{1660i}{8323} & -\frac{115}{41} - \frac{10i}{41} & 1 \end{pmatrix}$$

La molteplicità geometrica legata all'autovalore:

- **-8** è pari a 1
- **-3+5i** è pari a 1
- **-3-5i** è pari a 1

Si conclude che $m_a(\lambda) \neq m_g(\lambda)$. **La matrice A non è diagonalizzabile**

2.2.2 Numero di modi naturali

É possibile, attraverso un'analisi precedente, calcolarsi il numero di modi naturali del sistema. Per fare ciò è necessario analizzare il polinomio caratteristico e il polinomio minimo della matrice A. Il **polinomio caratteristico** $p_A(\lambda)$ è un polinomio definito come il determinante della matrice $(A - \lambda I)$

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) \tag{6}$$

Il **polinomio minimo** $m(\lambda)$ è il polinomio di grado minimo tale che:

$$m(A) = 0 \tag{7}$$

In sintesi è il polinomio a coefficienti reali di grado minimo che annulla la matrice A.

Se il polinomio caratteristico e il polinomio minimo sono equivalenti allora è possibile dedurre, dal grado del polinomio, il numero dei modi naturali del sistema

$$\text{CharacteristicPolynomial}[A, x]$$
$$x^4 + 22x^3 + 194x^2 + 928x + 2176$$

Calcoliamo il polinomio minimo

Mettere la funzione del polinomio minimo

$$\text{MatrixMinimalPolynomial}(A, x)$$
$$x^4 + 22x^3 + 194x^2 + 928x + 2176$$

Possiamo osservare che $p_A(\lambda) = m(\lambda)$, si conclude che i modi naturali saranno quattro.

2.2.3 Calcolo dei modi naturali

Nel paragrafo 2.2.1 abbiamo dimostrato che la matrice A non è diagonalizzabile. Avendo che l'autovalore -8 ha molteplicità algebrica pari a due è necessario utilizzare la **matrice di Jordan (J)** data dalla seguente relazione:

$$T^{-1}AT = J \tag{8}$$

La matrice di Jordan è una matrice triangolare il più simile ad A che ha una struttura che ricorda una matrice diagonale ma con la presenza di "blocchi". Può avere forma:

$$\begin{pmatrix}
\lambda_1 & & & \dots & \dots & & 0 & 0 \\
& \lambda_2 & & & & & & \\
& & \ddots & & & & & \\
& & & \lambda_n & & & & \\
\vdots & & & & \sigma_1\omega_1 & & & \vdots \\
\vdots & & & & -\omega_1\sigma_1 & & & \vdots \\
& & & & & \ddots & & \\
& & & & & & & \sigma_n\omega_n \\
0 & 0 & & \dots & \dots & & & -\omega_n\sigma_n
\end{pmatrix} \tag{9}$$

Dove ogni blocco sarà così formato:

$$\begin{pmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{pmatrix}$$

Con:

- σ: parte reale dell'autovalore
- ω: parte immaginaria dell'autovalore

Questi "blocchi" contengono gli autovalori di A

$$\text{JordanDecomposition}[A][[2]]$$

$$J = \begin{pmatrix} -8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3-5i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3+5i \end{pmatrix} \tag{10}$$

Calcolando l'esponenziale della matrice (10)

$$MatrixExp[JordanDecomposition[A][[2]]t]$$

Avremo la matrice contenente i modi naturali del sistema

$$\Lambda = e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{-8t} & e^{-8t}t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-8t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{(-3-5i)t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{(-3+5i)t} \end{pmatrix} \tag{11}$$

Se li volessimo rappresentare graficamente dovremmo scrivere gli autovalori complessi nella forma: $e^{\sigma t} \cos \omega t$; $e^{\sigma t} \sin \omega t$
I modi naturali saranno:

- e^{-8t}
- $e^{-8t}t$
- $e^{-3t}\cos -5t$
- $e^{-3t}\sin 5t$

2.2.4 La convergenza

Un modo naturale definito per $t \geq 0$ si dice:

- **Convergente** se:
$$\lim_{t\to\infty} |m(t)| = 0 \tag{12}$$

- **Limitato** se $\exists\ K \in \mathbb{R}$ tale che $\forall t \geq 0$ vale la relazione:
$$0 < |m(t)| \leq K < \infty \tag{13}$$

- **Divergente** se
$$\lim_{t\to\infty} |m(t)| = \infty \tag{14}$$

Nel nostro caso **gli autovalori presentano tutti parte reale negativa**, si può intuire, ricordando che l'esponenziale con potenza negativa tende a zero per $t \to \infty$, che **tutti i modi convergeranno a 0**.

2.2.5 Tempo

Dopo aver studiato il comportamento dei modi naturali, ed esserci assicurati che i modi tendono ad avvicinarsi asintoticamente allo zero, è possibile definire, attraverso un semplice calcolo, anche il **il tempo caratteristico con cui un modo naturale del sistema converge**. Definiamo **costante di tempo** quel valore τ legato al generico autovalore λ_i la quantità:

$$\tau = |\frac{1}{\Re(\lambda_i)}| \tag{15}$$

Avremo che:

- Per il modo e^{-8t}
$$\tau = |\frac{1}{\Re(-8)}| = |\frac{1}{-8}| = 0,125$$

- Per il modo te^{-8t}
$$\tau = |\frac{1}{\Re(-8)}| = |\frac{1}{-8}| = 0,125$$

- Per il modo $e^{-3t}\cos -5t$
$$\tau = |\frac{1}{\Re(-3+5i)}| = |\frac{1}{-3}| = 0,\overline{3}$$

- Per il modo $e^{-3t}\sin 5t$
$$\tau = |\frac{1}{\Re(-3-5i)}| = |\frac{1}{-3}| = 0,\overline{3}$$

In sintesi τ indica il tempo necessario affinché l'ampiezza di un modo naturale si riduca di un fattore e (circa 63%).

2.2.6 Rappresentazione dei modi naturali

Dopo aver analizzato le proprietà dei modi naturali possiamo rappresentarli graficamente:

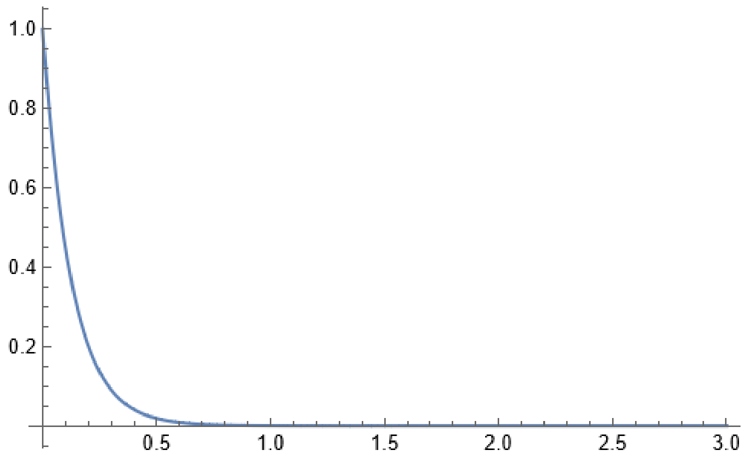


Figure 1: e^{-8t}

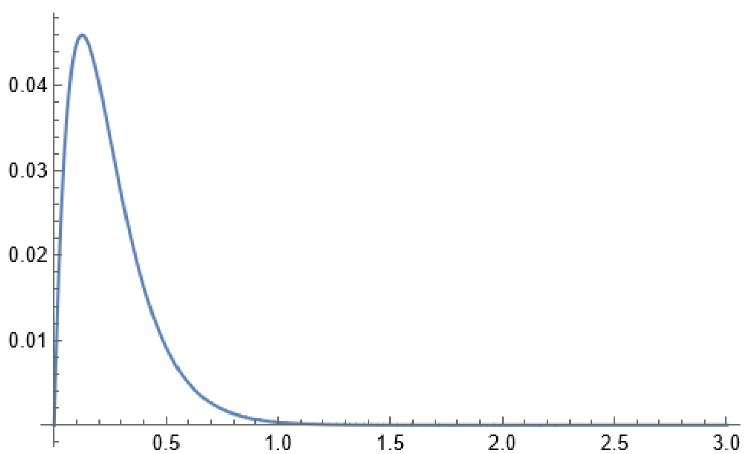


Figure 2: te^{-8t}

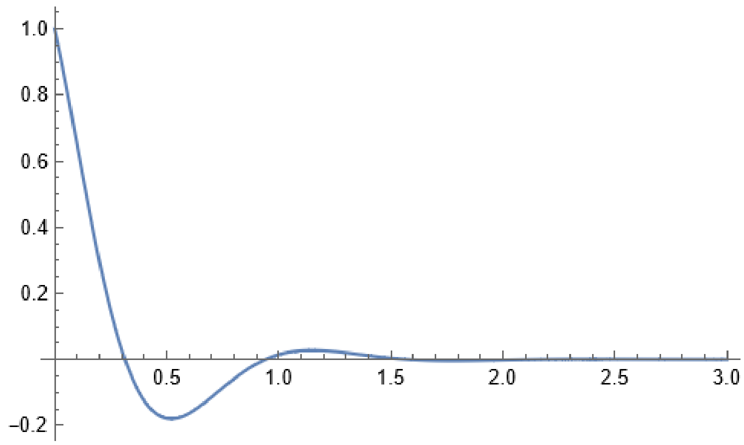


Figure 3: $e^{-3t}\cos -5t$

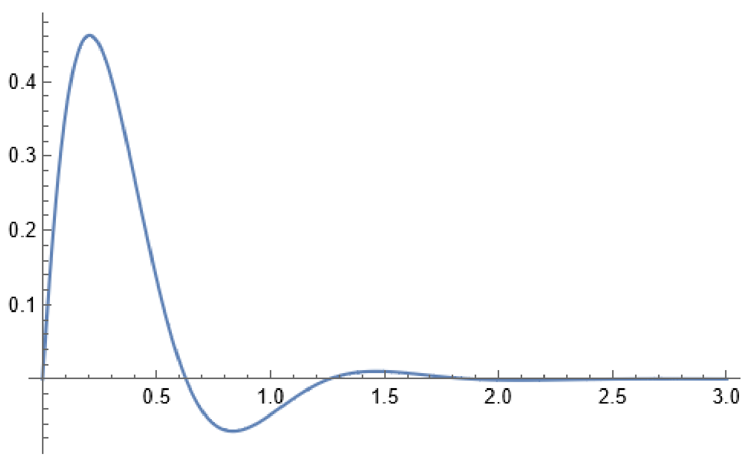


Figure 4: $e^{-3t}\cos -5t$

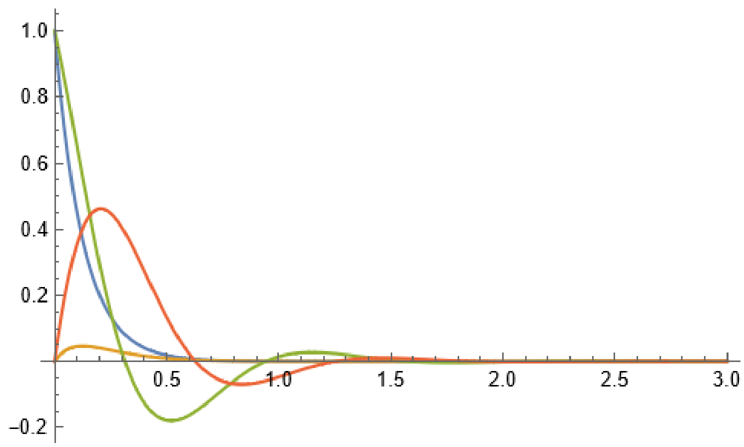


Figure 5: Modi naturali

Non casualmente i modi naturali legati all'autovalore con parte immaginaria assumono un comportamento pseudo oscillatorio. Questo perché la presenza di autovalori complessi e coniugati, portano a soluzioni che combinano oscillazioni sinusoidali o cosinusoidali e esponenziali. Questo andamento è definito come **pseudo-oscillatorio** poiché non si tratta di un oscillazione pura **data la presenza di una componente esponenziale che ne modula l'andamento nel tempo**.

2.3 Risposta libera

La **risposta libera** o **evoluzione libera** $x_l(t)$ rappresenta il comportamento del sistema quando non è soggetto ad alcuna eccitazione o input esterno, ossia quando la variabile $u(t)$ sia identicamente nulla. In altre parole l'evoluzione libera è determinata esclusivamente dalle caratteristiche intrinseche del sistema. In questo caso si avrà:

$$\dot{x}_t(t) = Ax_t(t) \tag{16}$$

Dove $x_t(t)$ sarà uno stato iniziale $x_l(0) = x_0$ assegnato. Trovare l'evoluzione libera significa quindi risolvere l'equazione differenziale (16) tale che $x_l(0) = x_0$.

$$x_l(t) = e^{At} \cdot x_0 \tag{17}$$

Dove e^{At} è l'**esponenziale di matrice** di dimensione $n \times n$ mentre x_0 è un vettore colonna di dimensione $n \times 1$. L'esponenziale di matrice si può ricavare a partire dalla *serie di Mc Laurin* della funzione e^{at}:

$$e^{at} = 1 + at + \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^3}{3!} + \ldots + \frac{(at)^k}{k!} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(at)^i}{i!} \tag{18}$$

Sostituendo lo scalare a con la matrice A ed effettuando le opportune modifiche otterremo:

$$e^{At} = I_n + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^2t^3}{3!} + \ldots + \frac{A^kt^k}{k!} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^it^i}{i!} \tag{19}$$

Queste funzioni convergono, sono continue e di classe C^∞

2.3.1 Formula della risposta libera

Sappiamo che:

$$e^{At} \overset{T}{\sim} e^{\Lambda t} \tag{20}$$

dove T è la matrice di cambiamento di base quadrata e invertibile, formata dagli autovettori destri di A. A partire dalla serie di McLaurin possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} e^{At}T &= T\left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\Lambda^it^i}{i!}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{T\Lambda^it^i}{i!} \end{aligned} \tag{21}$$

Con:

$$A^i \overset{T}{\sim} \Lambda^i; \quad TA^i = T\Lambda^i \tag{22}$$

Possiamo riscrivere il tutto come:

$$\begin{aligned} T\left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{T\Lambda^it^i}{i!}\right) &= Te^{\Lambda t} \\ &= Te^{\Lambda t}T^{-1} \end{aligned} \tag{23}$$

Sostituendo questo risultato alla risposta libera otteniamo:

$$x_l(t) = Te^{\Lambda t}T^{-1}x_0 \tag{24}$$

Chiamando $T^{-1}x_0 = z_0$, concludiamo che la risposta libera è calcolabile anche attraverso la forma:

$$x_l(t) = Te^{\Lambda t}z_0 \tag{25}$$

dove z_0 è la proiezione dello stato iniziale lungo le colonne della matrice di cambiamento di base T.

