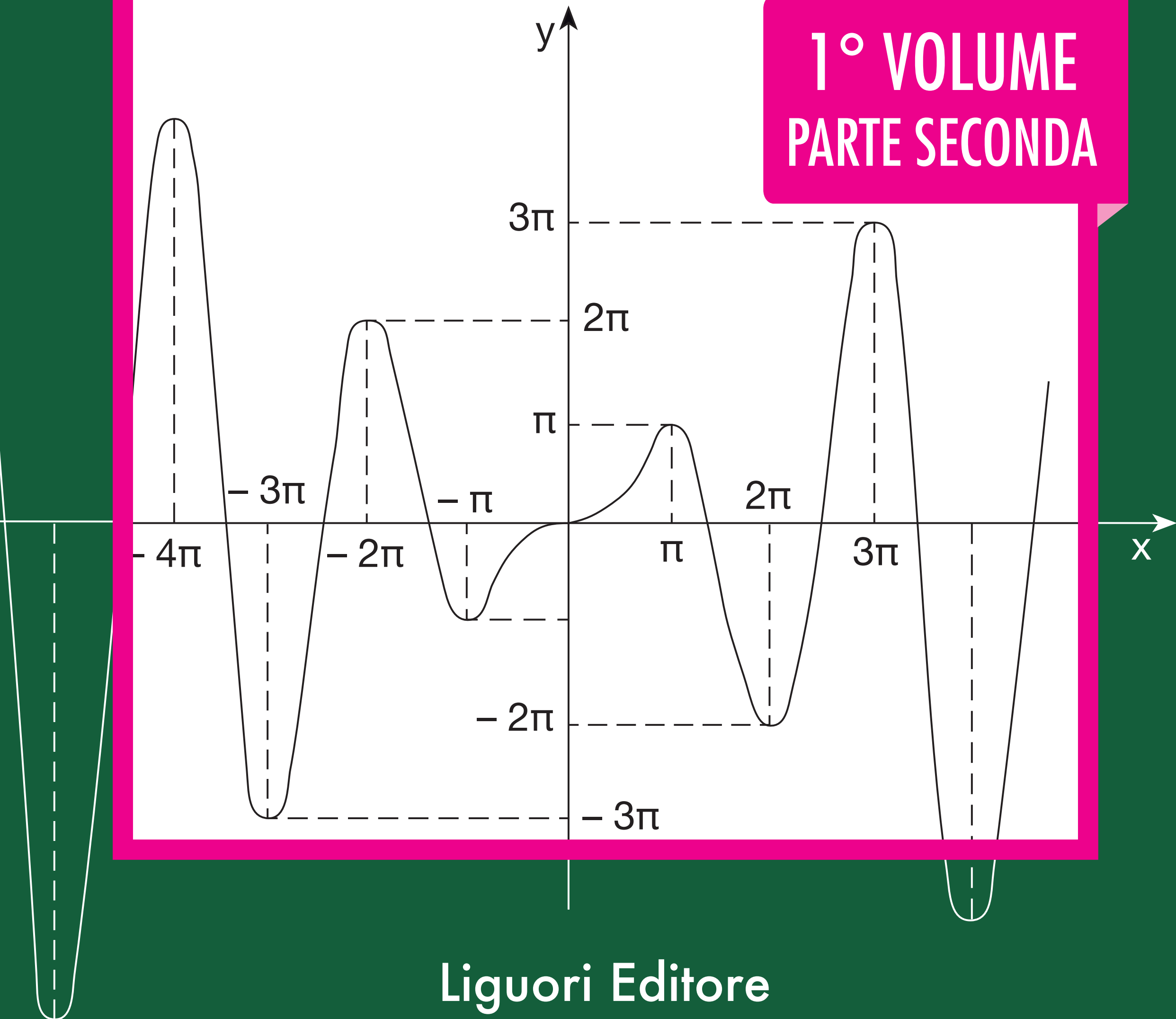
Paolo Marcellini - Carlo Sbordone

Esercitazioni di Matematica

1° VOLUME
PARTE SECONDA



Liguori Editore

Paolo Marcellini   *Carlo Sbordone*

Esercitazioni di Matematica

1° Volume
Parte seconda

nuova edizione

Liguori Editore

Liguori Editore
Via Posillipo 394 - I 80123 Napoli NA
http://www.liguori.it/

Prima edizione italiana novembre 2014

Marcellini, Paolo :
Esercitazioni di Matematica – 1º Volume – Parte seconda/Paolo Marcellini, Carlo Sbordone
Napoli : Liguori, 2014

ISBN 978 - 88 - 207 - 5252 - 1 (a stampa)
eISBN 978 - 88 - 207 - 5253 - 8 (eBook)

1. Applicazioni di calcolo differenziale 2. Integrali I. Titolo II. Collana III. Serie

Aggiornamenti:

24 23 22 21 20 19 18 17 16 15 14 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

Indice

Capitolo 1

APPLICAZIONI DEL CALCOLO DIFFERENZIALE

1A. Funzioni crescenti e decrescenti

Una funzione $f(x)$ è *monotòna* in un intervallo I se, per ogni x_1, $x_2 \in I$, risulta verificata una delle relazioni seguenti:

$$
\begin{array}{lll}
f(x) \quad \textit{strettamente crescente}: & x_1 < x_2 \quad \Rightarrow & f(x_1) < f(x_2) \\
f(x) \quad \textit{crescente}: & x_1 < x_2 \quad \Rightarrow & f(x_1) \leq f(x_2) \\
f(x) \quad \textit{strettamente decrescente}: & x_1 < x_2 \quad \Rightarrow & f(x_1) > f(x_2) \\
f(x) \quad \textit{decrescente}: & x_1 < x_2 \quad \Rightarrow & f(x_1) \geq f(x_2).
\end{array}
$$

Si dice che $f(x)$ è *strettamente monotòna* in I, se essa è strettamente crescente, oppure se è strettamente decrescente in I.

Il seguente criterio, basato sul segno della derivata prima, è molto utile per stabilire se una data funzione è monotòna in un intervallo: *Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a,\, b]$ e derivabile in $(a,\, b)$. Allora,*

$$
\begin{array}{lll}
\text{se } f'(x) \geq 0, \quad \forall\, x \in (a, b) & \Rightarrow & f \text{ è crescente in } [a, b]; \\
\text{se } f'(x) > 0, \quad \forall\, x \in (a, b) & \Rightarrow & f \text{ è strettamente crescente in } [a, b]; \\
\text{se } f'(x) \leq 0, \quad \forall\, x \in (a, b) & \Rightarrow & f \text{ è decrescente in } [a, b]; \\
\text{se } f'(x) < 0, \quad \forall\, x \in (a, b) & \Rightarrow & f \text{ è strettamente decrescente in } [a, b].
\end{array}
$$

1.1 Verificare che la funzione $f(x) = x(x^2+1)$, è strettamente crescente su $\mathbb{R}$.

[La derivata $f'(x) = 3x^2 + 1$ è positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi $f(x)$ è strettamente crescente su tutto l'asse reale]

1.2 Verificare che la funzione $f(x) = x^4$, è strettamente crescente per $x \geq 0$, ed è strettamente decrescente per $x \leq 0$.

[La derivata $f'(x) = 4x^3$ è positiva per $x > 0$ ed è negativa per $x < 0$]

1.3 Verificare che, per $n = 1, 2, 3, \ldots$, la funzione $f(x) = x^n$, è strettamente crescente su $\mathbb{R}$ se n è dispari, mentre è strettamente crescente solo per $x \geq 0$ se n è pari.

[Se n è dispari allora $n-1$ è pari; in questo caso la derivata $f'(x) = nx^{n-1}$ è positiva per ogni $x \neq 0$ (se $n \neq 1$). Se invece n è pari, allora $n-1$ è dispari e quindi $f'(x) \gtrless 0$ se $x \gtrless 0$]

1.4 Si consideri la funzione $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$. Verificare che:

(a) Se $a > 0$ allora $f(x)$ è crescente (strettamente) per $x > -b/(2a)$.

(b) Se $a < 0$ allora $f(x)$ è crescente (strettamente) per $x < -b/(2a)$.

(c) Interpretare geometricamente i risultati di (a), (b) considerando la parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$.

[Se $a \gtrless 0$, la derivata $f'(x) = 2ax + b$ è positiva per $x \gtrless -b/(2a)$]

1.5 Determinare gli intervalli in cui le seguenti funzioni risultano crescenti o decrescenti:

(a) $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ (b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x}$

[(a) Crescente per $x \geq 1$, decrescente in $(0, 1]$; (b) crescente nell'intervallo $[1, 2]$, decrescente per $x \geq 2$]

1.6 Determinare gli intervalli in cui le seguenti funzioni risultano crescenti o decrescenti:

(a) $f(x) = x^3(x-2)$ (b) $f(x) = (x^2 + 2x + 3)^7$

[(a) La derivata $f'(x) = 2x^2(2x-3)$ si annulla per $x = 0$ e $x = 3/2$, ed è positiva per $x > 3/2$. La funzione $f(x)$, essendo strettamente decrescente in $(-\infty, 0]$ e $[0, 3/2]$, è quindi strettamente decrescente nell'intervallo $(-\infty, 3/2]$, ed è strettamente crescente in $[3/2, +\infty)$; (b) risulta $f'(x) = 14(x^2 + 2x + 3)^6(x+1)$. La derivata è positiva per $x > -1$ (infatti il trinomio x^2+2x+3 non si annulla). La funzione $f(x)$ è quindi (strettamente) crescente per $x \geq -1$, ed è decrescente altrimenti]

1.7 Determinare gli intervalli di monotonia delle funzioni

$$\text{(a) } f(x)=\frac{x}{1-x^2} \qquad\qquad \text{(b) } f(x)=\frac{2+x}{4+x^2}$$

[(a) Risulta $f'(x)=(1+x^2)/(1-x^2)^2$. La derivata, quando esiste, è positiva. Perciò $f(x)$ è crescente negli intervalli $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$; $(1,+\infty)$; (b) la funzione $f(x)$ è crescente per $2-\sqrt{8} \leq x \leq 2+\sqrt{8}$, ed è decrescente altrimenti]

1.8 Determinare gli intervalli di monotonia delle funzioni

$$\text{(a) } f(x)=e^{x^2} \qquad\qquad \text{(b) } f(x)=e^{-x^2}$$

$$\text{(c) } f(x)=e^{x}/x \qquad\qquad \text{(d) } f(x)=xe^{-x}$$

[(a) $f(x)$ è decrescente in $(-\infty,0]$, crescente in $[0,+\infty)$;
(b) $f(x)$ è crescente in $(-\infty,0]$, decrescente in $[0,+\infty)$;
(c) $f(x)$ è decrescente in $(-\infty,0)$ e $(0,1]$, crescente in $[1,+\infty)$;
(d) $f(x)$ è crescente in $(-\infty,1])$, decrescente in $[1,+\infty)$]

1.9 Determinare gli intervalli di monotonia delle funzioni

$$\text{(a) } f(x)=\log x - x \qquad\qquad \text{(b) } f(x)=(\log x)/x$$

[(a) La funzione $f(x)$ è crescente in $(0,1]$, decrescente in $[1,+\infty)$; (b) la funzione $f(x)$ è crescente in $(0,e]$, decrescente in $[e,+\infty)$]

1.10 Verificare che la seguente funzione è decrescente per $x \in (1,+\infty)$:

$$f(x)=x^{-3+sen\ \log\log x}.$$

[La funzione $f(x)$ è definita con le limitazioni

$$\begin{cases} x>0 \\ \log x>0 \end{cases}$$

che corrispondono a $x>1$. Pertanto $f(x)$ è definita nell'intervallo $(1,+\infty)$. Per calcolare la derivata $f'(x)$ di $f(x)$ utilizziamo la proprietà dei logaritmi

$$a^b=e^{\log a^b}=e^{b\log a},$$

da cui

$$f(x)=x^{-3+\text{sen}\ \log\log x}=e^{(-3+\text{sen}\ \log\log x)\cdot\log x}.$$

In base alla formula di derivazione delle funzioni composte, la derivata di $f(x)$ vale

$$f'(x)=f(x)\cdot\left[\cos\log\log x\cdot\frac{1}{\log x}\cdot\frac{1}{x}\cdot\log x+(-3+\text{sen}\ \log\log x)\cdot\frac{1}{x}\right]=$$

$$= \frac{f(x)}{x} [\cos \log \log x - 3 + \operatorname{sen} \log \log x] \ .$$

Qualunque sia l'argomento delle funzioni seno e coseno, il risultato è un numero minore od uguale ad 1. Si ottiene pertanto

$$f'(x) \leq \frac{f(x)}{x}[1 - 3 + 1] = -\frac{f(x)}{x} < 0 \, .$$

Pertanto $f'(x) < 0$ in $(1, +\infty)$ e $f(x)$ è una funzione strettamente decrescente in tale intervallo]

1.11 Determinare gli intervalli di monotonia delle funzioni

(a) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ (b) $f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x$

[(a) La derivata vale $f'(x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x$. La funzione risulta crescente negli intervalli $[k\pi, \pi/2 + k\pi]$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, ed è decrescente altrimenti; (b) la funzione è decrescente negli intervalli $[\pi/3 + 2k\pi, (5/3)\pi + 2k\pi]$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, ed è crescente altrimenti]

1.12 Sia $f(x)$ una funzione *pari*, cioè tale che $f(x) = f(-x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. È possibile che $f(x)$ sia crescente in un intorno del punto $x_0 = 0$? È possibile che $f(x)$ sia strettamente crescente in un intorno di $x_0 = 0$?

[Supponiamo che esista $\delta > 0$ per cui $f(x)$ risulti crescente nell'intorno $(-\delta, \delta)$ del punto $x_0 = 0$. Fissiamo $x_1 \in (0, \delta)$; essendo $-x_1 < 0 < x_1$, risulta quindi

$$f(-x_1) \leq f(0) \leq f(x_1).$$

Inoltre, dato che $f(x)$ è una funzione pari, risulta anche $f(x_1) = f(-x_1)$. Otteniamo quindi $f(-x_1) = f(0) = f(x_1)$, $\forall\, x_1 \in (0, \delta)$. Perciò, se $f(x)$ è crescente in $(-\delta, \delta)$, allora è necessariamente costante in tale intervallo. Inoltre, per lo stesso motivo, non esiste una funzione pari e strettamente crescente in un intorno di $x_0 = 0$]

1.13 Determinare gli intervalli di monotonia della funzione

$$f(x) = \sqrt{1 + x^2} - |x|$$

[La funzione verifica la proprietà $f(x) = f(-x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; è quindi una funzione pari. Non è derivabile per $x = 0$, a causa dell'addendo $|x|$. La studiamo per $x \geq 0$; in tale insieme la funzione $f(x)$ ha espressione analitica

$$f(x) = \sqrt{1 + x^2} - x \quad , \qquad \forall\, x \in [0, +\infty)$$

e la sua derivata prima vale

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} - 1 = \frac{x - \sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Dato che $x < \sqrt{1 + x^2}$ per ogni $x \geq 0$, risulta $f'(x) < 0$ per ogni $x \in [0, +\infty)$. Pertanto $f(x)$ è decrescente in $[0, +\infty)$ e, essendo una funzione pari, è crescente in $(-\infty, 0]$]

1.14 Determinare gli intervalli di monotonia della funzione

$$f(x) = x - 2\operatorname{arctg} x$$

[Risulta $f'(x) = 1 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{x^2+1}$, da cui si deduce che $f(x)$ è crescente separatamente negli intervalli $(-\infty, -1]$ e $[1, +\infty)$, mentre è decrescente in $[-1, 1]$]

1.15 Determinare gli intervalli di monotonia delle funzioni

(a) $f(x) = x(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x)$ (b) $f(x) = x(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} x)$

[(a) Calcoliamo la derivata di $f(x) = \frac{\pi}{2}x - x\operatorname{arctg} x$:

$$f'(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x - \frac{x}{1+x^2}.$$

Non è immediatamente agevole stabilire il segno di $f'(x)$. Proviamo allora a stabilire preliminarmente se $f'(x)$ sia crescente o decrescente, valutando il segno della sua derivata, cioè valutiamo il segno di $f''(x)$:

$$f''(x) = -\frac{1}{1+x^2} - \frac{(1+x^2) - x\cdot(2x)}{(1+x^2)^2} = -\frac{1+x^2+1-x^2}{(1+x^2)^2} = -\frac{2}{(1+x^2)^2} < 0$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. Pertanto $f''(x)$ è negativa su $\mathbb{R}$ e $f'(x)$ risulta decrescente su $\mathbb{R}$. Valutiamo $f'(x)$ agli estremi dell'intervallo $(-\infty, +\infty)$. Si trovano i valori limite:

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = \pi \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0.$$

Pertanto l'estremo inferiore di $f'(x)$ su $\mathbb{R}$ vale 0 e $f'(x)$ è positiva su tutto $\mathbb{R}$. La funzione data è quindi strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$.
(b) La funzione data si annulla per $x = 0$ e per $x = 1$. In base al teorema di Rolle, $f'(x)$ si annulla in almeno un punto $x_0 \in (0, 1)$. Con lo stesso metodo della parte (a) si verifica che

$$f''(x) = -\frac{2}{(1+x^2)^2} < 0\,, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Quindi $f'(x)$ è una funzione strettamente decrescente su tutto $\mathbb{R}$, e si annulla nel solo punto x_0 trovato precedentemente. In definitiva, esiste $x_0 \in (0, 1)$ tale che $f(x)$ è crescente in $(-\infty, x_0]$ ed è decrescente in $[x_0, +\infty)$, dato che $f'(x)$ è positiva in $(-\infty, x_0)$ ed è negativa in $(x_0, +\infty)$]

1B. Massimi e minimi

Sia $f(x)$ una funzione definita in un insieme I. Un punto $x_0 \in I$ è di *massimo relativo* per $f(x)$ nell'insieme I se esiste $\delta > 0$ per cui

$$f(x_0) \geq f(x), \qquad \forall\, x \in I \quad : \quad |x - x_0| < \delta.$$

Analogamente, x_0 è un punto di *minimo relativo* per $f(x)$ nell'insieme I se esiste $\delta > 0$ tale che

$$f(x_0) \leq f(x), \qquad \forall\, x \in I \quad : \quad |x - x_0| < \delta.$$

Se le disuguaglianze sopra scritte valgono non soltanto in un intorno di x_0, ma per ogni $x \in I$, allora si dice che x_0 è un punto di massimo, o di minimo, assoluto. Più precisamente, $x_0 \in I$ è un punto di *massimo assoluto* per $f(x)$ nell'insieme I se

$$f(x_0) \geq f(x), \qquad \forall\, x \in I.$$

Un punto $x_0 \in I$ si dice di *minimo assoluto* per $f(x)$ in I se

$$f(x_0) \leq f(x), \qquad \forall\, x \in I.$$

Da notare che ogni massimo o minimo assoluto per una funzione $f(x)$ in un insieme I è anche un massimo o minimo relativo. Infine, se x_0 è un *punto di massimo* (o *di minimo*) assoluto, allora il corrispondente valore $f(x_0)$ si dice *massimo* (o *minimo*) di $f(x)$ nell'insieme I.

Il seguente criterio è utile per la ricerca dei punti di massimo o di minimo relativo per una funzione $f(x)$ in un intervallo aperto: *Se $x_0 \in (a, b)$ è un punto di massimo o di minimo (relativo) per $f(x)$ nell'intervallo (a, b), e se $f(x)$ è derivabile in x_0, allora $f'(x_0) = 0$.*

Perciò, per trovare i punti di massimo o di minimo relativo di una funzione derivabile $f(x)$, si determinano in primo luogo i punti x_0 che risolvono la equazione $f'(x_0) = 0$.

Successivamente, l'analisi della monotonia di $f(x)$, come proposto nel paragrafo precedente, è utile per stabilire se un dato punto x_0 è di massimo o di minimo relativo per $f(x)$.

Ad esempio, se $f(x) = x^{10}$, risulta $f'(x) = 10x^9$; quindi $f'(x) = 0$ per $x = 0$, $f'(x) > 0$ per $x > 0$, $f'(x) < 0$ per $x < 0$. La funzione $f(x)$ risulta crescente per $x \geq 0$, decrescente per $x \leq 0$. Perciò il punto $x_o = 0$ è di minimo (relativo e assoluto) per la funzione $f(x) = x^{10}$ nell'insieme $\mathbb{R}$.

Un altro criterio per stabilire se un punto x_0, per cui $f'(x_0) = 0$, sia di massimo o di minimo relativo per una funzione derivabile due volte, è il seguente:

$$\begin{array}{lll} f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) > 0 & \Rightarrow \quad x_0 & \textit{punto di minimo relativo}; \\ f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) < 0 & \Rightarrow \quad x_0 & \textit{punto di massimo relativo}. \end{array}$$

Se poi $f''(x_0) = 0$, risulta valido il seguente schema (per i punti di flesso si veda il paragrafo seguente):

$$\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)>0 \quad x_0 \text{ punto di min. rel.} \\ f''(x_0)<0 \quad x_0 \text{ punto di max rel.} \\ \\ f''(x_0)=0 \quad : \begin{cases} f^{(3)}(x_0)>0 \quad x_0 \text{ punto di flesso} \\ f^{(3)}(x_0)<0 \quad x_0 \text{ punto di flesso} \\ \\ f^{(3)}(x_0)=0 \quad : \begin{cases} f^{(4)}(x_0)>0 \quad x_0 \text{ punto di min. rel.} \\ f^{(3)}(x_0)<0 \quad x_0 \text{ punto di max rel.} \\ \\ f^{(3)}(x_0)=0 \quad : \begin{cases} \dots \\ \dots \\ \dots \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Ad esempio, per la funzione $f(x)=x^{10}$ considerata in precedenza, risulta

$$f'(0)=f''(0)=\ldots=f^{(9)}(0)=0, \quad f^{(10)}(0)=10!>0.$$

In base allo schema proposto, si può di nuovo concludere che il punto $x_0=0$ è di minimo per $f(x)$ su $\mathbb{R}$.

1.16 Determinare i punti di massimo e di minimo relativo della funzione $f(x)=4x^3-5x^2+2x-3$ nell'insieme dei numeri reali.

[La derivata $f'(x)=2(6x^2-5x+1)$ si annulla in corrispondenza dei valori $x_1=1/3$, $x_2=1/2$. Per stabilire se x_1, x_2 sono punti di massimo o di minimo per $f(x)$, si può procedere in due modi. Il primo metodo consiste nello stabilire gli intervalli di monotonia di $f(x)$, in base al segno della derivata prima. Risulta $6x^2-5x+1>0$ all'esterno dell'intervallo $[1/3,1/2]$; perciò $f(x)$ è crescente negli intervalli $(-\infty,1/3]$ e $[1/2,+\infty)$ ed è decrescente altrimenti (si veda lo schema in figura 1.1).

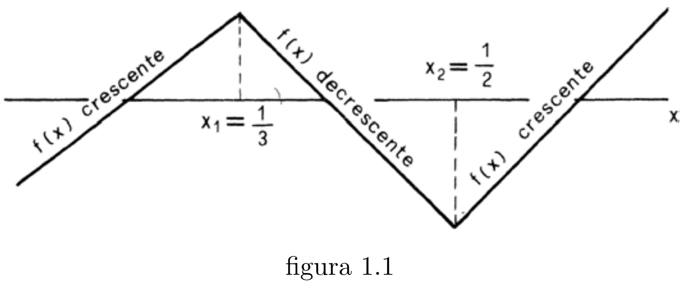


figura 1.1

Con l'aiuto dello schema in figura 1.1 possiamo affermare che $x_1 = 1/3$ è un punto di massimo relativo, $x_2 = 1/2$ è un punto di minimo relativo.

Il secondo metodo è basato sul segno della derivata seconda in corrispondenza di $x = x_1$, $x = x_2$. Risulta $f''(x) = 2(12x - 5)$; essendo $f''(1/3) = -2 < 0$, il punto x_1 è di massimo relativo; essendo $f''(1/2) = 2 > 0$, il punto x_2 è di minimo relativo]

1.17 Determinare i punti di massimo e di minimo relativo della funzione $f(x) = x(x^2 - 3x + 3)$.

[La derivata $f'(x) = 3(x - 1)^2$ si annulla per $x = 1$. Dato che $f'(x) > 0$ per ogni $x \neq 1$, la funzione $f(x)$ è strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$; quindi, il punto $x = 1$ non è nè di massimo, nè di minimo. Si noti che, essendo $f''(x) = 6(x-1)$, $f^{(3)}(x) = 6$, risulta $f''(1) = 0$, $f^{(3)}(1) = 6 > 0$. Perciò, in base allo schema proposto in precedenza, il punto $x = 1$ è di flesso per $f(x)$]

1.18 Determinare i punti di massimo e di minimo relativo delle seguenti funzioni

(a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ (b) $f(x) = x^3(3x^2 - 15x + 20)$

[(a) $x_1 = 0$ è di massimo relativo, $x_2 = 2$ è di minimo relativo;
(b) risulta $f'(x) = 15x^2(x^2 - 4x + 4) = 15x^2(x - 2)^2 \geq 0$ per ogni x; $f(x)$ è crescente su $\mathbb{R}$ e non ammette punti di massimo o di minimo (mentre $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ sono punti di flesso)]

1.19 Determinare i punti di massimo e di minimo relativo ed assoluto delle seguenti funzioni nel loro insieme di definizione.

(a) $f(x) = x^{3/2} - 3x^{1/2}$ (b) $f(x) = x + x^{2/3}$

[(a) La funzione $f(x)$ è definita per $x \geq 0$ ed è derivabile per $x > 0$. Limitatamente alle $x > 0$, la derivata $f'(x)$ si annulla per $x_0 = 1$, è negativa in $(0, 1)$, è positiva in $(1, +\infty)$. Perciò $f(x)$ è decrescente in $[0, 1]$ ed è crescente in $[1, +\infty)$. Il punto $x_0 = 1$ è di minimo relativo ed assoluto. Infine, il punto $x = 0$, dove $f(x)$ non è derivabile, è di massimo relativo;
(b) la funzione $f(x)$ è definita e continua su $\mathbb{R}$ ed è derivabile per $x \neq 0$. Ha un massimo relativo per $x = -8/27$ ed un minimo relativo per $x = 0$. Non ha nè massimo, nè minimo assoluto, perchè $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$]

1.20 Determinare i punti di massimo e di minimo relativo della funzione $f(x) = x^{-2}e^x$. Determinare inoltre il massimo ed il minimo assoluto, se esistono, di $f(x)$ nel suo insieme di definizione.

[La funzione è definita per $x \neq 0$. La derivata prima si annulla nel punto $x_0 = 2$, che risulta di minimo relativo per $f(x)$. Non ci sono punti di massimo relativo. Inoltre $x_0 = 2$ non è un punto di minimo assoluto perchè $f(x_0) = e^2/4 > 0$, mentre $f(x) \to 0$ per $x \to -\infty$; quindi esistono numeri reali x per cui $f(x) < f(x_0)$. La funzione non ammette nè massimo, nè minimo assoluto nel suo insieme di definizione (e risulta $\inf f(x) = 0$, $\sup f(x) = +\infty$)]

1.21 Determinare i punti di massimo e di minimo relativo ed assoluto delle seguenti funzioni

$$\text{(a) } f(x) = x \log^2 x \qquad\qquad \text{(b) } f(x) = log(\sqrt{x} - x)$$

[(a) La funzione è definita per $x > 0$. La derivata prima si annulla per $x_1 = e^{-2}$, che è un punto di massimo relativo, e $x_2 = 1$, che è di minimo. Inoltre, essendo $x > 0$, risulta $f(x) = x \log^2 x \geq 0 = f(1)$; quindi il punto $x_2 = 1$ è di minimo assoluto. Invece il massimo di $f(x)$, per $x > 0$, non esiste, dato che $f(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$; (b) è definita in $(0, 1)$, assume massimo assoluto ($= \log(1/4)$) per $x = 1/4$, è illimitata inferiormente]

1.22 Determinare i punti di massimo e di minimo relativo ed assoluto della funzione $f(x) = \log \operatorname{sen} x$, nel suo insieme di definizione.

[I punti $x = \pi/2 + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, sono di massimo relativo ed assoluto per $f(x)$. Il massimo vale 0. Non ci sono punti di minimo e l'estremo inferiore vale $-\infty$]

1.23 Determinare i punti di massimo e di minimo relativo ed assoluto delle funzioni definite su $\mathbb{R}$

$$\text{(a) } f(x) = |x + 3| \qquad\qquad \text{(b) } f(x) = 2|x| - |x - 1|$$

[(a) la funzione $f(x)$ è definita e continua per ogni $x \in \mathbb{R}$, ed è derivabile per ogni $x \neq -3$. Dove la derivata esiste, essa vale $+1$, oppure -1, e pertanto non si annulla mai. Quindi $f(x)$ non ha punti di massimo o di minimo diversi da $x_0 = -3$. Dato che $f(x) = |x + 3| \geq 0 = f(-3)$, il punto $x_0 = -3$ è di minimo assoluto.
(b) Ricordando la definizione di valore assoluto, si trova che

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se} \quad x \geq 1 \\ 3x - 1, & \text{se} \quad 0 < x < 1 \\ -x - 1, & \text{se} \quad x \leq 0. \end{cases}$$

In figura 1.2 è riportato il grafico di $f(x)$. Il punto $x_0 = 0$ è di minimo assoluto, ed il valore minimo vale $f(0) = -1$]

f(x)=2 | x | - | x-1 |

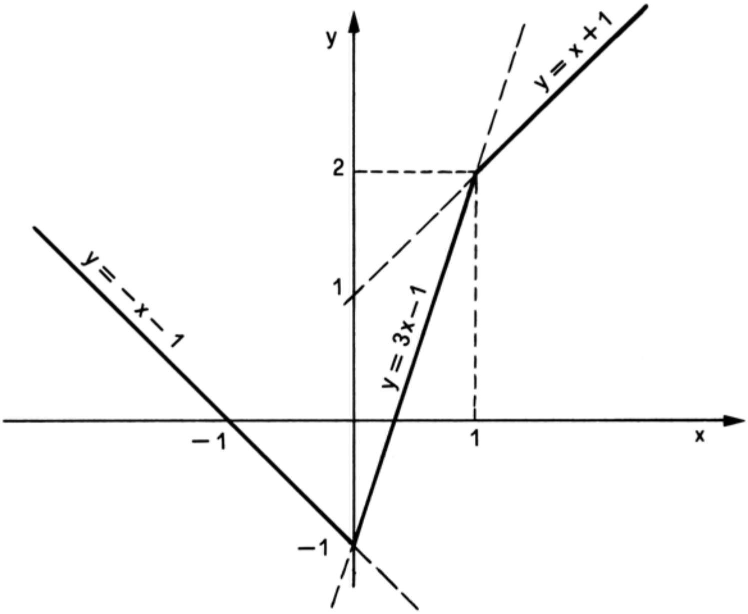


figura 1.2

1.24 Determinare su $\mathbb{R}$ i punti di massimo e di minimo relativo della funzione

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \operatorname{sen} x + x \cos x.$$

[La derivata vale $f'(x) = x(x - \operatorname{sen} x)$. Dato che $|\operatorname{sen} x| < |x|$ per ogni $x \neq 0$, la derivata si annulla solo nel punto $x_0 = 0$. Risulta inoltre

$$f'(x_0) = f''(x_0) = f^{(3)}(x_0) = f^{(4)}(x_0), f^{(5)}(x_0) = 4.$$

Perciò $f(x)$ non ha nè massimi nè minimi su $\mathbb{R}$]

1.25 Si consideri la funzione $f(x)$ dell'esercizio precedente. Scrivere la formula di Taylor di $f(x)$ (con il metodo del paragrafo 11C della parte prima) e dedurne che la prima derivata non nulla nel punto $x_0 = 0$ è la derivata quinta.

[Utilizziamo gli sviluppi in formula di Taylor di sen x, cos x:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \circ(x^5); \qquad x \cos x = x(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \circ(x^4)).$$

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \operatorname{sen} x + x \cos x = x^3(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2}) - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^5}{4!} + \circ(x^5)$$

$$= 0 \cdot x^3 + \frac{1}{5!}(-1+5)x^5 + \circ(x^5) = \frac{4}{5!}x^5 + \circ(x^5).$$

Abbiamo perciò trovato lo sviluppo in formula di Taylor di $f(x) = f(0) + f'(0)x + \ldots + (f^{(5)}(0)/5!)x^5 + \circ(x^5)$. Confrontando i coefficienti, ne deduciamo che $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(4)}(0) = 0$, $f^{(5)}(0) = 4$]

1.26 Traendo spunto dalla funzione dell'esercizio 1.24, si consideri una funzione $f(x)$ derivabile su $\mathbb{R}$ e tale che

$$f'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = x_0, \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$

Dimostrare che il punto x_0 non può essere nè di massimo, nè di minimo, per $f(x)$.

[Supponiamo per assurdo che x_0 sia un punto di minimo relativo per $f(x)$ (il caso x_0, punto di massimo, si tratta in modo analogo). La funzione $f(x)$ non può essere costante in un intorno di x_0, perchè altrimenti la derivata $f'(x)$ non si annullerebbe solo in x_0. Esiste quindi un punto $x_1 < x_0$ tale che $f(x_1) > f(x_0)$ (si veda la figura 1.3).

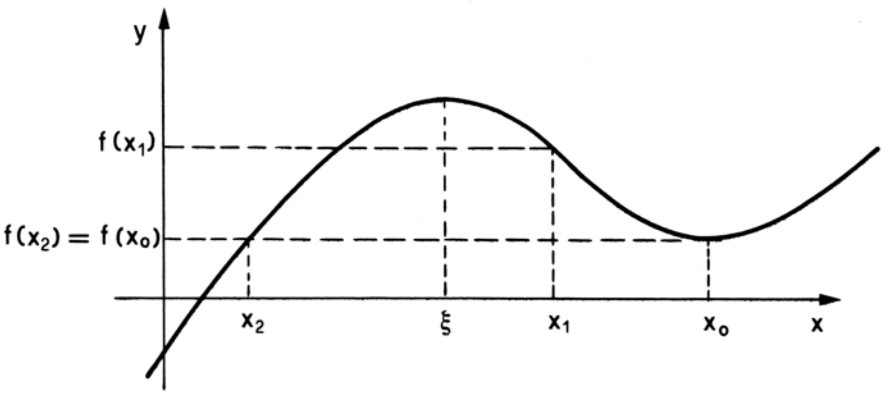


figura 1.3

Essendo $f(x_1) > f(x_0)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, per il teorema dell'esistenza dei valori intermedi, esiste $x_2 < x_1$ per cui $f(x_2) = f(x_0)$. Per il teorema di Rolle, esiste un punto $\xi \in (x_2, x_1)$ tale che $f'(\xi) = 0$. Ciò contrasta con l'ipotesi che la derivata si annulla solo per $x = x_0$.]

1.27 Siano $a > 0$, $p > 1$. Determinare il minimo della funzione definita per $x > 0$ da $f(x) = x^p - ax$.

[Essendo $f'(x) = px^{p-1} - a$, si ha $f'(x) \gtrless 0$ se e solo se $x^{p-1} \gtrless a/p$, cioè $x \gtrless (a/p)^{1/(p-1)}$. Pertanto il punto $x_0 = (a/p)^{1/(p-1)}$ è di minimo assoluto ed il valore minimo è $f(x) = (1-p)(a/p)^{p/(p-1)}$]

1.28 Sia $a > 0$. Consideriamo il triangolo T:

$$T = \{(x, y) : \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ x + y \leq a\},$$

che è rappresentato in figura 1.4. Dimostrare che, fra tutti i rettangoli con lati paralleli agli assi contenuti in T, quello di area massima è il quadrato di lato $a/2$.

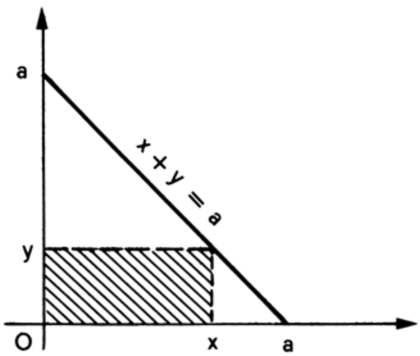


figura 1.4

[Evidentemente il vertice opposto all'origine O del rettangolo di area massima giace sulla retta di equazione $x+y=a$. Indicata con x la lunghezza del lato orizzontale di uno generico di tali rettangoli, il lato verticale avrà lunghezza $y = a - x$. L'area $A(x)$ del rettangolo è perciò $A(x) = xy = x(a-x)$.

Occorre trovare il massimo assoluto della funzione $A(x)$, per $x \in [0, a]$. Si verifica facilmente che la derivata $A'(x)$ si annulla nel punto $x_0 = a/2$. Essendo $A''(x) = -2 < 0$ per ogni x, il punto $x_0 = a/2$ è di massimo relativo. Il massimo assoluto può essere assunto in x_0, oppure agli estremi dell'intervallo $[0, a]$. Dato che $A(0) = A(a) = 0$, $A(a/2) = a^2/4$, il punto $x_0 = a/2$ è di massimo assoluto, mentre i punti $x_1 = 0$, $x_2 = a$ sono di minimo assoluto per la funzione $A(x)$ nell'intervallo $[0, a]$ (si confronti con l'esercizio 10.32 della parte prima)]

1.29 Sia $p > 0$. Dimostrare che fra tutti i rettangoli di perimetro p, quelli di area massima sono i quadrati di lato $p/4$.

[Siano x, y le lunghezze dei lati di un rettangolo di perimetro p. Allora $2x + 2y = p$, cioè $x + y = p/2$. L'area $A(x)$ di un tale rettangolo vale $A(x) = xy = x(p/2 - x)$. Analogamente all'esercizio precedente, il massimo assoluto della funzione $A(x)$ nell'intervallo $[0, p/2]$ si ottiene per $x = p/4$]

1.30 Sia $A > 0$. Dimostrare che, fra tutti i rettangoli di area A, quelli di perimetro minimo sono i quadrati di lato $\sqrt{A}$.

[Siano x, y le lunghezze dei lati di un generico rettangolo di area A. Allora è $xy = A$, cioè $y = A/x$.

Il perimetro $p(x)$ di un tale rettangolo è perciò

$$p(x) = 2(x + A/x), \qquad x > 0.$$

La funzione è derivabile per $x > 0$ e si ha $p'(x) = 2(1 - A/x^2)$. La derivata si annulla per $x = x_0 = \sqrt{A}$, è positiva se $x > x_0$, é negativa se $0 < x < x_0$. Il punto x_0 è di minimo relativo per $p(x)$. Dato che $p(x) \to +\infty$ per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$, la funzione $p(x)$ ha minimo assoluto per $x = \sqrt{A}$]

1C. Concavità, convessità e flessi

Le definizioni di funzioni convesse o concave in un intervallo sono riportate nel paragrafo seguente. Qui ci limitiamo a ricordare il criterio basato sulla derivata seconda: *Se $f(x)$ è una funzione derivabile due volte in un intervallo $[a, b]$, si ha:*

$$f''(x) \geq 0, \qquad \forall\, x \in (a, b) \quad \Rightarrow \quad f \quad \textit{è convessa in} \quad [a, b];$$

$$f''(x) \leq 0, \qquad \forall\, x \in (a, b) \quad \Rightarrow \quad f \quad \textit{è concava in} \quad [a, b].$$

Se esiste $\delta > 0$ per cui vale una delle due possibilità:

$$\begin{cases} f''(x) < 0, & \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0) \\ f''(x) > 0, & \forall\, x \in (x_0, x_0 + \delta) \end{cases} \text{oppure} \begin{cases} f''(x) > 0, & \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0) \\ f''(x) < 0, & \forall\, x \in (x_0, x_0 + \delta) \end{cases}$$

allora x_0 è un *punto di flesso* per la funzione $f(x)$.

1.31 Determinare gli insiemi di concavità, di convessità e gli eventuali punti di flesso della funzione

$$f(x) = (x + 4)^3$$

[La derivata seconda vale $f''(x) = 6(x + 4)$, è positiva per $x > -4$, è negativa per $x < -4$. Perciò $f(x)$ è convessa nell'intervallo $[-4, +\infty)$ ed è concava nell'intervallo $(-\infty, -4]$. Il punto $x_0 = -4$ è di flesso per $f(x)$]

1.32 Determinare gli insiemi di concavità, di convessità e gli eventuali punti di flesso delle funzioni

$$\text{(a)}\ f(x) = x^{10} \qquad\qquad \text{(b)}\ f(x) = 1 - 4x + 3x^2 - x^3$$

[(a) La derivata seconda vale $f''(x) = 90x^8$ ed è maggiore od uguale a zero per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi $f(x)$ è convessa su tutto l'asse reale. In particolare il punto $x_0 = 0$ non è di flesso (ma, come già visto nel paragrafo precedente, è un punto di minimo); (b) la derivata seconda vale $f''(x) = 6(1 - x)$, é positiva per $x < 1$, è negativa per $x > 1$. La funzione $f(x)$ risulta convessa nell'intervallo $(-\infty, 1]$, risulta concava nell'intervallo $[1, +\infty)$. Il punto $x_0 = 1$ è di flesso per $f(x)$]

1.33 In base al segno della derivata seconda, verificare che:

(a) x^2 è una funzione convessa su tutto l'asse reale.
(b) $\sqrt{x}$ è una funzione concava per $x \geq 0$.
(c) $1/x$ è convessa per $x > 0$, è concava per $x < 0$.
(d) e^x è una funzione convessa su tutto l'asse reale.
(e) $\log x$ è una funzione concava per $x > 0$.
(f) $\operatorname{sen} x$ è concava in $[k\pi, (k+1)\pi]$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$.
(g) $\cos x$ è concava in $[-\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi]$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$.
(h) $\operatorname{tg} x$ è convessa in $[k\pi, \pi/2 + k\pi]$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$.
(i) $\operatorname{arctg}\, x$ è convessa per $x \leq 0$, concava per $x \geq 0$.

1.34 Verificare che la seguente funzione è convessa su $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \sqrt{1 + x^2}$$

[Le derivate prima e seconda valgono:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}[(1+x^2)^{1/2}] = \frac{1}{2}(1+x^2)^{-1/2} \cdot 2x = (1+x^2)^{-1/2} \cdot x \\ f''(x) &= -(1+x^2)^{-3/2} \cdot x^2 + (1+x^2)^{-1/2} = \\ &= \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}[-x^2 + (1+x^2)] = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

La derivata seconda è positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi $f(x)$ è convessa su tutto l'asse reale]

1.35 Studiare la concavità, la convessità ed i flessi della funzione $f(x) = (\log\, x)^{-1}$.

[La funzione è definita negli intervalli $(0, 1)$ e $(1, +\infty)$.
Le derivate prima e seconda valgono

$$f'(x) = -(\log\, x)^{-2} \cdot \frac{1}{x}; \qquad f''(x) = \frac{2 + \log\, x}{x^2 \log^3\, x}.$$

La derivata seconda è positiva se il numeratore ed il denominatore hanno lo stesso segno, cioè se

$$\begin{cases} 2 + \log\, x > 0 \\ \log\, x > 0 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} 2 + \log\, x < 0 \\ \log\, x < 0. \end{cases}$$

Il primo sistema ha per soluzioni: $\log\, x > 0$, cioè $x > 1$, mentre il secondo sistema equivale a $\log\, x < -2$, cioè $0 < x < e^{-2}$. Perciò la funzione $f(x)$ è convessa negli intervalli $(0, e^{-2})$, $(1, +\infty)$ ed è concava in $(e^{-2}, 1)$. Il punto $x_0 = e^{-2}$ è di flesso per $f(x)$ (mentre il punto 1 non è di flesso, dato che in tale punto la funzione $f(x)$ non è definita)]

1.36 Studiare la concavità, la convessità ed i flessi delle funzioni

$$\text{(a)}\ f(x) = x^4/e^x \qquad\qquad \text{(b)}\ f(x) = x^4 e^x$$

[a) La derivata seconda si annulla nei punti $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 6$. Solo x_2, x_3 sono punti di flesso, mentre x_1 è un punto di minimo. Inoltre $f(x)$ è convessa negli intervalli $(-\infty, 2]$, $[6, +\infty)$ ed è concava altrimenti; (b) $f(x)$ è convessa negli intervalli $(-\infty, -6]$ o $[-2, +\infty)$ ed è concava altrimenti. Il risultato si può ottenere dalla parte (a), scambiando x con $-x$]

1.37 Studiare la concavità, la convessità ed i flessi delle funzioni

$$\text{(a)}\ f(x) = x - \operatorname{arctg} x \qquad\qquad \text{(b)}\ f(x) = x \operatorname{arctg} x$$

[(a) $f(x)$ risulta convessa in $[0, +\infty)$ e concava in $(-\infty, 0]$; il punto $x_0 = 0$ è di flesso per $f(x)$. (b) Risulta

$$f'(x) = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2},$$

$$f''(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2+1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{(1+x^2)^2} > 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Quindi $f(x)$ è una funzione convessa su $\mathbb{R}$]

1.38 Una funzione definita su $\mathbb{R}$ si dice *pari* se $f(x) = f(-x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Una funzione si dice *dispari* se $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Supponiamo che $f(x)$ sia una funzione pari derivabile due volte in un intorno del punto $x_0 = 0$. È possibile che $f''(x) > 0$ per $x > 0$ e che $f''(x) < 0$ per $x < 0$ (in modo che x_0 risulti un punto di flesso)?

[No,non è possibile. La derivata di una funzione pari è una funzione dispari; infatti, per la regola di derivazione delle funzioni composte, essendo $f(x)$ pari, risulta

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} f(-x) = -f'(-x), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Per lo stesso motivo, derivando entrambi i membri della relazione $f'(-x) = -f'(x)$, si trova che la derivata seconda è pari. Perciò la derivata seconda non può avere segni opposti a sinistra ed a destra di $x_0 = 0$]

1.39 Sia $f(x)$ una funzione dispari, derivabile due volte su $\mathbb{R}$, e tale che $f''(x) > 0$ per $x > 0$. Dimostrare che 0 è un punto di flesso per $f(x)$.

[Come nell'esercizio precedente si verifica che la derivata seconda $f''(x)$ è una funzione dispari. Perciò, se $f''(x) > 0$ per $x > 0$, allora $f''(-x) = -f''(x) < 0$ per ogni $x > 0$ cioè per $-x < 0$. Quindi la derivata seconda ha segni opposti a destra ed a sinistra di $x_0 = 0$, che perciò è un punto di flesso]

1.40 Sia $f(x)$ una funzione derivabile due volte nell'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$, con $a \neq b$. Supponiamo che $f(a) = f(b)$ e che $f'(a) = f'(b)$. Dimostrare che la derivata prima si annulla almeno due volte in $[a,b]$ e che la derivata seconda si annulla almeno una volta.

[La derivata seconda si annulla in (a,b), in base al teorema di Rolle applicato alla funzione $f'(x)$. Per dimostrare che la derivata prima si annulla in due punti distinti di $[a,b]$, supponiamo che $f'(a) = f'(b) \neq 0$ (altrimenti non c'è niente da provare).

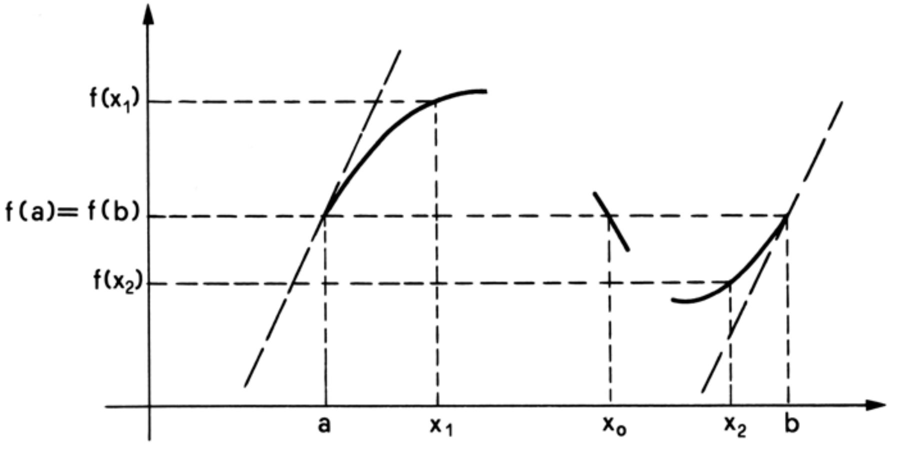


figura 1.5

Se $f'(a) = f'(b) > 0$, come in figura 1.5, esistono x_1, $x_2 \in (a,b)$ tali che $f(x_1) > f(a)$, $f(x_2) < f(b)$; infatti, se per assurdo fosse $f(x) \leq f(a)$ per ogni $x \in (a,b)$, risulterebbe anche

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0.$$

In modo analogo si prova $f(x_2) < f(b)$. Per il teorema dell' esistenza dei valori intermedi, esiste $x_0 \in (x_1, x_2)$ tale che $f(x_0) = f(a) = f(b)$. Applicando il teorema di Rolle alla funzione $f(x)$ negli intervalli $[a, x_0]$, $[x_0, b]$, si ottiene la tesi]

1.41 Sia $f(x)$ una funzione derivabile tre volte in $[a,b]$. Dimostrare che, se $f(a) = f(b)$ e $f'(a) = f'(b) = 0$, esiste in (a,b) almeno un punto in cui si annulla la derivata terza.

[Applichiamo ripetutamente il teorema di Rolle. Esiste $x_1 \in (a,b)$ tale che $f'(x_1) = 0$. Esistono poi $x_2 \in (a, x_1)$, $x_3 \in (x_1, b)$ per cui $f''(x_2) = f''(x_3) = 0$. Esiste quindi $x_4 \in (x_2, x_3)$ per cui $f^{(3)}(x_4) = 0$]

1D. Funzioni convesse in un intervallo

Nei testi di matematica si trovano le seguenti definizioni e criteri di convessità di una $f(x)$ in un intervallo $[a, b]$:

(1) *Una funzione* $f(x)$ *definita in* $[a, b]$ *è convessa in tale intervallo se, per ogni* x_1, $x_2 \in [a, b]$, *risulta*

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2), \qquad \forall\, \lambda \in [0, 1].$$

(2) *Una funzione* $f(x)$ *derivabile in* $[a, b]$ *è convessa in tale intervallo se*

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \qquad \forall\, x,\, x_0 \in [a, b].$$

(3) *Una funzione* $f(x)$, *derivabile due volte in* $[a, b]$, *è convessa in tale intervallo se*

$$f''(x) \geq 0, \qquad \forall\, x \in (a, b)$$

Geometricamente la (1) esprime il fatto che il grafico della funzione $y = f(x)$, nell'intervallo di estremi x_1, x_2, è al di sotto della retta congiungente i punti di coordinate $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$. La (2) geometricamente esprime il fatto che ogni retta tangente al grafico della funzione $y = f(x)$ è al di sotto di tale grafico. Infine la (3) esprime un criterio analitico per verificare se una data funzione è convessa o no.

Se la disuguaglianza in (1) vale con il segno di minore stretto per ogni $x_1 \neq x_2$ e per ogni $\lambda \in (0, 1)$, allora si dice che $f(x)$ è strettamente convessa in $[a, b]$.

1.42 Verificare che la disuguaglianza di convessità in (1) può essere espressa nei modi equivalenti:

$$\text{(a)}\ f(x) \leq f(x_2) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_2)$$

$$\text{(b)}\ f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

per ogni $x \in [x_1, x_2]$ e per ogni x_1, $x_2 \in [a, b]$, $x_1 \neq x_2$.

[(a) Ponendo $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ risulta $x - x_2 = \lambda(x_1 - x_2)$, cioè, se $x_1 \neq x_2$, $\lambda = (x - x_2)/(x_1 - x_2)$. Dalla disuguaglianza in (1) si ottiene la disuguaglianza equivalente

$$f(x) \leq f(x_2) + \lambda[f(x_1) - f(x_2)] = f(x_2) + \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}[f(x_1) - f(x_2)].$$

La (b) si prova in modo analogo, scambiando λ con $1 - \lambda$, oppure, più velocemente, osservando che il secondo membro della disuguaglianza in (a) è uguale al secondo membro della disuguaglianza in (b)]

1.43 Sia $f(x)$ una funzione definita in $[a, b]$ e convessa nel senso della definizione (1). Verificare che, per ogni x_1, $x_2 \in [a, b]$ e per ogni t esterno all'intervallo $[0, 1]$, risulta

$$f(tx_1 + (1 - t)x_2) \geq tf(x_1) + (1 - t)f(x_2),$$

purchè $tx_1 + (1 - t)x_2 \in [a, b]$. Geometricamente ciò esprime il fatto che il grafico della funzione $y = f(x)$, al di fuori dell'intervallo $[x_1, x_2]$, è al di sopra della retta congiungente i punti di coordinate $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$.

[Consideriamo $t > 1$ (il caso $t < 0$ è analogo). Occorre provare che

$$f(x_1) \leq \frac{1}{t}[f(tx_1 + (1 - t)x_2) + (t - 1)f(x_2)].$$

Ponendo $\lambda = 1/t$, abbiamo $0 < \lambda < 1$ e $1 - \lambda = (t - 1)/t$. Allora la relazione sopra scritta segue dalla (1) perchè, se definiamo $x_1' = tx_1 + (1 - t)x_2$, risulta anche $x_1 = \lambda x_1' + (1 - \lambda)x_2$]

1.44 Verificare che la disuguaglianza di convessità dell'esercizio precedente può essere espressa nei modi equivalenti ($\forall\, x, x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 \neq x_2$):

$$\text{(a)}\ f(x) \geq f(x_2) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_2), \qquad \forall\, x \notin [x_1, x_2]$$

$$\text{(b)}\ f(x) \geq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1), \qquad \forall\, x \notin [x_1, x_2]$$

[Si proceda come nell'esercizio 1.42]

1.45 Verificare che, per una funzione $f(x)$ derivabile in $[a, b]$ le definizioni di convessità (1) e (2) sono fra loro equivalenti.

[Proviamo preliminarmente che (1) implica (2). Abbiamo già detto che da (1) discendono le disuguaglianze (a), (b) dell'esercizio precedente. Passando al limite per $x_2 \to x_1$ nella 1.40 (b) otteniamo $f(x) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$, cioè la (2).

Proviamo ora che (2) implica (1). Fissati x_1, $x_2 \in [a, b]$ ($x_1 \neq x_2$) e $\lambda \in [0, 1]$, consideriamo $x_0 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$. Per la (2) risulta

$$f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0); \quad f(x_2) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0).$$

Moltiplichiamo la prima relazione per λ e la seconda per $1 - \lambda$ e sommiamo le due relazioni:

$$\begin{aligned}
&\lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \geq \\
&\geq \lambda f(x_0) + \lambda f'(x_0)(x_1 - x_0) + (1 - \lambda)f(x_0) + (1 - \lambda)f'(x_0)(x_2 - x_0) = \\
&\quad = f(x_0) + f'(x_0)[\lambda(x_1 - x_0) + (1 - \lambda)(x_2 - x_0)].
\end{aligned}$$

Rimane da provare che la quantità in parentesi quadra è nulla. A tale scopo ricordiamo che, essendo $x_0 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$, risulta

$$x_1 - x_0 = (1 - \lambda)(x_1 - x_2); \quad x_2 - x_0 = \lambda(x_2 - x_1).$$

Perciò $[\lambda(x_1 - x_0) + (1-\lambda)(x_2 - x_0)] = \lambda(1-\lambda)(x_1 - x_2 + x_2 - x_1) = 0]$

1.46 Verificare che, per una funzione $f(x)$ derivabile due volte in $[a,b]$ le definizioni di convessità (1), (2), (3) sono fra loro equivalenti.

[Come provato nell'esercizio precedente, le definizioni (1), (2) sono fra loro equivalenti. Proviamo che (1) implica (3) e che (3) implica (2).

Cominciamo con (1) $\Rightarrow$ (3): Se $x \in (a,b)$ e $x \pm h \in (a,b)$, poniamo in (1) $x_1 = x+h$, $x_2 = x-h$, $\lambda = 1/2$. Otteniamo

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 = \frac{1}{2}(x+h) + \frac{1}{2}(x-h) = x$$

e la disuguaglianza di convessità diventa

$$f(x) \leq [f(x+h) + f(x-h)]/2 \qquad \text{cioè} \qquad f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \geq 0.$$

Applicando il teorema di L'Hôpital (si noti che deriviamo rispetto ad h), otteniamo

$$0 \leq \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h} =$$
$$= \frac{1}{2}\left\{ \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f'(x-h) - f'(x)}{-h} \right\} = \frac{1}{2}\{2f''(x)\} = f''(x)$$

Proviamo ora che (3) $\Rightarrow$ (2): Applichiamo il teorema di Lagrange nell'intervallo $[x_0, x]$, supponendo per semplicità $x > x_0$. Esiste un punto $x \in (x_0, x)$ per cui

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_1)(x - x_0).$$

Per ipotesi $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a,b)$. Quindi la derivata prima $f'(x)$ è crescente in $[a,b]$. Perciò, essendo $x_1 > x_0$, $f'(x_1) \geq f'(x_0)$ e quindi

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_1)(x - x_0) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad]$$

1.47 Sia f(x) una funzione convessa in $[a,b]$. Sia $x_0 \in [a,b]$. Il rapporto incrementale $g(x)$, definito da

$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

risulta crescente su $[a,b] - \{x_0\}$. Verificarlo nei due casi seguenti:

(a) $f(x)$ è derivabile in $[a,b]$ e vale la (2);

(b) $f(x)$ è definita in $[a,b]$ e vale la (1).

[(a) Se $f(x)$ è derivabile in $[a,b]$, allora anche $g(x)$ è derivabile per $x \neq x_0$ e risulta

$$g'(x) = \frac{f'(x)(x - x_0) - f(x) + f(x_0)}{(x - x_0)^2}.$$

Tale derivata è positiva o nulla perchè, scambiando il ruolo di x, x_0 nella disuguaglianza di convessità (2), risulta $f(x_0) \geq f(x) + f'(x)(x_0 - x)$. Perciò $g'(x) \geq 0$ e $g(x)$ è crescente

negli intervalli $[a, x_0)$, $(x_0, b]$. Inoltre, dato che i limiti destro e sinistro di $g(x)$ sono uguali fra loro (ed entrambi uguali a $f'(x_0)$), la funzione $g(x)$ è crescente globalmente nell'insieme $[a, b] - \{x_0\}$.
(b) Occorre provare che, se $x_1 < x_2$, allora $g(x_1) \le g(x_2)$, cioè

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \le \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}.$$

Limitiamoci al caso $x_0 < x_1 < x_2$. La relazione precedente è equivalente a

$$f(x_1) - f(x_0) \le \frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0}[f(x_2) - f(x_0)] = \lambda[f(x_2) - f(x_0)],$$

dove si è posto $\lambda = (x_1 - x_0)/(x_2 - x_0)$. Dato che $x_0 < x_1 < x_2$, risulta $0 < \lambda < 1$. Inoltre

$$f(x_1) \le f(x_0) + \lambda[f(x_2) - f(x_0)] = \lambda f(x_2) + (1 - \lambda) f(x_0).$$

La tesi segue dalla (1), osservando che $x_1 = \lambda x_2 + (1 - \lambda) x_0$]

1.48 Sia $f(x)$ una funzione convessa in un intervallo aperto (a, b). Dimostrare che $f(x)$ è continua in (a, b).

[Sia $x_0 \in (a, b)$. In base alla parte (b) dell'esercizio precedente, il rapporto incrementale $g(x)$ è crescente in (a, b). Come tutte le funzioni crescenti, $g(x)$ è limitata in ogni intervallo chiuso $[x_1, x_2] \subset (a, b)$; infatti

$$g(x_1) \le g(x) \le g(x_2), \qquad \forall\, x \in [x_1, x_2],\ x \ne x_0.$$

Scegliamo $a < x_1 < x_0 < x_2 < b$ e calcoliamo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) = \lim_{x \to x_0} g(x)(x - x_0) = 0.$$

Quindi $f(x)$ è continua in x_0. Si noti che l'espressione $g(x)(x - x_0)$ tende a zero per $x \to x_0$, essendo prodotto di una funzione limitata per una che tende a zero. (Una diversa dimostrazione è proposta nell'esercizio 9.28 della parte prima)]

1.49 Sia $f(x)$ una funzione convessa in un intervallo aperto I. Dimostrare che $f(x)$ è continua all'interno dell'intervallo.

[Evidentemente $f(x)$ è convessa in ogni intervallo aperto (a, b) contenuto in I e quindi, per l'esercizio precedente, è anche continua in (a, b)]

1.50 Mostrare con un esempio che esistono funzioni convesse in intervalli chiusi che non sono continue.

[Ad esempio la funzione definita nell'intervallo $[0, 1]$ da $f(0) = 1$ e $f(x) = 0$ se $x \in (0, 1]$ è discontinua per $x = 0$ ed è convessa in $[0, 1]$. Si noti che, in base all'esercizio precedente, una funzione convessa definita in un intervallo chiuso può essere discontinua solo agli estremi dell'intervallo]

1.51 Sia $f(x)$ una funzione convessa in un intervallo aperto I. Siano $a,\, b \in I$, con $a < b$. Dimostrare che $f(x)$ è *lipschitziana* (si veda la definizione nel paragrafo 12C della parte prima) nell'intervallo (a,b).

[Come nell'esercizio 1.48, i rapporti incrementali

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\,, \qquad\qquad \frac{f(x)-f(b)}{x-b}\,,$$

sono limitati in (a,b), cioè esiste un numero L tale che

$$\left|\frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a}\right| \leq L\,, \qquad\qquad \left|\frac{f(x_1)-f(b)}{x_1-b}\right| \leq L\,, \qquad \forall\, x_1 \in (a,b).$$

Utilizziamo ora il fatto che il rapporto incrementale centrato in x_1 è crescente, cioè in particolare:

$$\frac{f(a)-f(x_1)}{a-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(b)-f(x_1)}{b-x_1}$$

per $a < x_2 < b$, con $x_2 \neq x_1$. Dalle relazioni scritte si ottiene

$$\left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right| \leq L\,, \qquad\qquad \forall\, x_1,\, x_2 \in (a,b),\; x_1 \neq x_2.$$

Perciò $f(x)$ è lipschitziana in (a,b)]

1E. Verifica di disuguaglianze con l'uso delle derivate

Per provare una disuguaglianza del tipo $f(x) \geq g(x)$, per $x \in [a,b]$, utilizzeremo i criteri esposti negli esercizi che seguono.

1.52 Siano $f(x)$, $g(x)$ due funzioni continue in $[a,b]$ e derivabili in (a,b). Supponendo che $f(a) \geq g(a)$ e che $f'(x) \geq g'(x)$ per ogni $x \in (a,b)$, dimostrare che $f(x) \geq g(x)$ per ogni $x \in [a,b]$.

[Applichiamo il teorema di Lagrange alla funzione $f-g$ nell'intervallo $[a,x]$: esiste $\xi \in (a,x)$ tale che

$$[f(x)-g(x)]-[f(a)-g(a)] = [f'(\xi)-g'(\xi)](x-a).$$

Dato che $f'(\xi)-g'(\xi) \geq 0$, $x-a > 0$, $f(a)-g(a) \geq 0$, risulta che $f(x)-g(x) \geq 0$, come si voleva dimostrare]

1.53 Siano $f(x)$, $g(x)$ due funzioni continue in $[a,b]$ e derivabili in (a,b). Si supponga che $f'(x) \geq g'(x)$ per ogni $x \in (a,b)$ e che $f(x_0) = g(x_0)$ per qualche punto $x_0 \in (a,b)$. Dimostrare che:

(a) $\quad f(x) \geq g(x)$ per ogni $x \in [x_0,b]$;

(b) $\qquad f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, x_0]$.

[Analogamente a come indicato nell'esercizio precedente, si può applicare il teorema di Lagrange alla funzione differenza $f - g$ nell'intervallo di estremi x_0 ed x]

1.54 Siano $f(x)$, $g(x)$ due funzioni derivabili in (a, b) e sia x_0 un punto di (a, b). Dimostrare che vale l'implicazione:

$$\left.\begin{array}{ll} f(x_0) = g(x_0) & \\ f'(x) \geq g'(x), & \forall\, x \in (x_0, b) \\ f'(x) \leq g'(x), & \forall\, x \in (a, x_0) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq g(x), \quad \forall\, x \in (a, b).$$

[Si può utilizzare il teorema di Lagrange, come fatto in precedenza. Oppure si può studiare la funzione differenza $h(x) = f(x) - g(x)$. Essendo $h'(x) = f'(x) - g'(x)$, risulta

$$h'(x) \geq 0 \quad \text{per} \quad x \in (x_0, b);\ h'(x) \leq 0 \quad \text{per} \quad x \in (a, x_0).$$

Perciò $h(x)$ è crescente per $x \geq x_0$ ed è decrescente per $x \leq x_0$. Quindi x_0 è un punto di minimo assoluto per la funzione $h(x)$ nell'intervallo (a, b), ed il valore minimo è $h(x_0) = f(x_0) - g(x_0) = 0$. Risuita quindi $h(x) \geq 0$, cioè $f(x) - g(x) \geq 0$, per ogni $x \in (a, b)$]

1.55 Dimostrare le disuguaglianze

(a) $\qquad e^x \geq 1 + x, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R};$

(b) $\qquad x \geq \log(1 + x), \qquad \forall\, x > -1.;$

[Si può utilizzare il criterio dell'esercizio precedente, con $x_0 = 0$. Ad esempio, per la disuguaglianza in (a) poniamo $f(x) = e^x$, $g(x) = 1 + x$. Risulta $f(0) = g(0) = 1$ e inoltre $f'(x) = e^x \gtreqless 1 = g'(x)$ se e solo se $x \gtreqless 0$. In base al criterio dell'esercizio precedente otteniamo $f(x) \geq g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Per dimostrare (a) si può procedere anche nel modo seguente: la funzione $h(x) = e^x - (1 + x)$ ha un minimo assoluto per $x = 0$; infatti la derivata $h'(x) = e^x - 1$ si annulla per $x = 0$; è positiva per $x > 0$, è negativa per $x < 0$. Perciò $h(x) \geq h(0) = 0$, cioè $e^x - (1 + x) \geq 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$.

La disuguaglianza in (b) si può dimostrare come fatto per la disuguaglianza in (a). Si noti anche che la (b) segue dalla (a), calcolando il logaritmo in base e di entrambi i membri. Infine (a),(b) si possono interpretare come disuguaglianze di convessità, secondo la definizione (2) del paragrafo precedente, con $x_0 = 0$ e $f(x)$ data rispettivamente da e^x oppure $-\log(1 + x)$]

1.56 Verificare che, per ogni $x > 0$, vale la disuguaglianza

$$\frac{x^2 + 1}{8} \geq \frac{x^2}{(x + 1)^2}$$

[Le derivate di $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{8}$, $g(x) = \dfrac{x^2}{(x + 1)^2}$ valgono

$$f'(x) = \frac{x}{4} \quad \text{e} \quad g'(x) = \frac{2x(x+1)^2 - 2(x+1)x^2}{(x+1)^4} = \frac{2x(x+1)[(x+1)-x]}{(x+1)^4} = \frac{2x}{(x+1)^3}.$$

Per $x > 0$ risulta $f'(x) \geq g'(x)$ se e solo se

$$(x+1)^3 \geq 8 \quad \Leftrightarrow \quad x+1 \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 1.$$

Essendo $f(1) = g(1) = 1/4$, la disuguaglianza segue dall'esercizio 1.54.

Si può anche procedere direttamente cansiderando la funzione $h(x) = f(x) - g(x)$. Come in precedenza si verifica che $h'(x)$ si annulla per $x = 1$, $h'(x) > 0$ per $x > 1$, $h'(x) < 0$ se $x \in (0, 1)$. Perciò il punto $x = 1$ è di minimo assoluto per $h(x)$ in $(0, +\infty)$. Essendo $h(1) = f(1) - g(1) = 1/4 - 1/4 = 0$, risulta $h(x) \geq h(1) = 0$ per ogni $x > 0$, che è quanto si voleva dimostrare]

1.57 Dimostrare che, per ogni $x > 0$ valgono le disuguaglianze

(a) $\dfrac{(x+1)^2}{x} \geq 4$ (b) $\dfrac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} > 2$

(c) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x}} \geq 2$ (c) $\sqrt{x} \leq \dfrac{x+1}{2}$

[(a) La derivata della funzione $f(x) = (x+1)^2/x$ vale $f'(x) = (x^2-1)/x^2$ ed è positiva per $x > 1$, negativa per $(0 <)x < 1$. Perciò il punto $x = 1$ è di minimo assoluto per $f(x)$ nell'intervallo $(0, +\infty)$, e risulta $f(x) \geq f(1) = 4$ per ogni $x > 0$. Si noti che, più semplicemente, la disuguaglianza si può provare per via algebrica: Se $x > 0$, $(x+1)^2 \geq 4x$ equivale a $(x-1)^2 \geq 0$, che è sicuramente verificata.
(b) La derivata della funzione $f(x) = (x+1)^2/\sqrt{x}$ vale

$$f'(x) = \frac{2(x+1)\sqrt{x} - (1/2\sqrt{x})(x+1)^2}{x} = \frac{x+1}{2x\sqrt{x}}[4x - (x+1)] = \frac{(x+1)(3x-1)}{2x\sqrt{x}}$$

Dal segno della derivata prima si deduce che il punto $x = 1/3$ è di minimo assoluto per $f(x)$ nell'intervallo $(0, +\infty)$. Perciò, per ogni $x > 0$, si ha:

$$f(x) \geq f(\frac{1}{3}) = \frac{16\sqrt{3}}{9} > 2 \qquad \text{(infatti } \frac{16\sqrt{3}}{9} > 2 \Leftrightarrow 8\sqrt{3} > 9 \Leftrightarrow 64 \cdot 3 > 81)$$

(c) La derivata della funzione $f(x) = (x+1)/\sqrt{x}$ vale $f'(x) = (x-1)/(2x\sqrt{x})$ e si annulla per $x = 1$, è positiva per $x > 1$, è negativa se $0 < x < 1$. Perciò, il punto $x = 1$ è di minimo assoluto per $f(x)$ nell'intervallo $(0, +\infty)$. Per $x > 0$ risulta quindi $f(x) \geq f(1) = 2$. Si noti che la disuguaglianza si può provare per via algebrica: $(x+1) \geq 2\sqrt{x}$ equivale a $(\sqrt{x}-1)^2 \geq 0$. La (d) si prova in modo analogo. Infine, si noti che le disuguaglianze (a), (c), (d) sono fra loro equivalenti]

1.58 Verificare che, per ogni $x > 0$, valgono le disuguaglianze

(a) $x \log x \geq x - 1$

(b) $x \log_a x \geq (x-1) \log_a e \qquad (a > 1)$

[(a) La derivata della funzione $f(x) = x \log x - (x-1)$ vale $f'(x) = \log x$ e si annulla per $x = 1$, è positiva per $x > 1$, è negativa per $x \in (0,1)$. Il punto $x = 1$ è di minimo assoluto per $f(x)$. Perciò $f(x) \geq f(1) = 0$, che è quanto si voleva dimostrare. Si può procedere in modo analogo per provare la (b)]

1.59 Dimostrare che, per $x > 0$, valgono le disuguaglianze

$$\frac{1}{x+1} < \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

[Proponiamo due metodi di dimostrazione. Con il primo proveremo le disuguaglianze con il segno $\leq$; poniamo

$$f_1(x) = \frac{1}{x+1}; \quad f_2(x) = \log\left(1 + \frac{1}{x}\right); \quad f_3(x) = \frac{1}{x}.$$

Le derivate valgono

$$f_1'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}; \quad f_2'(x) = \frac{-1}{x(x+1)}; \quad f_3'(x) = \frac{-1}{x^2}.$$

Dato che $0 < x < x+1$, risulta $f_1'(x) > f_2'(x) > f_3'(x)$, $\forall\, x > 0$. Inoltre essendo $\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim_{x\to+\infty} f_2(x) = \lim_{x\to+\infty} f_3(x) = 0$, si ottiene la tesi in modo analogo all'esercizio 1.53 (b), o, più precisamente, come indicato nell'esercizio seguente. Il secondo metodo, più semplice, si basa direttamente sul teorema di Lagrange per la funzione $\log x$: Fissato $x > 0$, esiste $\xi \in (x, x+1)$ tale che

$$\log(x+1) - \log x = \frac{1}{\xi}.$$

Si ottengono le disuguaglianze enunciate osservando che:

$$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{x}, \qquad \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \log(x+1) - \log x \;]$$

1.60 Siano $f(x)$, $g(x)$ due funzioni derivabili per $x > a$. Dimostrare che $f(x) \leq g(x)$, per ogni $x > a$, se valgono le due condizioni:

$$f'(x) \geq g'(x), \qquad \forall\, x > a; \qquad \lim_{x\to+\infty} [f(x) - g(x)] = 0.$$

[Applichiamo il teorema di Lagrange alla differenza $f - g$ nell'intervall0 $[x, b]$, con $a < x < b$: Esiste $\xi \in (x, b)$ per cui

$$[f(b) - g(b)] - [f(x) - g(x)] = [f'(\xi) - g'(\xi)](b - x) \geq 0.$$

Al limite, per $b \to +\infty$, otteniamo la tesi]

1.61 Consideriamo per $x > 0$ la funzione $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$. Utilizzando le disuguaglianze dell'esercizio 1.58 verificare che:

(a) la funzione $f(x)$ è strettamente crescente per $x > 0$;

(b) per ogni $x > 0$ risulta $f(x) < e$.