2.3.2 Calcolo della risposta libera

Ci viene assegnato lo stato

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{26}$$

Calcoliamo z_0:

$$z_0 = T^{-1}.x_0$$

$$z_0 = \begin{pmatrix} -\frac{35711}{500} \\ \frac{161667}{50} \\ \frac{36211}{1000} - \frac{31199i}{200} \\ \frac{36211}{1000} + \frac{31199i}{200} \end{pmatrix}$$

Calcolo la matrice di cambiamento di base T:

$$\text{T} = \text{JordanDecomposition}[A][[1]]$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{623}{639} & \frac{2306}{408321} & -\frac{1203}{1189} - \frac{390i}{8323} & -\frac{1203}{1189} + \frac{390i}{8323} \\ \frac{511}{639} & -\frac{8224}{408321} & \frac{6667}{8323} + \frac{1660i}{8323} & \frac{6667}{8323} - \frac{1660i}{8323} \\ -\frac{25}{9} & \frac{2}{81} & -\frac{115}{41} - \frac{10i}{41} & -\frac{115}{41} + \frac{10i}{41} \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Applichiamo la definizione di risposta libera (25):

$$\text{y}_l(\text{t\_}){:=}\text{Expand}\left[T.\text{MatrixExp}[\Lambda t].z_0\right]$$

Il risultato ottenuto sarà:

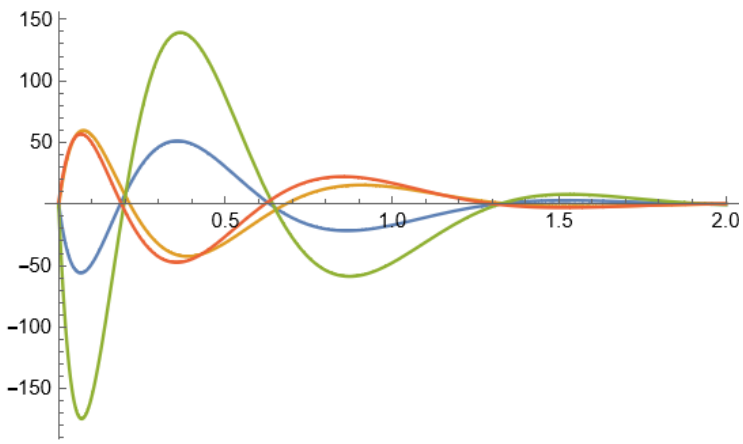


Figure 6: Risposta libera

2.3.3 Calcolo della risposta libera con la trasformata di Laplace

Di seguito si riporta il calcolo della risposta libera utilizzando la *trasformata di Laplace*, le dimostrazioni e il significato di quest'ultima verranno approfondite nel paragrafo 2.5.1. Per ottenere la risposta libera nel dominio di Laplace applichiamo la seguente formula:

$$Y_l(s) = (sI_n - A)^{-1}x_0 \tag{27}$$

Il passaggio successivo sarà quello di anti-trasformare $Y_l(s)$ per ottenere la risposta libera nel dominio del tempo: $\mathcal{L}(Y_l(s)) = y_l(t)$. La risposta ottenuta sarà:

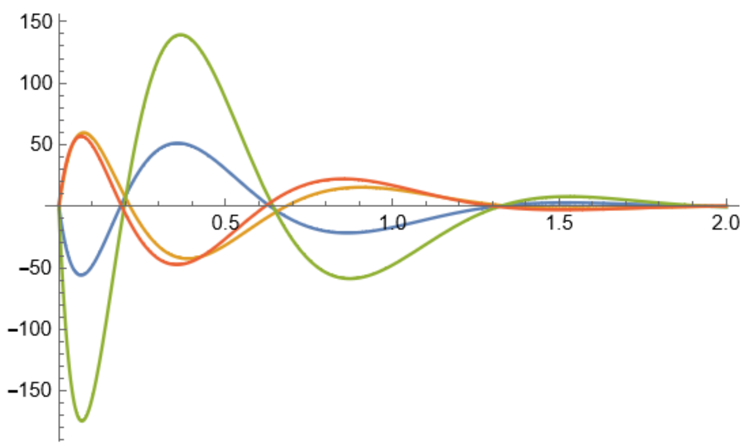


Figure 7: Risposta libera

2.3.4 Risposta libera nell'uscita

Avendo calcolato la risposta libera, è possibile anche calcolarsi la risposta libera nell'uscita:

$$y_l(t) = C \cdot x_l(t) \tag{28}$$

$$\mathrm{y}_l(\mathrm{t\_}) = \mathrm{Expand}\left[\mathrm{Simplify}\left[\mathrm{C1.x1}_l(t)\right]\right]$$

graficando la funzione otteniamo:

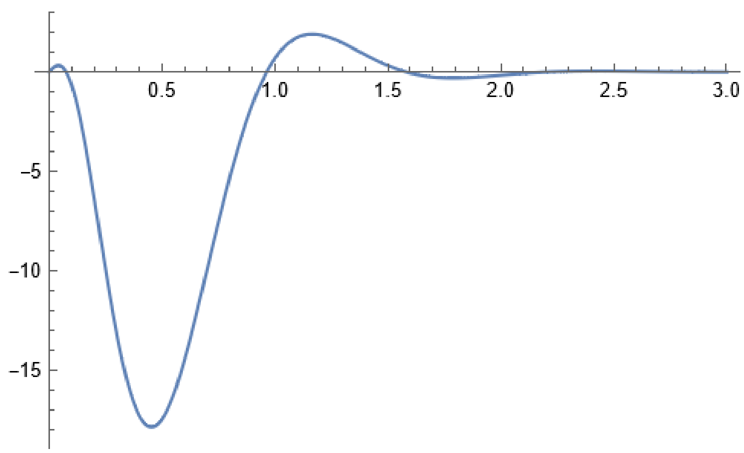


Figure 8: Risposta libera nell'uscita

2.4 Configurazione degli stati iniziali

Per comprendere quali stati iniziali influenzano l'attivazione dei modi naturali in un sistema dinamico, è fondamentale utilizzare la matrice di trasformazione T. Questa matrice è composta da colonne che rappresentano gli autovettori linearmente indipendenti, associati agli autovalori della matrice A: ogni colonna di T corrisponde a un modo naturale del sistema.
Gli stati iniziali del sistema sono espressi come combinazione lineare delle colonne T, grazie a questa osservazione siamo in grado di "isolare" un particolare modo naturale e ottenere la risposta ad esso associato.

$$T = \begin{pmatrix} -\frac{623}{639} & \frac{2306}{408321} & -\frac{1203}{1189} - \frac{390i}{8323} & -\frac{1203}{1189} + \frac{390i}{8323} \\ \frac{511}{639} & -\frac{8224}{408321} & \frac{6667}{8323} + \frac{1660i}{8323} & \frac{6667}{8323} - \frac{1660i}{8323} \\ -\frac{25}{9} & \frac{2}{81} & -\frac{115}{41} - \frac{10i}{41} & -\frac{115}{41} + \frac{10i}{41} \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ad esempio se volessimo isolare il modo naturale e^{-8t} dovremmo prendere in considerazione solo la prima colonna di T. Il nostro stato iniziale avrà forma:

$$x_{0'} = \alpha \begin{pmatrix} -\frac{623}{639} \\ \frac{511}{639} \\ -\frac{25}{9} \\ 1 \end{pmatrix}^T \tag{29}$$

dove α è uno scalare a piacere. Considerando $\alpha = \frac{1}{8}$ ricaviamo:

$$x_{0'} = \begin{pmatrix} -\frac{623}{5112} & \frac{511}{5112} & -\frac{25}{72} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \tag{30}$$

La riposta libera sarà:

$$x_{l'}(t) = e^{At} \cdot x_{0'} = \begin{pmatrix} -\frac{623e^{-8t}}{5112} \\ \frac{511e^{-8t}}{5112} \\ \frac{1}{72}(-25)e^{-8t} \\ \frac{e^{-8t}}{8} \end{pmatrix} \tag{31}$$

Come si può osservare la riposta libera dipende esclusivamente dal modo naturale e^{-8t}.

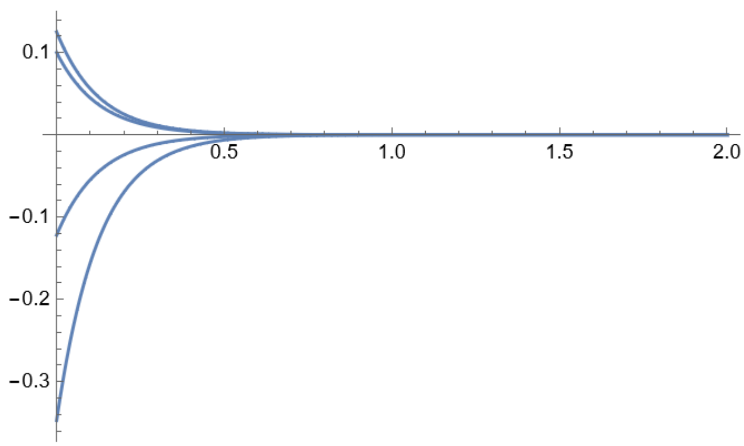


Figure 9: Risposta libera dipendente dal modo naturale e^{-8t}

La seconda colonna di T è invece legata a due modi naturali: e^{-8t}, te^{-8t}. Il procedimento è il medesimo:

$$x_{l''}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1153e^{-8t}}{1633284} - \frac{623e^{-8t}t}{5112} \\ \frac{511e^{-8t}t}{5112} - \frac{1028e^{-8t}}{408321} \\ \frac{e^{-8t}}{324} - \frac{25}{72}e^{-8t}t \\ \frac{1}{8}e^{-8t}t \end{pmatrix} \tag{32}$$

si noti la dipendenza ai due modi naturali precedentemente elencati.

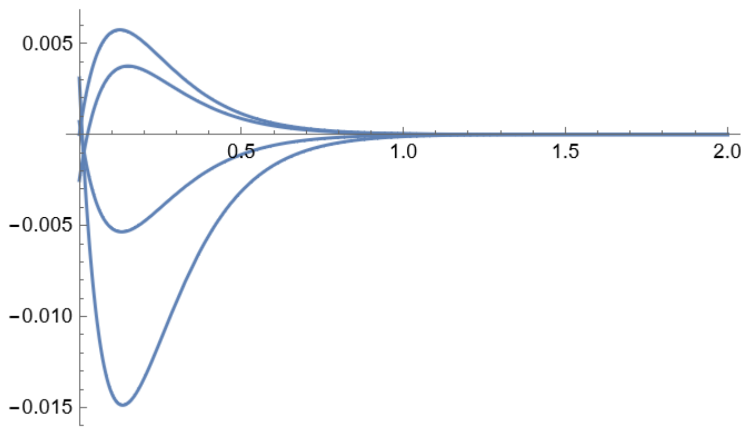


Figure 10: Risposta libera dipendente dai modi naturali e^{-8t}, te^{-8t}

Isoliamo il modo $e^{(-3-5i)t}$:

$$x_{l'''}(t) = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1203}{9512} - \frac{195i}{33292}\right) e^{(-3-5i)t} \\ \left(\frac{6667}{66584} + \frac{415i}{16646}\right) e^{(-3-5i)t} \\ \left(-\frac{115}{328} - \frac{5i}{164}\right) e^{(-3-5i)t} \\ \frac{1}{8} e^{(-3-5i)t} \end{pmatrix} \tag{33}$$

per graficare consideriamo solo la parte reale del modo naturale:

$$x_{l'''}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{195e^{-3t}\sin(5t)}{33292} - \frac{1203e^{-3t}\cos(5t)}{9512} \\ \frac{415e^{-3t}\sin(5t)}{16646} + \frac{6667e^{-3t}\cos(5t)}{66584} \\ \frac{1}{328}(-115)e^{-3t}\cos(5t) - \frac{5}{164}e^{-3t}\sin(5t) \\ \frac{1}{8}e^{-3t}\cos(5t) \end{pmatrix} \tag{34}$$

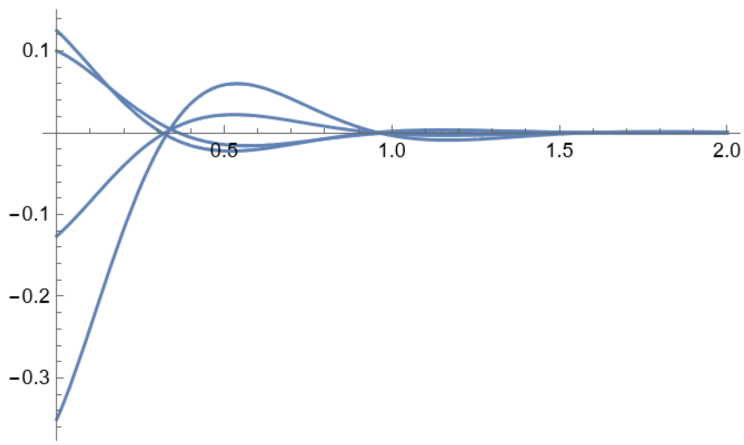


Figure 11: Risposta libera dipendente dal modo naturale $e^{(-3-5i)t}$

2.5 Funzione di Trasferimento, poli e zeri

2.5.1 Trasformata di Laplace

Per semplificare il calcolo delle equazioni differenziali che descrivono il comportamento del sistema si introduce la **trasformata di Laplace**.

In un sistema dinamico, il legame tra ingresso e uscita è espresso da un'equazione differenziale. Invece di risolvere direttamente questa equazione, la trasformata di Laplace **permette di convertire le funzioni del tempo in funzioni di una variabile complessa s**. In questo modo, le operazioni differenziali e integrali vengono trasformate in semplici operazioni algebriche. É così definita:

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} \cdot dt \tag{35}$$

2.5.2 Funzione di trasferimento

Considerando una rappresentazione SISO (*single input single output*):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{36}$$

Applichiamo la trasformata di Laplace, per passare dal dominio del tempo (t) al dominio della variabile complessa s:

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\dot{x}(t)) = \mathcal{L}(Ax(t) + Bu(t)) \\ \mathcal{L}(y(t)) = \mathcal{L}(Cx(t) + Du(t)) \end{cases} \tag{37}$$

Sfruttando la linearità della trasformata di Laplace otteniamo:

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\dot{x}(t)) = \mathcal{L}(Ax(t)) + \mathcal{L}(Bu(t)) \\ \mathcal{L}(y(t)) = \mathcal{L}(Cx(t)) + \mathcal{L}(Du(t)) \end{cases} \tag{38}$$

É importante sottolineare che la funzione $f(t)$ deve soddisfare tre condizioni:

1. $\lim_{t\to 0^+} f(t)$ esiste;
2. $f(t)$ deve essere continua o continua a tratti in ogni intervallo
3. Sia M uno scalare maggiore di 0 e t_0 un istante di tempo strettamente maggiore di 0, $f(t)$ deve essere sempre maggiorabile da una funzione del tipo
$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}, \quad t \geq t_0 \tag{39}$$

Se $f(t)$ rispetta le seguenti condizioni é detta di **classe L**.
Fatte queste premesse allora possiamo riscrivere:

- $U(s) = \mathcal{L}(u(t)) \in \mathbb{C}$
- $X(s) = \mathcal{L}(x(t)) \in \mathbb{C}^n$
- $Y(s) = \mathcal{L}(y(t)) \in \mathbb{C}$

Riscriviamo il sistema (38) nel seguente modo:

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\dot{x}(t)) = AX(t) + BU(t) \\ Y(t) = CX(t) + DU(t) \end{cases} \tag{40}$$

Grazie al **teorema della derivata** 2.1:

$$\mathcal{L}(\dot{f}(t)) = sF(s) - f(0) \tag{41}$$

possiamo riscrivere $\mathcal{L}(\dot{x}(t))$ come:

$$\mathcal{L}(\dot{x}(t)) = sX(s) - x(0) \tag{42}$$

e sostituendo questa relazione alla (40) otteniamo:

$$\begin{aligned} sX(s) - x(0) &= AX(t) + BU(t) \\ sX(s) - AX(s) &= BU(s) + x(0) \\ X(s)(sI_n - A) &= x(0) + BU(s) \end{aligned} \tag{43}$$

Concludendo

$$X(s) = (sI_n - A)^{-1}x(0) + (sI_n - a)^{-1}BU(s) \tag{44}$$

Da qui $(sI_n - A)^{-1}x(0)$ sarà la **risposta libera nello stato** mentre $(sI_n - a)^{-1}BU(s)$ sarà la **risposta forzata**

Arrivati a questo punto è possibile calcolarsi la **funzione di trasferimento**. Sostituendo la (44) nella $Y(s)$ avremo che:

$$\begin{aligned} Y(s) &= C((sI_n - A)^{-1}x(0) + (sI_n - A)^{-1}BU(s)) + DU(s) \\ Y(s) &= C(sI_n - A)^{-1}x(0) + C(sI_n - A)^{-1}BU(s) + DU(s) \\ Y(s) &= C(sI_n - A)^{-1}x(0) + (C(sI_n - A)^{-1}B + D)U(s) \end{aligned} \tag{45}$$

Come risultato avremo che il primo addendo $C(sI_n - A)^{-1}x(0)$ sarà proprio la *risposta libera* $\mathcal{L}$-trasformata, il secondo addendo $(C(sI_n - A)^{-1}B + D)U(s)$ rappresenterà la *risposta forzata* ed infine avremo che la quantità $C(sI_n - A)^{-1}B + D$ sarà la **funzione di trasferimento**[1]:

$$G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + D \tag{46}$$

La FdT risultante sarà:

```
G(s_):=Simplify [C1.(sIdentityMatrix[4] − A)^−1.B] [[1, 1]]
```

$$G(s) = \frac{5(2s+1)}{2(s+8)^2\,(s^2+6s+34)} \tag{47}$$

2.5.3 Poli e zeri

La FdT è definibile anche come rapporto di polinomi:

$$G(s) = \frac{n_G(s)}{d_G(s)} \tag{48}$$

É quindi possibile riscriverla in forma fattorizzata mettendo in evidenza le radici del numeratore e del denominatore.

$$G(s) = \frac{k(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_m)} \tag{49}$$

dove:

- z_i è una radice del numeratore
- p_i è una radice del denominatore

I numeri complessi z_i, per $i = 1, \dots, m$, che soddisfano l'equazione $G(z_i) = 0$ sono definiti come gli **zeri della funzione di trasferimento**, o zeri del sistema. I numeri complessi p_i, per $i = 1, \dots, n$, per i quali il limite $\lim_{s \to p_i} G(s) = \infty$ sono definiti come i **poli della funzione di trasferimento**, o poli del sistema. Fatte queste premesse è immediato il calcolo dei poli e degli zeri della funzioni:

```
Solve[Numerator[G(s)]=0,s]
```

$$z = \left\{\left\{s \to -\frac{1}{2}\right\}\right\} \tag{50}$$

[1] $(sI_n - A)^{-1}$ è detta matrice risolvente, esiste ovunque nel piano complesso, eccetto per i valori di s che sono autovalori della matrice A. Questo perché la matrice $(sI_n - A)$ deve essere invertibile affinché la matrice risolvente esista

```
Solve[Denominator[G(s)]=0,s]
```

$$p = \{\{s \to -8\}, \{s \to -8\}, \{s \to -3 - 5i\}, \{s \to -3 + 5i\}\} \tag{51}$$

2.6 Risposta al gradino unitario

Consideriamo il seguente segnale

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad t < 0 \\ 1, & \text{se} \quad t \geq 0 \end{cases} \tag{52}$$

la funzione $u(t)$ prende il nome di **gradino unitario**, è un segnale *right-sided*, ovvero un segnale che è nullo per tempi negativi e assume un valore costante per tempi positivi

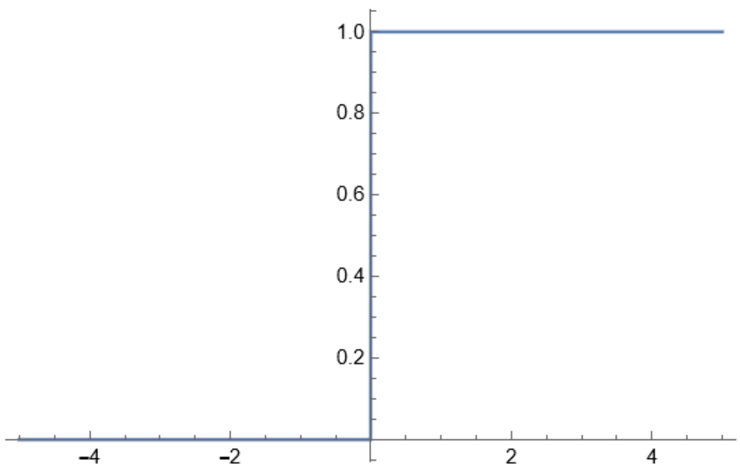


Figure 12: Gradino

La $\mathcal{L}$-trasformata del gradino è:

$$\mathcal{L}(u(t)) = \frac{1}{s} \tag{53}$$

Dal momento che la risposta forzata è data dalla seguente relazione:

$$Y_f(s) = G(s) \cdot U(s) \tag{54}$$

con $U(s) = \frac{1}{s}$

$$Y_f(s) = \frac{G(s)}{s} \tag{55}$$

$$Y_f(\text{s\_}) := \frac{G(s)}{s}$$

$$Y_f(s) = \frac{(5(1+2s))}{(2s(8+s)^2(34+6s+s^2))} \tag{56}$$

Per essere analizzabile, la risposta forzata, deve essere riportata nel dominio del tempo. Possiamo procedere in due modi distinti.

2.6.1 L'Antitrasformata di Laplace

Uno dei due metodi è utilizzare l'**antitrasformata di Laplace**

$$\mathcal{L}^{-1}(Y_f(s)) = Y_f(t) \tag{57}$$

La risposta forzata di un sistema lineare e stazionario a un gradino unitario può essere scomposta in due componenti:

Definition 1 (Risposta Transitoria) *è data dalla combinazione lineare di alcuni (o tutti) i modi naturali del sistema. Viene chiamata "transitoria" perchè, per $t \to \infty$, se l'argomento dell'esponenziale è strettamente negativo, tende a zero. Inoltre, se i poli della FdT sono complessi e coniugati con parte reale negativa, come nel nostro caso, ci possiamo aspettare che la risposta transitoria sarà data da una combinazione di sinusoidi smorzate.*

Definition 2 (Risposta a Regime) *La risposta a regime è la componente della risposta forzata che non dipende dai modi naturali del sistema, ma dal suo ingresso. Questa risposta descrive il comportamento a lungo termine del sistema dopo che i transitori si sono esauriti. Nel nostro caso il segnale in ingresso è* ***costante****, la risposta a regime sarà costante di conseguenza.*

$$\text{Expand}\left[\text{Simplify}\left[\text{ComplexExpand}\left[\mathcal{L}_s^{-1}\left[Y_f(s)\right](t)\right]\right]\right] \tag{58}$$

$$Y_f(t) = \frac{5}{4352} + \frac{3}{32}e^{-8t}t + \frac{23e^{-8t}}{1280} - \frac{1}{680}e^{-3t}\sin(5t) - \frac{13}{680}e^{-3t}\cos(5t)$$
$$Y_{reg}(t) = \frac{5}{4352}$$
$$Y_{trans}(t) = \frac{3}{32}e^{-8t}t + \frac{23e^{-8t}}{1280} - \frac{1}{680}e^{-3t}\sin(5t) - \frac{13}{680}e^{-3t}\cos(5t)$$

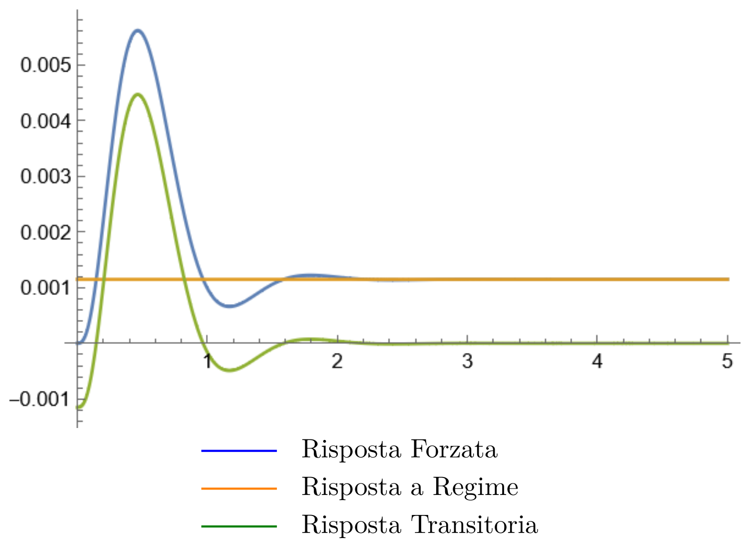


Figure 13: Risposta forzata

2.6.2 Fratti semplici

L'altro metodo che possiamo applicare è quello dei fratti semplici. La decomposizione in fratti semplici è una tecnica che consente di esprimere una funzione come somma di frazioni. Anche la *risposta forzata* può essere riscritta come rapporto di polinomi:

$$Y_f(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \tag{59}$$

Per applicare la decomposizione in frazioni parziali, il denominatore della funzione deve essere fattorizzato:

$$\begin{aligned} Y_f(s) &= \frac{n_f(s)}{(s-p_1)^{v_1}(s-p_2)^{v_2}\dots(s-p_r)^{v_r}} \\ &= \frac{n_f(s)}{\prod_{i=1}^{r}(s-p_i)^{v_i}} \end{aligned} \tag{60}$$

ricordando che:

- p_i è il polo di $F(s)$
- v_i è la molteplicità algebrica del polo p_i

L'obbiettivo è quello di riuscire ad ottenere la $Y_f(s)$ nella forma:

$$
\begin{aligned}
Y_s(s) =& \frac{C_{11}}{(s-p_1)} + \frac{C_{12}}{(s-p_1)^2} + \ldots + \frac{C_{1v_1}}{(s-p_1)^{v_1}} \\
&+ \frac{C_{21}}{(s-p_2)} + \frac{C_{22}}{(s-p_2)^2} + \ldots + \frac{C_{2v_2}}{(s-p_2)^{v_2}} \\
&+ \ldots \\
&+ \frac{C_{r1}}{(s-p_r)} + \frac{C_{r2}}{(s-p_r)^2} + \ldots + \frac{C_{rv_r}}{(s-p_r)^{v_r}} \\
&= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{v_i} \frac{C_{ij}}{(s-p_i)^j}
\end{aligned} \tag{61}
$$

La (61) è detta **espansione in fratti semplici**.
I coefficienti $C_{ij} \in \mathbb{C}$ sono calcolati attraverso la **formula di Heaviside**:

$$
C_{ij} = \lim_{s \to p_i} \frac{1}{(v_j - j)!} \frac{d^{v_j - j}}{ds^{v_j - j}} ((s-p_i)^{p_i} Y_f(s)) \tag{62}
$$

La funzione *Apart* di mathematica ci viene in soccorso per scomporre la $Y_f(s)$

$$
\text{Apart}\left[\frac{G(s)}{s}, s\right]
$$

$$
Y_f(s) = \frac{-13s - 44}{680\,(s^2 + 6s + 34)} + \frac{5}{4352s} + \frac{23}{1280(s+8)} + \frac{3}{32(s+8)^2} \tag{63}
$$

Come notiamo, mathematica calcola direttamente i coefficienti C_{ij}, per analizzare meglio la funzione siamo costretti a scrivere manualmente la (63) nella forma della (61).

$$
\frac{C_1}{s} + \frac{C_{21}}{s+8} + \frac{C_{22}}{(s+8)^2} + \frac{C_3}{(s+3-5i)} + \frac{C_4}{(s+3+5i)} \tag{64}
$$

Arrivati a questo punto siamo in grado di calcolarci i coefficienti C_{ij}. Sappiamo che $C_1 = G(0)$, i restanti verranno calcolati, come anticipato, grazie alla formula di Heaviside:

$$
\begin{aligned}
C_1 &= G(0) = \frac{5}{4352} \\
C_{22} &= \lim_{s\to -8} \frac{1}{(2-2)!}\frac{d^{2-2}}{ds^{2-2}}((s+8)^2 Y_f(s)) \\
&= \lim_{s\to -8}(s+8)^2 Y_f(s) = \frac{3}{32} \\
C_{21} &= \lim_{s\to -8} \frac{1}{(2-1)!}\frac{d^{2-1}}{ds^{2-1}}((s+8)^2 Y_f(s)) \\
&= \frac{1}{1!}\lim_{s\to -8}\frac{\partial}{\partial s}(s+8)^2 Y_f(s) = \frac{23}{1280} \\
C_3 &= \lim_{s\to -3+5i}(s+3-5i)Y_f(s) = -\frac{13}{1360} + \frac{i}{1360}
\end{aligned}
$$

C_4 sarà il coniugato di C_3

$$C_4 = \overline{C_3} = -\frac{13}{1360} - \frac{i}{1360} \tag{65}$$

Sostituendo i coefficienti appena trovati nella (64) otteniamo:

$$-\frac{\frac{13}{1360}+\frac{i}{1360}}{s+(3+5i)} + \frac{5}{4352s} + \frac{23}{1280(s+8)} + \frac{3}{32(s+8)^2} - \frac{\frac{13}{1360}-\frac{i}{1360}}{s+(3-5i)} \tag{66}$$

É necessario tornare nel dominio del tempo, ma sono presenti coefficienti complessi corrispondenti a poli complessi, per calcolare la parte reale di una funzione complessa oscillante utilizziamo la seguente relazione su mathematica:

$$F(\mathrm{Z\_}, \gamma\_, \mathrm{t\_}) := \mathrm{ComplexExpand}[\Re(Z\exp(i\gamma t))]$$

Arrivati a questo punto siamo pronti per poter riportare la $Y_f(s)$ nel dominio del tempo:

$$
\begin{aligned}
y_f(t) := & \, 2e^{-3t}\cdot 1(t)\cdot F(C_3, 5, t) \\
& + C_{21}e^{-8t}\cdot 1(t) \\
& + C_{22}te^{-8t}\cdot 1(t) \\
& + C_1\cdot 1(t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y_f(t) = & \frac{5}{4352}1(t) + \frac{23}{1280}e^{-8t}1(t) + \frac{3}{32}te^{-8t}1(t) \\
& + 2e^{-3t}\left(-\frac{13\cos(5t)}{1360} - \frac{\sin(5t)}{1360}\right)1(t)
\end{aligned} \tag{67}
$$

2.6.3 Grafico

Graficando il risultato:

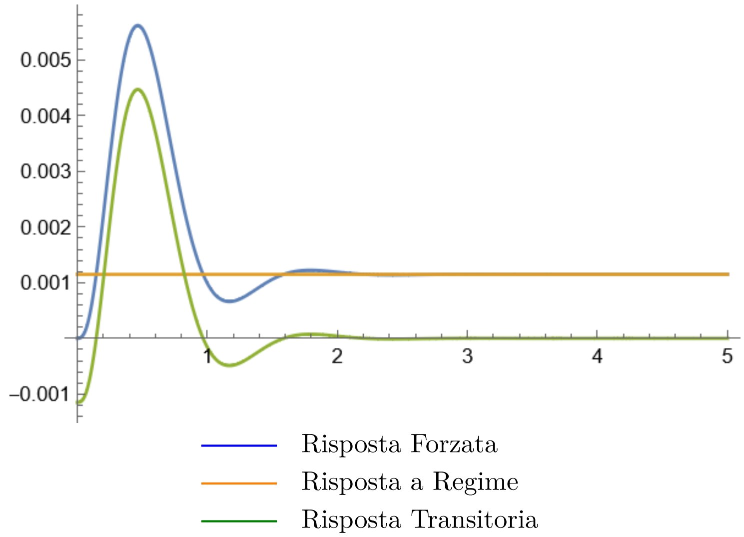


Figure 14: Risposta forzata

2.7 Risposta al segnale periodico elementare

É interessante anche studiare la risposta del sistema ad un segnale periodico elementare $u(t) = A\sin(\omega t + \psi)1(t)$.

2.7.1 In che modo i parametri A, ω e ψ influenzano la risposta del sistema?

- A: Rappresenta l'**ampiezza**, modula direttamente l'ampiezza del risposta. Se A aumenta, aumenterà proporzionalmente l'ampiezza della risposta.
- ω: Indica la **frequenza**. Modifica direttamente la risposta in frequenza del sistema
- ψ: Rappresenta lo **sfasamento**. Se modifichiamo la fase iniziale del segnale, la fase della risposta, cambierà della stessa quantità.