[(a) La derivata della funzione $f(x) = e^{x\,\log(1+\frac{1}{x})}$ vale $f'(x) = e^{x\,\log(1+\frac{1}{x})}[\log(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1}]$ ed è strettamente positiva per la disuguaglianza dell'esercizio 1.59; (b) la limitazione $f(x) < e$ equivale a $\log f(x) < \log e = 1$, cioè

$$\log(1+\tfrac{1}{x}) < \tfrac{1}{x},$$

che è verificata in base all'esercizio 1.58. La limitazione $f(x) < e$, per $x > 0$, segue anche dalla precedente parte (a) e dal fatto che $f(x)$ converge ad e, per $x \to +\infty$]

1.62 Siano p, q due numeri reali maggiori di 1 e tali che $1/p + 1/q = 1$. Dimostrare che, per ogni coppia x, y di numeri non negativi, si ha

$$xy \le \tfrac{x^p}{p} + \tfrac{y^q}{q}.$$

[Fissato $y \ge 0$, consideriamo la funzione $f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy$, per cui risulta $f'(x) = x^{p-1} - y$. Perciò $f'(x) \gtreqless 0$ per $x \gtreqless y^{\frac{1}{p-1}}$ e $f(x)$ assume il suo valore minimo per $x = y^{1/(p-1)}$. Quindi

$$f(x) \ge f(y^{\frac{1}{p-1}}) = \frac{1}{p} y^{\frac{p}{p-1}} + \frac{1}{q} y^q - y^{\frac{1}{p-1}+1}.$$

Si verifica facilmente che gli esponenti sono uguali fra loro, cioè che

$$\frac{1}{p-1} + 1 = \frac{p}{p-1} = q \qquad \text{(essendo } \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}\text{)}.$$

Si ottiene $f(x) \ge 0$ per ogni $x \ge 0$]

1.63 Siano a, b due numeri reali. Verificare che

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \le \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

[La funzione $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ è (strettamente) crescente per $x \ge 0$. Perciò, essendo $|a+b| \le |a| + |b|$, risulta anche $f(|a+b|) \le f(|a|+|b|)$ e quindi

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \le \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} = \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \le \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|} \;]$$

1.64 Dimostrare le seguenti disuguaglianze, dette di Bernoulli:

(a) $(1+x)^\alpha \ge 1 + \alpha x, \qquad \forall\, \alpha > 1, \quad \forall\, x \ge -1;$

(b) $(1+x)^\alpha \le 1 + \alpha x, \qquad \forall\, \alpha \in (0,1), \quad \forall\, x \ge -1.$

[a) Si verifica che la funzione definita per $x \ge -1$ da

$$f(x) = (1+x)^\alpha - (1+\alpha x),$$

ha il suo minimo assoluto in corrispondenza del punto $x = 0$ e inoltre $f(0) = 0$; (b) si ricava dalla disuguaglianza in (a) scambiando α con $1/\alpha$ e ponendo $x = \alpha y$. Con tali posizioni la disuguaglianza in (a) diviene:

$$(1+\alpha y)^{1/\alpha} = (1+x)^{1/\alpha} \geq 1 + \frac{1}{\alpha}x = 1 + y,$$

da cui $1 + \alpha y \geq (1+y)^\alpha$]

1.65 Per $p \geq 0$ consideriamo la funzione

$$f(x) = x^p \log(1+x), \qquad x \geq 0.$$

Mediante la disuguaglianza di Bernoulli 1.64 (b) verificare che, per ogni $x \geq 0$ e per ogni $\alpha \in (0,1)$, risulta

$$f(\alpha)f(x) \leq f(\alpha x).$$

[Semplificando per la potenza $(\alpha x)^p$, la tesi equivale a

$$\log(1+\alpha)\log(1+x) \leq \log(1+\alpha x).$$

Utilizzando la relazione $\log(1+\alpha) \leq \alpha$, (si veda l'esercizio 1.51 (b)) e la disuguaglianza di Bernoulli 1.64 (b), otteniamo

$$\log(1+\alpha)\log(1+x) \leq \alpha\log(1+x) = \log(1+x)^\alpha \leq \log(1+\alpha x) \;\;]$$

1.66 Dimostrare che, se $p > 1$, risulta

$$(x+y)^p \leq 2^{p-1}(x^p + y^p), \qquad \forall\, x,\, y \geq 0.$$

[Se $y = 0$ la disuguaglianza è verificata. Altrimenti, se $y > 0$, dividendo entrambi i membri per y^p e ponendo $t = x/y$, otteniamo la disuguaglianza equivalente

$$(t+1)^p \leq 2^{p-1}(t^p + 1), \qquad \forall\, t \geq 0.$$

Si può provare tale disuguaglianza studiando il segno della derivata (rispetto a t) di entrambi i membri e osservando che vale il segno di uguale se $t = 1$ (si vedano i dettagli nell'esercizio 10.41 della parte prima).

Si può anche procedere, più rapidamente, nel seguente modo: la funzione $f(t) = t^p$ è convessa per $t \geq 0$, dato che $f''(t) = p(p-1)t^{p-2} > 0$ se $t > 0$. Perciò, in base alla definizione di convessità (si veda la (1) del paragrafo 1D con $\lambda = 1/2$) risulta

$$f(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y) \leq \tfrac{1}{2}f(x) + \tfrac{1}{2}f(y), \qquad \forall\, x,\, y \geq 0,$$

cioè $2^{-p}(x+y)^p \leq 2^{-1}(x^p + y^p)$, che equivale a quanto si voleva dimostrare]

1F. Applicazioni della formula di Taylor

Ricordiamo la formula di Taylor con il resto di Lagrange: *Se $f(x)$ è una funzione derivabile $n+1$ volte in un intervallo I, per ogni x, $x_0 \in I$ esiste un punto $\xi \in I$ tale che*

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Nel paragrafo 11C della parte prima è proposto un elenco delle formule di Taylor (con centro $x_0 = 0$ e con resto di Peano) per alcune funzioni elementari.

Dalla formula di Taylor con il resto di Lagrange si ottiene la seguente stima del resto: *sia $f(x)$ una funzione derivabile $n+1$ volte in un intervallo I e sia M_{n+1} tale che*

$$|f^{(n+1)}(x)| \le M_{n+1}\,, \qquad\qquad \forall\, x \in I.$$

Allora, per ogni x, $x_0 \in I$, si ha

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x),$$

dove $|R_n(x)| \le M_{n+1}\dfrac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$.

1.67 Esprimere in forma decimale, con tre cifre decimali esatte, il seno di un radiante.

[Consideriamo la formula di Taylor per la funzione sen x, con centro $x_0 = 0$ e con $x = 1$. La derivata n-sima vale $\pm$ sen x, oppure $\pm$ cos x , in dipendenza da n (si veda anche l'esercizio 10.25 della parte prima). In ogni caso $|f^{(n)}(x)| \le 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Perciò vale la stima del resto con $M_{n+1} = 1$:

$$|R_n(x)| \le |x-x_0|^{n+1}/(n+1)!$$

Tenendo conto che $x_0 = 0$, $x = 1$, risulta quindi $|R_n(1)| \le 1/(n+1)!$. Calcoliamo $1/(n+1)!$ per alcuni valori di n:

n	1	2	3	4	5	6	7
$(n+1)!$	2	6	24	120	720	5040	40320
$1/(n+1)!$	0.5	0.16..	0.041..	0.0083..	0.0013..	0.00019..	0.00002..

Dalla tabella risulta in particolare che $|R_6(1)| \le 0.00019.. < 0.0002$. Perciò, con un errore inferiore a $0.0002 = 2 \cdot 10^{-4}$, sen 1 è uguale al polinomio di Taylor $x - x^3/3! + x^5/5!$ (che è di grado non superiore a 6) calcolato per $x = 1$:

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\overset{(x=1)}{=}1-\frac{1}{6}+\frac{1}{120}=\frac{120-20+1}{120}=\frac{101}{120}=0.841\overline{6};$$

perciò sen $1=0.841\overline{6}\pm 0.0002$, cioè

$$0.8414<\operatorname{sen}1<0.8419.$$

Quindi sen 1, con tre cifre decimali esatte, è espresso da 0.841..]

1.68 Utilizzando la formula di Taylor, verificare che le prime tre cifre decimali di $\sqrt{2}$ sono 1.414..

[Le derivate prima e seconda di $f(x)=\sqrt{x}$ valgono

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},\qquad\qquad f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-3/2}.$$

Utilizziamo la formula di Taylor al primo ordine per $f(x)$ con il resto di Lagrange: Esiste ξ nell'intervallo di estremi x_0,x per cui

$$\sqrt{x}=\sqrt{x_0}+\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{1}{2}(-\frac{1}{4})\xi^{-3/2}(x-x_0)^2.$$

Essendo $x=2$, è opportuno scegliere per x_0 un valore vicino a 2, in modo che sia semplice calcolarne la radice quadrata. Ad esempio, se $x_0=(1.4)^2=1.96$, risulta evidentemente $\sqrt{x_0}=1.4$. Essendo $1<1.96<\xi(<2)$, il resto di Lagrange verifica le limitazioni

$$0\geq\frac{1}{2}(-\frac{1}{4})\xi^{-3/2}(x-x_0)^2\geq-\frac{1}{8}(x-x_0)^2=-\frac{(0.04)^2}{8}=-0.0002;$$

perciò, essendo $\sqrt{x_0}+\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)=1.4+\frac{1}{2\cdot 1.4}\cdot 0.04=1.4+\frac{1}{70}=1.41428..$; risulta $1.4142-0.0002<\sqrt{2}<1.41428$, da cui $\sqrt{2}=1.414..$]

1.69 Utilizzando la formula di Taylor, verificare che le prime tre cifre decimali del numero e sono 2. 718..

[La derivata n-sima della funzione $f(x)=e^x$ è $f^{(n)}(x)=e^x$, $\forall\, n$. In particolare $f^{(n)}(0)=1$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$. In base alla formula di Taylor di centro $x_0=0$ per la funzione $f(x)$, con $x>0$, esiste $\xi\in(0,x)$ tale che

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}x^k+\frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Il resto è positivo e, essendo e^x crescente, risulta $e^\xi<e^x$. Per $x=1$ otteniamo

$$e=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+R_n(1),\qquad\text{con}\qquad 0<R_n(1)<\frac{e}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}.$$

Con l'ausilio della tavola dell'esercizio 1.64 per $n=6$, od anche direttamente, si verifica che $3/7!=1/1680<0.0006$, che è quindi una stima dell'errore che si commette nel calcolare il numero e con la somma ($n=6$):

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}=\frac{1957}{720}=2.7180\overline{5};$$

perciò $2.718 < e < 2.7187$, da cui $e = 2.718..$]

1.70 Verificare che, per $x \in (0, \pi/2)$, valgono le disuguaglianze

$$1 - \frac{x^2}{6} < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}$$

[Consideriamo la formula di Taylor con il resto di Lagrange per la funzione sen x con centro $x_0 = 0$ e $x \in (0, \pi/2)$. Essendo $f^{(5)}(x) = \cos x$, esiste $\xi \in (0, x)$ per cui

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\cos \xi}{5!} x^5.$$

Essendo $\xi \in (0, \pi/2)$ risulta $0 < \cos \xi < 1$. Perciò

$$x - \frac{x^3}{3!} < \operatorname{sen} x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!},$$

da cui la tesi, dividendo tutti membri per x]

1.71 Verificare che, per ogni $x \in [0, \pi/4]$, si ha

$$0 \leq \operatorname{tg} x - x \leq 2x^2$$

[Si può utilizzare la formula di Taylor con il resto di Lagrange per la funzione $f(x) = \operatorname{tg} x$ con centro in $x_0 = 0$. Esiste $\xi \in (0, x)$ per cui

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{2} f''(\xi) x^2.$$

La tesi si ottiene osservando che la derivata seconda

$$f''(x) = 2 \frac{\operatorname{sen} x}{(\cos x)^3}$$

è crescente in $[0, \pi/4]$ (infatti sia sen x, che $(\cos x)^{-3}$, sono funzioni positive e crescenti) e quindi

$$0 = f''(0) \leq f''(\xi) \leq f''(\frac{\pi}{4}) = \frac{2 \operatorname{sen} (\pi/4)}{\cos^3 (\pi/4)} = 4 \text{]}$$

1.72 Dimostrare che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, risulta

$$1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

[Si proceda in modo analogo agli esercizi precedenti, utilizzando la formula di Taylor (con $|\xi| < |x|$):

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{\cos \xi}{4!} x^4 \text{]}$$

1.73 Dimostrare che, per ogni $x > 0$ e per ogni $\alpha \in (0, 1)$, si ha:

$$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2<(1+x)^\alpha<1+\alpha x$$

[Si utilizzi la formula di Taylor con centro $x=0$ per la funzione $f(x)=(1+x)^\alpha$ e si osservi che, con le ipotesi fatte, risulta $\alpha(\alpha-1)\le f''(x)\le 0$ (si confronti anche con l'esercizio 1.64 (b))]

1.74 Dimostrare le seguenti disuguaglianze

(a) $\log(1+x)>x-x^2/2, \qquad \forall\, x>0;$

(b) $e^x\ge ex, \qquad \forall\, x\in\mathbb{R}.$

[a) Utilizziamo la formula di Taylor per la funzione $f(x)=\log(1+x)$, con $x>0$ e $x_0=0$. Le derivate prima e seconda valgono

$$f'(x)=1/(1+x); \qquad f''(x)=-1/(1+x)^2.$$

Perciò $f(0)=0$, $f'(0)=1$, ed esiste $\xi\in(0,x)$ tale che

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2(1+\xi)^2}.$$

La (a) si ottiene osservando che $1+\xi>1$, dato che $\xi>0$.
La (b) segue dalla formula di Taylor per la funzione e^x con centro $x_0=1$, oppure, più semplicemente, dalla convessità della funzione e^x: la funzione e^x è al di sopra della sua retta tangente nel punto $x_0=1$, che ha equazione $y=f(1)+f'(1)(x-1)=ex$]

1.75 Le seguenti disuguaglianze forniscono una stima della velocità di convergenza della successione $a_n=(1+1/n)^n$ al suo limite e:

$$0<e-(1+\frac{1}{n})^n<\frac{e}{2n}<\frac{3}{2n}.$$

A titolo indicativo, per valutare la stima precedente, riportiamo la seguente tavola per alcuni valori di n.

n	a_n	$e-a_n$	$e/2n$	$3/2n$
1	2	0.7182818	1.3591409	1.5
10	2.5937424	0.1245393	0.1359140	0.15
100	2.7048138	0.0134679	0.0135914	0.015
1000	2.7169239	0.0013578	0.0013591	0.0015
10000	2.7181459	0.0001359	0.0001359	0.00015

Dimostrare la stima sopra proposta.

[La disuguaglianza di sinistra ($a_n<e$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$) è ben nota (si veda anche l'esercizio 1.64 (b)). Con lo scopo di provare le disuguaglianze a destra, effettuiamo la sostituzione $1/n=x$ e studiamo la funzione

$$f(x) = (1+x)^{1/x} = e^{(1/x)\log(1+x)} \qquad\qquad (x > 0)$$

In base alla (a) dell'esercizio precedente abbiamo

$$\frac{1}{x}\log(1+x) > \frac{1}{x}(x - \frac{x^2}{2}) = 1 - \frac{1}{2}x.$$

Per la (b) dell'esercizio precedente risulta poi

$$f(x) = e^{(1/x)\log(1+x)} \geq e\frac{1}{x}\log(1+x) > e(1 - \frac{1}{2}x).$$

Perciò, ponendo di nuovo $x = 1/n$ e ricordando che $e < 3$, abbiamo

$$e - (1+\frac{1}{n})^n = e - f(\frac{1}{n}) < e - e(1 - \frac{1}{2n}) = \frac{e}{2n} < \frac{3}{2n} \ ]$$

Capitolo 2

GRAFICI DI FUNZIONI

2A. Insiemi di definizione

Se, come spesso accade, una funzione è assegnata mediante la sua espressione analitica $y = f(x)$, un primo problema da risolvere è quello di determinare il *dominio* di f, cioè l'insieme dei numeri reali x per i quali l'espressione $f(x)$ ha significato. Tale insieme si chiama anche *insieme di definizione* di f o *campo di esistenza* di f.

Spesso, la funzione $f(x)$ è composta mediante due funzioni ψ e ϕ, cioè si ha

$$f(x) = \psi(\phi(x)) \tag{1}$$

con ψ definita in un intervallo I di $\mathbb{R}$.

Supposto, per fissare le idee, che I sia l'intervallo aperto (a, b), allora, per determinare il dominio della funzione (1), si dovranno risolvere le disequazioni

$$\begin{cases} a < \phi(x) \\ \phi(x) < b\,. \end{cases}$$

Queste considerazioni suggeriscono che in molti casi, per determinare il campo di esistenza di una funzione, si dovranno risolvere certe disequazioni.

Supponendo, per cominciare, che la funzione (1) sia composta mediante una funzione elementare ψ ed una funzione $\phi : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, possiamo esaminare i seguenti casi:

1°) L'insieme di definizione di

$$(\phi(x))^n, \quad \sqrt[m]{\phi(x)} \quad (m \text{ dispari}), \quad a^{\phi(x)}, \quad \operatorname{sen}\phi(x), \quad \cos\phi(x), \quad \operatorname{arctg}\phi(x),$$

(ove n e m sono interi positivi e $a > 0$) coincide con l'insieme X di definizione di $\phi(x)$.

2°) L'insieme di definizione di

$\sqrt[m]{\phi(x)}$ (m pari), $(\phi(x))^\alpha$

(ove $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$) è uguale a $\{x \in X \; : \; \phi(x) \geq 0\}$.

3°) L'insieme di definizione di

$\log_a \phi(x)$, $(\phi(x))^{-\alpha}$

(ove $a > 0$, $a \neq 1$; $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$) è uguale a $\{x \in X \; : \; \phi(x) > 0\}$.

4°) L'insieme di definizione di

$\operatorname{arcsen} \phi(x)$, $\arccos \phi(x)$

è uguale a $\{x \in X \; : \; -1 \leq \phi(x) \leq 1\}$.

Determinare il campo di esistenza delle seguenti funzioni

2.1 $y = \sqrt{x+1}$; $y = \sqrt[3]{x+1}$; $y = \sqrt{x(1-x^2)}$

$[[-1, +\infty); \;\; \mathbb{R}; \;\; (-\infty, -1] \cup [0, 1]]$

2.2 $y = \sqrt{2 - x^2}$; $y = \sqrt{(x-3)(x+5)}$; $y = \sqrt{(x-2)(x+6)}$

$[[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]; \;\; (-\infty, -5) \cup [3, +\infty); \;\; (-\infty, -6] \cup [2, +\infty)]$

2.3 $y = \sqrt{6x^2 - 5x + 1}$; $y = \sqrt{12 + x - x^2}$; $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{2-x}$

$[(-\infty, 1/3] \cup [1/2, +\infty); \;\; [-3, 4]; \;\; [1, 2]]$

2.4 $y = \sqrt[5]{x-4}$; $y = \sqrt[4]{(x+1)/(6-x)}$; $y = 1/\sqrt{|x+2|}$

$[\mathbb{R}; \;\; [-1, 6); \;\; \mathbb{R} - \{-2\}]$

2.5 $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 7x + 12}}$; $y = \dfrac{\sqrt{x^2-4} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{x+5}}$

$[(-\infty, 0] \cup [2, 3) \cup (4, +\infty); \;\; (-5, -2]]$

2.6 $y = 3^{x/(x-1)}$; $y = 5^{x^2 - 7x + 15}$; $y = 3^{\cos x}$

$[\; \mathbb{R} - \{1\}; \;\; \mathbb{R}; \;\; \mathbb{R}]$

2.7 $y = \log[x/(x-2)]$; $\quad y = \log[(2+x)/(3-x)]$; $\quad y = \log\sqrt{x}$

$[\ (-\infty,0)\cup(2,+\infty); \quad (-2,3); \quad (0,+\infty)]$

2.8 $y = \log(10x^2 - 7x + 1)$; $\quad \sqrt{\log x}$; $\quad \sqrt[4]{3-\log_2 x}$

$[\ (-\infty,1/5)\cup(1/2,+\infty); \quad [1,+\infty); \quad (0,8]]$

2.9 $y = \log\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$; $\quad \log\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$; $\quad y = \log_2 6^x$

$[\ (-1,1)\cup(2,+\infty); \quad (-\infty,-1)\cup(0,+\infty); \quad \mathbb{R}]$

2.10 $y = 3^{\log_2 x}$; $\quad y = \log(4^x - 3)$; $\quad y = \log[(\log x) - 1]$

$[\ (0,+\infty); \ ; (\log_4 3,+\infty); \quad (e,+\infty)]$

2.11 $y = \sqrt{\log(x+1+1/x)}$; $\quad y = \sqrt{\log_{1/3}(2x-1)}$

$[(0,+\infty); \quad (1/2,1]]$

2.12 $y = (\log_3 x)^{\pi}$; $\quad y = [(\log x) - 1]^{\sqrt{2}}$; $\quad y = (\log_5 x - 5)^{-\sqrt{3}}$

$[[1,+\infty); \quad [e,+\infty); \quad (5^5,+\infty)]$

2.13 $y = (\sqrt{3x} - 6)^{-1/6}$; $\quad y = \log[(\log x - 1)^{\pi}]$; $\quad y = \log[(\log x - 1)^{-\sqrt{5}}]$

$[(12,+\infty); \quad (e,+\infty); \quad (e,+\infty)]$

2.14 $y = \sqrt{\operatorname{arcsen} x}$; $\quad y = \log \operatorname{sen} x$; $\quad y = \log\cos x$

$[[0,1]; \quad \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(2k\pi,(2k+1)\pi); \quad \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi)]$

2.15 $y = \operatorname{arcsen}[x/(x-1)]$; $\quad y = \operatorname{arcsen}\log x$; $\quad y = \operatorname{arcsen} 2^x$

$[(-\infty,1/2]; \quad [1/e,e]; \quad (-\infty,0]]$

2.16 $y = \log|\arccos x|$; $\quad y = \log|\operatorname{arcsen} x|$; $\quad y = 7^{\operatorname{arcsen} x}$

$[[-1,1); \quad [-1,1]-\{0\}; \quad [-1,1]]$

2.17 $y = 3^{\operatorname{sen}\log_{\frac{1}{2}} x}$; $\quad y = \sqrt{\operatorname{arctg} x}$; $\quad y = 2^{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}$

$[(0,+\infty);\quad [0,+\infty);\quad \mathbb{R}-\{0\}]$

2.18 $y = \log\, \mathrm{arctg}\, x;\quad y = \log\,(\frac{\pi}{4} - \mathrm{arcsen}\, x);\quad y = \sqrt{\mathrm{sen}\, 2x}$

$[(0,+\infty);\quad [-1,\sqrt{2}/2);\quad \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi]]$

2.19 $y = \log\,(\mathrm{arctg}\, x - \pi);\quad y = \mathrm{arcsen}\,\left(1+\frac{1}{x}\right);\quad y = \mathrm{sett}\,\mathrm{sen}\, h3^x$

$[\emptyset;\quad (-\infty,-1/2];\quad \mathbb{R}]$

2.20 $y = \log\, \arccos \frac{x-2}{x-3};\quad y = \log_x\, 5;\quad y = \mathrm{tg}\,|x|$

$[(-\infty,\frac{5}{2});\quad (0,1)\bigcup(1,+\infty);\quad \mathbb{R}-\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{\frac{\pi}{2}+k\pi\}]$

2.21 $y = \sqrt{[\log\,(x+1)]/3^{\mathrm{arctg}\, x}};\quad y = \log_x\, x;\quad y = \log_x\, \log\, x$

$[(0,+\infty);\quad (0,+\infty)-\{1\};\quad (1,+\infty)]$

2.22 $y = [(\mathrm{arcsen}\, \log_{1/3}\, x)/x\log_{1/2}\, x]^{-3/2}$

$[[1/3,3]-\{1\}]$

2.23 $y = \log_x\,(x^2-3x+2);\quad y = \log_{x^2-2x}\,(3x^2-4x+1)$

$[(0,1)\bigcup(2,+\infty);\quad (-\infty,0)\bigcup(2,+\infty)]$

2.24 $y = (f(x))^x;\ \ y = x^{f(x)}$ con $f : X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

$[\{x\in X\ : f(x)>0\}\ \cup\ (\{x\in X\ : f(x)=0\}\cap\,]0,+\infty[)\ \cup\ (\{x\in X\ : f(x)<0\}\ \cap\ \mathbb{Z});$
$(X\cap]0,+\infty[)\ \cup\ (\{x\in X\ : f(x)>0\}\ \cap\ \{0\})\ \cup\ (\{x\in X\ : f(x)\in\mathbb{Z}\}\cap\,]-\infty,0[)\ ]$

2.25 $y = (\log\, x)^x;\ \ y = x^{\mathrm{sen}\, x}$ con $f : X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

$[[1,+\infty[;\ \ ]0,+\infty[\ \cup\ \left(\bigcup_{x\in\mathbb{Z}-\{0\}}\{k\frac{\pi}{2}\}\right)\ ]$

2B. Asintoti

Una funzione $f(x)$ ammette per $x \to +\infty$ (oppure $x \to -\infty$) *asintoto orizzontale* di equazione $y = l$ se

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \qquad\qquad \left(\text{oppure} \lim_{x\to-\infty} f(x) = l\right).$$

Una funzione $f(x)$ ammette *asintoto verticale*, per $x \to x_0^+$ (oppure per $x \to x_0^-$), di equazione $x = x_0$ se

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty \qquad\qquad \left(\text{oppure} \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty\right).$$

In figura 2.1 è schematizzato il grafico di una funzione che ammette asintoti orizzontali di equazione $y = l_1$ (per $x \to +\infty$), $y = l_2$ (per $x \to -\infty$) ed asintoti verticali di equazione $x = x_0$, $x = x_1$, $x = x_2$; in particolare in x_0 la funzione ammette un asintoto verticale *destro* (per $x \to x_0^+$) e *sinistro* (per $x \to x_0^-$), mentre in x_1, x_2 ammette rispettivamente solo asintoti per $x \to x_1^-$ e per $x \to x_2^+$.

Un asintoto obliquo per $x \to +\infty$ (in modo analogo si può considerare il caso in cui $x \to -\infty$) per una funzione $f(x)$ è una retta di equazione $y = mx+q$ tale che

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0.$$

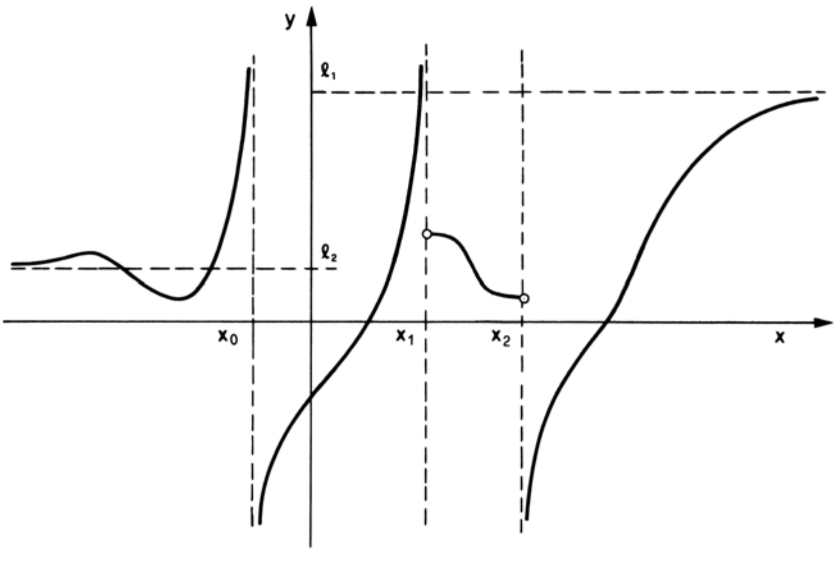


figura 2.1

Le costanti m, q si determinano calcolando i limiti:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad q = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx].$$

Notiamo che, se una funzione ammette asintoto orizzontale per $x \to +\infty$, allora, come mostrato nell'esercizio che segue, è inutile esaminare successivamente se esiste anche un asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

2.26 Dimostrare che, se $f(x)$ ammette per $x \to +\infty$ un asintoto orizzontale di equazione $y = l$, allora $f(x)$ non ammette, per $x \to +\infty$, asintoto obliquo (non orizzontale).

[Per ipotesi $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$. Perciò

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} f(x) \cdot \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = l \cdot 0 = 0;$$

$$q = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to +\infty} f(x) = l.$$

Quindi si ritrova l'asintoto orizzontale di equazione $y = l$]

2.27 Determinare gli asintoti orizzontali e verticali della funzione

$$f(x) = \frac{2x - 1}{1 - x}.$$

[La funzione è definita per $x \neq 1$. Perciò l'insieme di definizione è dato dall'unione di intervalli $(-\infty, 1) \bigcup (1, +\infty)$. I limiti per $x \to \pm\infty$ valgono

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x - 1}{1 - x} = -2, \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{2x - 1}{1 - x} = -2;$$

perciò la retta di equazione $y = -2$ è un asintoto orizzontale. Per $x \to 1$, il numeratore $2x - 1$ converge ad 1, mentre il denominatore $1 - x$ tende a zero, ed è positivo per $x < 1$, mentre è negativo se $x > 1$. Perciò

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2x - 1}{1 - x} = -\infty, \qquad \lim_{x \to 1^-} \frac{2x - 1}{1 - x} = +\infty;$$

la retta di equazione $x = 1$ è un asintoto verticale per $f(x)$]

2.28 Determinare gli asintoti orizzontali e verticali delle funzioni

$$\text{(a)}\ f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^2 - x - 2} \qquad \text{(b)}\ f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2 + 1}$$

[(a) La retta di equazione $y = 3$ è un asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$. Le rette di equazione $x = -1$, $x = 2$ sono asintoti verticali; (b) La funzione non ha asintoti]

2.29 Determinare gli asintoti della funzione $f(x) = \dfrac{x^4 + 1}{x^3 + 1}$.

[Il denominatore di $f(x)$ si annulla se e solo se $x^3 = -1$, cioè $x = -1$. La funzione non è definita in -1. Dato che $f(x) \to \pm\infty$ per $x \to 1^{\pm}$, la retta di equazione $x = -1$ è un asintoto verticale per $f(x)$.

Per $x \to \pm\infty$ la funzione tende a $\pm\infty$ e perciò non ha asintoti orizzontali. Per stabilire l'eventuale esistenza di un asintoto obliquo calcoliamo i limiti

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4+1}{x^4+x} = 1\,;$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4+1}{x^3+1} - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-x}{x^3+1} = 0\,.$$

Quindi la retta di equazione $y = x$ è un asintoto obliquo per $f(x)$]

2.30 Determinare gli asintoti delle funzioni

(a) $f(x) = \log x$ (b) $f(x) = e^x$

(c) $f(x) = \operatorname{sen} x$ (d) $f(x) = \operatorname{arctg} x$

[(a) La funzione $f(x) = \log x$ è definita per $x > 0$ ed i limiti agli estremi dell'intervallo $(0, +\infty)$ di definizione valgono:

$$\lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} \log x = +\infty\,.$$

Perciò l'asse y $(x = 0)$ è un asintoto verticale (destro) per $f(x)$, che invece non ha asintoti orizzontali (si veda il grafico della funzione logaritmo in figura 2.2). Per stabilire l'eventuale esistenza di un asintoto obliquo per $x \to +\infty$, calcoliamo (utilizzando la regola di l'Hôpital):

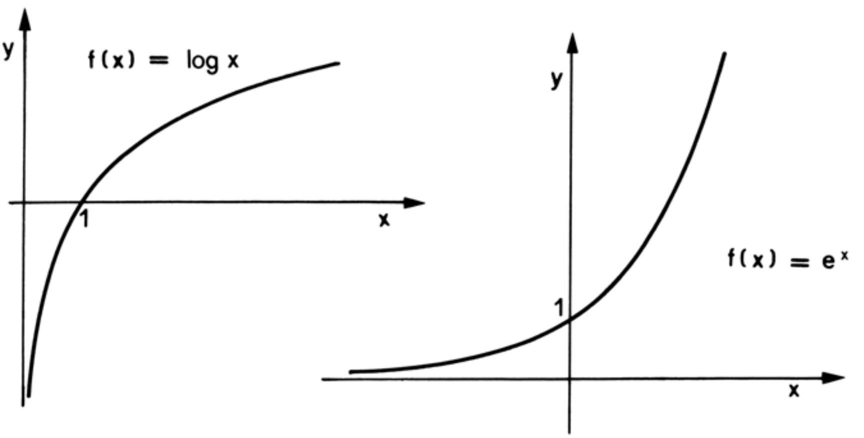


figura 2.2

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 = m\,;$$

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty\,.$$

Dato che il secondo limite è infinito, la funzione logaritmo non ammette asintoti obliqui; (b) la funzione $f(x) = e^x$, in base ai limiti

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty\ , \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty\ , \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0,$$

ammette l'asse x come asintoto orizzontale per $x \to -\infty$ e non ha altri asintoti (si veda il grafico della funzione e^x in figura 2.2); (c) la funzione sen x non ha asintoti di alcun tipo; (d) in base ai limiti

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}\ , \qquad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}\ ,$$

la funzione arcotangente ammette asintoti orizzontali di equazione $y = \pi/2$ (per $x \to +\infty$) e $y = -\pi/2$ (per $x \to -\infty$) e non ha altri asintoti (si veda il grafico della funzione arcotangente in figura 2.3)]

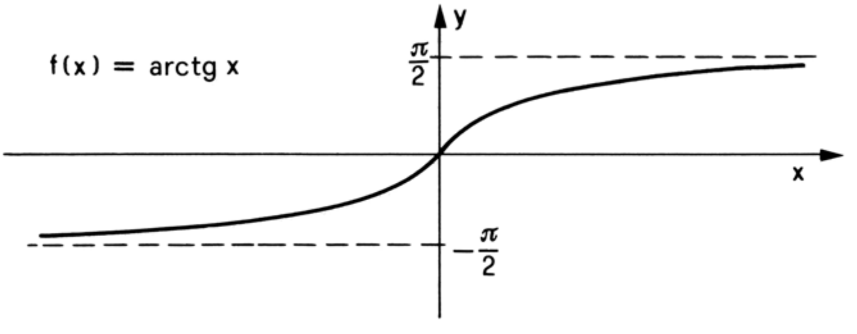


figura 2.3

2.31 Determinare gli asintoti delle funzioni

(a) $f(x) = x \log x$ (b) $f(x) = e^{1/x}$

[(a) La funzione $f(x) = x \log x$ è definita per $x > 0$. Calcoliamo i limiti agli estremi dell'intervallo $(0, +\infty)$; in base alla regola di L'Hôpital abbiamo

$$\lim_{x\to0^+} x \log x = \lim_{x\to0^+} \frac{\log x}{1/x} = \lim_{x\to0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to0^+} (-x) = 0.$$

Essendo il limite finito, la retta di equazione $x = 0$ non è un asintoto verticale. La funzione non ha asintoti verticali, nè orizzontali, nè obliqui, dato che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\ ; \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty.$$

Il grafico di $f(x) = x \log x$ è rappresentato in figura 2.54. (b) La funzione è definita negli intervalli $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$. Risulta:

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{1/x} = e^0 = 1\ ; \qquad \lim_{x\to0^+} e^{1/x} = +\infty\ ; \qquad \lim_{x\to0^-} e^{1/x} = 0.$$

Perciò la retta di equazione $y = 1$ è un asintoto orizzontale per $f(x)$, mentre l'asse y è un asintoto verticale per $x \to 0^+$. Il grafico è rappresentato in figura 2.74]

2.32 Determinare gli asintoti delle funzioni

$$\text{(a) } f(x) = x(1 - \log^2 x) \qquad\qquad \text{(b) } f(x) = \frac{\log x}{1+x}$$

[(a) La funzione $f(x) = x(1 - \log^2 x)$ non ha asintoti di alcun tipo; (b) gli assi $x = 0$, $y = 0$ sono rispettivamente asintoto verticale e orizzontale per $f(x)$]

2.33 Determinare gli asintoti della funzione $f(x) = |x - 2|$.

[La funzione non ha asintoti orizzontali, nè verticali. Risulta poi

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-2}{x} = 1 \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to+\infty} (x-2) - x = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2-x}{x} = -1 \\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} [f(x) + x] = \lim_{x\to-\infty} (2-x) + x = 2\,. \end{cases}$$

Ne segue che la retta di equazione $y = x - 2$ è un asintoto obliquo per $x \to +\infty$ (e coincide con $f(x)$ per $x \geq 2$), mentre la retta di equazione $y = 2 - x$ è un asintoto obliquo per $x \to -\infty$ (e coincide con $f(x)$ per $x \leq 2$)]

2.34 Determinare gli asintoti della funzione $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$.

[La funzione è definita su $\mathbb{R}$ e non ha asintoti verticali, nè orizzontali. Risulta inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} = 1\ ;$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+x^2} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{(1+x^2) - x^2}{\sqrt{1+x^2} + x} = 0\ .$$

La retta di equazione $y = x$ è quindi asintoto obliquo per $x \to +\infty$. Nel calcolo dell'asintoto per $x \to -\infty$, è opportuno ricordare che $\sqrt{x^2} = x$ solo se $x \geq 0$, mentre $\sqrt{x^2} = -x$ se $x < 0$; cioè:

$$\sqrt{x^2} = |x|\ , \qquad\qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Si ottiene:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{x^2}} = -1\ ;$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) + x = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{1+x^2} + x = \lim_{x\to-\infty} \frac{(1+x^2) - x^2}{\sqrt{1+x^2} - x} = 0\ .$$

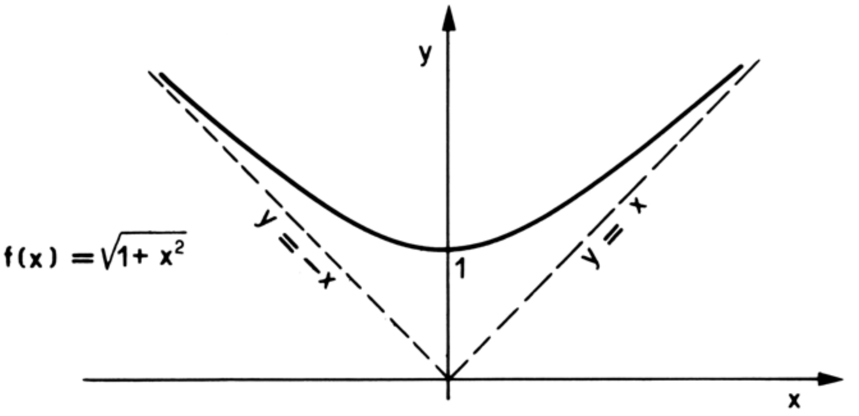


figura 2.4

Quindi la retta di equazione $y = -x$ è un asintoto obliquo per $x \to -\infty$. Il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ è rappresentato in figura 2.4. Si osservi che $f(x)$ è crescente per $x \geq 0$ ed è decrescente per $x \leq 0$ (e quindi il punto $x = 0$ è di minimo). Inoltre, come indicato nell'esercizio 1.34, $f(x)$ è convessa su $\mathbb{R}$]

2.35 Determinare gli asintoti della funzione $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

[È definita per $x \neq 0$ e risulta

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \,, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0 \,.$$

Perciò $f(x)$ ammette come unico asintoto la retta di equazione $y = 0$ (asse x). Il grafico di $f(x)$ è rappresentato in figura 2.5. Si noti che la funzione $f(x)$ interseca infinite volte il suo asintoto (precisamente per $x = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$). Per comprendere più facilmente il disegno in figura 2.5, si può osservare che $f(x)$ è una funzione pari (cioè $f(x) = f(-x)$, per ogni $x \in \mathbb{R}$) che verifica le limitazioni

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq \frac{1}{x} \,, \qquad \forall\, x > 0 \,,$$

dato che $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$. Geometricamente ciò corrisponde al fatto che il grafico della funzione $f(x)$ è, per $x > 0$, al di sopra dell'iperbole di equazione $y = -1/x$, ed è al di sotto dell'iperbole di equazione $y = 1/x$ (il grafico della funzione $f(x)$ tocca l'iperbole di equazione $y = 1/x$, per $x > 0$, nei punti $\pi/2 + 2k\pi$, con $k = 0, 1, 2, \ldots$). In figura 2.5 abbiamo assunto due diverse unità di misura per gli assi x, y]

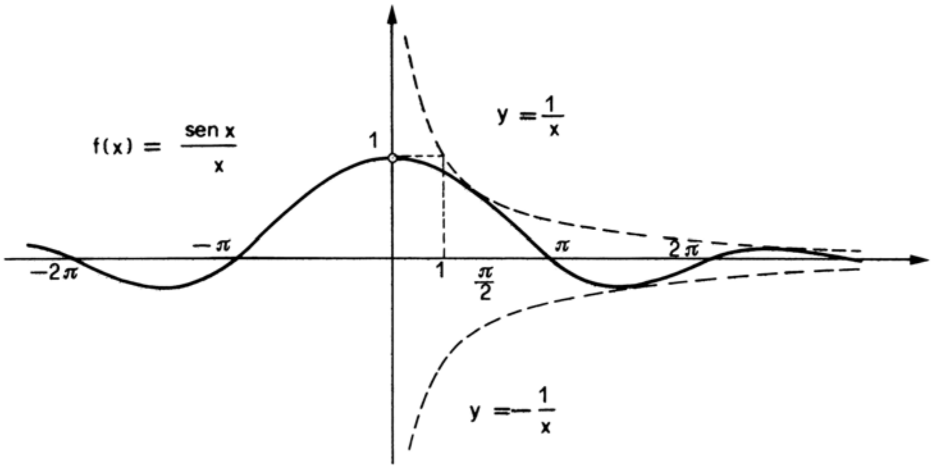


figura 2.5

2C. Schema per lo studio del grafico di una funzione

Per disegnare in un piano cartesiano il grafico di una funzione $y = f(x)$ è opportuno seguire lo schema indicato di seguito.

1) Inizialmente si determini il *dominio*, o *insieme di definizione* I della funzione $f(x)$ (come negli esempi del paragrafo 2A).

2) Si esamini se la funzione $f(x)$ gode di qualche proprietà di simmetria; ad esempio, si esamini se:

$$\begin{aligned} &f(x) \text{ è } \textit{pari}, \quad \text{cioè} && f(-x) = f(x), \quad \forall\, x \in I; \\ &f(x) \text{ è } \textit{dispari}, \quad \text{cioè} && f(-x) = -f(x), \quad \forall\, x \in I; \\ &f(x) \text{ è } \textit{periodica} \text{ di periodo } T: && f(x+T) = f(x), \quad \forall\, x \in I. \end{aligned}$$

Ad esempio, è ben noto che le funzioni sen x, cos x sono periodiche di periodo 2π e che la funzione tg x è periodica di periodo π.

Il nome di pari o dispari per una funzione deriva dal fatto che $f(x) = x^n$, con n intero, è una funzione pari o dispari a seconda che n sia pari o dispari; infatti:

$$f(-x) = (-x)^n = (-1)^n x^n = \begin{cases} x^n = f(x) & \text{se } n \text{ è pari} \\ -x^n = -f(x) & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Anche la funzione sen x è dispari, perchè sen $(-x) = -\text{sen}\, x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$; invece la funzione cos x è pari, perchè cos $(-x) = \cos x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Nella figura 2.6 è riportato il grafico di una funzione pari, che è simmetrica rispetto all'asse y, ed il grafico di una funzione dispari, simmetrica rispetto all'origine.

Evidentemente, se la funzione $f(x)$ è pari oppure dispari, basta studiarla per $x \geq 0$; è poi possibile disegnare per simmetria il grafico della funzione anche per $x < 0$. Analogamente, se la funzione è periodica di periodo T, è sufficiente studiarla in un intervallo di lunghezza T.

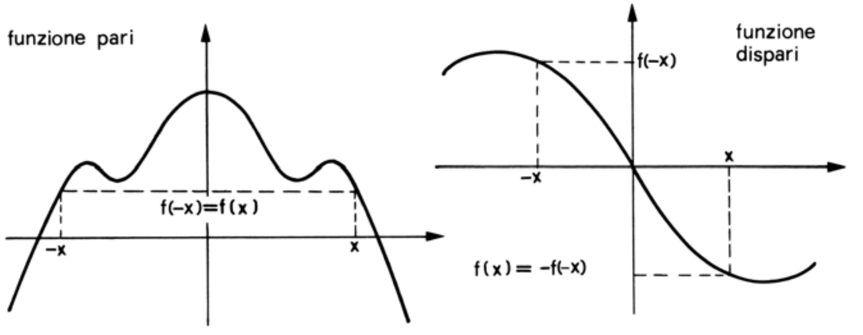


figura 2.6

3) Se è semplice, si può determinare il *segno* della funzione, cioè determinare per quali x risulta $f(x) > 0$, $f(x) < 0$, $f(x) = 0$.

È bene osservare che, in alcuni casi, può essere anche molto complicato risolvere l'equazione $f(x) = 0$, o la disequazione $f(x) > 0$, e la risoluzione spesso è facilitata dallo studio preliminare del segno della derivata prima e dal calcolo degli asintoti (per questo punto si veda anche il capitolo 3).

4) Si determinano gli eventuali *asintoti* verticali, orizzontali e obliqui (calcolando i limiti agli estremi degli intervalli di definizione, se l'insieme di definizione è costituito da una unione di intervalli), come indicato nel paragrafo precedente.

5) Si determinano gli eventuali punti dell'insieme di definizione dove la funzione *non è continua*, o dove *non è derivabile*.

Ad esempio la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 1/2 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

è definita su tutto l'asse reale, ma non è continua (con discontinuità eliminabile) per $x = 0$, perchè $\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \neq f(0) = 1/2$. In figura 2.7 è tracciato il grafico di $f(x)$ in un intorno di x_0 (si confronti con il grafico in figura 2.5).

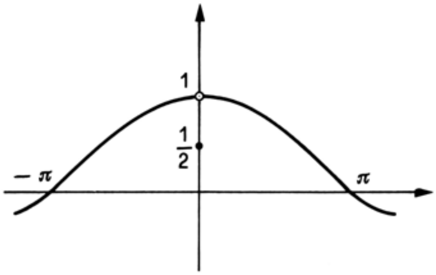


figura 2.7

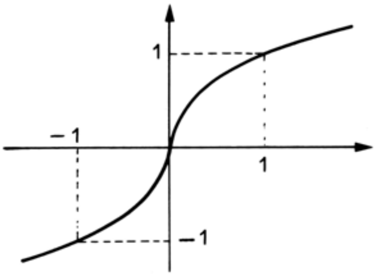


figura 2.8

In figura 2.8 è rappresentato il grafico della funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$, che è definita e continua su tutto l'asse reale, ma non è derivabile per $x = 0$, dato che il limite del rapporto incrementale in corrispondenza del punto $x = 0$ è infinito (ciò corrisponde ad un grafico con tangente verticale per $x = 0$):

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty \, .$$

6) Si calcola, quando esiste, la *derivata prima* e si stabilisce per quali valori x risulta $f'(x) = 0$, oppure $f'(x) \lesseqgtr 0$. In base a ciò si determinano gli intervalli in cui la funzione risulta crescente o decrescente (si veda il paragrafo 1A) ed i punti di massimo o di minimo relativo (paragrafo 1B).

7) Si calcola la *derivata seconda* e si determinano i valori x per cui risulta $f''(x) = 0$, oppure $f''(x) > 0$, oppure $f''(x) < 0$. In base a ciò si determinano gli intervalli in cui la funzione è concava o convessa e gli eventuali punti di flesso (si veda il paragrafo 1C).

Nel seguito di questo capitolo applichiamo lo schema proposto allo studio di alcune funzioni reali di una variabile reale. Avvertiamo che i disegni hanno lo scopo di dare un'idea grafica approssimativa delle principali proprietà delle funzioni considerate. Talvolta essi non sono riprodotti in scala, con le esatte proporzioni fra i numeri; comunque, anche quando ciò avviene, non vengono alterate le proprietà significative determinate analiticamente.

2D. Grafici di funzioni razionali

2.36 Studiare le seguenti funzioni e disegnarne il grafico

(a) $f(x) = x^3 - 3x^2$ (b) $f(x) = x^2(x^2 - 2)$

[(a) La funzione $f(x) = x^3 - 3x^2$ è definita su tutto l'asse reale. Il segno della funzione si determina scrivendo $f(x) = x^2(x - 3)$: risulta $f(x) = 0$ per $x = 0$, $x = 3$; $f(x) > 0$ per $x > 3$; $f(x) < 0$ per $x < 3$ e $x \neq 0$.

La derivata prima vale

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

e si annulla per $x = 0$, $x = 2$; è positiva all'esterno dell'intervallo $[0, 2]$, è negativa per $0 < x < 2$. Quindi $f(x)$ risulta decrescente nell'intervallo $[0, 2]$ e crescente altrimenti, come nello schema seguente:

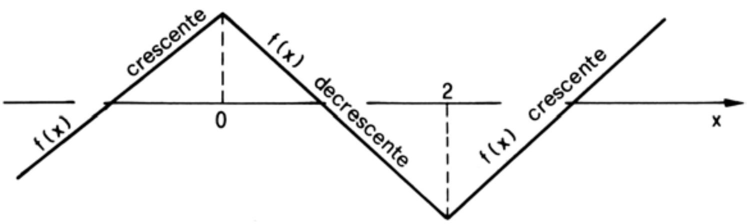


figura 2.9

Il punto $x = 0$ è di massimo relativo ed il punto $x = 2$ è di minimo relativo. La derivata seconda vale

$$f'(x) = 6x - 6 = 6(x-1)\,,$$

si annulla per $x = 1$, è positiva per $x > 1$, è negativa per $x < 1$. Perciò la funzione è convessa nell'intervallo $[1, +\infty)$ ed è concava in $(-\infty, 1]$. Nel disegnare il grafico risultano utili i valori di $f(x)$ corrispondenti ai punti di massimo, di minimo e di flesso: $f(0) = 0$, $f(2) = -4$, $f(1) = -2$. Il grafico è rappresentato in figura 2.10.
(b) È una funzione pari definita su tutto $\mathbb{R}$. Si annulla per $x = 0$ e $x = \pm\sqrt{2}$. È positiva per x esterno all'intervallo $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Non ha asintoti. Le derivate prima e seconda valgono

$$f'(x) = 4x(x^2-1)\,; \qquad f''(x) = 4(3x^2-1)\,.$$

I punti ± 1 sono di minimo (relativo ed assoluto) per $f(x)$; il punto $x = 0$ è di massimo relativo. I punti $x = \pm 1/\sqrt{3}$ sono di flesso. La funzione è convessa negli intervalli $(-\infty, -1/\sqrt{3}]$, $[1/\sqrt{3}, +\infty)$ ed è concava altrimenti. Risulta $f(\pm 1) = -1$. Il grafico di $f(x)$ è rappresentato in figura 2.11]

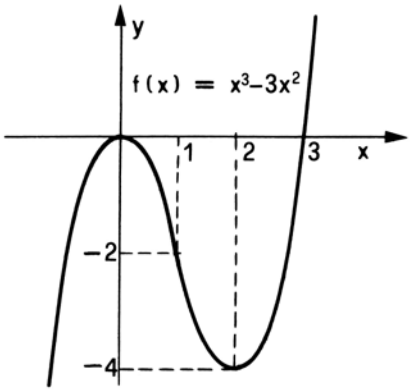


figura 2.10

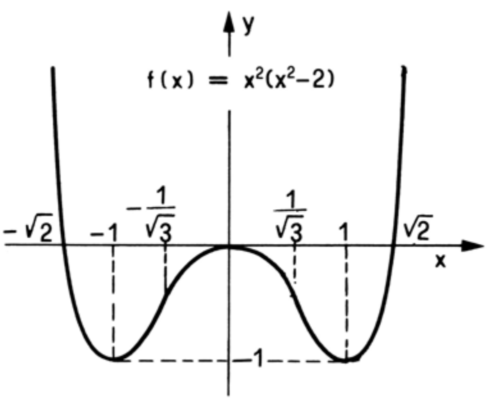


figura 2.11

2.37 Studiare le seguenti funzioni e disegnarne il grafico

$$\text{(a)}\ f(x)=\frac{x^2-3}{x-2} \qquad\qquad \text{(b)}\ f(x)=\frac{x^2}{1-x}$$

[(a) Il dominio di $f(x)$ è l'insieme $\{x\in\mathbb{R}:\ x\neq 2\}$. La funzione si annulla se il numeratore x^2-3 vale zero; ciò accade per $x=\pm\sqrt{3}$.

Risulta $f(x)>0$ per tutti i numeri reali x che risolvono uno dei due sistemi:

$$\begin{cases} x^2-3>0 \\ x-2>0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x^2-3<0 \\ x-2<0 \end{cases} .$$

Il primo sistema è risolto da $x\in(2,+\infty)$, mentre il secondo sistema ha per soluzioni $x\in(-\sqrt{3},\sqrt{3})$. Perciò $f(x)$ è positiva per $x\in(-\sqrt{3},\sqrt{3})\bigcup(2,+\infty)$. Dato che

$$\lim_{x\to2^+}\frac{x^2-3}{x-2}=+\infty\ , \qquad \lim_{x\to2^-}\frac{x^2-3}{x-2}=-\infty\ ,$$

la retta di equazione $x=2$ è un asintoto verticale per $f(x)$. Inoltre:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-3}{x^2-2x}=1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2-3}{x-2}-x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-3}{x-2}=2\ ;$$

ne segue che la retta di equazione $y=x+2$ è un asintoto obliquo per $f(x)$. La funzione è derivabile per ogni $x\neq2$ e la derivata vale

$$f'(x)=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}.$$

La derivata è positiva se $x^2-4x+3>0$, cioè se x è esterno all'intervallo $[1,3]$. Perciò la funzione $f(x)$ è crescente negli intervalli $(-\infty,1]$ e $[3,+\infty)$ ed è decrescente negli intervalli $[1,2)$ e $(2,3]$. Il punto $x=1$ risulta essere di massimo relativo, mentre il punto $x=3$ è di minimo relativo. La derivata seconda, per $x\neq2$, vale

$$f''(x)=2/(x-2)^3.$$

Essendo $f''(x)>0$ per $x>2$, la funzione $f(x)$ è convessa nell'intervallo $(2,+\infty)$ ed è concava in $(-\infty,2)$. Il grafico di $f(x)$ è rappresentato in figura 2.12.
(b) La funzione è definita per $x\neq1$. È positiva per $x<1$, $x\neq0$; è negativa per $x>1$; si annulla per $x=0$. La retta di equazione $x=1$ è un asintoto verticale per $f(x)$, e la retta di equazione $y=-x-1$ è un asintoto obliquo. La derivata prima si annulla nei punti $x=0$ e $x=2$. Il punto $x=0$ è di minimo relativo, mentre il punto $x=2$ è di massimo relativo. La funzione è convessa per $x<1$, è concava per $x>1$ e non ha punti di flesso. Il grafico è rappresentato in figura 2.13]

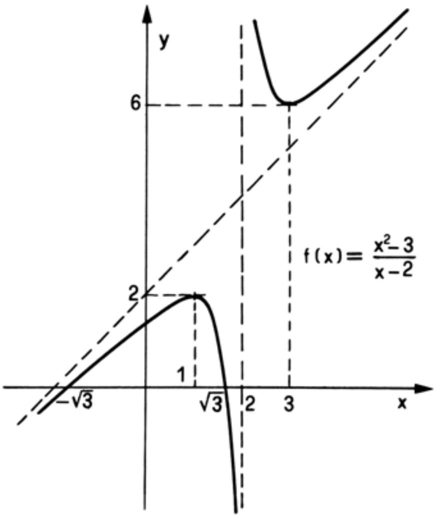


figura 2.12

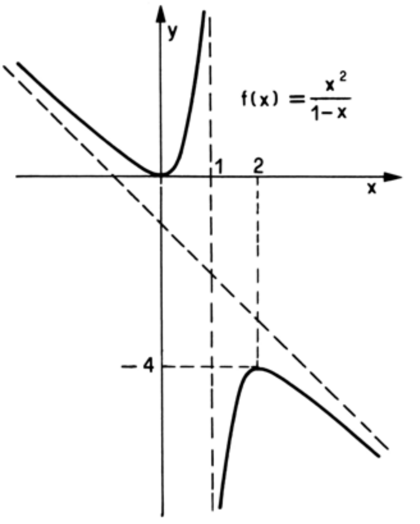


figura 2.13

2.38 Studiare le seguenti funzioni e disegnarne il grafico

$$\text{(a) } f(x) = (x^2 - 6x + 5)^4 \qquad \text{(b) } f(x) = (x^2 - 6x + 5)^5$$

[(a) La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si annulla per $x = 1$, $x = 5$ ed è positiva altrimenti. Le derivate prima e seconda valgono

$$f'(x) = 8(x^2 - 6x + 5)^3(x - 3) \; ; \qquad f''(x) = 8(x^2 - 6x + 5)^2(7x^2 - 42x + 59)\,.$$

La derivata prima si annulla per $x = 1$, $x = 5$ e $x = 3$; è positiva negli intervalli $(1, 3)$ e $(5, +\infty)$ ed è negativa negli intervalli $(-\infty, 1)$, $(3, 5)$. Il punto $x = 3$ risulta di massimo relativo; i punti $x = 1$ e $x = 5$ sono di minimo relativo. La derivata seconda si annulla per $x = 1$, $x = 5$ (che, come già detto, non sono punti di flesso) e per $x = 3 \pm \sqrt{28}/7$ che sono punti di flesso. La funzione è concava nell'intervallo $[3 - \sqrt{28}/7, 3 + \sqrt{28}/7]$ ed è convessa altrimenti. Il grafico è rappresentato in figura 2.14.
(b) La funzione si annulla per $x = 1$, $x = 5$, è positiva negli intervalli $(-\infty, 1)$, $(5, +\infty)$ ed è negativa in $(1, 5)$. Non ha asintoti. La derivata prima si annulla per $x = 1$, $x = 3$, $x = 5$. Il punto $x = 3$ è di minimo, mentre i punti $x = 1$, $x = 5$ sono di flesso. La funzione ammette altri due punti di flesso. Si veda il grafico in figura 2.15]

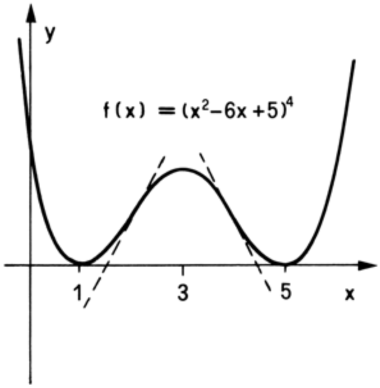


figura 2.14

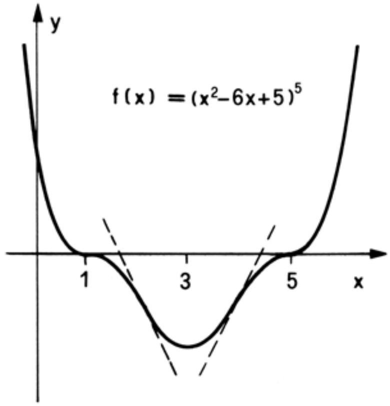


figura 2.15

2.39 Studiare le seguenti funzioni

$$\text{(a) } f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-2} \qquad \text{(b) } f(x) = \frac{x^2+6x+6}{x+1}$$

[(a) È definita per $x \neq 2$. La retta di equazione $x = 2$ è un asintoto verticale; la retta di equazione $y = x + 3$ è un asintoto obliquo. Le derivate prima e seconda valgono

$$f'(x) = \frac{x^2-4x}{(x-2)^2}\ ; \qquad f''(x) = \frac{8}{(x-2)^3}\ .$$

La derivata prima si annulla per $x = 0$ (punto di massimo) e per $x = 4$ (punto di minimo). La derivata seconda è positiva per $x > 2$, è negativa per $x < 2$; non ci sono punti di flesso. Si ottiene un grafico simile a quello della figura 2.12.
(b) È definita per $x \neq -1$. Ammette asintoto verticale di equazione $x = -1$ ed asintoto obliquo di equazione $y = x + 5$. È crescente negli intervalli $(-\infty, -2]$ e $[0, +\infty)$. Il punto $x = 0$ è di minimo relativo, il punto $x = -2$ è di massimo relativo. È convessa in $(-1, +\infty)$, è concava in $(-\infty, -1)$. Il grafico è simile a quello della figura 2.12]

2.40 Si consideri una funzione $f(x)$ definita su $\mathbb{R}$. I grafici delle funzioni $f_1(x) = |f(x)|$, $f_2(x) = f(|x|)$ si deducono facilmente dal grafico di $f(x)$ scambiando, nel primo caso, y con $|y|$, e nel secondo caso scambiando x con $|x|$. Tenendo conto di ciò, disegnare i grafici delle funzioni

$$\text{(a) } f(x) = x^3 - 1 \qquad \text{(b) } f_1(x) = |f(x)| = |x^3 - 1|$$

$$\text{(c) } f_2(x) = f(|x|) = |x|^3 - 1 \qquad \text{(d) } f_3(x) = |f(|x|)| = |\,|x|^3 - 1\,|$$

[(a) La funzione $f(x)$ è crescente su $\mathbb{R}$. Il punto $x = 0$ è di flesso orizzontale. Il grafico è rappresentato in figura 2.16; (b) il grafico della funzione $f_1(x)$, in figura 2.17, si ottiene da quello della funzione $f(x)$ cambiando il segno delle ordinate dei punti che hanno la y

negativa. La funzione $f_1(x)$ risulta non derivabile per $x = 1$; (c) la funzione $f_2(x)$ è pari. Il suo grafico, in figura 2.18, si ottiene per simmetria rispetto all'asse y dal grafico della funzione $f(x)$, per $x > 0$. La funzione risulta derivabile anche per $x = 0$; (d) il grafico della funzione $f_3(x)$ è rappresentato in figura 2.19. La funzione non è derivabile per $x = \pm 1$]

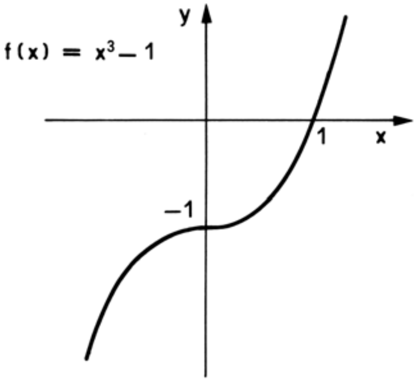


figura 2.16

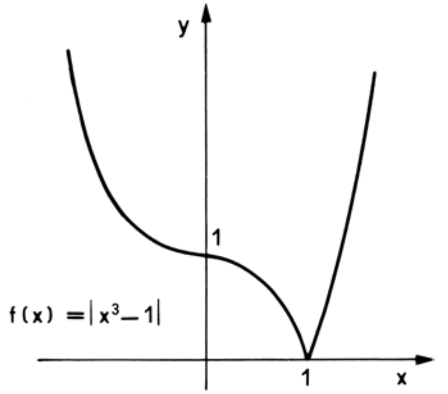


figura 2.17

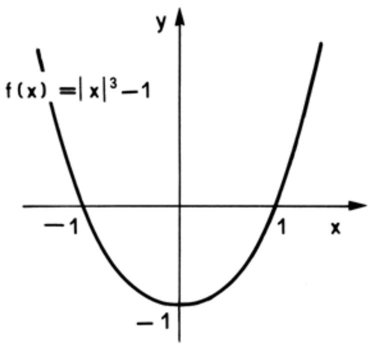


figura 2.18

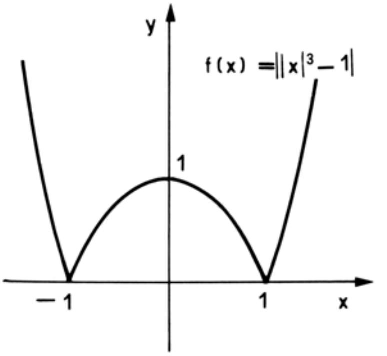


figura 2.19

2.41 Studiare le seguenti funzioni e disegnarne il grafico

(a) $f(x) = x|x-2|$ (b) $f(x) = x|x|$

[(a) Essendo $|x-2| = x-2$ se $x \geq 2$, e $|x-2| = -(x-2)$ se $x < 2$, risulta:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{se} \quad x \geq 2 \\ 2x - x^2 & \text{se} \quad x < 2\,. \end{cases}$$

Si ottiene facilmente il grafico in figura 2.20. Si noti che $f(x)$ non è derivabile per $x = 2$, dato che, in tale punto, la derivata destra ($f'_+(2) = 2$) è diversa dalla derivata sinistra ($f'_-(2) = -2$); (b) il grafico di $f(x) = x|x|$ è rappresentato in figura 2.21. La funzione è derivabile anche per $x = 0$]

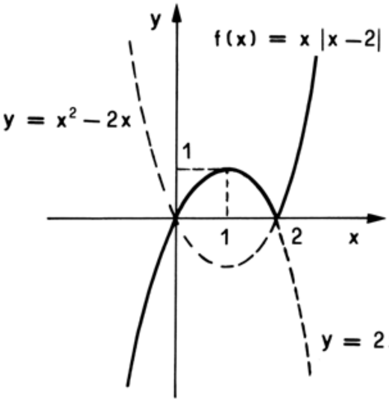


figura 2.20

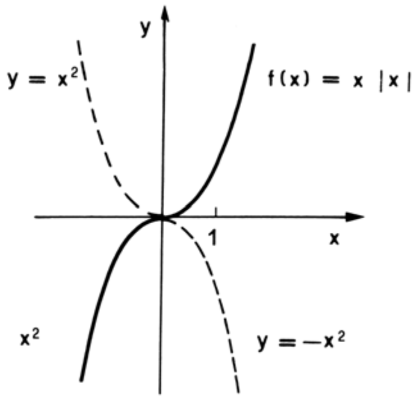


figura 2.21

2.42 Studiare le seguenti funzioni e disegnarne il grafico

$$\text{(a)}\ f(x) = \frac{(x+1)^3}{x^2} \qquad\qquad \text{(b)}\ f(x) = \frac{|x+1|^3}{x^2}$$

[(a) È definita per $x \neq 0$. È positiva negli intervalli $(-1, 0)$ e $(0, +\infty)$. Ammette $x = 0$ come asintoto verticale e $y = x + 3$ come asintoto obliquo. Le derivate prima e seconda valgono

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2(x-2)}{x^3}\ ; \qquad\qquad f''(x) = \frac{6(x+1)}{x^4}\ .$$

La derivata prima si annulla per $x = -1$ e $x = 2$. La funzione risulta crescente negli intervalli $(-\infty, 0)$ e $[2, +\infty)$. Il punto $x = 2$ è di minimo relativo. La derivata seconda è positiva per $x > -1$. Di conseguenza la funzione è convessa negli intervalli $[-1, 0)$ e $(0, +\infty)$ ed è concava in $(-\infty, -1]$. Il punto $x = -1$ è di flesso. Il grafico è rappresentato in figura 2.22.
(b) Si può procedere in modo analogo a come fatto nella parte (b) dell'esercizio 2.40. Oppure, si può tener conto che $f(x)$ ha la seguente espressione analitica ($x \in \mathbb{R} - \{0\}$):

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^3/x^2 & \text{se} \quad x \geq -1 \\ \\ -(x+1)^3/x^2 & \text{se} \quad x < -1\ . \end{cases}$$

Si ottiene il grafico rappresentato in figura 2.23; in particolare , gli asintoti obliqui hanno equazione : $y = x + 3$ (per $x \to +\infty$) e $y = -x - 3$ (per $x \to -\infty$). Circa la derivabilità, osserviamo che $f(x)$ è derivabile anche nel punto $x = -1$; infatti, essendo $f(-1) = 0$, si ha

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|^3}{(h-1)^2 h} = 0 \ \ ]$$

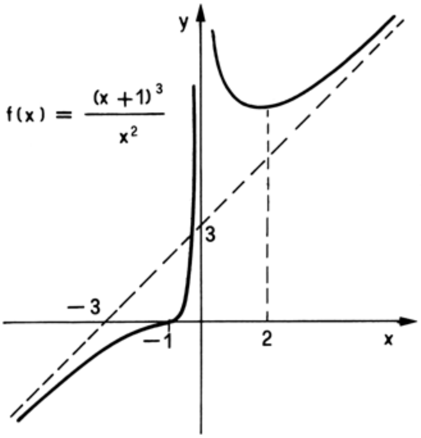


figura 2.22

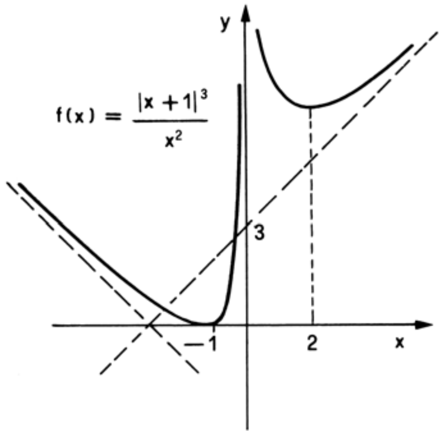


figura 2.23

2.43 Studiare le seguenti funzioni e disegnarne il grafico

$$\text{(a) } f(x) = \frac{2|x| - x^2 - x}{x+1} \qquad\qquad \text{(b) } f(x) = \frac{x^2 + x + 2|x|}{x+1}$$

[(a) Si veda la figura 2.24; (b) figura 2.25]

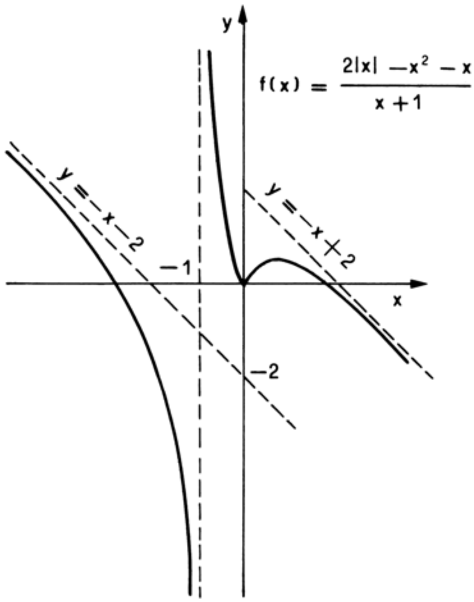


figura 2.24

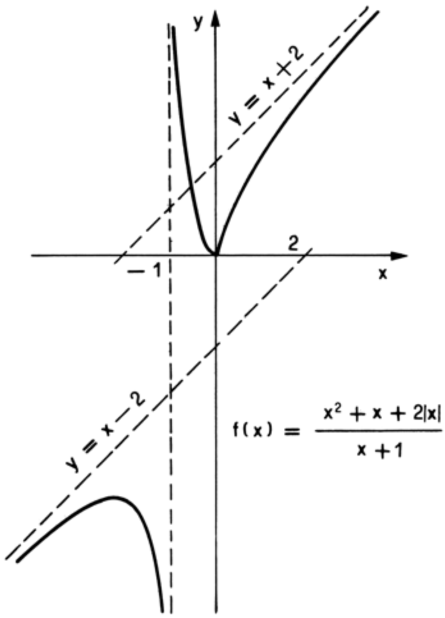


figura 2.25

2.44 Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{x}{|x| + |x-1|}$.