Scegliamo i seguenti parametri: $A = 1$; $\omega = 1$;$\psi = 0$. Andiamo quindi ad analizzare la risposta del sistema all'ingresso periodico:

$$u(t) = \sin(t)1(t) \tag{68}$$

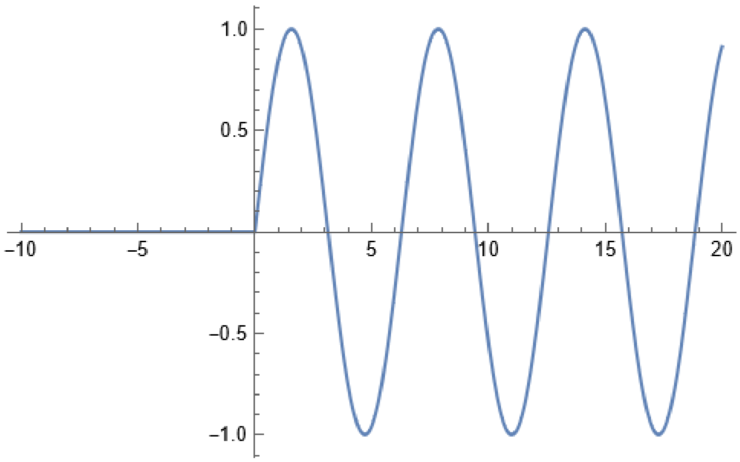


Figure 15: $\sin(t)1(t)$

La trasformata di Laplace della (68) sarà:

$$U(S) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{1}{s^2 + 1} \tag{69}$$

2.7.2 Calcolo della risposta forzata

Come nel caso del paragrafo 2.6, anche in questo caso è possibile calcolare la risposta forzata mediante la trasformata di Laplace o mediante la scomposizione in fratti semplici. Essendo il calcolo mediante la formula (58) banale, proseguiremo con la descrizione del calcolo della $Y_f(t)$ attraverso l'espansione dei fratti semplici.
Ricordando che la $Y_f(s)$ equivale a:

$$\begin{gathered} Y_f(s) = G(s)U(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s^2+1} \\ Y_f(s) = \frac{5(2s+1)}{2(s+8)^2\,(s^2+1)\,(s^2+6s+34)} \end{gathered} \tag{70}$$

Scomponiamo mediante la funzione *Apart* di mathematica

$$\text{Apart}\left[Y_{\text{f}}(s)\right]$$

$$Y_f(s) = \frac{3s - 11}{1500\,(s^2+6s+34)} + \frac{204s + 253}{126750\,(s^2+1)} - \frac{61}{16900(s+8)} - \frac{3}{260(s+8)^2} \tag{71}$$

Come precedentemente descritto siamo costretti a scomporre manualmente in fratti semplici la (71):

$$Y_f(s) = \frac{C_2}{s-i} + \frac{C_1}{s+i} + \frac{C_4}{s+3-5i} + \frac{C_5}{s+3+5i} + \frac{C_{31}}{s+8} + \frac{C_{32}}{(s+8)^2} \tag{72}$$

Applicando la formula di Heaviside

$$\begin{aligned}
C_1 &= \lim_{s\to -i}(s+i)Y_{f2}(s) = \frac{17}{21125} + \frac{253i}{253500} \\
C_2 &= \lim_{s\to i}(s+i)Y_{f2}(s) = \frac{17}{21125} - \frac{253i}{253500} \\
C_{32} &= \lim_{s\to -8}(s+8)^2 Y_{f2}(s) = -\frac{3}{260} \\
C_{31} &= \lim_{s\to -8}\frac{\partial}{\partial s}\left((s+8)^2 Y_{f2}(s)\right) = -\frac{61}{16900} \\
C_4 &= \lim_{s\to -3+5i}(s+3-5i)Y_{f2}(s) = \frac{1}{1000} + \frac{i}{750} \\
C_5 &= (C_4)^* = \frac{1}{1000} - \frac{i}{750}
\end{aligned} \tag{73}$$

Sostituendo i parametri alla (72) otteniamo:

$$\begin{aligned}
Y_f(s) = &\frac{\frac{1}{1000}+\frac{i}{750}}{s+(3-5i)} - \frac{61}{16900(s+8)} - \frac{3}{260(s+8)^2} + \frac{\frac{17}{21125}-\frac{253i}{253500}}{s-i} \\
&+ \frac{\frac{17}{21125}+\frac{253i}{253500}}{s+i} + \frac{\frac{1}{1000}-\frac{i}{750}}{s+(3+5i)}
\end{aligned} \tag{74}$$

Riportiamo la (74) nel dominio del tempo:

$$\boxed{\begin{aligned}
y_{\mathrm{f2}}(t) := &2e^{-3t}1(t)F(C_3,5,t) \\
&+ C_1 e^{-it}1(t) \\
&+ C_2 e^{it}1(t) \\
&+ C_{31}e^{-8t}1(t) \\
&+ C_{32}te^{-8t}1(t)
\end{aligned}}$$

$$\begin{aligned}
y_{f2} = &\left(\frac{1}{1000}+\frac{i}{750}\right)e^{(-3+5i)t} + \left(\frac{1}{1000}-\frac{i}{750}\right)e^{(-3-5i)t} \\
&- \frac{3}{260}e^{-8t}t - \frac{61e^{-8t}}{16900} + \frac{253\sin(t)}{126750} + \frac{34\cos(t)}{21125}
\end{aligned} \tag{75}$$

Da questa espressione possiamo ricavarci facilmente la **risposta a regime** e la **risposta transitoria** seguendo le definizioni 1 e 2.

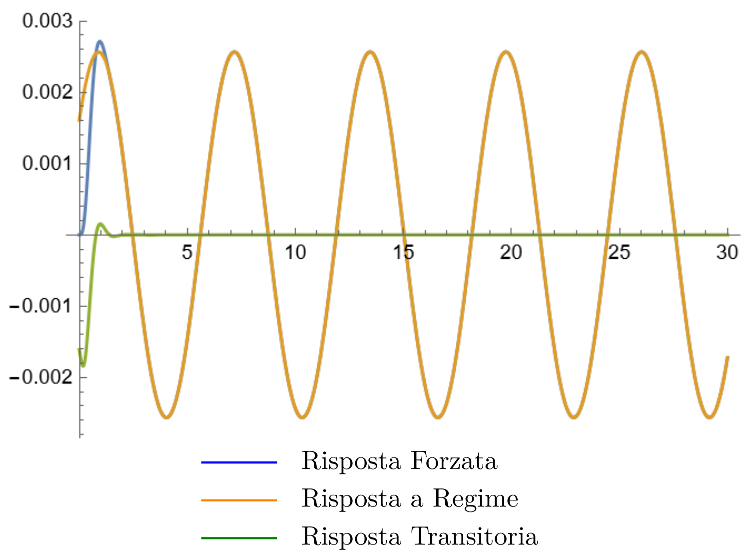
La risposta a regime saranno la componenti:

$$\frac{253\sin(t)}{126750} + \frac{34\cos(t)}{21125} \tag{76}$$

mentre la risposta transitoria sarà:

$$\left(\frac{1}{1000} + \frac{i}{750}\right) e^{(-3+5i)t} + \left(\frac{1}{1000} - \frac{i}{750}\right) e^{(-3-5i)t} - \frac{3}{260} e^{-8t} t - \frac{61e^{-8t}}{16900} \tag{77}$$

2.7.3 Grafico



2.8 Modello ARMA

Definition 3 (Modello ARMA) *Il modello ARMA è una rappresentazione implicita ingresso-uscita per un sistema LTI-TC. Ha la seguente forma generale:*

$$y^{(n)}(t)+a_1 y^{(n-1)}(t)+a_2 y^{(n-2)}(t)+\cdots+a_n y(t) = b_0 u^{(m)}(t)+b_1 u^{(m-1)}(t)+\cdots+b_m u(t)$$

con a_i, b_i costanti e u,y ingresso e uscita rispettivamente.

Riscriviamo la nostra funzione di trasferimento, sotto forma di **modello ARMA**. Dalla definizione sappiamo che la FdT è così definita:

$$G(s) = \frac{\text{Risposta Forzata}}{\text{Segnale di ingresso}} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{5(2s+1)}{2(s+8)^2\,(s^2+6s+34)} &= \frac{Y(s)}{U(s)} \\
\frac{10s+5}{2s^4+44s^3+388s^2+1856s+4352} &= \frac{Y(s)}{U(s)}
\end{aligned}
\tag{78}
$$

Possiamo riscrivere il tutto come:

$$
\begin{aligned}
(2s^4+44s^3+388s^2+1856s+4352)Y(s) &= (10s+5)U(s) \\
2s^4Y(s)+44^3Y(s)+388s^2Y(s)+1856sY(s)-4352Y(s) &= 10sU(s)-5U(s)
\end{aligned}
\tag{79}
$$

Sappiamo che:

- $y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s))$
- $u(t) = \mathcal{L}^{-1}(U(s))$

Teorema 2.1 (Teorema della Derivata) *Sia f(t) una funzione di classe L continua , definendo $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$, allora la $\mathcal{L}$-Trasformata di $f\dot{(t)}$ sarà uguale a:*

$$\mathcal{L}(f\dot{(t)}) = sF(s) - f(0)$$

Sia f(t) una funzione di classe L continua fino all'ordine $n-1$, la $\mathcal{L}$-Trasformata di $f^{(n)}(t)$ sarà uguale a:

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Ad esempio la $\mathcal{L}$-Trasformata di $f\ddot{(t)}$ è:

$$\mathcal{L}(f\ddot{(t)}) = s^2F(s) - sf(0) - f\dot{(t)}$$

Ma se il sistema è in quiete allora tutte le condizioni iniziali sono nulle: $f(0) = 0, f\dot{(t)} = 0, \ldots, f^{(n)}(t) = 0$, allora:

$$\mathcal{L}(f\ddot{(t)}) = s^2F(s)$$

Possiamo generalizzare scrivendo:

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = s^nF(s) \tag{80}$$

Quindi, supponendo che il sistema sia in quiete, grazie al *teorema della derivata* possiamo enunciare le seguenti relazioni:

- $y\dot{(t)} = \mathcal{L}^{-1}[sY(s)]$
- $y\ddot{(t)} = \mathcal{L}^{-1}[s^2Y(s)]$
- $y\dddot{(t)} = \mathcal{L}^{-1}[s^3Y(s)]$
- $u\dot{(t)} = \mathcal{L}^{-1}[sU(s)]$

Possiamo finalmente riscrivere la nostra funzione di trasferimento nel modello ARMA come segue:

$$2y^{(4)}(t) + 44y^{(3)}(t) + 388y''(t) + 1856y'(t) + 4352y(t) = 10u'(t) + 5u(t) \quad (81)$$

Per risolvere l'equazione abbiamo bisogno di quattro condizioni:

1. $y(0) = Cx_0$
2. $y'(0) = CAx_0$
3. $y''(0) = CA^2x_0$
4. $y^{(3)}(t) = CA^3x_0$

Considerando lo stato iniziale x_0:

$$x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (82)$$

Otteniamo:

$$y(0) = -\frac{25}{2}; \quad y'(0) = \frac{25}{2}; \quad y''(0) = 35; \quad y^{(3)}(0) = -\frac{2755}{2} \quad (83)$$

Vogliamo adesso calcolarci la risposta al segnale $t \cdot 1(t)$:

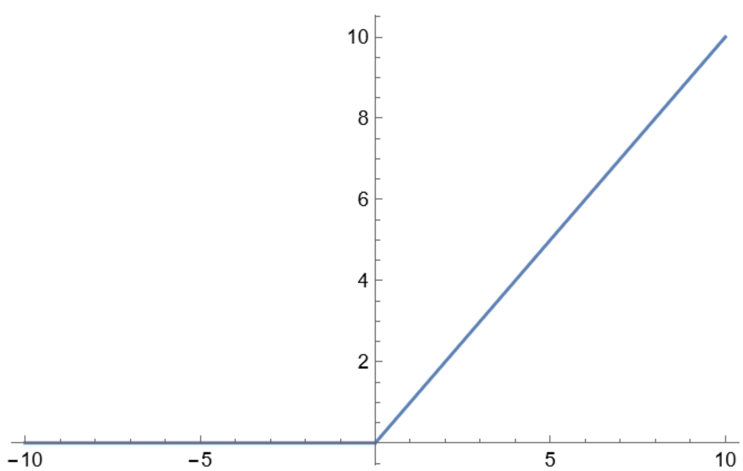


Figure 16: $t \cdot 1(t)$

Riapplichiamo la trasformata di Laplace alla (81) e otteniamo:

$$2(s+8)^2\left(s^2+6s+34\right)Y(s) =$$
$$2\big((s^2+22s+194)y'(0)+(s^3+22s^2+194s+928)y(0)+sy''(0)+y^{(3)}(0)$$
$$+22y''(0)\big)+5(2s+1)U(s)$$

Esplicitiamo la $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{(10s+5)U(s)}{2(s+8)^2\left(s^2+6s+34\right)} + \frac{\begin{array}{l}2s^3y(0)+2s^2y'(0)+44s^2y(0)+\\ 2sy''(0)+44sy'(0)+388sy(0)+\\ 2y^{(3)}(0)+44y''(0)+388y'(0)+1856y(0)\end{array}}{2(s+8)^2\left(s^2+6s+34\right)}$$

Notiamo che il primo termine sarà la riposta forzata data la presenza del segnale di ingresso, mentre il secondo termina sarà la riposta libera.
Sostituiamo le condizioni iniziali (83) a $Y(s)$:

$$\frac{(10s+5)U(s)}{2(s+8)^2\left(s^2+6s+34\right)} + \frac{-25s^3-525s^2-4230s-19565}{2(s+8)^2\left(s^2+6s+34\right)}$$

E isoliamoci la riposta forzata:

$$Y_{forz} = \frac{(10s+5)U(s)}{2(s+8)^2\left(s^2+6s+34\right)} \tag{84}$$

$U(s)$ è ottenuta come $\mathcal{L}(t\cdot 1(t)) = \frac{1}{s^2}$:

$$Y_{forz}(t) = \left(\frac{11}{11560}+\frac{31i}{23120}\right)e^{(-3+5i)t} + \left(\frac{11}{11560}-\frac{31i}{23120}\right)e^{(-3-5i)t} - \frac{3}{256}e^{-8t}t + \frac{5t}{4352} - \frac{19e^{-8t}}{5120} + \frac{535}{295936}$$

Seguendo la definizione 1 e la definizione 2, la risposta a regime sarà:

$$\frac{5t}{4352} + \frac{535}{295936}$$

mentre la risposta transitoria:

$$\left(\frac{11}{11560}+\frac{31i}{23120}\right)e^{(-3+5i)t} + \left(\frac{11}{11560}-\frac{31i}{23120}\right)e^{(-3-5i)t} - \frac{3}{256}e^{-8t}t - \frac{19e^{-8t}}{5120}$$

Volendo fare un rapido controllo possiamo calcolare la riposta forzata anche attraverso la funzione di trasferimento:

$$Y_{forz}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G(s)}{s^2}\right)$$

$$Y_{forz}(t) = \left(\frac{11}{11560}+\frac{31i}{23120}\right)e^{(-3+5i)t} + \left(\frac{11}{11560}-\frac{31i}{23120}\right)e^{(-3-5i)t} - \frac{3}{256}e^{-8t}t + \frac{5t}{4352} - \frac{19e^{-8t}}{5120} + \frac{535}{295936}$$

2.9 Stato iniziale x_0 tale che la risposta al gradino unitario coincida con il suo valore di regime

Abbiamo visto nel paragrafo 2.6 la risposta del sistema al gradino e si è notato come sia possibile dividere la risposta forzata in una componente transitoria e una componente di regime. É anche possibile determinare uno stato iniziale x_0, che consenta alla risposta al gradino di raggiungere **immediatamente** il suo valore di regime, eliminando di fatto, la componente transitoria. Questo risultato si ottiene garantendo che la somma algebrica della risposta libera e della componente transitoria (della risposta forzata) sia uguale a 0.
Procediamo con il calcolo di x_0:
per comodità, rappresentiamo il modello in "forma compatta" in una struttura detta *forma di Rosenbrock*:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -\frac{1225}{2} & 1198 & 1076 & \frac{2883}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1227}{2} & -1196 & -1077 & -\frac{2887}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3675}{2} & 3591 & 3229 & \frac{8657}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1225}{2} & -1197 & -1076 & -\frac{2885}{2} & -\frac{1}{2} \\ \hline -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{15}{2} & 0 \end{array}\right)^{\boxed{S}} \tag{85}$$

La formula per calcolare la risposta libera nel dominio della variabile complessa s è la seguente:

$$Y_l(s) = C(sI_n - A)^{-1}x_0 \tag{86}$$

mentre la risposta forzata è data dalla seguente relazione:

$$Y_f(s) = G(s)U(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s} \tag{87}$$

dobbiamo individuare x_0.
Ci calcoliamo la risposta a regime a partire dalla (87):

$$\begin{aligned} Y_f(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s} &= \frac{n_G(s)}{s(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} \\ &= \frac{C_1}{s} + \sum_{i=1}^{n} \frac{D_i}{s-p_i} \end{aligned} \tag{88}$$

Il coefficiente C_1 si ricava grazie alla **formula semplificata di Heaviside**

$$C_1 = \lim_{s\to 0} s \cdot Y(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot G(s) \cdot \frac{1}{s} = G(0) \tag{89}$$

La risposta a regime sarà quindi:

$$Y_{reg}(s) = \frac{G(0)}{s} \tag{90}$$

Poiché, $Y_f(s) = Y_{reg} + Y_{tran}$, la risposta transitoria si può ottenere dalla differenza di $Y_f(s) - Y_{reg}$

$$Y_{tran}(s) = Y_f(s) - Y_{reg} \tag{91}$$

Una volta calcolata la risposta transitoria, possiamo procedere nell'imporre la condizione che la somma di quest'ultima e della risposta libera sia uguale a 0. Il problema si riduce quindi nel trovare i valori x_1, x_2, x_3, x_4 tale che sia soddisfatta la seguente condizione:

$$C(sI_n - A)^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x4 \end{pmatrix} + Y_{tran}(s) = 0 \tag{92}$$

$$\text{Numerator}\left[\text{Simplify}\left[\text{Expand}\left[Y_{f-\text{transitoria}}(s) + Y_{\text{libera}}(s)\right]\right]\right]$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow -5\big(&2176s^3x_3 + 6528s^3x_4 + s^3 + 47872s^2x_3 + 141440s^2x_4 + 22s^2 \\ &+ 2176(s^3 + 23s^2 + 218s + 3619)x_1 + 2176(s^3 + 24s^2 + 241s - 3401)x_2 \\ &+ 417792sx_3 + 1212032sx_4 + 194s - 7452800x_3 - 7078528x_4 - 3424\big) \end{aligned} \tag{93}$$

$$\text{CoefficientList}\left[\text{Numerator}\left[\text{Simplify}\left[\text{Expand}\left[Y_{f-\text{transitoria}}(s) + Y_{\text{libera}}(s)\right]\right]\right], s\right]$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \{ &-39374720x_1 + 37002880x_2 + 37264000x_3 + 35392640x_4 + 17120, \\ &-2371840x_1 - 2622080x_2 - 2088960x_3 - 6060160x_4 - 970, \\ &-250240x_1 - 261120x_2 - 239360x_3 - 707200x_4 - 110, \\ &-10880x_1 - 10880x_2 - 10880x_3 - 32640x_4 - 5\} \end{aligned} \tag{94}$$

La funzione `CoefficientList` di Mathematica restituisce una lista contenente i coefficienti numerici associati a ciascuna potenza di s nel numeratore di una frazione razionale. La lista avrà un numero di elementi pari al grado del polinomio del numeratore più uno.
Ad esempio, se il numeratore è un polinomio di terzo grado in s, la lista restituita avrà quattro elementi:

- Il primo elemento conterrà il coefficiente del termine costante s^0
- Il secondo elemento conterrà il coefficiente del termine lineare in s

- Il terzo elemento conterrà il coefficiente del termine quadratico in s^2
- Il quarto elemento conterrà il coefficiente del termine cubico in s^3

Eguagliamo a zero:

$$\text{Solve}\Big[\text{CoefficientList}\left(\text{Numerator}\left(\text{Simplify}\left(\text{Expand}\left(Y_{f-\text{transitoria}}(s)\right.\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\left.+Y_{\text{libera}}(s)\right)\right)\right), s\right) = \{0,0,0,0\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4\}\Big]$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} x_1 \to \frac{1}{4352} \\ x_2 \to -\frac{1}{4352} \\ x_3 \to \frac{1}{4352} \\ x4 \to -\frac{1}{4352} \end{pmatrix} \tag{95}$$

Possiamo verificare il risultato prodotto ricalcolando la risposta del sistema a partire dallo stato appena ricavato:

$$\text{OutputResponse}\left[\left\{\Sigma, \left\{\frac{1}{4352}, -\frac{1}{4352}, \frac{1}{4352}, -\frac{1}{4352}\right\}\right\}, 1, t\right]$$

$$y_{reg}(t) = \left\{\frac{5}{4352}\right\} \tag{96}$$

Confrontando il risultato ottenuto con il grafico **??**, possiamo confermare che la risposta forzata al gradino della FdT è proprio la retta di equazione $y = \frac{5}{4352}$.

2.10 Risposta al segnale $u(t) = 1(-t)$

Il segnale $1(-t)$ descrive un gradino invertito nel tempo: il segnale è attivo per i valori $t < 0$ mentre per i valori $t \geq 0$ il segnale si annulla.

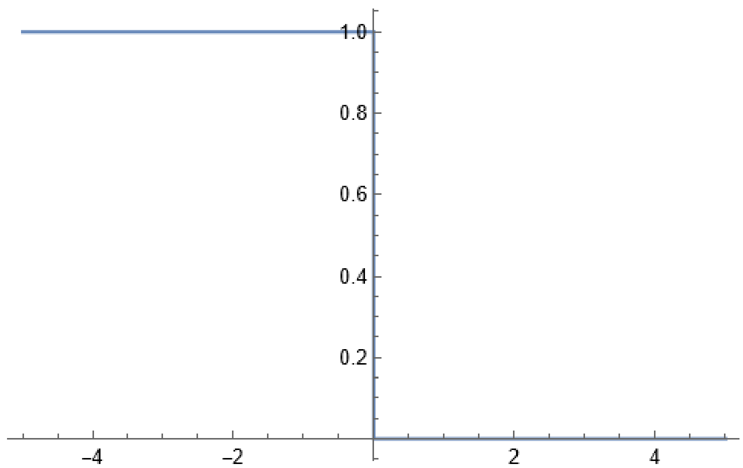


Figure 17: Gradino

Il calcolo della risposta all'ingresso $1(-t)$ presuppone la **BIBO stabilità**.

2.10.1 Asintotica stabilità

Un sistema è asintoticamente stabile, se e solo se gli autovalori di A $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ hanno parte reale negativa.

$$\Re(\lambda_i) < 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{97}$$

l'asintotica stabilità implica la BIBO stabilità *(può non valere il viceversa).*

2.10.2 BIBO stabilità (Bounded-Input-Bounded-Output)

La BIBO stabilità è una proprietà fondamentale dei *sistemi dinamici.* Un sistema è detto BIBO stabile se per ogni ingresso limitato la corrispondente uscita è limitata.
Un segnale è **limitato** se esiste uno scalare $k > 0$ finito, tale che:

$$|f(t)| < k, \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{98}$$

Un sistema nel dominio del tempo è detto BIBO stabile se e solo se la sua risposta all'impulso è **assolutamente integrabile**, ovvero quando **converge** il seguente integrale:

$$\int_0^{+\infty} |g(t)| dt < \infty \tag{99}$$

Analizzando il nostro sistema, la parte reale degli autovalori di A corrispondono a $(-8, -8, -3, -3)$, hanno tutti parte reale negativa, ne possiamo concludere che il nostro sistema è *asintoticamente stabile* $\Rightarrow$ *BIBO stabile.*

Ritornando alla risposta al segnale $1(-t)$, dopo esserci assicurati che il nostro sistema sia BIBO stabile, si seguiranno due step:

1. **Valutazione della riposta per** $t < 0$, se il sistema è stabile, per $t \to -\infty$ la sua uscita avrà raggiunto un valore di regime costante.

2. **Valutazione della risposta per** $t > 0$. A partire da $t = 0$ il sistema non è più soggetto a "forzature" esterne e la sua evoluzione dipenderà soltanto dalle condizioni iniziali .

La risposta del segnale per $t < 0$ sarà quindi la risposta a regime, calcolata come in precedenza:

$$y_{neg} = G(0) = \frac{5}{4352} \tag{100}$$

Per $t \geq 0$, il segnale di ingresso diventa improvvisamente nullo. Per garantire la continuità della risposta, le condizioni iniziali dell'uscita $y(t)$ e delle sue derivate devono essere uguali immediatamente prima e immediatamente dopo la commutazione del segnale di ingresso:

$$y(0^-) = y(0^+), \quad y'(0^-) = y'(0^+), \quad y''(0^-) = y''(0^+), \quad \dots \tag{101}$$

Dobbiamo quindi trovare quelle condizioni iniziali che ci permettono di rispettare la proprietà (101). Partendo dal nostro sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{102}$$

e definendo queste relazioni

$$\begin{aligned} y(0) &= Cx_0; \\ \dot{y}(t) &= C\dot{x}(t) + D\dot{u}(t) \\ &= C(Ax(t) + Bu(t)) + D\dot{u}(t) \end{aligned} \tag{103}$$

Ricaviamo:

$$\begin{aligned} y(0) &= Cx_0 \\ \dot{y}(0) &= CAx_0 \\ \ddot{y}(0) &= CA^2x_0 \end{aligned} \tag{104}$$

Queste condizioni iniziali sull'uscita possono essere espresse in forma matriciale, in termini dello stato iniziale x_0, definendo la **matrice di osservabilità**.

$$\begin{pmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \\ \ddot{y}(0) \\ \dddot{y}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{pmatrix} \cdot x_0 \tag{105}$$

$$\theta = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{15}{2} \\ -\frac{5}{2} & -5 & 0 & \frac{5}{2} \\ -5 & -\frac{15}{2} & 5 & \frac{15}{2} \\ -\frac{12265}{2} & \frac{23915}{2} & \frac{21545}{2} & \frac{28885}{2} \end{pmatrix}$$

Ricaviamoci dalla (105) lo stato iniziale x_0. Questo è possibile se e solo se la *matrice di osservabilità* è invertibile, cioè se ha determinante diverso da 0.

```
Det[MO]
```

$$\det(MO) = \frac{17578125}{8} \tag{106}$$

Seguendo la relazione (101), $y(0^-) = y(0^+)$, nel nostro caso $y(0^-) = G(0)$, dove $G(0)$ è costante, ricaviamo allora che:

$$\begin{pmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \\ \ddot{y}(0) \\ \vdots \\ y^{(n)}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G(0) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{107}$$

Possiamo adesso ricavarci x_0.

$$x_0 = \theta^{-1} \cdot \begin{pmatrix} G(0) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{108}$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} -\frac{19747}{122400000} \\ \frac{2339}{122400000} \\ \frac{1273}{24480000} \\ -\frac{5023}{40800000} \end{pmatrix}$$

Conoscendo lo stato iniziale possiamo calcolarci la risposta libera del sistema, attraverso la relazione $Y_l(s) = C(sI_n - A)^{-1}x_0$:

$$Y_l = \text{Apart}\left[\text{Simplify}\left[\left(\text{C1}.(s\text{IdentityMatrix}[4] - A)^{-1}.x_1\right)[[1]][[1]]\right]\right]$$

$$Y_l(s) = \frac{16-3s}{3400\left(s^2+6s+34\right)} + \frac{13}{6400(s+8)} + \frac{1}{160(s+8)^2} \tag{109}$$

Applicando l'antitrasformata di Laplace la riportiamo nel dominio del tempo:

$$y_l = \text{Expand}\left[\text{Simplify}\left[\text{ComplexExpand}\left[\mathcal{L}_s^{-1}[\text{yliberas}](t)\right]\right]\right]$$

$$y_l(t) = \frac{1}{160}e^{-8t}t + \frac{13e^{-8t}}{6400} + \frac{1}{680}e^{-3t}\sin(5t) - \frac{3e^{-3t}\cos(5t)}{3400} \tag{110}$$

Abbiamo adesso il comportamento del sistema per $t < 0$ e per $t \geq 0$, il grafico della risposta del sistema al segnale 1(-t) si ottiene "combinando" la risposta a regime per $t < 0$ e la risposta libera calcolata per $t \geq 0$.

$$y(t) = \begin{cases} y_{neg}(t) & t < 0 \\ y_l(t) & t \geq 0 \end{cases} \tag{111}$$

2.10.3 Grafico

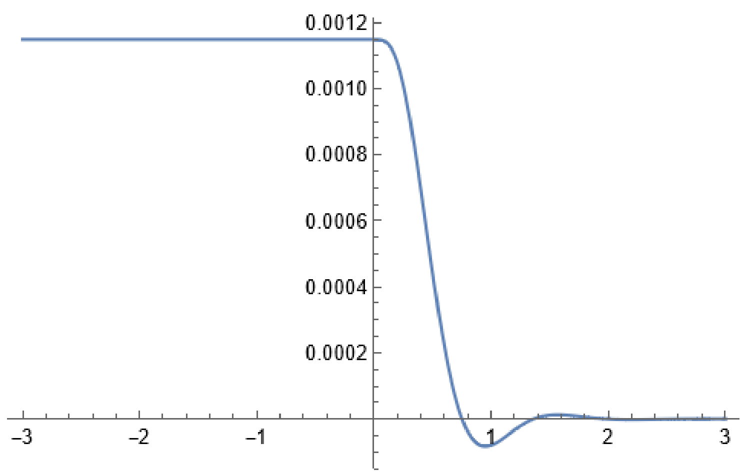


Figure 18: Risposta al segnale $1(-t)$

3 Tempo Discreto

3.1 Dati

$$\begin{cases} \dot{x}(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{28}{75} & -\frac{113}{150} & \frac{2}{5} \\ -\frac{19}{75} & \frac{37}{75} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{47}{75} & \frac{37}{150} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{9}{8} & -1 & \frac{7}{8} \end{pmatrix}$$

Dove:

- $x(k)$ è il vettore di stato al tempo discreto k.
- $u(k)$ è il vettore di ingresso al tempo discreto k.
- $y(k)$ è il vettore di uscita al tempo discreto k.
- A è la matrice di transizione di stato. Descrive come lo stato del sistema evolve da $x(k)$ a $x(k+1)$ in assenza di ingressi.
- B è la matrice di controllo. Descrive come il vettore $u(k)$ influisce sul sistema.
- C è la matrice di uscita. Descrive come lo stato $x(k)$ influenza l'uscita $y(k)$.

3.2 Modi naturali del sistema

Come descritto in precedenza nel paragrafo 2.2, i modi naturali in un sistema LTI-TD rappresentano le componenti evolutive del sistema nel tempo discreto, in assenza di ingressi esterni. Il metodo risolutivo per il calcolo dei modi naturali è analogo al caso del sistema LTI-TC, con l'unica differenza che i modi non saranno piu descritti da funzioni esponenziali, bensì da funzioni pseudo-trigonometriche o polinomiali-potenza. Procediamo con il calcolo degli autivalori di A:

$$\lambda = \text{Eigenvalues}[A]$$

$$\lambda = \left\{ \frac{2}{3}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5} \right\} \tag{112}$$

A differenza del caso continuo qui avremo che:

- $\frac{2}{3}$ ha molteplicità algebrica pari ad 1
- $-\frac{1}{5}$ ha molteplicità algebrica pari a 2

Gli autovalori non hanno parte complessa, ma siamo in presenza di autovalori multipli, è necessario calcolarsi la molteplicità geometrica, questo perché è necessario verificare che la matrice A sia diagonalizzabile.

$$\text{NullSpace}\left[A - \frac{2\text{IdentityMatrix}[3]}{3}\right]$$
$$\begin{pmatrix} -\frac{11}{7} & \frac{8}{7} & 1 \end{pmatrix}$$
$$\text{NullSpace}\left[A - -\frac{\text{IdentityMatrix}[3]}{5}\right]$$
$$\begin{pmatrix} -\frac{19}{31} & \frac{2}{31} & 1 \end{pmatrix}$$

La molteplicità geometrica legata all'autovalore:

- $\frac{2}{3}$ è pari a 1
- $-\frac{1}{5}$ è pari ad 1

la $m_a(\lambda) \neq m_g(\lambda)$. La **matrice A non è diagonalizzabile** neanche in questo caso. Utilizziamo la matrice di Jordan per estrapolarci i modi naturali del sistema.

$$T^{-1}AT = J \tag{113}$$

$$T, \Lambda = JordanDecomposition[A]$$

$$\begin{aligned} T &= \begin{pmatrix} -\frac{19}{31} & -\frac{1750}{961} & -\frac{11}{7} \\ \frac{2}{31} & -\frac{550}{961} & \frac{8}{7} \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Lambda &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{114}$$

Calcolando Λ^k troveremo i modi naturali del sistema:

$$\Lambda^k = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{5}\right)^k & -(-1)^k 5^{1-k} k & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{5}\right)^k & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{3}{2}\right)^{-k} \end{pmatrix} \tag{115}$$

I modi naturali saranno:

- $(-\frac{1}{5})^k$

- $-(-1)^k 5^{1-k} k$
- $(\frac{3}{2})^k$

3.2.1 Convergenza dei modi naturali

Possiamo studiare anche l'andamento dei modi naturali: $\rho = |\lambda_i|, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$ se:

1. $0 < \rho < 1$ i modi convergeranno a 0
2. $\rho > 1$ i modi tenderanno a $+\infty$.
3. $\rho = 1$ i modi oscilleranno con ampiezza costante

Ci troviamo nel primo caso, ci aspettiamo quindi che i modi oscillanti convergeranno verso lo 0.