[La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, è positiva per $x > 0$, è negativa per $x < 0$. Risulta:

$$f(x) = \begin{cases} x/(2x-1) & \text{se} \quad x > 1 \\ x & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ x/(1-2x) & \text{se} \quad x < 0\,. \end{cases}$$

In base ai limiti

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2x-1} = \frac{1}{2}\,, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{1-2x} = -\frac{1}{2}\,,$$

la retta di equazione $y = 1/2$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$, mentre $y = -1/2$ è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$. La funzione risulta crescente nell'intervallo $(-\infty, 1]$ e decrescente nell'intervallo $[1, +\infty)$. Non è derivabile per $x = 1$, che comunque risulta essere un punto di massimo (relativo ed assoluto). Invece la funzione è derivabile per $x = 0$, dato che $f'_+(0) = f'_-(0) = 1$, come si verifica facilmente calcolando la derivata delle funzioni $y = x$ e $y = x/(1-2x)$ per $x = 0$. La funzione risulta convessa separatamente negli intervalli $(-\infty, 1]$ e $[1, +\infty)$. Il grafico è rappresentato in figura 2.26]

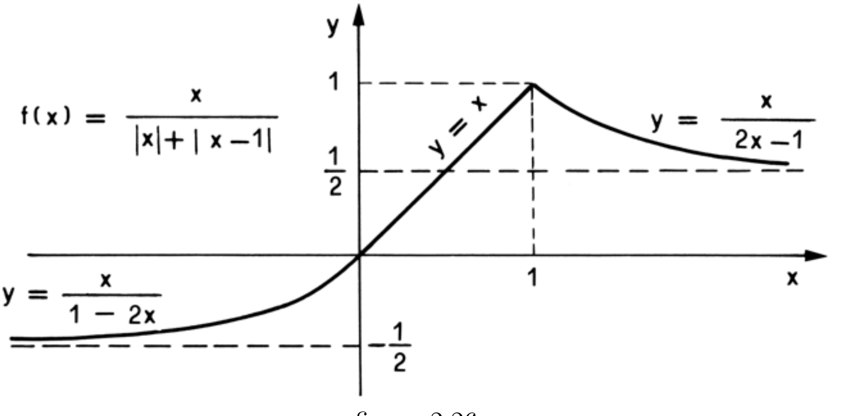


figura 2.26

2.45 Disegnare il grafico della funzione $f(x) = |x| - |x-1| + |x-2| - |x-3|$.

[La funzione è definita e continua su tutto l'asse reale. Tenendo conto della definizione del valore assoluto, $f(x)$ è un polinomio di primo grado (o di grado zero, cioè una costante) in ognuno degli intervalli $(-\infty, 0]$, $[0, 1]$, $[1, 2]$, $[2, 3]$, $[3, +\infty)$. Quindi il grafico di $f(x)$, in ognuno di tali intervalli, è costituito da un segmento di retta. Basta allora determinare i valori di $f(x)$ in corrispondenza dei punti $x = 0, 1, 2, 3$, per disegnare il grafico della funzione nell'intervallo $[0, 3]$. Risulta $f(0) = -2$, $f(1) = 0$, $f(2) = 0$, $f(3) = 2$.
Per $x \geq 3$ la funzione vale:

$$f(x) = x - (x-1) + (x-2) - (x-3) = 2 \qquad (x \geq 3),$$

ed analogamente $f(x) = -2$ se $x \leq 0$. Si ottiene il grafico in figura 2.27]

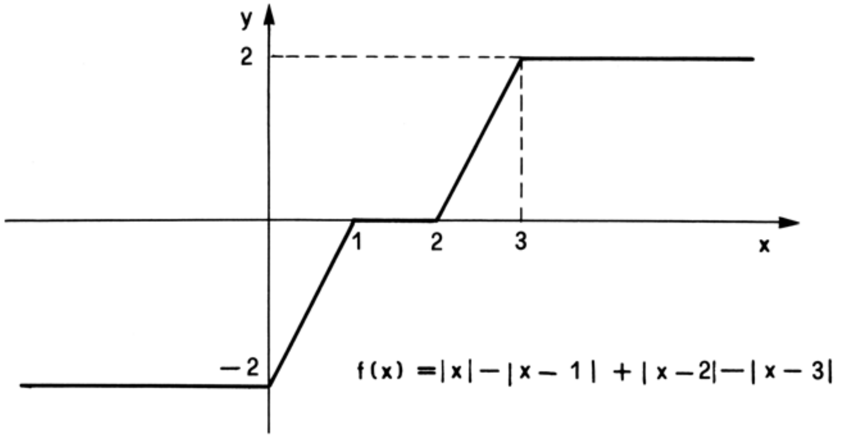


figura 2.27

2.46 Data la funzione $f(x) = |x| - 1$, disegnare il grafico di

(a) $f(f(x))$ (b) $f(f(f(x)))$

[(a) Risulta $f(f(x)) = |f(x)| - 1 = ||x| - 1| - 1$. Procedendo come nell'esercizio precedente, si ottiene il grafico in figura 2.28; (b) si veda la figura 2.29]

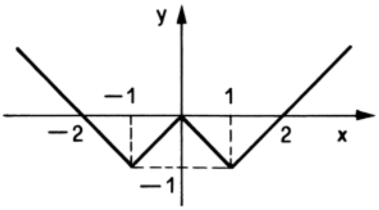


figura 2.28

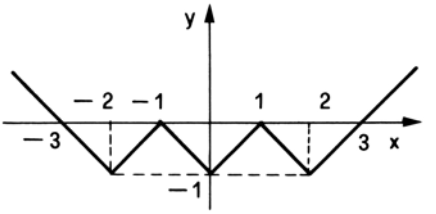


figura 2.29

2.47 Indichiamo con $[x]$ la *parte intera* di x cioè il più grande intero minore od uguale ad x. Disegnare i grafici delle funzioni

(a) $f(x) = ([x])^2$ (b) $f(x) = [x^2]$

[(a) La funzione è definita su $\mathbb{R}$ ed è discontinua per ogni $x \in \mathbb{Z}$. Il grafico è rappresentato in figura 2.30; (b) si veda la figura 2.31, tenendo presente che $f(x)$ è una funzione pari]

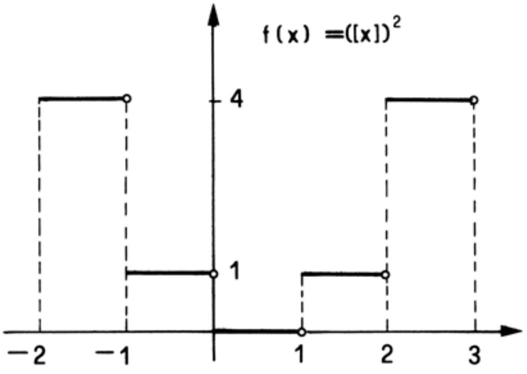


figura 2.30

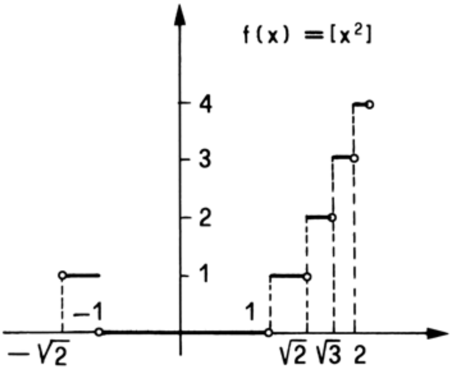


figura 2.31

2.48 Disegnare il grafico delle funzioni

$$\text{(a) } f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad x \le 0 \\ x^2 - 1 & \text{se} \quad 0 < x < 2 \\ 3 & \text{se} \quad x \ge 2 \end{cases} \qquad\qquad \text{(b)} \quad f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$$

[(a) Il grafico della funzione è costituito da un arco di parabola (per $0 < x < 2$) e da due semirette orizzontali, come in figura 2.32. Si noti che la funzione è continua su tutto l'asse reale ed è derivabile per ogni $x \neq 2$. In particolare, è derivabile anche nel punto $x = 0$ (a tal fine si verifichi che, per $x = 0$, le derivate destra e sinistra coincidono); (b) la funzione è definita per $x^2 - 1 \neq 0$, cioè per $x \neq \pm 1$. Essendo $x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1)$, dove è definita, la funzione vale $f(x) = x^2 + 1$. Il grafico, in figura 2.33, è costituito dalla parabola di equazione $y = x^2 + 1$, privato dei due punti di ascissa $x = \pm 1$]

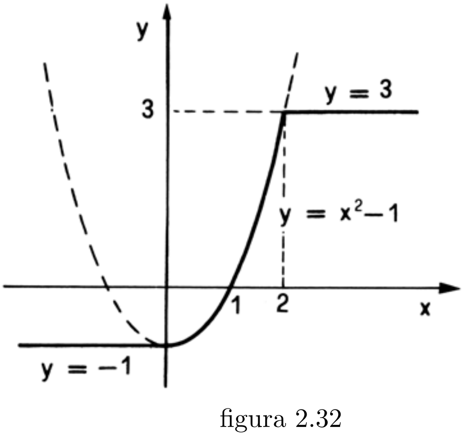


figura 2.32

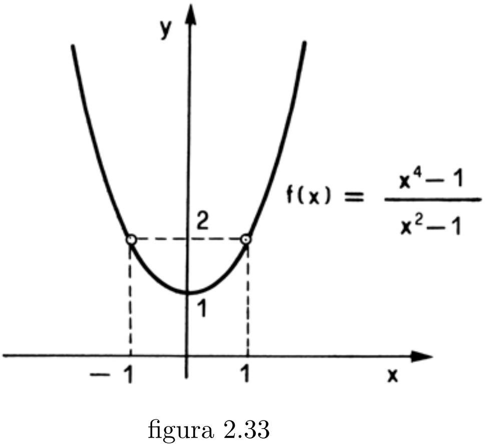


figura 2.33

2.49 Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico

$$f(x) = \max\{x^2;\ 3x - 2\}$$

[In figura 2.34 sono disegnate (tratteggiate) la parabola di equazione $y = x^2$ e la retta di equazione $y = 3x - 2$. Tali curve si incontrano nei punti le cui ascisse soddisfano l'equazione $x^2 = 3x - 2$, cioè $x = 1$ e $x = 2$. Essendo $x^2 > 3x - 2$ all'esterno dell'intervallo $[1, 2]$, risulta:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x < 1 \quad \text{oppure} \quad x > 2 \\ 3x - 2 & \text{se} \quad 1 \le x \le 2\ . \end{cases}$$

Il grafico della funzione $f(x)$ è disegnato in linea continua in figura 2.34]

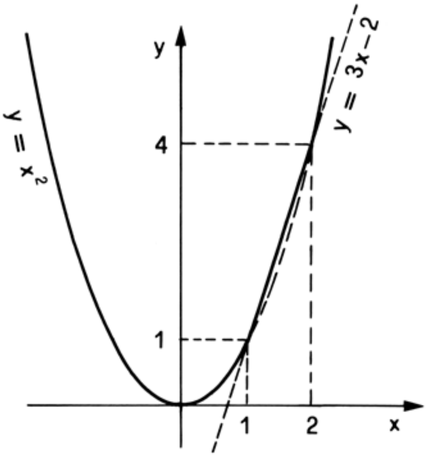


figura 2.34

2.50 Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico

$$f(x) = \max\{3x - x^2;\ x;\ -\frac{1}{x^2}\}$$

[Si ottiene il grafico in figura 2.35, dopo aver verificato che

$$f(x) = \begin{cases} 3x - x^2 & \text{se} \quad 0 \le x \le 2 \\ -1/x^2 & \text{se} \quad x < -1 \\ x & \text{altrimenti}\ ] \end{cases}$$

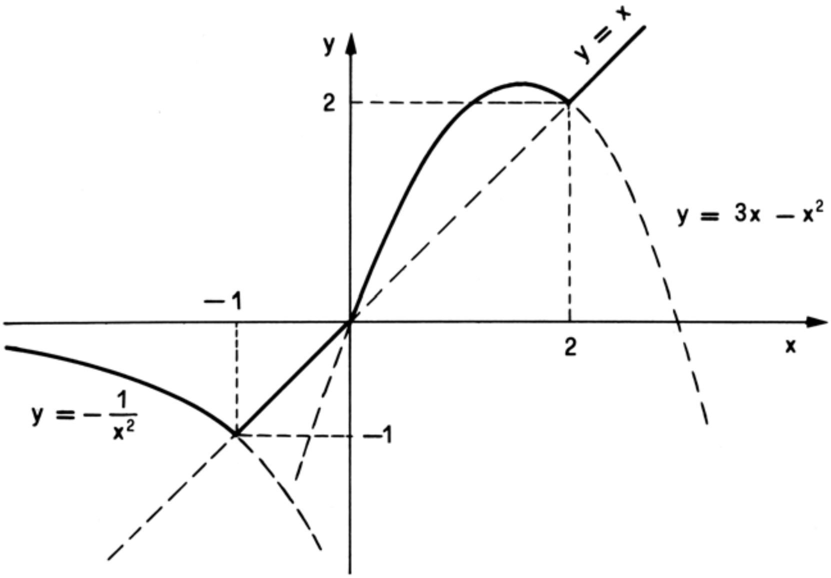


figura 2.35

2.51 Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico

$$f(x) = \left(5 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - \frac{8}{x^3}$$

[La funzione è definita per $x \neq 0$. In base ai limiti

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty \ , \qquad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 25 \ ,$$

la retta $x = 0$ è un asintoto verticale, mentre la retta $y = 25$ è asintoto orizzontale. Si ha:

$$f(x) = \frac{1}{x^4} + \frac{10}{x^2} + 25 - \frac{8}{x^3} \ ;$$

$$f'(x) = -\frac{4}{x^5} - \frac{20}{x^3} + \frac{24}{x^4} = -\frac{2}{x^5}(10x^2 - 2x + 2) \ ;$$

$$f''(x) = \frac{20}{x^6} + \frac{60}{x^4} - \frac{96}{x^5} = \frac{4}{x^6}(15x^2 - 24x + 5) \ .$$

La derivata prima si annulla per $x = 1/5$ e $x = 1$. Il punto $x = 1/5$ è di minimo e risulta $f(1/5) = -100$; il punto $x = 1$ è di massimo e si ha: $f(1) = 28$. La derivata seconda si annulla per $x = (12 \pm \sqrt{69})/15$ che sono punti di flesso. La funzione risulta concava nell'intervallo $[(12 - \sqrt{69})/15, (12 + \sqrt{69})/15]$. Il grafico è rappresentato in figura 2.36]

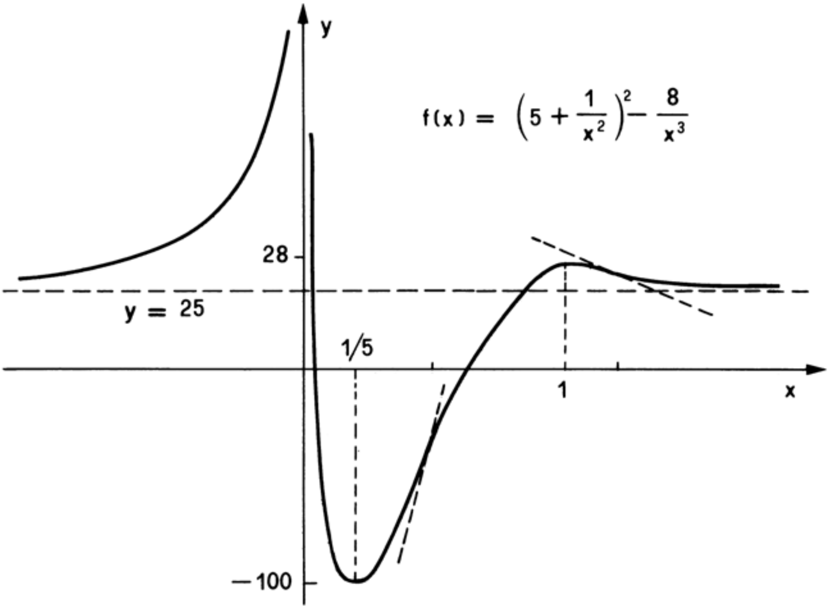


figura 2.36

2.52 Disegnare in uno stesso sistema di riferimento i grafici delle funzioni

$$f_1(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\,, \qquad\qquad f_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

Tenendo conto delle disuguaglianze dell'esercizio 1.72, confrontare i grafici ottenuti con il grafico della funzione $f(x) = \cos x$.

[Si verifica facilmente che la funzione $f_1(x)$ è pari, è decrescente per $x \geq 0$ ed è crescente per $x \leq 0$. Perciò $x = 0$ è un punto di massimo per $f_1(x)$. Inoltre $f_1(x)$ è concava su $\mathbb{R}$. Anche la funzione $f_2(x)$ è pari; le sue derivate prima e seconda valgono:

$$f_2'(x) = \frac{x}{6}(x^2 - 6)\,; \qquad\qquad f_2''(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 2)\,.$$

La derivata prima si annulla per $x = 0$ (punto di massimo) e per $x = \pm\sqrt{6}$ (punti di minimo). Risulta $f(0) = 1$ e $f(\pm\sqrt{6}) = -1/2$. La derivata seconda si annulla per $x = \pm\sqrt{2}$, che risultano punti di flesso. La funzione $f_2(x)$ è concava nell'intervallo $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ ed è convessa altrimenti.
In base alle disuguaglianze dell'esercizio 1.72, risulta $f_1(x) \leq \cos x \leq f_2(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. I grafici delle tre funzioni sono rappresentati in figura 2.37.

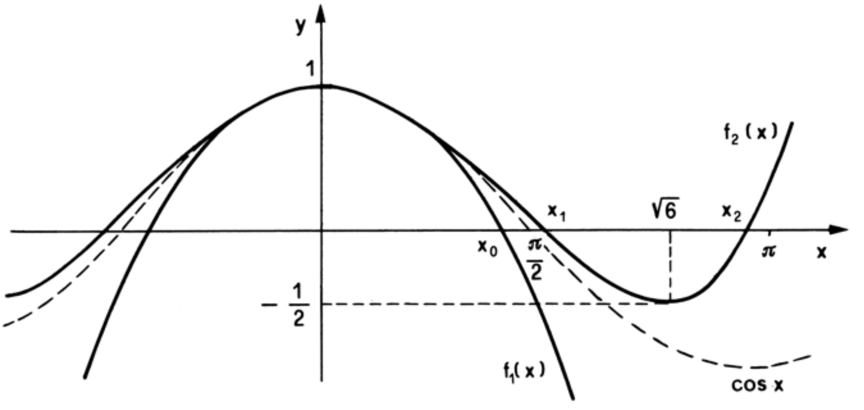


figura 2.37

Per il teorema dell'esistenza degli zeri e per le proprietà di monotonia di $f_1(x)$, $f_2(x)$, esistono numeri positivi $x_0 < x_1 < x_2$ tali che $f_1(\pm x_0) = f_2(\pm x_1) = f_2(\pm x_2) = 0$. A titolo indicativo segnaliamo le valutazioni numeriche approssimate: $x_0 = 1.32\ldots$, $x_1 == 1.59\ldots$, $x_2 = 3.076\ldots$; si noti che, essendo $\pi/2 = 1.57\ldots$, $\pi = 3.14\ldots$, in accordo con le stime dell'esercizio 1.72, risulta $x_0 < \pi/2 < x_1 < x_2 < \pi$]

2.53 Siano a, b, c, d numeri reali. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}\,.$$

[Se $c = 0$, $d = 0$, la funzione non è definita per alcun valore di x. Se $c = 0$ e $d \neq 0$, la funzione si scrive nella forma

$$f(x) = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$$

ed ha per grafico una retta. Ciò completa la discussione nel caso in cui $c = 0$. Supponiamo nel seguito $c \neq 0$.
Se $c \neq 0$, la funzione è definita per $x \neq -d/c$. Se risulta $ad - bc = 0$, con la sostituzione $b = ad/c$ otteniamo

$$f(x) = \frac{ax + ad/c}{cx+d} = \frac{a}{c}\frac{cx+d}{cx+d} = \frac{a}{c}\,, \qquad\qquad \forall\, x \neq -\frac{c}{d}\,.$$

In tal caso il grafico di $f(x)$ è costituito da una retta orizzontale ($y = a/c$) privata del punto di ascissa $x = -c/d$. Infine, se $c \neq 0$ e $ad - bc \neq 0$, la funzione si può rappresentare nella forma

$$f(x) = \frac{1}{c}\frac{ax+b}{x+d/c} = \frac{1}{c}\frac{ax + ad/c - ad/c + b}{x+d/c} = \frac{1}{c}\left(a + \frac{b - ad/c}{x+d/c}\right) = \frac{a}{c} + \frac{1}{c^2}\frac{bc-ad}{x+d/c}\,.$$

Essendo $bc - ad \neq 0$, la funzione diverge per $x \to -d/c$. Perciò la retta di equazione $x = -d/c$ è un asintoto verticale. Inoltre la retta $y = a/c$ è un asintoto orizzontale. Le derivate prima e seconda valgono

$$f'(x) = -\frac{1}{c^2}\frac{bc-ad}{(x+d/c)^2}\ ; \qquad\qquad f''(x) = \frac{2}{c^2}\frac{bc-ad}{(x+d/c)^3}\ .$$

La derivata prima ha segno costante (ha lo stesso segno di $ad-bc$). Perciò, se $ad-bc>0$, la funzione $f(x)$ è crescente negli intervalli $(-\infty,-d/c)$, $(-d/c,+\infty)$; se invece $ad-bc<0$, la funzione è decrescente negli stessi intervalli.
La convessità e la concavità si studiano in modo analogo, in dipendenza dal segno di $ad-bc$, tenendo presente che il denominatore di $f''(x)$ cambia segno per $x \gtrless -d/c$]

2E. Grafici di funzioni irrazionali

2.54 Disegnare i grafici delle funzioni

(a) $\sqrt{x}$ (b) $\sqrt[3]{x}$ (c) $\sqrt{|x|}$

[(a) $f(x)=\sqrt{x}$ è una funzione definita e continua per ogni $x \geq 0$, ma non è derivabile per $x=0$; infatti il limite (destro) del rapporto incrementale per $x=0$ è infinito:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty\,.$$

Geometricamente ciò corrisponde ad un grafico a tangente verticale per $x=0$ (la tangente è l'asse y). Si noti che vale l'equivalenza:

$$y=\sqrt{x} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = x\ , \end{cases}$$

per cui il grafico di $f(x)$, rappresentato in figura 2.38 da un tratto continuo, è parte della parabola (tratteggiata) di equazione $x=y^2$ (b) la funzione $f(x)=\sqrt[3]{x}$ è definita e continua per ogni $x\in\mathbb{R}$, è dispari, ma non è derivabile per $x=0$, dato che il limite del rapporto incrementale vale $+\infty$ (figura 2.39) (c) la funzione $f(x)=\sqrt{|x|}$, il cui grafico è rappresentato in figura 2.40, è definita e continua su $\mathbb{R}$. È una funzione pari; non è derivabile per $x=0$ perchè il limite del rapporto incrementale, per $x=0$, non esiste (precisamente, il limite destro vale $+\infty$ mentre il limite sinistro vale $-\infty$)]

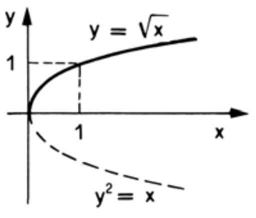


figura 2.38

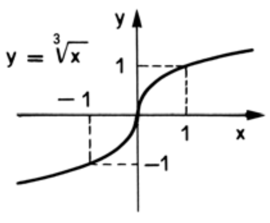


figura 2.39

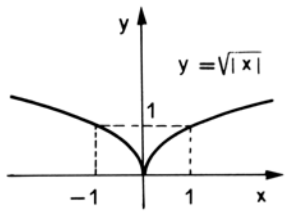


figura 2.40

2.55 Studiare le seguenti funzioni e disegnarne il grafico

(a) $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ (b) $f(x)=\sqrt{2-x}-\sqrt{x}$

[(a) È definita per $x \geq 0$, è positiva per ogni $x \geq 0$ e risulta $f(0) = 1$. L'asse x è un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$. Non è derivabile per $x = 0$ e risulta:

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -\infty \; ;$$

tenendo conto di ciò, il grafico in figura 2.41 è a tangente verticale in corrispondenza di $x = 0$.

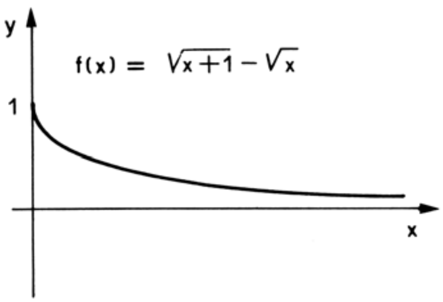


figura 2.41

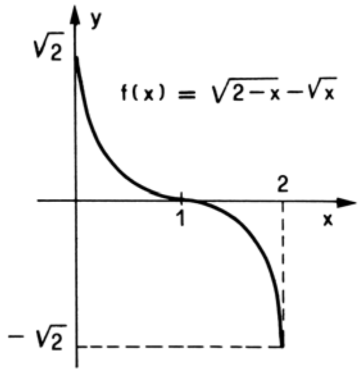


figura 2.42

La funzione è decrescente e convessa; (b) è definita nell'intervallo $[0, 2]$. Risulta $f(1) = 0$, è positiva per $x \in [0, 1)$, è negativa per $x \in (1, 2]$. Non è derivabile per $x = 0$, $x = 2$ e la derivata prima tende a $-\infty$ in corrispondenza di tali punti. La funzione è decrescente in $[0, 2]$, è convessa in $[0, 1]$ ed è concava in $[1, 2]$. Il punto $x = 1$ è di flesso orizzontale. Il grafico è rappresentato in figura 2.42]

2.56 Il potenziale elettrico V nei punti dell'asse di un disco di raggio R (come in figura 2.43) carico uniformemente è dato da

$$V(x) = K(\sqrt{x^2 + R^2} - |x|) \, ,$$

con $K > 0$ dipendente solo dalla densità di carica e dalla costante dielettrica. Si studi l'andamento del potenziale $V(x)$ in funzione di x e si verifichi che $V(x)$ ha il grafico disegnato in figura 2.44.

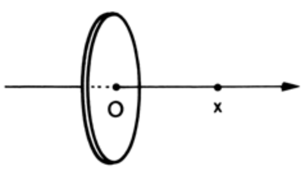


figura 2.43

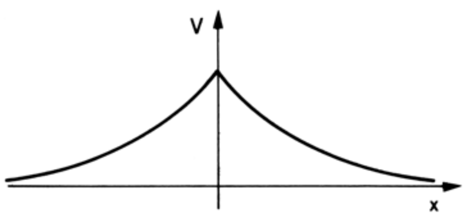


figura 2.44

2.57 Studiare la funzione $f(x) = \sqrt{x^2 - \dfrac{8}{x}}$.

[È definita per $x < 0$ e $x \geq 2$. Si annulla per $x = 2$ ed è positiva altrimenti. Valgono i limiti:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \ ;$$

la funzione ammette asintoto verticale sinistro di equazione $x = 0$, e non ha asintoti orizzontali. Riguardo agli asintoti obliqui, abbiamo:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}\sqrt{x^2 - \frac{8}{x}} = \lim_{x\to\pm\infty} \pm\sqrt{1 - \frac{8}{x^3}} = \pm 1 \ ;$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) \mp x] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-8/x}{\sqrt{x^2 - 8/x} \pm x} = 0 \ .$$

Perciò la retta di equazione $y = x$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$, mentre la retta $y = -x$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$. La derivata prima vale

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 8/x}} \left(x + \frac{4}{x^2} \right) .$$

Si noti che la funzione non è derivabile per $x = 2$ e che $f'(x) \to +\infty$ per $x \to 2^+$. La derivata prima si annulla per $x = -\sqrt[3]{4}$ ed è negativa per $x < -\sqrt[3]{4}$. La funzione è decrescente in $(-\infty, -\sqrt[3]{4}]$ ed è crescente negli intervalli $[-\sqrt[3]{4}, 0)$, $[2, +\infty)$. Il punto $x = -\sqrt[3]{4}$ è di minimo relativo (interno); anche il punto $x = 2$ è di minimo (assoluto). Il grafico è disegnato in figura 2.45]

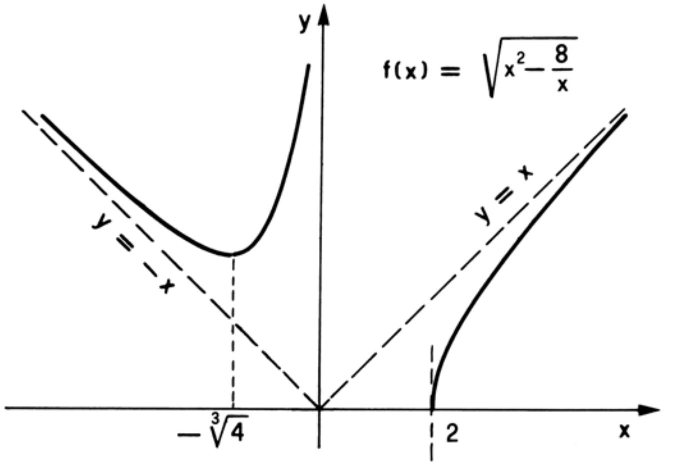


figura 2.45

2.58 Studiare la seguente funzione (prescindendo dal segno della derivata seconda) e disegnarne il grafico:

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^2(x-1)}{x+1}}\ .$$

[È definita nell'insieme $(-\infty,-1)\cup\{0\}\cup[1,+\infty)$. Si annulla per $x=0$ e $x=1$ ed è positiva altrimenti. Ha un asintoto verticale di equazione $x=-1$ e due asintoti obliqui di equazione $y=x-1$ (per $x\to+\infty$) e $y=1-x$ (per $x\to-\infty$). Non è derivabile per $x=1$ e risulta

$$\lim_{x\to1^+}f'(x)=+\infty\ .$$

La funzione risulta decrescente per $x<x_0=(-1-\sqrt{5})/2$ ed x_0 è un punto di minimo relativo. Il grafico è rappresentato in figura 2.46. Si noti in particolare il punto di coordinate $(0,0)$]

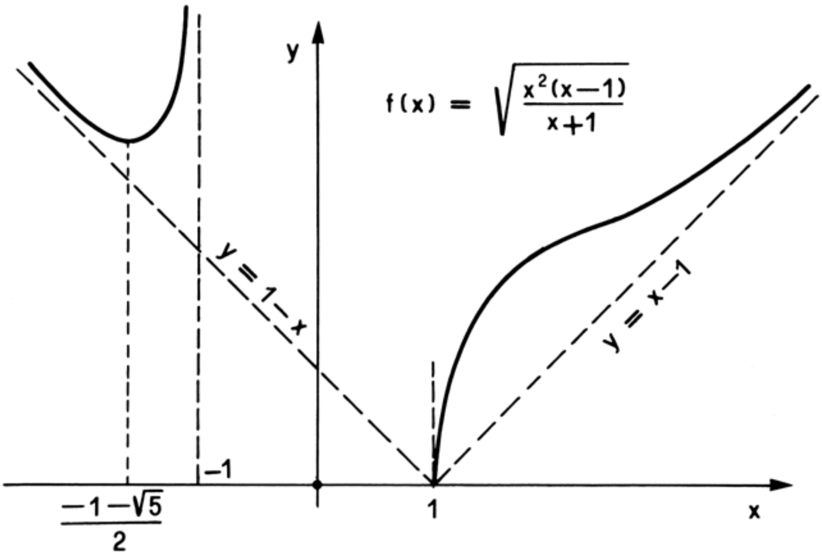


figura 2.46

2.59 Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico:

$$f(x)=\sqrt{|x^2-10x|}\ .$$

[È definita per ogni $x\in\mathbb{R}$. Si annulla per $x=0$, $x=10$, ed è positiva altrimenti. Ammette asintoti obliqui di equazione $y=x-5$ (per $x\to+\infty$) e $y=5-x$ (per $x\to-\infty$). Non è derivabile per $x=0$, $x=10$, che risultano punti di minimo assoluto (perchè $f(0)=f(10)=0\le f(x)$, $\forall\,x\in\mathbb{R}$). La derivata prima si annulla per $x=5$, che risulta di massimo relativo. Da notare i seguenti limiti relativi alla derivata prima

$$\lim_{x\to10^+}f'(x)=\lim_{x\to0^+}f'(x)=+\infty\ ,\qquad \lim_{x\to10^-}f'(x)=\lim_{x\to0^-}f'(x)=-\infty$$

che, nel grafico in figura 2.47, corrispondono alle singolarità per $x=0$, $x=10$. La derivata seconda, dove esiste, è negativa. Per finire, osserviamo che vale l'equivalenza:

$$\begin{cases} y = \sqrt{|x^2 - 10x|} \\ 0 \le x \le 10 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} (x-5)^2 + y^2 = 25 \\ y \ge 0\,. \end{cases}$$

Ciò comporta che, nell'intervallo $[0, 10]$, il grafico della funzione $f(x)$ è costituito dalla semicirconferenza di centro $(5, 0)$, raggio 5, con $y \ge 0$]

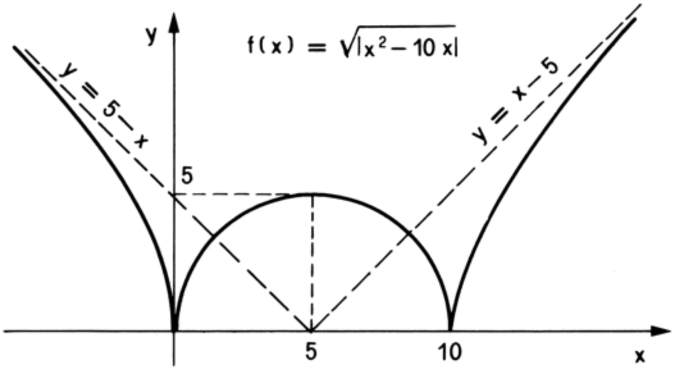


figura 2.47

2.60 Studiare le seguenti funzioni

$$\text{(a)}\ f(x) = x - \sqrt{x - x^2} \qquad\qquad \text{(b)}\ f(x) = x - \sqrt{\frac{x^2}{2} - x - 4}$$

[(a) È definita nell'intervallo $[0, 1]$. Si annulla per $x = 0$ e $x = 1/2$; è positiva nell'intervallo $(1/2, 1]$. Non è derivabile per $x = 0$, $x = 1$, che risultano punti di massimo. La derivata prima si annulla per $x = 1/2 - \sqrt{2}/4$, che è un punto di minimo interno. La funzione è convessa nel suo insieme di definizione. Il grafico è riportato in figura 2.48.
(b) È definita nell'insieme $(-\infty, -2] \cup [4, +\infty)$. È positiva per $x \ge 4$ ed è negativa per $x \le -2$. Le rette di equazione

$$y = \left(1 \mp \frac{\sqrt{2}}{2}\right) x \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad\qquad (\text{per } x \to \pm\infty)$$

sono asintoti obliqui per $f(x)$. La funzione non è derivabile per $x = -2$, $x = 4$, che sono punti di massimo relativo. Il punto $x = 1 + \sqrt{18}$ è di minimo relativo. La funzione è convessa negli intervalli $(-\infty, -2]$ e $[4, +\infty)$. Il grafico è riportato in figura 2.49]

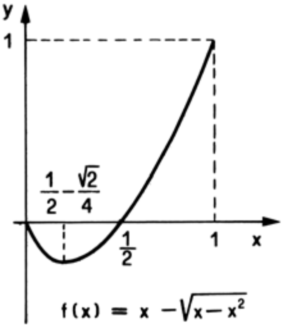


figura 2.48

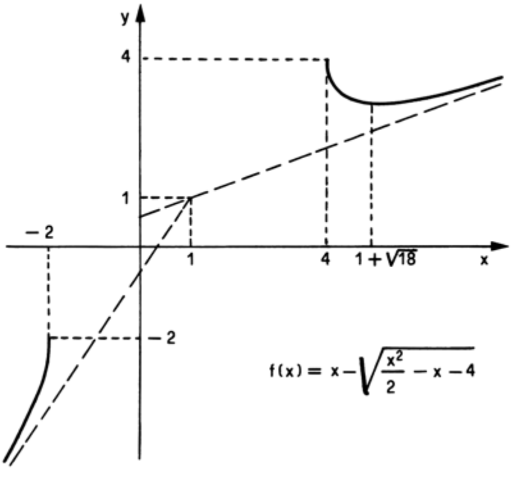


figura 2.49

2.61 Studiare la funzione $f(x) = x^{2/3}(x-1)^{1/3}$.

[La funzione è definita su tutto l'asse reale. Si annulla per $x = 0$, $x = 1$ ed è positiva per $x > 1$. La retta di equazione $y = x - 1/3$ è un asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$. La derivata si annulla per $x = 2/3$, che è un punto di minimo relativo. La funzione non è derivabile nei punti $x = 0$, $x = 1$ e valgono i limiti:

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = +\infty\ ;\ \lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty\ ;\ \lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = +\infty\ ;$$

il diverso comportamento della derivata prima a destra e sinistra di 0 rispetto al comportamento a destra e sinistra di 1 si rispecchia nelle differenze del grafico in figura 2.50 nell'intorno di $x = 0$ rispetto all'intorno di $x = 1$. La funzione risulta convessa negli intervalli $(-\infty, 0]$, $[0, 1]$ e concava in $[1, +\infty)$]

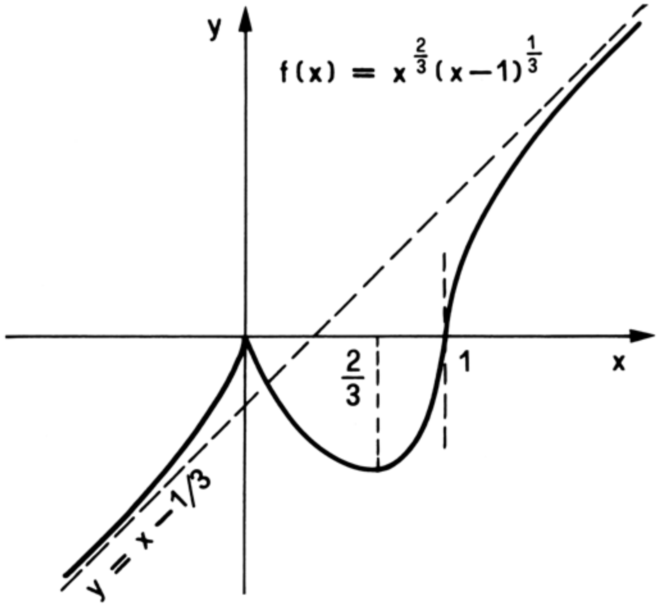


figura 2.50

2.62 Studiare le seguenti funzioni e disegnarne il grafico

(a) $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - x(1 + x^2)}$ (b) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 5x^2 + 8x}$

[(a) Definita per ogni $x \in \mathbb{R}$; si annulla per $x = 0$ e $x = 1$ (ed in tali punti la funzione non è derivabile); è positiva per $x < 0$. La derivata prima si annulla per $x = 1/3$, che è un punto di minimo relativo. La retta di equazione $y = 2/3 - x$ è un asintoto obliquo (per $x \to \pm\infty$) per la funzione. È convessa negli intervalli $[0, 1]$ e $[1, +\infty)$ ed è concava in $(-\infty, 0]$. Il grafico è rappresentato in figura 2.51.
(b) La funzione, definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, si annulla per $x = 0$, è positiva per $x > 0$ ed è negativa per $x < 0$. Ammette asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$ di equazione $y = x + 5/3$. La funzione è derivabile per ogni $x \neq 0$ e $f'(x) \to +\infty$ per $x \to 0$. La derivata prima si annulla per $x = -2$ (punto di massimo) e $x = -4/3$ (punto di minimo). È crescente negli intervalli $(-\infty, -2]$, $[-4/3, +\infty)$, mentre è decrescente nell'intervallo $[-2, -4/3]$. Il grafico è rappresentato in figura 2.52]

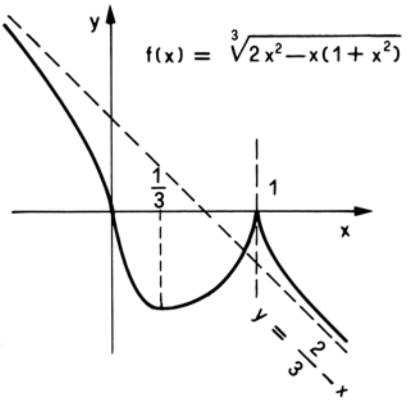


figura 2.51

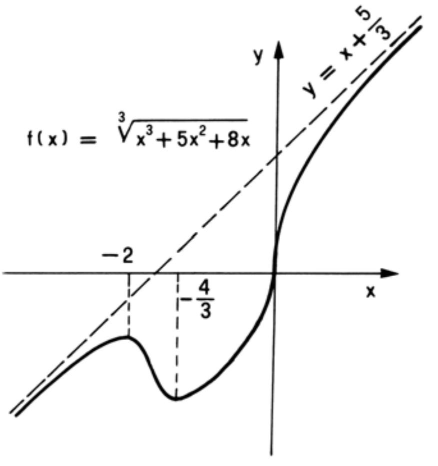


figura 2.52

2.63 Studiare la funzione $f(x) = x^{2/5}(5-x)^{3/5}$.

[È definita su $\mathbb{R}$. È negativa per $x > 5$, si annulla per $x = 0$, $x = 5$, è positiva altrimenti. Ammette asintoto obliquo di equazione $y = 3 - x$. Non è derivabile per $x = 0$, $x = 5$. La derivata prima si annulla per $x = 2$ ed è positiva nell'intervallo $(0, 2)$. Il punto $x = 2$ è di massimo relativo. Il punto $x = 0$ risulta di minimo relativo (perchè $f(x)$ è decrescente per $x \leq 0$ ed crescente per $x \in [0, 2]$). La derivata seconda, quando esiste, è positiva per $x > 5$ ed è negativa per $x < 5$. La funzione risulta convessa nell'intervallo $[5, +\infty)$. Il grafico è rappresentato in figura 2.53]

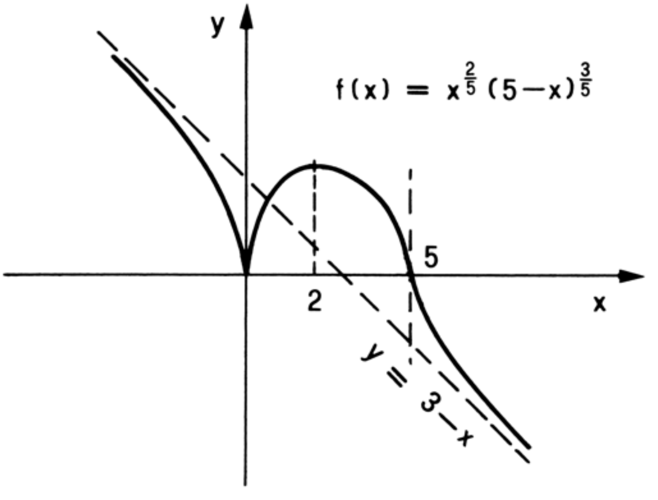


figura 2.53

2F. Grafici di funzioni logaritmiche

2.64 Studiare la funzione $f(x) = x \log x$.

[È definita e continua per $x > 0$. Risulta $f(x) > 0$ se e solo se $\log x > 0$, cioè se e solo se $x > 1$. Come verificato nell'esercizio 2.31 (a), la funzione non ha asintoti verticali, nè orizzontali nè obliqui. La derivata prima vale $f'(x) = \log x + 1$; per ogni $x > 0$. Perciò $f'(x) > 0$ se e solo se $\log x > -1$, cioè se e solo se $x > 1/e$; inoltre $f'(x) = 0$ per $x = 1/e$. Ne segue che $f(x)$ è strettamente decrescente in $(0, 1/e]$ ed è strettamente crescente in $[1/e, +\infty)$; il punto $x = 1/e$ è di minimo (relativo ed assoluto). Essendo $f''(x) = 1/x > 0$ per ogni $x > 0$, la funzione è convessa in $(0, +\infty)$. Si osservi anche che $f'(x) \to -\infty$ per $x \to 0^+$. Il grafico è rappresentato in figura 2.54]

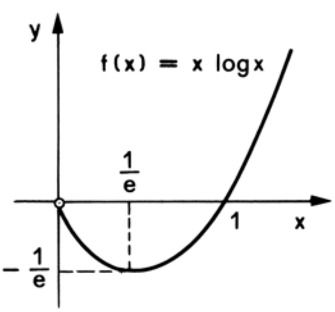


figura 2.54

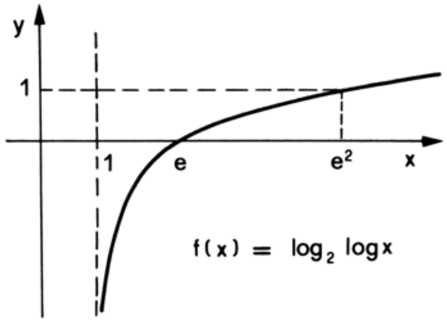


figura 2.55

2.65 Studiare la funzione $f(x) = \log_2 \log x$.

[La funzione è definita per quei valori di x per cui $\log x > 0$, cioè per $x \in (1, +\infty)$. Per $x = e$ risulta $\log e = 1$, e quindi $f(e) = 0$; inoltre $f(x) > 0$ per $x > e$, $f(x) < 0$ per $x \in (1, e)$. Dato che $f(x) \to -\infty$ per $x \to 1^+$, la retta di equazione $x = 1$ è un asintoto verticale per il grafico di $f(x)$. La funzione non ha asintoti orizzontali, perchè $f(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$. Non ha neanche asintoti obliqui, perchè, in base alla regola di L'Hôpital, risulta

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log_2 \log x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x \log x \log 2} = 0\,.$$

Le derivate prima e seconda valgono, per ogni $x > 1$,

$$f'(x) = \frac{1}{x \log x \log 2}\,; \qquad f''(x) = -\frac{1 + \log x}{\log 2 (x \log x)^2}\,.$$

Si vede facilmente che $f'(x) > 0$ e che $f''(x) < 0$ per ogni $x > 1$. Perciò $f(x)$ è crescente e concava in $(1, +\infty)$. Il grafico è rappresentato in figura 2.55; per fare il disegno è utile osservare che $f(e^2) = 1$]

2.66 Studiare le seguenti funzioni e disegnarne il grafico

(a) $f(x) = x \log^2 x$ (b) $f(x) = \log^2 x + 2 \log x$

[(a) È definita e continua per $x > 0$, si annulla per $x = 1$ ed è positiva altrimenti. Il limite di $f(x)$ per $x \to 0^+$ vale 0. Non ha asintoti. La funzione è derivabile per $x > 0$ e le derivate prima e seconda valgono

$$f'(x) = \log x(\log x + 2) \; ; \qquad\qquad f''(x) = \frac{2}{x}(\log x + 1).$$

La derivata prima si annulla per $x = 1$ e $x = e^{-2}$, è negativa nell'intervallo $(e^{-2}, 1)$ ed è positiva altrimenti. Inoltre, si noti che $f'(x) \to +\infty$ per $x \to 0^+$. Il punto $x = e^{-2}$ è di massimo relativo (e risulta $f(e^{-2}) = 4e^{-2}$), mentre $x = 1$ è di minimo. La derivata seconda si annulla per $x = e^{-1}$, che è un punto di flesso, dato che $f''(x) > 0$ per $x > e^{-1}$, mentre $f''(x) < 0$ per $x \in (0, e^{-1})$. Il grafico è rappresentato in figura 2.56.
(b) È definita per $x > 0$. Si annulla per $x = e^{-2}$ e $x = 1$ ed è negativa in $(e^{-2}, 1)$. L'asse y è asintoto verticale. È decrescente in $(0, e^{-1}]$ crescente in $[e^{-1}, +\infty)$; il punto $x = e^{-1}$ è di minimo assoluto ed il valore minimo è $f(e^{-1}) = -1$. La funzione è convessa in $(0, 1]$, è concava in $[1, +\infty)$. Il grafico è rappresentato in figura 2.57]

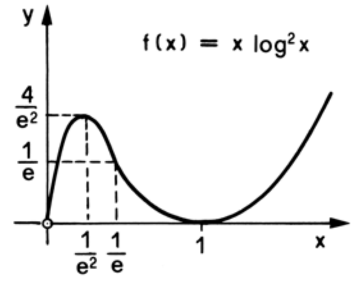


figura 2.56

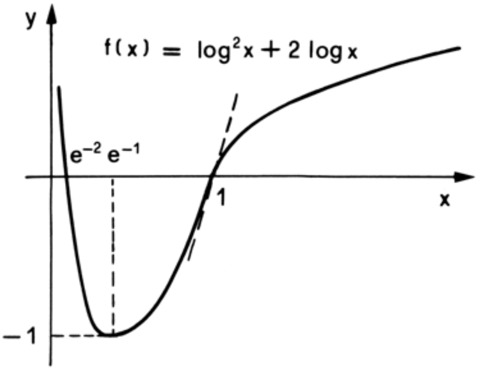


figura 2.57

2.67 Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{\log x}{1 + \log x}$.

[L'insieme di definizione è $(0, e^{-1}) \cup (e^{-1}, +\infty)$. La funzione si annulla per $x = 1$, è negativa nell'intervallo $(e^{-1}, 1)$ ed è positiva altrimenti. Valgono le relazioni di limite

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \; ; \qquad \lim_{x \to 1/e^{\pm}} f(x) = \mp\infty \; ; \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1\,.$$

Perciò, la retta $x = 1/e$ è asintoto verticale per $f(x)$, mentre la retta di equazione $y = 1$ è asintoto orizzontale. Le derivate prima e seconda valgono:

$$f'(x) = \frac{1}{x(1 + \log x)^2} \; ; \qquad\qquad f''(x) = \frac{-(\log x + 3)}{x^2(1 + \log x)^3}\,.$$

Si osservi che $f'(x) \to +\infty$ per $x \to 0^+$. Essendo $f'(x) > 0$ per ogni x dell'insieme di definizione, la funzione è strettamente crescente in $(0, e^{-1})$ e $(e^{-1}, +\infty)$. La derivata seconda si annulla per $x = e^{-3}$ ed è positiva nell'intervallo (e^{-3}, e^{-1}), dove la funzione è convessa. Il punto $x = e^{-3}$ è di flesso. Il grafico è rappresentato in figura 2.58]

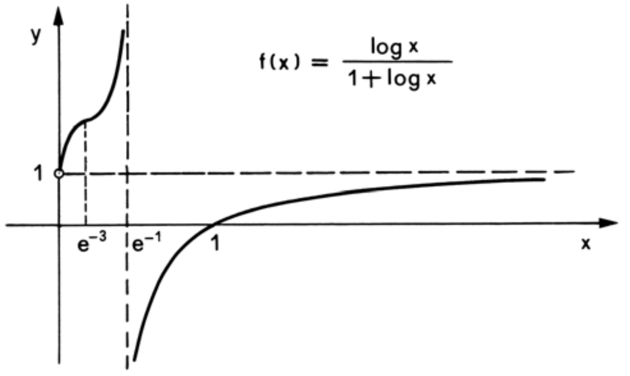


figura 2.58

2.68 Studiare le seguenti funzioni e disegnarne il grafico

$$\text{(a) } f(x) = \log \frac{1+x}{1-x} \qquad\qquad \text{(b) } f(x) = \log \left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

[(a) È definita nell'intervallo $(-1, 1)$. Si annulla per $x = 0$ ed è positiva per $x \in (0, 1)$. È una funzione dispari, infatti

$$f(-x) = \log \frac{1-x}{1+x} = \log \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1} = -\log \frac{1+x}{1-x} = -f(x) .$$

Le rette di equazione $x = -1$, $x = 1$ sono asintoti verticali per la funzione. Le derivate prima e seconda valgono

$$f'(x) = \frac{2}{1-x^2} ; \qquad\qquad f''(x) = \frac{4x}{(1-x^2)^2} .$$

Si verifica che $f(x)$ è strettamente crescente, e che è convessa in $[0, 1)$. Il punto $x = 0$ è di flesso. Il grafico è in figura 2.59. Osserviamo che $f(x)$ è esprimibile in termini della funzione inversa della tangente iperbolica nel modo seguente: $f(x) = 2\text{sett}\,\text{tg}\,hx$.
(b) È definita per $x \neq \pm 1$. È una funzione dispari. Le rette $x = \pm 1$ sono asintoti verticali; la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale. Le derivate di $f(x)$ hanno la stessa espressione analitica delle derivate calcolate nella precedente parte (a) (si ricordi a tal fine che la derivata, rispetto a t, della funzione $\log |t|$ è $1/t$). La funzione è crescente in $(-1, 1)$ ed è convessa in $[0, 1)$ e $(1, +\infty)$. Il grafico è riportato in figura 2.60]

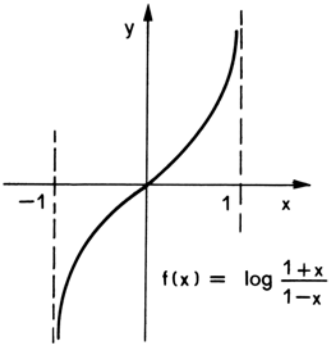


figura 2.59

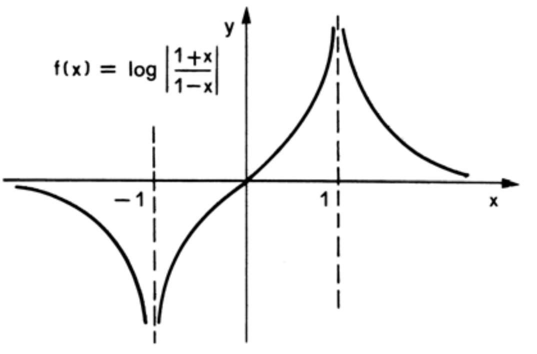


figura 2.60

2.69 Disegnare il grafico della funzione $f(x) = \log \dfrac{x^2}{|x+2|}$.

[È definita per $x \neq -2$, $x \neq 0$. Si annulla per $x = -1$, $x = 2$. Valgono le relazioni di limite

$$\lim_{x \to -2} f(x) = +\infty\ ; \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = -\infty\ ; \quad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty\ ; \qquad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0\,.$$

La funzione ammette due asintoti verticali, di equazione $x+2=0$, $x=0$. La derivata prima si annulla per $x=-4$ ed è positiva negli intervalli $(-4,-2)$, $(0,+\infty)$. Il punto $x=-4$ è di minimo relativo. Il grafico è rappresentato in figura 2.61]

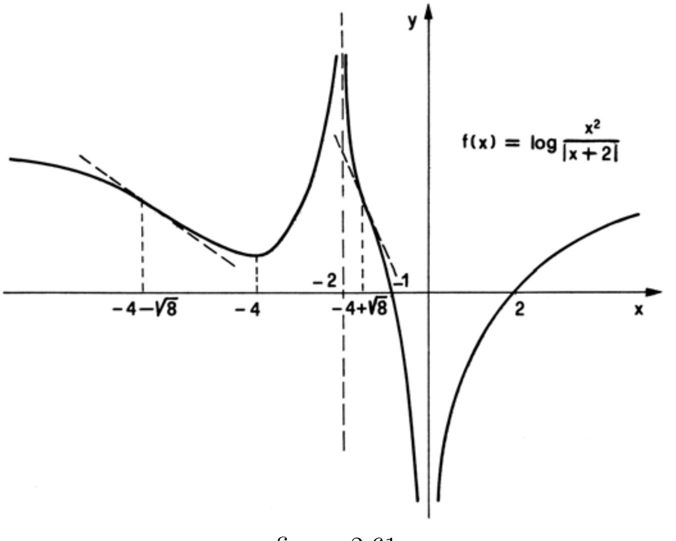


figura 2.61

2.70 Studiare le seguenti funzioni e disegnarne il grafico

(a) $f(x) = x(3 - \log^2 x)$ (b) $f(x) = x(1 + \log^2 |x|)$

[(a) È definita per $x > 0$. Si annulla per $x = e^{\pm\sqrt{3}}$ ed è positiva nell'intervallo $(e^{-\sqrt{3}}, e^{\sqrt{3}})$. La funzione non ha asintoti, a causa delle relazioni di limite:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \; ; \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \, .$$

La derivata prima $f'(x) = 3 - \log^2 x - 2\log x$ si può studiare ponendo $t = \log x$ e risolvendo la disequazione di secondo grado $3 - t^2 - 2t > 0$. La derivata prima risulta positiva per $x \in (e^{-3}, e)$. Il punto $x = e^{-3}$ è di minimo, mentre il punto $x = e$ è di massimo; in corrispondenza la funzione assume i valori $f(e^{-3}) = -6e^{-3}$, $f(e) = 2e$. Si verifica anche che la funzione è convessa nell'intervallo $(0, 1/e]$ ed è concava in $[1/e, +\infty)$; il punto $x = 1/e$ è di flesso, e risulta $f(1/e) = 2/e$. Il grafico è rappresentato in figura 2.62.
(b) È definita per $x \neq 0$. È una funzione dispari. Non ha asintoti. Le derivate prima e seconda valgono

$$f'(x) = (1 + \log|x|)^2 \; ; \qquad f''(x) = \frac{2}{x}(1 + \log|x|) \, , \quad \forall x \neq 0 \, .$$

È una funzione crescente. I punti $x = \pm 1/e$, in cui si annullano sia la derivata prima che la derivata seconda, sono di flesso a tangente orizzontale. Si noti infine che, per $x \to 0$, la retta tangente diventa verticale. Il grafico è in figura 2.63]

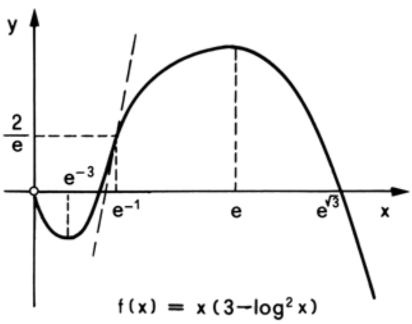


figura 2.62

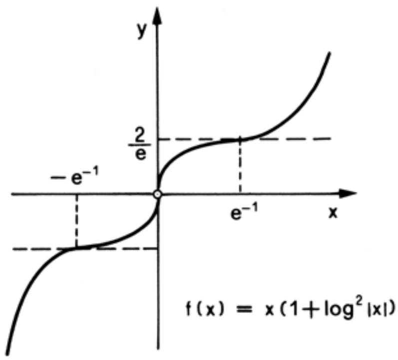


figura 2.63

2.71 Disegnarne i grafici delle funzioni

(a) $f(x) = x^3(\log|x| - \frac{1}{3})$ (b) $f(x) = x^4\left(\log|x| - \frac{1}{4}\right)$

[(a) È una funzione dispari, definita per $x \neq 0$; $f(\pm\sqrt[3]{e}) = 0$; $x = 1$ è un punto di minimo, $x = -1$ è un punto di massimo. È convessa negli intervalli $(-e^{-1/2}, 0)$, $(e^{-1/2}, +\infty)$; i punti $x = \pm e^{-1/2}$ sono di flesso. Per $x \to 0$ risulta $f(x) \to 0$, $f'(x) \to 0$. Grafico in figura 2.64.

(b) È una funzione pari, definita per ogni $x \neq 0$. Si annulla per $x = \pm\sqrt[4]{e}$; $x = \pm 1$ sono punti di minimo. È convessa per $|x| > e^{-1/3}$. Per $x \to 0$ risulta $f(x) \to 0$, $f'(x) \to 0$. Grafico in figura 2.65]

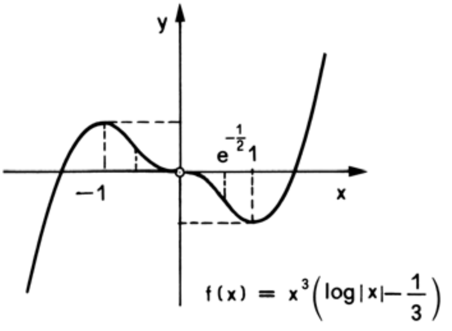


figura 2.64

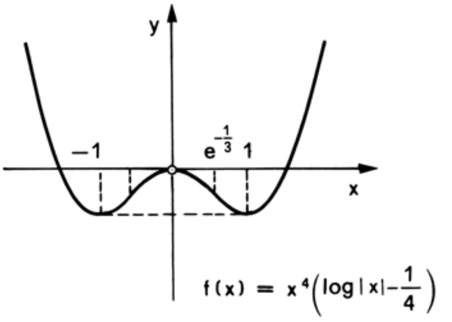


figura 2.65

2.72 Studiare la funzione $f(x) = x/\log|x|$.

[È una funzione dispari, definita per $x \neq 0$ e $x \neq \pm 1$. In base ai limiti

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0\ ; \quad \lim_{x\to\pm 1^{\pm}} f(x) = \pm\infty\ , \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty\ , \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0\ ,$$

si può affermare che $f(x)$ ammette $x = \pm 1$ come asintoti verticali, e non ha altri asintoti. La derivata prima si annulla per $x = e$ (punto di minimo) e $x = -e$ (punto di massimo). La derivata prima converge a zero per $x \to 0$. La derivata seconda si annulla per $x = \pm e^2$, che sono punti di flesso. Il grafico è rappresentato in figura 2.66]

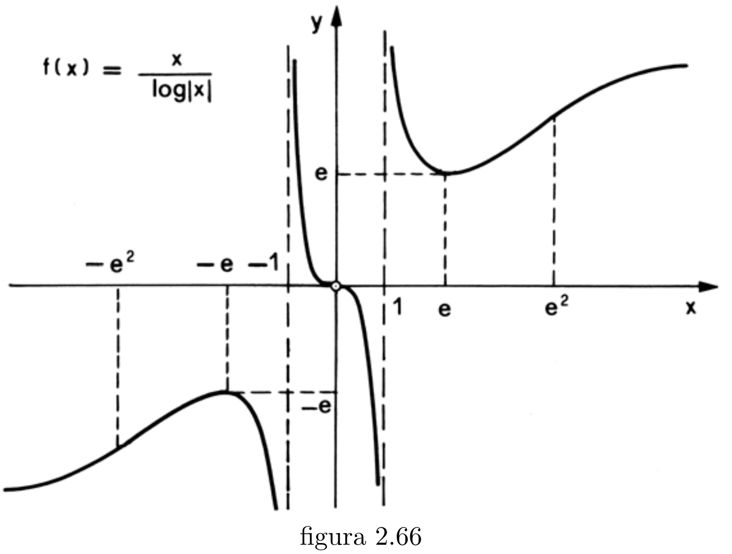


figura 2.66

2.73 Disegnarne il grafico delle funzioni

$$\text{(a)}\ f(x) = \frac{x^2}{1+\log^2 x} \qquad\qquad \text{(b)}\ \ f(x) = \log x - \log^2 x$$

[(a) Definita per ogni $x > 0$; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$. Non ha asintoti. La derivata prima è positiva per ogni $x > 0$ e converge a zero per $x \to 0^+$. La funzione è concava nell'intervallo $[1, e]$. I punti $x = 1$, $x = e$ sono di flesso. Il grafico è in figura 2.67.
(b) Definita per $x \in (0, +\infty)$. L'asse y è asintoto verticale. Si annulla per $x = 1$, $x = e$; è positiva nell'intervallo $(1, e)$. Ha massimo per $x = e^{1/2}$ ed ha un punto di flesso per $x = e^{3/2}$. Il grafico è in figura 2.68]

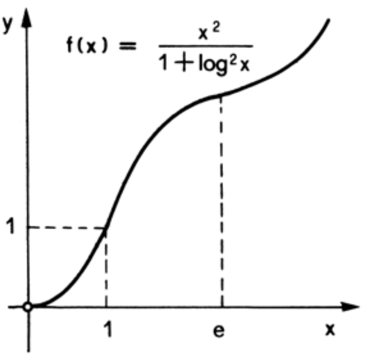


figura 2.67

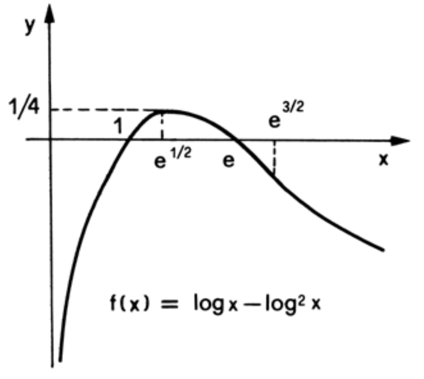


figura 2.68

2.74 Studiare le seguenti funzioni:

$$\text{(a)}\ y = x^2 - 5x + \log|x-1| \qquad\qquad \text{(b)}\ \ y = x^2 - 3x - \log|x-1|$$

[(a) Definita per $x \neq 1$. Asintoto verticale per $x = 1$. Punto di massimo per $x = 3/2$, punto di minimo per $x = 2$. È convessa negli intervalli $(-\infty, 1 - \sqrt{2}/2]$, $[1 + \sqrt{2}/2, +\infty)$.
(b) Definita per $x \neq 1$. Asintoto verticale per $x = 1$. I punti $x = 1/2$, $x = 2$ sono di minimo relativo. È convessa negli intervalli $(-\infty, 1)$, $(1, +\infty)$ e non ha punti di flesso]

2.75 Disegnare il grafico delle funzioni $f(x)$ sottoindicate, dopo aver semplificato l'espressione in base alle proprietà dei logaritmi e del valore assoluto.

$$\text{(a)}\ f(x) = x + \log|x| - \log|x^3 - x|$$

$$\text{(b)}\ f(x) = 2x + 1 + \log|x^3 + x^2 + x + 1| - \log|x+1|$$

[(a) La funzione è definita per $x \neq 0$. Semplificando in base alle proprietà dei logaritmi e del valore assoluto, si ottiene per ogni $x \neq 0$:

$$f(x) = x - \log|x^2 - 1|$$

La funzione tende a $\pm\infty$. Le rette di equazione $x = \pm 1$ sono asintoti verticali, non ci sono altri asintoti. Le derivate prima e seconda valgono

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 - 1} \; ; \qquad f''(x) = 2\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} \; .$$

La derivata prima si annulla per $x = 1 \pm \sqrt{2}$, che sono punti di minimo relativo. La derivata seconda, quando è definita, è positiva. Il grafico è rappresentato in figura 2.69; si noti la discontinuità (eliminabile) per $x = 0$.
(b) La funzione è definita per $x \neq -1$. Semplificando si ottiene

$$f(x) = 2x + 1 + \log(x^2 + 1) \quad , \qquad \forall\, x \neq -1.$$

Le derivate prima e seconda valgono

$$f'(x) = 2\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} \; ; \qquad f''(x) = 2\frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} \; .$$

La funzione risulta crescente; è convessa nell'intervallo $(-1, 1]$ ed è concava all'esterno. Il punto $x = 1$ è di flesso, mentre si ricordi che $f(x)$ non è definita per $x = -1$ (ma può essere prolungata con continuità)]

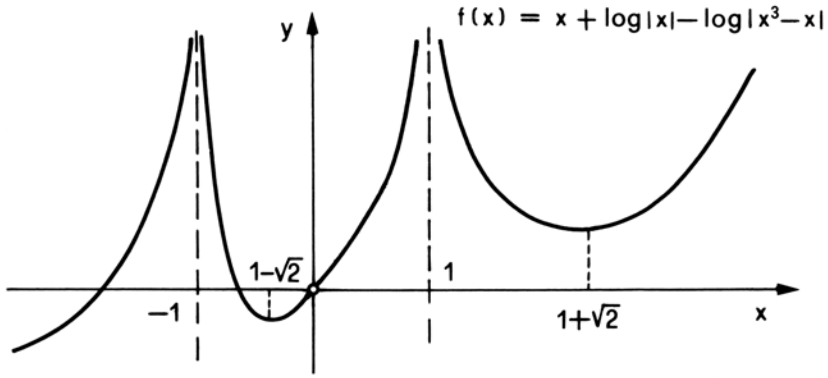


figura 2.69

2.76 Determinare l'insieme di definizione, il segno, gli asintoti, il segno della derivata prima, e disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{\log x}{e + x \log x} \; .$$

[La funzione non è definita per $x \leq 0$. Per determinare l'insieme di definizione di $f(x)$ occorre stabilire se il denominatore si annulla per qualche $x \in (0, +\infty)$; a tal fine, studiamo, per $x > 0$, la funzione

$$g(x) = e + x \log x \; .$$

Risulta $\lim_{x\to 0^+} g(x) = e$, $\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$, $\lim_{x\to +\infty} g(x)/x = +\infty$.

La derivata $g'(x) = \log x + 1$ si annulla per $x = 1/e$, è positiva per $x > 1/e$, ed è negativa se $x \in (0, 1/e)$. La funzione $g(x)$ è decrescente in $(0, 1/e]$ ed è crescente in $[1/e, +\infty)$. Il punto $x = 1/e$ è di minimo assoluto ed il valore minimo è $g(1/e) = (e^2 - 1)/e > 0$. Perciò la funzione $g(x)$ è positiva per ogni $x \in (0, +\infty)$. Il grafico di $g(x)$ è rappresentato in figura 2.70.

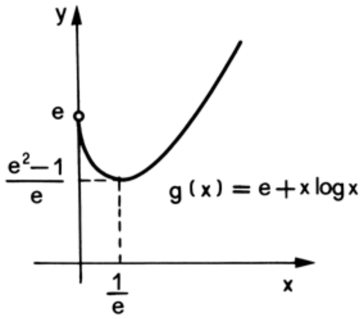


figura 2.70

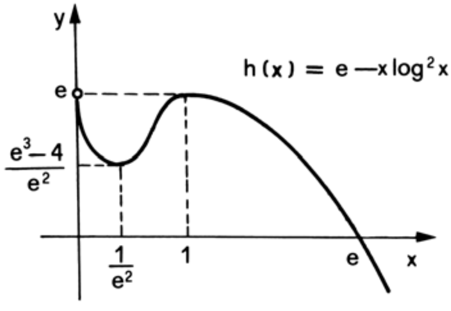


figura 2.71

Dato che $g(x) > 0$ per ogni $x > 0$, la funzione $f(x)$ è definita per ogni $x > 0$, si annulla per $x = 1$, è positiva per $x > 1$ ed è negativa nell'intervallo $(0, 1)$. Si verifica facilmente che l'asse y è un asintoto verticale (destro) e che l'asse x è asintoto orizzontale per $f(x)$. La derivata prima, per $x > 0$, vale:

$$f'(x) = \frac{e - x \log^2 x}{x(e + x \log x)^2} \ .$$

Il denominatore di $f'(x)$ è positivo per ogni $x > 0$. Consideriamo il numeratore:

$$h(x) = e - x \log^2 x \ \ .$$

La funzione $h(x)$ è definita per $x > 0$, tende ad e per $x \to 0^+$, diverge a $-\infty$ per $x \to +\infty$. La derivata

$$h'(x) = -\log x(\log x + 2)$$

si annulla per $x = 1$ e $x = e^{-2}$. Il punto $x = 1$ risulta di massimo, mentre il punto $x = e^{-2}$ è di minimo relativo. Si veda il grafico di $h(x)$ in figura 2.71. In particolare, essendo $h(e^{-2}) = (e^3 - 4)/e^2 > 0$, la funzione $h(x)$ è positiva nell'intervallo $(0, 1]$; dato che $h(x)$ è strettamente decrescente per $x \geq 1$, si annulla una sola volta. Da verifica diretta si riconosce che $h(x) = 0$ per $x = e$. Perciò $h(x) < 0$ per $x > e$ e $h(x) > 0$ per $x \in (0, e)$.

In base al segno di $h(x)$, la derivata $f'(x)$ risulta positiva in $(0, e)$ e negativa in $(e, +\infty)$. Il punto $x = e$ è di massimo (assoluto) per $f(x)$. Il grafico di $f(x)$ è rappresentato in figura 2.72]

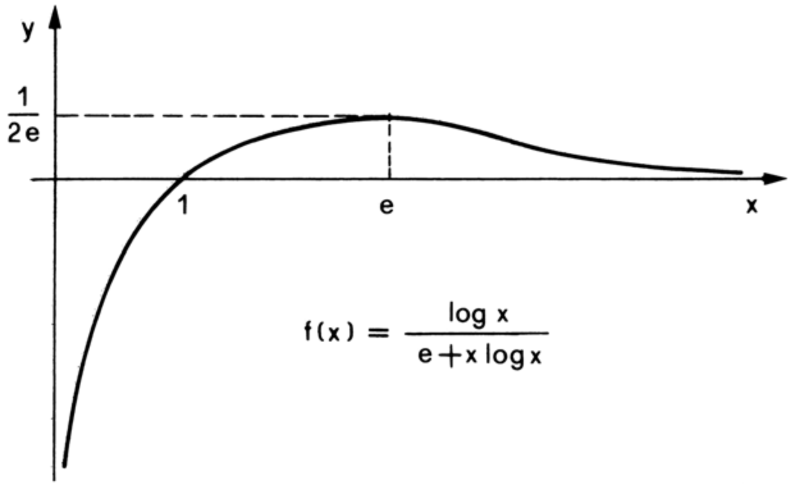


figura 2.72

2.77 Studiare le seguenti funzioni e disegnarne grafico

(a) $f(x) = x \log\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$

(b) $f(x) = \log\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{1+x}$

[(a) La funzione è definita nell'insieme $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$. È positiva nel suo insieme di definizione. In base alle relazioni di limite

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0\ , \qquad \lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty\ , \qquad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1\ ,$$

si deduce che la retta $x = -1$ è un asintoto verticale (sinistro) e $y = 1$ è asintoto orizzontale per $f(x)$. Le derivate prima e seconda valgono

$$f'(x) = \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\ ; \quad f''(x) = \frac{-1}{x(1+x)^2}\ .$$

Dal segno della derivata seconda si può risalire al segno della derivata prima. Infatti, ad esempio per $x > 0$, risulta $f''(x) < 0$ e quindi $f'(x)$ è una funzione strettamente decrescente. Dato che $f'(x) \to 0$ per $x \to +\infty$, ne segue che $f'(x) > 0$ per ogni $x > 0$. Analogamente, essendo $f''(x) > 0$ per ogni $x < -1$, in questo caso la derivata prima è strettamente crescente; dato che $f'(x) \to 0$ per $x \to -\infty$, ne segue di nuovo che $f'(x) > 0$. Perciò $f'(x) > 0$ nell'inieme di definizione (si veda anche l'esercizio 1.58). La funzione risulta crescente e convessa in $(-\infty, -1)$, crescente e concava in $(0, +\infty)$. Il grafico è rappresentato in figura 2.73.