3.2.2 Grafici

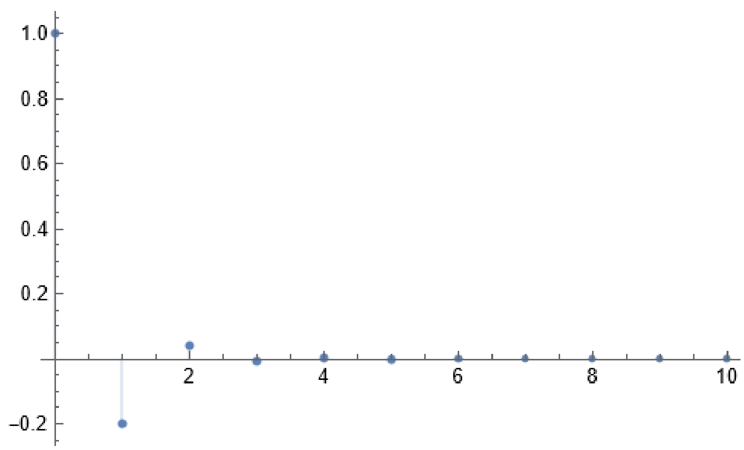


Figure 19: $(-\frac{1}{5})^k$

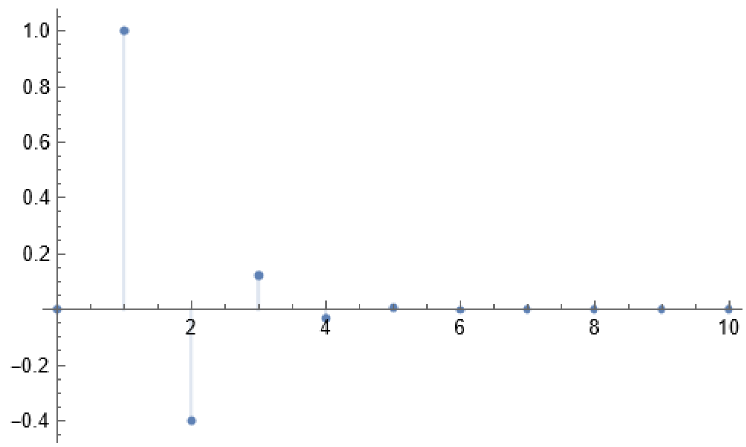


Figure 20: $-(-1)^k 5^{1-k} k$

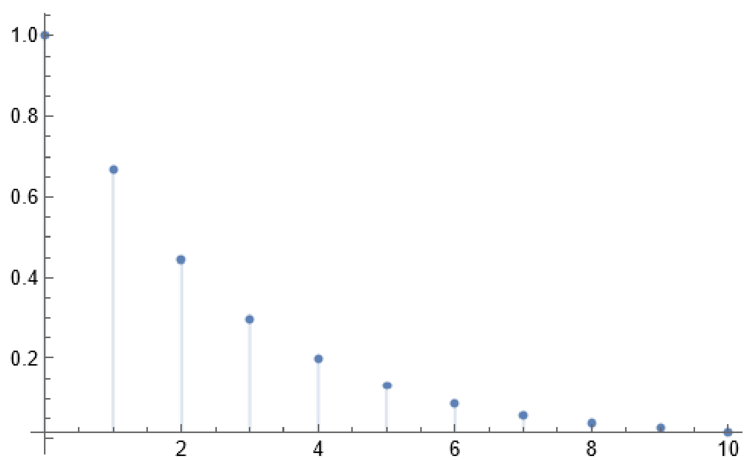


Figure 21: $(\frac{3}{2})^{-k}$

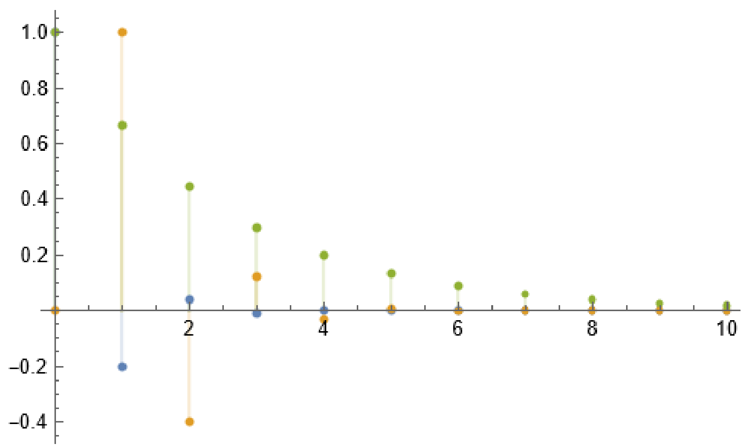


Figure 22: Modi Naturali

3.3 Risposta libera

La risposta libera di un sistema dinamico è la risposta del sistema in assenza di input esterni, determinata solo dalle condizioni iniziali. Nel caso del tempo discreto, la risposta libera si ottiene considerando l'evoluzione del sistema a partire da uno stato iniziale x_0 senza applicare "forzature" esterne. É possibile determinare la risposta libera a partire dall'elevazione a potenza k-esima della matrice A,*(la dimostrazione è riportata nel paragrafo 3.5,*(124)*)* :

$$y_l(k) = A^K \cdot x_0 \tag{116}$$

$$y_l(k) = \begin{pmatrix} \frac{1}{169}(-473)\left(\frac{2}{3}\right)^k + \frac{1}{169}642\ 5^{-k}e^{i\pi k} - \frac{19}{13}5^{-k}e^{i\pi k}k \\ \frac{1}{13}2\ 5^{-k}e^{i\pi k}k - \frac{6}{169}5^{-k}e^{i\pi k} + \frac{1}{169}43\ 2^{k+3}3^{-k} \\ \frac{301}{169}\left(\frac{2}{3}\right)^k - \frac{808}{169}5^{-k}e^{i\pi k} + \frac{1}{13}31\ 5^{-k}e^{i\pi k}k \end{pmatrix}$$

3.3.1 Grafico

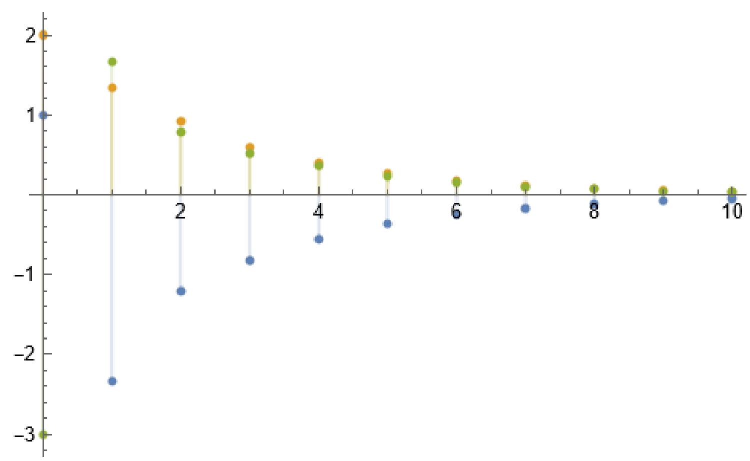


Figure 23: Risposta libera T.D

3.3.2 Risposta libera con la trasformata-Zeta

Analogamente alla trasformata di Laplace per i sistemi a tempo continuo, la **trasformata Z** permette di trasformare equazioni differenziali in equazioni algebriche, facilitando l'analisi dei sistemi. La trasformata Z di una sequenza a tempo discreto $f(k)$ è definita come:

$$\mathcal{Z}(f(k)) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k)z^{-k} \tag{117}$$

Nel nostro caso la relazione che permette di calcolarci la risposta libera z-trasformata è la seguente (ricavata da(124)):

$$y_l(z) = z(zI_n - A)^{-1} \cdot x_0 \tag{118}$$

$$y_l(z) = \begin{pmatrix} \frac{75z^3}{(3z-2)(5z+1)^2} - \frac{195z^2}{(3z-2)(5z+1)^2} - \frac{61z}{(3z-2)(5z+1)^2} \\ \frac{150z^3}{(3z-2)(5z+1)^2} + \frac{60z^2}{(3z-2)(5z+1)^2} + \frac{8z}{(3z-2)(5z+1)^2} \\ -\frac{225z^3}{(3z-2)(5z+1)^2} + \frac{185z^2}{(3z-2)(5z+1)^2} + \frac{77z}{(3z-2)(5z+1)^2} \end{pmatrix}$$

Antitrasformando otteniamo la risposta libera nel dominio della variabile k.

$$\text{Expand}\left[\mathcal{Z}_z^{-1}\left[y_{\text{lz}}(k)\right](k)\right]$$

$$y_l(k) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{169}473\left(\frac{2}{3}\right)^k + \frac{642}{169}\left(-\frac{1}{5}\right)^k - \frac{19}{13}\left(-\frac{1}{5}\right)^k k \\ \frac{1}{169}(-6)\left(-\frac{1}{5}\right)^k + \frac{2}{13}k\left(-\frac{1}{5}\right)^k + \frac{1}{169}43\ 2^{k+3}3^{-k} \\ \frac{301}{169}\left(\frac{2}{3}\right)^k - \frac{808}{169}\left(-\frac{1}{5}\right)^k + \frac{31}{13}\left(-\frac{1}{5}\right)^k k \end{pmatrix}$$

3.3.3 Grafico

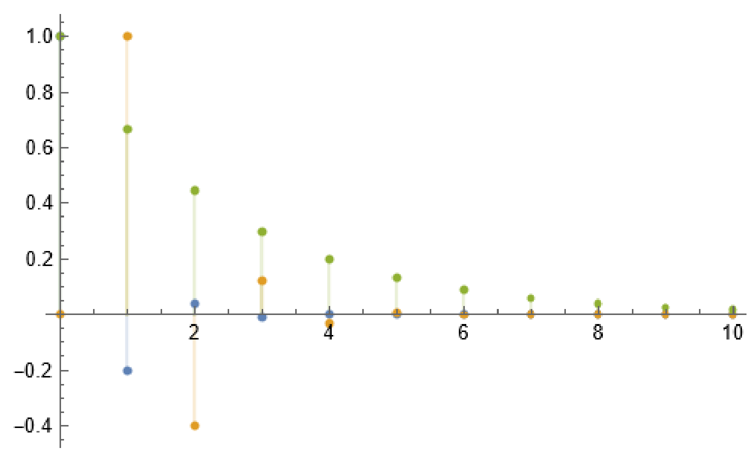


Figure 24: Risposta libera T.D

3.4 Configurazione degli stati iniziali

Come enunciato nel paragrafo 2.4, per evidenziare un modo naturale specifico nella risposta libera di un sistema, è necessario scegliere opportunamente lo stato iniziale. Questo stato iniziale deve essere legato agli autovettori del sistema associati ai modi che si desiderano osservare. Consideriamo la matrice trasposta dei vettori propri T associato alla matrice dinamica A, e la matrice Λ contenente gli autovalori del sistema. La colonna i-esima di Λ rappresenta un modo naturale particolare.

$$T = \begin{pmatrix} -\frac{19}{31} & -\frac{1750}{961} & -\frac{11}{7} \\ \frac{2}{31} & -\frac{550}{961} & \frac{8}{7} \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Per calcolare lo stato x_0 corrispondente al modo naturale $(-\frac{1}{5})^k$, prendiamo in considerazione la prima colonna di T:

$$x_{0'} = \alpha \begin{pmatrix} -\frac{19}{31} \\ \frac{2}{31} \\ 1 \end{pmatrix}^T$$

Considerando $\alpha = 5$,

$$x_{0'} = \begin{pmatrix} -\frac{95}{31} & \frac{10}{31} & 5 \end{pmatrix}$$

Utilizzando la relazione (124) otteniamo la risposta libera con stato iniziale $x_{0'}$.

$$x_{l'} = \begin{pmatrix} \frac{-19}{31} 5^{1-k} e^{i\pi k} \\ \frac{2}{31} 5^{1-k} e^{i\pi k} \\ 5^{1-k} e^{i\pi k} \end{pmatrix} \tag{119}$$

graficando:

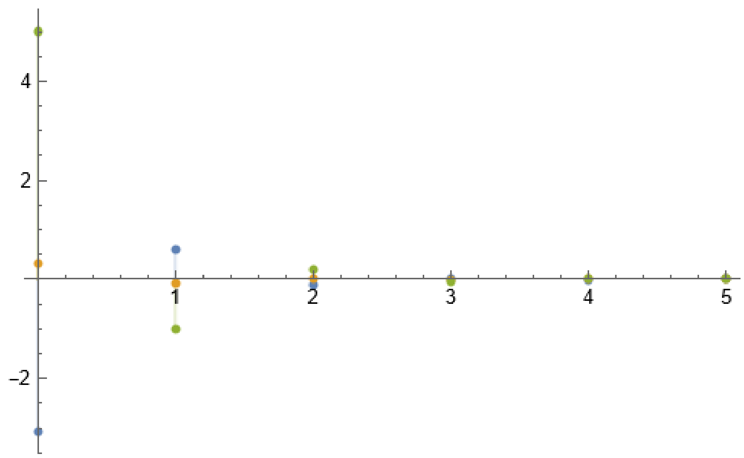


Figure 25: risposta libera "accendendo" il modo naturale $(-\frac{1}{5})^k$

possiamo anche evidenziare due modi naturali combinando linearmente la prima e la seconda colonna di T nel seguente modo:

$$x_{0''} = \alpha \begin{pmatrix} -\frac{19}{31} \\ \frac{2}{31} \\ 1 \end{pmatrix}^T + \beta \begin{pmatrix} -\frac{1750}{961} \\ -\frac{550}{961} \\ 0 \end{pmatrix}^T$$

con $\alpha = 5, \beta = 5$:

$$x_{0''} = \begin{pmatrix} -\frac{11695}{961} & -\frac{2440}{961} & 5 \end{pmatrix} \tag{120}$$

La risposta libera corrsipondera a:

$$x_{l''} = \begin{pmatrix} \frac{1}{961} 5^{1-k} e^{i\pi k} (2945k - 2339) \\ \frac{1}{961} (-2) 5^{1-k} e^{i\pi k} (155k + 244) \\ 5^{1-k} e^{i\pi k} (1 - 5k) \end{pmatrix}$$

graficando:

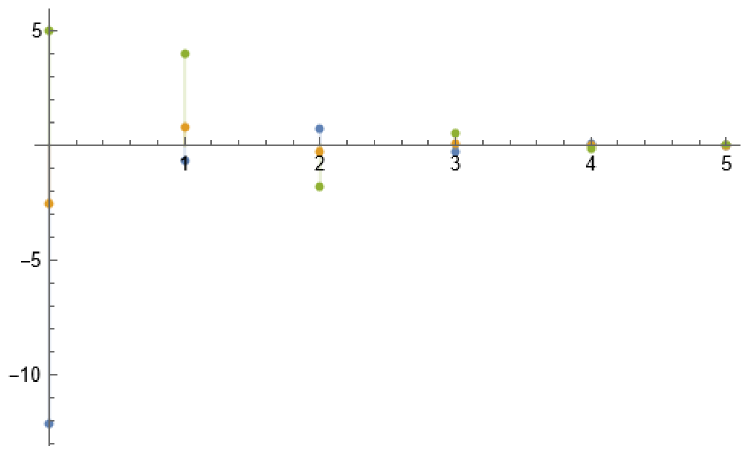


Figure 26: risposta libera sotto l'effetto di due modi naturali

3.5 Funzione di trasferimento

La funzione di trasferimento è quella funzione di variabile complessa z tale che moltiplicata algebricamente per la $\mathcal{Z}$-Trasformata dell'ingresso restituisce la $\mathcal{Z}$-trasformata della risposta forzata. La dimostrazione è molto simile a quella già analizzata nel paragrafo 2.5.1.
Partiamo dal nostro sistema:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \tag{121}$$

Portiamoci il sistema nel dominio della variabile z:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(x(k)) &= X(z) \\ \mathcal{Z}(u(k)) &= U(z) \\ \mathcal{Z}(y(k)) &= Y(z) \\ \mathcal{Z}(x(k+1)) &= zX(z) - zx(0) \end{aligned} \tag{122}$$

Per $\mathcal{Z}$-trasformare il termine $x(k+1)$ si è fatto uso del *teorema dell'anticipo elementare*

$$\begin{cases} zX(z) - zx(0) = AX(z) + BU(z) \\ Y(z) = CX(z) + DU(z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} zX(z) - AX(z) = zx(0) + BU(z) \\ Y(z) = CX(z) + DU(z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (zI_n - A)X(z) = zx(0) + BU(z) \\ Y(z) = CX(z) + DU(z) \end{cases}$$

$$\Rightarrow X(z) = (zI_n - A)^{-1} z \cdot x(0) + (zI_n - A)^{-1} BU(z) \tag{123}$$

Da qui la risposta libera sarà:

$$y_l(z) = (zI_n - A)^{-1} z \cdot x(0)$$

Ma $z(zI_n - A)^{-1} = \mathcal{Z}(A^k)$

$$\Rightarrow y_l(k) = A^k \cdot x_0 \tag{124}$$

La **funzione di trasferimento** sarà invece:

$$G(z) = C(zI_n - A)^{-1} B + D \tag{125}$$

$$G(z) = -\frac{75(8z+1)}{8(3z-2)(5z+1)^2} \tag{126}$$

3.5.1 Poli e Zeri

La funzione di trasferimento può essere interpretata nel seguente modo:

$$G(z) = \frac{k(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_m)}{(z-p_1)(z-p_2)\dots(z-p_m)} \tag{127}$$

Gli zeri saranno quei valori $z_i \in \mathbb{C}, \quad i = 1, 2, \dots, n$ tale che $G(z_i) = 0$, mentre i poli saranno quei valori $p_i \in \mathbb{C}, \quad i = 1, 2, \dots, n$ tale che $G(p_i) = \infty$.

Solve[Numerator[$G(z)$] = 0, z]

$$\left\{\left\{z \to -\frac{1}{8}\right\}\right\}$$

Solve[Denominator[$G(z)$] = 0, z]

$$\left\{\left\{z \to -\frac{1}{5}\right\}, \left\{z \to -\frac{1}{5}\right\}, \left\{z \to \frac{2}{3}\right\}\right\}$$

3.6 Risposta al gradino

Analizziamo la riposta del sistema al segnale:

$$\begin{aligned} u(k) &= 1(k) \\ 1(k) &= \begin{cases} 0, & \text{se } k < 0 \\ 1, & \text{se } k \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{128}$$

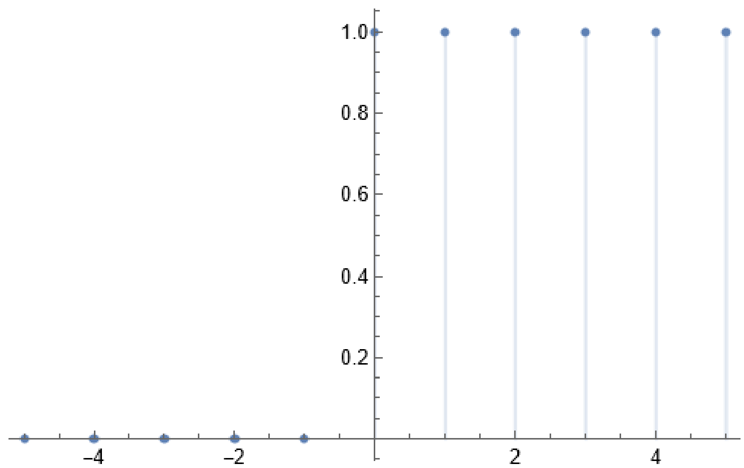


Figure 27: Gradino $1(k)$

La z-trasformata del gradino discreto equivale a:

$$\mathcal{Z}(1(k)) = \frac{z}{z-1} = U(z) \tag{129}$$

La risposta forzata è ottenuta dal prodotto tra la FdT e il segnale $U(z)$:

$$Y_f(z) = G(z) \cdot U(z) \tag{130}$$

$$Y_f(z) = -\frac{75z(8z+1)}{8(z-1)(3z-2)(5z+1)^2}$$

Antitrasformando otteniamo la risposta forzata:

$$\text{Expand}\left[\text{Simplify}\left[\text{ComplexExpand}\left[\mathcal{Z}_z^{-1}\left[Y_f(z)\right](t)\right]\right]\right]$$

$$\begin{aligned} y_f(k) =& \frac{1}{169}475\ 2^{k-3}3^{2-k} - \frac{3}{208}i5^{2-k}k\sin(\pi k) - \frac{177i5^{2-k}\sin(\pi k)}{5408} \\ &- \frac{1}{208}3\ 5^{2-k}k\cos(\pi k) - \frac{177\ 5^{2-k}\cos(\pi k)}{5408} - \frac{75}{32} \end{aligned} \tag{131}$$

Un altro modo per ottenere la risposta a regime è quello di studiare il comportamento della (131) per $k \to \infty$.

$$y_{freg}(k) = \lim_{k\to+\infty} y_f(k) = -\frac{75}{32} \tag{132}$$

Sapendo che la risposta forzata è data dalla combinazione lineare della riposta a regime e della risposta transitoria, per ottenere quest'ultima basta escludere la

(132) dalla (131):

$$y_{ftrans}(k) = \frac{1}{169}475\ 2^{k-3}3^{2-k} - \frac{3}{208}i5^{2-k}k\sin(\pi k) - \frac{177i5^{2-k}\sin(\pi k)}{5408} - \frac{1}{208}3\ 5^{2-k}k\cos(\pi k) - \frac{177\ 5^{2-k}\cos(\pi k)}{5408} \tag{133}$$

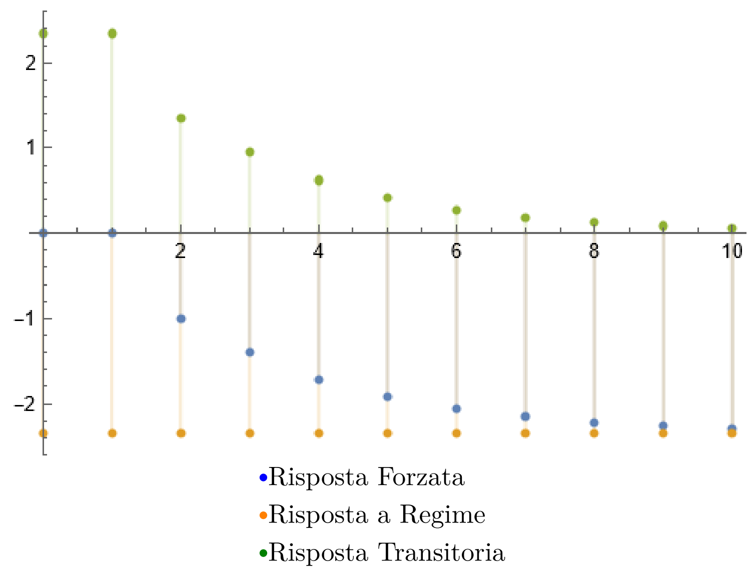


Figure 28: Risposta Forzata

3.7 Modelli ARMA equivalenti

Come già descritto nel paragrafo 2.8 definizione 3, il modello ARMA è una rappresentazione implicita ingresso-uscita, possiamo aggiungere inoltre che il modello ARMA combina due modelli principali: **un modello autoregressivo (AR)** e un **modello a media mobile (MA)**:

Definition 4 (Componenete Autoregressiva (AR)) *La componente autoregressiva utilizza i valori passati della serie temporale per prevedere i valori futuri.*

Definition 5 (Componente a Media Mobile) *La componente a media mobile utilizza gli errori passati (residui) delle previsioni per migliorare la previsione futura.*

Il modello ARMA può essere visto come un **filtro digitale**, ossia un sistema che manipola un segnale digitale per migliorare la qualità, rimuovere il rumore, o estrarre informazioni utili, in quanto tiene conto sia dei valori passati del segnale che dei valori passati dell'errore. Nel contesto del tempo discreto, i modelli ARMA possono essere suddivisi in due categorie principali:

1. **Modello ARMA ad anticipi**
   (a) Questi modelli considerano i valori futuri della serie temporale nella formulazione delle equazioni.
2. **Modello ARMA a ritardi**
   (a) Questi modelli utilizzano i valori passati della serie temporale per prevedere i valori futuri basandosi sul passato.

Partiamo sempre dalla nostra funzione di trasferimento:

$$G(z) = -\frac{75(8z+1)}{8(3z-2)(5z+1)^2}$$

$$G(z) = \frac{-600z-75}{600z^3-160z^2-136z-16} = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

$$600z^3Y(z) - 160z^2Y(z) - 136zY(z) - 16Y(z) = -600zU(z) - 75U(z) \quad (134)$$

Arrivati a questo punto per passare nel tempo discreto non useremo il *teorema della derivata*, ma il **teorema dell'anticipo elementare**.

Teorema 3.1 (Teorema dell'anticipo elementare) *Sia una successione $f(k)$ $\mathcal{Z}$-Trasformabile allora la sequenza $f(k+1)$ ha trasformata $\mathcal{Z}$ pari a:*

$$\mathcal{Z}[f(k+1)] = zF(z) - f(0)$$

generalizzando fino al passo n, la sequenza $f(k+n)$ ha trasformata $\mathcal{Z}$ pari a:

$$\mathcal{Z}[f(k+n)] = z^nF(z) \cdot z^nf(0) - z^{n-1}f(1) - \ldots - zf(n-1)$$

Grazie al teorema dell'anticipo elementare possiamo quindi scrivere:

$$-16y(k)-136y(k+1)-160y(k+2)+600y(k+3) = -75u(k)-600u(k+1) \quad (135)$$

Come anticipato è possibile anche avere il modello ARMA a ritardi. Possiamo ricavarcela a partire dalla (135).
Poniamo $k+3 = k'$, così facendo il termine $y(k') = y(k+3)$ rappresenterà il presente, mentre i termini $y(k+2) = y(k'-1)$, $y(k+1) = y(k'-2)$, $y(k) = y(k'-3)$ rappresenteranno il passato. Il modello ARMA a ritardi sarà così definito:

$$\begin{aligned} &-16y\left(k'-3\right) - 136y\left(k'-2\right) - 160y\left(k'-1\right) + 600y\left(k'\right) = \\ = &-75u\left(k'-3\right) - 600u\left(k'-2\right) \end{aligned}$$

Il primo termine rappresenta la componente di auto-regressione mentre il secondo rappresenta la media mobile

3.7.1 Condizioni iniziali

Ci viene assegnato lo stato x_0, consideriamo il modello ARMA ad anticipi:

$$x_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Le condizioni iniziali sono calcolabili seguendo le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} y(k) &= Cx_0 \\ y(k+1) &= CAx_0 \\ y(k+2) &= CA^2x_0 \end{aligned}$$

Otteniamo:

$$\begin{aligned} y(k) &= \frac{19}{8} \\ y(k+1) &= \frac{19}{8} \\ y(k+2) &= \frac{133}{100} \end{aligned} \tag{136}$$

Applichiamo la $\mathcal{Z}$-Trasformata alla (135):

$$\begin{aligned} &8z(y(0)\left(75z^2 - 20z - 17\right) + 5y(1)(15z-4) + 75y(2)) = \\ &= 75(8z+1)U(z) + 8(3z-2)(5z+1)^2Y(z) \end{aligned}$$

Esplicitiamo la $Y(z)$:

$$\begin{aligned} Y(z) = &\frac{(-600z-75)U(z)}{8(3z-2)(5z+1)^2} + \frac{600y(0)z^3 - 160y(0)z^2 + 600y(1)z^2}{8(3z-2)(5z+1)^2} \\ &+ \frac{-136y(0)z - 160y(1)z + 600y(2)z}{8(3z-2)(5z+1)^2} \end{aligned}$$

La prima componente rappresenta la risposta forzata del sistema mentre la seconda la risposta libera.
Sostituiamo i valori (136):

$$Y(z) = \frac{(-600z-75)U(z)}{8(3z-2)(5z+1)^2} + \frac{1425z^3 + 1045z^2 + 95z}{8(3z-2)(5z+1)^2} \tag{137}$$

Voglio valutare la risposta all'ingresso:

$$u(k) = \begin{cases} 1 & 0 \le k \le 10 \\ 0 & k > 10 \\ 0 & k < 10 \end{cases} \tag{138}$$

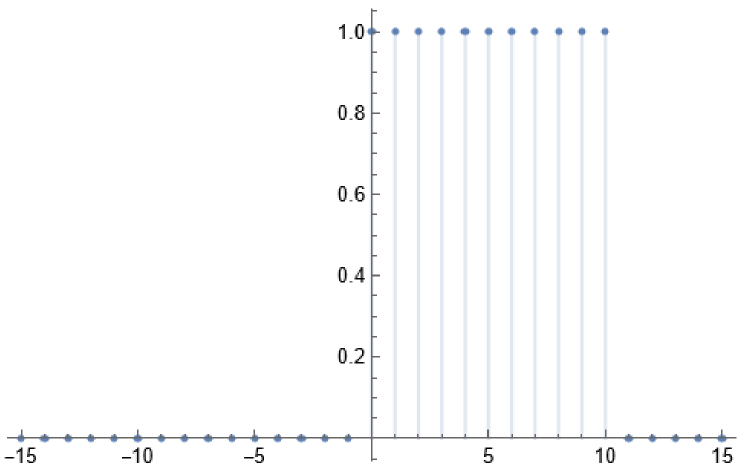


Figure 29: $u(k)$

$\mathcal{Z}$-Trasformando il segnale $u(t)$ otteniamo:

$$U(Z) = \frac{z^{10} + z^9 + z^8 + z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1}{z^{10}}$$

e sostituendola alla (137) otteniamo:

$$Y(z) = \frac{1425z^3 + 1045z^2 - \frac{75(8z+1)(z^{10}+z^9+z^8+z^7+z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1)}{z^{10}} + 95z}{8(3z-2)(5z+1)^2} \tag{139}$$

Riportiamo nel dominio del tempo:

$$\begin{aligned}
&- \frac{3^{-k}\left(1.63 \cdot 10^{13} \cdot 3^{k+1} k \left(-\frac{1}{5}\right)^k\right)}{2.77 \cdot 10^6} \\
&- \frac{3^{-k}\left(7.40 \cdot 10^8 \cdot 2^k - 4.26 \cdot 10^{14} \left(-\frac{3}{5}\right)^k\right)(1(10-k))}{2.77 \cdot 10^6} \\
&+ \frac{19}{8}(1(k-2)) + \frac{33}{100} \cdot 1(2-k) \cdot 1(k-2) - \frac{6.53 \cdot 10^2 \cdot 1(3-k) \cdot 1(k-3)}{1.50 \cdot 10^3} \\
&- \frac{4.96 \cdot 10^4 \cdot 1(4-k) \cdot 1(k-4)}{4.50 \cdot 10^4} - \frac{9.06 \cdot 10^5 \cdot 1(6-k) \cdot 1(k-6)}{5.06 \cdot 10^5} \\
&- \frac{1.02 \cdot 10^6 \cdot 1(5-k) \cdot 1(k-5)}{6.75 \cdot 10^5} - \frac{3.75 \cdot 10^7 \cdot 1(7-k) \cdot 1(k-7)}{1.90 \cdot 10^7} \\
&- \frac{4.78 \cdot 10^9 \cdot 1(8-k) \cdot 1(k-8)}{2.28 \cdot 10^9} - \frac{7.45 \cdot 10^{10} \cdot 1(9-k) \cdot 1(k-9)}{3.42 \cdot 10^{10}} \\
&- \frac{5.73 \cdot 10^{11} \cdot 1(10-k) \cdot 1(k-10)}{2.56 \cdot 10^{11}}
\end{aligned}$$