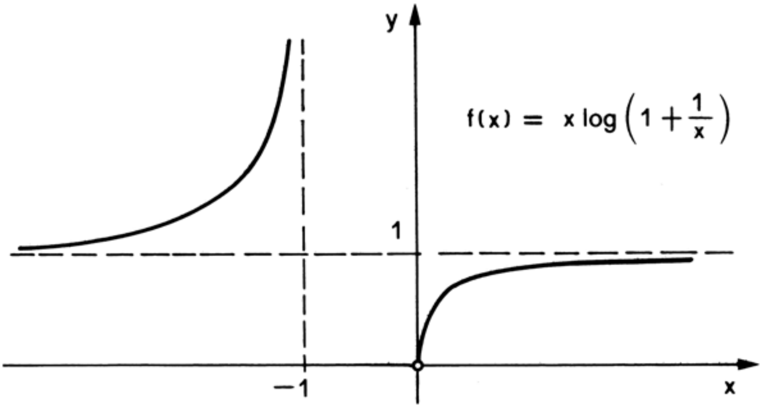


figura 2.73

(b) La funzione è crescente e convessa in $(-\infty,-1)$, decrescente e convessa in $(0,+\infty)$. Le rette $x=0$, $x=-1$ sono asintoti verticali, la retta $y=0$ è asintoto orizzontale]

2G. Grafici di funzioni esponenziali

2.78 Studiare le seguenti funzioni e disegnarne il grafico

(a) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ (b) $f(x)=e^{\frac{x-1}{x}}$

[(a) È definita per $x\neq 0$; è positiva per ogni $x\neq 0$. Dalle relazioni di limite

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty\ ,\qquad \lim_{x\to 0^-} f(x)=0\ ,\qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x)=1\ ,$$

segue che la retta di equazione $x=0$ è un asintoto verticale destro mentre $y=1$ è un asintoto orizzontale per $x\to\pm\infty$ (si veda anche l'esercizio 2.31 (b)). Le derivate prima e seconda valgono

$$f'(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\ ;\qquad f''(x)=e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1+2x}{x^4}\ .$$

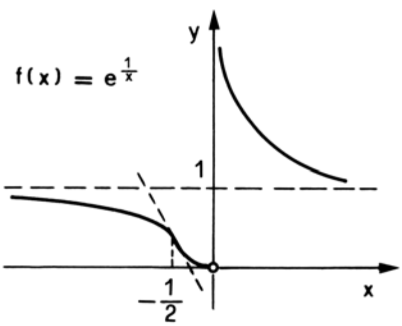


figura 2.74

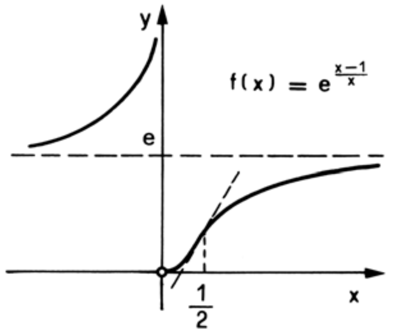


figura 2.75

Si noti che $f'(x) \to 0$ per $x \to 0^-$; ciò significa che la retta tangente diventa orizzontale quando x si avvicina a 0 da sinistra. Dal segno della derivata prima si deduce che $f(x)$ è decrescente in $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$. Dal segno della derivata seconda si deduce che $f(x)$ è convessa negli intervalli $[-1/2, 0)$ e $(0, +\infty)$ ed è concava in $(-\infty, -1/2]$. Il grafico è rappresentato in figura 2.74.
(b) Grafico in figura 2.75]

2.79 Studiare la funzione $f(x) = e^x - x$.

[La funzione è definita su tutto l'asse reale. Prima di studiarne il segno, è opportuno calcolare la derivata prima:

$$f'(x) = e^x - 1.$$

Risulta $f'(x) = 0$ per $x = 0$, $f'(x) > 0$ per $x > 0$ e $f'(x) < 0$ per $x < 0$. La funzione è quindi crescente in $[0, +\infty)$, ed è decrescente in $(-\infty, 0]$. Il punto $x = 0$ è di minimo assoluto e risulta

$$f(x) \geq f(0) = e^0 - 0 = 1 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

In particolare ne segue che la funzione è positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si verifica che la retta di equazione $y = -x$ è asintoto obliquo per la funzione per $x \to -\infty$. La funzione è convessa su $\mathbb{R}$. Il grafico è rappresentato in figura 2.76]

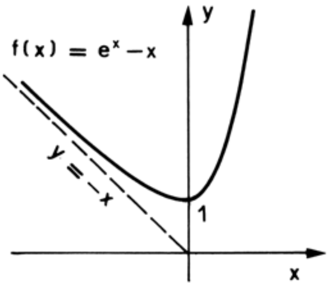


figura 2.76

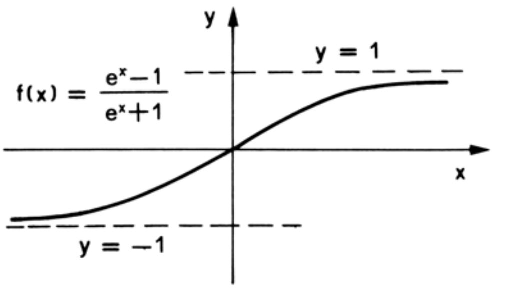


figura 2.77

2.80 Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

[È definita su $\mathbb{R}$. È una funzione dispari; infatti

$$f(-x) = \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = \frac{1/e^x - 1}{1/e^x + 1} = \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = -f(x).$$

La retta $y = 1$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$; la retta $y = -1$ è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$. Le derivate prima e seconda valgono

$$f'(x) = \frac{2e^x}{(1 + e^x)^2}\ ; \qquad f''(x) = \frac{2e^x(1 - e^x)}{(1 + e^x)^3}\ .$$

Essendo $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, la funzione è crescente su $\mathbb{R}$. Essendo $f''(x) \gtrless$ per $x \lessgtr 0$, la funzione è convessa in $(-\infty, 0]$ ed è concava in $[0, +\infty)$. Il punto $x = 0$ è di flesso. Il grafico è rappresentato in figura 2.77]

2.81 Studiare le seguenti funzioni e disegnarne il grafico

$$\text{(a)}\ f(x) = \frac{1}{e^x - 2} \qquad \text{(b)}\ f(x) = \frac{1}{3 + e^{-x}}$$

[(a) È definita per ogni $x \neq \log 2$. È positiva per $x > \log 2$, è negativa per $x < \log 2$. La retta di equazione $x = \log 2$ è un asintoto verticale. La retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$, la retta $y = -1/2$ è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$. È decrescente e convessa per $x > \log 2$, è decrescente e concava per $x < \log 2$. Il grafico è in figura 2. 78.
(b) È definita, positiva e strettamente crescente su tutto l'asse reale. Ammette asintoti orizzontali di equazione $y = 1/3$ (per $x \to +\infty$) e $y = 0$ (per $x \to -\infty$). È convessa per $x < -\log 3$ ed è concava per $x > -\log 3$.
Il punto $x = -\log 3$ è di flesso. Il grafico è rappresentato in figura 2.79]

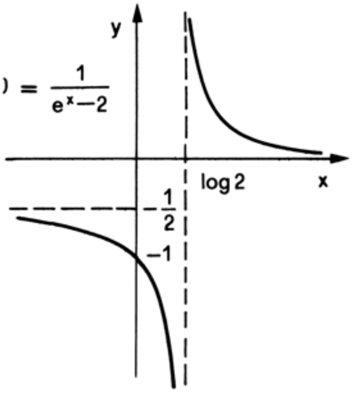


figura 2.78

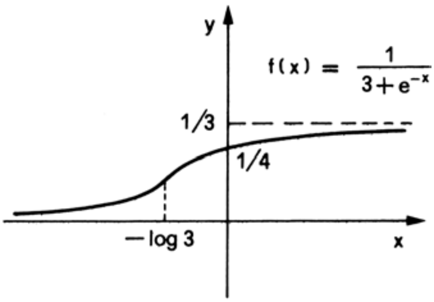


figura 2.79

2.82 Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{x-2}{e^x}$

[Per il calcolo delle derivate è conveniente scrivere la funzione nella forma $f(x) = (x-2)e^{-x}$. Ha un asintoto orizzontale (per $x \to +\infty$) di equazione $y = 0$. Si annulla per $x = 2$. Il punto $x = 3$ è di massimo. Il punto $x = 4$ è di flesso. Il grafico è rappresentato in figura 2.80]

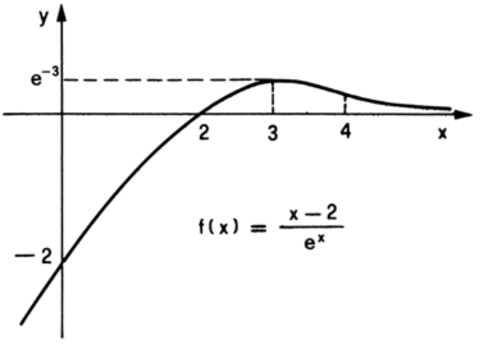


figura 2.80

2.83 Studiare le seguenti funzioni e disegnarne il grafico

$$\text{(a) } f(x) = e^{x-|x^2-x-2|} \qquad\qquad \text{(b) } e^{\frac{|x^2-x-2|}{x}}$$

[(a)La funzione è definita, positiva e continua per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dato che $f(x) \to 0$ per $x \to \pm\infty$, l'asse x è asintoto orizzontale per $f(x)$. Per studiare la monotonia e la convessità di $f(x)$, è opportuno preliminarmente stabilire il segno del trinomio $x^2 - x - 2$ (che è positivo all'esterno dell'intervallo $[-1, 2]$ ed è negativo all'interno) ed in conseguenza scrivere:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2+2x+2} & \text{se} \quad x < -1\,, \quad \text{oppure} \quad x > 2 \\ e^{x^2-2} & \text{se} \qquad -1 \le x \le 2\,. \end{cases}$$

La funzione non è derivabile per $x = -1$, $x = 2$ (e ciò è ben visibile nel grafico in figura 2.81). Si verifica poi che la derivata prima è positiva per $x < -1$ e $0 < x < 2$, mentre è negativa per $-1 < x < 0$ e $x > 2$. La derivata prima si annulla per $x = 0$, che è un punto di minimo relativo; i punti $x = -1$, $x = 2$ risultano di massimo relativo. La derivata seconda, quando è definita, è positiva; la funzione non ha punti di flesso.
(b) Definita e positiva per $x \neq 0$. Valgono i limiti:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to0^-} f(x) = 0\,; \qquad\qquad \lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,.$$

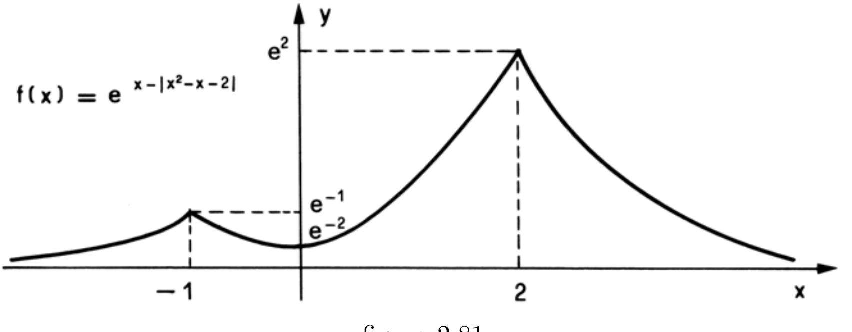


figura 2.81

La funzione ammette asintoto orizzontale di equazione $y = 0$ e asintoto verticale $x = 0$ (per $x \to 0^+$). La derivata prima è positiva per $x < -1$ e $x > 2$. La funzione non è derivabile per $x = -1$ (che è un punto di massimo relativo) e per $x = 2$ (punto di minimo). La derivata seconda, dove è definita, è positiva]

2.84 Disegnare i grafici delle funzioni

$$\text{(a)}\ f(x) = \frac{e^{x^2-4x-5}+1}{e^{x^2-4x-5}-1} \qquad\qquad \text{(b)}\ f(x) = \frac{e^{-(x+2)^2}+1}{e^{-(x+2)^2}-1}$$

[(a) figura 2.82 ; (b) figura 2.83]

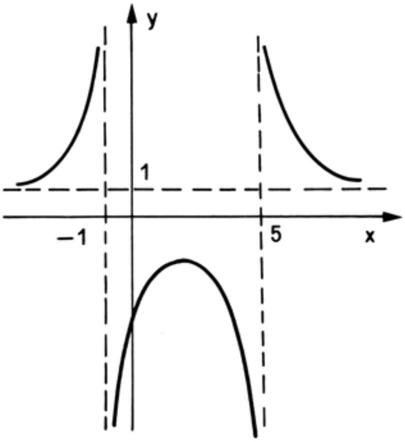


figura 2.82

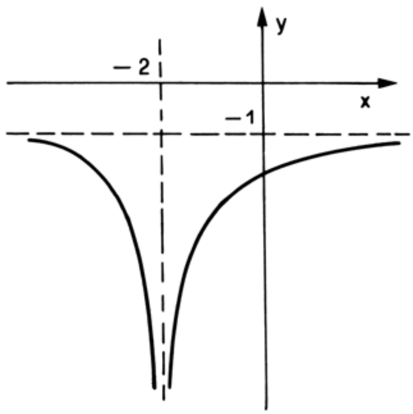


figura 2.83

2.85 Studiare le seguenti funzioni e disegnarne il grafico

$$\text{(a)}\ f(x) = e^x\sqrt{2x+1} \qquad\qquad \text{(b)}\ f(x) = e^{-x}\sqrt{x-1}$$

[(a) Definita per $x \geq -1/2$; $f(-1/2) = 0$; è positiva per $x > -1/2$. Tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$ e non ha asintoti. Le derivate prima e seconda, per $x > -1/2$, valgono

$$f'(x) = 2e^x\frac{x+1}{\sqrt{2x+1}}\ ; \qquad\qquad f''(x) = 2e^x\frac{2x^2+4x+1}{(2x+1)^{3/2}}\ .$$

La derivata prima è positiva per ogni $x > -1/2$ e tende a $+\infty$ per $x \to -1/2$. La funzione è convessa per $x \geq -1 + \sqrt{2}/2$; il punto $x = -1 + \sqrt{2}/2$ è di flesso. Il grafico è rappresentato in figura 2.84.
(b) Definita per $x \geq 1$; $f(1) = 0$; è positiva per $x > 1$. L'asse x è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$. Non è derivabile per $x = 1$ e $f'(x) \to +\infty$ per $x \to 1^+$. Ha punto di massimo (assoluto) per $x = 3/2$ ed un punto di flesso per $x > 3/2$. Il grafico è rappresentato in figura 2.85]

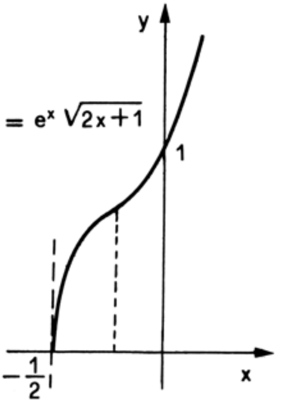


figura 2.84

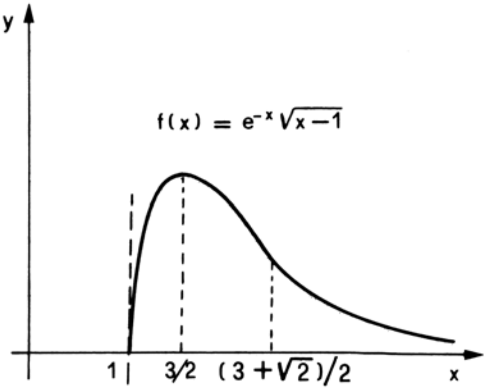


figura 2.85

2.86 Studiare la funzione $f(x) = e^{-x/3}(3x-2)^{1/9}$.

[È definita e continua su tutto l'asse reale. Si annulla per $x = 2/3$. ed è positiva per $x > 2/3$. L'asse x è asintoto orizzontale per $x \to +\infty\cdot$ Non è derivabile per $x = 2/3$ e $f'(x) \to +\infty$ per $x \to 2/3$. La funzione ha un punto di massimo (assoluto) per $x = 1$, due punti di flesso per $x = 0$, $x = 2$, e cambia la concavità anche in corrispondenza di $x = 2/3$. Il grafico è rappresentato in figura 2.86]

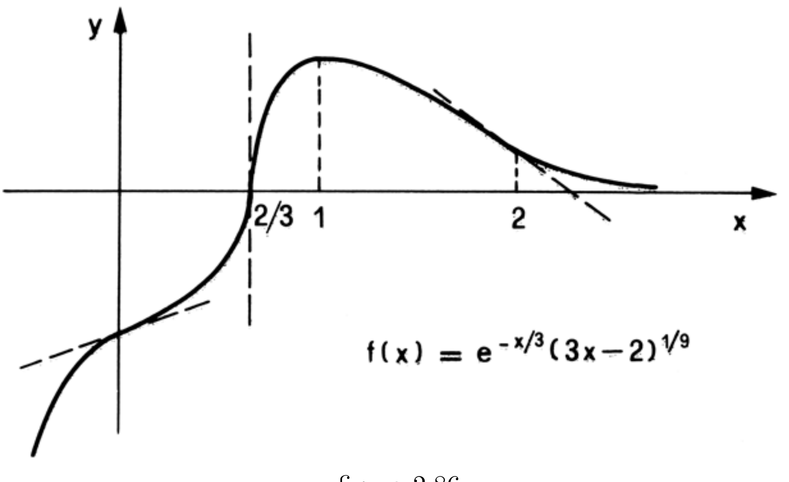


figura 2.86

2.87 Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico

$$f(x) = e^x - \log(x+1)\,.$$

[La funzione data è definita se $1+x>0$, cioè per $x>-1$. Per $x\to -1^+$ la funzione $f(x)$ diverge a $+\infty$; quindi la retta $x=-1$ è un asintoto verticale. La funzione $f(x)$ non ammette altri asintoti. Le derivate prima e seconda valgono

$$f'(x)=e^x-\frac{1}{1+x}\ ; \qquad\qquad f''(x)=e^x+\frac{1}{(1+x)^2}\ .$$

Prima i valutare il segno di $f'(x)$ è opportuno studiare il segno di $f''(x)$; risulta infatti immediatamente che $f''(x)>0$ per ogni $x\in(-1,+\infty)$. Ne segue che $f'(x)$ è strettamente crescente in tale intervallo. Dato che $f'(0)=e^0-1=0$, ne segue che $f'(x)<0$ in $(-1,0)$ e $f'(x)>0$ in $(0,+\infty)$. Pertanto $f(x)$ è decrescente in $(-1,0)$ e crescente in $(0,+\infty)$; il punto $x_0=0$ è di minimo. Il valore di minimo è $f(x_0)=f(0)=e^0-\log 1=1$. La funzione $f(x)$ è quindi positiva (e maggiore od uguale a 1) in tutto l'intervallo $(-1,+\infty)$. Il grafico è rappresentato in figura 2.87.]

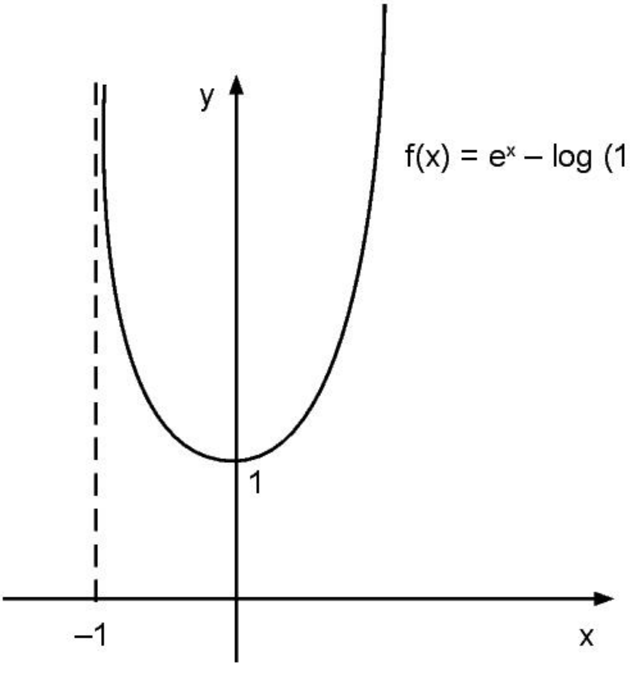


figura 2.87

2.88 Studiare la funzione $f(x)=xe^{\frac{1}{\log x}}$.

[È definita nell'insieme $(0,1)\cup(1,+\infty)$ ed è positiva in tale insieme. Essendo

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=0\cdot 1=0\ ,\qquad \lim_{x\to 1^-} f(x)=1\cdot e^{-\infty}=0\ ,\qquad \lim_{x\to 1^+} f(x)=1\cdot e^{+\infty}=+\infty\ ,$$

la retta $x=1$ è l'unico asintoto verticale (destro) per $f(x)$. Dato che $f(x)\to+\infty$ per $x\to+\infty$, è opportuno verificare se esistono asintoti obliqui; risulta:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{\log x}}=1\ ;$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{\log x}}-1}{1/x}\overset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{\log x}}\frac{x}{\log^2 x}$$

Si verifica separatamente, utilizzando di nuovo il teorema di L'Hôpital, che $x/\log^2 x\to+\infty$ per $x\to+\infty$. Perciò $[f(x)-x]\to+\infty$ per $x\to+\infty$ e la funzione non ha asintoti obliqui. Le derivate prima e seconda valgono

$$f'(x)=e^{\frac{1}{\log x}}\frac{\log^2 x-1}{\log^2 x}\ ;\qquad f''(x)=e^{\frac{1}{\log x}}\frac{-\log^2 x+2\log x+1}{x\log^4 x}\ .$$

Risulta $f'(x)=0$ per $\log x=\pm1$, cioè per $x=e$ e per $x=1/e$; $f(x)$ è crescente negli intervalli $(0,1/e)$, $(e,+\infty)$. Il punto $x=1/e$ è di massimo relativo, $x=e$ è di minimo relativo. Risultano utili per disegnare il grafico in figura 2.88 anche i limiti seguenti:

$$\lim_{x\to0^+}f'(x)=1\ ;\qquad\qquad \lim_{x\to1^-}f'(x)=0\ .$$

La funzione è convessa negli intervalli $[e^{1-\sqrt{2}},1)$, $(1,e^{1+\sqrt{2}}]$. I punti $x=e^{1\pm\sqrt{2}}$ sono di flesso]

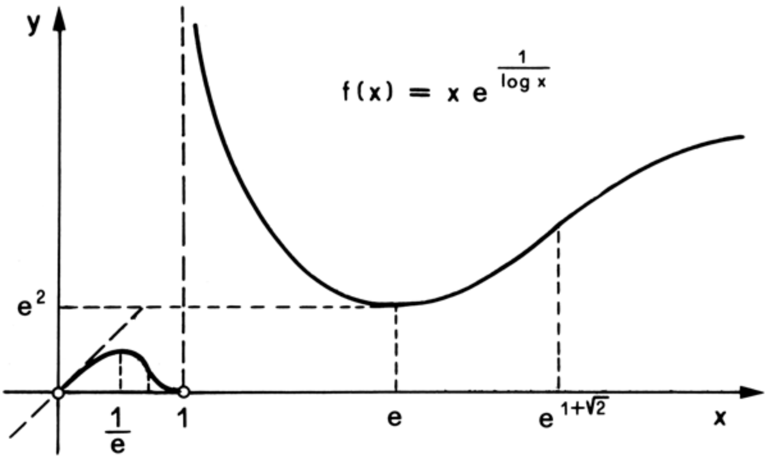


figura 2.88

2.89 Studiare la seguente funzione (prescindendo dal segno della derivata seconda) e disegnarne il grafico

$$f(x)=\frac{xe^{-x}}{x-\log x}\ .$$

[La funzione non è definita per $x\le0$. Per determinare l'insieme di definizione occorre stabilire se il denominatore si annulla; a tal fine, studiamo per $x>0$ la funzione

$$g(x)=x-\log x\ .$$

La derivata $g'(x) = (x-1)/x$ si annulla per $x = 1$, è positiva per $x > 1$ ed è negativa nell'intervallo $(0, 1)$. Perciò $x = 1$ è di minimo assoluto per la funzione $g(x)$ e si ha $g(x) \geq g(1) = 1$, per ogni $x > 0$.

Quindi il denominatore di $f(x)$ è sempre positivo; ne segue che $f(x)$ è definita e positiva per ogni $x > 0$. Essendo

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0\,, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0\,,$$

la retta $y = 0$ è l'unico asintoto per $f(x)$. La derivata prima vale

$$f'(x) = \frac{e^{-x}}{(x - \log\, x)^2}(x-1)(\log\, x - x - 1)\ .$$

Allo scopo di stabilire il segno di $f'(x)$, è utile studiare per $x > 0$ la funzione:

$$h(x) = \log\, x - x - 1\,.$$

Come fatto in precedenza per $g(x)$, si verifica che $h(x)$ è crescente in $(0, 1]$ ed è decrescente in $[1, +\infty)$; il punto $x = 1$ è di massimo assoluto per $h(x)$ e si ha $h(x) \leq h(1) = -2$. Ne segue che

$$\begin{array}{lllll} f'(x) \geq 0 & \Leftrightarrow & x - 1 \leq 0 & \Leftrightarrow & x \leq 1; \\ f'(x) \leq 0 & \Leftrightarrow & x - 1 \geq 0 & \Leftrightarrow & x \geq 1. \end{array}$$

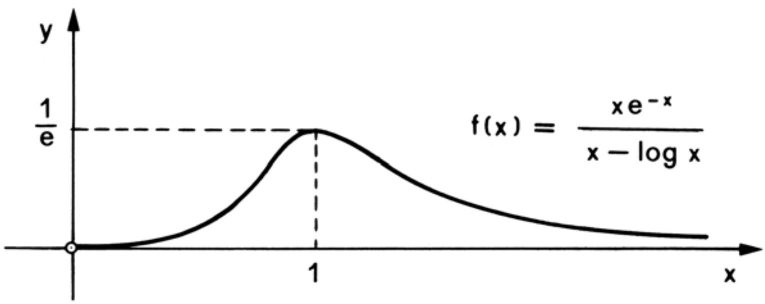


figura 2.89

Il punto $x = 1$ è di massimo (assoluto) per $f(x)$ ed il massimo vale $f(1) = 1/e$. Per disegnare il grafico in figura 2.89 è anche utile osservare che $f'(x) \to 0$ per $x \to 0^+$]

2.90 Studiare la funzione $f(x) = e^{-x}\left(\log\, |x| + \dfrac{x}{|x|}\right)$.

[È definita per $x \neq 0$ e si può rappresentare nella forma:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}(\log\, x + 1) & \text{se} \quad x > 0 \\ e^{-x}(\log\,(-x) - 1) & \text{se} \quad x < 0\,. \end{cases}$$

Cominciamo a studiare la funzione per $x > 0$. È positiva per $x > 1/e$ ed è negativa nell'intervallo $(0, 1/e)$. In base ai limiti:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty\ , \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0\ ,$$

si può affermare che $x = 0$ è asintoto verticale destro e $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$. La derivata prima vale

$$f'(x) = e^{-x}\left(\frac{1}{x} - \log x - 1\right), \qquad \forall\, x > 0.$$

Allo scopo di determinare il segno di $f'(x)$, consideriamo

$$g(x) = \frac{1}{x} - \log x - 1\,;$$

Essendo $g'(x) = -\frac{1}{x^2}(1+x) < 0$ per ogni $x > 0$, la funzione $g(x)$ è strettamente decrescente. Dato che $g(1) = 0$, la funzione $g(x)$ è positiva in $(0,1)$ ed è negativa in $(1,+\infty)$. Perciò $f'(x)$ è positiva in $(0,1)$ ed è negativa in $(1,+\infty)$; il punto $x = 1$ è di massimo relativo per $f(x)$, ed il massimo vale $f(1) = 1/e$.

Per $x < 0$ la funzione $f(x)$ è positiva nell'intervallo $(-\infty,-e)$, si annulla per $x = -e$ ed è negativa in $(-e,0)$. In base ai limiti

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty\ , \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty\ , \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty\ ,$$

risulta che $x = 0$ è asintoto verticale sinistro e che $f(x)$ non ha altri asintoti per $x \to -\infty$. La derivata prima vale

$$f'(x) = e^{-x}\left(\frac{1}{x} - \log(-x) + 1\right), \qquad \forall\, x < 0.$$

Per determinare il segno di $f'(x)$ per $x < 0$, consideriamo

$$h(x) = \frac{1}{x} - \log(-x) + 1\,;$$

la derivata prima vale $h'(x) = -\frac{1}{x^2}(1+x)$, si annulla per $x = -1$, è positiva per $x < -1$ ed è negativa in $(-1,0)$. La funzione $h(x)$ è strettamente crescente in $(-\infty,-1]$ ed è strettamente decrescente in $[-1,0)$. Il punto $x = -1$ è di massimo per $h(x)$. Essendo $h(-1) = 0$, risulta $h(x) < 0$ in $(-\infty,-1)$ e in $(-1,0)$. In corrispondenza, $f'(x)$ si annulla per $x = -1$ ed è negativa per ogni altro $x < 0$. La funzione $f(x)$ risulta strettamente decrescente in $(-\infty,0)$ ed il punto $x = -1$ è di flesso a tangente orizzontale. Il grafico è rappresentato in figura 2.90]

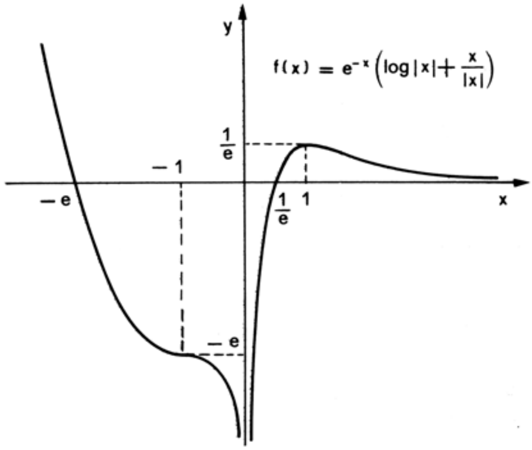


figura 2.90

2.91 Disegnare il grafico della funzione $f(x) = x^{\sqrt{x}}$.

[È possibile rappresentare la funzione nella forma

$$f(x) = x^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}\log x}.$$

È definita e positiva per $x > 0$; valgono i limiti

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\sqrt{x}\log x} = e^0 = 1\ , \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty\ .$$

La funzione non ha asintoti. La derivata prima vale

$$f'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}\log x}}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}\log x + 1\right)$$

e si annulla quando $\log x = -2$, cioè per $x = e^{-2}$ che è punto di minimo assoluto per $f(x)$. La funzione è convessa. Il grafico è rappresentato in figura 2.91]

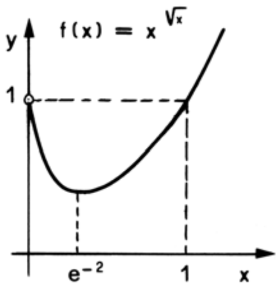


figura 2.91

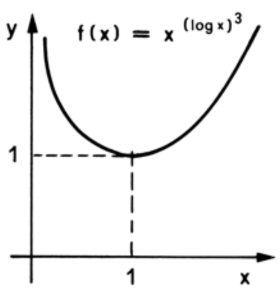


figura 2.92

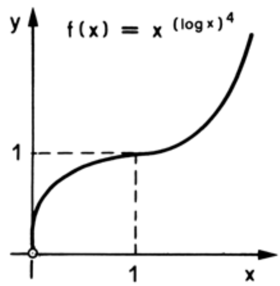


figura 2.93

2.92 Studiare le seguenti funzioni e disegnarne il grafico

(a) $f(x) = x^{(\log x)^3}$ (b) $f(x) = x^{(\log x)^4}$

[(a) Si ha $f(x) = x^{(\log x)^3} = e^{(\log x)^4}$. La funzione è definita e positiva per $x > 0$. L'asse y è asintoto verticale. La derivata prima

$$f'(x) = e^{(\log x)^4} \cdot 4(\log x)^3 \cdot \frac{1}{x}.$$

Si annulla per $x = 1$, è positiva per $x > 1$ ed è negativa per $x \in (0, 1)$. Il punto $x = 1$ è di minimo assoluto. La funzione è convessa in base al seguente argomento: la derivata seconda vale

$$f''(x) = e^{(\log x)^4} \cdot \frac{4}{x^2} \left[4(\log x)^4 + 12 - \log x\right];$$

la derivata della funzione $g(t) = 4t^4 + 12 - t$ vale $g'(t) = 16t^3 - 1$ e si annulla per $t = 16^{-1/3}$, che risulta punto di minimo per $g(t)$. Il valore minimo è

$$g(16^{-1/3}) = 4 \cdot 16^{-4/3} + 12 - 16^{-1/3} > 4 \cdot 16^{-4/3} + 12 - 1 > 11 > 0;$$

perciò $g(t) > 0$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$, e quindi anche $f''(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Il grafico di $f(x)$ è in figura 2.93.
(b) La funzione è definita, positiva e crescente per ogni $x > 0$. Il punto $x = 1$ è di flesso a tangente orizzontale. Il grafico è in figura 2.93. Si notino i limiti:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0\,, \qquad \lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty\ ]$$

2.93 Verificare che il grafico della funzione

$$f(x) = x^{\left(\frac{1}{x} - 1\right)}$$

è del tipo rappresentato in figura 2.94.

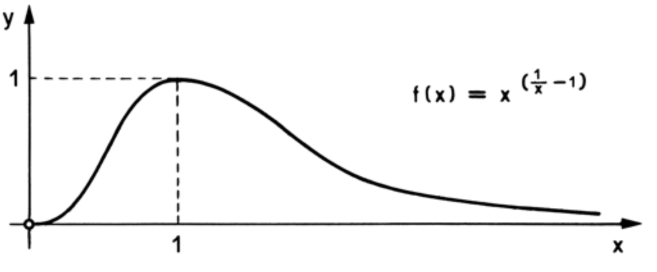


figura 2.94

2.94 Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

[È definita quando $1+1/x>0$, e ciò accade negli intervalli $(-\infty,-1)$, $(0,+\infty)$. Nell'insieme di definizione la funzione è positiva. Per studiare ulteriormente la funzione è opportuno rappresentarla nella forma:

$$f(x)=e^{x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}.$$

Dai seguenti limiti:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\ ,\qquad \lim_{x\to 0^+}f'(x)=1\qquad \lim_{x\to -1^-}f(x)=+\infty\ ,$$

si deduce che la retta di equazione $y=e$ è asintoto orizzontale, e la retta $x=-1$ è asintoto verticale sinistro per $f(x)$. La derivata prima vale

$$f'(x)=e^{x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}\left[\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right].$$

Il segno della derivata prima è identico al segno della funzione

$$g(x)=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}.$$

L'insieme di definizione di $g(x)$ è uguale all'insieme di definizione di $f(x)$ e la derivata vale

$$g'(x)=-\frac{1}{x(1+x)^2}.$$

Risulta $g'(x)<0$ in $(0,+\infty)$ e $g'(x)>0$ in $(-\infty,-1)$. Perciò $g(x)$ è strettamente decrescente in $(0,+\infty)$; dato che $g(x)\to 0$ per $x\to+\infty$ risulta $g(x)>0$ in $(0,+\infty)$. Analogamente, $g(x)$ è strettamente crescente in $(-\infty,-1)$; dato che $g(x)\to 0$ per $x\to-\infty$, risulta $g(x)>0$ anche in $(-\infty,-1)$. Osserviamo che si può verificare che $g(x)$ è positiva anche con i metodi dell'esercizio 1.56. Dato che la funzione $g(x)$ è positiva, anche $f'(x)$ risulta positiva. Perciò $f(x)$ è crescente negli intervalli $(-\infty,-1)$, $(0,+\infty)$. Si noti che $f'(x)\to+\infty$ per $x\to 0^+$. Il grafico di $f(x)$ è rappresentato in figura 2.95]

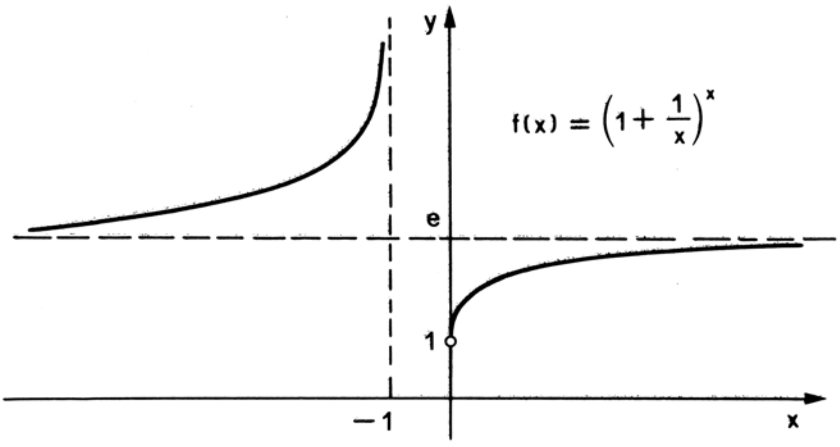


figura 2.95

2.95 Studiare la seguente funzione

$$f(x) = e^{2x} - 2(x+3)e^x + 3(x+1)^2 + 3.$$

[La funzione è definita su $\mathbb{R}$ e non ha asintoti. Dopo aver studiato il segno della derivata prima, si riuscirà ad affermare che $f(x)$ è positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$; più precisamente, che $f(x) \geq 3(-1 + \log^2 3) > 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. La derivata prima vale

$$f'(x) = 2[e^{2x} - (x+4)e^x + 3(x+1)].$$

Scriviamo l'equazione $f'(x)/2 = 0$ in forma equivalente per mezzo della formula risolutiva per le equazioni di secondo grado, ricordando che $e^{2x} = (e^x)^2$:

$$e^x = \frac{x+4}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(x+4)^2 - 12(x+1)} = \frac{x+4}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 4x + 4} =$$

$$= \frac{x+4}{2} \pm \frac{x-2}{2} = \begin{cases} = x+1 \\ = 3 \end{cases}.$$

Perciò $f'(x) = 0$ se e solo se $e^x = x + 1$, oppure $e^x = 3$. A posteriori è semplice verificare che vale la scomposizione:

$$f'(x) = 2(e^x - (x+1))(e^x - 3).$$

Ci sono molti metodi per verificare che la funzione $g(x) = e^x - (x+1)$ è non negativa. Si può utilizzare il criterio di convessità, o la formula di Taylor con il resto di Lagrange, per la funzione e^x con centro $x_0 = 0$. Oppure si può mostrare direttamente che $g'(x) \gtrless 0$ per $x \gtrless 0$; ne segue che $g(x)$ ha minimo (assoluto) per $x = 0$ ed il valore minimo è $g(0) = 0$.

Quindi $f'(x) = 0$ per $x = 0$ e per $x = \log 3$; inoltre $f'(x) \gtrless 0$ per $x \gtrless \log 3$. La funzione è crescente nell'intervallo $[\log 3, +\infty)$ ed è decrescente in $(-\infty, \log 3]$; il punto $x = \log 3$ è di minimo assoluto, mentre il punto $x = 0$ è di flesso a tangente orizzontale. Il valore minimo è $f(\log 3)$:

$$f(\log 3) = 9 - 6(3 + \log 3) + 3(1 + \log 3)^2 + 3 = -3 + 3\log^2 3 = 3(-1 + \log^2 3) > 0.$$

Studiando il segno della derivata terza, si riesce ad affermare che la derivata seconda si annulla, oltre che per $x = 0$, anche in un punto dell'intervallo $(0, \log 3)$. Il grafico è rappresentato in figura 2.96]

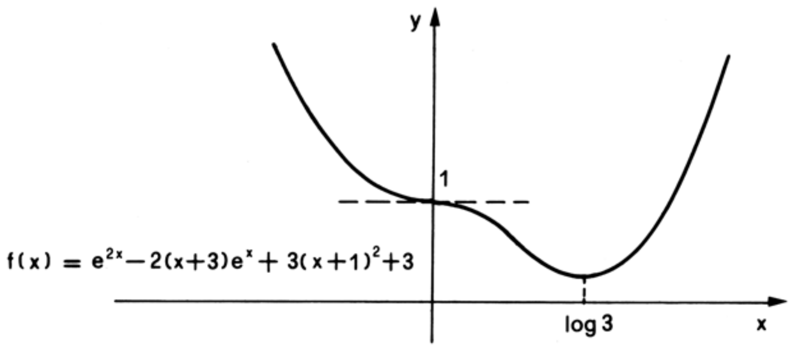


figura 2.96

2H Grafici di funzioni trigonometriche

2.96 Studiare la funzione $f(x) = \operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x$.

[La funzione è definita per ogni $x \neq \pi/2 + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. È una funzione dispari. È periodica di periodo 2π. È quindi sufficiente studiarne le proprietà in un intervallo di lunghezza 2π, ad esempio, $[-\pi, \pi]$ (ed anzi, essendo $f(x)$ dispari, sarebbe sufficiente studiarla in $[0, \pi]$). Relativamente all'intervallo considerato,la funzione è definita per $x \neq \pm\pi/2$. Le rette di equazione $x = \pm\pi/2$ sono asintoti verticali. La derivata prima vale

$$f'(x) = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^3 x + 1}{\cos^2 x} \ .$$

Essendo $\cos\, x \geq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, risulta anche $\cos^3 x \geq -1$ e quindi $f'(x) \geq 0$ per ogni x; inoltre $f'(x) = 0$ se $\cos\, x = -1$, cioè se $x = \pm\pi$ (nell'intervallo $[-\pi, \pi]$). La funzione è crescente ed i punti $x = \pm\pi$ sono di flesso a tangente orizzontale. La derivata seconda vale

$$f''(x) = \frac{\operatorname{sen} x (2 - \cos^3 x)}{\cos^3 x} = \operatorname{tg} x \frac{2 - \cos^3 x}{\cos^2 x} \ .$$

Dato che $2 - \cos^3 x > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, il segno di $f''(x)$ è determinato dal segno di $\operatorname{tg} x$. Relativamente all'intervallo $[-\pi, \pi]$, la funzione è convessa in $[0, \pi/2)$ e $[-\pi, -\pi/2)$ ed è concava in $(-\pi/2, 0]$, $(\pi/2, \pi]$. Il grafico è rappresentante in figura 2.97]

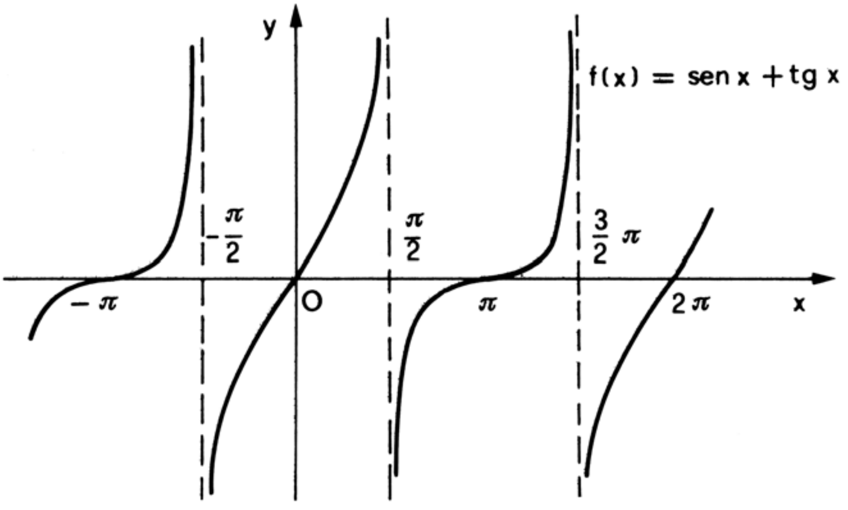


figura 2.97

2.97 Studiare le seguenti funzioni e disegnarne il grafico

(a) $f(x) = x - \operatorname{sen} x$ (b) $f(x) = x - \operatorname{sen} x \cos x$

[(a) La funzione è definita su $\mathbb{R}$ e non è periodica. È una funzione dispari. È positiva per $x > 0$ ed è negativa per $x < 0$. La derivata prima $f'(x) = 1 - \cos x$ si annulla per $x = 2k\pi$

ed è positiva altrimenti. Ne segue che la funzione è strettamente crescente su $\mathbb{R}$ ed i punti $x = 2k\pi$ sono di flesso a tangente orizzontale. Studiando la derivata seconda, si verifica che anche i punti $x = (2k+1)\pi$ sono di flesso; perciò la funzione cambia la concavità in corrispondenza di $x = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Si noti che $f(k\pi) = k\pi$. Il grafico è rappresentato in figura 2.98.
(b) Utilizzando le formule di duplicazione, la funzione si presentare nella forma

$$f(x) = x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2}(2x - \operatorname{sen} 2x).$$

Perciò, pur di cambiare $2x$ con x' e $2y$ con y', si ottiene la funzione già considerata nella precedente parte (a). Il grafico è quindi simile a quello rappresentato in figura 2.98]

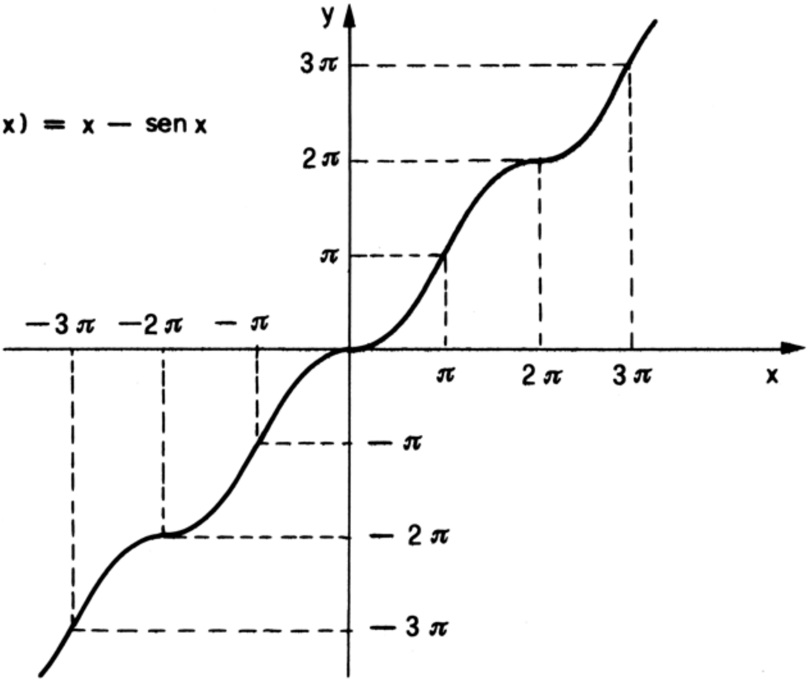


figura 2.98

2.98 Studiare le seguenti funzioni e disegnarne il grafico (prescindendo dallo studio della derivata seconda):

$$(a)\ f(x) = \cos^2 x - \cos x \qquad (b)\ f(x) = \cos^2 x + \cos x$$
$$(c)\ f(x) = \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^2 x \qquad (d)\ f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos x$$

[(a) La funzione è pari, ed è periodica di periodo 2π. Essendo $f(x) = \cos x(\cos x - 1)$, risulta $f(x) = 0$ quando $\cos x = 0$, oppure $\cos x = 1$. Quindi, nell'intervallo $[-\pi, \pi]$, la funzione si annulla per $x = \pm\pi/2$ e per $x = 0$. La derivata prima vale $f'(x) = \operatorname{sen} x(1 - 2\cos x)$;

nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ si annulla per $x = 0$ (punto di massimo), per $x = \pm\pi$ (punti di massimo) e per $x = \pm\pi/3$ (punti di minimo). Il grafico è rappresentato in figura 2.99.
(b) figura 2.100; (c) figura 2.101; (d) figura 2.102]

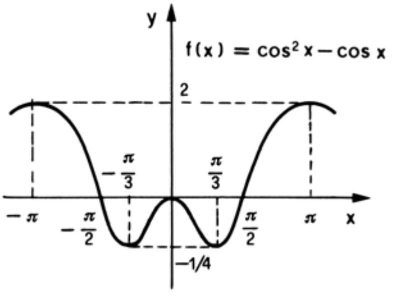


figura 2.99

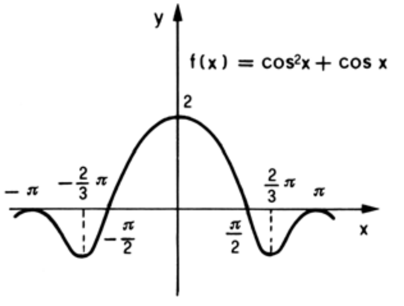


figura 2.100

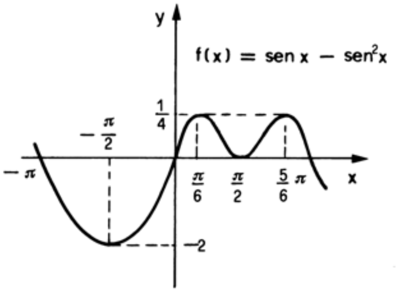


figura 2.101

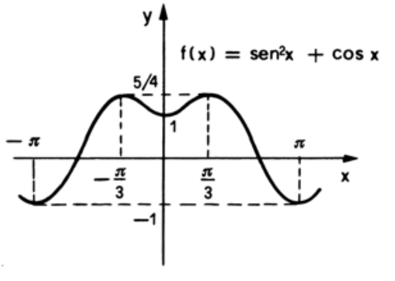


figura 2.102

2.99 Studiare la funzione $f(x) = \operatorname{sen} x - x\cos x$.

[È una funzione dispari, definita su $\mathbb{R}$, non periodica. Non ammette asintoti e non ha limite per $x \to \pm\infty$. La derivata prima vale $f'(x) = x \operatorname{sen} x$; limitatamente ad $x \geq 0$, la derivata prima è positiva quando $\operatorname{sen} x > 0$, e cioè per $x \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$, con $k = 0, 1, 2, \ldots$ I punti $x = 2k\pi$, con $k = 1, 2, 3, \ldots$, sono di minimo relativo e risulta $f(2k\pi) = -2k\pi$. I punti $x = (2k+1)\pi$, con $k = 0, 1, 2, \ldots$, sono di massimo relativo e risulta $f((2k+1)\pi) = (2k+1)\pi$. Infine, il punto $x = 0$ è di flesso a tangente orizzontale. La derivata seconda $f''(x) = \operatorname{sen} x + x\cos x$ si annulla in corrispondenza delle soluzioni dell'equazione $x + \operatorname{tg} x = 0$. Il grafico è rappresentato in figura 2.103]

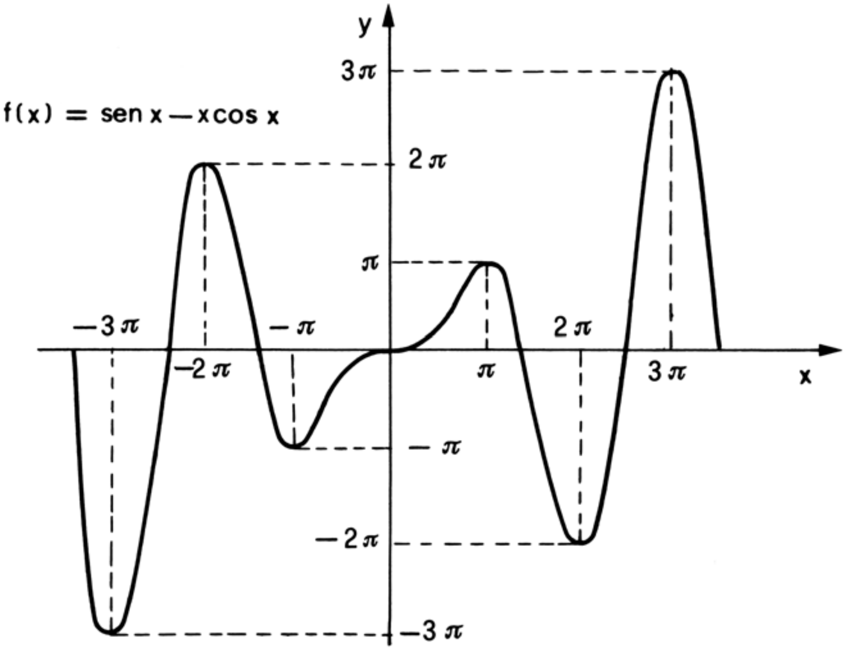


figura 2.103

2.100 Disegnare, per $x \in [0, 4\pi]$, il grafico delle funzioni

$$\text{(a)}\ f(x) = \operatorname{sen} x + 4\operatorname{sen}\frac{x}{2} \qquad\qquad \text{(b)}\ f(x) = \operatorname{sen} x + 4\cos\frac{x}{2}$$

[Sono utili le formule di duplicazione:

$$\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\ ; \qquad\qquad \cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\ .$$

(a) La funzione si annulla per $x = 0$, $x = 2\pi$, $x = 4\pi$, ed è positiva in $(0, 2\pi)$. La derivata prima si annulla in due punti; in particolare

$$x = 2\arccos\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

è un punto di massimo. La derivata seconda si annulla per $x = 0$, 2π, 4π, $(4/3)\pi$, $(8/3)\pi$. Il grafico è rappresentato in figura 2.104.

(b) La funzione si annulla per $x = \pi$, $x = 3\pi$ ed è negativa in $(\pi, 3\pi)$. La derivata prima si annulla in due punti; in particolare $x = 2\operatorname{arcsen}[(\sqrt{3}-1)/2]$ è un punto di massimo. I punti $x = \pi$, $(7/3)\pi$, 3π, $(11/3)\pi$ sono di flesso. Il grafico è rappresentato in figura 2.105]

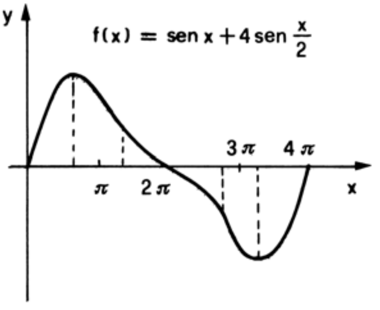


figura 2.104

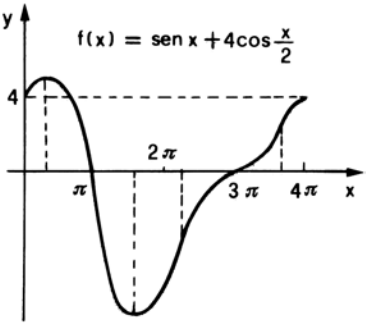


figura 2.105

2.101 Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = 2\text{sen}\, x - \frac{1}{2}\text{sen}\, 2x - x\,.$$

[La funzione non è periodica, ma le derivate prima e seconda sono periodiche di periodo 2π. Studiando tali derivate nell'intervallo $[0, 2\pi]$, si trova che $x = \pi/2$ è un punto di massimo, $x = (3/2)\pi$ è un punto di minimo relativo. La funzione è convessa negli intervalli $(0, \pi/3)$, $(\pi, (5/3)\pi)$ ed i punti $x = 0$, $\pi/3$, π, $(5/3)\pi$, 2π sono di flesso. Si noti infine che $f(k\pi) = -k\pi$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Il grafico è rappresentato in figura 2.106]

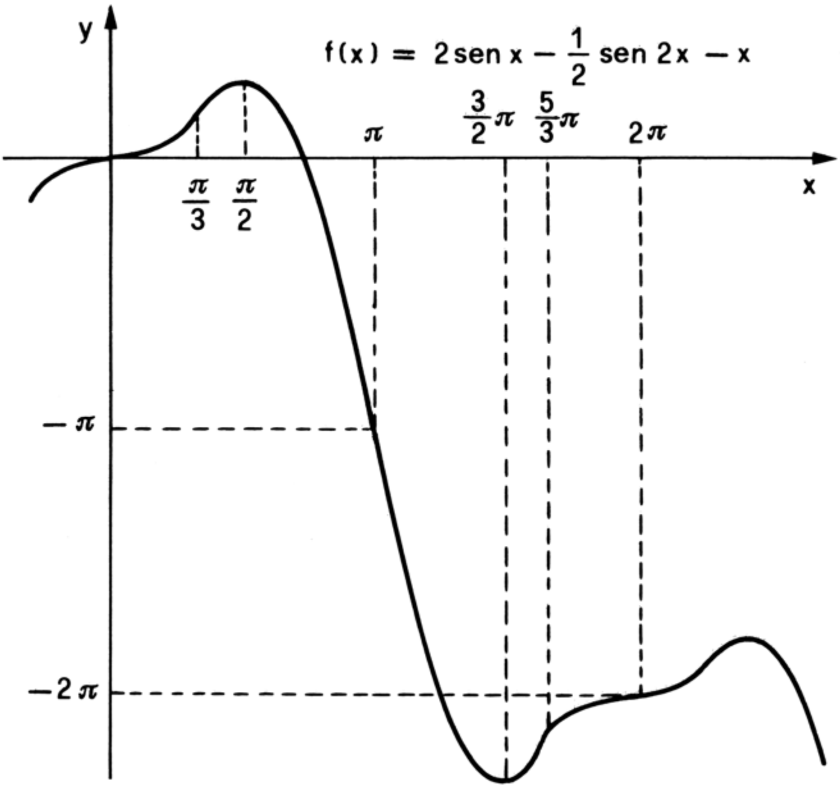


figura 2.106

2.102 Studiare le seguenti funzioni

(a) $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$ (b) $f(x) = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} x}$

[(a) La funzione è periodica di periodo 2π. Limitatamente all'intervallo $[0, 2\pi]$ la funzione è definita quando la base $\operatorname{sen} x$ è positiva, cioè nell'intervallo $(0, \pi)$. È positiva e converge ad 1 per x che tende agli estremi dell'intervallo. La derivata prima vale

$$f'(x) = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x(\log \operatorname{sen} x + 1)$$

e si annulla quando $\cos x = 0$, cioè per $x = \pi/2$ (che è un punto di massimo e $f(\pi/2) = 1$), e quando $\log \operatorname{sen} x = -1$, cioè $\operatorname{sen} x = e^{-1}$, cioè ancora:

$$x = \operatorname{arcsen} e^{-1} \qquad \text{oppure} \qquad x = \pi - \operatorname{arcsen} e^{-1},$$

che risultano punti di minimo. Il grafico è rappresentato in figura 2.107.
(b) La funzione è periodica di periodo π. Limitatamente all'intervallo $[0, \pi]$, la funzione è definita in $(0, \pi/2)$ ed è positiva in tale intervallo. Valgono le relazioni di limite

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \, ; \qquad \lim_{x \to \pi/2^-} f(x) = +\infty \, .$$

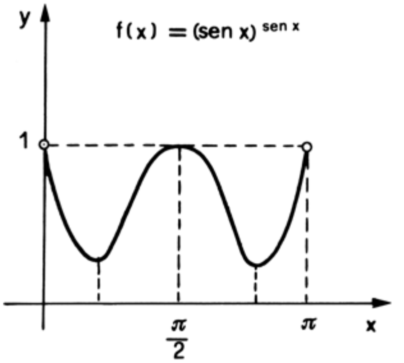


figura 2.107

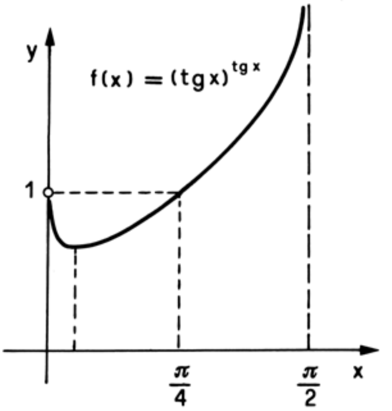


figura 2.108

La funzione ha un asintoto verticale sinistro di equazione $x = \pi/2$. La derivata prima si annulla per $x = \operatorname{arctg} e^{-1}$, che è un punto di minimo. Il grafico è rappresentato in figura 2.108]

2.103 Disegnare il grafico delle funzioni

$$\text{(a)}\ f(x) = \frac{1}{|\operatorname{sen} x + \cos x|} \qquad\qquad \text{(b)}\ f(x) = \frac{|\operatorname{tg} x|}{\operatorname{tg}^2 x + 3}$$

[(a) La funzione è periodica di periodo 2π. Nell'intervallo $[0, 2\pi]$ è definita per $x \neq (3/4)\pi$ e $x \neq (7/4)\pi$. Le rette di equazione $x = (3/4)\pi$, $x = (7/4)\pi$ sono asintoti verticali. La funzione assume il valore 1 in corrispondenza dei punti $x = 0$, $\pi/2$, π, $(3/2)\pi$, 2π. La derivata prima si annulla per $x = \pi/4$ e $x = (5/4)\pi$, che sono punti di minimo ed il valore minimo è $\sqrt{2}/2$. Grafico in figura 2.109.
(b) La funzione è pari ed è periodica di periodo π. Nell'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$ non è definita agli estremi e converge a zero per $x \to \pm\pi/2$. Non è derivabile per $x = 0$. La derivata prima si annulla per $x = \pm\pi/3$, che sono punti di massimo. Il punto $x = 0$ è di minimo. Il grafico è in figura 2.110]

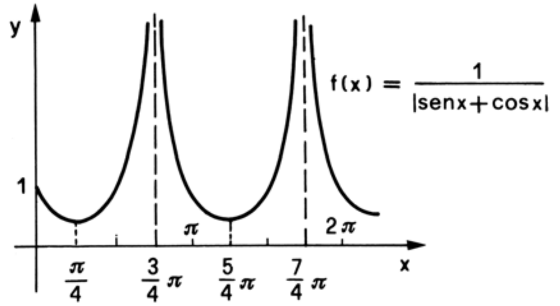


figura 2.109

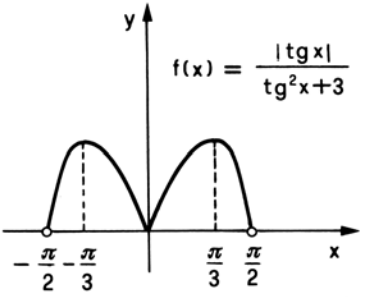


figura 2.110

2.104 Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = \log|1-\operatorname{sen}x| - 2\log|\cos x| \ ,$$

dopo aver semplificato l'espressione in base alle proprietà dei logaritmi e del valore assoluto.

[La funzione è periodica di periodo 2π. Ci limitiamo a studiarla nell'intervallo $[0,2\pi]$. È definita per x tale che $\operatorname{sen}x \neq 1$ e $\cos x \neq 0$; perciò è definita per $x \neq \pi/2$ e $x \neq (3/2)\pi$. Con tali restrizioni semplifichiamo l'espressione analitica di $f(x)$ (tenendo presente che $|1-\operatorname{sen}x| = 1-\operatorname{sen}x$, dato che $1-\operatorname{sen}x>0$):

$$f(x) = \log(1-\operatorname{sen}x) - \log(|\cos x|)^2 =$$

$$= \log\frac{1-\operatorname{sen}x}{\cos^2 x} = \log\frac{1-\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}^2 x} = -\log(1+\operatorname{sen}x)\,.$$

Occorre perciò studiare la funzione $f(x) = -\log(1+\operatorname{sen}x)$ con $x\in[0,2\pi]$, $x\neq\pi/2$, $x\neq(3/2)\pi$. La funzione si annulla per $x=0,\ \pi,\ 2\pi$ ed è negativa nell'intervallo $(0,\pi)$. La retta $x=(3/2)\pi$ è asintoto verticale per $f(x)$, dato che $f(x)\to+\infty$ per $x\to(3/2)\pi$. La derivata prima

$$f'(x) = -\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}x}$$

è positiva per $x\in(\pi/2,(3/2)\pi)$. Il punto $x=\pi/2$ è di minimo per la funzione $-\log(1+\operatorname{sen}x)$. La derivata seconda $f''(x) = 1/(1+\operatorname{sen}x)$ è positiva per ogni x. Il grafico della funzione è rappresentato in figura 2.111]

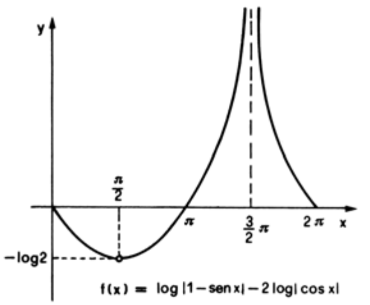


figura 2.111

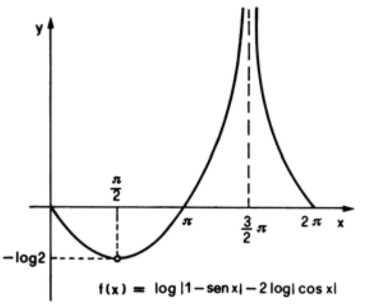


figura 2.112

2.105 Studiare la funzione $f(x) = \log\left(1-\dfrac{4}{2+\sqrt{3}+\operatorname{tg}x}\right)$.

[È periodica di periodo π. Per determinare l'insieme di definizione è utile ricordare, ad esempio, che $\operatorname{tg}(\pi/12) = \operatorname{tg}(15°) = 2-\sqrt{3}$ (si veda l'esercizio 2.21 della parte prima); limitatamente all'intervallo $[0,\pi]$, la funzione è definita in $(\pi/12,\pi/2)\cup(\pi/2,(7/12)\pi)$. Converge a zero per $x\to\pi/2$, diverge a $-\infty$ per $x\to\pi/12^+$ e diverge a $+\infty$ per $x\to(7/12)\pi^-$. La derivata prima, dove è definita, è positiva. La derivata seconda si annulla per $x=\pi/3$, che è un punto di flesso. La funzione è concava nell'intervallo $(\pi/12, \pi/3)$ ed è convessa altrimenti. Il grafico è in figura 2.112]

2.106 Studiare le seguenti funzioni

(a) $f(x) = \text{arcsen}\,(|x| - 1)$ (b) $f(x) = \text{arctg}\, x^2$

[(a) La funzione arcsen t è definita per $t \in [-1, 1]$. Perciò $f(x)$ è definita se $-1 \leq |x| - 1 \leq 1$, cioè $0 \leq |x| \leq 2$, cioè ancora $x \in [-2, 2]$. La funzione è pari e non è derivabile per $x = \pm 2$. È negativa nell'intervallo $(-1, 1)$. Risulta crescente in $[0, 2]$ e decrescente in $[-2, 0]$. È convessa all'esterno dell'intervallo $[-1, 1]$. Il grafico è in figura 2.113.
(b) È una funzione pari definita su $\mathbb{R}$. Si annulla per $x = 0$ ed è positiva altrimenti. La retta di equazione $y = \pi/2$ è asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$. Le derivate prima e seconda valgono

$$f'(x) = \frac{2x}{1 + x^4}\ ; \qquad f''(x) = \frac{2(1 - 3x^4)}{(1 + x^4)^2}$$

La funzione è decrescente in $(-\infty, 0]$ ed è crescente in $[0, +\infty)$. Il punto $x = 0$ è di minimo. La derivata seconda si annulla per $x = \pm 3^{-1/4}$, che sono punti di flesso. Il grafico è in figura 2.114]

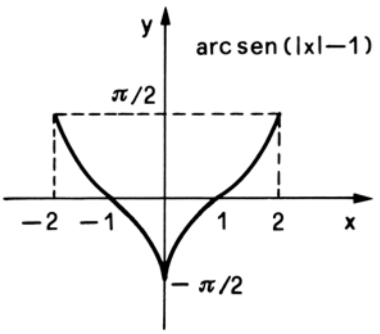


figura 2.113

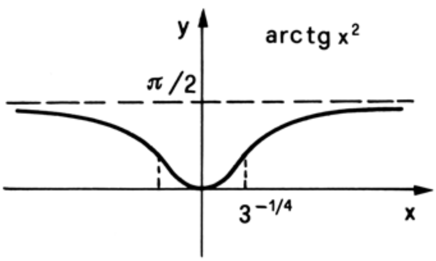


figura 2.114

2.107 Disegnare i grafici delle funzioni

(a) $f(x) = \text{acsen}\,|e^{2x} - 1|$ (b) $f(x) = x + 4\text{arctg}\,\sqrt{|x - 1|}$

[(a) figura 2.115; (b) figura 2.116]

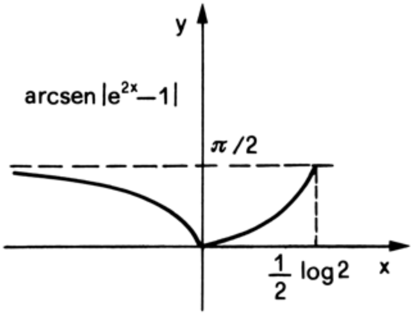


figura 2.115

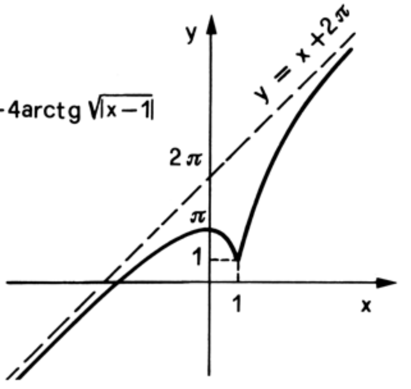


figura 2.116

2.108 Studiare le seguenti funzioni e disegnarne il grafico

(a) $f(x) = \dfrac{x}{2} \log \dfrac{1+x^2}{4} + \operatorname{arctg} x - x$

(b) $f(x) = x^3 - x^2 + 2x \operatorname{arctg} x - \log(1+x^2)$

[(a) È una funzione dispari definita su $\mathbb{R}$. Non ha asintoti. Le derivate prima e seconda valgono

$$f'(x) = \frac{1}{2} \log \frac{1+x^2}{4}\ ; \qquad\qquad f''(x) = \frac{x}{1+x^2}\ .$$

La derivata prima si annulla per $x = \pm\sqrt{3}$. Il punto $x = \sqrt{3}$ è di minimo ed il punto $x = -\sqrt{3}$ è di massimo; risulta inoltre $f(\pm\sqrt{3}) = \pm(\operatorname{arctg}\sqrt{3} - \sqrt{3})$. La funzione è convessa in $[0, +\infty)$ ed il punto $x = 0$ è di flesso. Il grafico è rappresentato in figura 2.117.

(b) È definita su $\mathbb{R}$. Tende a $\pm\infty$ per $x \to \pm\infty$. Non ha asintoti. Le derivate prima e seconda valgono

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + 2\operatorname{arctg} x\ ; \qquad\qquad f''(x) = \frac{x}{1+x^2}(3x^2 - x + 3)\ .$$

Non è agevole studiare direttamente il segno della derivata prima, ma è più opportnno determinare preliminarmente il segno della derivata seconda.

Essendo $3x^2 - x + 3 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, la derivata seconda è positiva per $x > 0$ ed è negativa per $x < 0$. Perciò la funzione è convessa in $[0, +\infty)$, è concava in $(-\infty, 0]$ e $x = 0$ è un punto di flesso. Inoltre, dato che $f''(x) \gtrless 0$ per $x \gtrless 0$, la derivata prima è strettamente crescente in $[0, +\infty)$ ed è strettamente decrescente in $(-\infty, 0]$; il punto $x = 0$ è di minimo assoluto per la derivata prima. Quindi:

$$f'(x) \geq f'(0) = 0, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\ .$$

Ne segue che la funzione non ha nè massimi, nè minimi ed è strettamente crescente su $\mathbb{R}$. Il punto $x = 0$ è di flesso a tangente orizzontale]

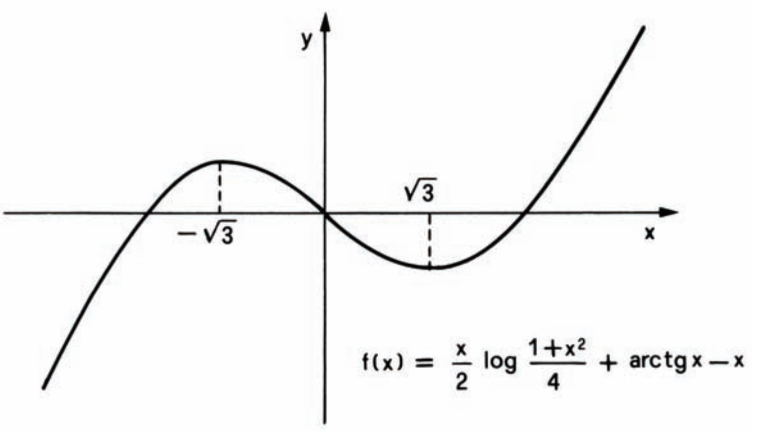

y
x
$-\sqrt{3}$
$\sqrt{3}$
$f(x) = \frac{x}{2}\log\frac{1+x^2}{4} + \operatorname{arctg} x - x$

figura 2.117

Capitolo 3

EQUAZIONI ALGEBRICHE E TRASCENDENTI

3A. Esistenza delle soluzioni

Prendiamo in considerazione equazioni del tipo

$$f(x) = 0 \ ,$$

con $f(x)$ funzione reale di variabile reale definita in un insieme I. Risolvere l'equazione data significa determinare tutti i numeri reali $x \in I$ per cui $f(x)=0$. Tali numeri x si chiamano *soluzioni* dell'equazione data, o *zeri* della funzione data.

Se la funzione $f(x)$ è un polinomio, si dice che $f(x) = 0$ è un'*equazione algebrica.* Se $f(x)$ è una funzione trascendente (ad esempio composta tramite le funzioni elementari e^x, $\log x$, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$) allora si dice che $f(x) = 0$ è un'*equazione trascendente.*

Una soluzione di un'equazione algebrica si dice anche *radice* dell'equazione. Per estensione, talvolta si usa il termine di radici anche per le soluzioni di equazioni trascendenti.

3.1 Si consideri l'equazione di secondo grado

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0 \,,$$

con a, b, c numeri reali fissati e $a \neq 0$. È ben noto che l'equazione data ammette due soluzioni reali se e solo se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, una soluzione reale se $\Delta = 0$ e nessuna soluzione reale se $\Delta < 0$. Dimostrare tali proprietà applicando il teorema dell'esistenza degli zeri alla funzione $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$.

[La derivata della funzione $f(x)$ vale

$$f'(x) = 2ax + b$$

e si annulla per $x = -b/2a$. In corrispondenza la funzione $f(x)$ assume il valore

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} .$$

La funzione $f(x)$ risulta strettamente monotòna separatamente negli intervalli $(-\infty, -b/2a)$ e $(-b/2a, +\infty)$. Se $a > 0$, la funzione diverge a $+\infty$ per $x \to \pm\infty$. Il valore di minimo risulta negativo se $b^2 - 4ac > 0$; pertanto in questo caso, per il teorema dell'esistenza degli zeri, la funzione ammette due soluzioni reali. Se invece $b^2 - 4ac = 0$ risulta $f(-b/2a) = 0$ e $x = -b/2a$ è l'unica radice reale dell'equazione. Infine, se $b^2 - 4ac < 0$, la funzione $f(x)$ assume solo valori positivi e l'equazione $f(x) = 0$ non ha soluzioni reali. Lo studio nel caso $a < 0$ è analogo]

3.2 Determinare il numero ed il segno delle radici reali dell'equazione di Fibonacci:

$$x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0 .$$

[La funzione $f(x) = x^3+2x^2+10x-20$ tende a $\pm\infty$ per $x \to \pm\infty$. Perciò esistono due numeri a, b per cui $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. In base al teorema dell'esistenza degli zeri, l'equazione $f(x) = 0$ ha almeno una soluzione reale nell'intervallo di estremi a, b. La derivata della funzione $f(x)$ vale

$$f'(x) = 3x^2 + 4x + 10 .$$

La disequazione di secondo grado $3x^2 + 4x + 10 > 0$ è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$. Perciò la derivata prima è positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$ e quindi la funzione $f(x)$ è strettamente crescente su $\mathbb{R}$. Ne segue che l'equazione $f(x)$ ammette una sola radice reale. Per stabilire il segno di tale radice basta osservare che $f(0) = -20 < 0$ e quindi $f(x)$ si annulla per $x > 0$ essendo crescente]

3.3 Dimostrare che l'equazione

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} = 0$$

ammette quattro radici reali.

[La funzione $f(x) = 1 - x^2/2 + x^4/24$ è pari; perciò, se ammette una radice $x_1 > 0$, ammette anche $-x_1$ come radice. Dal segno della derivata

$$f'(x) = -x + \frac{1}{6}x^3 = \frac{x}{6}(x^2 - 6)$$

si deduce che il punto $x = 0$ è di massimo, mentre i punti $x = \pm\sqrt{6}$ sono di minimo per $f(x)$. Risulta $f(0) = 1$, $f(\pm\sqrt{6}) = -1/2$, $f(x) \to +\infty$ per $x \to \pm\infty$. Per il teorema dell'esistenza degli zeri, $f(x)$ ammette una radice reale in ognuno degli intervalli $(-\infty, -\sqrt{6})$, $(-\sqrt{6}, 0)$, $(0, +\sqrt{6})$, $(\sqrt{6}, +\infty)$. Più precisamente, $f(x)$ ammette come radici $\pm x_1$, $\pm x_2$, con $x_1 \in (0, \sqrt{6})$, $x_2 \in (\sqrt{6}, +\infty)$. Si veda anche l'esercizio 2.52 e la figura 2.37, dove è rappresentato il grafico di $f(x)$. Per finire, notiamo che, essendo l'equazione biquadratica, è possibile determinare esplicitamente le quattro soluzioni, che risultano uguali a $\pm x_1$, $\pm x_2$ con $x_1 = \sqrt{6 - 2\sqrt{3}}$ e $x_2 = \sqrt{6 + 2\sqrt{3}}$]

3.4 Determinare il numero delle soluzioni reali delle seguenti equazioni, al variare del parametro reale λ.

(a) $x^9(x-4)^9 = \lambda$ (b) $x^{10}(x-2)^{10} = \lambda$

[(a) Proponiamo due metodi di risoluzione. Il primo metodo consiste nello studiare la funzione

$$f(x) = x^9(x-4)^9 \ .$$

Si verifica che $f'(x)$ si annulla per $x = 2$, è positiva per $x > 2$ ed è negativa per $x < 2$. Perciò $f(x)$ è strettamente decrescente in $(-\infty, 2]$ ed è strettamente crescente in $[2, +\infty)$. Il minimo assoluto vale $f(2) = -2^{18}$. Ne segue che l'equazione $f(x) = \lambda$ ha due soluzioni se $\lambda > -2^{18}$, una sola soluzione se $\lambda = -2^{18}$ e non ha soluzioni se $\lambda < -2^{18}$.

Il secondo metodo, più efficace perchè fornisce una rappresentazione delle soluzioni, consiste nello scrivere l'equazione data nella forma equivalente

$$x(x-4) = \lambda^{1/9} \ , \qquad \text{cioè} \qquad x^2 - 4x - \lambda^{1/9} = 0 \ .$$

L'equazione ottenuta è di secondo grado, ed ha per soluzioni $x = 2 \pm \sqrt{4 + \lambda^{1/9}}$, purchè $\lambda \geq -4^9 = -2^{18}$.

(b) Nessuna soluzione per $\lambda < 0$. Due soluzioni per $\lambda = 0$. Quattro soluzioni reali se $0 < \lambda < 1$. Tre soluzioni se $\lambda = 1$. Due soluzioni per $\lambda > 1$]

3.5 Determinare il numero di radici reali dell'equazione algebrica

$$x^{12} - 6x^6 + 8x^3 - 9 = 0 \ .$$

[L'equazione ha due radici reali. Ciò si può stabilire considerando la funzione $f(x) = x^{12} - 6x^6 + 8x^3 - 9$. La derivata vale

$$f'(x) = 12x^2(x^9 - 3x^3 + 2) \ .$$

Dato che il polinomio $x^9 - 3x^3 + 2$ si annulla per $x = 1$ e dato che esso è composto con potenze di x^3, si vede che è divisibile per $x^3 - 1$. Effettuando la divisione si determina la scomposizione:

$$f'(x) = 12x^2(x^3 - 1)(x^6 - x^3 + 2) \ .$$

Il polinomio $x^6 - x^3 - 2$ è di secondo grado rispetto a $t = x^3$. Effettuando tale sostituzione si ottiene $t^2 - t - 2 = (t-1)(t+2)$. Risulta quindi

$$f'(x) = 12x^2(x^3 - 1)^2(x^3 + 2) \ .$$

La derivata prima si annulla per $x = 0$, $x = 1$, che risultano punti di flesso, e per $x^3 = -2$, cioè $x = -2^{1/3}$, che è l'unico punto di minimo di $f(x)$. La funzione $f(x)$ è strettamente decrescente in $(-\infty, -2^{1/3}]$ ed è strettamente crescente in $[-2^{1/3}, +\infty)$. Il valore minimo si ottiene quando $x^3 = -2$ e vale -1. Perciò l'equazione $f(x) = 0$ ha due soluzioni, una minore ed una maggiore di $x = -2^{1/3}$]

3.6 Si consideri il polinomio di quarto grado

$$p(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 - \delta \ ,$$

con α, β, δ numeri reali e $32\beta - 9\alpha^2 > 0$. Verificare che, se δ è maggiore, uguale o minore di zero, allora in corrispondenza l'equazione $p(x) = 0$ ammette due, una o nessuna radice reale.

[La funzione $p(x)$ tende a $+\infty$ per $x \to \pm\infty$. La derivata vale

$$p'(x) = x(4x^2 + 3\alpha x + 2\beta) \ .$$

Il discriminante del polinomio di secondo grado $4x^2 + 3\alpha x + 2\beta$ vale $\Delta = 9\alpha^2 - 32\beta$ ed è negativo per ipotesi. Quindi il polinomio di secondo grado è positivo per ogni $x \in \mathbb{R}$. Perciò $p'(x)$ si annulla solo per $x = 0$, è positiva per $x > 0$ ed è negativa per $x < 0$. Il punto $x = 0$ è di minimo per $p(x)$ ed il valore minimo è $p(0) = \delta$. Si ottiene poi facilmente la conclusione indicata]

3.7 Indicare il numero ed il segno delle radici reali dell'equazione

$$x^4 + x^2 = ax + b$$

in funzione dei parametri reali a, b, con $b \geq 0$.

[Poniamo $f(x) = x^4 + x^2$; $g(x) = ax + b$. La funzione $f(x)$ è strettamente convessa su $\mathbb{R}$; la funzione $g(x)$ ha per grafico una retta. I grafici delle due funzioni si incontrano in due punti se la retta è secante, in un punto se la retta è tangente, oppure non si incontrano.

Dato che $f(0) = 0$, $g(0) = b$, se $b > 0$ si verifica che la retta incontra il grafico di $f(x)$ in due punti; in corrispondenza l'equazione ha due soluzioni, una positiva ed una negativa. Se $b = 0$ l'equazione ha per soluzione $x = 0$. Inoltre, se $a = 0$, la retta di equazione $y = 0$ è tangente al grafico di $f(x)$ per $x = 0$; quindi, se $a = b = 0$, l'equazione ha soltanto la soluzione $x = 0$. Infine, se $a \neq 0$ e $b = 0$, la retta di equazione $y = ax$ taglia il grafico di $f(x)$ in un altro punto (oltre lo zero); in particolare l'equazione data ha una soluzione nulla e una positiva (se $a > 0$) o negativa (se $a < 0$)]

3.8 Indicare il numero ed il segno delle radici reali dell'equazione

$$ax^4 + bx^3 - a = 0$$

in funzione dei parametri reali a, b.

[Se $a \neq 0$, l'equazione ha due radici reali. Se $a = 0$ e $b \neq 0$, l'equazione ha una radice reale ($x = 0$). Infine, se $a = b = 0$, ogni $x \in \mathbb{R}$ è soluzione]

3.9 Determinare le soluzioni dell'equazione

$$x^2 - 4x + 2 + \frac{x}{\sqrt{x-1}} = 0 \ .$$

[L'unica soluzione dell'equazione data è $x = 2$. Per verificare ciò, si può scrivere l'equazione nella forma $f(x) = g(x)$, con

$$f(x) = x^2 - 4x + 2 \ ; \qquad\qquad g(x) = -\frac{x}{\sqrt{x-1}} \ .$$

Il grafico della funzione $f(x)$ è una parabola convessa con vertice nel punto del piano x, y di coordinate $(2, -2)$. La funzione $g(x)$ è definita per $x > 1$; ha un asintoto verticale destro di equazione $x = 1$; dallo studio del segno della derivata prima

$$g'(x) = \frac{2-x}{2(x-1)^{3/2}}$$

si deduce che il punto $x = 2$ è di massimo assoluto per $g(x)$ ed il valore massimo è $g(2) = -2$. In figura 3.1 sono rappresentati i grafici di $f(x)$, $g(x)$ in uno stesso sistema da riferimento. Risulta $f(2) = g(2) = -2$ e inoltre $f(x) > -2 > g(x)$ per ogni $x \neq 2$. Quindi $x = 2$ è l'unica soluzione dell'equazione data]

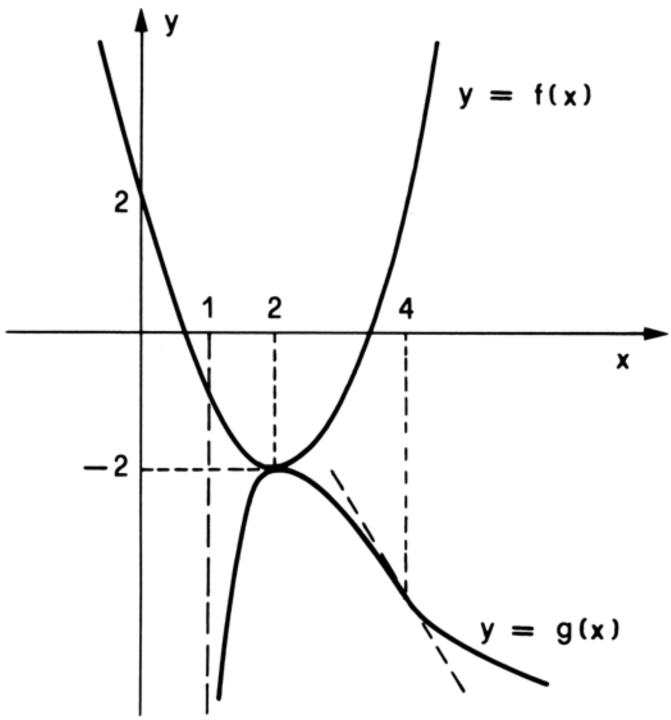


figura 3.1

3.10 Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$\sqrt{x} + \frac{1}{x-3} = 0 \; .$$

[È possibile scrivere l'equazione nella forma $f(x) = g(x)$, con

$$f(x) = \sqrt{x} \; ; \qquad\qquad g(x) = \frac{1}{3-x} \; .$$

In figura 3.2 sono rappresentati i grafici di $f(x)$, $g(x)$ in uno stesso sistema di riferimento. L'equazione data non ha soluzioni per $x < 0$ (dove $f(x)$ non è definita) e per $x > 3$ (dove $f(x) > 0$ e $g(x) < 0$). Invece nell'intervallo $(0, 3)$ l'equazione ha due soluzioni, dato che $f(x)$ è concava, $g(x)$ è convessa, e inoltre $f(1) = 1 > g(1) = 1/2$]

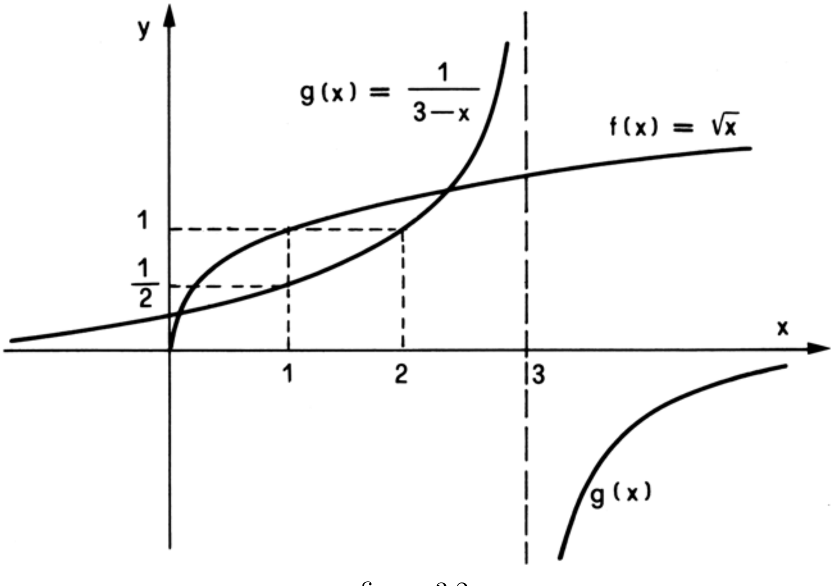


figura 3.2

3.11 Determinare, al variare del parametro reale λ, il numero di soluzioni dell'equazione

$$\frac{1}{x} + \log x = \lambda \; .$$

[La funzione $f(x) = 1/x + \log x$, definita per $x > 0$, diverge a $+\infty$ per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$. La derivata prima vale

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2} \; ;$$

si annulla per $x = 1$, è positiva per $x > 1$ ed è negativa per $x \in (0, 1)$. Il punto $x = 1$ è di minimo assoluto per $f(x)$. Inoltre la funzione $f(x)$ è strettamente decrescente in $(0, 1]$ ed è strettamente crescente per $x \in [1, +\infty)$. Il valore minimo di $f(x)$ è $f(1) = 1$.

Ne segue che l'equazione $f(x) = \lambda$ ha due soluzioni per $\lambda > 1$, una sola soluzione $(x = 1)$ per $\lambda = 1$ e nessuna soluzione se $\lambda < 1$]

3.12 Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$\log(1 + x) = e^x - 1$$

[Si possono studiare separatamente le funzioni a primo e a secondo membro e verificare che i due grafici sono fra loro tangenti in corrispondenza al valore $x_0 = 0$, dove le due curve si incontrano. Oppure si può studiare la funzione

$$f(x) = e^x - \log(1 + x) - 1$$

e verificare, come nell'esercizio 2.85 , che $f(x)$ assume minimo per $x_0 = 0$ e $f(x_0) = f(0) = 0$.

Pertanto $x_0 = 0$ è l'unica soluzione dell'equazione data]

3.13 Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$\frac{1}{x} + \log|x| = 2 \ .$$

[L'equazione $f(x) = 1/x + \log|x| = 2$ è stata studiata nell'esercizio precedente $(\lambda = 2)$ se $x > 0$. Inoltre, per $x < 0$, si ha

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \ , \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \ ,$$

e, in base al segno della derivata prima, si verifica che $f(x)$ è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$. Ne segue che l'equazione $f(x) = 2$ ha tre soluzioni, una negativa, una compresa tra zero ed uno ed una maggiore di uno]

3.14 Determinare il numero ed il segno delle soluzioni dell'equazione trascendente

$$\log|x| - \frac{x^2 - 4x}{1 - x^2} = 0 \ .$$

[Scriviamo l'equazione nella forma $f(x) = g(x)$, con

$$f(x) = \log|x| \ ; \qquad g(x) = \frac{x^2 - 4x}{1 - x^2} \ .$$

La funzione $f(x)$ è definita per $x \neq 0$ ed è pari. La funzione $g(x)$ è definita per $x \neq \pm 1$; le rette di equazione $x = \pm 1$ sono asintoti verticali per $g(x)$; la retta $y = -1$ è asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$; la funzione $g(x)$ non ha punti di massimo, nè di minimo relativo.

I grafici di $f(x)$, $g(x)$ sono rappresentati in figura 3.3. Per $x > 0$, $f(x)$ è crescente e $g(x)$ è decrescente (separatamente in $(0, 1)$ e $(1, +\infty)$); perciò esistono due soluzioni x_1, x_2 con $x_1 \in (0, 1)$ e $x_2 \in (1, 4)$. L'equazione non ha soluzioni per $x < 0$, dato che le funzioni $f(x)$, $g(x)$ hanno segni opposti negli intervalli $(-\infty, -1)$ e $(-1, 0)$]

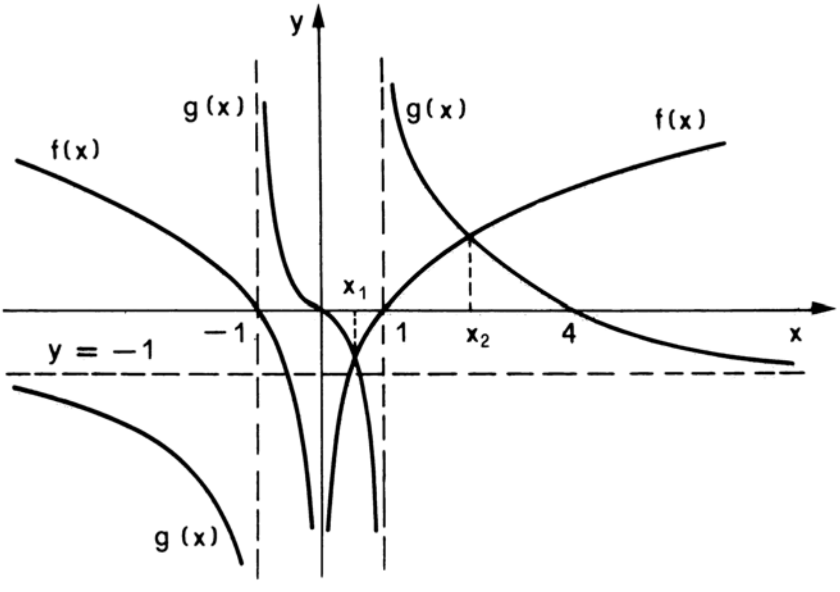


figura 3.3

3.15 Determinare, al variare del parametro reale λ il numero di soluzioni reali dell'equazione

$$x \log^2 x = \lambda \, .$$

[Si veda lo studio della funzione $f(x) = x \log^2 x$ fatto nell'esercizio 2.66 (a) ed il grafico in figura 2.56. Si ottiene il seguente risultato:

se	$\lambda < 0$	nessuna soluzione;	
se	$\lambda = 0$	una sola soluzione;	$(x = 1)$;
se	$0 < \lambda < 4/e^2$	tre soluzioni;	
se	$\lambda = 4/e^2$	due soluzioni;	
se	$\lambda > 4/e^2$	una soluzione]	

3.16 Determinare il numero di soluzioni reali delle equazioni

$$\text{(a) } x \log^2 x = \frac{1}{e} \qquad\qquad \text{(b) } x \log^2 x = e$$

[(a) L'equazione ha tre soluzioni x_1, x_2, x_3 tali che: $x_1 \in (0, 1/e^2)$, $x_2 = 1/e$, $x_3 \in (1, +\infty)$; (b) l'unica soluzione dell'equazione è $x = e$]

3.17 Si consideri la funzione

$$f(x) = 2x \log |x| - x^2.$$

Dimostrare che la derivata prima si annulla in corrispondenza a due numeri reali.

[L'equazione $f'(x) = 0$ ha due soluzioni: una negativa e l'altra uguale ad 1]

3.18 Verificare che l'equazione

$$x^2 - 2x \log x - 2 = 0$$

ammette una ed una sola soluzione reale. Inoltre, senza far uso di macchine calcolatrici (ma ricordando che $e = 2.71\ldots, \sqrt{3} = 1.73\ldots$) stabilire se tale radice è maggiore o minore del numero e.

[La derivata della funzione $f(x) = x^2 - 2x \log x - 2$ vale

$$f'(x) = 2(x - \log x - 1).$$

La funzione $g(x) = x - \log x - 1$ ha un minimo assoluto per $x = 1$ ed il minimo vale $g(1) = 0$; perciò $g(x) > 0$ per ogni $x \neq 1$ e $g(1) = 0$ (ciò segue anche dal fatto che la funzione $\log x$ è concava e che la retta di equazione $y = x - 1$ è tangente al grafico della funzione logaritmo nel punto $x_0 = 1$, perciò $\log x \leq x - 1$ per ogni $x > 0$).

Quindi $f'(x)$ si annulla per $x = 1$ ed è positiva per ogni altro $x > 0$. Ne segue che la funzione $f(x)$ è strettamente crescente per $x > 0$. Essendo

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -2 , \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty ,$$

l'equazione data ammette una ed una sola soluzione reale x_0. Dato che $f(x)$ è strettamente crescente, tale soluzione x_0 è minore o maggiore del numero e a seconda che $f(x)$ sia positiva o negativa in corrispondenza ad $x = e$. Risulta

$$f(e) = e^2 - 2e - 2.$$

Il polinomio di secondo grado $t^2 - 2t - 2$ si annulla in corrispondenza delle radici $t = 1 \pm \sqrt{3}$ ed è negativo per $t \in (1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$. Risulta quindi $f(e) < 0$ se e solo se $e \in (1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$, cioè: $e < 1 + \sqrt{3}$. Ricordando che $e = 2.71\ldots$ e che $1 + \sqrt{3} = 1 + 1.73\ldots = 2.73\ldots$, risulta effettivamente $e < 1 + \sqrt{3}$, quindi anche $f(e) < 0$, cioè ancora $e < x_0$. In figura 3.4 è rappresentato il grafico della funzione $f(x)$]

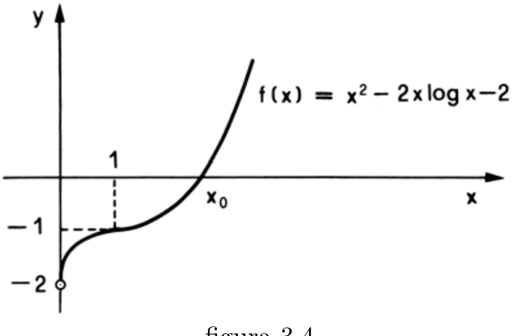


figura 3.4

3.19 Determinare il numero di soluzioni delle seguenti equazioni

$$\text{(a) } e^x = \frac{x}{x+1} \qquad\qquad \text{(b) } e^x = \frac{1-x}{x}$$

[(a) Poniamo $f(x) = e^x$, $g(x) = x/(x+1)$. I grafici delle due funzioni sono rappresentati in figura 3.5. Come si vede dalla figura, i due grafici non si incontrano (e quindi l'equazione data non ha soluzioni). Analiticamente ciò risulta chiaro dalle disuguaglianze:

se $x \geq 0$ allora $f(x) \geq 1$, $g(x) < 1$;

se $x \in (-1, 0)$: $f(x) > 0$, $g(x) < 0$;

se $x < -1$: $f(x) < 1$, $g(x) > 1$.

(b) Poniamo $f(x) = e^x$, $g(x) = (1-x)/x$. I grafici delle due funzioni sono rappresentati in figura 3.6. L'equazione data ha una sola soluzione (positiva). Ciò si verifica osservando che, per $x < 0$, $f(x)$ è positiva e $g(x)$ è negativa (quindi l'equazione $f(x) = g(x)$ non ha soluzioni negative); mentre, se $x > 0$, $f(x)$ è strettamente crescente e $g(x)$ è strettamente decrescente ($g'(x) = -1/x^2 < 0$) e risulta:

$$f(0) = 1\ , \qquad \lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty\ ; \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\ , \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -1]$$

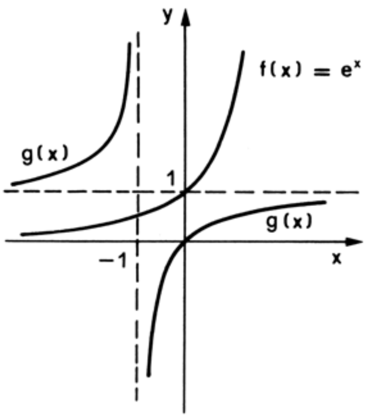


figura 3.5

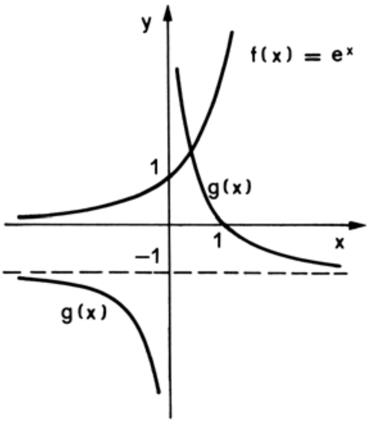


figura 3.6

3.20 Determinare il numero di soluzioni reali dell'equazione

$$e^x = \frac{ax+b}{cx+d}\ ,$$

dove a, b, c, d sono parametri reali tali che $a \neq 0$, $c \neq 0$, $bc - ad > 0$.

[Poniamo $f(x) = e^x$, $g(x) = (ax+b)/(cx+d)$. La funzione $g(x)$ è definita per $x \neq -d/c$; la retta di equazione $x = -d/c$ è un asintoto verticale e la retta di equazione $y = a/c$ è un asintoto orizzontale per $g(x)$. Inoltre, come mostrato nell'esercizio 2.53, risulta

$$g'(x) = -\frac{1}{c^2}\frac{bc-ad}{(x+d/c)^2} \; ;$$

dato che, per ipotesi, $bc - ad > 0$, la funzione $g(x)$ è strettamente decrescente negli intervalli $(-\infty, -d/c)$, $(-d/c, +\infty)$. Tenendo conto che $f(x) = e^x$ è strettamente crescente su $\mathbb{R}$ e tenendo conto delle relazioni di limite

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \dfrac{a}{c} \end{cases} \quad , \qquad \lim_{x\to(-d/c)^-} g(x) = -\infty \; ,$$

si deduce che, nell'intervallo $(-\infty, -d/c)$, l'equazione data ha una soluzione se $a/c > 0$ e nessuna soluzione se $a/c < 0$. Inoltre, tenendo conto delle relazioni di limite

$$\lim_{x\to(-d/c)^+} g(x) = +\infty \quad , \qquad \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \dfrac{a}{c} \end{cases} \quad ,$$

si deduce che, nell'intervallo $(-d/c, +\infty)$, l'equazione data ha, in ogni caso, una ed una sola soluzione reale.

Riassumendo, l'equazione ha due soluzioni reali se a, c hanno lo stesso segno $(a/c > 0)$ ed ha una sola soluzione reale se a, c hanno segni discordi $(a/c < 0)$]

3.21 Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$e^x + \frac{1}{x} = 0 \; .$$

[È opportuno scrivere l'equazione nella forma equivalente $xe^x = -1$. La funzione $f(x) = xe^x$, il cui grafico è rappresentato in figura 3.7, ha minimo assoluto per $x = -1$ ed il valore minimo è $-e^{-1}$. Perciò

$$xe^x = f(x) \geq f(-1) = -\frac{1}{e} > -1 \; , \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \; ,$$

e l'equazione data non ha soluzioni]

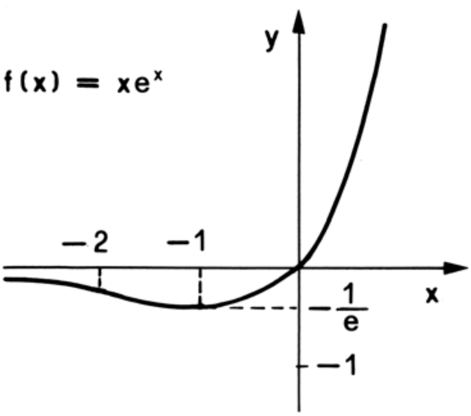


figura 3.7

3.22 Determinare il numero di soluzioni delle equazioni

$$\text{(a) } e^x = (x-1)^2 \qquad\qquad \text{(b) } e^{-x} = (x-1)^2$$

[(a) Una soluzione è data da $x = 0$. È opportuno scrivere l'equazione nella forma equivalente

$$f(x) = (x-1)^2 e^{-x} = 1 \, .$$

Risulta $f'(x) = e^{-x}(x-1)(3-x)$. Il punto $x = 1$ è di minimo (ed il valore minimo è $f(1) = 0$) ed il punto $x = 3$ è di massimo (ed il valore massimo è $f(3) = 4/e^3 < 1$). Inoltre $f(x) \to 0$ per $x \to +\infty$. Il grafico di $f(x)$ è rappresentato in figura 3.8. Risulta che l'equazione $f(x) = 1$ ha soltanto la soluzione $x = 0$.
(b) L'equazione, oltre alla soluzione $x = 0$, ha un'altra soluzione maggiore di 1]

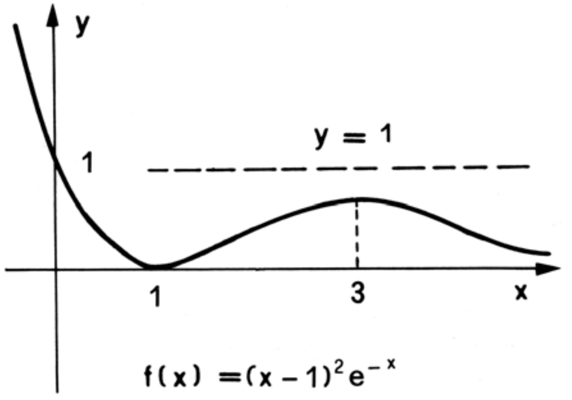


figura 3.8

3.23 Determinare il numero ed il segno delle soluzioni dell'equazione

$$2^{-x} = |x| \, .$$

[Poniamo $f(x) = 2^{-x} - |x|$. La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed è derivabile se $x \neq 0$. Per $x \to \pm\infty$ la funzione $f(x)$ tende a $\mp\infty$. La derivata prima, per $x \neq 0$, vale

$$f'(x) = \begin{cases} -2^{-x} \log 2 - 1 & \text{se} \quad x > 0 \\ -2^{-x} \log 2 + 1 & \text{se} \quad x < 0 \, . \end{cases}$$

Per $x > 0$ la derivata prima è sempre negativa, mentre, nell'intervallo $(-\infty, 0)$, è negativa per

$$2^{-x} \log 2 > 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2^x < \log 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x < \log_2 \log 2 \, .$$

Il punto $x = \log_2 \log 2$ risulta di minimo relativo per $f(x)$ (si noti che $0 < \log 2 < 1$ e quindi $\log_2 \log 2 < 0$). Il valore minimo è

$$f(\log_2 \log 2) = 2^{\log_2 \frac{1}{\log 2}} - |\log_2 \log 2| = \frac{1}{\log 2} - \log_2 \frac{1}{\log 2} \, ;$$

essendo $\log_2 t < t$ per ogni $t > 0$, in particolare per $t = 1/\log 2$ si ottiene $f(\log_2 \log 2) > 0$. Il grafico di $f(x)$ è rappresentato in figura 3.9 (si verifica facilmente che $f(x)$ è convessa negli intervalli $(-\infty, 0]$ e $[0, +\infty)$). Essendo $f(0) = 1$, l'equazione data ammette una ed una sola soluzione (positiva)]

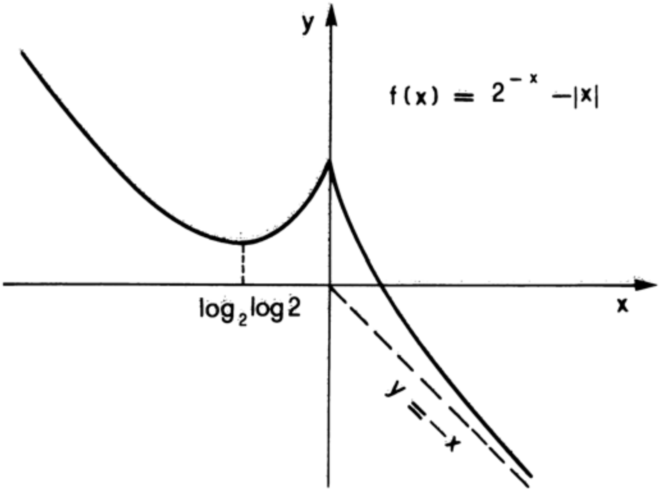


figura 3.9

3.24 Determinare, al variare del parametro $\lambda \in (0, +\infty)$, il numero ed il segno delle soluzioni dell'equazione

$$\lambda^x = |x| \ .$$

[Invece di procedere come nell'esercizio precedente, scriviamo l'equazione nella forma (si tratta di una forma equivalente, dato che $x = 0$ non è soluzione):

$$\lambda = |x|^{1/x} \ .$$

La funzione $f(x) = |x|^{1/x} = e^{(\log |x|)/x}$ è definita per $x \neq 0$, ha un asintoto verticale sinistro per $x = 0$ ed un asintoto orizzontale di equazione $y = 1$ per $x \to \pm\infty$. La derivata prima vale

$$f'(x) = e^{\frac{\log |x|}{x}} \frac{1 - \log |x|}{x^2} \ , \qquad \forall\, x \neq 0$$

(si ricordi che la derivata della funzione $\log |x|$ è $1/x$ anche per $x < 0$). La derivata si annulla quando $\log |x| = 1$, cioè per $x = \pm e$. Inoltre la derivata è negativa all'esterno dell'intervallo $[-e, e]$. Consideriamo nel seguito $f(x)$ separatamente per $x > 0$ e per $x < 0$.

Nell'insieme $(0, +\infty)$ il punto $x = e$ è di massimo assoluto per $f(x)$ e risulta $f(e) = e^{1/e}$. Tenendo presente che $f(x) \to 0$ per $x \to 0^+$, l'equazione $f(x) = \lambda$ ha, per $x > 0$, una soluzione se $\lambda \in (0, 1]$, due soluzioni se $\lambda \in (1, e^{1/e})$, una sola soluzione ($x = e$) se $\lambda = e^{1/e}$, nessuna soluzione se $\lambda > e^{1/e}$. Nell'intervallo $(-\infty, 0)$ il punto $x = -e$ è di minimo assoluto per $f(x)$ e risulta $f(-e) = e^{-1/e}$. L'equazione $f(x) = \lambda$ ha, per $x < 0$, una soluzione se

$\lambda \geq 1$, due soluzioni se $\lambda \in (e^{-1/e}, 1)$ una sola soluzione ($x = -e$) se $\lambda = e^{-1/e}$, nessuna soluzione se $\lambda < e^{-1/e}$ (si veda la figura 3.10).

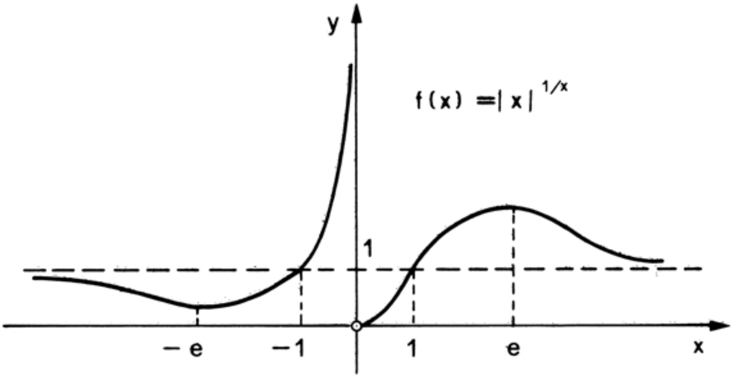


figura 3.10

Riassumendo, il numero ed il segno delle soluzioni in funzione di $\lambda > 0$ è dato da

$\lambda \in (0, e^{-1/e})$	una soluzione (positiva)
$\lambda = e^{-1/e}$	due soluzioni (una positiva ed una negativa)
$\lambda \in (e^{-1/e}, 1)$	tre soluzioni (una positiva e due negative)
$\lambda = 1$	due soluzioni ($x = \pm 1$)
$\lambda \in (1, e^{1/e})$	tre soluzioni (due positive ed una negativa)
$\lambda = e^{1/e}$	due soluzioni (una positiva ed una negativa)
$\lambda > e^{1/e}$	una soluzione (negativa).

Si noti che l'esercizio precedente è un caso particolare di quello qui considerato, e si ottiene ponendo $\lambda = 1/2 < e^{-1/e}$]

3.25 Determinare le soluzioni delle equazioni

$$\text{(a) } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} \qquad\qquad \text{(b) } \frac{\log x}{x-1} = \frac{3-x}{2}$$

[(a) Scriviamo la formula di Taylor con il resto di Lagrange per la funzione e^x con centro $x_0 = 0$: per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste ξ, nell'intervallo di estremi 0 e x, per cui

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{e^\xi}{3!}x^3 .$$

Il termine $e^\xi x^3/3!$ si annulla solo per $x = 0$. Perciò $x = 0$ è l'unica soluzione dell'equazione data.

(b) Posto $f(x) = \log x$, risulta

$$f'(x) = \frac{1}{x}\ ; \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2}\ ; \qquad f'''(x) = \frac{2}{x^3}\ .$$

In particolare risulta $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$, $f''(1) = -1$. In base alla formula di Taylor con il resto di Lagrange per la funzione $\log x$ con centro $x_0 = 1$, esiste $\xi > 0$ per cui

$$\log x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}\frac{(x-1)^3}{\xi^3}\ .$$

Cioè, se $x \neq 1$:

$$\frac{\log x}{x-1} = 1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{3}\frac{(x-1)^2}{\xi^3} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\frac{(x-1)^2}{\xi^3} =$$

$$\frac{3-x}{2} + \frac{1}{3}\frac{(x-1)^2}{\xi^3}\ .$$

Dato che $(x-1)^3/\xi^3 \neq 0$ per ogni $x \neq 1$, l'equazione data non ha soluzioni reali]

3.26 Verificare che l'equazione

$$e^{3x} + e^{2x} - 5e^x + 3 = 0\ .$$

ammette soltanto la soluzione $x = 0$.

[Si verifica direttamente che $x = 0$ è soluzione. Per mostrare che $x = 0$ è l'unica soluzione poniamo $e^x = t$, da cui $t^2 = e^{2x}$, $t^3 = e^{3x}$. Con tali notazioni l'equazione diventa

$$f(t) = t^3 + t^2 - 5t + 3 = 0\ .$$

La derivata $f'(t) = 3t^2 + 2t - 5$ si annulla in corrispondenza di $t = -5/3$ e $t = 1$. La funzione $f(t)$ è strettamente crescente negli intervalli $(-\infty, -5/3]$ e $[1, +\infty)$. Il punto $t = -5/3$ è di massimo ed il punto $t = 1$ è di minimo relativo per $f(t)$. Il valore di minimo in corrispondenza a $t = 1$ è $f(1) = 0$. Il grafico di $f(t)$ è rappresentato in figura 3.11. La funzione $f(t)$ si annulla, oltre che per $t = 1$, anche in un punto $t_0 < -5/3$ (eseguendo la divisione del polinomio $f(t)$ per il polinomio $t - 1$, si trova poi che $t_0 = -3$); in corrispondenza le soluzioni dell'equazione data verificano:

$$e^x = 1 \qquad \text{oppure} \qquad e^x = t_0\ .$$

La prima equazione dà $x = 0$; la seconda equazione non ha soluzioni perchè t_0 è negativo. Quindi x_0 resta l'unica soluzione dell'equazione]

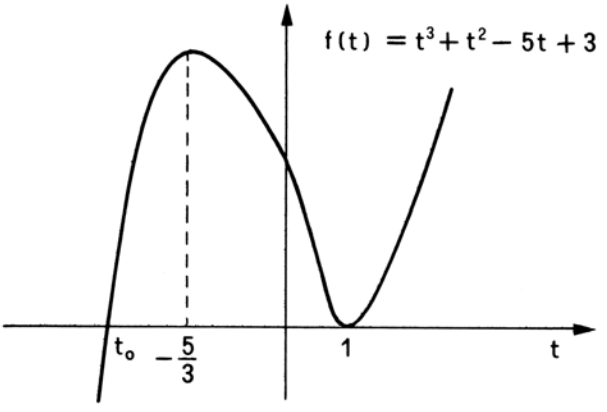


figura 3.11

3.27 Determinare il numero ed il segno delle soluzioni dell'equazione trascendente

$$2^{4x} - 2^{3x+2} + 3 \cdot 2^{2x+1} - 2^{x+2} = 0 \ .$$

[È opportuno porre $2^x = t$ da cui

$$2^{4x} = t^4 \ ; \qquad 2^{3x+2} = 2^2 \cdot 2^{3x} = 4t^3 \ ; \qquad 2^{2x+1} = 2t^2 \ ; \qquad 2^{x+2} = 4t \ .$$

Con tali notazioni l'equazione diventa

$$f(t) = t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t = 0 \ .$$

Si noti che $f(t)$ si annulla per $t = 0$. La derivata vale

$$f'(t) = 4t^3 - 12t^2 + 12t - 4 = 4(t^3 - 3t + 3t - 1) = 4(t-1)^3 \ .$$

La funzione $f(t)$ è strettamente crescente per $t \geq 1$ ed è strettamente decrescente per $t \leq 1$. Il punto $t = 1$ è di minimo assoluto ed il valore minimo è $f(1) = 1 - 4 + 6 - 4 = -1$. Perciò l'equazione $f(t) = 0$ ha due soluzioni t_1, t_2; una nell'intervallo $(-\infty, 1)$ (che, come abbiamo già visto, è $t = 0$) e l'altra nell'intervallo $(1, +\infty)$. In corrispondenza occorre risolvere le due equazioni

$$2^x = t_1 = 0 \ ; \qquad 2^x = t_2 > 1 \ .$$

La prima equazione non ha soluzioni, mentre la seconda ha per soluzione $x_2 = \log_2 t_2$; essendo $t_2 > 1$ risulta $x_2 > 0$.

Si noti che $f(t)$ può essere rappresentata nella forma $f(t) = (t-1)^4 - 1$, da cui si vede facilmente che $t_1 = 0$ e $t_2 = 2$. Perciò $x_2 = \log_2 2 = 1$ è l'unica soluzione dell'equazione data]

3.28 Risolvere l'equazione

$$e^{2x} - (x+4)e^x + 3(x+1) = 0 \ .$$

[L'equazione ha due soluzioni: $x = 0$ e $x = \log 3$. Il metodo per ottenere le soluzioni è indicato nella risposta dell'esercizio 2.95]

3.29 Verificare che le seguenti equazioni trascendenti ammettono una sola soluzione nell'intervallo $(0, \pi/2)$:

$$\text{(a)}\ \operatorname{tg} x - 2x = 0 \qquad\qquad \text{(b)}\ \operatorname{tg} x - \frac{2}{x} = 0$$

[(a) Posto $f(x) = \operatorname{tg} x - 2x$, la derivata vale

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 2 = \frac{1 - 2\cos^2 x}{\cos^2 x}\,.$$

La derivata si annulla quando $\cos^2 x = 1/2$ e, dato che $\cos x > 0$ nell'intervallo $(0, \pi/2)$, ciò equivale a $\cos x = \sqrt{2}/2$, cioè $x = \pi/4$. Il punto $x = \pi/4$ è di minimo per $f(x)$ ed il valore minimo è $f(\pi/4) = 1 - \pi/2 < 0$. La funzione è strettamente decrescente in $[0, \pi/4]$ ed è strettamente crescente in $[\pi/4, \pi/2)$. Inoltre $f(x) \to +\infty$ per $x \to \pi/2^-$ e $f(0) = 0$. Nell'intervallo $[0, \pi/2)$ la funzione si annulla per $x = 0$ ed in un altro punto dell'intervallo $(\pi/4, \pi/2)$. Quindi nell'intervallo $(0, \pi/2)$, l'equazione ha una sola soluzione.
(b) Poniamo l'equazione nella forma $f(x) = g(x)$, con

$$f(x) = \operatorname{tg} x\,; \qquad\qquad g(x) = \frac{2}{x}\,.$$

Nell'intervallo $(0, \pi/2)$ la funzione $f(x)$ è strettamente crescente e la funzione $g(x)$ è strettamente decrescente. Inoltre

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = +\infty \end{cases} \quad , \qquad \begin{cases} \lim\limits_{x \to \pi/2^-} f(x) = +\infty \\ g(\pi/2) = 4/\pi \end{cases}$$

Quindi l'equazione $f(x) = g(x)$ ha una ed una sola soluzione nell'intervallo $(0, \pi/2)$]

3.30 Consideriamo di nuovo le equazioni (a), (b) dell'esercizio precedente e indichiamo con la ξ la soluzione dell'equazione (a) e con η la soluzione dell'equazione (b) nell'intervallo $(0, \pi/2)$. Dimostrare che $\xi > \eta$.

[Poniamo $f(x) = \operatorname{tg} x - 2x$; $g(x) = \operatorname{tg} x - 2/x$. La funzione $g(x)$ è strettamente crescente in $(0, \pi/2)$ e la funzione $f(x)$ (come verificato nell'esercizio precedente) è strettamente crescente in $[\pi/4, \pi/2)$.

Si noti che le funzioni $f(x)$, $g(x)$ assumono lo stesso valore in corrispondenza di $x = 1$. Tale valore è negativo; infatti:

$$f(1) = g(1) = \operatorname{tg}(1) - 2 < \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) - 2 = \sqrt{3} - 2 < 0\,.$$

Dato che le funzioni $f(x)$, $g(x)$ sono crescenti per $x \geq 1$, le soluzioni ξ, η sono entrambe maggiori di 1. Essendo

$$\operatorname{tg} \xi = 2\xi > 2\,, \qquad\qquad \operatorname{tg} \eta = \frac{2}{\eta} < 2\,,$$

ne segue che $\operatorname{tg} \eta < \operatorname{tg} \xi$ da cui $\eta < \xi$]

3.31 Dimostrare che la derivata $f'(x)$ della funzione

$$f(x) = x \operatorname{sen}^2 x$$

si annulla in uno ed un sol punto dell'intervallo aperto $(0, \pi)$.

[La funzione $f(x)$ è derivabile su $\mathbb{R}$. Dato che $f(0) = f(\pi) = 0$, per il teorema di Rolle la derivata $f'(x)$ si annulla almeno in un punto dell'intervallo $(0, \pi)$. Per dimostrare l'unicità di tale punto studiamo l'equazione:

$$f'(x) = \operatorname{sen}^2 x + 2x \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} x(\operatorname{sen} x + 2x \cos x) = 0\,.$$

Essendo $\operatorname{sen} x \neq 0$ per ogni $x \in (0, \pi)$, otteniamo l'equazione equivalente:

$$\operatorname{sen} x + 2x \cos x = 0\,.$$

Osservando che $x = \pi/2$ non è soluzione dell'equazione (perchè $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1 \neq 0$), possiamo dividere entrambi i membri per $\cos x$ (che non è nullo) ottenendo la nuova equazione equivalente

$$\operatorname{tg} x + 2x = 0\,.$$

La funzione $g(x) = \operatorname{tg} x + 2x$ ha derivata $g'(x) = 1/\cos^2 x + 2$ positiva; perciò $g(x)$ è strettamente crescente negli intervalli $(0, \pi/2)$ e $(\pi/2, \pi)$.

Dato che $g(0) = 0$, la funzione $g(x)$ non si annulla nell'intervallo $(0, \pi/2)$. Inoltre, essendo

$$\lim_{x \to \pi/2^+} g(x) = -\infty \qquad , \qquad g(\pi) = 2\pi\,,$$

la funzione $g(x)$ si annulla una ed una sola volta nell'intervallo $(\pi/2, \pi)$]

3.32 Determinare, nell'intervallo $(-\pi, \pi]$ il numero di soluzioni reali dell'equazione

$$\cos^2 x + 2\operatorname{sen} x + \lambda = 0$$

al variare del parametro reale λ.

[La derivata della funzione $f(x) = \cos^2 x + 2\operatorname{sen} x + \lambda$ vale

$$f'(x) = 2\cos x(1 - \operatorname{sen} x)$$

e, nell'intervallo $(-\pi, \pi]$, si annulla per $x = \pi/2$ (che è un punto di massimo), $x = -\pi/2$ (che è un punto di minimo) e $x = 0$ (che è un punto di flesso a tangente orizzontale). La funzione è strettamente crescente nell'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$ ed è strettamente decrescente in $(-\pi, -\pi/2]$, $[\pi/2, \pi]$. I valori minimo e massimo di $f(x)$ sono:

$$\min f(x) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2 + \lambda \quad ; \quad \max f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 + \lambda\,.$$

Se $\min f(x) < 0 < \max f(x)$, allora l'equazione $f(x) = 0$ ha due soluzioni nell'intervallo $(-\pi, \pi]$; ciò corrisponde a $-2 + \lambda < 0 < 2 + \lambda$, cioè $-2 < \lambda < 2$. Se $\lambda = 2$, oppure se $\lambda = -2$, l'equazione ha una sola soluzione reale. Infine se $\lambda < -2$, oppure se $\lambda > 2$, l'equazione $f(x) = 0$ non ha soluzioni]

3.33 Determinare, al variare del parametro reale λ, il numero di soluzioni reali dell'equazione

$$\operatorname{arctg} x = \lambda x \ .$$

[Una soluzione è data da $x = 0$, qualunque sia $\lambda \in \mathbb{R}$. La retta tangente per $x_0 = 0$ al grafico della funzione $f(x) = \operatorname{arctg} x$ ha equazione $y = x$ (si veda la figura 3.12).

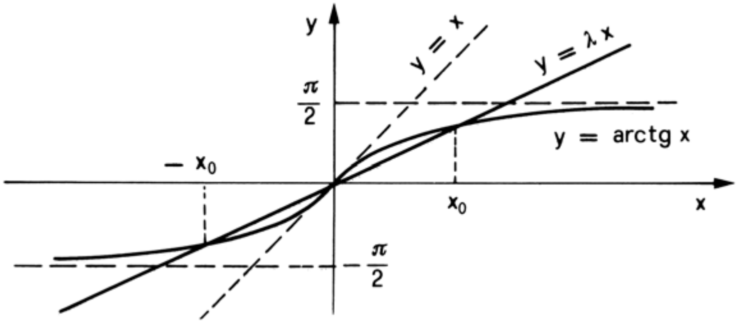


figura 3.12

La funzione $\operatorname{arctg} x$ è strettamente convessa nell'intervallo $(-\infty, 0]$ ed è strettamente concava in $[0, +\infty)$. Allora, se $0 < \lambda < 1$, la retta di equazione $y = \lambda x$ interseca il grafico di $f(x)$ in due punti $\pm x_0$; invece, se $\lambda \geq 1$, oppure se $\lambda \leq 0$, la retta di equazione $y = \lambda x$ interseca il grafico della funzione solo per $x = 0$. Riassumendo, l'equazione ha 3 soluzioni reali se $\lambda \in (0, 1)$; ha solo la soluzione $x = 0$ altrimenti]

3.34 Determinare il numero di soluzioni reali dell'equazione

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \frac{1}{2} \ .$$

[L'equazione ha due soluzioni. Si può studiare il grafico della funzione pari $f(x) = \operatorname{arctg} x / x$, oppure si può procedere come nell'esercizio precedente]

3.35 Determinare, al variare del parametro reale λ, il numero di soluzioni reali dell'equazione

$$x \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right) = \lambda \, .$$

[Studiando la funzione $f(x) = x \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right)$, si verifica che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \ , \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1 \, .$$

Pertanto l'equazione $f(x) = \lambda$ ha almeno una soluzione reale se $\lambda < 1$. Lo studio del segno della derivata $f'(x)$ non è immediato. Come nell'esercizio 2.106 si può studiare il segno di $f''(x)$ e si trova che

$$f''(x) = -\frac{2}{(1+x^2)^2}$$

risultando quindi $f''(x) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Ne segue che la derivata prima è decrescente strettamente su $\mathbb{R}$; dato che

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0\,,$$

l'estremo inferiore di $f(x)$ vale 0 e $f'(x)$ è positiva su tutto $\mathbb{R}$. In definitiva la funzione $f(x)$è strettamente crescente su $\mathbb{R}$, quindi l'equazione ammette una sola soluzione se $\lambda < 1$, non ammette alcuna soluzione reale se $\lambda \geq 1$]

3B. Radici reali dell'equazione di terzo grado

In questo paragrafo consideriamo le radici reali di un'equazione di terzo grado a coefficienti reali:

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0\,.$$

Ci proponiamo di dare delle condizioni sui coefficienti a_0, a_1, a_2 affinchè l'equazione ammetta una, oppure due, oppure tre radici reali distinte. A tale scopo introduciamo le seguenti notazioni:

$$p = a_1 - \frac{a_2^2}{3}\;; \qquad q = a_0 - \frac{a_1a_2}{3} + \frac{2a_2^3}{27}\;; \qquad \Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\,.$$

Si noti che, se $a_2 = 0$, allora $p = a_1$, $q = a_0$.

Dimostreremo che:

1. *Se* $\Delta > 0$, *l'equazione ha una sola radice reale.*
2. *Se* $\Delta = 0$ e $p = 0$, *l'equazione ammette come unica radice reale* $x = -a_2/3$.
3. *Se* $\Delta = 0$ e $p \neq 0$, *l'equazione ha due radici reali distinte.*
4. *Se* $\Delta < 0$ *l'equazione ha tre radici reali distinte.*

Cominciamo con l'effettuare la sostituzione $x = t - a_2/3$. Il polinomio si trasforma in:

$$\left(t - \frac{a_2}{3}\right)^3 + a_2\left(t - \frac{a_2}{3}\right)^2 + a_1\left(t - \frac{a_2}{3}\right) + a_0 =$$

$$= \left(t^3 - at^2 + \frac{a_2^2}{3}t - \frac{a_2^3}{27}\right) + \left(a_2t^2 - \frac{2a_2^2}{3}t + \frac{a_2^3}{9}\right) + \left(a_1t - \frac{a_1a_2}{3}\right) + a_0 =$$

$$= t^3 + \left(a_1 - \frac{a_2^2}{3}\right) t + \left(a_0 - \frac{a_1 a_2}{3} + \frac{2a_2^3}{27}\right) = t^3 + pt + q \ .$$

Ad ogni soluzione dell'equazione iniziale nella incognita x corrisponde, con la sostituzione $x = t - a_2/3$, una soluzione dell'equazione

$$t^3 + pt + q = 0$$

nell'incognita t, e viceversa. Per questo motivo nel seguito determineremo il numero degli zeri reali la funzione

$$f(t) = t^3 + pt + q \ .$$

Dato che $f(t) \to \pm\infty$ per $t \to \pm\infty$, esiste sempre almeno una soluzione dell'equazione $f(t) = 0$. La derivata vale

$$f'(t) = 3t^2 + p$$

ed è sicuramente positiva per ogni $t \in \mathbb{R}$ se $p > 0$.

Perciò se $p > 0$, la funzione $f(t)$ è strettamente crescente su $\mathbb{R}$ ed ammette una unica radice reale. Inoltre, se $p > 0$, risulta $\Delta = q^2/4 + p^3/27 > 0$ e quindi abbiamo una situazione corrispondente al caso 1).

Supponiamo nel seguito che $p \leq 0$. In tal caso la derivata $f'(t)$ si annulla nei punti

$$t_1 = -\frac{\sqrt{-p}}{3} \qquad , \qquad t_2 = \frac{\sqrt{-p}}{3} \ .$$

La funzione $f(t)$ è crescente negli intervalli $(-\infty, t_1]$ e $[t_2, +\infty)$ ed è decrescente in $[t_1, t_2]$. Il punto t_1 è di massimo relativo, mentre il punto t_2 è di minimo (se $p \neq 0$). In corrispondenza la funzione $f(t)$ assume i valori

$$f(t_1) = q - \frac{2}{3}p\,\frac{\sqrt{-p}}{3} \qquad ; \qquad f(t_2) = q + \frac{2}{3}p\,\frac{\sqrt{-p}}{3} \ .$$

Se i valori $f(t_1)$, $f(t_2)$ sono entrambi positivi, oppure entrambi negativi, la funzione $f(t)$ ha una sola radice reale; mentre, se $f(t_1)$ e $f(t_2)$ hanno segni discordi (e se $t_1 \neq t_2$), allora le radici reali sono tre (si veda la figura 3.13).

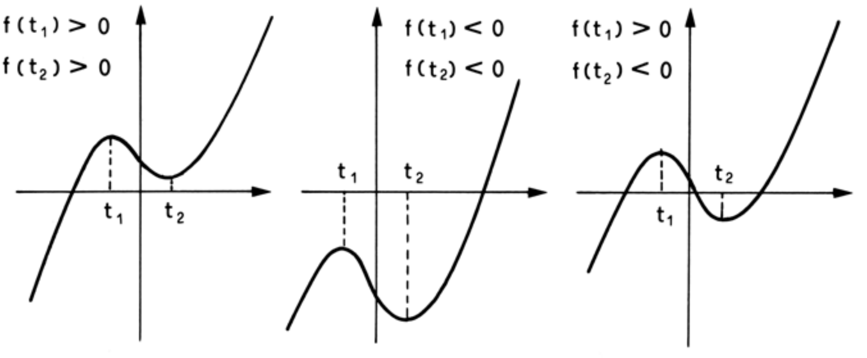


figura 3.13

Perciò le radici reali sono tre se il prodotto $f(t_1) \cdot f(t_2)$ è negativo. Tale prodotto vale

$$f(t_1) \cdot f(t_2) = q^2 - \left(\frac{2}{3}p\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)^2 = q^2 + \frac{4}{27}p^3 = 4\Delta.$$

Quindi, se $\Delta < 0$, l'equazione ha tre radici reali distinte. Se invece $\Delta > 0$, l'equazione ha una sola radice reale, perchè $f(t_1) \cdot f(t_2) > 0$. Infine, se $\Delta = 0$, almeno uno del valori $f(t_1)$, $f(t_2)$ è nullo, come in figura 3.14.

Se $\Delta = 0$ risulta $t_1 = t_2$ se e solo se $p = 0$ (ed in tal caso $t_1 = t_2 = f(t_1) = f(t_2) = 0$) e quindi $x = -a_2/3$. Se invece $t_1 < t_2$ (cioè se $p \neq 0$) allora l'equazione ha due radici reali distinte.

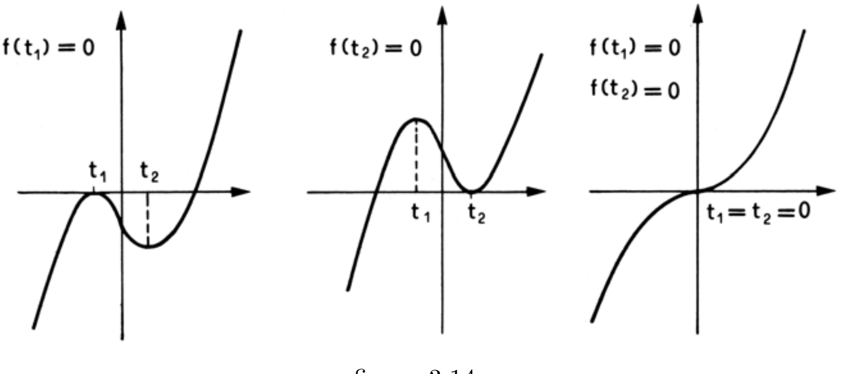


figura 3.14

3C. L'algoritmo di Newton

In questo paragrafo prendiamo in considerazione uno dei metodi numerici più popolari e più efficienti per il calcolo approssimato delle soluzioni di una equazione: *il metodo di Newton* (detto anche *l'algoritmo di Newton*). Ricordiamo che esistono anche altri importanti algoritmi per il calcolo numerico approssimato di soluzioni di equazioni algebriche e trascendenti, quali ad esempio *il metodo di bisezione* ed *il metodo delle secanti*, che però non esaminiamo in questa sede.

L'algoritmo di Newton è un metodo iterativo che, nella forma più semplice, si può enunciare così:

TEOREMA.- *Sia $f(x)$ una funzione derivabile, con derivata continua, in un intervallo $[a,b]$ e sia convessa in tale intervallo. Supponiamo che $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ e che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in [a,b]$. Allora la successione x_n, definita per ricorrenza da*

$$x_1 = b \, , \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \, ,$$

converge decrescendo all'unica soluzione $x_0 \in [a,b]$ dell'equazione $f(x) = 0$.

Dimostrazione: Per il teorema dell'esistenza degli zeri esiste in $[a,b]$ una soluzione x_0 dell'equazione $f(x) = 0$. Dato che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in [a,b]$, la funzione è strettamente crescente e quindi l'equazione $f(x) = 0$ ammette x_0 come unica soluzione in $[a,b]$.

Proviamo che $x_n \geq x_0$ per ogni n. Per $n = 1$ la relazione è vera, infatti $x_1 = b > x_0$. Per $n > 1$ utilizziamo la convessità di $f(x)$:

$$f(x) \geq f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) \, , \qquad \forall\, x \in [a,b] \, .$$

Ponendo $x = x_n + 1$ e ricordando che $x_{n+1} - x_n = -f(x_n)/f'(x_n)$, otteniamo

$$f(x_{n+1}) \geq f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = f(x_n) + f'(x_n)[-f(x_n)/f'(x_n)] = 0 \, .$$

Perciò $f(x_{n+1}) \geq 0$; dato che la funzione $f(x)$ è positiva in $(x_0, b]$ ed è negativa in $[a, x_0)$, risulta $x_{n+1} \geq x_0$.

Verifichiamo che la successione x_n è decrescente: Dato che $x_n \geq x_0$ risulta $f(x_n) \geq 0$. Inoltre per ipotesi $f'(x_n) > 0$. Perciò:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \leq x_n \, , \qquad \forall\, n.$$

Per il teorema sulle successioni monotòne, esiste il limite per $n \to +\infty$ di x_n. Indichiamo tale limite con $\overline{x} \in [x_0, b]$; risulta

$$\overline{x} = \lim_{n \to +\infty} x_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right) = \overline{x} - \frac{f(\overline{x})}{f'(\overline{x})}$$

(abbiamo utilizzato la continuità di $f(x)$ e di $f'(x)$). Ne segue che $f(\overline{x}) = 0$. Dato che $f(x) = 0$ ha un'unica soluzione nell'intervallo $[a,b]$, risulta $\overline{x} = x_0$. Quindi x_n converge ad x_0 per $n \to +\infty$.

Se $f(x)$ non è convessa nell'intervallo $[a,b]$, l'algoritmo di Newton può non essere convergente. Però, se x_1 è sufficientemente vicino alla soluzione cercata, allora, come indicato nel risultato che segue, il metodo risulta ancora convergente.

TEOREMA.- *Sia $f(x)$ una funzione derivabile due volte in $[a,b]$. Sia $x_0 \in (a,b)$ una soluzione dell'equazione $f(x) = 0$. Supponiamo che esistano due numeri reali m, M tali che*

$$0 < m \leq |f'(x)|, \qquad M \geq |f''(x)|, \qquad \forall\, x \in [a,b].$$

Poniamo:

$$\delta_0 = \min\{b - x_0\,; x_0 - a\}, \qquad \delta = \min\left\{\frac{2m}{M}\,; \delta_0\right\}$$

($\delta = \delta_0$ se $M = 0$). *Allora, se scegliamo x_1 in modo che $|x_1 - x_0| < \delta$, la successione x_n, definita per $n \geq 1$ da*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

è convergente ad x_0.

Dimostrazione: Utilizziamo la formula di Taylor con il resto di Lagrange per la funzione $f(x)$ con centro nel punto x_n:

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_n)^2\,, \qquad \forall\, x \in [a,b]\,,$$

essendo ξ un punto opportuno dell'intervallo $[a,b]$. Poniamo $x = x_0$; dato che $f(x_0) = 0$, dividendo per $f'(x_n)$ (che per ipotesi non è zero) otteniamo

$$0 = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + (x_0 - x_n) + \frac{1}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(x_n)}(x_0 - x_n)^2\,.$$

Essendo $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ risulta

$$x_{n+1} - x_0 = \frac{1}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(x_n)}(x_0 - x_n)^2\,.$$

Da cui

$$|x_{n+1} - x_0| \leq \frac{1}{2}\frac{M}{m}(x_n - x_0)^2\,. \tag{1}$$

Verifichiamo ora, per induzione, che

$$|x_n - x_0| < \delta\,, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Il primo termine x_1 è stato scelto in modo da soddisfare tale relazione. Supponiamo vera la (2) e procediamo utilizzando la (1):

$$|x_{n+1} - x_0| \leq \frac{1}{2}\frac{M}{m}(x_n - x_0)^2 < \frac{1}{2}\frac{M}{m}\delta^2 \ ;$$

dato che $\delta \leq 2m/M$, risulta

$$|x_{n+1} - x_0| < \frac{1}{2}\frac{M}{m}\delta^2 \leq \frac{1}{2}\frac{M}{m}\delta\left(\frac{2m}{M}\right) = \delta \ .$$

Perciò la (2) è provata . In particolare la (2) assicura che $x_n \in [a, b]$ per ogni n.

Verifichiamo per induzione che

$$(3) \qquad |x_{n+1} - x_0| \leq \frac{2m}{M}\left(\frac{M|x_1 - x_0|}{2m}\right)^{2^n} .$$

Per $n = 1$ la (3) segue dalla (1). Supponendo verificata la (3) per $n \geq 1$ e utilizzando di nuovo la (1) con $n+1$ al posto di n, otteniamo

$$|x_{n+2} - x_0| \leq \frac{1}{2}\frac{M}{m}(x_{n+1} - x_0)^2 \leq \frac{M}{2m}\left[\frac{2m}{M}\left(\frac{M|x_1 - x_0|}{2m}\right)^{2^n}\right]^2 = \frac{2m}{M}\left(\frac{M|x_1 - x_0|}{2m}\right)^{2^{n+1}} .$$

Perciò la (3) è dimostrata. Infine, tenendo presente che

$$|x_1 - x_0| < \delta \leq \frac{2m}{M} \quad \Rightarrow \quad \frac{M}{2m}|x_1 - x_0| < 1 \ ,$$

il secondo membro di (3) converge a zero per $n \to +\infty$. Ne segue che x_n converge a x_0 per $n \to +\infty$.

Spesso il teorema precedente si applica nella forma seguente:

COROLLARIO.- *Se $f(x)$ ha derivata seconda continua in un intorno di x_0 e se*

$$f(x_0) = 0 \ , \qquad\qquad f'(x_0) \neq 0 \ ,$$

allora l'algoritmo di Newton è convergente pur di scegliere l'approssimazione iniziale x_1 sufficientemente vicina ad x_0.

Dimostrazione: Dato che $f(x)$ è derivabile due volte in un intorno I di x_0, la derivata prima è continua in I. Essendo $f'(x_0) \neq 0$, per il teorema della permanenza del segno esiste un numero positivo δ_0 tale che $|f'(x)| > |f'(x_0)|/2$ per ogni x per cui $|x - x_0| \leq \delta_0$. Dato che $f''(x)$ è continua nell'intervallo $[x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0]$, esiste in tale intervallo il massimo M di $|f''(x)|$. Perciò, posto $m = |f'(x)|/2$, risulta

$$|f'(x)| \geq m \ , \qquad |f''(x)| \leq M \ , \qquad \forall\, x \in [x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0] \ .$$

Sono soddisfatte le ipotesi del teorema precedente; perciò l'algoritmo di Newton converge pur di scegliere x_1 in modo che $|x_1 - x_0| < \delta = \min\{2m/M;\ \delta_0\}$.

Allo scopo di valutare le stime proposte in precedenza, discutiamo la convergenza della successione x_n (dell'algoritmo di Newton) alla soluzione $x_0 = 0$ dell'equazione $\operatorname{sen} x = 0$. Poniamo quindi

$$f(x) = \operatorname{sen} x, \qquad\qquad x_0 = 0$$

e consideriamo la successione definita per ricorrenza da

$$x_1 \neq 0 \quad \text{assegnato,} \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \operatorname{tg} x_n \ .$$

Ci limitiamo a considerare $x_1 \in (-\pi/2, \pi/2)$.

La retta di equazione $y = x$ è tangente al grafico della funzione $y = \operatorname{tg} x$ per $x = 0$. In base alla concavità e convessità della funzione tangente, si verifica che:

$$\text{se} \quad x \in [0, \pi/2) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} x > x \ ;$$
$$\text{se} \quad x \in (-\pi/2, 0] \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} x < x \ .$$

Ne segue che se $x_n \in (0, \pi/2)$ allora $x_{n+1} = x_n - \operatorname{tg} x_n < 0$ e viceversa, se $x_n \in (-\pi/2, 0)$ allora $x_{n+1} > 0$. Quindi, se $x_n \to 0$ per $n \to +\infty$, allora x_n si avvicina a zero oscillando.

Data la simmetria del problema, basta considerare $x_1 \in (0, \pi/2)$. In base ai teoremi precedenti la successione x_n risulta convergente a $x_0 = 0$ pur di scegliere

$$x_1 = |x_1 - x_0| < \frac{2m}{M} \ ,$$

dove

$$m = \min\{|f'(x)| : x \in [-x_1, x_1]\} \ ,$$
$$M = \max\{|f''(x)| : x \in [-x_1, x_1]\} \ .$$

Per $x \in (0, \pi/2)$ risulta $|f'(x)| = |\cos x| = \cos x$ e $m = \min\{\cos x \ : \ x \in [-x_1, x_1]\} = \cos x_1$. Inoltre $|f''(x)| = |-\operatorname{sen} x| = \operatorname{sen} x$ e $M = \operatorname{sen} x_1$. Perciò la condizione diviene

$$x_1 \in (0, \frac{\pi}{2}) \ , \qquad x_1 < \frac{2m}{M} = 2\,\frac{\cos x_1}{\operatorname{sen} x_1} \ ,$$

cioè $\operatorname{tg} x_1 < 2/x_1$. In figura 3.15 sono rappresentati in uno stesso sistema di riferimento i grafici delle funzioni $y = \operatorname{tg} x$ e $y = 2/x$ per $x \in (0, \pi/2)$. Si verifica facilmente che la condizione $\operatorname{tg} x_1 < 2/x_1$ è equivalente a dire che $x_1 \in (0, \eta)$ con η soluzione in $(0, \pi/2)$ del l'equazione $\operatorname{tg} x = 2/x$ (si veda anche l'esercizio 3.29 (b)).

Riassumendo, in base alle stime del teorema, l'algoritmo di Newton è convergente pur di scegliere $x_1 \in (0, \eta)$, con $\eta \in (0, \pi/2)$ soluzione dell'equazione $\operatorname{tg} x = 2/x$.

Analizziamo ora direttamente la convergenza della successione x_n definita con il metodo di Newton, senza ricorrere alle stime enunciate in generale precedentemente.

Abbiamo già mostrato che la successione x_n, se converge a zero, è a termini di segno alterno. Consideriamo la successione

$$y_n = |x_n|$$

e vediamo quando y_n è monotòna decrescente. Se $x_n > 0$

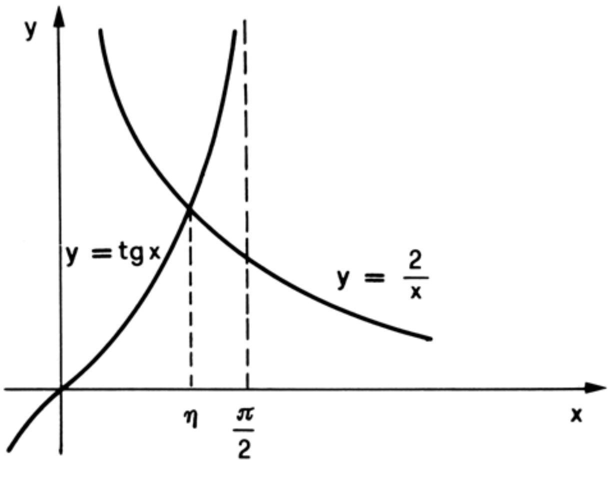


figura 3.15

risulta $x_{n+1} < 0$ e quindi

$$y_{n+1} = |x_{n+1}| = -x_{n+1} = \operatorname{tg} x_n - x_n \, .$$

Risulta $y_{n+1} < y_n = |x_n| = x_n$ se e solo se $\operatorname{tg} x_n - x_n < x_n$, cioè se e solo se

$$\operatorname{tg} x_n < 2x_n \, .$$

Ciò equivale a dire (si veda anche l'esercizio 3.29 (a)) che $y_{n+1} < y_n$ se e solo se $x_n \in (0, \xi)$, dove $\xi \in (0, \pi/2)$ è soluzione dell'equazione $\operatorname{tg} x = 2x$. Si verifica anche, per induzione, che se $x_1 \in (0, \xi)$, allora $y_n = |x_n| \in (0, \xi)$ e $y_{n+1} < y_n$ per ogni n. In tal caso y_n converge decrescendo a zero e quindi anche x_n converge a zero.

Si noti che, con l'analisi diretta, abbiamo trovato una stima ottimale: Nell'ipotesi $x_1 \in (0, \pi/2)$ la successione x_n converge a $x_1 \in (0, \xi)$, con ξ soluzione dell'equazione $\operatorname{tg} x = 2x$ nell'intervallo $(0, \pi/2)$.

Deve quindi risultare $0 < \eta < \xi < \pi/2$ (infatti, che proprio questo è ciò che accade, è provato nell'esercizio 3.30). A titolo indicativo riportiamo le seguenti espressioni decimali approssimate:

$$\eta = 1.07\ldots\ ; \qquad \xi = 1.16\ldots\ ; \qquad \frac{\pi}{2} = 1.57\ldots\ .$$

Per finire, notiamo che la successione x_n si può rappresentare nella forma

$$x_1 \in (0, \frac{\pi}{2})\ , \qquad x_{n+1} = g(x_n) \qquad \text{con} \quad g(x_n) = x - \operatorname{tg} x\ .$$

Con i metodi del paragrafo 12C della parte prima si verifica che la funzione $g(x)$ è una *contrazione* in ogni intervallo del tipo $[-\delta, \delta]$, con $0 < \delta < \pi/4$. In tal caso la convergenza a zero della successione x_n segue dal teorema delle contrazioni.

3D. Valutazione numerica delle soluzioni

Esistono diversi metodi numerici per risolvere m modo approssimato un'equazione algebrica o trascendente. Il *metodo di Newton*, considerato nel paragrafo precedente, è un esempio. Importanti sono anche il *metodo di bisezione* ed il *metodo delle secanti*.

Negli esercizi che seguono riprendiamo alcuni esempi già proposti nel paragrafo 3A dal punto di vista dell'esistenza delle soluzioni e risolti facendo uso del teorema dell'esistenza degli zeri. In questa sede invece proponiamo la determinazione di un'espressione decimale approssimata delle soluzioni reali per mezzo di algoritmi numerici e, naturalmente, utilizzando un computer.

Nelle risposte abbiamo riportato sinteticamente l'espressione decimale delle soluzioni troncata a 6 cifre.

3.36 $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$

[L'equazione ammette la radice reale $x_0 = 1.368808\ldots$ (si veda l'esercizio 3 .1)]

3.37 $1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} = 0$

[L'equazione ha quattro radici reali: $\pm\sqrt{6 - 2\sqrt{3}} = \pm 1.592450\ldots$, $\pm\sqrt{6 + 2\sqrt{3}} = \pm 3.076378\ldots$ (si veda l'esercizio 3.2)]

3.38 $x^9(x-4)^9 = 1$

[L'equazione si può scrivere nella forma equivalente $x(x-4) = 1$ (si veda anche l'esercizio 3.3 (a)) ed ha per soluzioni $x_1 = 2 - \sqrt{5} = -0.236067\ldots$ e $x_2 = 2 + \sqrt{5} = 4.236067\ldots$]

3.39 $x^{10}(x-2)^{10} = 1$

[L'equazione ha tre soluzioni: $x_0 = 1$, $x_1 = 1 - \sqrt{2} = -0.414213\ldots$, $x_2 = 1 + \sqrt{2} = 2.414213\ldots$]

3.40 (a) $\quad x^4 + x^2 = x + 1 \qquad$ (b) $\quad x^4 + x^2 = 1 - x$

[Si veda l'esercizio 3.6. (a) $x_1 = -0.569840\ldots$, $x_2 = 1$; (b) $x_1 = -1\ldots$, $x_2 = 0.569840\ldots$]

3.41 (a) $\quad x^4 + x^3 - 1 = 0 \qquad$ (b) $\quad x^4 - 2x^3 - 1 = 0$

[Si veda l'esercizio 3.7. (a) $x_1 = -1.380277\ldots$, $x_2 = 0.819172\ldots$; (b) $x_1 = -0.716672\ldots$, $x_2 = 2.106919\ldots$]

3.42 $\sqrt{x} + \dfrac{1}{x-3} = 0$

[L'equazione ha due radici reali (si vedano l'esercizio 3.9 e la figura 3.2) : $x_1 = 0.120614\ldots$, $x_2 = 2.347296\ldots$]

3.43 (a) $\quad \dfrac{1}{x} + \log\, x = 2 \qquad$ (b) $\quad \dfrac{1}{x} + \log\, x = 4$

[Si veda l'esercizio 3.10. (a) $x_1 = 0.317844\ldots$, $x_2 = 6.305395\ldots$; (b) $x_1 = 0.173942\ldots$, $x_2 = 53.588761\ldots$]

3.44 $\dfrac{1}{x} + \log\, |x| = 2$

[Oltre alle due soluzioni della parte (a) dell'esercizio precedente l'equazione ha anche la soluzione negativa $-8.331372\ldots$]

3.45 $\log\, |x| - \dfrac{x^2 - 4x}{1 - x^2} = 0$

[$x_1 = 0.297993\ldots$, $x_2 = 2.352016\ldots$; (si vedano l'esercizio 3.12 e la figura 3.3)]

3.46 (a) $\quad x \log^2\, x = 1 \qquad$ (b) $\quad x \log^2\, x = \dfrac{1}{2}$

[(a) In base ai risultati dell'esercizio 3.13, dato che $\lambda = 1 > 4/e^2$, l'equazione ha una soluzione : $2.020747\ldots$; (b) Dato che $\lambda = 1/2 < 4/e^2$, l'equazione ha tre soluzioni: $x_1 = 0.072958\ldots$, $x_2 = 0.225832\ldots$, $x_3 = 1.715724\ldots$]

3.47 $x^2 - 2x\log x - 2 = 0$

[L'equazione ammette una sola radice reale (si veda l'esercizio 3.16) espressa da $2.750883\ldots$]

3.48 $e^x = \dfrac{1-x}{x}$

[$x_0 = 0.401058\ldots$ (si vedano l'esercizio 3.17 (b) e la figura 3.6)]

3.49 $e^{-x} = (x-1)^2$

[Come indicato nell'esercizio 3.22 (b), l'equazione ha due soluzioni reali. Esse sono espresse da $x_1 = 0$ e $x_2 = 1.477670\ldots$]

3.50 (a) $\quad 2^{-x} = |x| \qquad$ (b) $\quad 3^x = |x|$

[(a) Come risulta dagli esercizi 3.23, 3.24. l'equazione ha una sola soluzione, espressa da $0.641185\ldots$; (b) dato che $3 = \lambda > e^{1/e}$, dall'analisi dell'esercizio 3.24 e dalla figura 3.10 risulta che l'equazione ha una sola soluzione (negativa), che è espressa da $-0.547808\ldots$]

3.51 $\operatorname{tg} x - 2x = 0$ con $x \in (0, \pi/2)$

[$\xi = 1.165561\ldots$ (si vedano gli esercizi 3.29 (b) e 3.30)]

3.52 $\operatorname{tg} x - \dfrac{2}{x} = 0$ con $x \in (0, \pi/2)$

[$\eta = 1.076873\ldots$ (si vedano gli esercizi 3.29 (b) e 3.30)]

3.53 (a) $\quad \cos^2 x + 2\text{sen}x + 1 = 0 \qquad$ con $x \in (\pi, \pi]$
(b) $\quad \cos^2 x + 2\text{sen}x - 1 = 0 \qquad$ con $x \in (\pi, \pi]$

[(a) In base all'analisi fatta nell'esercizio 3.32, entrambe le equazioni hanno due soluzioni.

(a) $\quad x_1 = -2.320265\ldots, \quad x_2 = -0.821327\ldots$
(b) $\quad x_1 = 0, \quad x_2 = \pi = 3.141592\ldots$]

3.54 $\operatorname{arctg} x = \dfrac{x}{2}$

[Come mostrato nell'esercizio 3.33, oltre a $x = 0$ l'equazione ha altre due soluzioni, rappresentate da $\pm 2.331122\ldots$]

Capitolo 4

INTEGRALI INDEFINITI

4A. Integrali indefiniti immediati

Sia $f(x)$ una funzione definita nell'intervallo I di $\mathbb{R}$. Una funzione $F(x)$, derivabile in I, si dice *primitiva* di $f(x)$ se $F'(x) = f(x)$, per ogni $x \in I$.

Se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, allora, per ogni $c \in \mathbb{R}$, anche $G(x) = F(x) + c$ è una primitiva di $f(x)$ in quanto $G'(x) = F'(x)$.

Viceversa, *se $G(x)$ è una primitiva di $f(x)$, diversa dalla primitiva $F(x)$, allora esiste una costante c tale che $G(x) = F(x) + c$.*

Infatti, se $F(x)$ e $G(x)$ sono due primitive di $f(x)$, posto $H(x) = G(x) - F(x)$, risulta:

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \qquad \forall\, x \in I$$

e dunque $H(x)$ è costante.

Il risultato precedente si esprime anche dicendo che: *la differenza di due primitive di una stessa funzione è costante.*

Da questo risultato segue che, se una funzione $f(x)$ ammette una primitiva $F(x)$, allora l'insieme di tutte le primitive di $f(x)$ è costituito dalle funzioni del tipo

$$F(x) + c$$

con c costante arbitraria.

Tale insieme si chiama *integrale indefinito* di $f(x)$ e si indica con il simbolo

$$\int f(x)\, dx\,.$$

Perciò possiamo affermare che

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

ove $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$ e c è una costante arbitraria.

Ad esempio, risulta

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + c$$

in quanto la funzione $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ è una primitiva della funzione $f(x) = x^2$.

Si dimostra che: *ogni funzione continua in un intervallo ammette sempre primitiva.*

Si verifica subito, inoltre, che

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

e che, per ogni $k \in \mathbb{R}$, è

$$\int kf(x)\,dx = k \int f(x)\,dx\,.$$

Riportiamo di seguito alcuni integrali indefiniti immediati:

(1) $\int x^b\,dx = \dfrac{x^{b+1}}{b+1} + c$ $\qquad (b \neq -1)$

(2) $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \log|x| + c$

(3) $\int e^x\,dx = e^x + c$ $\qquad$ (4) $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\log a} + c$

(5) $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + c$ $\qquad$ (6) $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + c$

(7) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + c$ $\qquad$ (8) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = -\operatorname{cotg} x + c$

(9) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x + c$ $\qquad$ (10) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + c$

(11) $\displaystyle\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + c$ $\qquad$ (12) $\displaystyle\int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + c\,.$

Le formule precedenti possono essere generalizzate, utilizzando la regola di derivazione delle funzioni composte. Si ottengono così le seguenti formule:

(1′) $\displaystyle\int [f(x)]^b f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{b+1}}{b+1} + c$ $\qquad (b \neq -1)$

$$(2') \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \log\, |f(x)| + c$$

$$(3') \qquad \int e^{f(x)} f'(x)\, dx = e^{f(x)} + c$$

$$(4') \qquad \int a^{f(x)} f'(x)\, dx = \frac{a^{f(x)}}{\log\, a} + c$$

$$(5') \qquad \int [\operatorname{sen} f(x)] f'(x)\, dx = -\cos f(x) + c$$

$$(6') \qquad \int [\cos f(x)] f'(x)\, dx = \operatorname{sen} f(x) + c$$

$$(7') \qquad \int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\, dx = \operatorname{tg} f(x) + c$$

$$(8') \qquad \int \frac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2 f(x)}\, dx = -\operatorname{cotg} f(x) + c$$

$$(9') \qquad \int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - f^2(x)}}\, dx = \operatorname{arcsen} f(x) + c$$

$$(10') \qquad \int \frac{f'(x)}{1 + f^2(x)}\, dx = \operatorname{arctg} f(x) + c$$

$$(11') \qquad \int [\operatorname{sen}h\, f(x)] f'(x)\, dx = \cosh f(x) + c$$

$$(12') \qquad \int [\cosh f(x)] f'(x)\, dx = \operatorname{sen}h\, f(x) + c\,.$$

Verifichiamo, ad esempio, la $(1')$. Essendo

$$D\, \frac{[f(x)]^{b+1}}{b+1} = (b+1) \frac{[f(x)]^b}{b+1} f'(x) = [f(x)]^b f'(x)$$

ne segue la $(1')$. Inoltre, ricordando che:

$$D\operatorname{sett}\operatorname{sen}h\, x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ ; \qquad D\operatorname{sett}\cosh x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\ ;$$

$$D\operatorname{sett}\operatorname{tg}h\, x = \frac{1}{1-x^2}$$

si hanno le notevoli relazioni:

$$(13) \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \operatorname{sett}\operatorname{sen}h\, x + c = \log\,(x + \sqrt{1+x^2}) + c$$

$$(14) \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{sett}\cosh x + c = \log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+c$$

$$(15) \qquad \int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \operatorname{sett}\operatorname{tgh} x + c = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}+c\,.$$

4.1 Verificare con qualche esempio che *non* sussiste l'uguaglianza

$$\int f(x)g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx\,.$$

[Basta scegliere $f(x) = g(x) = x$]

4.2 Sia $F(x)$ una funzione continua nell'intervallo I di $\mathbb{R}$ e sia $F'(x) = 0$ per ogni $x \in I - I_0$, con I_0 sottoinsieme finito di I. Dimostrare che F è costante in I.

[Siano a, $b \in I$ con $a < b$ e siano $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ i punti di (a, b) in cui non è verificata la relazione $F'(x) = 0$. Evidentemente in ciascuno degli intervalli $[a, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\ldots$, $[x_n, b]$ la funzione $F(x)$ è costante e perciò si ha

$$F(a) = F(x_1) = \ldots = F(x_n) = F(b).$$

Per l'arbitrarietà di a e b si ha l'asserto]

4.3 Consideriamo la funzione $f(x) = (x + 1)^2/x$ per $x > 0$. Si verifica facilmente che la derivata vale

$$f'(x) = (x^2 - 1)/x^2 = 1 - 1/x^2\,.$$

Altrettanto facilmente si calcola una primitiva $g(x)$ di $f'(x)$, che vale

$$g(x) = x + (1/x) = (x^2 + 1)/x\,.$$

Per quale ragione $g(x)$ è differente dalla funzione $f(x)$?

[La funzione $g(x)$ è effettivamente differente dalla funzione $f(x)$, ma la differenza è una costante:

$$f(x) - g(x) = \frac{(x+1)^2}{x} - \frac{x^2+1}{x} = \frac{2x}{x} = 2 \;\;]$$

4B. Integrazione per semplici trasformazioni dell'integrando

4.4 Calcolare i seguenti integrali:

$$\int \operatorname{cotg} x \, dx \qquad\qquad \int \operatorname{tg} x \, dx$$

$$\int \operatorname{sen} ax \, dx \qquad\qquad \int \cos ax \, dx$$

$$\int \sqrt{x} \, dx \qquad\qquad \int \frac{1}{\sqrt{x+a}} \, dx$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a+x^2}} \, dx \qquad\qquad \int \frac{x}{\sqrt{a-x^2}} \, dx \qquad (a>0)$$

[Utilizzando la (2′) si ha:

$$\int \operatorname{cotg} x \, dx = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \, dx = \int \frac{D\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} \, dx = \log |\operatorname{sen} x| + c$$

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \, dx = -\int \frac{D\cos x}{\cos x} \, dx = -\log |\cos x| + c$$

Utilizzando (5′) e (6′) si ha, rispettivamente:

$$\int \operatorname{sen} ax \, dx = \frac{1}{a} \int \operatorname{sen} ax \cdot D(ax) \, dx = -\frac{1}{a} \cos ax + c$$

$$\int \cos ax \, dx = \frac{1}{a} \int \cos ax \cdot D(ax) \, dx = \frac{1}{a} \operatorname{sen} ax + c\,.$$

Utilizzando (1) e (1′) si ha, rispettivamente:

$$\int \sqrt{x} \, dx = \int x^{1/2} \, dx = \frac{2}{3} x^{3/2} + c = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+a}} \, dx = \int (x+a)^{-1/2} \, dx = 2(x+a)^{1/2} + c = 2\sqrt{x+a} + c\,.$$

Utilizzando la (1′), si ha

$$\int \frac{x}{\sqrt{a+x^2}} \, dx = \frac{1}{2} \int (a+x^2)^{-1/2} 2x \, dx = \frac{1}{2} \int (a+x^2)^{-1/2} D(a+x^2) \, dx =$$

$$= (a+x^2)^{1/2} + c = \sqrt{a+x^2} + c$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a-x^2}} \, dx = -\frac{1}{2} \int (a-x^2)^{-1/2} \cdot (-2x) \, dx = -\frac{1}{2} \int (a-x^2)^{-1/2} D(a-x^2) \, dx =$$

$$= -(a-x^2)^{1/2} + c = -\sqrt{a-x^2} + c\,.\ ]$$

4.5 Calcolare i seguenti integrali:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx\ ;\qquad \int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx\ ;\qquad \int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx\ ;$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx\ ;\qquad \int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx$$

[Utilizzando (9′) e (10′), si ha, rispettivamente:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,D\left(\frac{x}{a}\right)\,dx = \operatorname{arcsen}\frac{x}{a}+c$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \int \frac{1}{a^2[1+\left(\frac{x}{a}\right)^2]}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,D\left(\frac{x}{a}\right)\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+c\,.$$

Utilizzando (13), (14) e (15), si ha, rispettivamente

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = \int \frac{1}{a\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,D\left(\frac{x}{a}\right)\,dx = \operatorname{sett\,sen}h\frac{x}{a}+c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \int \frac{1}{a\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}}\,D\left(\frac{x}{a}\right)\,dx = \operatorname{sett\,cos}h\frac{x}{a}+c$$

$$\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx = \int \frac{1}{a^2[1-\left(\frac{x}{a}\right)^2]}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,D\left(\frac{x}{a}\right)\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{sett\,tg}h\,\frac{x}{a}+c\quad]$$

Calcolare i seguenti integrali e verificare che si ottiene il risultato indicato:

4.6 $$\int \frac{1}{(3+5x)^6}\,dx = \frac{1}{5}\int (3+5x)^{-6}D(5x)\,dx =$$
$$= \frac{1}{5}\,\frac{(3+5x)^{-5}}{-5}+c = -\frac{1}{25(3+5x)^5}+c$$

4.7 $$\int \sqrt{x+2}\,dx = \int (x+2)^{1/2}\,dx = \frac{(x+2)^{3/2}}{3/2}+c$$

4.8 $$\int \frac{1}{\sqrt[4]{2x+1}}\,dx = \frac{1}{2}\int (2x+1)^{-1/4}D(2x)\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{(2x+1)^{3/4}}{3/4}+c =$$
$$= \frac{2}{3}\sqrt[4]{(2x+1)^3}+c$$

4.9 $\displaystyle\int x\sqrt{3-2x^2}\,dx = -\frac{1}{4}\int (3-2x^2)^{1/2}\cdot(-4x)\,dx =$

$$= -\frac{1}{4}\int (3-2x^2)^{1/2} D(3-2x^2)\,dx = -\frac{1}{4}\frac{(3-2x^2)^{3/2}}{3/2} + c = -\frac{1}{6}\sqrt{(3-2x^2)^3} + c$$

4.10 $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{2-3x^2}}\,dx = -\frac{1}{6}\int (2-3x^2)^{-1/2}\cdot(-6x)\,dx =$

$$= -\frac{1}{6}\int (2-3x^2)^{-1/2} D(2-3x^2)\,dx = -\frac{1}{6}\frac{(2-3x^2)^{1/2}}{1/2} + c = -\frac{1}{3}\sqrt{2-3x^2} + c$$

4.11 $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int \frac{1}{x^2\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}\,dx =$ $(x > 0)$

$$= -\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}\cdot D\left(\frac{1}{x}\right)\,dx = -\text{arcsen}\,\frac{1}{x} + c$$

4.12 $\displaystyle\int \text{sen}^5 x\cos x\,dx = \int \text{sen}^5 x\cdot D\text{sen}\,x\,dx = \frac{1}{6}\text{sen}^6 x + c$

4.13 $\displaystyle\int \frac{\text{arcsen}^2 x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \text{arcsen}^2 x\cdot D(\text{arcsen}\,x)\,dx = \frac{1}{3}\text{arcsen}^3 x + c$

4.14 $\displaystyle\int \frac{1}{(\text{arcsen}\,x)\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{D\text{arcsen}\,x}{\text{arcsen}\,x}\,dx = \log\,|\text{arcsen}\,x| + c$

4.15 $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)\text{arctg}\,x}\,dx = \int \frac{D\text{arctg}\,x}{\text{arctg}\,x}\,dx = \log\,|\text{arctg}\,x| + c$

4.16 $\displaystyle\int \frac{1}{x\log\,x}\,dx = \int \frac{D\log\,x}{\log\,x}\,dx = \log\,|\log\,x| + c$

4.17 $\displaystyle\int \frac{\log\,x}{x}\,dx = \int \log\,x\cdot D\log\,x\,dx = \frac{1}{2}\log^2\,x + c$

4.18 $\displaystyle\int \frac{(\log\,x)^n}{x}\,dx = \int (\log\,x)^n\cdot D\log\,x\,dx = \frac{(\log\,x)^{n+1}}{n+1} + c$

4.19 $$\int \frac{1}{x(\log\, x)^n}\, dx = \int (\log\, x)^{-n} D \log\, x\, dx = \frac{(\log\, x)^{1-n}}{1-n} + c \qquad (n \neq 1)$$

4.20 $$\int 3xe^{x^2}\, dx = \frac{3}{2}\int e^{x^2} Dx^2\, dx = \frac{3}{2}e^{x^2} + c$$

4.21 $$\int \frac{1}{\operatorname{sen}(x+a)}\, dx = \int \frac{1}{2\operatorname{sen}\frac{x+a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}\, dx = \int \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x+a}{2}\cdot 2\cos^2\frac{x+a}{2}}\, dx =$$

$$= \int \frac{D\operatorname{tg}\frac{x+a}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x+a}{2}}\, dx = \log\left|\operatorname{tg}\frac{x+a}{2}\right| + c$$

[Un altro modo è proposto nell'esercizio 4.115]

4.22 $$\int \frac{1}{\cos x}\, dx = \int \frac{1}{\operatorname{sen}(x+\frac{\pi}{2})}\, dx = \log\left|\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})\right| + c$$

4.23 Utilizzando le formule di bisezione:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}\,, \qquad \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$$

calcolare i seguenti integrali

$$\int \frac{1}{1+\cos(x+a)}\, dx\,; \qquad \int \frac{1}{1-\cos(x+a)}\, dx$$

[Si ha:

$$\int \frac{1}{1+\cos(x+a)}\, dx = \int \frac{1}{2\cos^2\frac{x+a}{2}}\, dx = \int \frac{D(\frac{x+a}{2})}{\cos^2\frac{x+a}{2}}\, dx = \operatorname{tg}\frac{x+a}{2} + c$$

$$\int \frac{1}{1-\cos(x+a)}\, dx = \int \frac{1}{2\operatorname{sen}^2\frac{x+a}{2}}\, dx = \int \frac{D(\frac{x+a}{2})}{\operatorname{sen}^2\frac{x+a}{2}}\, dx = -\operatorname{cotg}\frac{x+a}{2} + c\ ]$$

4.24 Utilizzando l'esercizio precedente calcolare gli integrali

$$\int \frac{1}{1+\operatorname{sen} x}\, dx\,; \qquad \int \frac{1}{1-\operatorname{sen} x}\, dx$$

[Essendo $\operatorname{sen} x = -\cos(x+\frac{\pi}{2})$, si ha

$$\int \frac{1}{1+\operatorname{sen} x}\,dx = \int \frac{1}{1-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}\,dx = -\operatorname{cotg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+c$$

grazie al secondo degli integrali di 4.23. Inoltre:

$$\int \frac{1}{1-\operatorname{sen} x}\,dx = \int \frac{1}{1+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}\,dx = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+c$$

grazie al primo degli integrali di 4.23]

4.25 Calcolare gli integrali dell'esercizio precedente, moltiplicando il numeratore ed il denominatore dell'integrando per $1 \pm \operatorname{sen} x$.

[Ad esempio, per il primo integrale si ottiene

$$\int \frac{1}{1+\operatorname{sen} x}\,dx = \int \frac{1-\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \int \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx - \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx =$$
$$= \operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x} + c \quad]$$

Verificare che ($n \in \mathbb{N}$):

4.26 $$\int \operatorname{sen}^n x \cos x\,dx = \int \operatorname{sen}^n x \cdot D\operatorname{sen} x\,dx = \frac{\operatorname{sen}^{n+1} x}{n+1} + c$$

4.27 $$\int \cos^n x \operatorname{sen} x\,dx = -\int \cos^n x \cdot D\cos x\,dx = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1} + c$$

4.28 $$\int \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x}\,dx = \int \frac{1}{\operatorname{tg} x \cos^2 x}\,dx = \int \frac{D\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x}\,dx = \log|\operatorname{tg} x| + c$$

4.29 $$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}\,dx = \int \frac{1}{[(\operatorname{sen} 2x)/2]^2}\,dx = 2\int \frac{D(2x)}{\operatorname{sen}^2 2x}\,dx =$$
$$= -2\operatorname{cotg} 2x + c$$

4.30 $$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = -\frac{1}{4}\int \frac{-4x^3}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = -\frac{1}{4}\int (1-x^4)^{-1/2} D(1-x^4)\,dx =$$
$$= -\frac{1}{2}\sqrt{1-x^4} + c$$

4.31 $$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{\sqrt{1-(x^4)^2}}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{D\,x^4}{\sqrt{1-(x^4)^2}}\,dx =$$
$$= \frac{1}{4}\operatorname{arcsen}(x^4) + c$$

4.32 $$\int \frac{x^{n-1}}{\sqrt{1-x^n}}\,dx = -\frac{1}{n}\int \frac{-nx^{n-1}}{\sqrt{1-x^n}}\,dx = -\frac{1}{n}\int (1-x^n)^{-1/2} D(1-x^n)\,dx =$$
$$= -\frac{2}{n}\sqrt{1-x^n} + c$$

4.33 $$\int \frac{x^{n-1}}{\sqrt{1-x^{2n}}}\,dx = \frac{1}{n}\int \frac{nx^{n-1}}{\sqrt{1-(x^n)^2}}\,dx = \frac{1}{n}\int \frac{Dx^n}{\sqrt{1-(x^n)^2}}\,dx =$$
$$= \frac{1}{n}\operatorname{arcsen}(x^n) + c\,.$$

4C. Integrazione per decomposizione in somma

Verificare che:

4.34 $$\int (hx+k)\,dx = h\int x\,dx + k\int 1\,dx = h\frac{x^2}{2} + kx + c$$

4.35 $$\int (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)\,dx = a_0\int dx + a_1\int x\,dx + \ldots + a_n\int x^n\,dx =$$
$$= a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \ldots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + c$$

4.36 $$\int \frac{x}{1+x}\,dx = \int \frac{1+x-1}{1+x}\,dx = \int 1\,dx - \int \frac{1}{1+x}\,dx =$$
$$= x - \log|1+x| + c$$

4.37 $$\int \frac{3x+2}{4x+5}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{12x+8}{4x+5}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{12x+15-7}{4x+5}\,dx =$$
$$= \frac{3}{4}\int 1\,dx - \frac{7}{4}\int \frac{1}{4x+5}\,dx = \frac{3}{4}\int 1\,dx - \frac{7}{16}\int \frac{4}{4x+5}\,dx =$$
$$= \frac{3}{4}x - \frac{7}{16}\log|4x+5| + c$$

4.38 $$\int \frac{hx+k}{mx+n}\,dx = \frac{1}{m}\int \frac{hmx+km-hn+hn}{mx+n}\,dx =$$
$$= \frac{1}{m}\int \frac{h(mx+n)+km-hn}{mx+n}\,dx =$$

$$= \frac{h}{m}\int 1\,dx + \frac{km-hn}{m^2}\int \frac{m}{mx+n}\,dx =$$
$$= \frac{h}{m}x + \frac{km-hn}{m^2}\log|mx+n| + c$$

4.39 $$\int \frac{1}{3x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\frac{3}{2}x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2+1}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\int \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{2}}x + c$$

4.40 $$\int \frac{1}{mx^2+n}\,dx = \frac{1}{n}\int \frac{1}{\frac{m}{n}x^2+1}\,dx = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{n}{m}}\int \frac{\sqrt{\frac{m}{n}}}{\left(\sqrt{\frac{m}{n}}x\right)^2+1}\,dx =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{nm}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{m}{n}}x + c$$

4.41 $$\int \frac{hx+k}{mx^2+n}\,dx = h\int \frac{x}{mx^2+n}\,dx + k\int \frac{1}{mx^2+n}\,dx =$$
$$= \frac{h}{2m}\int \frac{2mx}{mx^2+n}\,dx + k\int \frac{1}{mx^2+n}\,dx =$$
$$= \frac{h}{2m}\log|mx^2+n| + \frac{k}{\sqrt{nm}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{m}{n}}x + c$$

4.42 $$\int \frac{1-x^4+x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1-x^4}{1+x^2}\,dx + \int \frac{x}{1+x^2}\,dx =$$
$$\int (1-x^2)\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx =$$
$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\log(1+x^2) + c$$

4.43 $$\int \frac{1}{x(1+x)}\,dx = \int \frac{1+x-x}{x(1+x)}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{1+x}\,dx =$$

$$= \log |x| - \log |1+x| + c$$

4.44 $$\int \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx = \int \frac{1+x^2-x^2}{x(1+x^2)}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx =$$
$$= \log |x| - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + c = \log \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} + c$$

4.45 Calcolare gli integrali indefiniti

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2+x}{x^2-x}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx$

[(a) Vale la scomposizione

$$\frac{x^2+x}{x^2-x} = \frac{x^2-x+2x}{x^2-x} = 1 + \frac{2x}{x^2-x} = 1 + \frac{2x-1}{x^2-x} + \frac{1}{x^2-x}\,.$$

Dato che il denominatore (dell'ultimo addendo) si scompone nel prodotto $x^2-x = x(x-1)$, si ottiene

$$\frac{1}{x^2-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{Ax-A+B}{x(x-1)} \quad \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A=-1 \end{cases} ,$$

da cui $A=-1$ e $B=1$. In definitiva

$$\int \frac{x^2+x}{x^2-x}\,dx = x + \log |x^2-x| + \log \left|\frac{x-1}{x}\right| + c\,.$$

(b) Indicando con $f(x)$ la funzione da integrare, vale la scomposizione

$$f(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

da cui

$$\int f(x)\,dx = A\log |x-1| + B\log |x-2| + C\log |x-3| + c\ ]$$

4.46 Calcolare l'integrale

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx$$

nell'ipotesi $\Delta = p^2 - 4q < 0$. In tal caso il trinomio a denominatore si può esprimere come somma di quadrati:

$$x^2+px+q = x^2 + 2\,\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} + q - \frac{p^2}{4} = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q-p^2}{4}$$

perciò risulta

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx &= 2\int \frac{2}{(2x+p)^2+(4q-p^2)}\,dx = \\ &= 2\int \frac{2}{(4q-p^2)\left[1+\dfrac{(2x+p)^2}{4q-p^2}\right]}\,dx = \\ &= \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\int \frac{D\left(\dfrac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right)}{1+\left(\dfrac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right)^2}\,dx = \\ &= \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}}+c\end{aligned}$$

Verificare che

4.47 $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx = \operatorname{arctg}(x+1)+c$

4.48 $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x+2}\,dx = \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{7}}+c$

4.49 $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+c$

4.50 Calcolare l'integrale

$$\int \frac{hx+k}{x^2+px+q}\,dx$$

nell'ipotesi $\Delta = p^2-4q<0$. Si ha

$$\begin{aligned}\int \frac{hx+k}{x^2+px+q}\,dx &= h\int \frac{x+\dfrac{k}{h}}{x^2+px+q}\,dx = \frac{h}{2}\int \frac{(2x+p)-p+\dfrac{2k}{h}}{x^2+px+q}\,dx = \\ &= \frac{h}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx + \frac{2k-hp}{2}\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx\,.\end{aligned}$$

Tenendo conto dell'esercizio 4.46, si ha perciò:

$$\int \frac{hx+k}{x^2+px+q}\,dx = \frac{h}{2}\log|x^2+px+q| + \frac{2k-hp}{\sqrt{-\Delta}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}}+c$$

Verificare che:

4.51 $$\int \frac{3x+2}{x^2+x+1}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+4/3}{x^2+x+1}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+1+1/3}{x^2+x+1}\,dx =$$
$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx =$$
$$= \frac{3}{2}\log|x^2+x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c$$

[Si noti che, essendo $x^2+x+1>0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, si ha $\log|x^2+x+1| = \log(x^2+x+1)$]

4.52 $$\int \frac{x+3}{x^2+2x+2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2+4}{x^2+2x+2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx +$$
$$+2\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx = \frac{1}{2}\log(x^2+2x+2) + 2\operatorname{arctg}(x+1) + c$$

4.53 Calcolare l'integrale
$$\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx$$
nell'ipotesi $\Delta = p^2-4q > 0$. In tal caso il trinomio a denominatore può essere espresso come differenza di quadrati:
$$x^2+px+q = x^2+2\,\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} + q - \frac{p^2}{4} = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2-4q}{4}$$
perciò risulta
$$\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx = 2\int \frac{2}{(2x+p)^2-(p^2-4q)}\,dx =$$
$$= -\frac{2}{\sqrt{p^2-4q}}\int \frac{D\dfrac{2x+p}{\sqrt{p^2-4q}}}{1-\left(\dfrac{2x+p}{\sqrt{p^2-4q}}\right)^2}\,dx =$$
$$= -\frac{2}{\sqrt{\Delta}}\,\operatorname{sett\,tg}h\frac{2x+p}{\sqrt{\Delta}} + c$$

[Un altro metodo è esposto nel paragrafo 4E]

4.54 Calcolare l'integrale

$$\int \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\,dx = 2\int \frac{2}{(2x+5)^2-1}\,dx =$$
$$= -2\int \frac{D(2x+5)}{1-(2x+5)^2}\,dx = -2\,\mathrm{sett\,tg}\,h(2x+5)+c$$

4.55 Calcolare l'integrale

$$\int \frac{hx+k}{x^2+px+q}\,dx$$

nell'ipotesi $\Delta = p^2-4q>0$. Si ha

$$\int \frac{hx+k}{x^2+px+q}\,dx = h\int \frac{x+\frac{k}{h}}{x^2+px+q}\,dx = \frac{h}{2}\int \frac{(2x+p)-p+\frac{2k}{h}}{x^2+px+q}\,dx =$$
$$= \frac{h}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx + \frac{2k-hp}{2}\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx$$

Tenendo conto dell'esercizio 4.53 si ha perciò

$$(2) \qquad \int \frac{hx+k}{x^2+px+q}\,dx = \frac{h}{2}\log|x^2+px+q| + \frac{hp-2k}{\sqrt{\Delta}}\,\mathrm{sett\,tg}\,h\frac{2x+p}{\sqrt{\Delta}}+c$$

4.56 Calcolare l'integrale

$$\int \frac{3x+1}{x^2-4x+3}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{(2x-4)+\frac{2}{3}+4}{x^2-4x+3}\,dx =$$
$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+3}\,dx + 7\int \frac{1}{x^2-4x+3}\,dx.$$

D'altra parte essendo $\Delta = 4 > 0$, si ha

$$\int \frac{1}{x^2-4x+3}\,dx = \int \frac{1}{(x-2)^2-1}\,dx = -\mathrm{sett\,tg}\,h(x-2)+c$$

perciò

$$\int \frac{3x+1}{x^2-4x+3}\,dx = \frac{3}{2}\log|x^2-4x+3| - 7\mathrm{sett\,tg}\,h(x-2)+c$$

4.57 Calcolare l'integrale

$$\int \frac{hx+k}{x^2+px+q}\,dx$$

nell'ipotesi $\Delta = p^2 - 4q = 0$. Si ha

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

perciò

$$\int \frac{hx+k}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{hx+k}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}\,dx = h\int \frac{x}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}\,dx + k\int \frac{1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}\,dx =$$

(3)
$$= \frac{h}{2}\int \frac{2\left(x+\frac{p}{2}\right) - p}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}\,dx + k\int \frac{1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}\,dx =$$

$$= \frac{h}{2}\int \frac{2\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}\,dx + (k - \frac{hp}{2})\int \frac{1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}\,dx =$$

$$= \frac{h}{2}\log\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(k - \frac{hp}{2}\right)\frac{-1}{x+\frac{p}{2}} + c$$

4.58 Calcolare l'integrale

$$\int \frac{2x+1}{9x^2-6x+1}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{2x+1}{x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{2x+1}{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{2\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{5}{3}}{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{D\left(x-\frac{1}{3}\right)^2}{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2}\,dx + \frac{5}{27}\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{9}\log\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{5}{9}\frac{1}{3x-1} + c$$

4.59 Calcolare gli integrali ($a \neq 0$)

$$\int \operatorname{sen}^2 ax\,dx\ ; \qquad \int \cos^2 ax\,dx$$

[Essendo, per le formule di bisezione:

$$\mathrm{sen}^2 ax\,dx = \frac{1-\cos 2ax}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4a}\cos 2ax D(2ax)$$

$$\cos^2 ax\,dx = \frac{1+\cos 2ax}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4a}\cos 2ax D(2ax)$$

si ha

$$\int \mathrm{sen}^2 ax\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\mathrm{sen} ax}{4a} + c$$

$$\int \cos^2 ax\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\mathrm{sen} 2ax}{4a} + c]$$

4.60 Calcolare l'integrale ($a \neq 0$)

$$\int \mathrm{sen}\, ax \cos ax\,dx$$

[Essendo, per la formula di duplicazione del seno:

$$\mathrm{sen}\, ax \cos ax = \frac{1}{2}\mathrm{sen}\, 2ax = \frac{1}{4a}\mathrm{sen}\, 2ax \cdot D(2ax),$$

si ha

$$\int \mathrm{sen}\, ax \cos ax\,dx = -\frac{\cos 2ax}{4a} + c]$$

4.61 Calcolare gli integrali ($a \neq b$ e $a \neq -b$)

$$\int \mathrm{sen}\, ax \cos bx\,dx\ ; \qquad \int \cos ax \cos bx\,dx\ ; \qquad \int \mathrm{sen}\, ax\, \mathrm{sen}\, bx\,dx\,.$$

[Tenendo presente le formule di prostaferesi (vedi parte prima, paragrafo 2B) si ha:

$$2\,\mathrm{sen}\, ax \cos bx = \mathrm{sen}\,(a+b)x + \mathrm{sen}\,(a-b)x$$

$$2\cos ax \cos bx = \cos\,(a+b)x + \cos\,(a-b)x$$

$$-2\,\mathrm{sen}\, ax \cos bx = \cos\,(a+b)x - \cos\,(a-b)x$$

e perciò

$$\int \mathrm{sen}\, ax \cos bx\,dx = \frac{1}{2}\int \mathrm{sen}\,(a+b)x\,dx + \frac{1}{2}\int \mathrm{sen}\,(a-b)x\,dx = -\frac{\cos\,(a+b)x}{2(a+b)} - \frac{\cos\,(a-b)x}{2(a-b)} + c$$

$$\int \cos ax \cos bx\,dx = \frac{1}{2}\int \cos\,(a+b)x\,dx + \frac{1}{2}\int \cos\,(a-b)x\,dx = \frac{\mathrm{sen}\,(a+b)x}{2(a+b)} + \frac{\mathrm{sen}\,(a-b)x}{2(a-b)} + c$$

$$\int \mathrm{sen}\, ax \cos bx\,dx = -\frac{1}{2}\int \cos\,(a+b)x\,dx + \frac{1}{2}\int \cos\,(a-b)x\,dx = -\frac{\mathrm{sen}\,(a+b)x}{2(a+b)} + \frac{\mathrm{sen}\,(a-b)x}{2(a-b)} + c]$$

Verificare che:

4.62 $$\int \operatorname{sen} 3x \cos 2x \, dx = \int \frac{\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} x}{2} \, dx = -\frac{1}{10}\cos 5x - \frac{1}{2}\cos x + c$$

4.63 $$\int \cos 3x \cos 2x \, dx = \int \frac{\cos 5x + \cos x}{2} \, dx = \frac{1}{10} \operatorname{sen} 5x + \frac{1}{2} \operatorname{sen} x + c$$

4.64 $$\int \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 2x \, dx = \int \frac{\cos x - \cos 5x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \operatorname{sen} x - \frac{1}{10} \operatorname{sen} 5x + c$$

4.65 $$\begin{aligned} \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} \, dx &= \int \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} \, dx = \\ &= \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx + \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \, dx = \\ &= \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + c \end{aligned}$$

4.66 $$\int \operatorname{sen}^3 x \, dx = \int \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x \, dx = \int (1 - \cos^2 x) \operatorname{sen} x \, dx =$$
$$= \int \operatorname{sen} x \, dx + \int \cos^2 x(-\operatorname{sen} x) \, dx = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c$$

4.67 $$\begin{aligned} \int \operatorname{cotg}^2 x \, dx &= \int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} \, dx = \int \frac{(1 - \operatorname{sen}^2 x)}{\operatorname{sen}^2 x} \, dx = \\ &= \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \, dx - \int 1 \, dx = -(\operatorname{cotg} x + x) + c \end{aligned}$$

4D. Integrazione per parti

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni continue con le loro derivate prime nell'intervallo I allora vale la *formula di integrazione per parti*

$$\int f(x)g'(x) \, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \, dx \,. \tag{1}$$

Nella formula (1) il fattore $f(x)$ del prodotto $f(x)g'(x)$ si chiama *fattore finito*, mentre il fattore $g'(x)$ si chiama *fattore differenziale*.

4.68 Utilizzando il metodo di integrazione per parti, calcolare i seguenti integrali

(a) $\displaystyle\int x \operatorname{sen} x dx$ (b) $\displaystyle\int x \cos x dx$

(c) $\int x\, e^x\, dx$ (d) $\int x \log |x|\, dx$

[(a) Assumendo x come fattore finito e sen x come fattore differenziale, si ha

$$\int x \operatorname{sen} x\, dx = \int x\, D(-\cos x)\, dx = -x\cos x - \int 1(-\cos x)\, dx =$$

$$= -x\cos x + \int \cos x\, dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x + c$$

(b) Assumendo x come fattore finito e cos x come fattore differenziale, si ha

$$\int x\cos x\, dx = \int x D\operatorname{sen} x\, dx = x\operatorname{sen} x - \int 1\cdot \operatorname{sen} x\, dx = x\operatorname{sen} x + \cos x + c$$

(c) Assumendo x come fattore finito ed e^x come fattore differenziale, si ha

$$\int x\, e^x\, dx = x\, e^x - \int e^x\, dx = e^x(x-1) + c$$

(d) Assumendo x come fattore differenziale, si ha

$$\int x\log|x|\, dx = \int \log|x|\cdot D\left(\frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{x^2\log|x|}{2} - \frac{1}{2}\int x\, dx = \frac{x^2}{2}\left(\log|x| - \frac{1}{2}\right) + c]$$

4.69 Calcolare i seguenti integrali

(a) $\int \operatorname{arcsen} x\, dx$ (b) $\int \arccos x\, dx$

(c) $\int \operatorname{arctg} x\, dx$ (d) $\int \log|x|\, dx$

[(a) Assumendo arcsen x come fattore finito ed 1 come fattore differenziale, si ha:

$$\int \operatorname{arcsen} x\, dx = \int \operatorname{arcsen} x\cdot Dx\, dx = x\operatorname{arcsen} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx =$$

$$= x\operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + c$$

(b) Assumendo arccos x come fattore finito ed 1 come fattore differenziale, si ha:

$$\int \arccos x\, dx = x\arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + c$$

(c) Assumendo arctg x come fattore finito ed 1 come fattore differenziale, si ha

$$\int \operatorname{arctg} x\, dx = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx = x\operatorname{arctg} x - \log\sqrt{1+x^2} + c$$

(d) Assumendo log $|x|$ come fattore finito, si ha

$$\int \log|x|\, dx = x\log|x| - \int dx = x(\log|x| - 1) + c\,]$$

4.70 Calcolare i seguenti integrali

(a) $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen} x dx$ (b) $\displaystyle\int x^2 \cos x dx$

(c) $\displaystyle\int x^2 e^x\, dx$ (d) $\displaystyle\int x^2 \log\, x\, dx$

[(a) Assumendo x^2 come fattore finito, si ha

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx = \int x^2 D(-\cos x)\, dx = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\, dx$$

Integrando di nuovo per parti, scegliendo x come fattore finito, si ha

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx = -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x - 2\int \operatorname{sen} x\, dx = (2 - x^2) \cos x + 2x \operatorname{sen} x + c$$

(b) Si tratta di un modo simile ad (a) e si trova:

$$\int x^2 \cos x\, dx = (x^2 - 2) \operatorname{sen} x + 2x \cos x + c$$

(c) Scegliendo x^2 come fattore finito, si ha

$$\int x^2 e^x\, dx = x^2 e^x - 2\int x e^x\, dx.$$

Scegliendo, nell'integrale a secondo membro, x come fattore finito, si ha

$$\int x^2 e^x\, dx = x^2 e^x - 2[x e^x - \int e^x\, dx] = (x^2 - 2x + 2)e^x + c$$

(d) Si ha

$$\int x^2 \log\, x\, dx = \int \log\, x D\frac{x^3}{3}\, dx = \frac{x^3 \log\, x}{3} - \int \frac{x^2}{3}\, dx = \frac{x^3 \log\, x}{3} - \frac{x^3}{9} + c\,]$$

Verificare che

4.71 $$\int \log^2\, x\, dx = \int \log^2\, x \cdot Dx\, dx = x \log^2\, x - 2\int \log\, x\, dx =$$
$$= x \log^2\, x - 2x \log\, x + 2x + c$$

4.72 $$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \int \operatorname{sen} x \cdot D(-\cos x)\, dx =$$
$$= -\operatorname{sen} x \cos x + \int \cos^2 x\, dx = -\operatorname{sen} x \cos x + \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)\, dx =$$
$$= -\operatorname{sen} x \cos x + \int dx - \int \operatorname{sen}^2 x\, dx$$

da cui

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = (x - \operatorname{sen} x \cos x)/2 + c$$

4.73 $$\int x \operatorname{sen}^2 x\,dx = \int x \operatorname{sen} x \cdot D(-\cos x)\,dx =$$
$$= -x \operatorname{sen} x \cos x + \int (\operatorname{sen} x + x\cos x) \cos x\,dx =$$
$$= -x \operatorname{sen} x \cos x + \int \operatorname{sen} x \cos x\,dx + \int x(1 - \operatorname{sen}^2 x)\,dx$$

da cui
$$\int x \operatorname{sen}^2 x\,dx = -\frac{1}{2} x \operatorname{sen} x \cos x + \frac{1}{4}(x^2 + \operatorname{sen}^2 x) + c$$

4.74 $$\int x \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2} x \operatorname{sen} x \cos x + \frac{1}{4}(x^2 + \cos^2 x) + c$$

4.75 $$\int x\,e^{2x}\,dx = \frac{1}{2} \int x D e^{2x}\,dx = \frac{1}{2} x\,e^{2x} - \frac{1}{4}\,e^{2x} + c$$

4.76 $$\int \frac{x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \int x\,D(-\operatorname{cotg} x)\,dx = -x \operatorname{cotg} x + \log\,|\operatorname{sen} x| + c$$

4.77 $$\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx = \int x\,D\operatorname{tg} x\,dx = x \operatorname{tg} x + \log\,|\cos x| + c$$

4.78 $$\int x \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int x\,\frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx - \int x\,dx$$

da cui, per l'esercizio precedente:
$$\int x \operatorname{tg}^2 x\,dx = x \operatorname{tg} x + \log\,|\cos x| - x^2/2 + c$$

4.79 Posto per $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$
$$I_n = \int x^n e^{\alpha x}\,dx\ ,$$
verificare che, per $n > 1$, si ha:
$$I_n = \frac{1}{\alpha}\,x^n e^{\alpha x} - \frac{n}{\alpha}\,I_{n-1}\ .$$

4.80 Posto per $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$

$$I_n = \int x^n \operatorname{sen} \alpha x \, dx \qquad\qquad J_n = x^n \cos \alpha x \, dx \ ,$$

verificare, mediante l'integrazione per parti, che per $n > 1$, si ha:

$$I_n = -\frac{1}{\alpha}\, x^n \cos \alpha x + \frac{n}{\alpha}\, J_{n-1} \qquad\qquad J_n = \frac{1}{\alpha}\, x^n \operatorname{sen} \alpha x - \frac{n}{\alpha} I_{n-1} \ .$$

Le formule scritte nei due esercizi precedenti, dette *formule di riduzione*, applicate ripetutamente, consentono il calcolo di I_n o J_n non appena siano noti I_1 e J_1. Un'ulteriore formula di riduzione viene proposta nell'esercizio seguente.

4.81 Posto per $n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\, dx$$

verificare che per ogni $n > 1$, si ha

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)} \left[(2n-3) I_{n-1} + \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} \right]$$

[Si ha

$$I_{n-1} = \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} (Dx)\, dx = \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} - \int x D \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\, dx =$$

$$= \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + 2(n-1) \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\, dx = \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + 2(n-1) \int \frac{1+x^2-1}{(1+x^2)^n}\, dx =$$

$$= \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + 2(n-1) \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}\, dx - 2(n-1) \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

da cui segue facilmente l'asserto]

Verificare che

4.82 $$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + c$$

4.83 $$\int \frac{1}{(1+x^2)^3}\, dx = \frac{(5+3x^2)x}{8(1+x^2)^2} + \frac{3}{8} \operatorname{arctg} x + c$$

4.84 Calcolare l'integrale

$$\int x^3 \operatorname{sen} x \, dx = \int x^3 \, D(-\cos x)\, dx = -x^3 \cos x + 3 \int x^2 \cos x \, dx =$$

$$= -x^3 \cos x + 3 \int x^2 \, D\operatorname{sen} x \, dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \operatorname{sen} x - 6 \int x \operatorname{sen} x \, dx$$

ricordando che $\int x \operatorname{sen} x \, dx = -x \cos x + \operatorname{sen} x + c$ (esercizio 4.68), si ha

$$\int x^3 \operatorname{sen} x \, dx = (6x - x^3) \cos x + 3(x^2 - 2) \operatorname{sen} x + c'.$$

4.85 Calcolare l'integrale

$$\int \frac{\log(1+x)}{x^2} \, dx$$

[Assumendo $\log(1+x)$ come fattore finito, si trova

$$\int \frac{\log(1+x)}{x^2} \, dx = -\frac{1}{x} \log(1+x) + \log \frac{|x|}{x+1} + c]$$

4.86 Calcolare l'integrale

$$\int \log x(\operatorname{sen} x + x \cos x) \, dx$$

[Si può decomporre in somma e poi integrare per parti o, più semplicemente, si può procedere osservando che la derivata della funzione $x \operatorname{sen} x$ è $(\operatorname{sen} x + x \cos x)$. In tal modo si trova

$$\int \log x \, (\operatorname{sen} x + x \cos x) \, dx = x \operatorname{sen} x \log x + \cos x + c]$$

4.87 Calcolare l'integrale

$$\int \log x \, (xe^x + e^x) \, dx$$

[Vale la stessa osservazione dell'esercizio precedente. Poichè la derivata di xe^x vale $xe^x + e^x$, integrando per parti l'espressione iniziale, si trova

$$\int \log x(xe^x + e^x) \, dx = xe^x \log x - e^x + c]$$

4.88 Calcolare l'integrale

$$\int \log(1+x^3)^{x^2} \, dx$$

$[\frac{x^3+1}{3} \log(1+x^3) - \frac{x^3}{3} + c]$

4.89 Calcolare gli integrali

(a) $\int x \operatorname{sen} x \cos^2 x \, dx$ (b) $\int x \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} \, dx$

[(a) $-\dfrac{1}{3}x\cos^3 x+\dfrac{1}{3}\operatorname{sen} x-\dfrac{1}{9}\operatorname{sen}^3 x+c$

(b) $(x\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg} x+x)/2+c$]

4.90 Calcolare l'integrale

$$\int \cos x \log^2(\operatorname{sen} x)\,dx$$

[$\operatorname{sen} x\log^2(\operatorname{sen} x)-2\operatorname{sen} x\log(\operatorname{sen} x)+2\operatorname{sen} x+c$]

4.91 Calcolare gli integrali

$$\text{(a)}\ \int \frac{\log|x|}{(x+1)^2}\,dx \qquad\qquad \text{(b)}\ \int \frac{\log|x-2|}{x^2}\,dx$$

[(a) $-\dfrac{\log|x|}{x+1}+\displaystyle\int\frac{1}{x(x+1)}\,dx=-\frac{\log|x|}{x+1}+\log\left|\frac{x}{x+1}\right|+c$;

(b) $-\dfrac{\log|x-2|}{x}+\dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{x-2}{x}\right|+c$]

4.92 Calcolare l'integrale

$$\int \frac{x}{\cos^2 5x}\,dx$$

[Essendo $\displaystyle\int\frac{1}{\cos^2 5x}\,dx=\frac{1}{5}\operatorname{tg}5x+c$, si ha:

$$\int\frac{x}{\cos^2 5x}\,dx=\frac{1}{5}x\operatorname{tg}5x-\frac{1}{5}\int\frac{\operatorname{sen}5x}{\cos 5x}\,dx=\frac{1}{5}x\operatorname{tg}5x+\frac{1}{25}\log|\cos 5x|+c\,]$$

4.93 Calcolare gli integrali

$$\text{(a)}\ \int x\log\left(1+\frac{2}{x}\right)dx \qquad\qquad \text{(b)}\ \int x^{-2}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)dx$$

[(a) $\dfrac{x^2}{2}\log\left(1+\dfrac{2}{x}\right)+x-2\log|2+x|+c$;

(b) $-\dfrac{1}{x}\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{x}-\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)+c$]

4.94 Calcolare gli integrali

$$\text{(a)}\ \int x^3\operatorname{sen}(x^2)\,dx \qquad\qquad \text{(b)}\ \int x^3e^{x^2}\,dx$$

[(a) $\operatorname{sen}(x^2) - x^2\cos(x^2)]/2 + c$; (b) $(x^2-1)e^{x^2}/2 + c$]

4.95 Calcolare gli integrali

$$\text{(a)} \int \frac{\log(\log x)}{x}\,dx \qquad\qquad \text{(b)} \int \sqrt{1-x^2}\,dx$$

[(a) $= \log x[\log(\log x) - 1] + c$; (b) $= \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x + x\sqrt{1-x^2} + c$]

4.96 Calcolare l'integrale

$$\int x\operatorname{arctg}^2 x\,dx$$

[Scegliendo x come fattore differenziale, si ha

$$\int x\operatorname{arctg}^2 x\,dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}^2 x - \int \frac{x^2\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}^2 x - \int \frac{x^2\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}^2 x - \int \operatorname{arctg} x\,dx + \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$$

Essendo (esercizio 4.69)

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg} x - \log\sqrt{1+x^2} + c$$

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x + c'$$

si ha

$$\int x\operatorname{arctg}^2 x\,dx = \frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg}^2 x - x\operatorname{arctg} x + \log\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x + c'']$$

4E. Integrazione delle funzioni razionali

Si chiama *funzione razionale* una funzione che sia il rapporto tra due polinomi $P(x)$, $Q(x)$, cioè funzione del tipo

$$(1) \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0}\,; \qquad m,\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Se è $m \geq n$, cioè se il grado del numeratore è maggiore o uguale al grado del denominatore, si può eseguire la divisione di $P(x)$ per $Q(x)$. Detti $S(x)$ e $R(x)$ rispettivamente il quoziente ed il resto di tale divisione si ha

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

con grado di $R(x) <$ grado di $Q(x)$. Volendo calcolare l'integrale indefinito di $P(x)/Q(x)$, si ha perciò la relazione

$$(2) \qquad \int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = \int S(x)\, dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\, dx\,.$$

Poichè $S(x)$ è un polinomio, il suo integrale indefinito è immediato. Dalla (2) segue allora che l'integrale indefinito di $P(x)/Q(x)$ viene ricondotto a quello di $R(x)/Q(x)$, che è una funzione razionale, in cui il grado del polinomio a numeratore è minore del grado del polinomio a denominatore.

Passiamo dunque a studiare l'integrazione indefinita delle funzioni razionali del tipo $R(x)/Q(x)$ con grado di $R(x) <$ grado di $Q(x)$.

In primo luogo consideriamo il caso più semplice che $Q(x)$ sia un polinomio di secondo grado (se $Q(x)$ è di 1° grado, l'integrale è immediato) supponendo, com'è lecito, che il coefficiente di x^2 sia 1 e cioè che sia

$$R(x) = hx + k, \qquad\qquad Q(x) = x^2 + px + q\ .$$

In tal caso l'integrale da calcolare è

$$(2) \qquad \int \frac{hx + k}{x^2 + px + q}\, dx$$

che è stato già trattato nel paragrafo 4C, mediante semplici trasformazioni dell'integrando.

Facciamo vedere che, se il discriminante $\Delta = p^2 - 4q$ è positivo o nullo, possiamo risolvere l' integrale (2) anche per altra via.

Precisamente, se $\Delta > 0$, dette α_1 e α_2 le radici reali e distinte del polinomio $Q(x)$, si ha la scomposizione

$$x^2 + px + q = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$$

ed è possibile determinare due costanti A_1 ed A_2 tali che risulti

$$(3) \qquad \frac{hx + k}{x^2 + px + q} = \frac{A_1}{(x - \alpha_1)} + \frac{A_2}{(x - \alpha_2)}$$

per ogni $x \in \mathbb{R} - \{\alpha_1, \alpha_2\}$. Allo scopo di determinare A_1 e A_2, scriviamo la (3) sotto la forma

$$\frac{hx + k}{x^2 + px + q} = \frac{(A_1 + A_2)x - (A_1\alpha_2 + A_2\alpha_1)}{x^2 + px + q}$$

da cui segue

$$hx + k = (A_1 + A_2)x - (A_1\alpha_2 + A_2\alpha_1)$$

e, per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = h \\ A_1\alpha_2 + A_2\alpha_1 = -k \end{cases}$$

ossia

$$A_1 = \frac{h\alpha_1 + k}{\alpha_1 - \alpha_2}\,, \qquad A_2 = \frac{h\alpha_2 + k}{\alpha_2 - \alpha_1}\,.$$

Una volta determinate A_1 e A_2, dalla (3) segue

$$(4) \qquad \int \frac{hx + k}{x^2 + px + q}\,dx = A_1 \int \frac{1}{x - \alpha_1}\,dx + A_2 \int \frac{1}{x - \alpha_2}\,dx = \\ = A_1 \log|x - \alpha_1| + A_2 \log|x - \alpha_2| + c$$

Si osservi che la (4) è conforme alla (2) del paragrafo 4C, ricordando che $\operatorname{sett\,tg} hx = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$.

Se poi è $\Delta = p^2 - 4q = 0$ si dimostra, in modo analogo al precedente, che sussiste l'uguaglianza

$$(5) \qquad \frac{hx + k}{x^2 + px + q} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{(x - \alpha)^2}\,, \qquad \forall x \neq \alpha$$

ove α è la radice doppia di $Q(x)$. Essendo $\alpha = -b/2$, si ricavano i valori $A = h$, $B = h\alpha + k$.

Dalla (5) segue facilmente

$$\int \frac{hx + k}{x^2 + px + q}\,dx = h\log|x - \alpha| - \frac{h\alpha + k}{x - \alpha} + c$$

e tale uguaglianza è conforme alla (3) del paragrafo 4C.

4.97 Calcolare gli integrali

(a) $\displaystyle\int \frac{x + 3}{x^2 - 6x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{x + 3}{x^2 - 6x + 5}\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{3x - 1}{x^2 - x - 6}\,dx$ (d) $\displaystyle\int \frac{x^4 - 10x^3 + 20x^2 + 11x - 20}{x^2 - 10x + 21}\,dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{x}{(x - 3)^2}\,dx$ (f) $\displaystyle\int \frac{x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 5x - 4}{x^2 - 4x + 4}\,dx$

[(a) Determiniamo le costanti A_1 e A_2 tali che

$$\frac{x+3}{x^2-6x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-6}$$

cioè tali che, per ogni x:

$$x + 3 = A_1(x-6) + A_2 x = (A_1 + A_2)x - 6A_1.$$

Si ha il sistema $A_1 + A_2 = 1$, $A_1 = -1/2$, da cui $A_2 = 3/2$. Perciò

$$\int \frac{x+3}{x^2-6x}\, dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\, dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-6}\, dx = -\frac{1}{2}\log|x| + \frac{3}{2}\log|x-6| + c.$$

(b) $= -\log|x-1| + 4\log|x-5| + c$

(c) $= \frac{7}{5}\log|x+2| + \frac{8}{5}\log|x-3| + c$

(d) Eseguiamo la divisione del numeratore per il denominatore secondo l'usuale schema

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 10x^3 + 20x^2 + 11x - 20 & x^2 - 10x + 21 \\ \underline{x^4 - 10x^3 + 21x^2 } & \overline{x^2 - 1} \\ -x^2 + 11x - 20 & \\ \underline{-x^2 + 11x - 21} & \\ x + 1 & \end{array}$$

per cui

$$\int \frac{x^4 - 10x^3 + 20x^2 + 11x - 20}{x^2 - 10x + 21}\, dx = \int (x^2 - 1)\, dx + \int \frac{x+1}{x^2 - 10x + 21}\, dx$$

Eseguendo i calcoli, si trova $\dfrac{x^3}{3} - x - \log|x-3| + 2\log|x-7| + c$

(e) $= \log|x-3| + 3/(3-x) + c.$

(f) $= \dfrac{x^3}{3} - x + \log|x-2| - 2/(x-2) + c$]

Supponiamo ora che $Q(x)$ sia un polinomio di grado n arbitrario e, come è sempre lecito, che il coefficiente di x^n sia 1.

Cominciamo a considerare il seguente

1° *caso: le radici di $Q(x)$ sono tutte semplici.*

Siano $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ le radici reali e siano $\beta_1 \pm i\gamma_1, \beta_2 \pm i\gamma_2, \ldots, \beta_s \pm i\gamma_s$ le radidici complesse $(r + 2s = n)$ di $Q(x)$. Pertanto si ha la scomposizione

$$Q(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_r)(x^2 + p_1 x + q_1)\ldots(x^2 + p_s x + q_s),$$

ove si è posto:

$$x^2 + p_j x + q_j = (x - \beta_j - i\gamma_j)(x - \beta_j + i\gamma_j) = x^2 - 2\beta_j x + (\beta_j^2 + \gamma_j^2),$$

cioè:

$$p_j = -2\beta_j, \qquad q_j = \beta_j^2 + \gamma_j^2, \qquad\qquad \text{per } 1 \le j \le s.$$

Si può dimostrare allora che per $R(x)/Q(x)$ si ha la decomposizione in somma:

$$\text{(6)} \qquad \frac{R(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{r} \frac{A_i}{x - \alpha_i} + \sum_{j=1}^{s} \frac{h_j x + k_j}{x^2 + p_j x + q_j}$$

con A_i, h_j, k_j costanti opportune, per cui l'integrazione di $R(x)/Q(x)$ è ricondotta al calcolo di integrali di funzioni razionali del tipo considerato in precedenza.

2° *caso: $Q(x)$ ha radici reali multiple, ma radici complesse semplici.*

Siano α_1, α_2, ...,α_r le radici reali di molteplicità rispettivamente pari a m_1, m_2,..., m_r e siano $\beta_1 \pm i\gamma_1$, $\beta_2 \pm i\gamma_2$, ..., $\beta_s \pm i\gamma_s$ le radici complesse semplici, in modo che risulta

$$m_1 + m_2 + \ldots m_r + 2s = n\,.$$

In questo caso si dimostra che per $R(x)/Q(x)$ vale la decomposizione in somma:

$$\text{(7)} \qquad \frac{R(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{A_{i,1}}{x - \alpha_i} + \frac{A_{i,2}}{(x - \alpha_i)^2} + \ldots + \frac{A_{i,m_i}}{(x - \alpha_i)^{m_i}} \right) + \\ + \sum_{j=1}^{s} \frac{h_j x + k_j}{x^2 + p_j x + q_j}$$

con $A_{i,k}$, h_j, k_j costanti opportune, per cui l'integrazione di $R(x)/Q(x)$ è ricondotta al calcolo di integrali di funzioni razionali del tipo considerato in precedenza e a quello di integrali del tipo

$$\int \frac{A}{(x - \alpha)^m}\, dx = \frac{-A}{(m - 1)} \cdot \frac{1}{(x - \alpha)^{m-1}} + c\,.$$

Osserviamo che le costanti che intervengono nelle formule (6), (7) si determinano in modo analogo a come visto al principio del paragrafo, riducendo allo stesso denominatore il secondo membro, identificando i numeratori dei due membri ed applicando il principio di identità dei polinomi.

Si tratterà poi di risolvere un sistema lineare di n equazioni in n incognite.

Il 3° *caso*, cioè quello in cui $Q(x)$ può ammettere anche radici complesse multiple, verrà da noi trattato nel paragrafo 4F, dopo aver studiato l'integrazione per sostituzione.

Come esempio, calcoliamo l'integrale

$$\int \frac{x^3 - 2x^2 - x + 3}{x^2 - 3x + 2}\, dx$$

Eseguiamo la divisione di $(x^3 - 2x^2 - x + 3)$ per $x^2 - 3x + 2$, secondo l'usuale schema:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 - x + 3 & \underline{x^2 - 3x + 2} \\ \underline{x^3 - 3x^2 + 2x} & \quad x + 1 \\ x^2 - 3x + 3 & \\ \underline{x^2 - 3x + 2} & \\ 1 & \end{array}$$

Il quoziente $S(x)$ ed il resto $R(x)$ valgono: $S(x) = x + 1$, $R(x) = 1$. Pertanto si ha la scomposizione

$$\frac{x^3 - 2x^2 - x + 3}{x^2 - 3x + 2} = x + 1 + \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$$

Allora

$$\int \frac{x^3 - 2x^2 - x + 3}{x^2 - 3x + 2}\, dx = \int (x + 1)\, dx + \int \frac{1}{x^2 - 3x + 2}\, dx\,. \tag{8}$$

Essendo $Q(x) = x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$, determiniamo le costanti A_1 e A_2 tali che

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x-2}\,. \tag{9}$$

Essendo per $x \in \mathbb{R} - \{1, 2\}$

$$\frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x-2} = \frac{(A_1 + A_2)x - (2A_1 + A_2)}{(x-1)(x-2)}$$

dev'essere, per la (9)

$$1 = (A_1 + A_2)x - (2A_1 + A_2) \qquad\qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

ed allora, per il principio di identità dei polinomi, risulta

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 0 \\ -(2A_1 + A_2) = 1. \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema, si trova $A_1 = -1$, $A_2 = 1$ e quindi la (9) si riscrive come

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = -\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}.$$

Pertanto si ha

$$\int \frac{1}{x^2 - 3x + 2}\, dx = -\int \frac{1}{x-1}\, dx + \int \frac{1}{x-2}\, dx =$$

$$= -\log|x-1| + \log|x-2| + c = \log\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + c\,.$$

Dalla (8) si ricava perciò

$$\int \frac{x^3-2x^2-x+3}{x^2-3x+2}\,dx = \frac{x^2}{2} + x + \log\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + c\,.$$

4.98 Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2-3x-4}\,dx$

[Vale la decomposizione

$$\frac{x^2}{x^2-3x-4} = 1 + \frac{3x+4}{x^2-3x-4} = 1 - \frac{1}{5}\frac{1}{x+1} + \frac{16}{5}\frac{1}{x-4}\,,$$

per cui si ottiene il risultato $x - \frac{1}{5}\log|x+1| + \frac{16}{5}\log|x-4| + c$]

4.99 Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+2}\,dx$

[Vale la decomposizione: $\displaystyle\frac{x+2}{x^2+2} = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+2} + \frac{2}{x^2+2}\,,$

per cui

$$\int \frac{x+2}{x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+2}\,dx + \sqrt{2}\int \frac{D\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\log(x^2+2) + \sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + c]$$

4.100 Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{3x+2}{x(x^2+1)}\,dx$

[Poichè il denominatore ha le radici semplici $x=0$ e $x=\pm i$, si ha la scomposizione

$$\frac{3x+2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{hx+k}{x^2+1}$$

da cui si ricava $k=3$, $h=-2$, $A=2$ e perciò

$$\int \frac{3x+2}{x(x^2+1)}\,dx = \int \frac{2}{x}\,dx - \int \frac{2x-3}{x^2+1}\,dx = \int \frac{2}{x}\,dx - \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + 3\int \frac{1}{x^2+1}\,dx =$$

$$= 2\log|x| - \log(x^2+1) + 3\operatorname{arctg} x + c]$$

4.101 Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x^2-7x+12}{(x-2)^3}\,dx$

[Poichè il denominatore ha l'unica radice reale $x = 2$, con molteplicità uguale a 3, allora esistono tre costanti A_1, A_2, A_3 tali che

$$\frac{x^2 - 7x + 12}{(x-2)^3} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_3}{(x-2)^3}$$

da cui si ricava facilmente $A_1 = 1$, $A_2 = -3$, $A_3 = -8$. Perciò

$$\int \frac{x^2 - 7x + 12}{(x-2)^3}\,dx = \int \frac{1}{x-2}\,dx + -3\int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx - 8\int \frac{1}{(x-2)^3}\,dx =$$

$$= \log|x-2| + \frac{3}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2} + c\,]$$

4.102 Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{x^4 - 3^4}\,dx$

[Si ha:

$$\int \frac{1}{x^4 - 3^4}\,dx = \int \left(\frac{1}{4\cdot 27}\frac{1}{x-3} - \frac{1}{4\cdot 27}\frac{1}{x+3} - \frac{1}{18}\frac{1}{x^2+3^2} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{4\cdot 27}\log\left|\frac{x-3}{x+3}\right| - \frac{1}{2\cdot 27}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{3} + c\,]$$

4.103 Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)^3 x^2}\,dx$

[Poichè il denominatore ha le radici reali $x = 0$ (con molteplicità due) e $x = 1$ (con molteplicità tre), si devono determinare le costanti A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, A_{23} in modo che

$$\frac{1}{(x-1)^3 x^2} = \frac{A_{11}}{x} + \frac{A_{12}}{x^2} + \frac{A_{21}}{x-1} + \frac{A_{22}}{(x-1)^2} + \frac{A_{23}}{(x-1)^3}$$

Si ottiene il sistema

$$\begin{cases} A_{11} + A_{21} = 0 \\ -3A_{11} + A_{12} - 2A_{21} + A_{22} = 0 \\ 3A_{11} - 3A_{12} + A_{21} - A_{22} + A_{23} = 0 \\ -A_{11} + 3A_{12} = 0 \\ -A_{12} = 1 \end{cases}$$

da cui si ricava: $A_{11} = -3$, $A_{12} = -1$, $A_{21} = 3$, $A_{22} = -2$, $A_{23} = 1$. Pertanto

$$\int \frac{1}{(x-1)^3x^2}\,dx = -3\int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x^2}\,dx + 3\int \frac{1}{x-1}\,dx - 2\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{1}{(x-1)^3}\,dx =$$

$$= -3\log|x| + \frac{1}{x} + 3\log|x-1| + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2} + c\,]$$

4F. Integrazione per sostituzione

Sia f una funzione continua e sia g una funzione derivabile con derivata continua nell'intervallo I di $\mathbb{R}$; allora si ha:

$$(1) \qquad \left[\int f(x)\,dx\right]_{x=g(t)} = \int f(g(t))g'(t)\,dt\,.$$

La (1) prende il nome di *formula di integrazione per sostituzione* e va intesa nel senso che, se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, cioè se risulta $\int f(x)\,dx = F(x)+c$, allora è

$$(2) \qquad \left[\int f(x)\,dx\right]_{x=g(t)} = F(g(t)) + c = \int f(g(t))g'(t)\,dt\,.$$

La dimostrazione della (2) discende dalla regola di derivazione delle funzioni composte, in quanto si ha

$$\frac{d}{dt}F(g(t)) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$$

e perciò:
$F(x)$ primitiva di $f(x) \Rightarrow F(g(t))$ primitiva di $f(g(t))g'(t)$.

Nella pratica, quando per calcolare l'integrale

$$(3) \qquad \int f(x)\,dx$$

si effettua la sostituzione $x = g(t)$, cioè si vuol scrivere la (1), conviene calcolare il differenziale $dx = g'(t)\,dt$ e poi sostituire nell'integrale (3) alla x ed al dx le relative espressioni.

4.104 Calcoliamo l'integrale

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \qquad\qquad (a > 0)\,.$$

[La sostituzione $x = g(t) = a$ sen t, ci dà $dx = D(a\,\mathrm{sen}\,t)\,dt = a\cos t\,dt$ e perciò

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int \sqrt{a^2 - a^2\,\mathrm{sen}^2\,t}\cdot(a\cos t)\,dt = a^2\int \cos^2 t\,dt = \frac{a^2}{2}(t + \mathrm{sen}\,t\cos t) + c$$

con $x = a\,\mathrm{sen}\,t$. Volendo riscrivere l'ultimo membro in funzione di x, ricaviamo t dalla relazione $x = a\,\mathrm{sen}\,t$, cioè $t = \mathrm{arcsen}\,(x/a)$ e sostituiamolo, ottenendo infine

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{a^2}{2} \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + c\,]$$

4.105 Calcoliamo l'integrale $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$.

[Eseguendo la sostituzione $x = t^2$, si ha $t = \sqrt{x}$, $dx = 2t\, dt$ e perciò

$$\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx \overset{[x=t^2]}{=} \int \frac{\operatorname{sen} t}{t} 2t\, dt = 2 \int \operatorname{sen} t\, dt = -2\cos t + c$$

da cui, ponendo $t = \sqrt{x}$ nell'ultimo membro, si ha

$$\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx = -2\cos\sqrt{x} + c\,]$$

4.106 Calcoliamo l'integrale $\displaystyle\int x^5 e^{x^2}\, dx$.

[Eseguendo la sostituzione $x^2 = t$, cioè $x = \sqrt{t}$, si ha $dx = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}\, dt$ e perciò

$$\int x^5 e^{x^2}\, dx \overset{[x=\sqrt{t}]}{=} \int t^2 \sqrt{t} e^t \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}}\, dt = \frac{1}{2} \int t^2 e^t\, dt$$

Integrando per parti, si ha subito

$$\int t^2 e^t\, dt = e^t(t^2 - 2t + 2) + c$$

da cui, ponendo $t = x^2$:

$$\int x^5 e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2} e^{x^2}(x^4 - 2x^2 + 2) + c\,]$$

4.107 Calcoliamo l'integrale $\displaystyle\int \sqrt{3 - x^2}\, dx$.

[Con la sostituzione $x = \sqrt{3}\operatorname{sen} t$ si trova

$$\int \sqrt{3 - x^2}\, dx = \frac{3}{2}\left(\operatorname{arcsen} \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{x}{3}\sqrt{3 - x^2}\right) + c\,]$$

4.108 Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}}\, dx$.

[Eseguendo la sostituzione $x = t^2$, si ha $t = \sqrt{x}$, $dx = 2t\, dt$ e perciò

$$\int \frac{\sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}}\, dx \overset{[x=t^2]}{=} \int \frac{t}{2 + t} 2t\, dt = 2 \int \frac{t^2}{2 + t}\, dt = 2 \int \frac{t^2 - 4}{2 + t}\, dt + 8 \int \frac{1}{2 + t}\, dt =$$

$$= 2\int (t-2)\,dt + 8\int \frac{1}{2+t}\,dt = t^2 - 4t + 8\log|2+t| + c$$

da cui, ponendo $t = \sqrt{x}$ nell'ultimo membro, si ha

$$\int \frac{\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\,dx = x - 4\sqrt{x} + 8\log(2+\sqrt{x}) + c\,]$$

4.109 Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$.

[Con la sostituzione $x = t^2$ ed il metodo di integrazione per parti, si ha

$$\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx \overset{[x=t^2]}{=} \int 2t\operatorname{arctg} t\,dt = t^2\operatorname{arctg} t - \int \frac{t^2}{1+t^2}\,dt =$$

$$= t^2\operatorname{arctg} t - t + \operatorname{arctg} t + c = x\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg}\sqrt{x} + c\,]$$

4.110 Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \sqrt{2^x - 1}\,dx$.

[Eseguendo la sostituzione $2^x - 1 = t^2$, cioè $x = \log_2(1+t^2)$ si ha $dx = \dfrac{2t}{(t^2+1)\log 2}\,dt$ e perciò

$$\int \sqrt{2^x-1}\,dx \overset{[2^x-1=t^2]}{=} \int t\cdot\frac{2t}{(t^2+1)\log 2}\,dt = \frac{2}{\log 2}\int \frac{1+t^2-1}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \frac{2}{\log 2}\int dt - \frac{2}{\log 2}\int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{2}{\log 2}t - \frac{2}{\log 2}\operatorname{arctg} t + c$$

da cui , ponendo $t = \sqrt{2^x-1}$ si ha

$$\int \sqrt{2^x-1}\,dx = \frac{2}{\log 2}[\sqrt{2^x-1} - \operatorname{arctg}\sqrt{2^x-1}] + c\,]$$

4.111 Calcolare gli integrali

(a) $\displaystyle\int \cos(\log x)\,dx$ (b) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\log x)\,dx$

[(a) Prima con la sostituzione $x = e^t$ e poi integrando per parti, si ha

$$\int \cos(\log x)\,dx \overset{[x=e^t]}{=} \int e^t\cos t\,dt = \frac{1}{2}e^t(\operatorname{sen} t + \cos t) = \frac{1}{2}x[\operatorname{sen}(\log x) + \cos(\log x)] + c\,.$$

(b) $= \dfrac{1}{2}x\,[\operatorname{sen}(\log x) - \cos(\log x)] + c\,]$

4.112 Calcoliamo l'integrale

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{1}{1-e^{2x}}\,dx$

[(a) Si può effettuare la sostituzione $e^x = t$, oppure, più rapidamente:

$$\int \frac{1}{1+e^x}\,dx = \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}\,dx = \int dx - \int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = x - \log(1+e^x) + c\,.$$

(b) $= x - \dfrac{1}{2}\log|1-e^{2x}| + c$, con lo stesso metodo]

4.113 Calcolare gli integrali

$$\text{(a)} \int \frac{dx}{e^{2x}-3e^x+2}\,dx \qquad\qquad \text{(b)} \int \frac{e^x}{3e^{2x}-e^x+2}\,dx$$

[Si esegua la sostituzione $e^x = t$. Si ha

(a) $= \dfrac{1}{2}x - \log|e^x-1| + \dfrac{1}{2}\log|e^x-2| + c$

(b) $= \dfrac{2}{\sqrt{23}}\operatorname{arctg}\dfrac{6e^x-1}{\sqrt{23}} + c$]

4.114 Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{(4x^2+1)^{11}-1}{x}\,dx$.

[Ponendo $4x^2+1 = t$ si ha $x = \dfrac{1}{2}\sqrt{t-1}$, $dx = \dfrac{1}{4}\dfrac{dt}{\sqrt{t-1}}$, perciò si è ricondotti a calcolare l'integrale

$$\int \frac{t^{11}-1}{(1/2)\sqrt{t-1}} \cdot \frac{1}{4\sqrt{t-1}}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{t^{11}-1}{t-1}\,dt\,.$$

Eseguendo la divisione di $t^{11}-1$ per $t-1$, oppure ricordando la formula che esprime la somma di una progressione geometrica, si ha

$$\frac{t^{11}-1}{t-1} = t^{10}+t^9+t^8+\ldots+t+1 = \sum_{k=0}^{10} t^k\,.$$

Pertanto

$$\int \frac{(4x^2+1)^{11}-1}{x}\,dx = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{10}\frac{(4x^2+1)^{k+1}}{k+1} + c\,]$$

4.115 Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen} x}\,dx$.

[Questo integrale è già stato da noi calcolato nell'esercizio 4.21. Risolviamolo ora per sostituzione. Si ha

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen} x}\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos^2 x}\,dx\,.$$

Con la sostituzione $\cos x = y$ si ha $dy = -\operatorname{sen} x\,dx$, da cui, ricordando i metodi d'integrazione delle funzioni razionali, si ottiene:

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen} x}\, dx = -\int \frac{1}{1-y^2}\, dy = -\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1+y} + \frac{1}{1-y}\right) dy =$$
$$= -\frac{1}{2}[\log|1+y| - \log|1-y|] + c = \frac{1}{2}[\log(1-\cos x) - \log(1+\cos x)] + c\,]$$

4.116 Calcoliamo l'integrale $\displaystyle\int \frac{3^x}{\operatorname{sen} 3^x}\, dx$.

[Con la sostituzione $3^x = t$ ci si riconduce all'integrale dell'esercizio precedente. Pertanto si ha
$$\int \frac{3^x}{\operatorname{sen} 3^x}\, dx = \frac{1}{\log 3}\int \frac{dt}{\operatorname{sen} t} = \frac{1}{\log 3}\ \log\left|\operatorname{tg}\frac{3^x}{2}\right| + c\,]$$

Siano $R(x)$ e $Q(x)$ due polinomi con grado di $R(x) < n =$ grado di $Q(x)$ e supponiamo che

$$\alpha_1,\, \alpha_2, \ldots, \alpha_r\ ; \qquad\qquad \beta_1 \pm i\gamma_1,\, \beta_2 \pm i\gamma_2, \ldots, \beta_s \pm i\gamma_s$$

siano rispettivamente le radici reali e quelle complesse di $Q(x)$, con molteplicità rispettive:

$$m_1,\, m_2, \ldots, m_r\ ; \qquad\qquad n_1,\, n_2, \ldots, n_s$$

in modo che

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_r + 2(n_1 + n_2 + \ldots + n_s) = n\ .$$

In questo caso si dimostra che per $R(x)/Q(x)$ vale la decomposizione in somma

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{r}\left(\frac{A_{i,1}}{x-\alpha_1} + \frac{A_{i,2}}{(x-\alpha_2)^2} + \ldots + \frac{A_{i,m_i}}{(x-\alpha_i)^{m_i}}\right) +$$
$$+\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{h_{j,1}x + k_{j,1}}{x^2+p_jx+q_j} + \frac{h_{j,2}x + k_{j,2}}{(x^2+p_jx+q_j)^2} + \ldots + \frac{h_{j,m_j}x + k_{j,m_j}}{(x^2+p_jx+q_j)^{m_j}}\right)$$

con $A_{i,k}$, $h_{i,k}$, $k_{j,k}$ costanti opportune, per cui l'integrale di $R(x)/Q(x)$ è ricondotto al calcolo di integrali di tipo già considerato e al calcolo di integrali del tipo

$$\int \frac{hx+k}{[x^2+px+q]^m}\, dx\ .$$

Ricordando dal paragrafo 4E che nel nostro caso è

$$x^2 + px + q = (x-\beta)^2 + \gamma^2$$

l'integrale precedente diviene

$$\int \frac{hx+k}{[(x-\beta)^2+\gamma^2]^m}\,dx = \frac{-h}{(2m-2)[(x-\beta)^2+\gamma^2]^{m-1}}+$$
$$+(h\beta+k)\int \frac{1}{[(x-\beta)^2+\gamma^2]^m}\,dx$$

e l'ultimo integrale, eseguendo la sostituzione $x=\beta+\gamma t$, diviene

$$\int \frac{1}{[(x-\beta)^2+\gamma^2]^m}\,dx = \frac{1}{\gamma^{2m-1}}\int \frac{dt}{(1+t^2)^m}$$

per cui basterà applicare le formule di riduzione l'esercizio 4.81.

4.117 Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(x^2+1)^2}\,dx$.

[Determiniamo le costanti A_1, A_2, h_1, k_1,h_2, k_2 tali che

$$\frac{1}{x^2(x^2+1)^2} = \frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{h_1x+k_1}{x^2+1}+\frac{h_2x+k_2}{(x^2+1)^2}$$

Si ha il sistema

$$\begin{cases} A_1+h_1=0\\ A_2+k_1=0\\ 2A_1+h_1+h_2=0\\ 2A_2+k_1+k_2=0\\ A_1=0\\ A_2=1 \end{cases} \qquad \text{da cui :} \qquad \begin{cases} A_1=h_1=h_2=0\\ A_2=1\\ k_1=k_2=-1 \end{cases}$$

pertanto

$$\int \frac{1}{x^2(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{1}{x^2}\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx - \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx\ .$$

Allora si ha (si vedano gli esercizi 4.81, 4.82):

$$\int \frac{1}{x^2(x^2+1)^2}\,dx = -\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + c =$$
$$-\frac{1}{x} - \frac{x}{2(1+x^2)} - \frac{3}{2}\operatorname{arctg} x + c\ ]$$

4G. Integrazione di alcune funzioni irrazionali

In questo paragrafo vogliamo far vedere che l'integrazione di alcune funzioni non razionali può essere ricondotta, mediante opportune sostituzioni, al calcolo di integrali di funzioni razionali.

Per dare un'idea del tipo di funzioni che vogliamo trattare, consideriamo gli integrali

$$(1)\qquad \int \frac{1}{x\sqrt{x+4}}\,dx \qquad\qquad (2)\qquad \int x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$$

$$(3)\qquad \int \frac{dx}{x+\sqrt{1+x^2}}\,dx\ .$$

Le funzioni integrande sono rispettivamente del tipo

$$f(x,\sqrt{ax+b}) \qquad f\left(x,\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) \qquad f(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$$

con $f = f(x, y)$ funzione *razionale* delle variabili x, y, cioè rapporto di due polinomi nelle variabili x, y. Precisamente:

nel caso (1) è $\qquad f(x,y) = \dfrac{1}{xy}; \qquad a = 1,\ b = 4$

nel caso (2) è $\qquad f(x,y) = xy; \qquad a = -1,\ b = c = d = 1$

nel caso (3) è $\qquad f(x,y) = \dfrac{1}{x+y}; \qquad a = b = 1,\ c = 0.$

Per risolvere l'integrale (1), eseguiamo la sostituzione $t = \sqrt{x+4}$ da cui $x = t^2 - 4$, $dx = 2t\,dt$. Pertanto si ha

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x\sqrt{x+4}}\,dx &= \int \frac{1}{(t^2-4)t}\,2t\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{4}{t^2-4}\,dt = \\
&= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2}\right) dt = \\
&= \frac{1}{2}\log|t-2| - \frac{1}{2}\log|t+2| + c = \\
&= \frac{1}{2}\log|\sqrt{x+4}-2| - \frac{1}{2}\log(\sqrt{x+4}+2) + c\,.
\end{aligned}$$

Vedremo in seguito che, per risolvere l'integrale (2), conviene eseguire la sostituzione

$$t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

e, per risolvere l'integrale (3), basta porre

$$x + \sqrt{x^2+1} = t\ .$$

Passiamo ora a considerare i seguenti casi

$$1°)\qquad \int f(x, \sqrt[n]{ax+b})\,dx \qquad\qquad (f(x,y) \quad \text{razionale})$$

Si pone

$$(4) \qquad \sqrt[n]{ax+b} = t$$

cioè: $ax + b = t^n, \quad x = \dfrac{t^n - b}{a}, \quad dx = \dfrac{n}{a}\, t^{n-1}\, dt$

e l'integrale diviene

$$\int f\left(\frac{t^n - b}{a}, t\right) \frac{n}{a}\, t^{n-1}\, dt$$

con integrando razionale.

$$2°) \qquad \int f(x, \sqrt[n_1]{ax+b}, \sqrt[n_2]{ax+b}, \ldots, \sqrt[n_k]{ax+b})\, dx$$

($f(x, y_1, \ldots, y_k)$ razionale). Si pone

$$(5) \qquad \sqrt[n]{ax+b} = t$$

con n uguale al m.c.m. di $n_1, n_2, \ldots, n_k$; inoltre, posto $m_i = \dfrac{n}{n_i}$ si ha

$$ax + b = t^n\ , \quad x = \frac{t^n - b}{a}\ , \quad dx = \frac{n}{a}\, t^{n-1}\, dt\ , \quad \sqrt[n_i]{ax+b} = t^{m_i}\ .$$

Pertanto l'integrale diviene

$$\int f\left(\frac{t^n - b}{a}, t^{m_1}, \ldots, t^{m_k}\right) \frac{n}{a}\, t^{n-1}\, dt$$

con integrando razionale.

$$3°) \qquad \int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx \qquad\qquad (ad - bc \neq 0)$$

($f(x, y)$ razionale). Si pone

$$(6) \qquad \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$$

da cui: $\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^n, \quad x = \dfrac{dt^n - b}{a - ct^n}, \quad dx = \dfrac{n(ad-bc)}{(a-ct^n)^2}\, t^{n-1}\, dt$

e l'integrale diviene

$$\int f\left(\frac{dt^n - b}{a - ct^n}, t\right) \frac{n(ad-bc)}{(a-ct^n)^2}\, t^{n-1}\, dt$$

con integrando razionale.

$$4°) \qquad \int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx \qquad\qquad (a>0)$$

($f(x,y)$ razionale). Si pone

$$(7) \qquad \sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}(t-x)$$

da cui

$$x = \frac{at^2-c}{b+2at}, \quad dx = \frac{2a(at^2+bt+c)}{(b+2at)^2}\, dt, \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\frac{at^2+bt+c}{b+2at}$$

e l'integrale diviene

$$\int f\left(\frac{at^2-c}{b+2at}, \sqrt{a}\,\frac{at^2+bt+c}{b+2at}\right)\frac{2a(at^2+bt+c)}{(b+2at)^2}\, dt$$

con integrando razionale.

$$5°) \qquad \int f(x, \sqrt{-ax^2+bx+c})\, dx \qquad\qquad (a>0,\, b^2+4ac>0)$$

($f(x,y)$ razionale). Si pone

$$(8) \qquad \sqrt{a\,\frac{\rho_2-x}{x-\rho_1}} = t$$

ove $\rho_1 < \rho_2$ sono le radici reali e distinte dell'equazione $-ax^2+bx+c=0$.

Quando si calcolano gli integrali $1°), \ldots, 5°)$ mediante le rispettive sostituzioni indicate, si dice che essi sono stati *razionalizzati*, e le sostituzioni si dicono *razionalizzanti*.

4.118 Calcolare l'integrale $\displaystyle\int x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx$.

[Eseguiamo la sostituzione razionalizzante

$$t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

cioè $x = (1-t^2)/(1+t^2)$, per cui $dx = -\dfrac{4t\, dt}{(1+t^2)^2}$.

Pertanto si ha:

$$\int x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx = \int \frac{1-t^2}{1+t^2}\, t\, \frac{-4t}{(1+t^2)^2}\, dt = 4\int \frac{t^4-t^2}{(1+t^2)^3}\, dt\, .$$

Essendo

$$t^4-t^2 = (t^4+2t^2+1)-3t^2-1 = (t^2+1)^2-3(t^2+1)+2$$

si ha

$$(9) \qquad \int x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx = 4\int \frac{1}{1+t^2}\,dt - 12\int \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt + 8\int \frac{1}{(1+t^2)^3}\,dt.$$

Integrando per parti, si ha

$$\int \frac{1}{(1+t^2)^3}\,dt = \frac{t}{4(1+t^2)^2} + \frac{3}{4}\int \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt$$

$$\int \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt = \frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

per cui la (9) diviene, per $t = \sqrt{1-x}/\sqrt{1+x}$:

$$\int x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx = \int \frac{1}{1+t^2}\,dt - \frac{3t}{1+t^2} + \frac{2t}{(1+t^2)^2} = \operatorname{arctg} t - \frac{3t}{1+t^2} + \frac{2t}{(1+t^2)^2} + c\ ]$$

4.119 Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{dx}{x+\sqrt{1+x^2}}$.

[Eseguiamo la sostituzione

$$x + \sqrt{x^2+1} = t$$

cioè $x = (t^2-1)/2t$, per cui $dx = \dfrac{2t^2+1}{4t^2}\,dt$. Pertanto

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{2t^2+1}{4t^3}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,dt + \frac{1}{4}\int \frac{1}{t^3}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\log|t| - \frac{1}{8t^2} + c = \frac{1}{2}\log|x+\sqrt{x^2+1}| - \frac{1}{8(x+\sqrt{x^2+1})} + c\ ]$$

4.120 Calcolare l'integrale $I = \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+px+q}}\,dx$.

[Eseguiamo la sostituzione razionalizzante

$$(10) \qquad \sqrt{x^2+px+q} = t - x$$

ossia $x = (t^2-q)/(p+2t)$, da cui

$$dx = \frac{2(t^2+pt+q)}{(p+2t)^2}\,dt, \qquad \sqrt{x^2+px+q} = \frac{t^2+pt+q}{p+2t},$$

si ha:

$$I = \int \frac{p+2t}{t^2+pt+q}\cdot\frac{2(t^2+pt+q)}{(p+2t)^2}\,dt = 2\int \frac{1}{p+2t}\,dt = \log|p+2t| + c\,.$$

Sostituendo, nell'ultimo membro, l'espressione di t data dalla (10), si ottiene

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+px+q}}\,dx = \log|p+2x+2\sqrt{x^2+px+q}| + c\ ]$$

4.121 Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-2x+3}}\,dx$.

[Si ha $-x^2-2x+3=(x+3)(1-x)$, per cui

$$(11) \qquad \int \frac{1}{\sqrt{-x^2-2x+3}} = \frac{1}{\sqrt{(x+3)(1-x)}} = \frac{1}{(x+3)\sqrt{\dfrac{1-x}{x+3}}} .$$

La sostituzione razionalizzante è

$$(12) \qquad \sqrt{\frac{1-x}{x+3}} = t$$

per cui $x=(1-3t^2)/(1+t^2)$ e inoltre

$$dx = \frac{-8t}{(1+t^2)^2}\ ; \qquad x+3=\frac{4}{1+t^2}\ .$$

Allora, per le precedenti uguaglianze, si ha

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-2x+3}}\,dx = \int \frac{1}{(x+3)\sqrt{\dfrac{1-x}{x+3}}}\,dx = \int \frac{1}{\dfrac{4}{1+t^2}\cdot t}\cdot\frac{-8t}{(1+t^2)^2}\,dt =$$

$$= -2\int \frac{1}{1+t^2}\,dt = -2\operatorname{arctg} t + c$$

ovvero, ponendo in luogo di t l'espressione data dalla (12):

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-2x+3}}\,dx = -2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{x+3}} + c\,]$$

4H. Integrazione di alcune funzioni trascendenti

In questo paragrafo vogliamo far vedere che anche gli integrali di certe funzioni trigonometriche, esponenziali o logaritmiche possono essere ricondotti, mediante opportune sostituzioni, ad integrali di funzioni razionali.

Per dare un'idea del tipo di funzioni che vogliamo trattare, consideriamo gli integrali

$$(1) \quad \int \frac{1}{1+e^x}\,dx \qquad\qquad (2) \quad \int \frac{1}{1+\operatorname{tg} x}\,dx$$

$$(3) \quad \int \frac{1}{1+\operatorname{sen} x}\,dx$$

i cui integrandi sono funzioni razionali di e^x, di $\operatorname{tg} x$ e di $\operatorname{sen} x$ rispettivamente. Per risolvere l'integrale (1), eseguiamo la sostituzione $e^x=t$, da cui $x=\log t$ e $dx=dt/t$. Perciò: $[e^x=t]$

$$\int \frac{1}{1+e^x}\,dx = \int \frac{1}{1+t}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt - \int \frac{1}{1+t}\,dt =$$
$$= \log|t| - \log|t+1| + c = x - \log(e^x+1) + c\,.$$

Per risolvere l'integrale (2), poniamo tg $x = t$, da cui $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = dt/(1+t^2)$. Perciò: [tg $x = t$]

$$\int \frac{1}{1+\operatorname{tg} x}\,dx = \int \frac{1}{1+t}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,dt = \int\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+t} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1-t}{1+t^2}\right)dt =$$
$$= \frac{1}{2}\int\frac{1}{1+t}\,dt + \frac{1}{2}\int\frac{1}{1+t^2}\,dt - \frac{1}{4}\int\frac{2t}{1+t^2}\,dt =$$
$$= \frac{1}{2}\log|1+t| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t - \frac{1}{4}\log(1+t^2) + c =$$
$$= \frac{1}{2}\log|1+\operatorname{tg} x| + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\log(1+\operatorname{tg}^2 x) + c\,.$$

Per risolvere l'integrale (3), poniamo tg $(x/2) = t$, da cui $x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = 2\,dt/(1+t^2)$. Ricordando inoltre che, con la posizione fatta, è sen $x = 2t/(1+t^2)$, (vedi la (17) del cap. 2, parte prima), si ha:

$$\int \frac{1}{1+\operatorname{sen} x}\,dx = \frac{1}{1+\dfrac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int\frac{2}{(1+t)^2}\,dt =$$
$$= -\frac{2}{1+t} + c = -\frac{2}{1+\operatorname{tg}(x/2)} + c\,.$$

Ricordiamo che l'integrale (3) può essere risolto per altra via, come indicato negli esercizi 4.24 e 4.25. Passiamo ora a considerare i seguenti casi

$$1^\circ)\qquad \int f(a^x)\,dx$$

($f(x)$ razionale). Si pone

$$a^x = t$$

cioè $x = \log_a t$, $\qquad dx = \dfrac{dt}{t\log a}$

e l'integrale diviene

$$\frac{1}{\log a}\int\frac{f(t)}{t}\,dt$$

con integrando razionale.

2°) $$\int f(\operatorname{tg} x)\,dx$$

($f(x)$ razionale). Si pone

$$\operatorname{tg} x = t$$

cioè $x = \operatorname{arctg} t$, $\quad dx = dt/(1+t^2)$ e l'integrale diviene

$$\int \frac{f(t)}{1+t^2}\,dt$$

con integrando razionale.

3°) $$\int f(\log_a x)\frac{1}{x}\,dx$$

($f(x)$ razionale). Si pone

$$\log_a x = t$$

cioè $x = a^t$, $\quad dx = a^t \log a\,dt$ e l'integrale diviene

$$\log a \int f(t)\,dt$$

con integrando razionale.

4°) $$\int f(x^\alpha)x^{\alpha-1}\,dx \qquad (\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z})$$

($f(x)$ razionale). Si pone

$$x^\alpha = t$$

cioè $x = t^{1/\alpha}$, $\quad dx = (1/\alpha)t^{1/\alpha-1}\,dt$, $\quad x^{\alpha-1} = t^{1-1/\alpha}$
e l'integrale diviene

$$\frac{1}{\alpha}\int f(t)\,dt$$

con integrando razionale.

5°) $$\int f(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx$$

($f(x,y)$ razionale). Si pone

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$$

cioè $x = 2\operatorname{arctg} t \quad dx = 2\,dt/(1+t^2)$ e si ricorda che

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}\,, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,,$$

per cui l'integrale diviene

$$2\int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{1}{1+t^2}\,dt$$

con integrando razionale.

$$6^\circ) \qquad \int f(\operatorname{sen}^2 x, \cos^2 x, \operatorname{tg} x)\,dx$$

($f(x,y,z)$ razionale). Si pone

$$\operatorname{tg} x = t$$

cioè $x = \operatorname{arctg} t \quad dx = dt/(1+t^2)$ e si ricorda che

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}\,, \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$$

4.122 Calcolare gli integrali

$$(a)\int \frac{1}{x + x\log^2 x}\,dx \qquad (b)\int \frac{\log 3x}{x\log 9x}\,dx$$

[(a) Eseguendo la sostituzione $\log x = t$ si trova $\operatorname{arctg}\log x + c$. Allo stesso risultato si perviene utilizzando la (10′) del paragrafo 4A.
(b) Eseguendo la sostituzione $\log x = t$ si trova $\log x - \log 9 \cdot \log|\log x + \log 9| + c$]

4.123 Calcolare gli integrali

$$(a)\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\,dx \qquad (b)\int \frac{1}{\cos x - 1}\,dx$$

[(a) Eseguendo la sostituzione $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ si è ricondotti al calcolo dell'integrale $\int \frac{2t}{t^4+1}\,dt$. Volendo procedere più speditamente, basta rifarsi alla (10′) del paragrafo 4A. Si trova subito il risultato $-\operatorname{arctg}\cos x + c$.

(b)
$$\int \frac{dx}{\cos x - 1} = \int \frac{\cos x + 1}{\cos^2 x - 1}\,dx = -\int \frac{\cos x + 1}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx =$$
$$= -\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx - \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx =$$
$$= \frac{1}{\operatorname{sen} x} + \operatorname{cotg} x + c = \frac{1+\cos x}{\operatorname{sen} x} + c\,.$$

Come indicato nell'esercizio 4.23, si potrebbe anche eseguire la sostituzione $1 - \cos x = 2\operatorname{sen}^2(x/2)$, da cui

$$\int \frac{dx}{\cos x - 1} = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2(x/2)} = \operatorname{cotg}(x/2) + c\ ]$$

4.124 Calcolare gli integrali

$$\int \frac{x\sqrt[5]{x}}{1+x\sqrt[5]{x^3}} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}\, dx$$

[Eseguendo la sostituzione $\sqrt[5]{x} = t$ si è ricondotti a calcolare l'integrale $\int \frac{t^3}{1+t^4}\, dt$. Il risultato è $\frac{5}{8} \log|1+x\sqrt[5]{x^3}| + c$]

4.125 Calcolare gli integrali

$$\text{(a)} \int \frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\, dx \qquad\qquad \text{(b)} \int \frac{1}{1+\operatorname{sen} x - \cos x}\, dx$$

[(a) Eseguendo la sostituzione $\operatorname{tg} x = t$, da cui $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = dt/(1+t^2)$; $\operatorname{sen}^2 x = t^2/(1+t^2)$ si trova il risultato $\frac{1}{4} \log(1+2\operatorname{tg}^2 x) + c$.
(b) Eseguendo la sostituzione $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, si trova il risultato $\log[\operatorname{tg} \frac{x}{2}/(1+\operatorname{tg} \frac{x}{2})] + c$]

4.126 Calcolare l'integrale, detto binomio:

$$\int x^m (ax^p + b)^q\, dx \qquad\qquad m\,,p\,,q\, \in \mathbb{Q}\,,$$

in una delle seguenti ipotesi

(a) q è intero; (b) $\dfrac{m+1}{p}$ è intero; (c) $\dfrac{m+1}{p} + q$ è intero.

[(a) L'integrale rientra in quelli considerati al punto 2°) del paragrafo 4G.
(b) Effettuando la sostituzione $x^p = t$, l'integrale diviene

$$\frac{1}{p} \int t^{\frac{m+1}{p}+q-1} \left(\frac{at+b}{t}\right)^q dt$$

e questo integrale rientra in quelli considerati al punto 2°) del paragrafo 4G .
(c) L'integrale ottenuto in (b) rientra in quelli considerati al punto 3°) del paragrafo 4G]

4I. Esercizi di riepilogo

4.127 $\displaystyle\int x^2 \cos(x^3)\, dx = \frac{1}{3} \operatorname{sen}(x^3) + c$

4.128 $\displaystyle\int \frac{1}{(x+3)\log(x+3)}\, dx = \log|\log(x+3)| + c$

4.129 $\displaystyle\int \frac{2x+5}{x^2+5x+7}\,dx = \log(x^2+5x+7)+c$

4.130 $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{7+\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \log(7+\operatorname{sen}^2 x)+c$

4.131 $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{\log\,x}}\,dx = 2\sqrt{\log\,x}+c$

4.132 $\displaystyle\int \frac{1}{x}\operatorname{sen}(\log\,x)\,dx = -\cos(\log\,x)+c$

4.133 $\displaystyle\int e^x\cos(e^x)\,dx = \operatorname{sen}(e^x)+c$

4.134 $\displaystyle\int x(x^2+10)^6\,dx = \frac{1}{14}(x^2+10)^7+c$

4.135 $\displaystyle\int \left(\frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos x}\right)^2\,dx = \frac{1}{7}\operatorname{tg}^7 x+c$

4.136 $\displaystyle\int x\operatorname{sen}(3x^2+5)\,dx = -\frac{1}{6}\cos(3x^2+5)+c$

4.137 $\displaystyle\int e^{e^x+x}\,dx = e^{e^x}+c$

4.138 $\displaystyle\int \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x}\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x\operatorname{tg} x}\,dx = \log\,|\operatorname{tg} x|+c$

[Si ricordi che $1+\operatorname{tg}^2 x = 1/\cos^2 x$ (ved. esercizio 2.16 della parte prima)]

4.139 $\displaystyle\int \frac{1+\operatorname{cotg}^2 x}{3+\operatorname{cotg} x}\,dx = -\log\,|3+\operatorname{cotg} x|+c$

[Si ricordi che $1+\operatorname{cotg}^2 x = 1/\operatorname{sen}^2 x$]

4.140 $\displaystyle\int \frac{1+x-x^4}{x^2+1}\,dx = x-\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\,\log(x^2+1)+c$

4.141 $\displaystyle\int \frac{3x+5}{x^2-2x+1}\,dx = 3\log\,|x-1|-\frac{8}{x-1}+c$

4.142 $\displaystyle\int \frac{16x^4+3}{4x^2-1}\,dx = \frac{4}{3}x^3+x+\log\,|x-\frac{1}{2}|-\log\,|x+\frac{1}{2}|+c$

4.143 $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^3+x}\,dx = \log\,|x|+\operatorname{arctg} x+c$

4.144 $$\int \frac{x^4+x^3-1}{x^3+x}\,dx = \frac{x^2}{2} + x - \log|x| - \operatorname{arctg} x + c$$

4.145 $$\int \frac{x^2+3}{x^2+1}\,dx = x + 2\operatorname{arctg} x + c$$

4.146 $$\int \frac{2x+1}{4+9x^2}\,dx = \frac{1}{9}\log(4+9x^2) + \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{2}x\right) + c$$

4.147 $$\int \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + c$$

4.148 $$\int \frac{x}{x^4-x^2-2}\,dx = \frac{1}{6}\log\frac{|x^2-2|}{x^2+1} + c$$

4.149 $$\int \frac{x+2}{(x-1)^3(x-2)}\,dx = 4\log\frac{|x-2|}{|x-1|} + \frac{4}{x-1} + \frac{3}{2}\frac{1}{(x-1)^2} + c$$

4.150 $$\int \log(x^2+4)\,dx = x\log(x^2+4) - 2x + 4 + \operatorname{arctg}\frac{x}{2} + c$$

[Si integri per parti]

4.151 $$\int x^4 \log x\,dx = \frac{x^5}{5}\left(\log x - \frac{1}{5}\right) + c$$

4.152 $$\int \operatorname{tg}^2 5x\,dx = \frac{1}{5}\operatorname{tg} 5x - x + c$$

[Si integri per parti]

4.153 $$\int \frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\log x - 4\sqrt{x} + c$$

[Si integri per parti]

4.154 $$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x + c$$

[Si integri per parti]

4.155 $$\int \frac{x \operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x - (\operatorname{arcsen} x)\sqrt{1-x^2} + c$$

[Si integri per parti]

4.156 $$\int \frac{x}{\sqrt{1-x}}\,dx = -2(1-x)^{1/2} + (2/3)(1-x)^{3/2} + c$$

[Si esegua la sostituzione $1-x=t^2$]

4.157 $\displaystyle\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}\,dx = -\log\,|\cos x - \operatorname{sen} x| + c$

[Si esegua la sostituzione $\operatorname{tg} x = t$, oppure scrivendo $\operatorname{tg} x = (\operatorname{sen} x)/(\cos x)$, e semplificando ...]

4.158 $\displaystyle\int \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x) + c$ $\quad[\operatorname{tg} x = t]$

4.159 $\displaystyle\int \frac{1}{1+\operatorname{sen} x+\cos x}\,dx = \log\left|1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c$ $\quad[\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t]$

4.160 $\displaystyle\int \frac{2\cos^3 x - \cos x}{\cos 2x}\,dx = \operatorname{sen} x + c$

4.161 $\displaystyle\int \frac{1}{x(4-\log^2 x)}\,dx = \frac{1}{4}\log\,|(2+\log\,x)/(2-\log\,x)|+c$ $\quad[\log\,x = t]$

4.162 $$\int (\operatorname{arcsen} x)^3\,dx = x(\operatorname{arcsen} x)^3 + 3\sqrt{1-x^2}(\operatorname{arcsen} x)^2 +$$
$$-6x\operatorname{arcsen} x - 6\sqrt{1-x^2} + c$$

[$x = \operatorname{sen} t$ e poi integrando per parti]

4.163 $\displaystyle\int \frac{2x^6+x^3-1}{x^3+1}\,dx = \frac{1}{2}x^4 - x + c$

4.164 $\displaystyle\int \frac{x^6+2x^2-1}{x^4-1}\,2x\,dx = \frac{x^2}{2} + \log\,|x^2-1| + 2\log(x^2+1) + c$

[Con la sostituzione $x^2 = t$, l'integrale dato diviene
$$\int \frac{t^3+2t-1}{t^2-1}\,dt = \int\left(t+\frac{3t-1}{t^2-1}\right)dt = \frac{t^2}{2} + \log\,|t-1| + 2\log\,|t+1| + c\ ]$$

4.165 $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx = 2[\sqrt{x} - \log(1+\sqrt{x})] + c$

[Per sostituzione]

4.166 $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x-4}}\,dx = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x-4}}{2} + c$

[Per sostituzione]

4.167 $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2} - 2\sqrt{x} + 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + c$

[Per sostituzione]

4.168 $$\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x}(x-1)}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + 2\sqrt{x} + 2\,\log\left(\sqrt{x}+1\right) - 2\log\left|\sqrt{x}-1\right| + c$$

[Per sostituzione]

4.169 $$\int \frac{3x^2-2+x}{(x^2+1)(x-1)^3}\,dx = \frac{4-5x}{2(x-1)^2} - \operatorname{arctg} x + \frac{3}{4}\log\frac{x^2+1}{(x-1)^2} + c$$

4.170 $$\int \frac{x^3+5x\sqrt{x}-7}{x^3(x\sqrt{x})+x\sqrt{x}+x^3+1}\sqrt{x}\,dx =$$
$$= \frac{13}{6}\,\log\left(x^3+1\right) - \frac{11}{3}\log\left(x\sqrt{x}+1\right) - \operatorname{arctg}\left(x\sqrt{x}\right) + c$$

[$x\sqrt{x}=t$]

4.171 $$\int \frac{3\cos x \operatorname{sen}^2 x + 5\cos x}{\operatorname{sen}^3 x + \cos^2 x - \operatorname{sen} x}\,dx =$$
$$= 2\log\left(1+\operatorname{sen} x\right) + \log\left(1-\operatorname{sen} x\right) + 4/(1-\operatorname{sen} x) + c$$

[Con la sostituzione $t = \operatorname{sen} x$ si è ricondotti all'integrale

$$\int \frac{3t^2+5}{t^3-t^2-t+1}\,dt = \int \left(\frac{2}{t+1} + \frac{1}{t-1} + \frac{4}{(t-1)^2}\right)dt\,.$$

Tenendo conto che $t = \operatorname{sen} x$ è compreso fra -1 e 1 e perciò, ad esempio, $|t-1| = 1-t$, si ottiene il risultato]

4.172 $$\int \frac{dx}{[2+5\log^2(\operatorname{tg} x)]\operatorname{sen} x\cos x} = \frac{1}{\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\log\left(\operatorname{tg} x\right)\right) + c$$

[Si noti che $D\log(\operatorname{tg} x) = 1/(\operatorname{sen} x\cos x)$]

4.173 $$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3 x} = \frac{-1}{8\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}} + \frac{1}{2}\log\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{8}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + c$$

[Si esegua la sostituzione $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$, come indicato al punto 5°) del paragrafo 4H]

4.174 $$\int \frac{dx}{\cos^6 x} = \operatorname{tg} x + \frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + c$$

[Si esegua la sostituzione $\operatorname{tg} x = t$, come indicato al punto 6°) del paragrafo 4H]

Capitolo 5

INTEGRALI DEFINITI

5A. Integrazione definita elementare

Siano $f(x)$ e $g(x)$ funzioni limitate ed integrabili (secondo Riemann) nell'intervallo chiuso e limitato I di $\mathbb{R}$.

Richiamiamo alcune proprietà dell'integrale definito:

a) *additività dell'integrale:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad\qquad \forall\, a,b,c \in I$$

b) *integrale del valore assoluto:*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx \qquad\qquad \forall\, a,b \in I,\ (a<b)$$

c) *monotonia dell'integrale*: se $a,b \in I$, con $a<b$ e se $f(x) \le g(x)$ per ogni $x \in [a,b]$, allora

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

In particolare, se è $g(x) \ge 0$, allora

$$\int_a^b g(x)\,dx \ge 0\,.$$

d) *Linearità dell'integrale:* per λ, $\mu \in \mathbb{R}$, si ha:

$$\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Ricordiamo inoltre che le funzioni continue e le funzioni monotòne e limitate in intervallo chiuso $[a,b]$ sono ivi integrabili.

e) *Proprietà della media*: se m e M sono rispettivamente l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f in $[a,b]$, si ha

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M\,.$$

In particolare, se $f(x)$ è continua in $[a,b]$, allora esiste $c \in [a,b]$ tale che

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c)$$

Il numero reale $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ prende il nome di *valor medio* di f su $[a,b]$. Nel caso degli integrali definiti, la formula di *integrazione per parti* diviene :

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx$$

e la formula di *integrazione per sostituzione* diviene

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,g'(x)\,dx = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\,dt$$

ove f è continua in $[c,d]$, $\phi : [a,b] \to [c,d]$ è derivabile con derivata continua.

Il *teorema fondamentale del calcolo integrale* afferma che: se $f(x)$ è continua in $[a,b]$, allora la funzione

$$F : x \in [a,b] \to \int_a^x f(t)\,dt$$

è una primitiva di f.

Grazie a tale teorema, per calcolare l'integrale definito di una funzione continua nell'intervallo $[a,b]$, basta trovare una primitiva di f ed applicare la seguente regola:

FORMULA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE: *Sia $f(x)$ continua in $[a,b]$ e sia $G(x)$ una primitiva di $f(x)$; allora*

$$\int_a^b f(x)\,dx = [G(x)]_a^b = G(b) - G(a)\,.$$

Ricordiamo inoltre il *significato geometrico* dell'integrale definito di una funzione non negativa: se f è integrabile e limitata sull'intervallo $[a, b]$ e se è $f(x) \geq 0$, posto

$$T = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} \; : \; 0 \leq y \leq f(x)\}$$

si ha, (ved. il successivo paragrafo 5C):

$$\text{area di } T = \int_a^b f(x)\, dx \,.$$

5.1 Sia $f(x)$ la funzione definita nell'intervallo $[0, 1]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x \in (0, 1] \\ 5, & \text{se} \quad x = 0 \,. \end{cases}$$

Verificare che $f(x)$ è integrabile nell'intervallo $[0, 1]$ e che l'integrale è nullo.

[Siano $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = 1$ i punti di una partizione P dell'intervallo $[0, 1]$. Consideriamo le relative somme integrali inferiori $s(P)$ e superiori $S(P)$:

$$s(P) = \sum_{k=1}^{n} m_k\,(x_k - x_{k-1}); \qquad S(P) = \sum_{k=1}^{n} M_k\,(x_k - x_{k-1}),$$

ove m_k e M_k sono rispettivamente l'estremo inferiore e l'estremo superiore di $f(x)$ nell'intervallo $[x_{k-1}, x_k]$. Risulta $m_k = 0$ per ogni $k = 1, 2, \ldots, n$, mentre è $M_k = 0$ se $k = 2, 3, \ldots, n$ e $M_1 = \sup\{f(x) : x \in [0, x_1]\} = 5$.
Perciò abbiamo

$$s(P) = 0 \,; \qquad S(P) = 5x_1$$

Le somme integrali inferiori sono nulle per ogni partizione P. È anche evidente che l'estremo inferiore delle somme integrali superiori al variare della partizione P, è uguale a zero. Perciò l'integrale considerato vale zero]

5.2 Dare un esempio di funzione continua, non identicamente nulla, il cui integrale definito, esteso ad un intervallo $[a, b]$ con $a < b$, valga zero.

[Basta scegliere $f(x) = \operatorname{sen} x$, per $x \in [0, 2\pi]$]

5.3 Esistono funzioni integrabili, non identicamente nulle, nell'intervallo $[0, 1]$, tali che $f(x) \geq 0$, per ogni $x \in [0, 1]$ ed il cui integrale definito sia nullo?

[Si, ad esempio la funzione dell'esercizio 5.1]

5.4 Esistono funzioni continue e non identicamente nulle nell'intervallo $[0, 1]$, tali che $f(x) \geq 0$, $\forall\, x \in [0, 1]$ ed il cui integrale definito sia nullo?

[No,non esistono. Supponiamo infatti che $f(x)$ sia una funzione continua in $[0,1]$, con $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [0,1]$ e tale che $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. Dimostriamo che $f(x)$ è identicamente nulla. Supponiamo per assurdo che esista $x_0 \in [0,1]$ tale che $f(x_0) > 0$. Per il teorema della permanenza del segno, esiste in $[0,1]$ un intorno I di x_0, per cui

$$f(x) \geq f(x_0)/2\,, \qquad\qquad \forall\, x \in I\,.$$

Per semplicità, supponiamo che x_0 sia interno all'intervallo $[0,1]$ e che I sia della forma $I = \{x \in [0,1] \;:\quad x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$, con $\delta > 0$. Dalle relazioni

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^{x_0-\delta} f(x)\,dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx + \int_{x_0+\delta}^1 f(x)\,dx \geq$$
$$\geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx \geq \frac{f(x_0)}{2}(2\delta) > 0$$

si perviene ad un assurdo]

5.5 Siano f_1, f_2 due funzioni continue in $[0,1]$, tali che $f_1(x) \leq f_2(x)$, per ogni $x \in [0,1]$ ed inoltre tali che $f_1(x_0) < f_2(x_0)$ per almeno un $x_0 \in [a,b]$. Dimostrare che

$$\int_0^1 f_1(x)\,dx < \int_0^1 f_2(x)\,dx\,.$$

[Basta osservare che la funzione $f(x) = f_2(x) - f_1(x)$, per l'esercizio precedente, ha integrale, esteso all'intervallo $[0,1]$, strettamente positivo]

5.6 Calcolare, in base alla definizione di integrale definito, l'integrale

$$\int_0^1 x\,dx\,.$$

[Dividiamo l'intervallo $[0,1]$ in n parti uguali mediante i punti $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$. Le somme integrali inferiori e superiori sono, rispettivamente

$$s_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \ldots + \frac{n-2}{n} + \frac{n-1}{n}\right)$$
$$S_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \ldots + \frac{n-1}{n} + \frac{n}{n}\right)$$

per cui è : $S_n - s_n = \dfrac{1}{n}$ e perciò $\lim\limits_n (S_n - s_n) = 0$.

D'altra parte, ricordando che $1 + 2 + \ldots + n = n(n+1)/2$, si ha

$$\lim_n S_n = \lim_n \frac{1}{n^2}(1 + 2 + \ldots + n) = \lim_n \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}\lim_n \frac{n^2+n}{n^2} = \frac{1}{2}$$

e perciò l'integrale dato vale 1/2]

5.7 Calcolare, in base alla definizione, l'integrale

$$\int_0^1 x^3\,dx\,.$$

[Dividendo $[0,1]$ in n parti uguali e, procedendo come in 5.6, si ha

$$\lim_n S_n = \lim_n \frac{1}{n^4}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{1}{4}\,]$$

5.8 Calcolare,in base alla definizione di integrale definito, l'integrale

$$\int_1^a \frac{1}{x}\,dx \qquad\qquad (a>1)\,.$$

[Dividiamo l'intervallo $[1,a]$ mediante i punti in progressione geometrica

$$q^0=1, q, q^2, \ldots, q^{n-1}, q^n = a\,,$$

ove si è scelto $q=\sqrt[n]{a}$. Le somme integrali inferiori e superiori sono, rispettivamente

$$s_n = \frac{q-1}{q}+\frac{q^2-q}{q^2}+\ldots+\frac{q^n-q^{n-1}}{q^n} = \frac{n(\sqrt[n]{a}-1)}{\sqrt[n]{a}}$$

$$S_n = q-1+\frac{q^2-q}{q^2}+\ldots+\frac{q^n-q^{n-1}}{q^{n-1}} = n(\sqrt[n]{a}-1)$$

come si verifica facilmente.

Ricordando il limite notevole $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\log a$ (es. 8.21 della parte prima) si ha $\lim\limits_n S_n = \log a$. Per calcolare il $\lim\limits_n s_n$, applicando la regola di L'Hôspital si vede che $\lim\limits_n s_n = \log a\,$]

5.9 Sia $f(x)$ una funzione limitata ed integrabile nell'intervallo $[0,5]$ e tale che

$$\int_0^5 f(x)\,dx = 10.$$

Dimostrare che

(a) esiste almeno un punto $x_0\in[0,5]$, tale che $f(x_0)<3$;

(b) se $f(x)$ è continua in $[0,5]$, allora esiste almeno un punto $x_0\in[0,5]$ tale che $f(x_0)=2$;

(c) se $f(x)$ è strettamente monotòna in $[0,5]$, allora esiste almeno un punto $x_0\in[0,5]$ tale che $f(x_0)<2$.

[(a) Se, per assurdo, fosse $f(x)\ge 3$ per ogni $x\in[0,5]$, risulterebbe

$$\int_0^5 f(x)\,dx \ge \int_0^5 3\,dx = 15\,.$$

(b) Per il teorema della media, essendo f continua, esiste $x_0 \in [0,5]$ tale che

$$10 = \int_0^5 f(x)\,dx = 5f(x_0)\,;$$

perciò $f(x_0) = 2$.

(c) Per fissare le idee, sia $f(x)$ strettamente crescente in $[0,5]$. Supponiamo per assurdo che $f(x) \geq 2$, $\forall x \in [0,5]$. Non potrà essere $f(x) = 2$ per ogni $x \in [0,5]$, perchè, in tal caso $f(x)$ non sarebbe strettamente monotòna. Scelto arbitrariamente $x_1 \in (0,5)$, dovrà essere

$$f(x) > f(x_1) > f(0) \geq 2\,, \qquad \forall x \in (x_1, 5)\,.$$

Da cui segue:

$$\int_0^5 f(x)\,dx = \int_0^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^5 f(x)\,dx \geq \int_0^{x_1} 2\,dx + \int_{x_1}^5 f(x_1)\,dx =$$
$$= 2x_1 + (5 - x_1)f(x_1) > 2x_1 + (5 - x_1) \cdot 2 = 10\,]$$

5.10 Dimostrare che la funzione di Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \text{ è razionale} \\ 0, & \text{se } x \text{ è irrazionale} \end{cases}$$

non è integrabile in $[0,1]$.

[Siano $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 1$ i punti di una qualsiasi suddivisione di $[0,1]$. Poichè in ogni intervallo $[x_{k-1}, x_k)$ cadono sia numeri razionali che irrazionali, si ha

$$\inf_{x \in [x_{k-1}, x_k)} f(x) = 0 \qquad \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k)} f(x) = 1\,.$$

Pertanto ogni somma integrale inferiore è zero ed ogni somma integrale superiore vale 1]

5.11 Dimostrare che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{se } x = \dfrac{m}{n}; \quad m, n \text{ primi fra loro} \\ 0, & \text{se } x \text{ è irrazionale} \end{cases}$$

è integrabile in $[0,1]$ e risulta $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 0$.

[Fissato $k \in \mathbb{N}$, i numeri razionali di $[0,1)$ del tipo m/n, con m, n primi fra loro e tali che $n < k$, costituiscono un insieme finito:

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_{n_k}$$

e si ha $f(x_i) > 1/k$, mentre, in tutti gli altri punti $x \in [0,1)$, si ha $f(x) \leq 1/k$. Possiamo costruire una partizione finita P_k di $[0,1)$ costituita di n_k intervalli $I_1, \ldots, I_{n_k}$ (di centro rispettivamente $x_1, \ldots, x_{n_k}$ ed ampiezza δ_k sufficientemente piccola) e di altri n_k+1 intervalli $J_1, \ldots, J_{n_k+1}$ su ognuno dei quali risulta $f(x) \leq 1/k$. Detta $S(P_k)$ la somma integrale superiore, si ha (indicando con $|J_i|$ l'ampiezza dell'intervallo J_i):

$$S(P_k)=\delta_k\sum_{i=1}^{n_k}\sup_{I_i}f+\sum_{i=1}^{n_k+1}|J_i|\sup_{J_i}f\le\delta_k\sum_{i=1}^{n_k}f(x_i)+\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n_k+1}|J_i|\le\delta_k\sum_{i=1}^{n_k}f(x_i)+\frac{1}{k}<\frac{2}{k}$$

pur di scegliere $\delta_k<1/k\sum_{i=1}^{n_k}f(x_i)$]

5B. Calcolo di integrali definiti

5.12 Calcolare l'integrale

$$\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2 x\,dx$$

[Poichè la funzione $G(x)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{\operatorname{sen}2x}{4}$ è una primitiva della funzione $f(x)=\operatorname{sen}^2 x$, per la formula fondamentale del calcolo integrale, si ha:

$$\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2 x\,dx=\left[\frac{x}{2}-\frac{\operatorname{sen}2x}{4}\right]_0^{2\pi}=\pi\,]$$

5.13 Traendo spunto dall'esercizio precedente, utilizzare il significato geometrico di integrale definito per verificare che

$$\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2 x\,dx=\int_0^{2\pi}\cos^2 x\,dx=\pi$$

[Per motivi di simmetria, ben visibili dal grafico delle due funzioni $\operatorname{sen}^2 x$ e $\cos^2 x$, i loro integrali definiti in $[0,2\pi]$ danno lo stesso risultato. Pertanto

$$\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2 x\,dx+\int_0^{2\pi}\cos^2 x\,dx=2\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2 x\,dx\,;$$

ma l'integrale a primo membro si calcola facilmente utilizzando il significato geometrico dell'integrale definito. Infatti

$$\int_0^{2\pi}\{\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x\}\,dx=\int_0^{2\pi}1\,dx=2\pi\,.$$

Da ciò segue l'asserto]

5.14 Utilizzare il significato geometrico di integrale definito per verificare che

$$\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^2 x\,dx=\int_0^{\pi}\cos^2 x\,dx=\frac{\pi}{2}\,,$$

$$\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^2 x\,dx=\int_0^{\pi/2}\cos^2 x\,dx=\frac{\pi}{4}\,.$$

[Si usi il metodo dell'esercizio precedente]

5.15 Verificare che per $h, k \in \mathbb{R}$, si ha

$$\int_a^b (hx + k)\, dx = \frac{h}{2}(b^2 - a^2) + k(b - a)$$

[La funzione $G(x) = (h/2)x^2 + kx$ è una primitiva di $f(x) = hx + k$, ed allora, basta applicare la formula fondamentale del calcolo integrale]

5.16 Calcolare l'integrale

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\, dx$$

[Si ha: $x/\sqrt{x+1} = (x+1-1)/\sqrt{x+1} = (x+1)^{1/2} - (x+1)^{-1/2}$ per cui la funzione $G(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - 2(x+1)^{1/2}$ è una primitiva di $f(x) = x/\sqrt{x+1}$. Dalla formula fondamentale del calcolo integrale, segue:

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\, dx = \left[\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - 2(x+1)^{1/2}\right]_0^3 = \frac{2}{3}\, 4^{3/2} - 2 \cdot 4^{1/2} - \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3} \;]$$

5.17 Calcolare l'integrale

$$\int_0^3 |x - 1|\, dx$$

[Poichè risulta $|x-1| = x - 1$ se $x \geq 1$ e $|x - 1| = 1 - x$ se $x < 1$, si ha

$$\int_0^3 |x-1|\, dx = \int_0^1 (1-x)\, dx + \int_1^3 (x-1)\, dx = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^3 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} \;]$$

5.18 Calcolare l'integrale considerato nell'esercizio precedente, utilizzando l'interpretazione geometrica dell'integrale definito di una funzione non negativa.

[L'area del triangolo S_1, in fig. 5.1, vale 1/2, mentre l'area del triangolo S_2 vale 2]

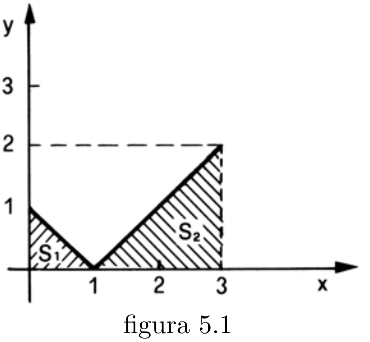


figura 5.1

5.19 Posto $f(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, verificare che

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] - \frac{1}{120}(b-a)^4 .$$

5.20 Calcolare i seguenti integrali

(a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^3+3x^2}{x^2+4x+4}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3-13x}{x^2+5x+4}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{16x^4-3}{4x^2+1}\,dx$ (d) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{(x^2+2)^3}\,dx$

[(a) 1; (b) $-9/2 + 4\log(5/2)$; (c) $1/3 - \operatorname{arctg} 2$; (d) $1/18$]

5.21 Verificare che, se m ed n sono due interi non negativi, si ha

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\,dx = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad m \neq n \\ \pi/2 & \text{se} \quad m = n > 0 \end{cases}$$

$$\int_0^\pi \cos mx \cos nx\,dx = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad m \neq n \\ \pi/2 & \text{se} \quad m = n > 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx\,dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\,dx = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad m \neq n \\ \pi & \text{se} \quad m = n > 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx\,dx = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad m \neq n \\ \pi & \text{se} \quad m = n > 0 \end{cases}$$

[Si vedano gli esercizi 4.59, 4.60, 4.61]

5.22 Verificare che per $y > 1$ e per $\alpha \neq -1$ si ha

$$\int_1^y x^\alpha \log x\,dx = \frac{y^{\alpha+1}}{\alpha+1}\log y - \frac{y^{\alpha+1}-1}{(\alpha+1)^2} .$$

[Integrando per parti, si ha

$$\int_1^y x^\alpha \log x\,dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\log x\right]_1^y - \int_1^y \frac{1}{x}\cdot\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\,dx =$$

$$= \frac{y^{\alpha+1}}{\alpha+1}\log y - \frac{1}{\alpha+1}\int_1^y x^\alpha\,dx =$$

$$= \frac{y^{\alpha+1}}{\alpha+1}\log y - \frac{1}{\alpha+1}\left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_1^y,$$

da cui segue subito l'asserto]

5.23 Verificare che

(a) $\displaystyle\int_0^y \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \log\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)$

(b) $\displaystyle\int_0^y \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \sqrt{y^2+1}-1$

[(a) $G(x) = \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ è una primitiva di $1/\sqrt{x^2+1}$
(b) $G(x) = \sqrt{x^2+1}$ è una primitiva di $x/\sqrt{x^2+1}$]

5.24 Integrando per parti, calcolare gli integrali

(a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\log x}{x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_2^3 \log\left(x^2-x\right)dx$

[(a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\log x}{x}\,dx = \left[\log^2 x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{\log x}{x}\,dx$, perciò

$$\int_1^2 \frac{\log x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\left[\log^2 x\right]_1^2 = \frac{1}{2}\log^2 2$$

(b) Si trova il risultato $\left[x\log\left(x^2-x\right)-2x+\log|x-1|\right]_2^3 = 3\log 6 - 2 - \log 2$]

5.25 Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}\,dx$$

[Eseguendo la sostituzione $x = \cos t$, poichè al crescere di x da 0 a 1, t decresce da $\pi/2$ a 0, si ha

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}\,dx = -\int_{\pi/2}^0 \frac{\sqrt{1-\cos t}}{\sqrt{1+\cos t}}\operatorname{sen} t\,dt = \int_0^{\pi/2}(1-\cos t)\,dt = [t-\operatorname{sen} t]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}-1\,]$$

5.26 Calcolare l'integrale

$$\int_1^8 \frac{\sqrt{1+x}}{x}\,dx$$

[Eseguendo la sostituzione $\sqrt{1+x} = t$, cioè $x = t^2-1$, $dx = 2t\,dt$, allora per $x = 1$ si ha $t = \sqrt{2}$ e, per $x = 8$, si ha $t = 3$. Pertanto

$\displaystyle\int_1^8 \frac{\sqrt{1+x}}{x}\,dx = \int_{\sqrt{2}}^3 \frac{2t^2}{t^2-1}\,dt = \left[2t + \log\frac{t-1}{t+1}\right]_{\sqrt{2}}^3 = 6 - 2\sqrt{2} + \log\frac{1}{2} + \log\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$]

5.27 Calcolare gli integrali

$$\text{(a)}\ \int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx \qquad\qquad \text{(b)}\ \int_0^{3/2} \sqrt{3-x^2}\,dx$$

[(a) Si risolve con la sostituzione $x = 2\,\mathrm{sen}\,t$, osservando che, al crescere di x da 0 a 1, t cresce da 0 a $\pi/6$, per cui:

$$\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/6} 2\sqrt{1-\mathrm{sen}^2\,t}\cdot 2\cos t\,dt = 2\,[t + \mathrm{sen}\,t\cos t]_0^{\pi/6} =$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\ ;$$

(b) Con lo stesso metodo di (a) si trova il risultato $(\pi/2) + (3\sqrt{3}/8)$]

5.28 Calcolare gli integrali

$$\text{(a)}\ \int_1^4 e^{-\sqrt{x}}\,dx \qquad\qquad \text{(b)}\ \int_0^{\pi^2/4} \cos\sqrt{x}\,dx$$

$$\text{(c)}\ \int_1^4 \frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx \qquad\qquad \text{(b)}\ \int_0^4 e^{\sqrt{x}}\,dx$$

[(a) $4e^{-1} - 6e^{-2}$; (b) $\pi/2 - 1$; (c) $4\log 4 - 4$; (d) $2e^2 + 2$]

5.29 Calcolare l'integrale

$$\int_0^4 \frac{x - 7\sqrt{x} + 12}{x\sqrt{x} - 6x + 9\sqrt{x}}\,dx$$

[Con la sostituzione $x = t^2$ si trova il risultato $2\,[t - \log|t-3|]_0^2 = 4 + 2\log 3$]

5.30 Calcolare gli integrali

$$\text{(a)}\ \int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx \qquad\qquad \text{(b)}\ \int_0^{\pi^2} \mathrm{sen}\,\sqrt{x}\,dx$$

$$\text{(c)}\ \int_1^{16} \mathrm{arctg}\,\sqrt{\sqrt{x}-1}\,dx \qquad\qquad \text{(d)}\ \int_1^2 (e^x-1)^{-1/2}\,dx$$

[Si risolvono tutti per sostituzione: (a) $2\log 3$; (b) 2π; (c) $(16/3)\pi - 2\sqrt{3}$; (d) $2(\mathrm{arctg}\,(e^2-1)^{1/2} - \mathrm{arctg}\,(e-1)^{1/2})$]

5.31 Calcolare gli integrali

$$\text{(a)} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\cos x}\, dx \qquad \text{(b)} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\cos x}\, dx$$

$$\text{(c)} \int_0^{\pi/6} \sqrt{1+\operatorname{sen} x}\, dx \qquad \text{(d)} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}}\, dx$$

[(a) Ponendo $\cos x = t$, risulta $dx = -dt/\sqrt{1-t^2}$. Perciò:

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\cos x}\, dx = -\int_1^0 \frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = \left[2\sqrt{1-t}\right]_0^1 = 2$$

(b) $2(\sqrt{2}-1)$; (c) $2-\sqrt{2}$; (d) $\log(1+\sqrt{2})$]

5.32 Dimostrare che, per ogni $a > 0$, risulta

$$\int_1^a \frac{dx}{1+x^2} = \int_{1/a}^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

[L'integrale a secondo membro si ottiene da quello a primo membro, mediante la sostituzione $t = 1/x$]

5.33 Posto $\phi(x) = (1+x)/(1-x)$, dimostrare che, per ogni $a < 1$, risulta

$$\int_0^a \frac{dx}{1+x^2} = \int_1^{\phi(a)} \frac{dx}{1+x^2}$$

[Effettuare la sostituzione $t = \phi(x)$]

5.34 Dimostrare che

$$\int_a^b f(-x)\, dx = \int_{-b}^{-a} f(x)\, dx$$

5.35 Dimostrare che se f è una funzione integrabile, periodica di periodo T, allora

$$\int_{a+T}^{b+T} f(x)\, dx = \int_a^b f(t)\, dt$$

[Posto $x = t + T$, si ha $dx = dt$ e per $x = a + T$ è $t = a$, per $x = b + T$ è $t = b$. Pertanto

$$\int_{a+T}^{b+T} f(x)\, dx = \int_a^b f(t+T)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt$$

grazie alla periodicità di f]

5.36 Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} |\operatorname{sen} x|\, dx\,.$

[Poichè la funzione $f(x) = |\operatorname{sen} x|$ è periodica di periodo π, si ha

$$\int_0^{2\pi} |\operatorname{sen} x|\, dx = \int_0^{\pi} |\operatorname{sen} x|\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} |\operatorname{sen} x|\, dx = \int_0^{\pi} |\operatorname{sen} x|\, dx + \int_0^{\pi} |\operatorname{sen} x|\, dx =$$

$$= 2\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx = [-2\cos x]_0^{\pi} = 4,$$

a norma dell'esercizio precedente]

5.37 Calcolare i seguenti integrali

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x - 6\cos x + 9}\, dx$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x - 3\operatorname{sen} x + 2}\, dx$

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x + 4}\, dx$

[(a) Si esegue la sostituzione $\cos x = t$, da cui $\operatorname{sen} x\, dx = -dt$. Il risultato è $1/6$; (b) $\log(3/4)$; (c) $(1/2)\operatorname{arctg}(1/2)$]

5.38 Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \log(\cos x)}\, dx$$

[Si osserva che $D\log(\cos x) = -\operatorname{tg} x$. Il risultato è $-\log(1 - \log 2)$]

5.39 Dopo aver dimostrato la seguente formula di riduzione ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$)

$$\int (\operatorname{sen} x)^n\, dx = -\frac{(\operatorname{sen} x)^{n-1}\cos x}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\int (\operatorname{sen} x)^{n-2}\, dx\,,$$

verificare che

$$\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} x)^8\, dx = \frac{35}{128}\pi$$

[Con un'integrazione per parti, si ha

$$\int (\operatorname{sen} x)^n\, dx = -(\operatorname{sen} x)^{n-1}\cos x + (n-1)\int (\operatorname{sen} x)^{n-2}\cos^2 x\, dx =$$

$$= -(\operatorname{sen} x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int (\operatorname{sen} x)^{n-1}\, dx + (1-n) \int (\operatorname{sen} x)^n\, dx$$

da cui segue facilmente la formula di riduzione cercata.

Per calcolare l'integrale definito, osserviamo intanto che

$$\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} x)^n\, dx = \left[\frac{-(\operatorname{sen} x)^{n-1} \cos x}{n} \right]_0^{\pi/2} + \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} x)^{n-2}\, dx =$$

$$= \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} x)^{n-2}\, dx$$

Pertanto

$$\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} x)^8\, dx = \frac{7}{8} \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} x)^6\, dx = \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} x)^4\, dx =$$

$$= \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} x)^2\, dx = \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} dx = \frac{35}{128}\pi\,]$$

5.40 Verificare che

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} x\, dx = 2\pi\ ; \qquad\qquad \int_{-a}^{a} (x+a)\sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{\pi a^3}{2}$$

5C. Applicazioni al problema delle aree

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata ed integrabile; allora, se f è non negativa (risp. non positiva), l'insieme

$$T = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R}\ :\ 0 \le y \le f(x)\}$$

$$(\text{risp. } T = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R}\ :\ f(x) \le y \le 0\}$$

si chiama *rettangoloide* di base $[a, b]$ relativo ad f e si ha

$$\text{area di } T = \int_a^b f(x)\, dx$$

$$(\text{risp. area di } T = -\int_a^b f(x)\, dx\ \ ).$$

Se invece f assume valori di segno arbitrario, posto

$$f^+(x) = \max\{0, f(x)\}; \qquad\qquad f^-(x) = \min\{0, f(x)\}$$

la funzione $f^+(x)$ è la parte non negativa di $f(x)$, la funzione $f^-(x)$ è la parte non positiva di $f(x)$ e si ha: $f(x) = f^+(x) + f^-(x)$ (fig. 5.2). Inoltre f^+ e f^- sono integrabili e si ha

$$\text{area di } T^+ - \text{ area di } T^- = \int_a^b f(x)\,dx$$

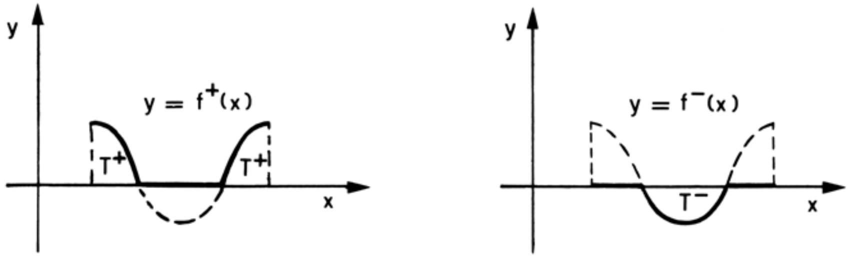


figura 5.2

ove T^+ indica il rettangoloide relativo ad f^+ e T^- il rettangoloide relativo a f^-.

Infine, risulta $|f(x)| = f^+(x) - f^-(x)$ e

$$\text{area di } T^+ + \text{ area di } T^- = \int_a^b |f(x)|\,dx\ .$$

Le formule precedenti sono perciò utili per il calcolo delle aree di rettangoloidi, mediante il calcolo di integrali definiti. Più in generale, si può calcolare l'area di una regione T come quella rappresentata in fig. 5.3

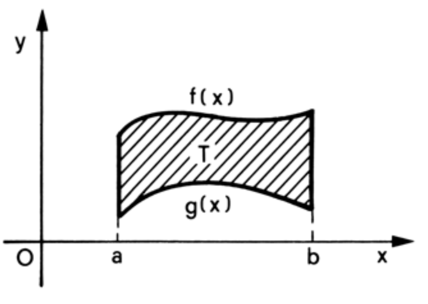


figura 5.3

definita, a partire dalle funzioni integrabili $f(x)$, $g(x)$, mediante le limitazioni seguenti

$$T = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R}\ :\ g(x) \leq y \leq f(x)\}\,.$$

In tal caso, si ha

$$\text{area di } T = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx\,.$$

5.41 Sia $f(x) = x^2$, e sia $g(x) = x$ per $x \in [0, 1]$. Calcolare l'area dell'insieme piano definito da (figura 5.4):

$$T = \{(x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R} \ : \ x^2 \leq y \leq x\}.$$

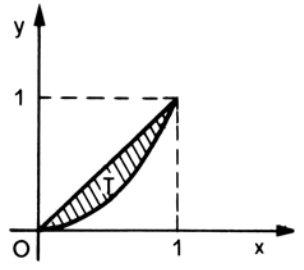


figura 5.4

[Area di $T = \int_0^1 (x - x^2)\, dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$]

5.42 Calcolare l'area della regione piana T compresa fra le due parabole di equazioni $y^2 = 9x$ e $x^2 = 9y$.

[Evidentemente risulta

$$T = \{(x, y) \in [0, 9] \times [0, 9] \ : \frac{1}{9}x^2 \leq y \leq 3\sqrt{x}\}$$

in quanto le parabole si incontrano nell'origine e nel punto $P(9, 9)$, come si vede risolvendo il sistema costituito dalle equazioni delle due curve (si veda la fig. 5.5). Si ha

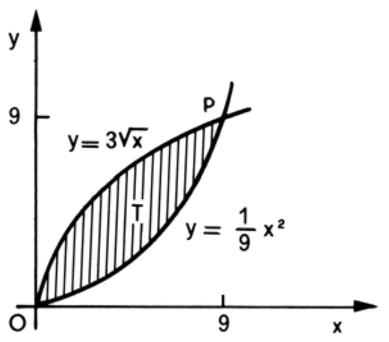


figura 5.5

$$\text{area di } T = \int_0^9 (3\sqrt{x} - \frac{1}{9}x^2)\, dx = \left[2x^{3/2} - \frac{1}{27}x^3\right]_0^9 = 27\,]$$

5.43 Calcolare l'area della regione piana T delimitata dalla retta $y = -2x + 3$ e dalla parabola $y = x^2$.

[La retta interseca la parabola nei punti $(-3,9)$ e $(1,1)$ e, nell'intervallo $[-3,1]$, risulta $-2x+3 \geq x^2$. Perciò, si ha:

$$T = \{(x,y) \in [-3,1] \times \mathbb{R} \; : x^2 \leq y \leq -2x+3\}$$

e risulta

$$\text{area di } T = \int_{-3}^{1} (3-2x-x^2)\,dx = \left[3x - x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{1} = \frac{32}{3}\,]$$

5.44 Calcolare l'area della regione piana T compresa fra la curva $y = 1/x$, l'asse delle x e le rette di equazione $x = a$ e $x = 5a$, con $a > 0$ (fig. 5.6)

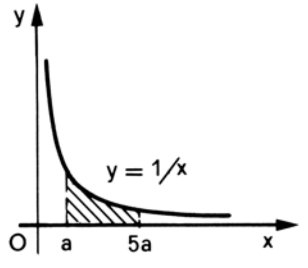


figura 5.6

[Area di $T = \displaystyle\int_a^{5a} \frac{1}{x}\,dx = [\log x]_a^{5a} = \log 5a - \log a = \log 5\,]$

5.45 Calcolare l'area della regione piana T compresa tra le curve $y = x^4 - 2x^3 + 2$, l'asse delle x e le rette $x = -1$ e $x = 2$ (fig. 5.7).

[Area di $T = \displaystyle\int_{-1}^{2} (x^4 - 2x^3 + 2)\,dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + 2x\right]_{-1}^{2} = \left(\frac{32}{5} - \frac{16}{2} + 4\right) - \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{2} - 2\right) = \frac{51}{10}\,]$

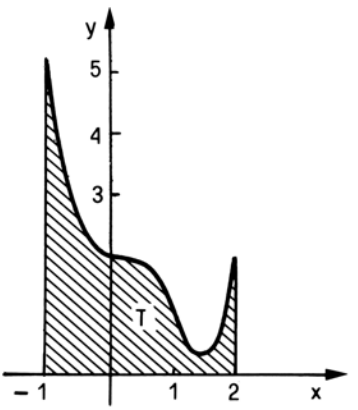


figura 5.7

5.46 Calcolare l'area della regione piana T compresa tra la curva $y = 1/x^\alpha$ $(\alpha \neq 1)$, l'asse delle x e le rette di equazione $x = a$, $x = b$ (con $0 < a < b$).

[Area di $T = \int_a^b \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_a^b = (b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha})/(1-\alpha)$]

5.47 Calcolare l'area della regione piana T compresa tra la curva $y = \log x$, l'asse delle x e la retta di equazione $x = e$.

[Area di $T = \int_1^e \log x\, dx = [x(\log x - 1)]_1^e = 1$]

5.48 Calcolare l'area della regione piana T delimitata dall'ellisse di equazione $(x^2/9) + (y^2/4) = 1$.

[$T = \{(x, y) \in [-3, 3] \times \mathbb{R}\ : -\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2} \leq y \leq \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}\}$

ed allora:

$$\text{area di } T = \int_{-3}^{3} \left[\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2} - (-\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2})\right] dx =$$

$$2\int_{-3}^{3} \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}\, dx \overset{[x=3y]}{=} 12\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - y^2}\, dy =$$

$$\overset{[y=sen\ t]}{=} 12\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = 12\left[\frac{1}{2}(t + \operatorname{sen} t \cos t)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 6\pi\ ]$$

Siano $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b$, $n + 1$ numeri reali e sia $f(x)$ la funzione definita in $[a, b]$ da:

$$f(x) = \begin{cases} c_1 & \text{se} \quad x \in [a_0, a_1] \\ c_2 & \text{se} \quad x \in (a_1, a_2] \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_n & \text{se} \quad x \in (a_{n-1}, a_n] \end{cases}$$

ove $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sono numeri reali positivi.

La funzione $f(x)$ è una particolare funzione *generalmente continua*, cioè avente un numero finito di discontinuità, detta *funzione a scalino* (o *funzione semplice*, o *funzione costante a tratti*) (fig. 5.8). Essa è integrabile su $[a, b]$ e risulta:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} c_i(a_i - a_{i-1})\,.$$

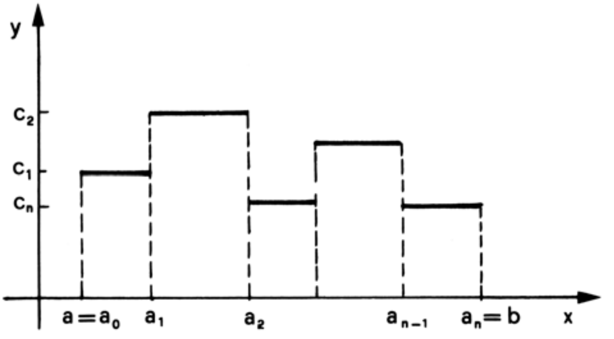


figura 5.8

5D. Integrali impropri

Il caso più elementare di integrazione definita è quello in cui la funzione integranda $f(x)$ è continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Tuttavia, spesso si incontrano funzioni continue in intervalli non chiusi o non limitati ed è utile provvedere, anche per questi casi, ad una teoria dell'integrazione definita.

Ad esempio, la funzione

$$f(x) = 1/\sqrt{x} \qquad\qquad \text{per } x \in (0, 1]$$

non può essere prolungata in una funzione continua su $[0, 1]$. Tuttavia, si dimostra che il limite

$$\lim_{t\to 0} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$$

esiste ed è finito. (Il lettore verifichi, per mezzo della formula fondamentale del calcolo integrale, che tale limite vale 2). Tale limite viene considerato come *integrale improprio* di $f(x)$ su $(0, 1]$ si pone, per definizione

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{t\to 0} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx\,.$$

Analogamente, la funzione

$$f(x) = 1/x^2 \qquad\qquad \text{per} \quad x \in [1, +\infty)$$

è continua su un intervallo non limitato e si dimostra che esiste finito il limite

$$\lim_{t\to +\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}\, dx\,.$$

(Il lettore verifichi che tale limite vale 1). Anche tale limite viene considerato come *integrale improprio* di $f(x)$ su $[1,+\infty)$ e si pone

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx\,.$$

In generale, sia $f(x)$ una funzione continua (e non limitata) nell'intervallo limitato $[a,b)$ (risp. $(a,b]$) e supponiamo che esista finito il limite:

$$\lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx \qquad\qquad \left(\text{risp.}\quad \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx\,\right)$$

allora si dice che $f(x)$ ha *integrale improprio (convergente)* su $[a,b]$ e si pone

$$\text{(1)}\qquad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx \qquad \left(\text{risp.}\quad = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx\,\right)$$

L'integrale al primo membro della (1) si chiama *integrale improprio* di f su $[a,b]$.

Si dimostra che se $f(x)$ è continua in $[a,b)$ (risp. in $(a,b]$) e se $|f(x)|$ ha integrale improprio su $[a,b]$, allora anche $f(x)$ ha integrale improprio su $[a,b]$ e risulta

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx\,.$$

In tal caso si dice che f ha integrale improprio *assolutamente convergente* su $[a,b]$. Il caso di una funzione che presenta un numero finito di discontinuità nell'intervallo $[a,b]$, cioè di una funzione *generalmente continua*, si riconduce facilmente a quelli precedenti, grazie all'additività degli integrali.

Ad esempio, se $f(x)$ è continua nell'intervallo limitato (a,b) ad eccezione del punto c e se entrambi gli integrali

$$\int_a^c f(x)\,dx\,, \qquad\qquad \int_c^b f(x)\,dx$$

sono convergenti, allora l'integrale improprio di f su $[a,b]$ è la somma di tali integrali. Una condizione sufficiente affinchè una funzione discontinua in x_0 abbia integrale improprio su un intervallo limitato I contenente x_0 al suo interno è che esistano $\alpha<1$, $A>0$ ed un intorno J di x_0 tali che

$$\text{(2)}\qquad |f(x)| \le \frac{A}{|x-x_0|^\alpha} \qquad\qquad \forall\, x\in I\cap J-\{x_0\}\,.$$

Le definizioni precedenti consentono così di parlare di integrali definiti di funzioni anche *non limitate*; un'altra generalizzazione del concetto di integrale riguarda il caso di funzioni definite su *intervalli non limitati.*

Precisamente, se, ad esempio, $f(x)$ è definita nell'intervallo $[a, +\infty)$ ed è dotata di integrale improprio su ogni intervallo del tipo $[a, t]$, si dice che f ha *integrale improprio* su $[a, +\infty)$ se esiste finito il limite

$$\lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\, dx$$

e, in tal caso, si pone:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\, dx\,.$$

In modo analogo si definisce l'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^b f(x)\, dx\,.$$

Infine, se $f(x)$ è continua in $\mathbb{R}$, si dice che essa ha *integrale improprio* su $(-\infty, +\infty)$ se esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che gli integrali impropri:

$$\int_{-\infty}^c f(x)\, dx\,, \qquad\qquad \int_c^{+\infty} f(x)\, dx$$

siano entrambi convergenti e si pone

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^c f(x)\, dx + \int_c^{+\infty} f(x)\, dx\,.$$

(Si dimostra che tale integrale è indipendente da c). Una condizione sufficiente affinchè la funzione $f(x)$ continua in $[a, +\infty)$ (risp. in $(-\infty, b]$) abbia integrale improprio assolutamente convergente è che esistano $\alpha > 1$, $A > 0$, $k > 0$, tali che

$$|f(x)| \leq \frac{A}{|x|^\alpha} \qquad\qquad \text{per} \quad |x| > k\,.$$

Talvolta, invece di dire che una funzione positiva $f(x)$ ha integrale improprio (convergente) sull'intervallo di estremi a, b, si dice che l'integrale

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

è convergente.

5.49 Verificare che, se $p < 1$ e $b > 0$, allora

$$\int_0^b \frac{1}{x^p}\, dx = \frac{b^{1-p}}{1-p}$$

[Se $t \in (0,b]$, allora

$$\int_t^b \frac{1}{x^p}\,dx = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_t^b = \frac{1}{1-p}[b^{1-p} - t^{1-p}]\,.$$

Essendo $p < 1$, si ha $\lim_{t \to 0^+} t^{1-p} = 0$, da cui l'asserto]

5.50 Verificare che, se $p > 1$ e $b > 0$, allora l'integrale

$$\int_0^b \frac{1}{x^p}\,dx$$

è divergente.

[Se $t \in (0,b]$, si ha, come nell'esercizio precedente:

$$\int_t^b \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1}{1-p}[b^{1-p} - t^{1-p}]\,.$$

Essendo $p > 1$, si ha $\lim_{t \to 0^+} t^{1-p} = +\infty$, da cui l'asserto]

5.51 Verificare che l'integrale

$$\int_0^b \frac{1}{x}\,dx$$

è divergente.

[Per $t \in (0,b]$, si ha

$$\int_t^b \frac{1}{x}\,dx = [\log x]_t^b = \log b - \log t\,.$$

Essendo $\lim_{t \to 0^+} \log t = -\infty$, si ha l'asserto]

5.52 Verificare che l'integrale

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-2)^2}\,dx$$

è divergente.

[Per $t \in [0,2)$, si ha

$$\int_0^t \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x-2}\right]_0^t = -\frac{1}{t-2} - \frac{1}{2}$$

da cui $\lim_{t \to 2^-} \int_0^t \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = +\infty$]

5.53 Verificare che

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx = 2$$

[Per $t \in [1,2)$, si ha

$$\int_1^t \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx = \int_1^t (2-x)^{-1/2}\,dx = \left[-2(2-x)^{1/2}\right]_1^t = -2(2-t)^{1/2} + 2$$

da cui $\lim\limits_{t\to 2^-}\int_1^t \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx = 2$]

5.54 Verificare che

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

[Per $t \in [0,2)$, si ha

$$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \left[\operatorname{arcsen}\frac{x}{2}\right]_0^t = \operatorname{arcsen}\frac{t}{2}$$

per cui

$$\lim_{t\to 2^-}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} 1 = \frac{\pi}{2}\,]$$

5.55 I seguenti passaggi

$$\int_{-3}^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-3}^1 = -1 - \frac{1}{3} = -\frac{4}{3}$$

contengono un errore. Si noti che l'integrando è positivo ed invece il risultato è negativo. Individuare l'errore e dire se l'integrale dato è convergente.

[La formula fondamentale del calcolo integrale non si può applicare nel caso di funzioni discontinue e non limitate. Si ha:

$$\int_{-3}^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{-3}^0 \frac{1}{x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx\,.$$

Poichè gli integrali a secondo membro sono divergenti, anche l'integrale assegnato è divergente]

5.56 Verificare che

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \pi$$

[Per $t \in (-1,0]$, si ha

$$\int_t^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} 0 - \operatorname{arcsen} t = -\operatorname{arcsen} t$$

e perciò

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\lim_{t\to -1} \operatorname{arcsen} t = -\operatorname{arcsen}(-1) = \frac{\pi}{2}$$

Per $t \in [0,1)$, si ha

$$\int_{0}^{t} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} t - \operatorname{arcsen} 0 = \operatorname{arcsen} t$$

e perciò

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{t\to 1} \operatorname{arcsen} t = \operatorname{arcsen} 1 = \frac{\pi}{2}\,.$$

Pertanto, si ha l'asserto]

5.57 Verificare che

$$\int_{0}^{9} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx = 9$$

[Si ha

$$\int_{0}^{9} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx = \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx + \int_{1}^{9} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx$$

Essendo, per $t \in [0,1)$

$$\int_{0}^{t} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx = \left[3\sqrt[3]{(x-1)}\right]_0^t = 3\sqrt[3]{t-1} + 3$$

si ha

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx = \lim_{t\to 1}[3\sqrt[3]{t-1} + 3] - 3$$

Essendo, per $t \in (1,9]$

$$\int_{t}^{9} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx = \left[3\sqrt[3]{x-1}\right]_t^9 = 3\cdot 8^{1/3} = 3\sqrt[3]{t-1}\,,$$

si ha

$$\int_{1}^{9} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx = \lim_{t\to 1}[6 - 3(t-1)^{1/3}] = 6\,.$$

Pertanto si ha l'asserto]

5.58 Verificare che

$$\int_{0}^{1/2} \frac{1}{x\log^2 x}\,dx = \frac{1}{\log 2}$$

$$\int_{0}^{1/2} \frac{1}{x\log x}\,dx \qquad \text{è divergente.}$$

Verificare che:

5.59 $\displaystyle\int_2^3 \frac{x(x+1)}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = 3 + \frac{9}{4}\,\pi$

[Porre $x = 3$ sen t]

5.60 $\displaystyle\int_2^3 \frac{9-x^2}{\sqrt{x^2-4}}\,dx = 7\log\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{3}{2}\sqrt{5} = 7\,\mathrm{sett}\cos h\,\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{5}$

[Porre $x = 2$ cos $h\,t$]

5.61 $\displaystyle\int_3^7 \sqrt{\frac{7-x}{x-3}}\,dx = 2\pi$

5.62 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x \cdot e^{\operatorname{tg} x}}\,dx = 1$

[Porre tg $x = t$]

5.63 $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx = \frac{8}{3}$

5.64 $\displaystyle\int_0^1 \log x\,dx = -1$

5.65 Stabilire, mediante i teoremi di confronto, se i seguenti integrali sono o non sono convergenti

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{\operatorname{arctg} x}}\,dx$; (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{(1-x^3)^3}}\,dx$

[(a) Essendo $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}/\sqrt{\operatorname{arctg} x} = 1$, esiste $k > 0$ tale che $1/\sqrt{\operatorname{arctg} x} < k\sqrt{x}$. Essendo poi $1/2 \le 1/(x^2+1) < 1$ per $x \in (0,1]$, la funzione integranda si maggiora con $k/\sqrt{x}$ in $(0,1]$. Allora l'integrale è convergente, e si vede facilmente che vale $\sqrt{\pi}$;
(b) Essendo $1/\sqrt[4]{(1-x^3)^3} = 1/[(1-x)^{3/4} \cdot (1+x+x^2)^{3/4}] \le 1/(1-x)^{3/4}$, l'integrale è convergente perchè $3/4 < 1$]

5.66 Verificare che, se $p > 1$ ed $a > 0$, allora

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{a^{1-p}}{p-1}$$

[Per $t \in [a, +\infty)$ si ha

$$\int_a^t \frac{1}{x^p}\, dx = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_a^t = \frac{t^{1-p} - a^{1-p}}{1-p}\,.$$

Essendo $p > 1$, si ha $\lim_{t \to +\infty} t^{1-p} = 0$, da cui l'asserto]

5.67 Verificare che, se $p < 1$ ed $a > 0$, allora l'integrale

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$$

è divergente.

[Per $t \in [a, +\infty)$ si ha

$$\int_a^t \frac{1}{x^p}\, dx = \frac{t^{1-p} - a^{1-p}}{1-p}\,.$$

Essendo $p < 1$, si ha $\lim_{t \to +\infty} t^{1-p} = +\infty$, da cui l'asserto]

5.68 Verificare che, se $a > 0$, l'integrale

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$$

è divergente.

[Per $t \in [a, +\infty)$, si ha

$$\int_a^t \frac{1}{x}\, dx = \log\, t - \log\, a\,.$$

Essendo $\lim_{t \to +\infty} \log\, t = +\infty$, si ha l'asserto]

5.69 Verificare che, per ogni $a \in \mathbb{R}$, si ha:

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} a\,.$$

[Per $t \in [a, +\infty)$, si ha

$$\int_a^t \frac{1}{1+x^2}\, dx = [\operatorname{arctg} x]_a^t = \operatorname{arctg} t - \operatorname{arctg} a\,.$$

Essendo $\lim_{t \to +\infty} \operatorname{arctg} t = \frac{\pi}{2}$, si ha l'asserto]

5.70 Verificare che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \pi$$

[Analogo all'esercizio precedente]

5.71 Verificare che per $\alpha > 0$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha}\,.$$

[Per $t \in (0, +\infty)$, si ha

$$\int_0^t e^{-\alpha x}\, dx = -\frac{1}{\alpha}\left[e^{-\alpha x}\right]_0^t = -\frac{1}{\alpha}[e^{-\alpha t} - 1]\,.$$

Poichè $\lim_{t\to+\infty} e^{-\alpha t} = 0$, ne segue l'asserto]

5.72 Verificare che per $\alpha > 0$

$$\int_{-\infty}^{-1} x\, e^{-\alpha x^2}\, dx = -\frac{1}{2\alpha e^{\alpha}}\,.$$

[Per $t \in (-\infty, -1)$, si ha

$$\int_t^{-1} x\, e^{-\alpha x^2}\, dx = -\frac{1}{2\alpha}\int_t^{-1} -2\alpha x\, e^{-\alpha x^2}\, dx = -\frac{1}{2\alpha}\left[e^{-\alpha x^2}\right]_t^{-1} = -\frac{1}{2\alpha}[e^{-\alpha} - e^{-\alpha t^2}]\,.$$

Essendo $\lim_{t\to-\infty} e^{-\alpha t^2} = 0$, si ha l'asserto]

5.73 Calcolare i seguenti integrali

(a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x+5}{(x^3 - x^2 + 5x - 5)}\, dx$; (b) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{x+3}{x^3 - x^2 + 3x - 3}\, dx$

[(a) $\log 3$; (b) $(1/2)\log 3$]

5.74 Calcolare i seguenti integrali

(a) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{2x+1}{x^3 - x}\, dx$; (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^x - 1}{e^{2x} + e^{-x}}\, dx$

[(a) $\log(3/\sqrt{2})$; (b) $(1/3)\log[(e+1)^2/(e^2 - e + 1)]$]

Verificare che

5.75 $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\log x}\, dx$ è divergente

5.76 $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^2}\, dx = \frac{1}{\log 2}$

5.77 $$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^3}\, dx = \frac{1}{2(\log 2)^2}$$

5.78 $$\int_0^{+\infty} x e^{-\sqrt{1+x^2}}\, dx = \frac{2}{e}$$

5.79 Utilizzando i criteri di confronto, stabilire il carattere dei seguenti integrali impropri

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4(1+x^4)}\, dx$; (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x)}\, dx$

(c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}\, dx$; (d) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\, dx$

[(a) Essendo, per $x \in [1, +\infty)$, $1/x^4(1+x^4) \le 1/x^4$, l'integrale converge; (b) diverge; (c) essendo $\sqrt{x^4+1}/x^3 \ge \sqrt{x^4}/x^3 = 1/x$, l'integrale diverge; (d) diverge]

5.80 Verificare che l'integrale

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$$

è convergente.

[Essendo, per $x \in [1, +\infty)$, $0 < e^{-x^2} \le e^{-x}$, si ha

$$0 < \int_1^{\infty} e^{-x^2}\, dx \le \int_1^{\infty} e^{-x}\, dx = 1\,]$$

5.81 Stabilire il carattere dei seguenti integrali impropri

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{x}\right) dx$; (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right) dx$

(c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\log(1+x^2)}\, dx$; (d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx$

(e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{-x}\, dx$; (f) $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-1/x}\, dx$

[(a) è convergente; (b) è convergente; (c) è divergente; (d) è convergente; (e) è convergente; (f) è divergente]

Verificare che :

5.82 $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n\, e^{-\alpha x}\, dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}} \qquad\qquad (\alpha > 0 \quad n \in \mathbb{N})$

[Integrando per parti si ha $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n\, e^{-\alpha x}\, dx = \frac{n}{\alpha}\int_0^{+\infty} x^{n-1}\, e^{-\alpha x}\, dx$, da cui, per l'esercizio 5.71 si ha facilmente l'asserto]

5.83 $\displaystyle\int_{2/\pi}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, \mathrm{sen}\, \frac{1}{x}\, dx = 1$

[Eseguire la sostituzione $1/x = t$]

5.84 $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx\, dx = \frac{a}{a^2+b^2}$

5.85 $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax}\, \mathrm{sen}\, bx\, dx = \frac{b}{a^2+b^2}$

5.86 $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1+x)e^{-x}\, dx = 2$

5E. Funzioni integrali

Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo $[a, b]$. Il teorema fondamentale del calcolo integrale stabilisce che la seguente *funzione integrale*

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \qquad\qquad (\text{con } x_0 \in [a, b]\ )$$

è derivabile in $[a, b]$ (in particolare $F(x)$ è una funzione continua) e la derivata vale $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$. Nel seguito applichiamo questo risultato.

5.87 Stabilire per quali numeri reali x risulta derivabile la seguente funzione

$$F(x) = \int_0^{x} \sqrt{t}\, dt\,.$$

[Si può procedere con il calcolo esplicito dell'integrale, oppure, più velocemente, si può affermare, in base al teorema fondamentale del calcolo integrale, che $F'(x) = \sqrt{x}$ per ogni $x \geq 0$]

5.88 Calcolare la derivata della seguente funzione integrale

$$F(x) = \int_0^{\sqrt{x}} e^{t^2}\, dt\,.$$

[Consideriamo la funzione F composta tramite le due funzioni:

$$y = \sqrt{x}, \qquad G(y) = \int_0^y e^{t^2}\, dt \quad \Rightarrow \quad F(x) = G(\sqrt{x})\,.$$

La derivata della funzione $G(y)$, in base al teorema fondamentale del calcolo integrale, vale $G'(y) = e^{y^2}$. Per la regola di derivazione delle funzioni composte otteniamo

$$F'(x) = G'(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^x\,]$$

5.89 Calcolare la derivata rispetto ad x delle seguenti funzioni integrali

(a) $\displaystyle\int_1^{e^x} \log\, t\, dt$; (b) $\displaystyle\int_0^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{1-t^2}\, dt$

[(a) xe^x; (b) $1/\cos x$]

5.90 Calcolare la derivata rispetto ad x della funzione integrale

$$F(x) = \int_x^1 \operatorname{sen}^2 t\, dt$$

[Rappresentando $F(x) = -\displaystyle\int_1^x \operatorname{sen}^2 t\, dt$, per il teorema fondamentale del calcolo integrale la derivata vale $F'(x) = -\operatorname{sen}^2 x\,$]

5.91 Calcolare la derivata della funzione integrale

$$F(x) = \int_{2x}^{3x} \cos^2 t\, dt$$

[Fissato un numero reale x_0, la funzione integrale $F(x)$ si può rappresentare nella forma

$$F(x) = \int_{2x}^{x_0} \cos^2 t\, dt + \int_{x_0}^{3x} \cos^2 t\, dt = \int_{x_0}^{3x} \cos^2 t\, dt - \int_{x_0}^{2x} \cos^2 t\, dt\,.$$

In base al teorema fondamentale del calcolo integrale, la derivata vale $F'(x) = 3\cos^2(3x) - 2\cos^2(2x)\,$]

5.92 Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a,b]$ e siano $g_1(x)$, $g_2(x)$ funzioni derivabili in $[a,b]$. Generalizzando l'esercizio precedente, verificare che in $[a,b]$ vale la formula di derivazione

$$\frac{d}{dx}\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t)\,dt = f'(g_2(x))g_2'(x) - f'(g_1(x))g_1'(x)\,.$$

5.93 Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_0^x \cos t^2\,dt\,.$

[Dato che $0 \le \cos t^2 \le 1$ per ogni t reale, risulta anche, per $x \ge 0$,

$$0 \le \int_0^x \cos t^2\,dt \le \int_0^x 1\,dt = x\,.$$

Perciò, la funzione integrale data converge a zero per $x \to 0^+$. Si procede in modo analogo per $x \to 0^-$]

5.94 Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x \cos t^2\,dt\,.$

[Come mostrato nell'esercizio precedente, l'integrale converge a zero per $x \to 0$. L'integrale, diviso per x, costituisce quindi una forma indeterminata del tipo 0/0. Per la regola di L'Hôpital e per il teorema fondamentale del calcolo integrale, otteniamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^x \cos t^2\,dt}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x^2}{1} = 1\,]$$

5.95 Calcolare i limiti

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_0^x \operatorname{sen}^2 t\,dt\,;$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_0^x \operatorname{sen}^2 t\,dt$

[(a) 0; (b) 1/3]

5.96 Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\displaystyle\int_0^x \cos t^2\,dt}{1-\cos x}$

[Si tratta di una forma indeterminata 0/0; il limite si può calcolare con il teorema di L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\displaystyle\int_0^x \cos t^2\,dt}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^x \cos t^2\,dt + x\cos x^2}{\operatorname{sen} x} = 1 + \lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^x \cos t^2\,dt}{\operatorname{sen} x} =$$

$$= 1 + \lim_{x\to 0}\frac{\cos x^2}{\cos x} = 2\,]$$

5.97 Calcolare, se esiste, il massimo nell'intervallo $[0,+\infty)$ della funzione integrale

$$F(x) = \int_0^x \frac{\cos t - 2}{t^3 + 2}\, dt$$

[La derivata vale $F'(x) = (\cos x - 2)/(x^3 + 2)$. Essendo $\cos x - 2 \leq 1 - 2 = -1$, la derivata è negativa nell'intervallo $[0, +\infty)$. Perciò $F(x)$ è una funzione strettamente decrescente per $x \geq 0$ ed assume massimo in $[0, +\infty)$ per $x = 0$. Il massimo vale $F(0) = 0$]

5.98 Considerare, per $x > 0$, la funzione integrale

$$F(x) = \int_2^x \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2}\right) dt\,.$$

(a) Studiare la monotonia di $F(x)$ per $x > 0$.

(b) Dimostrare che $F(x)$ ha un asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

(c) Stabilire se $F(x)$ ha punti di flesso nello intervallo $(0, \pi)$.

(d) Stabilire il numero dei punti di flesso di $F(x)$ nell'intervallo $(0, k\pi)$, per ogni numero naturale k.

[(a) La derivata vale $F'(x) = 1 - \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}$, per $x > 0$. Essendo $|\operatorname{sen} x| < |x|$ per ogni $x \neq 0$, risulta $F'(x) > 0$ per ogni $x > 0$. Perciò $F(x)$ è strettamente crescente nell'intervallo $(0, +\infty)$;

(b) $m = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{F(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} F'(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(1 - \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\right) = 1\,;$

abbiamo applicato il teorema di L'Hôpital al rapporto $F(x)/x$. Poi, calcolando esplicitamente l'integrale della funzione nell'intervallo $[2, x]$, abbiamo:

$$q = \lim_{x\to+\infty} (F(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x - 2 - \int_2^x \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2}\, dt - x\right) = 2 - \lim_{x\to+\infty} G(x)\ ,$$

dove $G(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2}\, dt\,.$

Proviamo che la funzione integrale $G(x)$ è monotòna crescente ed è limitata per $x \to +\infty$. In tal caso esiste finito il limite per $x \to +\infty$ di $G(x)$ e perciò $F(x)$ ammette asintoto obliquo di equazione $y = mx + q$.

G(x) è monotòna crescente perchè $G'(x) = \operatorname{sen}^2 x/x^2 \geq 0$ per ogni $x \in (0, +\infty)$. $G(x)$ è limitata per $x \to +\infty$ perchè, se $x \geq 2$, risulta

$$0 \leq G(x) \leq \lim_{x\to+\infty} G(x) \leq \lim_{x\to+\infty} \int_2^x \frac{1}{t^2}\, dt = \frac{1}{2}\,.$$

(c) La derivata prima vale $F'(x) = 1 - \operatorname{sen}^2 x/x^2$; la derivata seconda vale

$$F''(x) = \frac{-1}{x^4}(2 \operatorname{sen} x \cos x \cdot x^2 - 2x \operatorname{sen}^2 x) = \frac{-2 \operatorname{sen} x}{x^3}(x \cos x - \operatorname{sen} x).$$

La derivata seconda esiste per $x \neq 0$ e si annulla se sen $x = 0$, oppure se tg $x = x$. L'equazione tg $x = x$ si può studiare con l'ausilio del grafico in figura 5.9 .

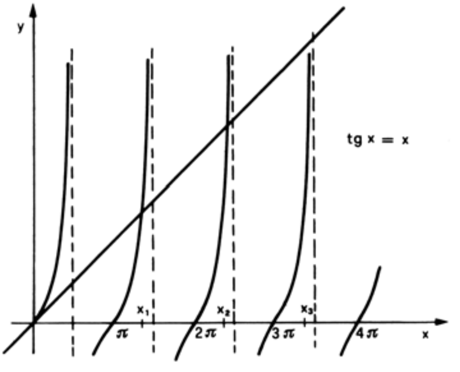


figura 5.9

Per $0 < x < \pi/2$ risulta $\operatorname{tg} x > x$; mentre per $\pi/2 < x < \pi$ risulta $\operatorname{tg} x < 0 < x$. Perciò l'equazione $\operatorname{tg} x = x$ non ha soluzioni nell'intervallo $(0, \pi)$. Dato che anche l'equazione $\operatorname{sen} x = 0$ non ha soluzioni nell'intervallo aperto $(0, \pi)$, la funzione integrale $F(x)$ non ha punti di flesso in $(0, \pi)$.

(d) Si vede dal grafico in figura 5.9, che l'equazione $\operatorname{tg} x = x$ ha una soluzione x_1 nell'intervallo $(0, 2\pi)$, una seconda soluzione x_2 nell'intervallo $(2\pi, 3\pi)$, e così via. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, l'equazione $\operatorname{tg} x = x$ ha $k-1$ soluzioni nell'intervallo $(0, k\pi)$, come pure l'equazione $\operatorname{sen} x = 0$. In definitiva, la funzione integrale $F(x)$ ha $2k - 2$ flessi nell'intervallo $(0, k\pi)$]

5F. Disuguaglianze integrali

5.99 Siano $f(x)$ e $g(x)$ funzioni continue nell'intervallo $[a, b]$ e siano p, $q > 1$ tali che $1/p + 1/q = 1$. Dimostrare la seguente *disuguaglianza di Hölder*:

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^q \, dx \right)^{1/q} .$$

[La disuguaglianza sussiste in modo ovvio se una delle funzioni f e g è identicamente nulla. Altrimenti, posto

$$F(x) = f(x) / \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} ; \qquad G(x) = g(x) / \left(\int_a^b |g(x)|^q \, dx \right)^{1/q} ,$$

evidentemente, si ha

$$(*) \qquad \int_a^b |F(x)|^p \, dx = \int_a^b |G(x)|^q \, dx = 1 .$$

Utilizzando la disuguaglianza dell'esercizio 1.58, si ha:

$$|F(x)G(x)| \leq \frac{|F(x)|^p}{p} + \frac{|G(x)|^q}{q} \qquad \forall\, x \in [a,b]\,.$$

Integrando su $[a,b]$, ne segue, per la $(*)$

$$\int_a^b |F(x)G(x)|\, dx \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

ossia

$$\frac{\displaystyle\int_a^b |f(x)g(x)|\, dx}{\left(\displaystyle\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \cdot \left(\displaystyle\int_a^b |g(x)|^q\, dx\right)^{1/q}} \leq 1$$

da cui l'asserto]

5.100 Sia $f(x)$ una funzione continua nell'intervallo $[a,b]$ e poniamo, per $p \geq 1$

$$\phi(p) = \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p}$$

Verificare che $\phi(p)$ è crescente per $p \in [1, +\infty)$.

[Siano p, $q \in [1, +\infty)$ tali che $p < q$. Allora

$$\int_a^b |f(x)|^p\, dx = \int_a^b (|f(x)|^q)^{p/q} \cdot 1\, dx\,.$$

Posto $r = q/p$, $s = q/(q-p)$, si ha $1/r + 1/s = 1$; allora, applicando la disuguaglianza di Hölder, di esponenti r e s, alle funzioni $F(x) = (|f(x)|^q)^{p/q}$ e $G(x) = 1$, si ha dalla precedente uguaglianza

$$\int_a^b |f(x)|^p\, dx = \int_a^b F(x)G(x)\, dx \leq \left(\int_a^b [F(x)]^r\, dx\right)^{1/r} \left(\int_a^b [G(x)]^s\, dx\right)^{1/s}$$

ovvero, per le posizioni fatte

$$\int_a^b |f(x)|^p\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^q\, dx\right)^{p/q} \cdot \left(\int_a^b dx\right)^{1-p/q} = \left(\int_a^b |f(x)|^q\, dx\right)^{p/q} \cdot (b-a)^{1-p/q}$$

da cui segue facilmente l'asserto]

5.101 Sia $f(x)$ una funzione continua nell'intervallo $[a,b]$; allora

$$\lim_{p \to +\infty} \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

[Sia $M = \max\limits_{a \leq x \leq b} |f(x)| > 0$; allora, per ogni $k > M^{-1}$ esiste un intervallo $[a_k, b_k] \subset [a,b]$ con $a_k \neq b_k$, tale che

$$|f(x)| > M - \frac{1}{k} \qquad\qquad \forall\, x \in [a_k, b_k]\,;$$

per cui, per $x \in [a, b]$, si ha

$$(*) \qquad \left(M - \frac{1}{k}\right) \chi_{[a_k, b_k]}(x) \leq |f(x)| \leq M$$

ove $\chi_{[a_k,b_k]}(x)$ è la funzione caratteristica di $[a_k, b_k]$, cioè vale 1 per $x \in [a_k, b_k]$ e vale 0 in $[a, b] - [a_k, b_k]$. Dalla $(*)$ segue

$$\left(\int_a^b \left(M - \frac{1}{k}\right)^p \chi_{[a_k,b_k]}(x)\, dx\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \leq M(b-a)^{1/p}\,.$$

Il primo membro di tali disuguaglianze è uguale a $\left(M - \frac{1}{k}\right)(b_k - a_k)^{1/p}$ e tende a $M - \frac{1}{k}$ per $p \to +\infty$. Pertanto risulta

$$M - \frac{1}{k} \leq \lim_{p \to +\infty} \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \leq M$$

e l'asserto segue con un passaggio al limite per $k \to +\infty$]

5.102 Sia $f : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ una funzione continua e decrescente. Dimostrare che si ha

$$f(x) \leq \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt \qquad\qquad \forall\, x > 0\,.$$

[Basta osservare che, essendo $f(x)$ decrescente, risulta $f(x) = \inf\limits_{0 \leq t \leq x} f(t)$ per cui, dal teorema della media, segue l'asserto]

5.103 Sia f come nell'esercizio precedente. Posto per $x > 0$:

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt$$

dimostrare che $g(x)$ è decrescente.

[Si ha, come indicato nel paragrafo precedente:

$$g'(x) = \left(x\, f(x) - \int_0^x f(t)\, dt\right) / x^2$$

ed allora l'asserto segue dal precedente esercizio]

5.104 Sia $\phi : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ una funzione convessa e derivabile e sia $f : [a, b] \longrightarrow [0, \infty)$ una funzione continua. Dimostrare che vale la seguente *disuguaglianza di Jensen*

$$\phi\left(⨍_a^b f(t)\, dt\right) \leq ⨍_a^b \phi(f(t))\, dt$$

ove $\fint_a^b g\,dt$ sta per $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b g\,dt\,.$

[Dalla (2) del paragrafo 1D segue:

$$\phi(x) \geq \phi(x_0) + \phi'(x_0)(x - x_0), \qquad\qquad \forall\, x,\, x_0$$

Poniamo $x = f(t)$ e $x_0 = \fint_a^b f(s)\,ds$. Allora si ha

$$\phi(f(t)) \geq \phi\left(\fint_a^b f(s)\,ds\right) + \phi'\left(\fint_a^b f(s)\,ds\right)\left(f(t) - \fint_a^b f(s)\,ds\right).$$

Integrando su $[a, b]$ ambo i membri si ha

$$\int_a^b \phi(f(t))\,dt \geq (b-a)\phi\left(\fint_a^b f(s)\,ds\right) + \phi'\left(\fint_a^b f(s)\,ds\right)\cdot \int_a^b \left(f(t) - \fint_a^b f(s)\,ds\right)dt =$$

$$= (b-a)\phi\left(\fint_a^b f(s)\,ds\right) + \phi'\left(\fint_a^b f(s)\,ds\right)\left[\int_a^b f(t)\,dt - (b-a)\fint_a^b f(s)\,ds\right]$$

Poichè il termine in parentesi quadra all'ultimo membro è zero, ne segue l'asserto]

5.105 Sia $f : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ una funzione continua, strettamente crescente, tale che $f(0) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Posto $g = f^{-1}$, dimostrare per via geometrica che vale la disuguaglianza

$$ab \leq \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^b g(y)\,dy \qquad\qquad \forall\, a, b > 0\,.$$

[Basta osservare la fig. 5.10 e ricordare il significato geometrico di integrale]

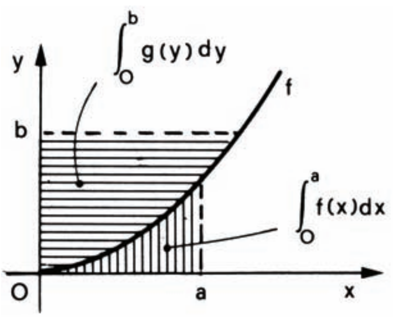


figura 5.10

5.106 Utilizzando l'esercizio precedente, dare un'altra dimostrazione della disuguaglianza 1.58.

[Basta scegliere come funzione $f(x)$ la funzione $f(x) = x^{p-1}$]

Capitolo 6

SERIE NUMERICHE

6A. Generalità sulle serie numeriche

Se a_n è una successione di numeri reali, con il simbolo

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1}$$

si indica la *serie di termine generale* a_n. Posto

$$s_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k = \sum_{n=1}^{k} a_n \,,$$

la somma s_k si chiama *ridotta* (o *somma parziale*) k*-sima* della serie (1).

Se la successione s_k è convergente allora si dice che la serie (1) è *convergente*, si pone

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{k\to+\infty} s_k = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n \tag{2}$$

ed il primo membro della (2) si chiama *somma* della serie (1).

Se il limite di s_k è infinito, si dice che la serie è *divergente*. Se non esiste il limite di s_k, si dice che la serie è *indeterminata*; in quest'ultimo caso, la somma al primo membro della (2) non è definita.

Se la serie di termine generale a_n è convergente allora la successione a_n è infinitesima (infatti, è $a_n = s_n - s_{n-1}$ e perciò $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} s_n - \lim\limits_{n\to+\infty} s_{n-1} = 0$). Quindi, se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \neq 0$, oppure se il limite di a_n non esiste, allora la serie non è convergente.

Di solito, con il simbolo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

si indica, con abuso di notazione, sia la serie di termine generale a_n che la sua somma (ammesso che quest'ultima esista).

Si vede subito che, data una serie convergente, si può modificare un numero finito di suoi termini senza che essa cessi di essere convergente.

In particolare, se la serie di termine generale a_n converge, anche la serie

(3) $$r_k = a_{k+1} + a_{k+2} + \dots$$

ottenuta da essa sopprimendone i primi k termini, è convergente.

La serie (3) si chiama *resto parziale* k-simo della serie (1) e risulta

$$r_k = s - s_k$$

ove s_k è la ridotta k-sima della serie (1) ed s la sua somma. Pertanto il resto parziale k-simo coincide con l'errore che si commette sostituendo alla somma s la ridotta k-sima.

Ricordiamo, infine, che una serie si dice *regolare* se essa è convergente o divergente.

Di facile verifica sono le seguenti proprietà:

(a) Se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ sono due serie convergenti e $c \in \mathbb{R}$, allora anche le serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c\, a_n$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ sono convergenti e si ha:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c\, a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,; \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,.$$

(b) Se la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ è divergente e $c \neq 0$ allora anche la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c\, a_n$ è divergente.

6.1 Verificare che la serie geometrica di primo termine 1 e ragione x

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

è convergente se e solo se $|x| < 1$ e che, in tal caso, risulta

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \frac{1}{1-x}\,.$$

[Se $x \neq 1$, la ridotta n-sima è $\sum\limits_{k=1}^{n} x^{k-1} = 1 + x + \dots + x^{n-1} = (1 - x^n)/(1 - x)$ ed essa converge se e solo se converge la successione x^n, cioè se e solo se $|x| < 1$. Poi se $x = 1$, la ridotta n-sima è $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1 = n$ e diverge positivamente per $n \to +\infty$]

6.2 Sia a un numero reale diverso da zero. Verificare che la serie geometrica di primo termine a e ragione x.

$$a + ax + ax^2 + ax^3 + \dots$$

converge se e solo se $|x| < 1$. In tal caso risulta

$$\sum_{k=1}^{\infty} a\, x^{k-1} = \frac{a}{1-x}\,.$$

[La ridotta n-sima, per $x \neq 1$, è $s_n = a(1-x^n)/(1-x)$]

6.3 Utilizzando l'esercizio precedente, verificare che

$$0.313131\ldots = \frac{31}{99}$$

[Si ha

$$0.313131\ldots = 0.31 + 0.0031 + 0.000031 + \ldots = \frac{31}{10^2} + \frac{31}{10^4} + \frac{31}{10^6} + \ldots$$

perciò dobbiamo calcolare la somma s della serie geometrica di primo termine $a = 31/10^2$ e ragione $x = 1/10^2$. Per l'esercizio precedente, si trova

$$s = \frac{31/10^2}{1-(1/10^2)} = \frac{31}{10^2-1} = \frac{31}{99}\,]$$

6.4 La fig. 6.1 rappresenta un triangolo equilatero, di altezza $h = 1$, contenente infiniti cerchi col centro sul segmento CD, tangenti

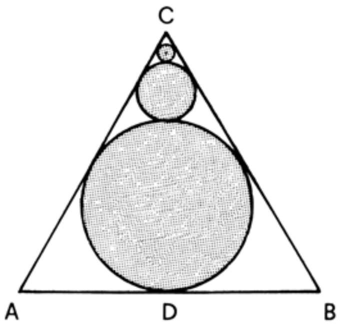


figura 6.1

ai lati del triangolo e tra di loro. Quale frazione della superficie del triangolo è occupata dai cerchi?

[Con considerazioni geometriche si vede che il cerchio maggiore ha raggio 1/3, il secondo ha raggio 1/9, il terzo ha raggio 1/27 e così via. Perciò l'area totale dei cerchi è

$$A = \pi[(1/3)^2 + (1/9)^2 + (1/27)^2 + \ldots] = \pi[1/9 + 1/81 + 1/729 + \ldots]$$

In parentesi quadra figura la serie geometrica di primo termine $a = 1/9$ e di ragione $x = 1/9$. La somma di tale serie è

$$s = \frac{1/9}{1 - 1/9} = 1/8$$

e perciò $A = \pi/8$. Poichè l'area del triangolo vale $1/\sqrt{3}$ la frazione del triangolo occupata dai cerchi è $(\pi/8)/(1/\sqrt{3}) = 0.68017\ldots$]

6.5 Dare un esempio di serie non convergente, il cui termine generale sia infinitesimo.

[La serie armonica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

è divergente positivamente. Infatti, posto

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

la successione s_n è crescente e perciò ha limite s. Se fosse $s \in \mathbb{R}$, esisterebbe ν tale che $|s_n - s| < 1/4$ per $n > \nu$. Allora per n, $m > \nu$, si avrebbe

$$|s_m - s_n| \le |s_m - s| + |s - s_n| < 1/2$$

ed, in particolare, per $n \ge \nu$, sarebbe

$$|s_{2n} - s_n| < 1/2\,.$$

D'altra parte, risulta:

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \ge n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\,,$$

il che è assurdo]

6.6 Dimostrare, utilizzando la proprietà (a) del presente paragrafo 6A, che la serie armonica non può essere convergente e dunque è divergente.

[Supponiamo che la serie armonica converga verso $s \in \mathbb{R}$:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = s \in \mathbb{R}\,.$$

Allora, per (a), la serie ottenuta moltiplicando per $\frac{1}{2}$ è anch'essa convergente e si ha

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2k} + \ldots = \frac{s}{2}\,.$$

Ne segue che anche la serie

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2h-1} + \ldots$$

è convergente e si ha

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots=s-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots\right)=s-\frac{s}{2}=\frac{s}{2}\,.$$

Essendo $\frac{1}{h}>\frac{1}{h+1}$ per ogni $h\in\mathbb{N}$, si avrà la disuguaglianza

$$(*)\qquad 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots>\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots$$

che è una contraddizione, in quanto entrambe le somme in (*) sono uguali a $\frac{s}{2}$,]

6.7 Verificare che la serie

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots$$

è divergente.

[Basta invocare la proprietà (b) e tener presente l'esercizio precedente]

6.8 Verificare che la serie $1+2+3+\ldots+n+\ldots$ è divergente.

[Si ha $s_n=1+2+3+\ldots+n=n(n+1)/2$, per le note proprietà delle progressioni aritmetiche. Perciò $\lim_{n\to+\infty} s_n=+\infty$]

6.9 Verificare che è indeterminata la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n=-1+1-1+1-1+\ldots$$

[Si ha $s_n=-1$ per n dispari, $s_n=0$ per n pari, perciò la successione s_n non è regolare]

6.10 Calcolare la somma delle seguenti serie geometriche

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty}3^n$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n$

[(a) 2; (b) 1; (c) $+\infty$; (d) 5]

6.11 Verificare che, per ogni $x\in(-1,1)$ vale la formula

$$\sum_{n=k}^{\infty}x^n=\frac{x^k}{1-x}$$

[Basta osservare che $\sum_{n=k}^{\infty} x^n = x^k + x^{k+1} + \ldots = x^k(1 + x + \ldots)$]

6.12 Verificare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ è convergente ed ha per somma 1.

[Essendo $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, si ha:

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{k+1},$$

e perciò:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{k \to +\infty} \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1]$$

6.13 Sia a_n una successione di numeri reali. Verificare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1}) \quad \text{converge} \quad \Leftrightarrow \quad a_n \text{ converge.}$$

Inoltre, se $a = \lim_{n \to +\infty} a_n$, allora $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1}) = a_1 - a$.

[Si ha $\sum_{n=1}^{k} (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{k+1}$, da cui segue subito l'asserto]

6.14 Verificare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ è convergente ed ha per somma 1/2.

[Si ha $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$ ed allora, posto $a_n = 1/[2(2n-1)]$, si ha $a_{n+1} = 1/[2(2n+1)]$ e siamo nelle condizioni dell'esercizio precedente. Perciò

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)}\right] = a_1 - \lim_{n \to +\infty} a_{n+1} = 1/2 \;]$$

6.15 Verificare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{n+1}{n}$ è divergente, dopo aver calcolato la somma s_k dei primi k termini.

[Si utilizzi la relazione $\log[(n+1)/n] = \log(n+1) - \log n$. Si trova $s_k = \log(k+1)$]

6.16 Dopo aver dimostrato per induzione la formula

$$\sum_{n=1}^{k} \log \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \log \frac{2(k+1)}{k+2},$$

calcolare la somma della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$$

[$\log 2$]

6.17 Dopo aver dimostrato per induzione la formula

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{2}{n(n+2)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2},$$

calcolare la somma della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$$

[3/4]

6.18 Verificare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{1/n}$ è divergente.

[Basta osservare che $\lim_{n\to+\infty} 2^{1/n} = 1$]

6B. Serie a termini non negativi

Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie a termini non negativi, e sia s_n la sua ridotta n-sima. Essendo $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$, la successione s_n è crescente e perciò regolare. Dalle proprietà delle successioni crescenti segue che:

la serie a termini non negativi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *è convergente se e solo se la successione* s_n *delle sue ridotte è limitata superiormente.*

Altrimenti essa diverge positivamente.

Per le serie a termini non negativi vale il seguente *criterio di confronto*: siano $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ due serie tali che

$$0 \leq a_n \leq b_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Allora:

(i) se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b < +\infty$, si ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq b$

(ii) se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$, si ha $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty\,.$

6.19 Verificare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

è convergente.

[Dimostriamo che la successione s_k delle ridotte è limitata superiormente. Osserviamo che $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \geq 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^{n-1}$ e perciò $1/n! \leq 1/2^{n-1}$. Ne segue

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n!} \leq \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^{n-1}}$$

Poichè all'ultimo membro figura la ridotta k-sima della serie geometrica di primo termine 1 e ragione $1/2$, allora s_k è limitata superiormente e si ha

$$s_k \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-1/2} = 2]$$

6.20 Verificare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ è convergente.

[Essendo $n^2 + n \leq 2n^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora risulta $1/n^2 \leq 2/(n^2+n) \leq 2/[n(n+1)]$. Applicando l'esercizio 6.12, si ha l'asserto]

6.21 Stabilire il carattere delle seguenti serie

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

[(a) Essendo $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, la serie non può convergere e dunque, essendo a termini non negativi, diverge. (b) Essendo $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ la serie diverge. (c) Essendo $n/(n^3+1) < n/n^3 = 1/n^2$, la serie converge a norma del criterio (i) e dell'esercizio precedente. (d) Essendo $n/(n^2+1) \geq n/(n^2+n^2) = 1/2n$, la serie diverge a norma del criterio (ii), in quanto essa maggiora una serie divergente]

6.22 Studiare il carattere della serie

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots \qquad (p \in \mathbb{R})$$

detta serie *armonica generalizzata* (o *serie di Riemann*)

[Per $p \leq 1$, si ha $n^p \leq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, perciò risulta $1/n \leq 1/n^p$. Poichè la serie di termine generale $1/n$ (cioè la serie armonica) è divergente, tale risulta anche la serie data, grazie alla (ii).

Per $p > 1$, indichiamo con s_n la ridotta n-sima della serie data ed osserviamo che

$$s_{2^n} - s_{2^{n-1}} = \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} \frac{1}{k^p} = (2^{n-1}+1)^{-p} + (2^{n-1}+2)^{-p} + \ldots + (2^{n-1}+2^{n-1})^{-p} <$$

$$< 2^{n-1}(2^{n-1})^{-p} = (2^{1-p})^{n-1}\,.$$

Pertanto, essendo $\sum_{i=1}^{n}(s_{2^i} - s_{2^{i-1}}) = s_{2^n} - s_1$ si ha:

$$s_{2^n} < \frac{1}{1-2^{1-p}} + s_1 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Da ciò segue che, in questo caso, la successione delle ridotte è limitata superiormente e perciò, grazie a (i), la serie è convergente. Per una dimostrazione diversa, si veda l'esercizio 6.56 del paragrafo 6E]

Dal criterio di confronto enunciato al principio del paragrafo si ricava il seguente *criterio di confronto mediante i limiti*:

Sia $a_n \geq 0$, $b_n > 0$ e sia

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l\,.$$

(j) Se $0 < l < +\infty$, allora le serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sono entrambe convergenti o entrambe divergenti.

(jj) Se $l = 0$ e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, allora anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente.

(jjj) Se $l = +\infty$ e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, allora anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge:

Dal criterio di confronto mediante i limiti e dall'esercizio 6.22, si ricava il seguente notevole *criterio degli infinitesimi*:

Sia $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ una serie a termini non negativi, sia $p \in \mathbb{R}$ e supponiamo che esista il limite

$$l = \lim_{n\to+\infty} n^p a_n\,.$$

Allora:

$$l \in (0, +\infty) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} a_n & \text{convergente, se } p > 1 \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n & \text{divergente, se } p \leq 1 \end{cases}$$

$$l = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ convergente, se } p > 1$$

$$l = +\infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergente, se } p \leq 1.$$

6.23 Verificare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\log n)/n^2$ è convergente.

[Posto $a_n = (\log n)/n^2$ e $b_n = 1/n^{3/2}$, si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{\sqrt{n}} = 0$$

ed allora, basta applicare il criterio (jj) e tener presente l'esercizio 6.22, oppure si può applicare il criterio degli infinitesimi con $p = 3/2$]

6.24 Verificare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(3^n - n)$ è convergente.

[Posto $a_n = 1/(3^n - n)$ e $b_n = 1/3^n$, si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{3^n - n} = 1$$

ed allora, poichè la serie geometrica di ragione 1/3 è convergente per il criterio (j), si ha l'asserto]

6.25 Applicando il criterio degli infinitesimi, studiare il carattere delle seguenti serie

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+1}{n^4+n+1}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-1}{3n^2+2}$

[(a) Essendo $\lim_{n\to+\infty} n^2 \frac{3n^2+1}{n^4+n+1} = 3$, la serie converge. (b) Essendo $\lim_{n\to+\infty} n \frac{5n-1}{3n^2+2} = \frac{5}{3}$, la serie diverge]

6.26 Applicando il criterio degli infinitesimi, stabilire il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$.

[Essendo $\lim_{n\to+\infty} n\dfrac{\log n}{n} = +\infty$, la serie diverge]

6.27 Applicando il criterio degli infinitesimi, studiare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2}{n} - \operatorname{sen}\dfrac{1}{n}\right)$.

[Essendo $\lim_{n\to+\infty} n\left(\dfrac{2}{n} - \operatorname{sen}\dfrac{1}{n}\right) = 1$, la serie diverge]

6.28 Stabilire il carattere delle seguenti serie numeriche

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}(\pi - 2\operatorname{arctg} n)$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty}(\pi - 2\operatorname{arctg} n^2)$

[(a) Con lo scopo di stabilire l'ordine di infinitesimo della successione

$$a_n = \pi - 2\operatorname{arctg} n$$

calcoliamo con il teorema di l'Hôpital, il seguente limite di funzione

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi - 2\operatorname{arctg} x}{1/x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{2}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{1+x^2} = 2\,.$$

Pertano risulta anche

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi - 2\operatorname{arctg} n}{1/n} = 2$$

e la serie data ha lo stesso carattere della serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ ed è pertanto divergente.
(b) Con lo stesso metodo dell'esercizio nel caso (a), essendo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi - 2\operatorname{arctg} x^2}{1/x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^4}{1+x^4} = 2\,,$$

la serie data ha lo stesso carattere della serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ ed è quindi convergente]

6.29 Applicando il criterio degli infinitesimi, studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \operatorname{sen}\frac{1}{n}\right).$$

[Ricordando la formula di Taylor per la funzione sen x (paragrafo 11C della parte prima): $\operatorname{sen} x = x - \dfrac{x^3}{6} + \circ(x^4)$, posto $x = 1/n$, risulta $\operatorname{sen}(1/n) = (1/n) - 1/6n^3 + \circ(1/n^4)$, da cui:

$$\lim_{n\to+\infty} n^3\left(\frac{1}{n} - \operatorname{sen}\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} n^3\left(\frac{1}{6n^3} + \circ\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) = \frac{1}{6}\,.$$

Applicando il criterio degli infinitesimi con $p = 3$, si vede che la serie è convergente]

6.30 Applicando il criterio degli infinitesimi, studiare il carattere delle serie

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} (e^{1/n} + e^{-1/n} - 2) \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} (e^{1/n} - e^{-1/n})$$

[(a) Utilizzando lo sviluppo in formula di Taylor

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \circ(x^2)$$

e ponendo, successivamente, $x = 1/n$ e $x = -1/n$, si ottiene:

$$e^{1/n} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right) ; \qquad e^{-1/n} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right) .$$

Sommando membro a membro, si ha $e^{1/n} + e^{-1/n} = 2 + 1/n^2 + \circ(1/n^2)$. Risulta quindi:

$$\lim_{n \to +\infty} n^2(e^{1/n} + e^{-1/n} - 2) = 1 .$$

In base al criterio degli infinitesimi per $p = 2$, la serie è convergente. (b) Utilizzando lo stesso metodo di (a) ed il criterio degli infinitesimi per $p = 1$, la serie risulta divergente]

6.31 Applicando il criterio degli infinitesimi, studiare il carattere delle serie

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n^3 + 1} - n) \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n^3 + n} - n)$$

[(a) Come indicato nell'esercizio 11.48 (a) della parte prima, risulta

$$\sqrt[3]{n^3 + 1} - n = \frac{1}{3n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right) .$$

In base al criterio degli infinitesimi per $p = 2$, la serie è convergente. (b) Utilizzando lo stesso metodo di (a) ed il criterio degli infinitesimi per $p = 1$, si vede che la serie diverge]

6.32 Applicando il criterio degli infinitesimi, stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - n^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{n}\right)$$

[Ricordando che (si veda la formula 11.30 (a) della parte prima): $\operatorname{sen}^2 x = x^2 - x^4/3 + \circ(x^5)$ e ponendo $x = 1/n$, si ha $1 - n^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{n} = 1 - n^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{3n^4} + \circ\left(\frac{1}{n^5}\right)\right) = \frac{1}{3n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

In base al criterio degli infinitesimi per $p = 2$, si vede che la serie converge]

6.33 Dimostrare che, se la serie a termini positivi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente, allora, qualunque sia $h \in \mathbb{N}$ anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^h$ è convergente.

[Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente, allora risulta $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ e perciò esiste ν tale che $a_n < 1$ per ogni $n \geq \nu$. Ne segue che $a_n^h \leq a_n$ per ogni $n \geq \nu$ e quindi, per il criterio di confronto enunciato al principio del paragrafo, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^h$ è convergente]

Per stabilire se una serie a termini positivi sia o meno convergente, assai utili sono i seguenti due criteri.

CRITERIO DELLA RADICE. Sia $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *una serie a termini non negativi e supponiamo che esista il limite*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l\,.$$

Allora:

$$l < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{converge}$$

$$l > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{diverge.}$$

CRITERIO DEL RAPPORTO. Sia $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *una serie a termini positivi e supponiamo che esista il limite*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l\,.$$

Allora:

$$l < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{converge}$$

$$l > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{diverge.}$$

I due precedenti criteri non sono utilizzabili se $l = 1$.

Infatti, ad esempio, essi non possono applicarsi alla serie armonica generalizzata $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$, per la quale risulta ($p > 0$):

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1/(n+1)^p}{1/n^p} = 1$$

mentre la serie diverge per $p \leq 1$ e converge per $p > 1$.

6.34 Verificare che le serie

$$\text{(a)}\ \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^n \qquad\qquad \text{(b)}\ \sum_{n=1}^{\infty} n!/n^n$$

sono convergenti.

[(a) Si ha $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1/n^n} = \lim_{n\to+\infty} 1/n = 0$ e quindi, per il criterio della radice, la serie converge.

(b) Si ha $l = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)!(n+1)^{n+1}}{n!/n^n} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)!n^n}{n!(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$

in quanto $(n+1)!/n! = n+1$.

Essendo $\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} 1/[(n+1)/n]^n = \lim_{n\to+\infty} 1/(1+1/n)^n = 1/e < 1$, allora è $l = 1/e < 1$. Per il criterio del rapporto, la serie converge]

6.35 Verificare che le serie

$$\text{(a)}\ \sum_{n=1}^{\infty} n/2^n \qquad\qquad \text{(b)}\ \sum_{n=1}^{\infty} 2^n/n!$$

sono convergenti.

[(a) Si ha $\lim_{n\to+\infty} (n/2^n)^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} n^{1/n}/2 = 1/2$ (ved. il paragrafo 7D della parte prima) e quindi, per il criterio della radice, la serie converge.

(b) Si ha $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2^{n+1}/(n+1)!}{2^n/n!} = \lim_{n\to+\infty} 2/(n+1) = 0$ (in quanto $(n+1)!/n! = n+1$) e quindi, per il criterio del rapporto, la serie converge]

6.36 Verificare che le serie

$$\text{(a)}\ \sum_{n=1}^{\infty} n^n/(2^n \cdot n!) \qquad\qquad \text{(b)}\ \sum_{n=1}^{\infty} 2^n/n^5$$

sono divergenti.

[(a) Si ha

$$l = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1}/2^{n+1}(n+1)!}{n^n/2^n n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1}2^n n!}{n^n 2^{n+1}(n+1)!} = \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e/2.$$

Essendo $l = e/2 > 1$, per il criterio del rapporto, la serie diverge.

(b) Si ha $l = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n/n^5} = 2 \lim_{n\to+\infty} (1/\sqrt[n]{n})^5 = 2$ e perciò la serie diverge, a norma del criterio della radice]

6.37 Studiare, per $x > 0$, il carattere delle serie

$$\text{(a)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n+1)!} \qquad\qquad \text{(b)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

[(a) Essendo $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n/n!}{x^{n-1}/(n-1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^n(n-1)!}{x^{n-1}n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x}{n} = 0$, per il criterio del rapporto, la serie converge qualunque sia $x > 0$.
(b) Essendo $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{n+1}/(n+1)}{x^n/n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^{n+1}n}{x^n(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1}x = x$, allora, per il criterio del rapporto, la serie converge per $0 < x < 1$ e diverge per $x > 1$. Infine, per $x = 1$, si ottiene la serie armonica, che è divergente]

6.38 Stabilire il carattere delle serie

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} \qquad\qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^n$$

[(a) Posto $a_n = \frac{n^2}{n!}$, si ha $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n^2} = 0$. Perciò, per il criterio del rapporto, la serie è convergente.
(b) Si ha $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{3n-1} = \frac{1}{3}$ e perciò, per il criterio della radice, la serie è convergente]

6.39 Stabilire il carattere delle serie numeriche

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)!} \qquad\qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^n}{n!}$$

[(a) Utilizziamo il criterio del rapporto con $a_n = \frac{n^n}{(n+1)!}$. Abbiamo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{n+1}{n+2}$$

e tale quantità converge al numero e per $n \to +\infty$. Pertanto, in base al criterio del rapporto, la serie data è divergente
(b) Posto $a_n = \frac{(n-1)^n}{n!}$ risulta

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(n-1)^n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(1-\frac{1}{n})^n}\frac{n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e^{-1}} = e\,.$$

Per il criterio del rapporto, la serie data è divergente]

6.40 Stabilire il carattere delle seguenti serie numeriche

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \qquad\qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

[(a) Ponendo $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ si ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{[2(n+1)]!}{[(n+1)!]^2} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \cdot \frac{(n!)^2}{[(n+1)!]^2} =$

$$(2n+2)(2n+1) \cdot \left[\frac{n!}{(n+1)!}\right]^2 = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}$$

e tale quantità converge al numero 4 per $n \to +\infty$. In base al criterio del rapporto la serie data è divergente.
(b) Con lo stesso metodo del caso in (a) si verifica che la serie data è convergente]

6.41 Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{\sqrt{(2n)!}}$$

[Poniamo $a_n = n!/\sqrt{(2n)!}$. Otteniamo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{\sqrt{[2(n+1)]!}} \cdot \frac{\sqrt{(2n)!}}{n!} = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \sqrt{\frac{(2n)!}{(2n+2)!}} = (n+1) \cdot \sqrt{\frac{1}{(2n+2)(2n+1)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\,.$$

Per il criterio del rapporto la serie data è convergente]

6.42 Determinare i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali risulta convergente la seguente serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha n}}{n!}$$

[Utilizziamo il criterio del rapporto e calcoliamo il rapporto fra due termini consecutivi:

$$\frac{(n+1)^{\alpha(n+1)}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^{\alpha n}} = \left[\frac{(n+1)^{(n+1)}}{n^n}\right]^{\alpha} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right]^{\alpha} (n+1)^{\alpha} \frac{1}{n+1} =$$

$$= \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right]^{\alpha} (n+1)^{\alpha-1}\,.$$

Per $n \to +\infty$ tale quantità ammette limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right]^{\alpha} (n+1)^{\alpha-1} = e^{\alpha} \lim_{n\to+\infty} (n+1)^{\alpha-1}$$

ed il limite vale 0 se $\alpha < 1$, vale $e^{\alpha} = e$ se $\alpha = 1$, mentre vale $+\infty$ se $\alpha < 1$. In definitiva la serie data è convergente se e solo se $\alpha < 1$]

6C. Serie alternate

Una serie del tipo

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots \qquad (1)$$

con $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si chiama *serie alternata*, o *serie a termini di segno alterno.*

Un esempio è dato dalla *serie armonica alternata*

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots$$

Abbiamo già visto che la serie armonica diverge; vedremo che invece la serie armonica alternata è convergente.

Sulle serie alternate vale il seguente notevole criterio:

Se $a_n \geq a_{n+1}$ e $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, *allora la serie (1) è convergente. Inoltre, l'errore che si commette assumendo la ridotta* s_n *come valore approssimato della somma* s *è minore o uguale ad* a_{n+1}, cioè si ha:

$$|s - s_n| \leq a_{n+1}\,. \tag{2}$$

6.43 Data la serie alternata

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1} + \ldots$$

verificare che essa converge e determinare la sua somma s con un errore minore di $1/10$.

[Posto $a_n = 1/(2n-1)$, la successione a_n verifica le ipotesi del criterio precedente, per cui la serie converge. In questo caso la (2) diviene $|s-s_n| \leq a_{n+1} = 1/(2n+1)$; perciò, per calcolare s con un errore inferiore a $1/10$, basterà determinare n in modo che risulti $1/(2n+1) < 1/10$ e cioè $n > 9/2$. Scegliamo dunque $n = 5$, per cui la (2) implica

$$\left| s - \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}\right)\right| < 0.1\,.$$

Essendo $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} = 0.835\ldots$, un valore aprossimato della somma s a meno di $1/10$ è 0.8]

6.44 Verificare che la serie armonica alternata

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots$$

è convergente. Quanti termini della serie si devono sommare in modo che il risultato differisca di $1/100$ dalla somma s della serie?

[La serie armonica alternata verifica le ipotesi del criterio precedente, quindi è convergente. Per determinare n tale che $|s - s_n| \leq 1/100$ basta che sia $a_{n+1} \leq 1/100$. Essendo $a_{n+1} = 1/(n+1)$, imponiamo la condizione $1/(n+1) \leq 1/100$ cioè $n \geq 99$]

6.45 Verificare che la serie alternata $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}$ è convergente per ogni $p>0$.

[Per $p>0$ la successione $1/n^p$ è decrescente e $\lim_{n\to+\infty} 1/n^p = 0$. Perciò la serie è convergente]

6.46 Stabilire il carattere delle seguenti serie alternate

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n+1}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\log(n+1)}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$

[(a) converge; (b) non regolare; (c) converge; (d) converge; (e) converge; (f) converge]

6.47 Data la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n!$, maggiorare l'errore che si commette sostituendo la sua somma con la somma dei suoi primi quattro termini.

[Si ha $|s-s_4| \le 1/120 \cong 0.0083$]

6.48 Data la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\log n}{n}$, verificare che essa converge e maggiorare l'errore che si commette sostituendo la sua somma con la somma dei suoi primi nove termini.

[Si ha $|s-s_9| \le (\log 10)/10 \cong 0.230$]

6.49 Stabilire il carattere delle seguenti serie numeriche

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}\frac{1}{n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\operatorname{sen}\frac{1}{n}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)$

[Per il criterio degli infinitesimi la serie in (a) ha lo stesso carattere della serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ed è quindi divergente.

Per la serie in (b) si può applicare il criterio per le serie a termini di segno alterno. A tale scopo occorre osservare che la funzione $f(x)=\operatorname{sen} x$ è monotòna crescente per $x\in[0,1]\subset[0,\pi/2]$ e quindi la successione $\operatorname{sen}\frac{1}{n}=f\left(\frac{1}{n}\right)$ è decrescente su $n\in\mathbb{N}$. Dato che $\operatorname{sen}\frac{1}{n}\to 0$ per $n\to+\infty$, la serie in (b) è convergente.

Infine la serie in (c) è convergente per il criterio degli infinitesimi, avendo lo stesso carattere della serie armonica generalizzata $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^3$]

6.50 Verificare che è possibile applicare il criterio dele serie a termini di segno alterno per stabilire che la seguente serie numerica è convergente :

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n f(n)\,,$$

dove $f(x) = x^{-2+cos\ \log\log x}$.

[La funzione $f(x)$ è definita quando $\log x > 0$, cioè per $x > 1$. In tal caso la funzione assume valori positivi. Inoltre, essendo *cos* $\log\log x \leq 1$ per ogni $x > 1$, risulta anche

$$f(x) = x^{-2+cos\ \log\log x} \leq x^{-1}\,, \qquad \forall\, x > 1\,.$$

Pertanto $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0\,.$

Verifichiamo ora che $f(x)$ è una funzione decrescente in $(1, +\infty)$ studiando il segno della derivata $f'(x)$. Risulta $f(x) = x^{-2+cos\ \log\log x} = e^{(-2+cos\ \log\log x)\log x}$, da cui, in base alla regola di derivazione delle funzioni composte,

$$f'(x) = f(x)[-\text{sen}\ \log\log x \cdot \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \log x + (-2 + \cos\ \log\log x) \cdot \frac{1}{x}] =$$

$$= \frac{f(x)}{x}[-\text{sen}\ \log\log x - 2 + \cos\ \log\log x].$$

Essendo $\text{sen}\,\alpha + \cos\alpha$ compreso fra -1 ed 1 per qualunque valore dell'argomento α, l'espressione in parentesi quadra risulta minore od uguale a zero, a causa dell'addendo -2. Perciò $f'(x) \leq 0$ in $(1, +\infty)$ e $f(x)$ è una funzione decrescente in tale intervallo. In base al criterio delle serie a termini di segno alterno, la serie data è convergente]

6D. Serie assolutamente convergenti

Una serie di termine generale a_n si dice *assolutamente convergente* se è convergente la serie di termine generale $|a_n|$, cioè la serie

$$(1) \qquad |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots$$

Una serie assolutamente convergente è anche convergente, ma non vale il viceversa, come si vede ad esempio, considerando la serie armonica alternata (ved. gli esercizi 6.5 e 6.42). Si osservi che applicando alla serie (1) i criteri di convergenza per le serie a termini non negativi, si ottengono altrettanti criteri di assoluta convergenza per la serie $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$.

La serie di termine generale a_n si dice *commutativamente convergente* se, per ogni funzione biunivoca $i : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ di $\mathbb{N}$ su $\mathbb{N}$, la serie di termine generale $a_{i(n)}$ è convergente e risulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{i(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \,.$$

In sostanza, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{i(n)}$ si ottiene dalla serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, riordinando i suoi termini e perciò tale serie spesso si chiama *riordinamento* della serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Una delle principali proprietà delle serie assolutamente convergenti è che la loro somma è indipendente dall'ordine dei termini. Infatti si dimostra che: una serie è assolutamente convergente se e solo se essa è commutativamente convergente.

6.51 Verificare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^p x^n$ è assolutamente convergente per $|x| < 1$, qualunque sia $p \in \mathbb{R}$.

[Si ha $|n^p x^n|^{1/n} = (n^{1/n})^p |x|$, per cui $\lim_{n\to+\infty} |n^p x^n|^{1/n} = |x|$. La tesi segue dal criterio della radice]

6.52 Stabilire se le seguenti serie sono convergenti

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n^2}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} n$

[(a) Essendo $|(\operatorname{sen} n)/n^2| \le 1/n^2$ la serie è assolutamente convergente. (b) Per $n \to +\infty$, la successione $a_n = \operatorname{sen} n$ non è infinitesima (si veda l'esercizio 7.75 della parte prima) e quindi la serie non è convergente]

6.53 Verificare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} n$ è indeterminata.

[Nella parte (b) dell'esercizio precedente, si è verificato che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} n$ non è convergente. Si chiede ora di provare, più precisamente, che la serie è indeterminata. A tal fine si verifichi preliminarmente, per induzione, che per la ridotta k-sima vale la formula

$$\sum_{n=1}^{k} \operatorname{sen} n = \frac{\operatorname{sen} \frac{k}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{k+1}{2}}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}} \,.$$

Per $k = 1$ tale formula è vera. Procedendo per induzione, supponiamo la formula vera per $k \in \mathbb{N}$ e addizioniamo ad ambo i membri $\operatorname{sen}(k+1)$. Otteniamo

$$\sum_{n=1}^{k+1} \operatorname{sen} n = \frac{\operatorname{sen} \frac{k}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{k+1}{2}}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}} + \operatorname{sen}(k+1) \,.$$

Ricordando che $\operatorname{sen}(k+1) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{k+1}{2}\right)\cos\left(\frac{k+1}{2}\right)$, abbiamo

$$\sum_{n=1}^{k+1}\operatorname{sen} n = \frac{\operatorname{sen}\frac{k+1}{2}}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}}\left(\operatorname{sen}\frac{k}{2} + 2\operatorname{sen}\frac{1}{2}\cos\frac{k+1}{2}\right).$$

Ora, utilizzando la formula di prostaferesi

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2\operatorname{sen}\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

con $p = (k+2)/2$ e $q = k/2$; otteniamo

$$\operatorname{sen}\frac{k+2}{2} = \operatorname{sen}\frac{k}{2} + 2\operatorname{sen}\frac{1}{2}\cos\frac{k+1}{2}$$

per cui risulta:

$$\sum_{n=1}^{k+1}\operatorname{sen} n = \frac{\operatorname{sen}\frac{k+1}{2}}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}}\cdot\operatorname{sen}\frac{k+2}{2}.$$

La serie data risulta indeterminata, in quanto la successione delle somme parziali non ha limite, come segue da quanto provato nel paragrafo 12.D della parte prima]

6.54 Verificare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n}\right)$ è convergente.

[Si tratta di una serie a termini positivi, in quanto dalle relazioni $(1+1/n)^n < e < (1+1/n)^{n+1}$ segue facilmente che $1/(n+1) < \log\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n}$. Queste ultime disuguaglianze implicano anche che

$$\frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}$$

e perciò la serie converge, perchè maggiorata da una serie convergente]

6.55 Considerata la successione

$$\gamma_k = \sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n} - \log(k+1),$$

dedurre dall'esercizio precedente che essa converge verso una costante γ (detta costante di Eulero) che è anche la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n}\right)$.

[Essendo $\sum_{n=1}^{k}\log\frac{n+1}{n} = \sum_{n=1}^{k}[\log(n+1) - \log n] = \log(k+1) - \log 1 = \log(k+1)$, allora, si ha:

$$\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{n}-\log\frac{n+1}{n}\right)=\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}-\log(k+1)$$

e, per l'esercizio precedente, a primo membro abbiamo una successione convergente. Si dimostra che $\gamma \cong 0.5772$. Si noti che dalle osservazioni precedenti consegue la formula $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\cong\gamma+\log(n+1)$]

6.56 Verificare che la somma della serie armonica alternata $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ è uguale a log 2.

[Dall'esercizio precedente segue

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}=\gamma_k+\log(k+1)=\gamma_k+\log\frac{k+1}{k}+\log k=[(\gamma_k-\gamma)+\log\frac{k+1}{k}]+\gamma+\log k=$$
$$=\rho_k+\gamma+\log k \qquad (\text{con } \rho_k\to 0)\,.$$

Osserviamo ora che

$$\sum_{n=1}^{2k}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2k}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k}\right)=\sum_{n=1}^{2k}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}$$

perciò, per le relazioni precedenti, si ha

$$\sum_{n=1}^{2k}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=\rho_{2k}+\gamma+\log 2k-(\rho_k+\gamma+\log k)=\rho_{2k}-\rho_k+\log 2$$

da cui l'asserto, perchè $\lim_{k\to+\infty}\rho_k=0$]

6.57 Dare un esempio di una serie e di un suo riordinamento, convergenti verso due somme diverse.

[Per l'esercizio precedente, si ha

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots=\log 2$$

Moltiplicando ogni termine per 1/2, si ha

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots=\frac{1}{2}\log 2$$

relazione che possiamo riscrivere come:

$$0+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{6}+0-\frac{1}{8}+0+\frac{1}{10}+\ldots=\frac{1}{2}\log 2\,.$$

Sommando termine a termine questa serie con la prima, si ha la serie:

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\ldots=\frac{3}{2}\log 2\,.$$

Quest'ultima serie è un riordinamento della serie data, nella quale ogni coppia di termini positivi è seguita da un termine negativo, ed essa ha somma diversa dalla serie data]

6E. Criterio degli integrali

Sia $f(x)$ una funzione continua, positiva e decrescente nell'intervallo $[1, +\infty)$ e sia $a_n = f(n)$ per $n \in \mathbb{N}$. Assai utile è il seguente

CRITERIO DEGLI INTEGRALI: *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *è convergente se e solo se l'integrale improprio*

$$\int_1^{+\infty} f(x)\, dx \tag{1}$$

è convergente.

Notiamo che il numero 1 può essere sostituito, nel precedente criterio, da un qualsiasi intero positivo.

Inoltre, sussistono le disuguaglianze

$$\int_1^{k+1} f(x)\, dx \leq \sum_{n=1}^{k} f(n) \leq f(1) + \int_1^{k} f(x)\, dx \tag{2}$$

dalle quali si ricava, ad esempio, che, se l'integrale (1) è convergente, allora si ha:

$$\int_1^{+\infty} f(x)\, dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq f(1) + \int_1^{+\infty} f(x)\, dx\,. \tag{3}$$

6.58 Utilizzando il criterio degli integrali, verificare che la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ è convergente se $p > 1$, è divergente se $0 < p \leq 1$. (Si veda anche l'esercizio 6.22)

[Se $p > 0$, la funzione $f(x) = 1/x^p$ è continua, positiva e decrescente nell'intervallo $[1, +\infty)$. Allora, per il criterio degli integrali, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge se e solo se l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} x^{-p}\, dx = \lim_{t \to +\infty} \int_1^{t} x^{-p}\, dx$ esiste ed è finito. Tenendo presente gli esercizi, 5.66, 5.67, 5.68, si ha l'asserto]

6.59 Stabilire il carattere della serie $\sum_{n=2}^{\infty} 1/(n \log n)$

[Posto $f(x) = 1/(x \log x)$ per $x \in [2, +\infty)$, le ipotesi del criterio degli integrali sono soddisfatte relativamente a tale intervallo. Essendo (si veda l'esercizio 5.75):

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x \log x}\, dx = \lim_{t\to+\infty} \int_{2}^{t} \frac{D \log x}{\log x}\, dx = \lim_{t\to+\infty} [\log \log x]_2^t = +\infty\,,$$

la serie diverge]

6.60 Stabilire il carattere della serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n}$

[Essendo $\int_{2}^{+\infty} [1/(x \log^2 x)]\, dx = 1/\log 2$ (si veda l'esercizio 5.76), la serie converge]

6.61 Verificare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$ è convergente.

[Essendo $\int_{1}^{+\infty} e^{-x}\, dx = 1/e$ l'asserto segue dal criterio degli integrali. Inoltre in questo caso la (3) implica $\frac{1}{e} \le \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} \le \frac{2}{e}$]

6.62 Tenendo presente la (2), dimostrare la disuguglianza ($k \in \mathbb{N}$):

$$\log(k+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} < 1 + \log k\,.$$

[Posto $f(x) = 1/x$, essendo $\int_{1}^{n} f(x)\, dx = \int_{1}^{n} (1/x)\, dx = \log n$, l'asserto segue subito dalla (2)]

6.63 Si consideri la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \log^q n}$.

(a) Utilizzando il criterio degli integrali, verificare che, se $p = 1$, allora la serie converge per $q > 1$ e diverge per $q \le 1$.

(b) Verificare che, se $p > 1$ allora la serie converge per ogni q, mentre se $p < 1$ essa diverge per ogni q.

6.64 Per ogni $x > 0$ sia $f(x)$ il prodotto di x con tutti i numeri

$$\log x,\ \log \log x,\ \log \log \log x, \ldots$$

che siano maggiori di 1. Allora la serie numerica è divergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)} = +\infty$$

[La funzione $1/f(x)$ è continua e decrescente nell'intervallo $[1, +\infty[$. Per $1 \leq x \leq e$ si ha $f(x) = x$ e pertanto

$$\int_1^e \frac{1}{f(x)}\, dx = \int_1^e \frac{1}{x}\, dx = [\log x]_1^e = 1\,.$$

Inoltre, per $e \leq x \leq e_2$, ove $e_2 = e^e$, si ha $f(x) = x \log x$, perciò

$$\int_e^{e_2} \frac{1}{f(x)}\, dx = \int_e^{e_2} \frac{1}{x \log x}\, dx = [\log \log x]_e^{e_2} = 1\,.$$

Infine, per $e_2 \leq x \leq e_3$, ove $e_3 = e^{e_2}$, si ha $f(x) = x \log x(\log \log x)$ e quindi

$$\int_{e_2}^{e_2} \frac{1}{f(x)}\, dx = [\log \log \log x]_{e_2}^{e_3} = 1\,.$$

Continuando in tal modo si ha una successione di intervalli di lunghezza crescente su ciascuno dei quali l'integrale di $f(x)$ è uguale a 1. Da ciò segue l'asserto]

6.65 Ricavare dall'esercizio precedente che tutte le serie

$$\sum \frac{1}{n \log n}\,, \sum \frac{1}{n(\log n) \log \log n}\,, \ldots$$

sono divergenti positivamente, con la precisazione che in ognuna di esse si metterà un certo numero di termini iniziali per assicurare che tutti i logaritmi siano maggiori di 1.

[Basta osservare che ognuna delle serie considerate maggiora la serie dell'esercizio precedente]

6.66 (a) Utilizzando il criterio degli integrali stabilire il carattere della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n\right)\,.$$

(b) Dopo aver dimostrato che per ogni $x > 0$ risulta

$$0 < \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x < \frac{1}{x}\,,$$

utilizzare tali disuguaglianze per stabilire, per ogni $p > 1$, il carattere della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n^p\right)$$

[(a) Con il metodo di integrazione per parti si trova

$$\int_0^t \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) dx = t\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} t\right) + \frac{1}{2}\log(1 + t^2)$$

e tale espressione diverge a $+\infty$ per $t \to +\infty$. In base al criterio degli integrali la serie data è quindi divergente. (b) La disuguaglianza di sinistra è immediata. Per provare la disuguaglianza di destra consideriamo la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x} + \operatorname{arctg} x - \dfrac{\pi}{2}$, che è strettamente decrescente per $x > 0$ (perchè $f'(x) = -1/[x^2(1+x^2)] < 0$) e converge a zero per $x \to +\infty$. Quindi $f(x) > 0$ per ogni $x > 0$.

Utilizzando le disuguaglianze con $x = n^p$, in base al criterio del confronto, la serie data è convergente per ogni $p > 1$]

Questo volume di esercitazioni di Matematica è rivolto agli studenti che affrontano corsi di Matematica nel primo anno di università. Esso è articolato nei seguenti capitoli:

1. APPLICAZIONI DEL CALCOLO DIFFERENZIALE
2. GRAFICI DI FUNZIONI
3. EQUAZIONI ALGEBRICHE E TRASCENDENTI
4. INTEGRALI INDEFINITI
5. INTEGRALI DEFINITI
6. SERIE NUMERICHE

Paolo Marcellini *è professore ordinario di Analisi Matematica presso l'Università di Firenze.*

Carlo Sbordone *è professore ordinario di Analisi Matematica presso l'Università "Federico II" di Napoli.*

-10π