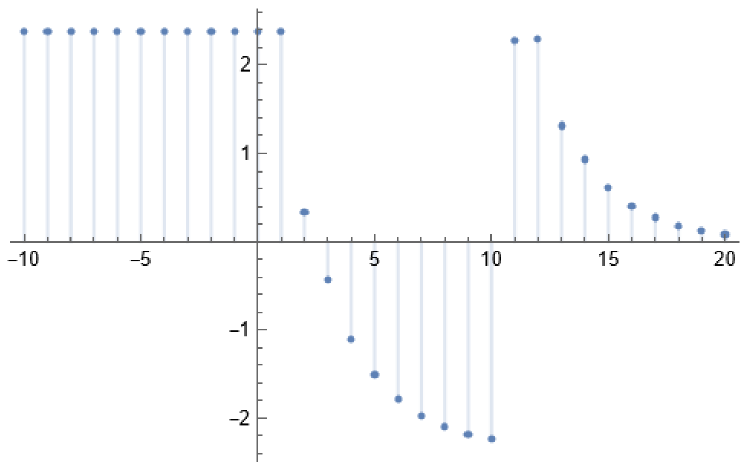


Figure 30: Risposta al segnale $u(k)$

3.8 Stato iniziale x_0 tale che la risposta al gradino unitario coincida con il suo valore di regime

Come indicato nel paragrafo 2.9, per eliminare la componente transitoria e garantire che la risposta al gradino coincida immediatamente con il valore di regime, è essenziale impostare le condizioni iniziali in modo tale da annullare le risposte transitorie.
L'idea principale è derivare la risposta libera, forzata, transitoria e a regime utilizzando il modello ARMA, e quindi determinare lo stato generico x_0 in modo da ottenere le condizioni iniziali che permettono di annullare la componente transitoria.

$$x_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Consideriamo il modello ARMA ad anticipi:

$$-16y(k) - 136y(k+1) - 160y(k+2) + 600y(k+3) = -75u(k) - 600u(k+1)$$

$\mathcal{Z}$-Trasformiamo:

$$\begin{aligned} &8z(y(0)\left(75z^2 - 20z - 17\right) + 5y(1)(15z-4) + 75y(2)) \\ &= 75(8z+1)U(z) + 8(3z-2)(5z+1)^2 Y(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(z) = &\frac{(-600z-75)U(z)}{8(3z-2)(5z+1)^2} + \\ &\frac{600y(0)z^3 - 160y(0)z^2 + 600y(1)z^2 - 136y(0)z - 160y(1)z + 600y(2)z}{8(3z-2)(5z+1)^2} \end{aligned} \tag{140}$$

E ricaviamoci le condizioni iniziali:

$$
\begin{aligned}
y(k) = Cx_0 &= \frac{9x_1}{8} - x_2 + \frac{7x_3}{8} \\
y(k+1) = CAx_0 &= \frac{x_1}{8} + \frac{x_3}{8} - \frac{9x_2}{8} \\
y(k+2) = CA^2x_0 &= \frac{19x_1}{75} + \frac{x_3}{5} - \frac{371x_2}{600}
\end{aligned}
$$

E sostituiamo nella (140):

$$
\frac{(-600z-75)U(z)}{8(3z-2)(5z+1)^2} + \frac{600\left(\frac{9x_1}{8} - x_2 + \frac{7x_3}{8}\right)z^3}{8(3z-2)(5z+1)^2} +
$$

$$
\frac{\left(600\left(\frac{x_1}{8} + \frac{x_3}{8} - \frac{9x_2}{8}\right) - 160\left(\frac{9x_1}{8} - x_2 + \frac{7x_3}{8}\right)\right)z^2}{8(3z-2)(5z+1)^2} +
$$

$$
\frac{\left(600\left(\frac{19x_1}{75} + \frac{x_3}{5} - \frac{371x_2}{600}\right) - 160\left(\frac{x_1}{8} + \frac{x_3}{8} - \frac{9x_2}{8}\right) - 136\left(\frac{9x_1}{8} - x_2 + \frac{7x_3}{8}\right)\right)z}{8(3z-2)(5z+1)^2}
$$

Da qui è possibile ricavarsi la risposta forzata, ossia la componente che dipende dal segnale $U(z)$ che nel nostro caso sarà il gradino. Sostituendo $U(z) = -\frac{z}{z-1}$ e anti-trasformando otteniamo la risposta forzata:

$$
Y_f(k) = -\frac{1}{208} 3(-1)^k 5^{2-k} k + \frac{1}{169} 475\ 2^{k-3} 3^{2-k} - \frac{177(-1)^k 5^{2-k}}{5408} - \frac{75}{32}
$$

La risposta a regime sarà la componente che non dipende dai modi naturali:

$$
Y_{reg}(k) = -\frac{75}{32}
$$

Di conseguenza la risposta transitoria sarà *forzata - regime*:

$$
Y_{trans}(k) = -\frac{1}{208} 3(-1)^k 5^{2-k} k + \frac{1}{169} 475\ 2^{k-3} 3^{2-k} - \frac{177(-1)^k 5^{2-k}}{5408}
$$

Non ci rimane altro che isolare la risposta libera:

$$
Y_l(z) = \frac{\begin{aligned} &600\left(\frac{9x_{11}}{8} - x_{22} + \frac{7x_{33}}{8}\right)z^3 + 600\left(\frac{x_{11}}{8} + \frac{x_{33}}{8} - \frac{9x_{22}}{8}\right)z^2 \\ &- 160\left(\frac{9x_{11}}{8} - x_{22} + \frac{7x_{33}}{8}\right)z^2 + 600\left(\frac{19x_{11}}{75} + \frac{x_{33}}{5} - \frac{371x_{22}}{600}\right)z \\ &- 160\left(\frac{x_{11}}{8} + \frac{x_{33}}{8} - \frac{9x_{22}}{8}\right)z - 136\left(\frac{9x_{11}}{8} - x_{22} + \frac{7x_{33}}{8}\right)z \end{aligned}}{8(3z-2)(5z+1)^2}
$$

Una volta isolatoci tutte le componenti possiamo ritornare nel dominio z:

$$Y_{trans}(z) = \frac{75z\left(75z^2+55z+6\right)}{32(3z-2)(5z+1)^2}$$
$$Y_{reg}(z) = -\frac{75z}{32(z-1)}$$

Basterà trovare quello stato x_0 tale che $Y_l(z)x_0 + T_{trans}(z) = 0$:

$$Y_l(z)\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} + Y_{trans}(z) = 0$$

x_0 risulterà essere:

$$x_0 = \begin{pmatrix}x_1 \to -\frac{25}{24}\\ x_2 \to \frac{25}{12}\\ x_3 \to \frac{25}{24}\end{pmatrix}$$

A questo punto, avendo calcolato tutti i parametri necessari, procediamo con una verifica per confermare la correttezza dei risultati ottenuti.
Le condizioni iniziali saranno:

$$y(k) = Cx_0 = -\frac{75}{32}$$
$$y(k+1) = CAx_0 = -\frac{75}{32}$$
$$y(k+2) = CA^2x_0 = -\frac{43}{32}$$

E otteniamo la risposta a partire dai nuovi dati ottenuti:

$$\text{Y(k\_):=Expand}\left[\mathcal{Z}_z^{-1}\left[\text{Ydif2(z\_)/.}\left\{U(z)\to\frac{z}{z-1},\, y(0)\to\text{y(k)},\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. y(1)\to\text{y(k+1)},\, y(2)\to\text{y(k+2)}\right\}\right](k)\right]$$

$$Y(k) = -\frac{75}{32}$$

Il che significa che la risposta al gradino equivale alla retta di equazione $y = -\frac{75}{32}$, compatibile con il risultato ottenuto nel paragrafo 3.6.

4 Catena di Markov

4.1 Dati

$$x(k+1) = Ax(k)$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{7} & \frac{6}{13} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{21} & \frac{5}{13} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{2}{13} \end{pmatrix}$$

4.2 Grafo di transizione della catena

Definition 6 (Catena di Markov e modelli di Transizione) *Una catena di Markov è un modello matematico che descrive un sistema che transita da uno stato all'altro in modo probabilistico. La proprietà principale della catena di Markov è che lo stato successivo $x(k+1)$ dipende dallo stato attuale $x(k)$ e non dalla sequenza di eventi che lo hanno preceduto:*

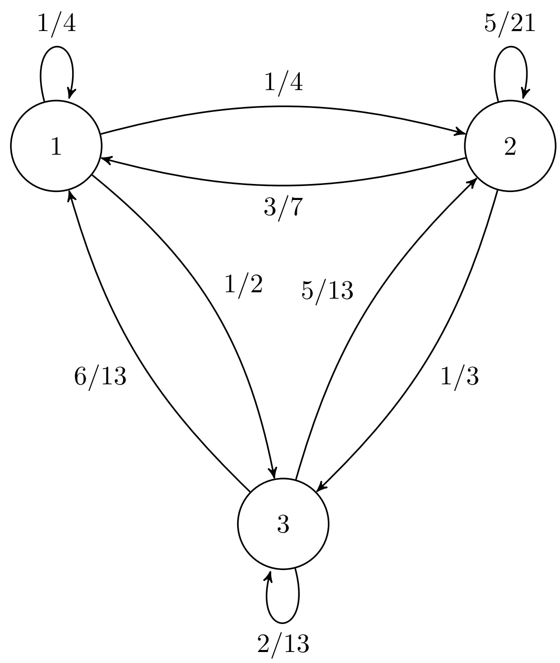
$$x(k+1) = Ax(k)$$

*A rappresenta la **matrice di transizione**, ossia una matrice **stocastica** che descrive le probabilità tra stati in una catena di Markov. La somma degli elementi di ogni colonna di A è pari a 1, seguendo la definizione di probabilità dove la somma della probabilità di tutti gli eventi deve essere uguale proprio ad 1.*
*I **modelli di transizione** tra stati permettono di rappresentare attraverso dei grafi fenomeni in cui lo stato e il cambiamento di stato sono di natura probabilistica, ad esempio, come nel caso del modello del tempo atmosferico. Come anticipato, questi modelli vengono rappresentati come **grafi orientati** dove gli stati saranno i nodi e gli archi pesati le probabilità.*

Per comodità rappresento la matrice A in forma tabulare definendo gli stati $1, 2, 3$:

	1	2	3
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{6}{13}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{5}{13}$
3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{13}$

Costruisco il grafo in base alle informazioni che ottengo dalla matrice A:



4.3 Stato stazionario della catena

Determinare lo stato stazionario della catena di Markov ci permette di comprendere il comportamento del sistema per $t \to \infty$. Per ricavarci quest'ultima possiamo applicare un processo iterativo che simula il sistema per ogni passo k, che consiste nel trovarsi randomicamente un vettore stocastico x_0, moltiplicandolo per ogni passo per la matrice A. Possiamo riportare questo ragionamento in un semplice codice python:

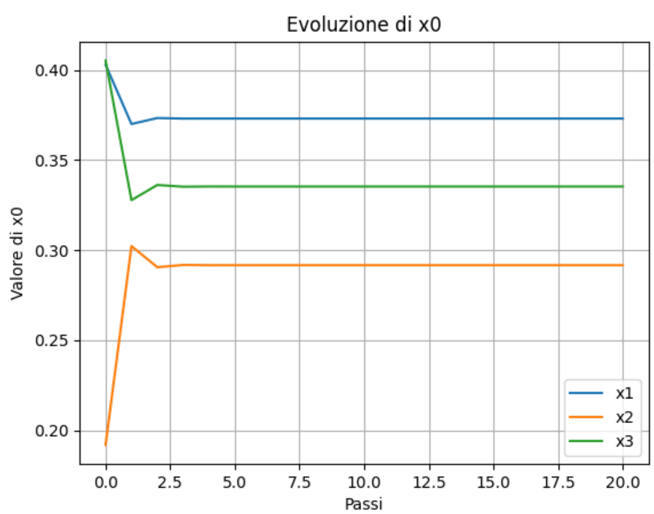
```python
# Libreria numpy per gestire le operazioni con vettori e matrici
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

a = 1/4
b = 1/4
c = 1/2
d = 3/7
e = 5/21
f = 1/3
g = 6/13
h = 5/13
i = 2/13

# Inizializziamo la matrice A
A = np.array([[a, d, g],\
              [b, e, h],\
              [c, f, i]])

# Creazione dello stato iniziale random
x0 = np.random.rand(3, 1)

# Normalizzazione del vettore x0
x0 = x0 / np.sum(x0)

# Numero di passi per garantire la convergenza
npassi = 20

# Lista per memorizzare l'evoluzione di x0, trasformo l'array
#  bidimensionale in unidimensionale.
x0_history = [x0.flatten()]

# Calcolo dello stato
for _ in range(npassi):
    x0 = A @ x0
    #Inserisco nella lista x0_history lo storico di x0
    x0_history.append(x0.flatten())

# Converto la lista in un array numpy
x0_history = np.array(x0_history)

# Plot dell'evoluzione di x0
plt.figure()
```

```
#Itero da 0 fino al numero di colonne di x0_history
for i in range(x0_history.shape[1]):
    plt.plot(x0_history[:, i], label=f'x{i+1}')  #Estraggo la i-esima colonna
plt.xlabel('Passi')
plt.ylabel('Valore di x0')
plt.title('Evoluzione di x0')
plt.legend()
plt.grid(True)
print("Stato x0 dopo 20 passi: ", x0)
plt.show()
```

L'output ottenuto dopo 20 passi è il vettore:

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0.37301587 \\ 0.29166667 \\ 0.33531746 \end{pmatrix} \tag{141}$$

graficando il comportamento di x_0:



notiamo che lo stato x_0 diventa stazionario dopo all'incirca 2 passi.

4.4 Calcolo in forma chiusa dell'equilibrio stocastico della catena

Per calcolare in forma chiusa l'equilibrio stocastico della catena, è necessario analizzare, come nel caso precedente, il comportamento sul lungo periodo del sistema. Questo si può calcolando trovando un vettore π tale che:

$$\pi A = \pi \tag{142}$$

Inoltre, il vettore π deve essere **stocastico**:

$$\sum_i \pi_i = 1$$

Per trovare π, partendo dalla relazione (142), sarà necessario risolvere il sistema lineare:

$$\pi(I - A) = 0_{3\times 1} \tag{143}$$

Prima di procedere con la risoluzione del sistema, bisogna fare una verifica preliminare: $(A - I)$ deve essere **singolare**:

Definition 7 (Singolarità) *Una matrice è detta singolare se non ha inversa, cioè se il suo determinante è uguale a zero. Questo implica che il rango della matrice è inferiore al numero delle sue righe e colonne.*

Fatte queste premesse, dobbiamo verificare che il rango di A sia pari a $n-1$, questo assicura che esistano vettori non nulli che soddisfano la condizione $\pi(A - I) = 0_{3\times 1}$, ovvero che esista un'unica soluzione per il sistema (143).

$$\operatorname{rank}(I - A) = 2 \tag{144}$$

Possiamo confermare che esiste un'unica soluzione. Procediamo nella risoluzione del sistema lineare:

$$(I - A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{7} & \frac{6}{13} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{21} & \frac{5}{13} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{2}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{3}{7} & -\frac{6}{13} \\ -\frac{1}{4} & \frac{16}{21} & -\frac{5}{13} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{11}{13} \end{pmatrix}$$

Ponendo $(I - A) = 0$ otteniamo:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{3}{7} & -\frac{6}{13} \\ -\frac{1}{4} & \frac{16}{21} & -\frac{5}{13} \\ \cancel{-\frac{1}{2}} & \cancel{-\frac{1}{3}} & \cancel{\frac{11}{13}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cancel{0} \end{pmatrix}$$

Poiché la terza riga della matrice $(I - A)$ è ottenibile attraverso combinazione lineare delle prime due, allora possiamo "ignorarla" nella risoluzione del sistema lineare. Ricordiamo inoltre che il vettore x_0 deve essere stocastico, dobbiamo quindi imporre la condizione: $x + y + z = 1$

$$\begin{cases} \frac{3}{4}x - \frac{3}{7}y - \frac{6}{13}z = 0 \\ -\frac{1}{4}x + \frac{16}{21}y - \frac{5}{13}z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

le soluzioni saranno $x = \frac{47}{126}; \quad y = \frac{7}{24}; \quad z = \frac{169}{504}$. Lo stato x_0 sarà:

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0.37301587 \\ 0.29166667 \\ 0.33531746 \end{pmatrix}$$

4.5 Spanning Tree

Definition 8 (Spanning tree) *É definito **spanning tree** o albero di copertura di un grafo* **G** *quel sottografo di* **G** *che include tutti i vertici di* **G** *ed è un albero. Uno spanning tree è quindi un grafo che collega tutti i nodi del grafo originale senza formare cicli, utilizzando il minor numero possibile di archi. Se il grafo originale ha n vertici, l'albero ricoprente avrà $n - 1$ archi*

Un possibile spanning tree per il nostro grafo **G** è il seguente: