M. AMAR • A.M. BERSANI

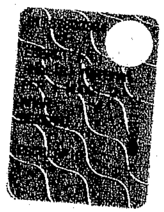
Esercizi di

ANALISI MATEMATICA

edizione riveduta e ampliata

PROGETTO LEONARDO
BOLOGNA

La foto in copertina riproduce un francobollo greco del 1955, dedicato al Teorema di Pitagora



PROGETTO LEONARDO

Prima edizione: Ottobre 2002
Seconda edizione: Luglio 2004

40131 Bologna - Via U. Terracini 30 - Tel. 051-63.40.113 - Fax 051-63.41.136
www.editrice-esculapio.it

Ai nostri studenti: quelli passati
quelli presenti e quelli futuri.

Micol e Alberto

INDICE

PREFAZIONE

Questo libro è rivolto agli studenti delle facoltà scientifiche e nasce dall'esperienza fatta dagli autori, nella Facoltà di Ingegneria dell'Università "La Sapienza" di Roma, nei due anni successivi all'introduzione del nuovo ordinamento dei corsi di laurea.

Il libro tratta, in 10 capitoli, quasi tutti gli argomenti facenti capo all'Analisi 1 e 2 del vecchio ordinamento, nell'espresso intento di fornire sufficiente materiale didattico per il maggior numero possibile di corsi che, talvolta, hanno programmi tra loro molto differenziati.

Il capitolo introduttivo verte su argomenti preliminari, che non vengono, in genere, esplicitamente trattati nei corsi di Analisi, ma che sono indispensabili per la comprensione delle nozioni successive, nonché per il superamento dell'esame, e su cui molti studenti mostrano, almeno inizialmente, gravi lacune.

Il testo propone circa un migliaio di esercizi, in gran parte corredati di svolgimento, selezionati soprattutto da temi d'esame. Abbiamo cercato di offrire uno spettro di esercizi di difficoltà crescente, svolgendo, in particolare, tutti quelli che abbiamo ritenuto di maggiore complessità. La presenza di esercizi non svolti è legata all'esigenza di stimolare lo studente a individuare autonomamente il metodo risolutivo che, in ogni caso, non si discosta quasi mai dai metodi esposti negli esercizi svolti. Si tenga presente, comunque, che alcuni esercizi complessi non sono stati risolti esplicitamente, in quanto versioni simili sono state risolte nel capitolo dei temi d'esame.

Rispetto alla precedente edizione, sono state integrate alcune parti con nuovi esercizi e richiami di teoria (ad esempio è stato affrontato il problema dei massimi e minimi vincolati di funzioni di più variabili).

I Capitoli 2/5, più corposi, trattano argomenti generalmente comuni a tutti i corsi, mentre i Capitoli 6/9, contenenti un numero più ridotto di esercizi, riguardano argomenti che, attualmente, non sono affrontati in tutti i programmi e spesso sono poco approfonditi.

Il Capitolo 10 è una raccolta di temi d'esame (così come sono stati presentati agli studenti di Ingegneria Informatica, Ingegneria delle Telecomunicazioni, Ingegneria Elettrica, Ingegneria Energetica e Nucleare negli a.a. 2000/2001 e 2001/2002), la maggior parte dei quali è stata preparata in collaborazione con i Proff. Andreina Morelli, Iolanda Verna e Lorenzo Giacomelli, a cui va tutta la nostra gratitudine per averli messi a disposizione per la stesura di questo volume.

L'apparente disomogeneità dei testi d'esame è dovuta al fatto che, per alcuni corsi, sono previsti due esami distinti, a valle di ogni singolo modulo, mentre in altri si svolge un solo esame finale. Ad esempio, l'elevato numero di esercizi presenti negli ultimi tre temi è legato alla compattazione, in un solo compito, delle prove d'esame relative al primo e al secondo modulo.

L'ultimo capitolo raccoglie la maggior parte dei grafici richiamati nelle risoluzioni degli esercizi proposti. Un particolare ringraziamento va al Prof. Guido Dell'Acqua, per la sua preziosa consulenza sulla trattazione informatica dei grafici, che sono stati ottenuti con il programma MatLab.

Giugno 2004

Micol Amar
Alberto Bersani

NOTA AGGIUNTIVA ALLA SECONDA EDIZIONE

Essendo questa la seconda edizione, molti errori e refusi contenuti nella precedente edizione sono stati corretti, grazie soprattutto all'intervento di colleghi e studenti scrupolosi, a cui va tutta la nostra gratitudine. Ciononostante, saremo riconoscenti a quanti ancora vorranno segnalarci ulteriori inesattezze del testo.

NOTAZIONI

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$	insieme dei numeri naturali
$\mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots\}$	insieme dei numeri interi relativi
$\mathbb{Q}$	insieme dei numeri razionali
$\mathbb{R}$	insieme dei numeri reali
$\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$	insieme dei numeri reali positivi
$\mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$	insieme dei numeri reali negativi
$\overline{\mathbb{R}}$	retta reale estesa: $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$
$\mathbb{C}$	insieme dei numeri complessi
$\emptyset$	insieme vuoto
$\overline{A}$	chiusura dell'insieme A
∂A	frontiera dell'insieme A
o	"o piccolo"
$[\alpha]$	parte intera del numero $\alpha \in \mathbb{R}$
$\Vert\vec{r}\Vert$	norma o modulo del vettore $\vec{r}$
$U(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$	intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$
$U(+\infty)$	intorno di $+\infty$ (semiretta illimitata a destra)
$U(-\infty)$	intorno di $-\infty$ (semiretta illimitata a sinistra)
e	numero di Nepero, base del logaritmo naturale
$\log x \quad x > 0$	logaritmo naturale (in base e) del numero x

CAPITOLO 1

PRELIMINARI

1.1. Potenze e polinomi

• Proprietà delle potenze: se x, y sono numeri reali positivi, α, β sono numeri reali ed m, n sono numeri naturali, si ha:

$$x^\alpha \cdot x^\beta = x^{\alpha+\beta}$$
$$x^\alpha \cdot y^\alpha = (x \cdot y)^\alpha$$
$$\frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta} = \frac{1}{x^{\beta-\alpha}}$$
$$\frac{x^\alpha}{y^\alpha} = \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \left(\frac{y}{x}\right)^{-\alpha}$$
$$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\cdot\beta} = (x^\beta)^\alpha$$
$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$
$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$$

dove, nell'espressione x^α, x si chiama *base* della potenza ed α si chiama *esponente*.

N.B. se x (o analogamente y) è negativo, occorre qualche cautela: affinché x^α sia ben definito e valgano le proprietà ricordate sopra, bisogna imporre delle restrizioni sulle potenze ammissibili α. Più precisamente, α può assumere solo valori interi relativi o valori razionali, che, scritti in forma di frazione, abbiano al denominatore un numero intero dispari. In particolare, si noti che, se $x < 0$, il numero $\sqrt[4]{x^2} = (x^2)^{1/4}$ è ben definito (e dovrebbe essere ben noto al lettore che $\sqrt[4]{x^2} = |x|^{1/2} = \sqrt{|x|}$), ma, ovviamente, non coincide con $x^{1/2} = \sqrt{x}$, che non ha significato in questo caso.

• Dati $x, y, z > 0$, utilizzare le proprietà delle potenze per semplificare le seguenti espressioni.

1) $\dfrac{x^3 \cdot x^7}{x^{15}} = ?$ $\qquad (x^{-5} = 1/x^5)$

2) $[(x^4)^7 \cdot x^2]^{1/2} = ?$ $\qquad (x^{15})$

3) $\dfrac{(x^3 \cdot y^3)^2}{z^6} = ?$ $\qquad ((xy/z)^6)$

4) $\dfrac{x^2 + x^3}{x^{1/2}} = ?$ $\qquad (x^{3/2} + x^{5/2})$

5) $\dfrac{x^4 + y^4}{(xy)^3} = ?$ $\qquad (x/y^3 + y/x^3)$

6) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x}}}{\sqrt[7]{x^4}} = ?$ $\qquad (x^{-13/84} = 1/x^{13/84})$

7) $\dfrac{x^{1/2}}{x^{1/3}} = ?$ $\qquad (\frac{1}{x^{-1/6}} = x^{1/6})$

8) $\dfrac{(x^{1/2} \cdot x^{1/3})^2}{x^{1/6}} = ?$ $\qquad (x^{3/2})$

9) $\dfrac{(xy)^{1/3}}{y\sqrt{x}} = ?$ $\qquad (x^{-1/6}y^{-2/3})$

10) $\dfrac{\sqrt{x^2 - y^2}(x-y)^{1/2}}{\sqrt[4]{x+y}(xy)^5} = ?$ $\qquad \left((x+y)^{1/4}\left(\frac{1}{x^4y^5} - \frac{1}{x^5y^4}\right)\right)$

- Alcuni prodotti notevoli:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

- Applicazioni:

$x^2 - 3 = x^2 - (\sqrt{3})^2 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$

$x^4 - 4 = (x^2)^2 - 2^2 = (x^2 - 2)(x^2 + 2) = (x^2 - (\sqrt{2})^2)(x^2 + 2) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 2)$

- Divisione di polinomi: ricordiamo brevemente l'algoritmo per effettuare la divisione tra polinomi, quando il grado del polinomio dividendo è non inferiore al grado del polinomio divisore. A tale scopo, siano $P_m(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m$ e $P_n(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n$ due polinomi assegnati di grado m ed n, rispettivamente, con $m \geq n \geq 1$, a_i, $b_i \in \mathbb{R}$ per ogni indice i, e a_0, b_0 non nulli. Allora

$$P_m(x) : P_n(x) = \frac{P_m(x)}{P_n(x)} = P_{m-n}(x) + \frac{P_r(x)}{P_n(x)}$$

dove $P_{m-n}(x)$ è un opportuno polinomio di grado $m-n \geq 0$ e $P_r(x)$ è un altro opportuno polinomio di grado $r < n$. Per calcolare $P_{m-n}(x)$ e $P_r(x)$ si procede come segue: si divide il monomio di grado più alto di $P_m(x)$ per il monomio di grado più alto di $P_n(x)$; si moltiplica il monomio così ottenuto per il polinomio divisore $P_n(x)$ e si sottrae il polinomio risultante dal dividendo $P_m(x)$, ottenendo così un nuovo polinomio $\widetilde{P}(x)$ di grado non superiore a $m-1$. Si ripete l'operazione precedente con $\widetilde{P}(x)$ al posto di $P_m(x)$ e così via, finché il polinomio risultante dalla sottrazione non sarà di grado $r < n$[1]. Quest'ultimo sarà quindi il polinomio resto $P_r(x)$, mentre il polinomio $P_{m-n}(x)$ si ottiene sommando tutti i monomi ottenuti dalle operazioni di divisione. Notiamo che $P_r(x)$ potrebbe anche essere il polinomio identicamente nullo; in questo caso $P_m(x)$ si dice divisibile per $P_n(x)$.

Per capire meglio la procedura, applichiamola ad un esempio: siano $P_4(x) = 5x^4 + 3x^3 + 2x$ e $P_2(x) = x^2 + 1$; vogliamo calcolare $P_4(x) : P_2(x)$.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
5x^4 & +3x^3 & & +2x & & x^2 + 1 \\
-5x^4 & & -5x^2 & & & \\ \cline{1-5}\cline{6-6}
/ & +3x^3 & -5x^2 & +2x & & 5x^2 + 3x - 5 \\
 & -3x^3 & & -3x & & \\ \cline{1-5}
 & / & -5x^2 & -x & & \\
 & & +5x^2 & & +5 & \\ \cline{1-5}
 & & / & -x & +5 &
\end{array}$$

(1) Ricordiamo che una costante è un polinomio di grado zero.

pertanto,

$$(5x^4 + 3x^3 + 2x) : (x^2 + 1) = (5x^2 + 3x - 5) + \frac{5 - x}{x^2 + 1}.$$

Ricordiamo infine che un'espressione della forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$, dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono due polinomi, si chiama funzione razionale. In particolare essa è detta propria se $P(x)$ ha grado strettamente minore di $Q(x)$.

- Riscrivere le seguenti espressioni razionali come somma di un polinomio e di una funzione razionale propria.

1) $\dfrac{x^4 + 1}{x^2 + 2}$ $\left(x^2 - 2 + \frac{5}{x^2+2}\right)$

2) $\dfrac{3x^3 + 3y^3}{x^2 - xy + y^2}$ $(3x + 3y)$

3) $\dfrac{x^4 + 2x^2 + x - 4}{3x^3 + x}$ $\left(\frac{1}{3}x + \frac{(5/3)x^2 + x - 4}{3x^3 + x}\right)$

4) $\dfrac{4x^2 - y^2}{2x + y}$ $(2x - y)$

5) $\dfrac{3x^2(x^3 + 1)}{3x^3 + x}$ $\left(x^2 - \frac{1}{3} + \frac{3x + 1/3}{3x^2 + 1}\right)$

Risolviamo ora esplicitamente gli esercizi proposti.

Svolgimento 1):

$$\begin{array}{rrr|l}
x^4 & & +1 & x^2 + 2 \\
-x^4 & -2x^2 & & \\ \cline{1-3}\cline{4-4}
/ & -2x^2 & +1 & x^2 - 2 \\
 & +2x^2 & +4 & \\ \cline{1-3}
 & / & +5 &
\end{array}$$

Svolgimento 2): *Per risolvere questo esercizio si può procedere effettuando la divisione, come fatto in precedenza, per esempio considerando i polinomi dividendo e divisore come espressioni della variabile x, interpretando y come parametro:*

$$\begin{array}{rrrr|l}
3x^3 & & & +3y^3 & x^2 - xy + y^2 \\
-3x^3 & +3x^2y & -3xy^2 & & \\ \cline{1-4}\cline{5-5}
/ & +3x^2y & -3xy^2 & +3y^3 & 3x + 3y \\
 & -3x^2y & +3xy^2 & -3y^3 & \\ \cline{1-4}
 & / & / & / &
\end{array}$$

In tal modo, abbiamo ottenuto che $3x^3 + 3y^3$ è divisibile per $x^2 - xy + y^2$.

Alternativamente, si può procedere anche utilizzando opportuni prodotti notevoli, per decomporre il polinomio al numeratore. Infatti, $3(x^3 + y^3) = 3(x + y)(x^2 - xy + y^2)$, da cui, semplificando, si ottiene subito il risultato desiderato.

Svolgimento 3):

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^4 & +2x^2 & +x & -4 & 3x^3+x \\
-x^4 & -\frac{1}{3}x^2 & & & \\ \cline{1-5}
 & & & & \frac{1}{3}x \\
/ & +\frac{5}{3}x^2 & +x & -4 &
\end{array}
$$

Svolgimento 4): *Per risolvere questo esercizio, si può procedere, come nel caso dell'esercizio 2), effettuando la divisione, per esempio considerando i polinomi dividendo e divisore come espressioni della variabile x, con y come parametro.*

$$
\begin{array}{rrr|l}
4x^2 & & -y^2 & 2x+y \\
-4x^2 & -2xy & & \\ \cline{1-4}
 & & & 2x-y \\
/ & -2xy & -y^2 & \\
 & +2xy & +y^2 & \\ \cline{1-3}
 & / & / &
\end{array}
$$

Alternativamente, poiché, utilizzando opportuni prodotti notevoli, si ricava che $4x^2-y^2=(2x+y)(2x-y)$, il risultato desiderato segue immediatamente, anche senza effettuare la divisione formale.

Svolgimento 5): *Per risolvere questo esercizio, semplifichiamo innanzitutto il numeratore ed il denominatore per x e poi procediamo effettuando la divisione tra i polinomi risultanti. Otteniamo*

$$
\begin{array}{rrrr|l}
3x^4 & & +3x & & 3x^2+1 \\
-3x^4 & -x^2 & & & \\ \cline{1-5}
 & & & & x^2-1/3 \\
/ & -x^2 & +3x & & \\
 & +x^2 & & +1/3 & \\ \cline{1-4}
 & / & +3x & +1/3 &
\end{array}
$$

1.2. Equazioni, disequazioni e sistemi lineari

• Formule risolutive

- Equazioni di primo grado: $ax+b=0$.

$$
\begin{cases}
\text{se } a \neq 0 & \text{esiste un'unica soluzione } x = -\dfrac{b}{a}\,; \\
\text{se } a = 0 & \text{si hanno due situazioni:} \quad \begin{cases} \text{se } b=0 & \text{tutti i numeri reali sono soluzioni ;} \\ \text{se } b\neq 0 & \text{l'equazione è impossibile .} \end{cases}
\end{cases}
$$

- Equazioni di secondo grado: $ax^2+bx+c=0$, con $a\neq 0$ (ovviamente, se $a=0$, si ricade nel caso precedente). Per semplicità poniamo $\Delta = b^2-4ac$; tale quantità è chiamata *discriminante* dell'equazione di secondo grado. Si hanno i seguenti casi:

$$
\begin{cases}
\text{se } \Delta > 0 & \text{esistono due soluzioni distinte } x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\,; \\
\text{se } \Delta = 0 & \text{esiste un'unica soluzione (ovvero due soluzioni coincidenti) } x = -\frac{b}{2a}\,; \\
\text{se } \Delta < 0 & \text{l'equazione è impossibile, cioè non ha soluzioni .}
\end{cases}
$$

In particolare, se b è pari, è possibile applicare la cosiddetta formula ridotta:

$$x = \frac{-b/2 \pm \sqrt{(b/2)^2-ac}}{a}\,,$$

dove la radice quadrata ha ovviamente senso quando il radicando è non negativo.

- Disequazioni di primo grado: $ax+b>0$.

$$
\begin{cases}
\text{se } a\neq 0 & \text{le soluzioni costituiscono una semiretta aperta} \begin{cases} x > -\frac{b}{a} & \text{per } a>0 \\ x < -\frac{b}{a} & \text{per } a<0 \end{cases} \\
\text{se } a = 0 & \text{si hanno due situazioni} \quad \begin{cases} \text{se } b>0 & \text{tutti i numeri reali sono soluzioni} \\ \text{se } b\leq 0 & \text{la disequazione è impossibile} \end{cases}
\end{cases}
$$

- Disequazioni di primo grado: $ax+b\geq 0$.

$$
\begin{cases}
\text{se } a\neq 0 & \text{le soluzioni costituiscono una semiretta chiusa} \begin{cases} x \geq -\frac{b}{a} & \text{per } a>0 \\ x \leq -\frac{b}{a} & \text{per } a<0 \end{cases} \\
\text{se } a = 0 & \text{si hanno due situazioni} \quad \begin{cases} \text{se } b\geq 0 & \text{tutti i numeri reali sono soluzioni} \\ \text{se } b< 0 & \text{la disequazione è impossibile} \end{cases}
\end{cases}
$$

Osserviamo che le corrispondenti disequazioni con le disuguaglianze opposte a quelle considerate si riconducono alle precedenti moltiplicando per -1 ambo i membri e cambiando il verso della disuguaglianza.

- Disequazioni di secondo grado: $ax^2+bx+c>0$, con $a>0$. Chiamiamo, per comodità, *radici* le soluzioni dell'equazione $ax^2+bx+c=0$, associata alla disequazione.

$$
\begin{cases}
\text{se } \Delta > 0 & \text{le soluzioni sono costituite dagli intervalli aperti esterni alle radici,} \\
 & \text{cioè } x < \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x > \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\
\text{se } \Delta = 0 & \text{tutti i numeri reali sono soluzioni tranne il punto } x = -\frac{b}{2a} \\
\text{se } \Delta < 0 & \text{la disequazione è sempre verificata}
\end{cases}
$$

- Disequazioni di secondo grado: $ax^2+bx+c\geq 0$, con $a>0$.

$$
\begin{cases}
\text{se } \Delta > 0 & \text{le soluzioni sono costituite dagli intervalli chiusi esterni alle radici,} \\
 & \text{cioè } x \leq \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x \geq \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\
\text{se } \Delta \leq 0 & \text{la disequazione è sempre verificata}
\end{cases}
$$

- Disequazioni di secondo grado: $ax^2+bx+c<0$, con $a>0$.

$$
\begin{cases}
\text{se } \Delta > 0 & \text{le soluzioni sono costituite dall'intervallo aperto interno alle radici,} \\
 & \text{cioè } \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} < x < \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\
\text{se } \Delta \leq 0 & \text{la disequazione è impossibile}
\end{cases}
$$

- Disequazioni di secondo grado: $ax^2+bx+c\leq 0$, con $a>0$.

$$
\begin{cases}
\text{se } \Delta > 0 & \text{le soluzioni sono costituite dall'intervallo chiuso interno alle radici,} \\
 & \text{cioè } \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \leq x \leq \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\
\text{se } \Delta = 0 & \text{la disequazione è verificata solo per } x = -\frac{b}{2a} \\
\text{se } \Delta < 0 & \text{la disequazione è impossibile}
\end{cases}
$$

Ovviamente, se $a = 0$, si ricade nel caso delle disequazioni di primo grado, mentre per $a < 0$ ci si riconduce ai casi precedenti, moltiplicando per -1 ambo i membri e cambiando il verso della disuguaglianza.

Ricordiamo che, a differenza delle equazioni di primo e secondo grado, per le quali abbiamo visto le ben note formule risolutive, non è facile, in generale, determinare le soluzioni di un'equazione algebrica di grado generico n[(1)]

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = 0 .$$

In alcuni casi, per esempio quando a_n è non nullo e razionale, cioè $a_n = \frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}$, è però possibile tentare di trovare "manualmente" delle soluzioni, cercandole fra i numeri non nulli $r = \frac{j}{k} \in \mathbb{Q}$, dove $j \in \mathbb{Z}$ sia un divisore del numeratore p di a_n e $k \in \mathbb{Z}$ sia un divisore del denominatore q di a_n. Ad esempio, nel caso dell'equazione

$$\frac{8}{3}x^3 - \frac{8}{3}x^2 + x - \frac{9}{2} = 0 , \tag{1.1}$$

possiamo provare a cercare una soluzione fra i numeri $\{\pm1; \pm3; \pm9; \pm1/2; \pm3/2; \pm9/2\}$. Facendo i conti, si ottiene facilmente che $x = 3/2$ è una soluzione; pertanto, ricordando il fondamentale risultato di Ruffini,[(2)] possiamo riscrivere l'equazione (1.1) nella forma $\frac{8}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{9}{8}\right) = 0$ ed applicare poi la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado al secondo fattore, per trovare le eventuali altre soluzioni. Purtroppo, non sempre la regola sopra indicata funziona, per esempio si verifica che l'equazione $x^3 + 2 = 0$ non ha come radici alcuno dei valori che sono divisori del termine noto 2 (cioè $\pm1, \pm2$). In questo caso, però, si ottiene facilmente che l'unica soluzione è $x = -\sqrt[3]{2}$.

- Equazioni

1)	$x + 23 = 5(x + 2)$	$(x = 13/4)$
2)	$6x + 2(3x + 2) = -21x - 10$	$(x = -14/33)$
3)	$\frac{2}{3}x + 4(x - 1) = -4$	$(x = 0)$
4)	$x^2 + 3x = 5(x + 3) - 16$	$(x = 1)$
5)	$(x - 3)(x - 6) + x^2 - 3 = 2x^2 - x(x + 1)$	$(3; 5)$
6)	$x(2x + 3) = 3x - 2$	*(impossibile)*
7)	$x(x^2 + 2x) + x^3(x - 3) = 1 - 2x^3$	$(x = \pm\sqrt{\sqrt{2} - 1})$
8)	$3x^4 + 6x^2 + 2x = 2(x - 1) - 1$	*(impossibile)*

(1) In realtà, per le soluzioni di equazioni di terzo e quarto grado, esistono formule esplicite: esse vennero citate per la prima volta da Cardano nel suo libro *"Ars Magna"* del 1545, anche se molto probabilmente egli non ne fu il vero scopritore. Tali formule, però, non sono semplici da utilizzare, se non in casi molto particolari. Per equazioni di grado maggiore del quarto è stato dimostrato che non è possibile individuare formule esplicite per le soluzioni.

(2) Teorema di Ruffini: Un polinomio $P_n(x)$ è divisibile per $(x - \alpha)$ se e solo se α è soluzione dell'equazione $P_n(x) = 0$.

9)	$18x^2(x - 1) = -18 - 9x(x - 3x^2)$	$(x = 1)$
10)	$2x^3 + 10x = 8x^2 + 4$	$(x = 1; 2)$
11)	$3x^3 - x^2 - 1 = 2 - 3x + 2x^2$	$(x = 1)$
12)	$x^2(x^2 - 6) - 8 = 4x\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) - 16$	$(x = 1; \pm2)$
13)	$x^3 + 2x^2 + 7x = 0$	$(x = 0)$
14)	$(x^2 + 3x)(2x - 1)^2 = 0$	$(x = -3; 0; 1/2)$
15)	$x^3 + 8 = x + 2$	$(x = -2)$

Risolviamo ora esplicitamente alcuni fra gli esercizi proposti.

Svolgimento 7): *Raccogliendo tutti i monomi di ugual grado, l'equazione proposta si riscrive nella forma* $x^4 + 2x^2 - 1 = 0$, *che si riconduce ad un'equazione di secondo grado, mediante la sostituzione* $t = x^2$. *Utilizzando quindi la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado, si ottiene* $t = -1 \pm \sqrt{2}$, *dove è ammissibile solo la soluzione* $t = x^2 = -1 + \sqrt{2}$, *poiché l'altra fornisce un valore negativo. In conclusione, le soluzioni cercate sono date da* $x = \pm\sqrt{\sqrt{2} - 1}$.

Svolgimento 8): *Raccogliendo tutti i monomi di ugual grado, l'equazione proposta si riscrive nella forma* $3x^4 + 6x^2 + 3 = 0$, *ovvero* $3(x^2 + 1)^2 = 0$, *che chiaramente non ammette alcuna soluzione.*

Svolgimento 9): *Raccogliendo tutti i monomi di ugual grado e semplificando, l'equazione proposta si riscrive nella forma* $x^3 + x^2 - 2 = 0$. *Osservando che* $x = 1$ *è una soluzione, si ottiene che il polinomio a primo membro è divisibile per* $(x - 1)$ *e, una volta effettuata la divisione, si può riscrivere l'equazione nella forma* $(x - 1)(x^2 + 2x + 2) = 0$. *Applicando quindi la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado al secondo fattore del polinomio a primo membro, si ottiene che esso non ammette soluzioni, in quanto il suo discriminante è negativo. In conclusione la soluzione cercata è data da* $x = 1$

Svolgimento 10): *Raccogliendo tutti i monomi di ugual grado, l'equazione proposta si riscrive nella forma* $2x^3 - 8x^2 + 10x - 4 = 0$. *Osservando che* $x = 1$ *è una soluzione, si ottiene che il polinomio a primo membro è divisibile per* $(x - 1)$ *e, una volta effettuata la divisione, si può riscrivere l'equazione nella forma* $2(x - 1)(x^2 - 3x + 2) = 0$. *Applicando quindi la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado al secondo fattore del polinomio a primo membro, si ottiene che esso ammette le due soluzioni* $x = 1; 2$. *In conclusione le soluzioni cercate sono date da* $x = 1; 2$.

Svolgimento 11): *Raccogliendo tutti i monomi di ugual grado e semplificando, l'equazione proposta si riscrive nella forma* $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$. *Raccogliendo a fattor comune i primi due addendi, otteniamo* $x^2(x - 1) + (x - 1) = 0$, *cioè* $(x^2 + 1)(x - 1) = 0$. *Poiché, evidentemente, il primo fattore a primo membro è sempre strettamente positivo (cioè non ammette radici), la soluzione cercata è data da* $x = 1$.

Svolgimento 12): *Raccogliendo tutti i monomi di ugual grado, l'equazione proposta si riscrive nella forma* $x^4 + x^3 - 6x^2 - 4x + 8 = 0$. *Osservando che* $x = 1$ *è una soluzione, si ottiene che il polinomio a primo membro è divisibile per* $(x - 1)$ *e, una volta effettuata la divisione, si può riscrivere l'equazione nella forma* $(x - 1)(x^3 + 2x^2 - 4x - 8) = 0$. *Raccogliendo a fattor comune* *nel secondo fattore, otteniamo* $(x-1)[x^2(x+2)-4(x+2)]=0$, *da cui* $(x-1)(x^2-4)(x+2)=0$, *ovvero* $(x-1)(x-2)(x+2)^2=0$. *In conclusione le soluzioni cercate sono date da* $x=1;\pm2$.

- Disequazioni algebriche

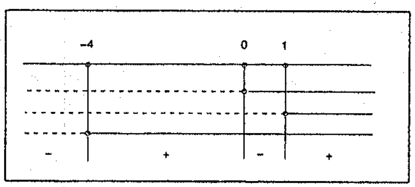
1)	$3(x-2)<4(x+7/2)$	$(x>-20)$
2)	$3x(x+4)<4x^2+1$	$(x<6-\sqrt{35}; x>6+\sqrt{35})$
3)	$10x^2-2x+5<0$	($\Delta<0 \Leftrightarrow$ impossibile)
4)	$2x^4-3x^2>\frac{1}{2}$	$\left(x<-\frac{\sqrt{3+\sqrt{13}}}{2}; x>\frac{\sqrt{3+\sqrt{13}}}{2}\right)$
5)	$\frac{1}{2}x^3-2x^2+2x\le 0$	$(x=2; x\le 0)$
6)	$x(5x+2)-3>3x-5$	$(\Delta<0 \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R})$
7)	$-x^2-7<x(x^3+2x)$	$(\forall x\in\mathbb{R})$
8)	$x^4+3x(x-2)\le 4-6x$	$(-1\le x\le 1)$
9)	$2x^4+x^2+2\le x^4-2x^2$	(impossibile)
10)	$x^3+3x^2-4x<0$	$(x<-4; 0<x<1)$

Svolgiamo, a titolo d'esempio, alcuni degli esercizi proposti.

Svolgimento 4): *Ponendo* $t=x^2$ *e moltiplicando ambo i membri per 2, la disequazione proposta si riscrive nella forma* $4t^2-6t-1>0$, *da cui si ottiene* $t<\frac{3-\sqrt{13}}{4}$ *e* $t>\frac{3+\sqrt{13}}{4}$. *Ricordando che* $t=x^2$ *ed osservando che* $\frac{3-\sqrt{13}}{4}<0$, *risulta ammissibile solo l'espressione* $x^2>\frac{3+\sqrt{13}}{4}$, *che ha come soluzioni* $x<-\frac{\sqrt{3+\sqrt{13}}}{2}$ *e* $x>\frac{\sqrt{3+\sqrt{13}}}{2}$.

Svolgimento 5): *Mettendo in evidenza il fattore* x *e sfruttando i prodotti notevoli, riscriviamo la disequazione nella forma* $x(x-2)^2\le 0$. *Tenendo conto che la disequazione in oggetto richiede di determinare i valori della* x *che annullino il primo membro o lo rendano negativo, e che* $(x-2)^2\ge 0$ *per ogni* $x\in\mathbb{R}$, *avremo* $x\le 0$ *oppure* $(x-2)=0$, *da cui* $x\le 0$ *e* $x=2$.

Svolgimento 10): *Mettendo in evidenza il fattore* x, *otteniamo* $x(x^2+3x-4)<0$. *Poiché il secondo fattore ha come radici* $x=-4$; $x=1$, *la disequazione si riscrive nella forma* $x(x-1)(x+4)<0$. *La risoluzione di disequazioni di grado superiore al secondo fattorizzate può essere affidata alla cosiddetta regola dei segni, così visualizzabile: di ogni fattore si studia il segno, tracciando una linea continua lì dove il fattore è positivo ed una linea tratteggiata dove è negativo. Seguendo la regola dei segni nel prodotto, si ricavano gli insiemi di positività e negatività del primo membro:*



Figura

Regola dei segni per $x(x-1)(x+4)<0$

(dove il circoletto bianco indica che la radice non va considerata tra le soluzioni). Pertanto la disequazione è soddisfatta per $x<-4$ *e* $0<x<1$.

- Equazioni e disequazioni razionali

Ricordiamo che, in presenza di equazioni e disequazioni in cui l'incognita compare al denominatore, è necessario stabilire preliminarmente le condizioni di esistenza delle espressioni proposte, ovvero bisogna escludere i valori dell'incognita che annullano i termini al denominatore. Analogo discorso vale, ovviamente, per i sistemi.

1)	$\frac{5(x+1)}{x+2}=6$	$(x=-7)$
2)	$\frac{x}{x+1}+8=\frac{-1}{x+1}$	(impossibile)
3)	$\frac{4}{x-2}=\frac{3}{x+2}$	$(x=-14)$
4)	$\frac{x+3}{x+2}=x$	$\left(x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}\right)$
5)	$\frac{x^2+1-2x}{x+2}=\frac{x^3-1}{x-2+x^2}$	$(x=0)$
6)	$\frac{x^2-4x+4}{3x-9}=\frac{2-x}{x^2-5x+6}$	(impossibile)
7)	$\frac{2x^2}{x^2+x-2}=1$	(impossibile)
8)	$\frac{x+2}{1-x}\le 2$	$(x\le 0;\ x>1)$
9)	$\frac{3(x+1)}{x-2}\le 2$	$(-7\le x<2)$
10)	$\frac{3}{x+4}>\frac{6}{x-4}$	$(x<-12;\ -4<x<4)$
11)	$\frac{1}{x^2+4}<-x^2-1$	(impossibile)
12)	$\frac{x+1}{(x-2)^2}>\frac{1}{x-2}$	$(x\neq 2)$
13)	$\frac{x^3-3x^2+2x-6}{x^2-2x-3}>\frac{2}{x+1}$	$(-1<x<0;$ $0<x<3;\ x>3)$
14)	$\frac{3x+1}{x-1}>\frac{2x^3+7x}{x^2-x}$	$(x<0;\ 0<x<1)$
15)	$\frac{x^3-2x^2+2x}{x^2+x}=x+2$	(impossibile)

Svolgiamo a titolo d'esempio alcuni dei precedenti esercizi.

Svolgimento 1): *Imposta la condizione* $x\neq -2$ *sul denominatore e moltiplicando ambo i membri per* $(x+2)$, *otteniamo l'equazione* $5(x+1)=6(x+2)$, *da cui* $x=-7$.

Svolgimento 2): *La condizione sul denominatore impone $x \neq -1$. Determinando il minimo comune denominatore e moltiplicando ambo i membri per $(x+1)$, otteniamo $x + 8(x+1) = -1$, da cui $x = -1$. D'altra parte, tale valore di x è stato inizialmente scartato, in quanto annulla il denominatore. Pertanto l'equazione non ammette soluzioni.*

È possibile procedere anche in un altro modo, riscrivendo l'equazione nella forma

$$\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+1} = -8$$

da cui, semplificando il primo membro, si ottiene $1 = -8$, che è ovviamente impossibile.

Svolgimento 5): *Fattorizzando numeratori e denominatori, si ottiene*

$$\frac{(x-1)^2}{x+2} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+2)(x-1)}$$

da cui, imponendo le condizioni di esistenza $x \neq 1$, $x \neq -2$, semplificando il fattore $(x-1)$ ed infine moltiplicando ambo i membri per $(x+2)$, si ricava l'equazione $x^2 - 2x + 1 = x^2 + x + 1$, che ha come unica soluzione $x = 0$.

Svolgimento 6): *Fattorizzando, riscriviamo l'equazione nella forma*

$$\frac{(x-2)^2}{3(x-3)} = -\frac{(x-2)}{(x-3)(x-2)} .$$

Imponendo le condizioni di esistenza $x \neq 2$, $x \neq 3$, semplificando il fattore $(x-2)$ ed infine moltiplicando ambo i membri per $(x-3)$, si ottiene l'equazione $(x-2)^2 = -3$, che non ammette alcuna soluzione, poiché nessun numero reale elevato ad una potenza pari (nel nostro caso $(x-2)^2$) può essere uguale ad un numero negativo.

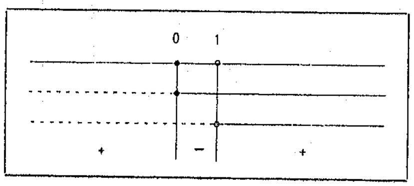
Svolgimento 8): *Portando tutti i termini a primo membro e determinando il minimo comune denominatore, otteniamo*

$$\frac{x+2-2(1-x)}{1-x} \leq 0$$

ovvero, moltiplicando ambo i membri per -1 (e quindi cambiando il verso della disuguaglianza)

$$\frac{3x}{x-1} \geq 0 .$$

Imponendo la condizione di esistenza sul denominatore, cioè $x \neq 1$, studiamo la disequazione tramite il segno del numeratore $N(x)$ e del denominatore $D(x)$. Applicando la regola dei segni, otteniamo:



Figura

Regola dei segni per $\frac{3x}{x-1} \geq 0$

dove il circoletto nero indica che il valore considerato va incluso tra le soluzioni, mentre il circoletto bianco indica che va escluso.

Pertanto le soluzioni sono date da $x \in (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$ ovvero $x \leq 0$, $x > 1$.

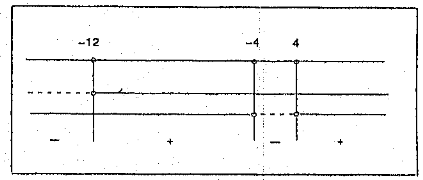
Svolgimento 10): *Dopo aver imposto la condizione di esistenza $x \neq \pm 4$, riportiamo tutti gli addendi a primo membro, semplificando per 3. Otteniamo così*

$$\frac{(x-4) - 2(x+4)}{(x+4)(x-4)} > 0$$

cioè, svolgendo i conti e cambiando di segno ambo i membri,

$$\frac{x+12}{(x+4)(x-4)} < 0 .$$

Utilizzando la regola dei segni, si ottiene



Figura

Regola dei segni per $\frac{x+12}{(x+4)(x-4)} < 0$

da cui $x \in (-\infty, -12) \cup (-4, 4)$ ovvero $x < -12$, $-4 < x < 4$.

Svolgimento 11): *È immediato verificare che la disequazione proposta non ammette soluzioni, poiché il primo membro è sicuramente positivo, mentre il secondo è negativo.*

Svolgimento 13): *Fattorizzando parzialmente il numeratore a primo membro, otteniamo*

$$\frac{x^2(x-3) + 2(x-3)}{(x-3)(x+1)} > \frac{2}{(x+1)} .$$

Imponendo la condizione di esistenza $x \neq -1$, $x \neq 3$ sul denominatore, portando tutti gli addendi a primo membro, determinando il minimo comune denominatore e semplificando il fattore $(x-3)$, la disequazione proposta si riconduce a

$$\frac{x^2}{x+1} > 0 .$$

Poiché il numeratore è sempre non negativo, resta da studiare solo il segno del denominatore, che risulta positivo per $x > -1$. Escludendo il valore $x = 0$, che annulla il numeratore, la soluzione cercata è $x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ ovvero $-1 < x < 0$, $x > 0$.

• Sistemi

$$1)\quad \begin{cases} 2x+y-5=0 \\ x+y=5 \end{cases} \qquad (x=0, y=5)$$

$$2)\quad \begin{cases} 2x+4(x-y)=3(y+3) \\ x=5(x+y) \end{cases} \qquad ((x,y)=(\tfrac{45}{58},-\tfrac{18}{29}))$$

$$3)\quad \begin{cases} x^2-2=-5x+4 \\ y+2x^2=0 \end{cases} \qquad ((x,y)=(1,-2) \text{ e } (x,y)=(-6,-72))$$

$$4)\quad \begin{cases} y^2=2x^2+4x \\ 2x^2+y^2=3x-1 \end{cases} \qquad (\text{impossibile})$$

$$5)\quad \begin{cases} x(x-1)=y(y+1) \\ 2y-x^2=0 \end{cases} \qquad ((x,y)=(-2,2) \text{ e } (x,y)=(0,0))$$

$$6)\quad \begin{cases} x^2+\frac{1}{2}=y\left(y+\frac{1}{4}\right) \\ \\ y=2x^2 \end{cases} \qquad \left((x,y)=(\pm\tfrac{\sqrt{1+\sqrt{33}}}{4},\tfrac{1+\sqrt{33}}{8})\right)$$

$$7)\quad \begin{cases} 2x+1>0 \\ x-1>0 \end{cases} \qquad (x>1)$$

$$8)\quad \begin{cases} x+3\ge 0 \\ x-2\ne 0 \end{cases} \qquad (-3\le x<2; x>2)$$

$$9)\quad \begin{cases} 4-x^2\ge 0 \\ x-1\ne 0 \end{cases} \qquad (-2\le x\le 2; x\ne 1)$$

$$10)\quad \begin{cases} x^2-4x+3>0 \\ x^2-\frac{3}{2}x+1>0 \\ x>1 \end{cases} \qquad (x>3)$$

$$11)\quad \begin{cases} x^3-8>0 \\ x(x+1)<0 \end{cases} \qquad (\text{impossibile})$$

$$12)\quad \begin{cases} (x-1)(x+1)<0 \\ x^2+3x\ge 0 \end{cases} \qquad (0\le x<1)$$

$$13)\quad \begin{cases} x+1\ge 0 \\ (x+2)(x+5)>x^2+6x+5 \end{cases} \qquad (x\ge -1)$$

$$14)\quad \begin{cases} \frac{2x+3}{x}>0 \\ x+2<0 \end{cases} \qquad (x<-2)$$

$$15)\quad \begin{cases} \frac{1}{x+5}>0 \\ x+1<0 \end{cases} \qquad (-5<x<-1)$$

Svolgiamo a titolo d'esempio alcuni dei precedenti esercizi.

Svolgimento 1): *Risolviamo il sistema con il metodo di sostituzione:*

$$\begin{cases} y=5-x \\ 2x+5-x-5=0 \end{cases}$$

da cui $x=0$ *e* $y=5$.

Svolgimento 3): *La prima equazione, data l'assenza della* y*, può essere risolta autonomamente e fornisce* $x=1$ *e* $x=-6$*. Sostituendo tali valori nella seconda equazione, si ricavano le soluzioni* $x=1,\ y=-2$ *e* $x=-6,\ y=-72$.

Svolgimento 4): *Sottraendo membro a membro la seconda equazione dalla prima, si ottiene il nuovo sistema*

$$\begin{cases} y^2=2x^2+4x \\ 4x^2+x+1=0\,. \end{cases}$$

La seconda equazione, data l'assenza della y*, può essere risolta autonomamente. Utilizzando la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado, si osserva che il discriminante risulta essere negativo, pertanto tale equazione non è risolubile e quindi il sistema è impossibile.*

Svolgimento 5): *Sostituendo* $y=x^2/2$ *nella prima equazione, e svolgendo i calcoli, essa si riscrive nella forma* $4x(x^3-2x+4)=0$*. Notiamo che, oltre alla soluzione* $x=0,\ y=0$*, le altre soluzioni si ottengono determinando le radici del polinomio di terzo grado* $P_3(x)=x^3-2x+4$*. Osservando che* -2 *è una radice, una volta effettuata la divisione di* $P_3(x)$ *per* $(x+2)$*, esso si può riscrivere nella forma* $P_3(x)=(x+2)(x^2-2x+2)$*. Poiché il secondo fattore ha discriminante negativo, ne consegue che* $P_3(x)$ *non ha altri divisori, pertanto l'unica ulteriore soluzione del sistema proposto è* $x=-2,\ y=2$.

Svolgimento 6): *Poiché nella prima equazione* x *compare solo elevato al quadrato, riscriviamo la seconda equazione nella forma* $x^2=y/2$*, da cui, sostituendo nella prima equazione e svolgendo i calcoli, otteniamo* $4y^2-y-2=0$*. Le soluzioni di quest'ultima equazione sono* $y=\frac{1\pm\sqrt{33}}{8}$ *e, poiché si ha* $y=2x^2$*, il valore* $\frac{1-\sqrt{33}}{8}$*, essendo negativo, va scartato. In tal modo la soluzione cercata risulta essere*

$$x=\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{33}}{8}} \qquad y=\frac{1+\sqrt{33}}{8}\,.$$

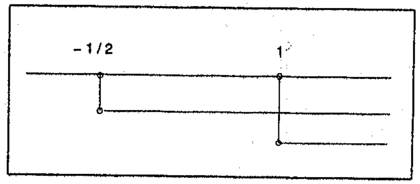
Svolgimento 7): *I sistemi di disequazioni vanno trattati come i sistemi di equazioni, risolvendo contemporaneamente le varie disequazioni, che in questo caso forniscono:*

$$\begin{cases} x>-1/2 \\ x>1\,. \end{cases}$$

Poiché cerchiamo valori di x *che soddisfino simultaneamente entrambe le disequazioni, dovremo prendere in considerazione l'intersezione fra gli insiemi di soluzioni, cioè:*

$$\{x>-1/2\}\cap\{x>1\}=(-1/2,+\infty)\cap(1,+\infty)=(1,+\infty)\,.$$

Può essere utile servirsi di un metodo grafico (da non confondere con il metodo della regola dei segni per le disequazioni !):



Figura

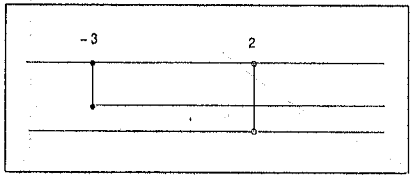
Regola per sistemi di disequazioni

qui, in ogni riga, si rappresenta con una linea continua la zona corrispondente alle soluzioni della disequazione in esame. Per determinare poi le soluzioni cercate, bisogna prendere in considerazione solo le zone caratterizzate dalla presenza di linee continue contemporaneamente su tutte le righe; nel nostro caso, appunto, $x > 1$.

Svolgimento 8): *Risolvendo si ottiene:*

$$\begin{cases} x \geq -3 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

da cui



Figura

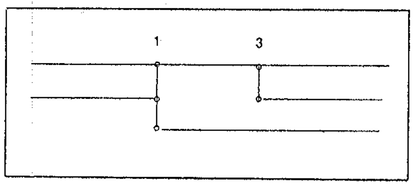
Regola per sistemi di disequazioni

ovvero $x \in [-3, 2) \cup (2, +\infty)$.

Svolgimento 10): *Risolvendo, si ottiene:*

$$\begin{cases} (x-1)(x-3) > 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \\ x > 1 \end{cases}$$

da cui



Figura

Regola per sistemi di disequazioni

Pertanto la soluzione cercata è $x > 3$.

1.3. Esponenziali e logaritmi

- Proprietà: dati $a, b > 0$ e $x, y \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$a^0 = 1 \qquad a^1 = a$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \qquad a^x : a^y = \tfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x \qquad a^x \cdot b^x = (ab)^x$$

$$a^{-x} = \tfrac{1}{a^x} = \left(\tfrac{1}{a}\right)^x \qquad \tfrac{a^x}{b^x} = \left(\tfrac{a}{b}\right)^x \;;$$

se inoltre $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ e $\alpha, \beta \neq 1$ abbiamo

$$\alpha^{\log_\alpha a} = a \qquad \log_\alpha(\alpha^x) = x$$

$$\log_\alpha 1 = 0 \qquad (\underline{\text{N.B.}}\ \log_\alpha 0 \text{ non ha significato})$$

$$\log_\alpha(a \cdot b) = \log_\alpha a + \log_\alpha b \qquad \log_\alpha\left(\tfrac{a}{b}\right) = \log_\alpha a - \log_\alpha b$$

$$\log_\alpha a^x = x \log_\alpha a \qquad \log_\alpha\left(\tfrac{1}{a}\right) = \log_\alpha(a^{-1}) = -\log_\alpha a$$

$$\log_\alpha a = \tfrac{\log_\beta a}{\log_\beta \alpha} \qquad \log_\alpha a = \log_\alpha \beta \cdot \log_\beta a$$

$$\log_\alpha \beta = \tfrac{1}{\log_\beta \alpha} \qquad a^{\log_\alpha b} = b^{\log_\alpha a}$$

<u>N.B.</u> non esiste una regola che permetta di riscrivere $\log_\alpha(a+b)$ o $(\log_\alpha a)(\log_\alpha b)$. Inoltre, le regole sopra ricordate vanno utilizzate con attenzione, quando a, b non sono positivi; per esempio, $\left((-2)^2\right)^{1/6}$ è ben definito, ma per scambiare l'ordine dell'elevamento a potenza, bisogna osservare che $\left((-2)^2\right)^{1/6} = \left(2^2\right)^{1/6} = \left((2)^{1/6}\right)^2 = 2^{1/3}$, e <u>non</u> $(-2)^{1/3}$, come si potrebbe erroneamente ottenere. Analogamente, è importante prestare attenzione ad espressioni del tipo $\log_\alpha a^2$, quando $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Infatti, in tal caso a potrebbe anche essere negativo e, mentre $\log_\alpha a^2$ è comunque ben definito e coincide con $2 \log |a|$, utilizzando senza riflettere le proprietà sopra elencate si potrebbe giungere a conclusioni errate.

Ricordiamo infine che

$$\begin{array}{llcl} \text{se } a > 1 & a^x > a^y & \Longleftrightarrow & x > y \\ \text{se } a < 1 & a^x > a^y & \Longleftrightarrow & x < y \\ \text{se } \alpha > 1 & \log_\alpha a > \log_\alpha b & \Longleftrightarrow & a > b \\ \text{se } \alpha < 1 & \log_\alpha a > \log_\alpha b & \Longleftrightarrow & a < b \end{array}$$

Nell'espressione a^x, a è detta *base* dell'esponenziale e x è detto *esponente* (come visto per le potenze), mentre nell'espressione $\log_\alpha a$, α è detta *base* del logaritmo e a è detto *argomento.* Osserviamo anche che usualmente si definisce potenza un'espressione del tipo x^a, dove la base è incognita e l'esponente è fisso, mentre si definisce esponenziale un'espressione del tipo a^x, dove la base è fissa, mentre l'esponente è incognito.

- Esercizi

1) $\dfrac{e^{x^3} \cdot e}{e^{2x}} = e^{x^2 - \frac{1}{2}(x+1)}$ $\qquad (x = 1; \pm\sqrt{\tfrac{3}{2}})$

2) $\dfrac{e^{x^2}}{e^3 e^{2x}} = e$ $\qquad (x = 1 \pm \sqrt{5})$

3) $5^{2x} - 5^x = 6$ $\qquad (x = \log_5 3)$

4) $2^{3x} + 3 \cdot 2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 1 > 0$ $\qquad (x > 0)$

5) $\dfrac{(10)^{3x^2} + (10)^{x^2}}{2(10^x)^x} \leq 10^{x^2}$ $\qquad (x = 0)$

6) $e^{3x} + e^x = e^{2x+x^2} + e^{x^2}$ $\qquad (x = 0; 1)$

7) $\dfrac{3\log 2 - \log 10}{\frac{1}{2}(\log 4 - \log 5)} = ?$ $\qquad (2)$

8) $\log 18 + \log 2 - \log 6 = ?$ $\qquad (\log 6)$

9) $\log_3(5x) + 2(\log_9 3)\log_3 x - \log_3(6x) = 2$ $\qquad (x = 54/5)$

10) $\log_a(4x^2 + 3x - 1) - \log_a x > 0 \quad a > 0,\ a \neq 1$ $\left(x > \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \text{ se } a > 1 \quad \frac{1}{4} < x < \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \text{ se } a < 1\right)$

11) $\dfrac{\log_a(4x-3)}{\log_a(2x-1)} > 1 \quad 0 < a < 1$ $\qquad (3/4 < x < 1; x > 1)$

12) $\dfrac{e^{3x} - 4e^x}{e^x - 1} > 0$ $\qquad (x < 0; x > \log 2)$

13) $\log^3 x - 2\log x \geq 0$ $\qquad \left(e^{-\sqrt{2}} \leq x \leq 1; x \geq e^{\sqrt{2}}\right)$

14) $2(\log x^2)^2 + 3\log x^2 + 1 < 0$ $\qquad \left(-\frac{1}{e^{1/4}} < x < -\frac{1}{e^{1/2}}; \frac{1}{e^{1/2}} < x < \frac{1}{e^{1/4}}\right)$

15) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log x} > x$ $\qquad (0 < x < 1)$

Svolgiamo a titolo d'esempio alcuni dei precedenti esercizi.

Svolgimento 1): *Utilizzando le proprietà sopra richiamate e ricordando che l'eguaglianza di esponenziali aventi la stessa base comporta l'eguaglianza tra gli esponenti, otteniamo l'equazione algebrica* $x^3 - 2x + 1 = x^2 - \frac{1}{2}(x+1)$. *Portando tutto a primo membro e raccogliendo a fattor comune, si ricava* $(x^2 - 3/2)(x-1) = 0$, *da cui la soluzione* $x = 1,\ x = \pm\sqrt{3/2}$.

Svolgimento 3): *Effettuiamo la sostituzione* $t = 5^x$, *da cui si ottiene subito l'equazione* $t^2 - t - 6 = 0$ *che ha per soluzioni* $t = 3, t = -2$. *Poiché* $t = 5^x$ *è sempre positivo, l'unica soluzione ammissibile è* $t = 3$, *ovvero* $5^x = 3$, *da cui* $x = \log_5 3$.

Svolgimento 4): *Effettuando la sostituzione* $t = 2^x$, *si ottiene subito* $t^3 + 3t^2 - 3t - 1 > 0$. *Raccogliendo il fattore* $3t$ *tra secondo e terzo addendo ed utilizzando i prodotti notevoli per decomporre* $t^3 - 1$, *si ricava* $(t-1)(t^2+t+1) + 3t(t-1) = (t-1)(t^2+4t+1) > 0$. *Le soluzioni della corrispondente equazione sono* $t = 1, t = -2 \pm \sqrt{3}$. *Poiché* $t = -2 \pm \sqrt{3}$ *sono entrambe negative e, nel nostro caso,* $t = 2^x$ *è invece positivo per qualsiasi* $x \in \mathbb{R}$ *(quindi, in particolare, è sempre esterno alle radici), il fattore* $(t^2 + 4t + 1)$ *è sempre positivo, ovvero il segno del polinomio sarà determinato unicamente dal fattore* $(t-1)$. *Pertanto la disequazione sarà verificata per* $t > 1$, *ovvero* $2^x > 1$, *che comporta* $x = \log_2 2^x > \log_2 1 = 0$ *(dove abbiamo usato il fatto che la base del logaritmo è maggiore di 1).*

Svolgimento 5): *Moltiplicando ambo i membri per* $2(10^x)^x > 0$ *ed effettuando la sostituzione* $t = 10^{x^2}$, *si ottiene l'equazione* $t(t-1)^2 \leq 0$, *che è soddisfatta per* $t \leq 0, t = 1$. *D'altra parte, essendo* $t = 10^{x^2}$ *strettamente positivo, l'unica soluzione ammissibile è* $t = 1$, *cioè* $10^{x^2} = 1$, *che fornisce* $x = 0$.

Svolgimento 6): *Raccogliendo* e^x *a primo membro ed* e^{x^2} *a secondo membro, si ottiene* $e^x(e^{2x} + 1) = e^{x^2}(e^{2x} + 1)$. *Dividendo ora ambo i membri per la quantità strettamente positiva* $(e^{2x} + 1)$, *l'equazione si riduce a* $e^x = e^{x^2}$, *ovvero* $x = x^2$, *da cui* $x = 0,\ x = 1$.

Svolgimento 7): *Applicando le proprietà dei logaritmi, si ottiene*

$$\frac{\log\left(\frac{8}{10}\right)}{\frac{1}{2}\log\left(\frac{4}{5}\right)} = \frac{2\log\left(\frac{4}{5}\right)}{\log\left(\frac{4}{5}\right)} = 2\,.$$

Svolgimento 9): *Osservando che* $\log_9 3 = \frac{1}{\log_3 9} = \frac{1}{2}$ *ed utilizzando le proprietà dei logaritmi per riscrivere la somma degli addendi a primo membro, si ottiene* $\log_3\left(\frac{5x}{6}\right) = 2$, *da cui* $\frac{5x}{6} = 3^{\log_3\left(\frac{5x}{6}\right)} = 3^2 = 9$, *ovvero* $x = 54/5$.

Svolgimento 10): *Per le condizioni di esistenza del logaritmo, bisogna imporre il sistema*

$$\begin{cases} 4x^2 + 3x - 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

che fornisce $x \in (1/4, +\infty)$. *Applicando poi le regole dei logaritmi, si ha* $\log_a\left(\frac{4x^2+3x-1}{x}\right) > 0$, *ovvero*

$$\begin{cases} \frac{4x^2+3x-1}{x} > 1 & \textit{se } a > 1 \\ \frac{4x^2+3x-1}{x} < 1 & \textit{se } a < 1\,. \end{cases}$$

Nel primo caso, ricordando che, per le condizioni di esistenza, si ha $x > 1/4$, *cioè* x *positivo, la disequazione diventa* $4x^2 + 2x - 1 > 0$, *ed ha come soluzioni ammissibili* $x > \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$, *in quanto nell'altro intervallo* x *sarebbe negativo. Nel secondo caso, invece, ragionando in modo analogo, si ottiene* $1/4 < x < \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Svolgimento 11): *Per le condizioni di esistenza del logaritmo e del denominatore, bisogna imporre il sistema*

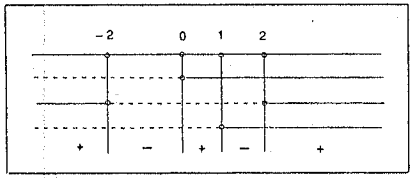
$$\begin{cases} 4x - 3 > 0 \\ 2x - 1 > 0 \\ \log_a(2x-1) \neq 0 \end{cases}$$

che fornisce $3/4 < x < 1,\ x > 1$. *Portando ora tutto a primo membro, determinando il minimo comune denominatore ed utilizzando le proprietà dei logaritmi, si ricava* $\frac{\log_a\left(\frac{4x-3}{2x-1}\right)}{\log_a(2x-1)} > 0$. *Studiando il segno di numeratore e denominatore e tenendo presente che* $a < 1$, *si ottiene*

$$\begin{array}{ccccc} \log_a\left(\frac{4x-3}{2x-1}\right) > 0 & \Longleftrightarrow & \frac{4x-3}{2x-1} < 1 & \Longleftrightarrow & x < 1 \\ \log_a(2x-1) > 0 & \Longleftrightarrow & 2x - 1 < 1 & \Longleftrightarrow & x < 1 \end{array}$$

Da cui si ottiene che numeratore e denominatore sono sempre concordi, pertanto la disequazione è soddisfatta per ogni x *appartenente all'insieme di esistenza, cioè* $3/4 < x < 1,\ x > 1$.

Svolgimento 12): *Il quoziente a primo membro è definito per ogni* $x \neq 0$. *Effettuando la sostituzione* $t = e^x$, *abbiamo* $\frac{t(t^2-4)}{t-1} > 0$. *Applicando la regola dei segni, si ottiene* $t < -2$; $0 < t < 1$; $t > 2$. *Poiché, però,* $t = e^x > 0$, *sono ammissibili solo le soluzioni* $0 < e^x < 1$; $e^x > 2$, *da cui* $x < 0$ *e* $x > \log 2$.



Figura

Regola dei segni per $\frac{t(t^2-4)}{t-1} > 0$

Svolgimento 15): *L'equazione è definita per* $x > 0$. *Sfruttando le proprietà dei logaritmi, riscriviamo l'equazione nella forma*

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log x} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{1/2} x} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \log x < \log_{1/2} x$$

poiché la base è minore di 1. *Da ciò si ottiene*

$$\log x < \log_{1/2} e \cdot \log x \qquad \Longleftrightarrow \qquad \log x(1 + \log_2 e) < 0 \ .$$

Poiché il secondo fattore è positivo ($\log_2 e > 0$), *abbiamo* $\log x < 0$, *cioè* $0 < x < 1$.

1.4. Equazioni e disequazioni irrazionali

• Proprietà: la casistica delle equazioni e disequazioni irrazionali è illimitata, potendosi presentare un qualsivoglia numero di radici in ogni membro. Noi ci limiteremo ad alcuni casi, cercando di comprendere il metodo per affrontare casi più complicati. Centrale, nella risoluzione, è la determinazione dell'insieme di definizione delle radici, che ci indica in quale sottoinsieme di $\mathbb{R}$ andranno cercate le soluzioni. Più precisamente, bisogna ricordare che l'argomento di una radice pari deve sempre essere non negativo, mentre nessun vincolo si ha per il caso di radici dispari.
Come esempio, consideriamo le due disequazioni

$$a) \quad \sqrt{A(x)} \geq B(x) \qquad\qquad b) \quad \sqrt{A(x)} \leq B(x) \ .$$

In entrambi i casi, occorre imporre $A(x) \geq 0$ e distinguere i due sottocasi $B(x) \geq 0$ e $B(x) < 0$. Indichiamo con $\mathcal{A}$ l'insieme dove sia $A(x)$ che $B(x)$ sono non negativi e con $\mathcal{B}$ l'insieme dove $A(x)$ è non negativo, mentre $B(x)$ è negativo. Nel caso a), la disequazione proposta si riconduce alla disequazione $A(x) \geq B^2(x)$ in $\mathcal{A}$, mentre è sempre verificata in $\mathcal{B}$. Pertanto, le soluzioni sono date da

$$(1.2) \qquad \begin{cases} A(x) \geq B^2(x) \\ x \in \mathcal{A} \end{cases} \quad \bigcup \quad \{x \in \mathcal{B}\} \ ,$$

cioè

$$\begin{cases} A(x) \geq B^2(x) \\ A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \end{cases} \quad \bigcup \quad \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \ . \end{cases}$$

Tenendo conto che la condizione $A(x) \geq B^2(x)$ è più restrittiva di $A(x) \geq 0$, si ottiene, infine, che le soluzioni sono date da

$$\begin{cases} A(x) \geq B^2(x) \\ B(x) \geq 0 \end{cases} \quad \bigcup \quad \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \ . \end{cases}$$

Nel caso b), la disequazione proposta si riconduce alla disequazione $A(x) \leq B^2(x)$, da risolversi nell'insieme $\mathcal{A}$, mentre non è mai verificata nell'insieme $\mathcal{B}$. Pertanto le soluzioni sono date da

$$(1.3) \qquad \begin{cases} A(x) \leq B^2(x) \\ x \in \mathcal{A} \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} A(x) \leq B^2(x) \\ A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \ . \end{cases}$$

Infine, se al posto della disequazione, consideriamo l'equazione

$$\sqrt{A(x)} = B(x) \ ,$$

occorre sempre imporre $A(x) \geq 0$ e distinguere ancora i due sottocasi $B(x) \geq 0$ e $B(x) < 0$. Infatti, se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono i due insiemi precedentemente definiti, si ha che l'equazione proposta si riconduce all'equazione $A(x) = B^2(x)$ in $\mathcal{A}$, mentre essa non è mai verificata nell'insieme $\mathcal{B}$. Pertanto, le soluzioni sono date da

$$(1.4) \qquad \begin{cases} A(x) = B^2(x) \\ x \in \mathcal{A} \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} A(x) = B^2(x) \\ A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} A(x) = B^2(x) \\ B(x) \geq 0 \ . \end{cases}$$

• Esercizi

1)	$\sqrt{x^2 + x} = \sqrt{x + 2}$	($x = \pm\sqrt{2}$)
2)	$\sqrt[3]{x^2 - 9} = x - 3$	($x = 1; 3; 6$)
3)	$\sqrt{x^2 + 4} = 2x - 2$	($x = 8/3$)
4)	$\sqrt{1 - x^2} = x + 3$	(impossibile)
5)	$\sqrt{x^2 - 2x + 1} > x - 2$	($\forall x \in \mathbb{R}$)
6)	$\sqrt{x^2 + 1} \geq -1,5$	($\forall x \in \mathbb{R}$)
7)	$\sqrt{x^2 - 2x + 8} \leq x + 6$	($x \geq -2$)
8)	$\sqrt[3]{x^3 - 27} \geq x - 3$	($x \leq 0; x \geq 3$)
9)	$\sqrt{27x^3 - 27x^2 + 9x - 1} \geq x - 1/3$	($x \geq \frac{10}{27}$ e $x = \frac{1}{3}$)
10)	$\sqrt[3]{x + 8} < 3x + 2$	($x > 0$)

11) $\sqrt[4]{x+1} > \sqrt{1-2x}$ $\qquad (0 < x \le 1/2)$

12) $\sqrt{2-x} + \sqrt{x+4} \le 6$ $\qquad (-4 \le x \le 2)$

13) $\sqrt{3-x} + \sqrt{5-x} \ge 2$ $\qquad (x \le 11/4)$

14) $\sqrt{x^2-5x-3} + \sqrt{9-x^2} < -3$ $\qquad$ (impossibile)

15) $\sqrt{\dfrac{9-x}{x+1}} > x-3$ $\qquad (-1 < x < 4)$

16) $x^2 - 1 < \sqrt{x^2-1}$ $\qquad (-\sqrt{2} < x < -1; 1 < x < \sqrt{2})$

17) $x^2 - 3 > \sqrt{x^2-4}$ $\qquad (x \le -2; x \ge 2)$

18) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} > \sqrt{x+1}$ $\qquad (x \ge 2)$

19) $\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x+1}} > x+2$ $\qquad (-2 < x < -1)$

20) $\sqrt[3]{x^3-1} \ge \sqrt{x^2-1}$ $\qquad (x \ge 1)$

Svolgiamo, a titolo d'esempio, alcuni dei precedenti esercizi.

Svolgimento 1): *Poiché abbiamo delle radici pari, dobbiamo innanzitutto imporre la condizione di esistenza e poi elevare ambo i membri al quadrato:*

$$\begin{cases} x^2 + x \ge 0 \\ x + 2 \ge 0 \\ x^2 + x = x + 2 \end{cases} \qquad \textit{da cui} \qquad \begin{cases} x \le -1 \ ; \ x \ge 0 \\ x \ge -2 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

ovvero $x = \pm\sqrt{2}$.

Svolgimento 2): *Poiché abbiamo una radice dispari, non bisogna imporre nessuna condizione di esistenza. Elevando ambo i membri al cubo, otteniamo* $x^2 - 9 = (x-3)^3$, *cioè*

$$(x-3)[(x-3)^2 - (x+3)] = 0 \iff (x-3)(x^2 - 7x + 6) = 0 \iff (x-3)(x-6)(x-1) = 0$$

da cui $x = 1;\ 3;\ 6.$

Svolgimento 3): *Poiché la quantità sotto radice quadrata è sempre positiva, l'unica condizione che dobbiamo imporre è che il secondo membro sia non negativo, cioè l'equazione si riconduce al sistema*

$$\begin{cases} 2x - 2 \ge 0 \\ x^2 + 4 = (2x-2)^2 \end{cases} \qquad \textit{da cui} \qquad \begin{cases} x \ge 1 \\ x = 0 \ ; \quad x = 8/3 \ . \end{cases}$$

L'unica soluzione ammissibile è $x = 8/3$.

Svolgimento 5): *Notiamo che la disequazione proposta può essere riscritta nella forma*

$$x - 2 < \sqrt{(x-1)^2}$$

pertanto il radicando è sempre non negativo e quindi la radice è sempre ben definita. Ricordando poi la (1.2), si ottiene che la disequazione è verificata per tutti gli $x < 2$ *e per tutte le soluzioni del sistema*

$$\begin{cases} x \ge 2 \\ (x-2)^2 < (x-1)^2 \end{cases} \qquad \textit{ovvero} \qquad \begin{cases} x \ge 2 \\ x > 3/2 \ . \end{cases}$$

Quindi le soluzioni cercate sono $x < 2$ *e* $x \ge 2$, *cioè tutto l'asse reale.*

Svolgimento 7): *Ricordando la (1.3) ed imponendo la condizione di esistenza per la radice, la disequazione proposta si riconduce al sistema*

$$\begin{cases} x + 6 \ge 0 \\ x^2 - 2x + 8 \ge 0 \\ x^2 - 2x + 8 \le (x+6)^2 \end{cases} \qquad \textit{da cui} \qquad \begin{cases} x \ge -6 \\ 14x \ge -28 \end{cases}$$

ovvero $x \ge -2$.

Svolgimento 8): *Elevando al cubo ambo i membri, la disequazione proposta si riscrive nella forma*

$$x^3 - 27 \ge (x-3)^3$$

ovvero, sfruttando i prodotti notevoli,

$$(x-3)[(x^2 + 3x + 9) - (x-3)^2] \ge 0 \iff 9x(x-3) \ge 0$$

da cui $x \le 0$ *e* $x \ge 3$.

Svolgimento 9): *La condizione di esistenza della radice è data da* $3x - 1 \ge 0$, *ovvero* $x \ge 1/3$. *Poiché in tale insieme anche il secondo membro della disequazione è non negativo, elevando ambo i membri al quadrato, la disequazione proposta si riconduce a*

$$(3x-1)^3 \ge \left[\frac{1}{3}(3x-1)\right]^2 \iff (3x-1)^2\left(3x - \frac{10}{9}\right) \ge 0$$

ovvero

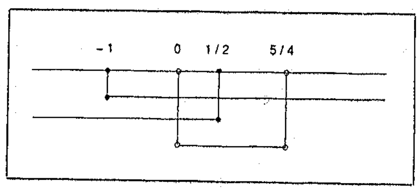
$$\begin{cases} x \ge 1/3 \\ x \ge \dfrac{10}{27} \end{cases}$$

da cui $x \ge \frac{10}{27}$.

Svolgimento 11): *Al fine di eliminare la presenza di radici di indice diverso occorre, dopo aver imposto le necessarie condizioni di esistenza, elevare ambo i membri alla potenza data dal minimo comune multiplo fra i due indici. Nel nostro caso eleviamo ovviamente alla quarta potenza. Otteniamo*

$$\begin{cases} x + 1 \ge 0 \\ 1 - 2x \ge 0 \\ x + 1 > (1-2x)^2 \end{cases} \qquad \textit{da cui} \qquad \begin{cases} x \ge -1 \\ x \le 1/2 \\ x(4x-5) < 0 \ . \end{cases}$$

Rappresentando i risultati ottenuti mediante un grafico, otteniamo le soluzioni $0 < x \le 1/2$.



Figura

Regola per sistemi di disequazioni

Svolgimento 12): *Quando in una (dis)equazione si presentano più addendi irrazionali, l'eliminazione delle radici avviene con passaggi successivi. In questo caso, una volta imposte le condizioni di esistenza per i due radicandi, poiché ambo i membri della disequazione sono non negativi, passiamo ad elevare una prima volta al quadrato. Otteniamo così*

$$\begin{cases} 2-x\geq 0 \\ x+4\geq 0 \\ (2-x)+(x+4)+2\sqrt{(2-x)(x+4)}\leq 36 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} -4\leq x\leq 2 \\ \sqrt{(2-x)(x+4)}\leq 15\,. \end{cases}$$

Elevando ulteriormente al quadrato, ricaviamo

$$\begin{cases} -4\leq x\leq 2 \\ x^2+6x+217\geq 0 \end{cases}$$

dove l'ultima disequazione è soddisfatta per ogni $x\in\mathbb{R}$. Pertanto la soluzione cercata è data da $-4\leq x\leq 2$.

Svolgimento 15): *Ricordando la (1.2), abbiamo*

$$\begin{cases} \dfrac{9-x}{x+1}\geq 0 \\ x-3\geq 0 \\ \left(\dfrac{9-x}{x+1}\right)>(x-3)^2 \end{cases} \quad \bigcup \quad \begin{cases} \dfrac{9-x}{x+1}\geq 0 \\ x-3<0 \end{cases}$$

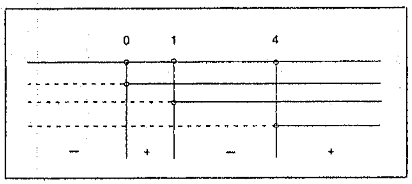
ovvero

$$\begin{cases} -1<x\leq 9 \\ x\geq 3 \\ \dfrac{9-x-(x-3)^2(x+1)}{(x+1)}>0 \end{cases} \quad \bigcup \quad \Big\{-1<x<3\Big\}\,.$$

Il primo sistema si riconduce a

$$\begin{cases} 3\leq x\leq 9 \\ x^3-5x^2+4x<0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} 3\leq x\leq 9 \\ x(x-1)(x-4)<0\,. \end{cases}$$

Rappresentando graficamente le soluzioni della seconda disequazione



Figura

Regola dei segni per $x(x-1)(x-4)<0$

otteniamo $x<0$ e $1<x<4$, da cui le soluzioni del sistema sono $3\leq x<4$. Unendo, infine, quanto trovato con le soluzioni del secondo sistema, cioè $-1<x<3$, si ricava che le soluzioni cercate sono date da $-1<x<4$.

1.5. Valore assoluto

• Ricordiamo che, per definizione, il *valore assoluto* o *valore aritmetico* o *modulo* di un numero reale è dato da

$$|x|=\begin{cases} x & \text{se } x\geq 0 \\ -x & \text{se } x<0 \end{cases} = \max\{-x,x\}\,.$$

Richiamiamo le principali proprietà del valore assoluto:

a) $|x|\geq 0 \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

b) $|x|=0 \iff x=0$

c) $|x|=|-x| \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

d) $|x|=-|x| \iff x=0$

e) $|x|=|y| \iff x=\pm y$

f) $|x|=\sqrt{x^2} \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

g) $|x\pm y|\leq |x|+|y| \qquad \forall x,y\in\mathbb{R}$

h) $|x-y|\leq |x-z|+|z-y| \qquad \forall x,y,z\in\mathbb{R}$

i) $\Big||x|-|y|\Big|\leq |x-y| \qquad \forall x,y\in\mathbb{R}$

l) se $a\geq 0$ $\quad \begin{cases} |x|\leq a \iff -a\leq x\leq a \\ |x|\geq a \iff x\leq -a \text{ oppure } x\geq a \end{cases}$

m) se $a<0$ $\quad \begin{cases} |x|\leq a & \text{impossibile} \\ |x|\geq a & \forall x\in\mathbb{R}\,. \end{cases}$

n) se $a>0$ $\quad \begin{cases} |x|<a \iff -a<x<a \\ |x|>a \iff x<-a \text{ oppure } x>a \end{cases}$

q) se $a\leq 0$ $\quad \begin{cases} |x|<a & \text{impossibile} \\ |x|>a & \forall x\in\mathbb{R},\text{ se } a<0;\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\text{ se } a=0\,. \end{cases}$

Come esempio, possiamo riprendere l'esercizio 5) del paragrafo precedente (cioè $\sqrt{x^2-2x+1}>x-2$), per risolverlo in altro modo. Infatti,

$$\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$$

e la disequazione proposta diventa $x-2<|x-1|$, la quale è soddisfatta immediatamente se $x-2<0$, ovvero $x<2$. Se invece $x\geq 2$, dobbiamo considerare l'unione delle soluzioni delle due disequazioni

$$x-1>x-2 \quad \text{e} \quad x-1<2-x$$

dove la prima è sempre verificata, mentre la seconda fornisce $x < 3/2$, che non è ammissibile nell'insieme $x \geq 2$ considerato. Pertanto le soluzioni cercate sono date dall'unione dei tre insiemi $\{x < 2\}$, $\{x \geq 2\}$ e $\emptyset$, ovvero da tutti gli $x \in \mathbb{R}$.

- Esercizi

1)	$\lvert x^2 - 5x\rvert = 3$	$\left(x = \frac{5\pm\sqrt{37}}{2}; \frac{5\pm\sqrt{13}}{2}\right)$
2)	$\lvert x + 7/5\rvert = -2$	(impossibile)
3)	$\lvert x + 2\rvert = \lvert x^2 - 1\rvert$	$\left(x = \frac{1\pm\sqrt{13}}{2}\right)$
4)	$\lvert x^2 + \frac{2}{3}x\rvert = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$	(impossibile)
5)	$\lvert x + \sqrt{2}\rvert < 3$	$(-3 - \sqrt{2} < x < 3 - \sqrt{2})$
6)	$\lvert x^2 + \pi x + 5\rvert < 0$	(impossibile)
7)	$\lvert x^2 + 9/4\rvert > 1/4$	$(\forall x \in \mathbb{R})$
8)	$\lvert x - 4\rvert \leq \lvert x + 4\rvert$	$(x \geq 0)$
9)	$\lvert x^2 - 4\rvert > x - 3$	$(\forall x \in \mathbb{R})$
10)	$\lvert 2x^2 - 1\rvert \leq 3x - 2x^2 - 5$	(impossibile)

A titolo d'esempio, svolgiamo esplicitamente alcuni degli esercizi proposti.

Svolgimento 1): *L'equazione proposta si può riscrivere nella forma*

$$x^2 - 5x = \pm 3$$

da cui $x^2 - 5x - 3 = 0$ *e* $x^2 - 5x + 3 = 0$, *ovvero* $x = \frac{5\pm\sqrt{37}}{2}$ *e* $x = \frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$.

Svolgimento 2): *Poiché il primo membro è sempre non negativo, mentre il secondo è negativo, l'uguaglianza non sarà mai verificata.*

Svolgimento 3): *L'eguaglianza dei due moduli implica*

$$x + 2 = \pm(x^2 - 1)\,,$$

da cui si ottengono le due equazioni

$$x^2 - 1 = x + 2 \qquad e \qquad x^2 - 1 = -x - 2\,.$$

Risolvendo, si ricava $x = \frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$.

Svolgimento 4): *Osserviamo innanzitutto che, affinché l'equazione proposta abbia soluzioni, si deve imporre la condizione* $\frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \geq 0$, *cioè* $x \geq 1/2$. *A questo punto, come in precedenza, ci riconduciamo alle due equazioni*

$$x^2 + \frac{2}{3}x = \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}\right) \qquad e \qquad x^2 + \frac{2}{3}x = -\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}\right)$$

che risultano non risolubili nell'insieme $x \geq 1/2$ *considerato.*

Svolgimento 5): *Per le proprietà del modulo, si ottiene*

$$-3 < x + \sqrt{2} < 3 \qquad da\ cui \qquad -3 - \sqrt{2} < x < 3 - \sqrt{2}\,.$$

Svolgimento 7): *Per le proprietà del modulo, si ottiene* $|x^2 + 9/4| = x^2 + 9/4$; *pertanto la disequazione proposta si riscrive, più semplicemente, nella forma* $x^2 + 9/4 > 1/4$, *che è sempre verificata.*

Svolgimento 8): *Sfruttando le proprietà del modulo, si ottiene*

$$-|x + 4| \leq x - 4 \leq |x + 4|$$

ovvero il sistema

$$\begin{cases} 4 - x \leq |x + 4|\,, \\ x - 4 \leq |x + 4|\,. \end{cases} \tag{1.5}$$

Le soluzioni della prima disequazione si riconducono all'unione dell'insieme $\{x \in \mathbb{R} : 4 - x \leq 0\} = \{x \geq 4\}$ *e delle soluzioni delle due disequazioni*

$$x + 4 \geq 4 - x \qquad e \qquad x + 4 \leq -(4 - x)$$

nell'insieme $\{x < 4\}$. *D'altra parte, le soluzioni della seconda disequazione in (1.5) si riconducono all'unione dell'insieme* $\{x \in \mathbb{R} \ : \ x - 4 \leq 0\} = \{x \leq 4\}$ *e delle soluzioni delle due disequazioni*

$$x + 4 \geq x - 4 \qquad e \qquad x + 4 \leq -(x - 4)$$

nell'insieme $\{x > 4\}$. *Facendo i conti, si ottiene che la prima disequazione di (1.5) è risolta per tutti gli* $x \geq 0$, *mentre la seconda è risolta per tutti gli* $x \in \mathbb{R}$, *pertanto la soluzione del sistema (1.5) è data da* $x \geq 0$.

1.6. Trigonometria

- Identità fondamentali della trigonometria

$\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta = 1$

$\sin(-\vartheta) = -\sin\vartheta$	$\cos(-\vartheta) = \cos\vartheta$
$\sin 2\vartheta = 2\sin\vartheta\ \cos\vartheta$	$\cos 2\vartheta = \cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta = 1 - 2\sin^2\vartheta = 2\cos^2\vartheta - 1$
$\sin(\vartheta \pm \phi) = \sin\vartheta\ \cos\phi \pm \cos\vartheta\ \sin\phi$	$\cos(\vartheta \pm \phi) = \cos\vartheta\ \cos\phi \mp \sin\vartheta\ \sin\phi$
$\sin\frac{\vartheta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\vartheta}{2}}$	$\cos\frac{\vartheta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\vartheta}{2}}$
$\sin\vartheta = \frac{2\tan\frac{\vartheta}{2}}{1+\tan^2\frac{\vartheta}{2}}$	$\cos\vartheta = \frac{1-\tan^2\frac{\vartheta}{2}}{1+\tan^2\frac{\vartheta}{2}}$
$\sin^2\vartheta = \frac{\tan^2\vartheta}{1+\tan^2\vartheta}$	$\cos^2\vartheta = \frac{1}{1+\tan^2\vartheta}$
$\sin\vartheta + \sin\phi = 2\sin\frac{\vartheta+\phi}{2}\ \cos\frac{\vartheta-\phi}{2}$	$\sin\vartheta - \sin\phi = 2\sin\frac{\vartheta-\phi}{2}\ \cos\frac{\vartheta+\phi}{2}$
$\cos\vartheta + \cos\phi = 2\cos\frac{\vartheta+\phi}{2}\ \cos\frac{\vartheta-\phi}{2}$	$\cos\vartheta - \cos\phi = -2\sin\frac{\vartheta+\phi}{2}\ \sin\frac{\vartheta-\phi}{2}$
$\cos\vartheta\cdot\cos\phi = \frac{1}{2}[\cos(\vartheta+\phi) + \cos(\vartheta-\phi)]$	$\sin\vartheta\cdot\sin\phi = \frac{1}{2}[\cos(\vartheta-\phi) - \cos(\vartheta+\phi)]$
$\sin\vartheta\cdot\cos\phi = \frac{1}{2}[\sin(\vartheta+\phi) + \sin(\vartheta-\phi)]$	

• Le funzioni trigonometriche inverse

Ricordiamo che le funzioni trigonometriche, in quanto funzioni periodiche, non sono invertibili. È possibile però definire le funzioni arcoseno, arcocoseno e arcotangente, che sono le funzioni inverse, rispettivamente, della restrizione nell'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$ della funzione seno, della restrizione nell'intervallo $[0, \pi]$ della funzione coseno, della restrizione nell'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$ della funzione tangente. Pertanto si ha

$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$$
$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$
$$\arctan : (-\infty, +\infty) \to (-\pi/2, \pi/2)$$

e

$$\arcsin(\sin x) = x \iff x \in [-\pi/2, \pi/2]$$
$$\sin(\arcsin x) = x \qquad \forall x \in [-1, 1]$$
$$\arccos(\cos x) = x \iff x \in [0, \pi]$$
$$\cos(\arccos x) = x \qquad \forall x \in [-1, 1]$$
$$\arctan(\tan x) = x \iff x \in (-\pi/2, \pi/2)$$
$$\tan(\arctan x) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

In particolare, $\arcsin x$ o $\arccos x$ non sono definiti per $x < -1$ e $x > 1$, mentre $\arctan x$ è sempre definita. Inoltre, $\arcsin x$, $\arccos x$ e $\arctan x$, quando sono definite, assumono esclusivamente valori compresi, rispettivamente, tra $-\pi/2$ e $\pi/2$ estremi inclusi, 0 e π estremi inclusi, $-\pi/2$ e $\pi/2$ estremi esclusi.

Per esempio, $\arcsin(3,5)$ non è definito, poiché $3,5 \notin [-1, 1]$. Analogamente, $\arccos\left(\cos(\frac{9}{4}\pi)\right)$ non vale $\frac{9}{4}\pi$, poiché $\frac{9}{4}\pi \notin [0, \pi]$; al contrario, $\arccos\left(\cos(\frac{9}{4}\pi)\right) = \pi/4$. Invece, $\cos\left(\arccos(0,7)\right) = 0,7$.

• Equazioni e disequazioni trigonometriche

1) $2\sin^2\vartheta + 5\sin\vartheta = -2$ $\quad (\vartheta = -\pi/6 + 2k\pi; 7\pi/6 + 2k\pi)$

2) $2\cos\vartheta + 4\sin^2\vartheta = \cos\vartheta + \sin^2\vartheta$ $\quad (\vartheta = 2k\pi \pm \vartheta_1)$ (vedi svolgimento)

3) $2\cos 2\vartheta + 2\sqrt{3}\sin\vartheta = 2$ $\quad (\vartheta = k\pi; \pi/3 + 2k\pi; 2\pi/3 + 2k\pi)$

4) $\cos\vartheta + \sin\vartheta \tan\vartheta > 1$ $\quad (-\pi/2 + 2k\pi < \vartheta < \pi/2 + 2k\pi; \vartheta \neq 2k\pi)$

5) $\dfrac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta - \sin\vartheta} + \dfrac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta + \sin\vartheta} \le \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad (-\pi/4 + \frac{k\pi}{2} < \vartheta \le \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2})$

6) $\dfrac{\sin 2\vartheta \tan\vartheta}{2} \ge 1 + \cos^2\vartheta$ $\quad$ (impossibile)

7) $\frac{1}{2}\sin 2\vartheta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\vartheta \ge \sin(\vartheta + \pi/6)$ $\quad (-\pi/6 + 2k\pi \le \vartheta \le \pi/6 + 2k\pi;$ $-7\pi/6 + 2k\pi \le \vartheta \le -\pi/2 + 2k\pi)$

8) $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\vartheta - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\vartheta = -1/2$ $\quad (\vartheta = \frac{\pi}{12} + 2k\pi; -\frac{7}{12}\pi + 2k\pi)$

9) $\dfrac{4\sin\vartheta}{1 + \tan^2\vartheta} = \sqrt{3}\cos\vartheta$ $\quad (\vartheta = \pi/6 + k\pi; \pi/3 + k\pi)$

10) $\sin 2\vartheta \ge \tan\vartheta$ $\quad (\vartheta = k\pi; k\pi/2 < \vartheta \le \pi/4 + k\pi/2)$

Risolviamo ora esplicitamente alcuni degli esercizi proposti.

Svolgimento 1): *Ponendo $t = \sin\vartheta$, l'equazione proposta si riconduce all'equazione di secondo grado $2t^2 + 5t + 2 = 0$, che ha come soluzioni $t = -1/2; -2$. Poiché $\sin\vartheta = -2$ è impossibile, l'unica soluzione ammissibile è $\sin\vartheta = -1/2$, da cui $\vartheta = -\pi/6 + 2k\pi; 7\pi/6 + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.*

Svolgimento 2): *Semplificando l'equazione proposta, ricordando che $\sin^2\vartheta = 1 - \cos^2\vartheta$ ed effettuando la sostituzione $t = \cos\vartheta$, ci si riconduce all'equazione di secondo grado $3t^2 - t - 3 = 0$, che ha come soluzioni $t = \frac{1 \pm \sqrt{37}}{6}$. Poiché $\frac{1+\sqrt{37}}{6} > 1$, l'unica soluzione ammissibile è $\cos\vartheta = \frac{1-\sqrt{37}}{6}$, che è un numero negativo maggiore di -1. Chiamando ϑ_1 l'angolo del secondo quadrante che soddisfa $\cos(\vartheta_1) = \frac{1-\sqrt{37}}{6}$ (cioè $\vartheta_1 = \arccos\left(\frac{1-\sqrt{37}}{6}\right)$), si ottiene che la soluzione cercata è data da $\vartheta = 2k\pi \pm \vartheta_1$, con $k \in \mathbb{Z}$.*

Svolgimento 3): *Ricordando che $\cos 2\vartheta = 1 - 2\sin^2\vartheta$, l'equazione proposta si riscrive nella forma $2\sin\vartheta(2\sin\vartheta - \sqrt{3}) = 0$, ovvero $\sin\vartheta = 0$ e $\sin\vartheta = \sqrt{3}/2$. Pertanto la soluzione cercata è data da $\vartheta = k\pi; \pi/3 + 2k\pi; 2\pi/3 + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.*

Svolgimento 4): *Ricordando che $\tan\vartheta = \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}$, con $\vartheta \neq \pi/2 + k\pi$, calcolando il minimo comune denominatore ed utilizzando l'identità $\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta = 1$, la disequazione proposta si riconduce a $\frac{1}{\cos\vartheta} > 1$ che per $\cos\vartheta \le 0$, cioè per $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \le \vartheta \le \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$, è impossibile, mentre per $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \vartheta < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, con $\vartheta \neq 2k\pi$, è sempre verificata.*

Svolgimento 5): *Calcolando il minimo comune denominatore e ricordando che $2\sin\vartheta\cos\vartheta = \sin 2\vartheta$ e $\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta = \cos 2\vartheta$, la disequazione proposta si riscrive nella forma $\frac{\sin 2\vartheta}{\cos 2\vartheta} = \tan 2\vartheta \le \frac{1}{\sqrt{3}}$, valida se $\cos 2\vartheta \neq 0$, cioè per $\vartheta \neq \pi/4 + k\pi/2$. Da ciò si ricavano le soluzioni $-\frac{\pi}{2} + k\pi < 2\vartheta \le \pi/6 + k\pi$, ovvero $-\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} < \vartheta \le \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$, con $k \in \mathbb{Z}$.*

Svolgimento 6): *Ricordando che $\sin 2\vartheta = 2\sin\vartheta\cos\vartheta$ e $\tan\vartheta = \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}$, per ogni $\vartheta \neq \pi/2 + k\pi$, la disequazione proposta si riscrive nella forma $\sin^2\vartheta \ge 1 + \cos^2\vartheta$. Utilizzando ora l'identità $\sin^2\vartheta = 1 - \cos^2\vartheta$, si ottiene $2\cos^2\vartheta \le 0$, che ha come soluzione solamente i valori che annullano $\cos\vartheta$, cioè $\vartheta = (2k+1)\frac{\pi}{2}$. Questi, però sono stati scartati inizialmente; pertanto la disequazione è impossibile.*

Svolgimento 7): *Sfruttiamo le formule di addizione e di duplicazione, osservando che*

$$\frac{1}{2}\sin 2\vartheta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\vartheta = \cos(\pi/3)\sin 2\vartheta + \sin(\pi/3)\cos 2\vartheta =$$
$$\sin(\pi/3 + 2\vartheta) = \sin[2(\pi/6 + \vartheta)] = 2\sin(\pi/6 + \vartheta)\cos(\pi/6 + \vartheta)\,,$$

da cui

$$\sin(\pi/6 + \vartheta)[2\cos(\pi/6 + \vartheta) - 1] \ge 0\,.$$

Quest'ultima disequazione si trasforma nei due sistemi

$$\begin{cases} \sin(\pi/6 + \vartheta) \ge 0\,, \\ \cos(\pi/6 + \vartheta) \ge \dfrac{1}{2}\,, \end{cases} \bigcup \begin{cases} \sin(\pi/6 + \vartheta) \le 0\,, \\ \cos(\pi/6 + \vartheta) \le \dfrac{1}{2}\,. \end{cases}$$

Considerando solo l'intervallo $[-\pi,\pi]$, abbiamo

$$\begin{cases} 0 \le \pi/6+\vartheta \le \pi \\ -\pi/3 \le \pi/6+\vartheta \le \pi/3 \end{cases} \bigcup \begin{cases} -\pi \le \pi/6+\vartheta \le 0 \\ -\pi \le \pi/6+\vartheta \le -\pi/3 \;;\; \pi/3 \le \pi/6+\vartheta \le \pi \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \{0 \le \vartheta+\pi/6 \le \pi/3\} \cup \{-\pi \le \vartheta+\pi/6 \le -\pi/3\}$$

da cui, per periodicità,

$$\{-\pi/6+2k\pi \le \vartheta \le \pi/6+2k\pi\} \cup \{-7\pi/6+2k\pi \le \vartheta \le -\pi/2+2k\pi\}\,.$$

Svolgimento 10): *Escludendo, al solito, $\vartheta=\pi/2+2k\pi$, riscriviamo la disequazione nella forma $2\sin\vartheta\cos\vartheta-\tan\vartheta \ge 0$, che equivale a $\tan\vartheta[2\cos^2\vartheta-1]\ge 0$ o, ancora,*

$$\tan\vartheta\left[\frac{1-\tan^2\vartheta}{1+\tan^2\vartheta}\right] \ge 0\,.$$

Osservando che il denominatore è sempre positivo e ponendo $\tan\vartheta=t$, si ottiene la disequazione $t(t^2-1)\le 0$ che ha, come soluzioni, $t\le -1$ e $0\le t\le 1$, ovvero $\tan\vartheta\le -1$ e $0\le\tan\vartheta\le 1$. Da ciò si ricava

$$\{-\pi/2+k\pi < \vartheta \le -\pi/4+k\pi\} \cup \{k\pi \le \vartheta \le \pi/4+k\pi\} =$$
$$\{\vartheta=k\pi\} \cup \{k\pi/2 < \vartheta \le \pi/4+k\pi/2\}\,.$$

1.7. Richiami di geometria analitica

- Equazioni canoniche dei principali luoghi geometrici del piano:

□ $ax+by+c=0$ — equazione generale della retta

□ $y=mx+q$ — caso delle rette non verticali dove $m=-a/b$ e $q=-c/b$ per $b\neq 0$

□ $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ — circonferenza di centro (x_0,y_0) e raggio r

□ $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ — ellisse di centro (x_0,y_0) e semiassi a e b

□ $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}-\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ — iperbole di centro (x_0,y_0) con asse parallelo all'asse y e secante l'asse trasverso in $x_0\pm a$

□ $-\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ — iperbole di centro (x_0,y_0) con asse parallelo all'asse x e secante l'asse trasverso in $y_0\pm b$

□ $y=ax^2+bx+c$ — parabola con asse parallelo all'asse y e vertice in $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ per $a>0$ la concavità è rivolta verso l'alto, mentre per $a<0$ la concavità è rivolta verso il basso

□ $x=ay^2+by+c$ — parabola con asse parallelo all'asse x e vertice in $\left(\frac{4ac-b^2}{4a},-\frac{b}{2a}\right)$ per $a>0$ la concavità è rivolta verso destra, mentre per $a<0$ la concavità è rivolta verso sinistra

In generale, data un'equazione del secondo ordine della forma $ax^2+bx+cy^2+dy+e=0$, con $a,c\neq 0$, si può utilizzare il metodo del cosiddetto *complemento al quadrato* per ottenere il corrispondente luogo geometrico in forma canonica. L'idea è quella di riscrivere i termini ax^2+bx e cy^2+dy rispettivamente nella forma $a(x-\beta)^2$ e $c(y-\delta)^2$, a meno di una costante additiva. Più precisamente, si ottiene:

$$ax^2+bx+cy^2+dy+e = a\left(x-\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2+c\left(y-\left(-\frac{d}{2c}\right)\right)^2+e-\frac{b^2}{4a}-\frac{d^2}{4c}=0$$

o anche, posto che $\frac{b^2}{4a}+\frac{d^2}{4c}-e$ sia positivo (altrimenti ci si può ricondurre a questo caso moltiplicando ambo i membri dell'equazione per -1),

$$a\,\frac{(x-(-\frac{b}{2a}))^2}{\left(\sqrt{\frac{b^2}{4a}+\frac{d^2}{4c}-e}\right)^2}+c\,\frac{(y-(-\frac{d}{2c}))^2}{\left(\sqrt{\frac{b^2}{4a}+\frac{d^2}{4c}-e}\right)^2}=1\,.$$

A questo punto, a seconda dei segni di a e c, ci si riconduce subito all'equazione canonica dell'ellisse (e in particolare della circonferenza) o dell'iperbole.

- Disegnare i seguenti luoghi geometrici

1) $3y+5x+2=0$ *(retta passante per $P=(0,-2/3)$ e $Q=(-2/5,0)$)*
2) $6x^2+3(y-1)^2-1=0$ *(ellisse di centro $(0,1)$ e semiassi $a=1/\sqrt{6}$, $b=1/\sqrt{3}$)*
3) $x^2+y^2+2x-2=0$ *(vedi svolgimento)*
4) $36x^2+12x-y^2+4=0$ *(vedi svolgimento)*
5) $3x^2+2y-1=0$ *(parabola di vertice $(0,1/2)$ e concavità verso il basso))*
6) $y^2+3x=2$ *(parabola di vertice $(2/3,0)$ e concavità verso sinistra)*
7) $4y+12x=1$ *(retta passante per $P=(0,\frac{1}{4})$ e $Q=(\frac{1}{12},0)$)*
8) $4x^2+2x+4y^2-2y=3/2$ *(vedi svolgimento)*
9) $4x^2-y^2+2y=9$ *(vedi svolgimento)*
10) $2x+3y=3(y+1)+1$ *(vedi svolgimento)*

Risolviamo ora esplicitamente alcuni degli esercizi proposti.

Svolgimento 3): *Utilizzando il metodo del complemento al quadrato, si ottiene $0=x^2+2x+y^2-2=(x+1)^2+y^2-3$, ovvero $(x+1)^2+y^2=(\sqrt{3})^2$ che è l'equazione canonica della circonferenza di centro $(-1,0)$ e raggio $r=\sqrt{3}$.*

Svolgimento 4): *Utilizzando il metodo del complemento al quadrato, si ottiene* $0 = 36x^2 + 12x - y^2 + 4 = 36(x + 1/6)^2 - y^2 + 3$, *ovvero*

$$\frac{y^2}{(\sqrt{3})^2} - \frac{(x+1/6)^2}{(1/\sqrt{12})^2} = 1$$

che è l'equazione canonica dell'iperbole di centro $(-1/6, 0)$, *semiassi* $a = 1/\sqrt{12}$ *e* $b = \sqrt{3}$ *e con asse parallelo all'asse* x.

Svolgimento 8): *Utilizzando il metodo del complemento al quadrato, si ottiene* $3/2 = 4x^2 + 2x + 4y^2 - 2y = 4(x + 1/4)^2 + 4(y - 1/4)^2 - 1/2$, *ovvero* $(x + 1/4)^2 + (y - 1/4)^2 = (1/\sqrt{2})^2$ *che è l'equazione canonica della circonferenza di centro* $(-1/4, 1/4)$ *e raggio* $r = 1/\sqrt{2}$.

Svolgimento 9): *Utilizzando il metodo del complemento al quadrato, si ottiene* $9 = 4x^2 - y^2 + 2y = 4x^2 - (y-1)^2 + 1$, *ovvero*

$$\frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{(y-1)^2}{(2\sqrt{2})^2} = 1$$

che è l'equazione canonica dell'iperbole di centro $(0, 1)$, *semiassi* $a = \sqrt{2}$ *e* $b = 2\sqrt{2}$ *e con asse parallelo all' asse* y.

Svolgimento 10): *Raccogliendo i monomi simili, l'equazione proposta si può riscrivere nella forma* $2x - 4 = 0$ *che è l'equazione canonica di una retta verticale passante per* $x = 2$.

1.8. Estremo superiore, inferiore, massimi e minimi

• Richiami

Dato un sottoinsieme $A \neq \emptyset$ di numeri reali, si dice che esso è *superiormente* (rispett. *inferiormente*) limitato se esiste un numero reale α tale che, per ogni numero $a \in A$, valga la relazione $a \leq \alpha$ (rispett. $a \geq \alpha$). In tal caso, il numero α si chiama *maggiorante* (rispett. *minorante*) dell'insieme A. L'insieme A si dice limitato se esso è contemporaneamente superiormente ed inferiormente limitato.

Dato un insieme di numeri reali $A \neq \emptyset$ superiormente (rispett. inferiormente) limitato, si definisce *estremo superiore* di A o $\sup A$ (rispett. *estremo inferiore* di A o $\inf A$) il più piccolo dei maggioranti (rispett. il più grande dei minoranti), che si dimostra esistere ed essere unico. Più precisamente $S = \sup A$ (rispett. $s = \inf A$) se valgono le seguenti due proprietà:

(*i*) $S \geq a \quad \forall\, a \in A$ $\iff$ S è un maggiorante
(*ii*) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, \overline{a} \in A$ tale che $S - \varepsilon \leq \overline{a}$ $\iff$ S è il più piccolo dei maggioranti

(rispettivamente

(*i*) $s \leq a \quad \forall\, a \in A$ $\iff$ s è un minorante
(*ii*) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, \overline{a} \in A$ tale che $s + \varepsilon \geq \overline{a}$ $\iff$ s è il più grande dei minoranti)

In generale S (rispett. s) non appartiene all'insieme A; nel caso particolare in cui ciò avvenga, S è detto *massimo* di A o $\max A$ (rispett. *minimo* di A o $\min A$).

Per convenzione, se l'insieme A non è superiormente (ripett. inferiormente) limitato, si usa dire che l'estremo superiore (rispett. inferiore) di A è $+\infty$ (rispett. $-\infty$). Ovviamente, poiché

è ben noto che $+\infty$ (rispett. $-\infty$) non sono numeri reali, un insieme superiormente (rispett. inferiormente) illimitato non ammette mai massimo (rispett. minimo).

• Determinare **sup**, **inf** e, qualora esistano, **max**, **min** dei seguenti insiemi:

1) $A = \{n \ : \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{2/n^3 \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ ($\sup A = +\infty$; $\inf A = 0$)
2) $A = \left\{\frac{n^2-1}{n^2} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$ ($\sup A = 1$; $\inf A = \min A = 0$)
3) $A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ \sqrt{x^2+2} \leq x + 3\}$ (Poiché $A = [-7/6, +\infty)$, $\sup A = +\infty$; $\inf A = \min A = -7/6$)
4) $A = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ : \ 2\log x^2 < 3\}$ (Poiché $A = (-e^{3/4}, e^{3/4}) \setminus \{0\}$, $\sup A = e^{3/4}$; $\inf A = -e^{3/4}$)
5) $A = \{n \in \mathbb{N} \ : \ n^2 + 2n \geq 5\}$ (Poiché $A = [2, +\infty) \cap \mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} \ : \ n \geq 2\}$, $\sup A = +\infty$; $\inf A = \min A = 2$)
6) $A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ |x^2 - 2| > x - 1\}$ (Poiché $A = \left(-\infty, \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$, $\sup A = +\infty$; $\inf A = -\infty$)
7) $A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ \frac{e^{3x^3} e^3}{e^{2x}} = e^{2x^2+x+1}\}$ (Poiché $A = \{2/3; \pm 1\}$, $\sup A = \max A = 1$; $\inf A = \min A = -1$)
8) $A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ \log_2(6x) + 2\log_2 x - \log_2(3x) = 4\}$ (Poiché $A = \{\sqrt{8}\}$, $\sup A = \max A = \sqrt{8} = \inf A = \min A$)
9) $A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ \log^3 x - 2\log x < 0\}$ (Poiché $A = (0, e^{-\sqrt{2}}) \cup (1, e^{\sqrt{2}})$, $\sup A = e^{\sqrt{2}}$; $\inf A = 0$)
10) $A = \{xy \ : \ x \in \mathbb{R}\,,\ -2 \leq x \leq 1\,;\ y \in \mathbb{R}\,,\ -4 \leq y \leq -1\}$ ($\sup A = \max A = 8$; $\inf A = \min A = -4$)

Risolviamo ora esplicitamente alcuni degli esercizi proposti.

Svolgimento 1): *Poiché l'insieme* A *contiene* $\mathbb{N}$, *esso è illimitato superiormente. Inoltre, l'insieme* $\{2/n^3 \ : \ n \in \mathbb{N}\} = \{2; 1/4; 2/(27); \ldots\}$ *è formato da elementi strettamente positivi che, al crescere di* n, *divengono sempre più piccoli. In effetti, si osserva che, per ogni* $\varepsilon > 0$, *prendendo* $n > \sqrt[3]{2/\varepsilon}$, *si ottiene* $2/n^3 < \varepsilon = 0 + \varepsilon$. *Quindi* $\inf A = 0$ *e poiché* $0 \notin A$, *l'insieme non ammette minimo.*

Svolgimento 4): *Risolviamo la disequazione che definisce l'insieme* A:

$$\begin{cases} 2\log x^2 < 3 \\ x \neq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \log x^2 < 3/2 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x^2 < e^{3/2} \\ x \neq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -e^{3/4} < x < e^{3/4} \\ x \neq 0 \end{cases}$$

ovvero $A = (-e^{3/4}, 0) \cup (0, e^{3/4})$. *Pertanto* $\inf A = -e^{3/4}$, $\sup A = e^{3/4}$ *e l'insieme non ammette né minimo né massimo.*

Svolgimento 5): *Risolviamo, in* $\mathbb{R}$, *la disequazione che definisce l'insieme* A:

$$x^2 + 2x - 5 \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \leq -1 - \sqrt{6} \ \ e \ \ x \geq -1 + \sqrt{6}\,.$$

Osservando che $-1-\sqrt{6} < 0$ *e* $1 < -1+\sqrt{6} < 2$, *si ottiene che i numeri naturali che soddisfano la condizione richiesta sono tutti quelli maggiori o uguali a* 2; *pertanto,* $A = \{n \in \mathbb{N} \ : \ n \geq 2\}$. *Quindi* $\inf A = \min A = 2$ *e* $\sup A = +\infty$.

Svolgimento 7): *Risolviamo l'equazione che definisce l'insieme* A:

$$\begin{array}{llll} \dfrac{e^{3x^3}e^3}{e^{2x}} = e^{2x^2+x+1} & \Longleftrightarrow & e^{3x^3-2x+3} = e^{2x^2+x+1} & \Longleftrightarrow \\ 3x^3 - 2x + 3 = 2x^2 + x + 1 & \Longleftrightarrow & 3x^3 - 2x^2 - 3x + 2 = 0 & \Longleftrightarrow \\ x^2(3x-2) - (3x-2) = 0 & \Longleftrightarrow & (x^2-1)(3x-2) = 0 & \Longleftrightarrow \end{array}$$
$$x = \pm 1\,; \quad x = 2/3\,.$$

Quindi $A = \{-1; 2/3; 1\}$, *da cui si ricava* $\inf A = \min A = -1$ *e* $\sup A = \max A = 1$.

Svolgimento 10): *Poiché* x *cambia segno, mentre* y *è sempre strettamente negativo, il valore massimo del prodotto* xy *sarà positivo e si otterrà prendendo* $x = -2$ *e* $y = -4$, *cioè* $xy = 8$, *mentre il valore minimo sarà negativo e si otterrà prendendo* $x = 1$ *e* $y = -4$, *cioè* $xy = -4$. *Pertanto,* $\inf A = \min A = -4$ *e* $\sup A = \max A = 8$.

1.9. Esercizi di ricapitolazione

DOMANDA 1.1. Quanto vale $\arctan[\tan(\frac{13}{3}\pi)]$?

[a] non esiste; [b] $\frac{\pi}{3}$; [c] $\frac{13}{3}\pi$; [d] $\sqrt{3}$.

DOMANDA 1.2. Il $\log x^4$ per $x < 0$ è uguale a

[a] $4\log(-x)$; [b] $4\log x$; [c] $-4\log x$; [d] non è definito.

DOMANDA 1.3. Il $(\log_2 4 - \log_2 16)$ è uguale a

[a] $-\log_2 12$; [b] -2; [c] $\frac{\log_2 4}{\log_2 16}$; [d] -4.

DOMANDA 1.4. Il $[\log_3 9 \cdot \log_3(27)]$ vale

[a] $\log_3(9+27)$; [b] $\log_3 9 + \log_3(27)$; [c] 6; [d] $\log_3[9\cdot(27)]$.

DOMANDA 1.5. Il numero $e^{\log(-10)^2}$

[a] non è definito; [b] vale -100; [c] vale 100; [d] è uguale a $e^{2\log(-10)}$.

DOMANDA 1.6. Il numero $\dfrac{3^{2/3}}{3^{-1/5}}$ vale

[a] $3^{2/3-1/5}$; [b] $\dfrac{1}{3^{(-1/5+2/3)}}$; [c] $\dfrac{1}{3^{(-1/5-2/3)}}$; [d] $3^{2/3}(1/3)^{1/5}$.

DOMANDA 1.7. L'$\arctan[\sin(\pi/2)]$ vale

[a] non è definita; [b] $+\infty$; [c] 0; [d] $\pi/4$.

DOMANDA 1.8. Il $\dfrac{\log_2 16}{\log_2 8}$ vale

[a] 4/3; [b] 1; [c] $\log_2 16 - \log_2 8$; [d] $\log_2(16-8)$.

DOMANDA 1.9. Quanto vale $\arctan[\tan(\frac{17}{3}\pi)]$?

[a] $-\frac{\pi}{3}$; [b] non esiste; [c] $\frac{17}{3}\pi$; [d] $-\sqrt{3}$.

DOMANDA 1.10. Il $\dfrac{\log_4 64}{\log_4 16}$ vale

[a] 3/2; [b] 1; [c] $\log_4 64 - \log_4 16$; [d] $\log_4 48$.

DOMANDA 1.11. Il numero $10^{-7/5}$ vale

[a] $10^{5/7}$; [b] $(1/10)^{7/5}$; [c] $(1/10)^{5/7}$; [d] $(-10)^{7/5}$.

DOMANDA 1.12. L'insieme $\left\{x \in \mathbf{R} : x + \dfrac{1}{3x} > 0\right\}$ è

[a] inferiormente limitato; [b] superiormente limitato; [c] limitato; [d] illimitato.

DOMANDA 1.13. Stabilire quale dei seguenti insiemi di numeri reali è superiormente limitato:

[a] $\{1\}$; [b] $\{y \in \mathbb{R} \ : \ y = e^x \text{ per } x \in \mathbb{Z}\}$; [c] $\{x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 > 1\}$; [d] $\{y \in \mathbb{R} \ : \ y = \log x \text{ con } x \in \mathbb{Q} \cap (0, +\infty)\}$.

DOMANDA 1.14. Dati $x, y > 0$, stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta:

[a] $\log x^2 = (\log x)^2$; [b] $\log x - \log y = \log(x-y)$; [c] $\log x + \log y = \log(x+y)$; [d] $\log(x/y) = \log x - \log y$.

DOMANDA 1.15. L'insieme $\left\{\dfrac{1}{\log n} \ : \ n \geq 2\right\}$ è

[a] inferiormente illimitato; [b] superiormente illimitato; [c] limitato; [d] illimitato.

Risposte alle precedenti domande: **1.1**: b - **1.2**: a - **1.3**: b - **1.4**: c - **1.5**: c - **1.6**: c - **1.7**: d - **1.8**: a - **1.9**: a - **1.10**: a - **1.11**: b - **1.12**: a - **1.13**: a - **1.14**: d - **1.15**: c.

CAPITOLO 2

NUMERI COMPLESSI

2.1. Richiami

Ricordiamo che un numero complesso z si può rappresentare in forma cartesiana, algebrica, trigonometrica ed esponenziale. Riportiamo qui di seguito le quattro espressioni e le relazioni che intercorrono fra loro:

$z = (a, b)$	forma cartesiana
$z = a + ib$	forma algebrica
$z = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$	forma trigonometrica
$z = \rho e^{i\vartheta}$	forma esponenziale

* * *

$$a = \rho\cos\vartheta \qquad b = \rho\sin\vartheta$$

$$\rho = \sqrt{a^2+b^2} \qquad \cos\vartheta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \sin\vartheta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

dove $a \in \mathbb{R}$ è detta *parte reale* e si indica con $\mathrm{Re}(z)$, $b \in \mathbb{R}$ è detta *parte immaginaria* e si indica con $\mathrm{Im}(z)$, $\rho \in [0, +\infty)$ è detto *modulo*, $\vartheta \in \mathbb{R}$ è detto *argomento* e si indica con arg z (se $\vartheta \in (-\pi, \pi]$ o, in alcuni testi, $\vartheta \in [0, 2\pi)$, esso è detto *argomento principale* e si indica con il simbolo Arg z), i è l'unità immaginaria ($i^2 = -1$).
L'espressione $e^{i\vartheta}$ si può leggere come una forma compatta per indicare $\cos\vartheta + i\sin\vartheta$; essa, però, non è solo una scrittura stenografica, ma, come vedremo in seguito, gode effettivamente delle ben note proprietà dell'esponenziale per quanto riguarda il prodotto, il rapporto e le potenze intere. Bisogna, però, tenere ben presente che, contrariamente all'esponenziale reale, l'esponenziale complesso è periodico in ϑ.

Ogni numero complesso, scritto in forma cartesiana o algebrica $z = (a, b) = a + ib$, è in corrispondenza biunivoca con un punto del piano cartesiano (detto anche *piano complesso*) di coordinate cartesiane (a, b), mentre ogni numero complesso, scritto in forma trigonometrica o esponenziale $z = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = \rho e^{i\vartheta}$, quando ρ è non nullo e ϑ è l'argomento principale, è in corrispondenza biunivoca con un punto del piano di coordinate polari (ρ, ϑ).

Due numeri complessi z e w coincidono se e solo se, scritti in forma algebrica, hanno la stessa parte reale e la stessa parte immaginaria, oppure se, scritti in forma trigonometrica o esponenziale, hanno lo stesso modulo e gli argomenti che differiscono per multipli interi di 2π, cioè:

$$z = a + ib = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = \rho e^{i\vartheta} \qquad w = c + id = r(\cos\phi + i\sin\phi) = re^{i\phi}$$

$$z = w \iff \begin{cases} a = c \quad b = d \\ \text{oppure} \\ \rho = r \quad \vartheta = \phi + 2k\pi\,. \end{cases}$$

I numeri complessi che hanno parte immaginaria nulla ($b = 0$ ovvero $\vartheta = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$) sono gli usuali numeri reali (positivi per $\vartheta = 2k\pi$ e negativi per $\vartheta = (2k+1)\pi$). I numeri della forma $z = ib$, cioè quelli con parte reale nulla ($a = 0$ ovvero $\vartheta = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, con $k \in \mathbb{Z}$), sono detti *immaginari* *puri.* I numeri della forma $z = e^{i\vartheta}$, con $\vartheta \in \mathbb{R}$, sono tutti numeri complessi di modulo unitario, cioè nel piano complesso corrispondono a punti della circonferenza unitaria centrata nell'origine. Invece, se $z = a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$, il numero $|e^z|$ è, ovviamente, reale e si ha $|e^z| = e^a$.

Dato un numero complesso $z = a + ib$, si definisce il suo *complesso coniugato* come il numero $\overline{z} = a - ib$, che nel piano complesso si rappresenta come il simmetrico, rispetto all'asse x, del numero z. Se $z = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = \rho e^{i\vartheta}$, il suo complesso coniugato si rappresenta anche come $\overline{z} = \rho(\cos\vartheta - i\sin\vartheta) = \rho e^{-i\vartheta}$. Tutti e soli i numeri reali coincidono con il loro complesso coniugato. Il modulo di un numero complesso z, dato da $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$, si indica anche con $|z|$. Ovviamente $|z| = |\overline{z}|$ ed esso è un numero reale.

Si osservi che, se $z \in \mathbb{R}$, il suo modulo coincide con il valore assoluto nel senso dei numeri reali.

Dati due numeri complessi $z = a+ib = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ e $w = c+id = r(\cos\phi + i\sin\phi)$, la loro somma algebrica si ottiene sommando algebricamente le parti reali e le parti complesse, mentre il loro prodotto si ottiene applicando l'usuale proprietà distributiva del prodotto fra numeri reali e ricordando che $i^2 = -1$, cioè $z \cdot w = (ac - bd) + i(ad + bc)$. Nel caso in cui si stia utilizzando la forma trigonometrica, facendo ricorso alle formule di prostaferesi, si ottiene anche l'espressione

$$z \cdot w = \rho r\Big(\cos(\vartheta + \phi) + i\sin(\vartheta + \phi)\Big) . \tag{2.1}$$

D'altra parte, utilizzando la forma esponenziale $z = \rho e^{i\vartheta}$ e $w = re^{i\phi}$ e moltiplicando fra loro z e w, utilizzando le usuali proprietà degli esponenziali reali, otteniamo $z \cdot w = \rho r e^{i(\vartheta+\phi)}$, che non è altro che la scrittura esponenziale della (2.1). La divisione fra numeri complessi si riconduce al prodotto, una volta osservato che

$$1/z = \overline{z}/|z|^2 = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2} = \frac{1}{\rho}(\cos\vartheta - i\sin\vartheta) = \frac{1}{\rho}\,e^{-i\vartheta} .$$

Pertanto, la forma esponenziale può risultare vantaggiosa nel caso in cui si debbano effettuare prodotti o divisioni, mentre nel caso di somme o sottrazioni è più comoda la forma algebrica.

Sottolineiamo il fatto che nel campo complesso non è possibile definire alcuna relazione d'ordine (cioè non è possibile stabilire quale sia il "più grande" o il "più piccolo" fra due numeri complessi), pertanto in campo complesso non si possono definire disequazioni, ma solo equazioni.

Lo studente non si deve però far trarre in inganno da problemi del tipo

$$|z + 2i| > \mathrm{Re}(z) \tag{2.2}$$

che hanno perfettamente senso, in quanto il modulo e la parte reale di un numero complesso sono numeri reali e, quindi, la precedente disequazione è definita in campo reale, anche se coinvolge numeri complessi. In particolare, volendo risolvere la (2.2), se poniamo $z = a + ib$, si ottiene $\sqrt{a^2 + (b+2)^2} > a$, che è sempre verificata per $a < 0$ e che per $a \geq 0$ diviene

$$a^2 + (b+2)^2 > a^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (b+2)^2 > 0 .$$

L'ultima relazione è verificata per $b \neq -2$, quindi le soluzioni cercate sono tutti i numeri complessi della forma $a + ib$ con $a < 0$ e $b \in \mathbb{R}$ oppure $a \geq 0$ e $b \neq -2$.

Indicheremo in seguito l'insieme dei numeri complessi con il simbolo $\mathbb{C}$.

• Potenze di numeri complessi: ricordiamo che, dato un numero complesso $z = a + ib = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ e dato $n \in \mathbb{N}$, il numero complesso $w = z^n = (a+ib)^n = \Big(\rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)\Big)^n$, grazie alla formula di De Moivre, è dato semplicemente da

$$z^n = \rho^n\Big(\cos(n\vartheta) + i\sin(n\vartheta)\Big) . \tag{2.3}$$

D'altra parte, poiché abbiamo detto che $z^{-1} = 1/z = \overline{z}/|z|^2$, cioè, in forma trigonometrica, $z^{-1} = (1/\rho)\Big(\cos(-\vartheta) + i\sin(-\vartheta)\Big)$, la (2.3) vale per tutti gli $n \in \mathbb{Z}$. Scrivendo, invece, z in forma esponenziale, cioè $z = \rho e^{i\vartheta}$ e facendone la potenza n-esima ($n \in \mathbb{N}$) utilizzando le usuali proprietà degli esponenziali reali, otteniamo $z^n = \rho^n e^{in\vartheta}$, che non è altro che la scrittura esponenziale della (2.3). Pertanto, la forma esponenziale può risultare vantaggiosa anche nel caso in cui si debbano effettuare operazioni di elevamento a potenza intera.

• Radici n-esime di numeri complessi: ricordiamo che in campo complesso ogni numero z ha n radici n-esime distinte, che costituiscono i vertici di un poligono regolare di n lati, inscritto in una circonferenza centrata nell'origine e di raggio pari all'unica radice n-esima reale positiva del modulo di z. In formule, se $z = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = \rho e^{i\vartheta}$,

$$\sqrt[n]{z} = \rho^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}\right)\right] = \rho^{1/n} e^{i\frac{\vartheta+2k\pi}{n}} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 .$$

In particolare, quindi, in campo complesso sono sempre ben definite le radici pari di numeri reali negativi. Inoltre, tra le n radici complesse distinte di un numero reale r, quando si pensa $r \in \mathbb{C}$, si troveranno anche le sue radici n-esime reali, qualora esse esistano.

• **Teorema Fondamentale dell'Algebra:** *Data in campo complesso l'equazione algebrica* $a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z + a_n = 0$, *dove* $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, *essa ammette sempre* n *soluzioni, se contate con la loro molteplicità. Inoltre, se* $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ *e* z_0 *è soluzione, anche* $\overline{z}_0$ *è soluzione. Infine, se* $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ *e* n *è dispari, esiste sempre almeno una soluzione reale.*

Ad esempio, l'equazione di quarto grado $z^4 - 1 = 0$, per il precedente teorema, ha 4 soluzioni, se contate con la loro molteplicità. D'altra parte, poiché l'equazione si può riscrivere nella forma $z^4 = 1$, cioè si risolve con la ricerca delle radici quarte dell'unità, essa avrà, per quanto detto sulle radici dei numeri complessi, 4 soluzioni distinte. Si osserva facilmente che $z = \pm 1$ sono radici reali quarte di 1 e quindi anche radici quarte complesse e pertanto soluzioni della nostra equazione. Non ci si deve dimenticare, però, che mancano ancora le altre due soluzioni, cioè le altre due radici quarte complesse di 1, che sono ovviamente $\pm i$. Quindi questa equazione ha 4 soluzioni distinte date da $\pm 1, \pm i$. Al contrario, l'equazione di quarto grado $(z^2 - 1)^2 = z^4 - 2z^2 + 1 = 0$, che per il teorema precedente deve sempre avere 4 soluzioni, se contate con la loro molteplicità, ha in realtà solo 2 soluzioni distinte, ciascuna di molteplicità 2. Infatti, l'equazione proposta si riscrive come $(z-1)^2(z+1)^2 = 0$, che ha come soluzioni $z = \pm 1$.

Osserviamo che il precedente teorema assicura che, in campo complesso, ogni polinomio di grado n è sempre decomponibile in prodotto di polinomi di primo grado (proprietà falsa in $\mathbb{R}$, dove, per esempio, il polinomio di secondo grado $P(x) = x^2 + 1$ non è decomponibile).

Infine, ricordiamo che, anche in campo complesso, vale l'usuale formula risolutiva delle equazioni di secondo grado (dove, naturalmente, anche per discriminanti negativi, si avranno due radici distinte).

2.2. Esercizi

- Esercizi svolti

ESERCIZIO 2.1. Determinare parte reale ed immaginaria del numero complesso

$$z = \frac{(2+i)\left(5-\frac{1}{2}i\right)}{\left(1+\frac{1}{2}i\right)}.$$

Svolgimento : *Per risolvere l'esercizio, dobbiamo riscrivere z nella forma $a+ib$. Effettuando i prodotti a numeratore ed osservando che*

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2}i} = \frac{1-\frac{1}{2}i}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2},$$

l'espressione diventa

$$z = \frac{4}{5}\left(1-\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{21}{2}+4i\right) = \frac{4}{5}\left(\frac{25}{2}-\frac{5}{4}i\right) = 10-i.$$

Pertanto, $\mathrm{Re}(z) = 10$ *e* $\mathrm{Im}(z) = -1$.

ESERCIZIO 2.2. Determinare le soluzioni complesse del seguente sistema

$$\begin{cases} |z-i| \le 1 \\ \mathrm{Arg}(z) = \pi/4. \end{cases}$$

Svolgimento : *Esprimendo il numero nella forma $z = a+ib$, l'equazione $\mathrm{Arg}(z) = \pi/4$ individua i punti della bisettrice del primo quadrante; riscriviamo, pertanto, il sistema nella forma*

$$\begin{cases} \sqrt{a^2+(b-1)^2} \le 1 \\ a \ge 0 \\ b \ge 0 \\ a = b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2a^2-2a \le 0 \\ a \ge 0 \\ b \ge 0 \\ a = b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 0 \le a \le 1 \\ a = b. \end{cases}$$

Le soluzioni cercate sono $z = a(1+i)$, con $0 \le a \le 1$. Geometricamente, questi punti corrispondono ai punti di intersezione tra il cerchio chiuso con centro in $(0,1)$ e raggio 1 e la bisettrice del primo quadrante.

ESERCIZIO 2.3. Trovare le soluzioni della seguente equazione in campo complesso, esprimendole in forma trigonometrica:

$$(z^2-2z+4)(z^3-3) = 0.$$

Svolgimento : *Poiché l'equazione proposta, di quinto grado, è fattorizzata, le soluzioni si otterranno risolvendo separatamente le due equazioni*

$$z^2-2z+4=0 \qquad e \qquad z^3-3=0.$$

Per la prima si ottengono le soluzioni $z_1 = 1+i\sqrt{3}$ e $z_2 = 1-i\sqrt{3}$. Per esprimere z_1 e z_2 in forma trigonometrica, osserviamo che $|z_1| = |z_2| = \sqrt{1+3} = 2$; perciò

$$z_1 = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2[\cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3)] \quad e \quad z_2 = 2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2[\cos(\pi/3)-i\sin(\pi/3)].$$

La seconda equazione ha come soluzioni le tre radici cubiche complesse di 3, cioè

$$z_3 = \sqrt[3]{3}; \qquad z_4 = \sqrt[3]{3}[\cos(2\pi/3)+i\sin(2\pi/3)]; \qquad z_5 = \sqrt[3]{3}[\cos(4\pi/3)+i\sin(4\pi/3)].$$

Quindi, abbiamo 5 soluzioni distinte, come indicato dal Teorema Fondamentale dell'Algebra.

ESERCIZIO 2.4. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione complessa

$$|z|^2 - z|z| + z = 0.$$

Svolgimento : *Osserviamo che quella proposta <u>non</u> è un'equazione algebrica di secondo grado, a causa della presenza dei moduli; pertanto, ad essa non si applica il Teorema Fondamentale dell'Algebra. Ponendo $z = a+ib$, l'equazione proposta diviene $a^2+b^2-(a+ib)\sqrt{a^2+b^2}+a+ib = 0$, ovvero, separando parte reale e parte immaginaria,*

$$\begin{cases} a^2+b^2-a\sqrt{a^2+b^2}+a=0, \\ -b\sqrt{a^2+b^2}+b=0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a^2+b^2-a\sqrt{a^2+b^2}+a=0, \\ b\left(1-\sqrt{a^2+b^2}\right)=0. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ottengono i due sistemi

$$\begin{cases} b=0, \\ a^2-a|a|+a=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} b \ne 0, \\ \sqrt{a^2+b^2}=1, \\ 1=0. \end{cases}$$

Il primo sistema ha come soluzioni $b = 0$, $a = 0$ oppure $b = 0$, $a = -1/2$; mentre il secondo sistema è impossibile. Le soluzioni cercate sono pertanto $z = 0$ e $z = -1/2$.

ESERCIZIO 2.5. Trovare i numeri complessi $z = a+ib$ soluzioni dell'equazione

$$|z+1|e^{2iz} = \sqrt{5}e^{-2(\mathrm{Im}z)}$$

tali che $|\mathrm{Re}z| < 2$.

Svolgimento : *L'equazione proposta si riscrive nella forma esponenziale*

$$\sqrt{(a+1)^2+b^2}\ e^{2ia-2b} = \sqrt{5}\ e^{-2b}\ .$$

Dividendo ambo i membri per $e^{-2b}>0$ *e scindendo l'equazione nell'eguaglianza fra i moduli e nella condizione di periodicità dell'esponenziale immaginario, si ottiene il sistema*

$$\begin{cases} (a+1)^2+b^2=5\ , \\ 2a = 0+2k\pi \qquad k\in\mathbb{Z}\ . \end{cases}$$

Nella prima equazione, l'unico valore di k *tale che* $|\mathrm{Re} z| = |a| < 2$ *è* $k=0$, *da cui* $a=0$, *e quindi* $b^2=4$. *La soluzione è pertanto* $z=\pm 2i$.

ESERCIZIO 2.6. Trovare le soluzioni della seguente equazione in campo complesso, esprimendole in forma trigonometrica:

$$4z^4-16z^2+32=0.$$

Svolgimento : *Ponendo* $w=z^2$ *e semplificando, si ottiene l'equazione di secondo grado*

$$w^2-4w+8=0$$

che ha come soluzioni

$$w_1 = 2+2i = \sqrt{8}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{8}[\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4)]$$

$$w_2 = 2-2i = \sqrt{8}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{8}[\cos(-\pi/4)+i\sin(-\pi/4)]\ .$$

Estraendo poi le rispettive radici complesse, si ottiene

$$z_1 = \sqrt[4]{8}[\cos(\pi/8)+i\sin(\pi/8)] \quad z_2 = -\sqrt[4]{8}[\cos(\pi/8)+i\sin(\pi/8)]$$

$$z_3 = \sqrt[4]{8}[\cos(\pi/8)-i\sin(\pi/8)] \quad z_4 = -\sqrt[4]{8}[\cos(\pi/8)-i\sin(\pi/8)].$$

ESERCIZIO 2.7. Trovare le soluzioni della seguente equazione in campo complesso:

$$(z-2i)^2+2+2\sqrt{3}i=0.$$

Svolgimento : *Ponendo* $w=z-2i$, *si ottiene l'equazione di secondo grado*

$$w^2 = -2-2\sqrt{3}i = 4\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\left(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi\right)$$

che ha come soluzioni le due radici quadrate complesse del secondo membro, cioè

$$w_1 = 2[\cos(2\pi/3)+i\sin(2\pi/3)] = 2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1+i\sqrt{3}$$

$$w_2 = 2[\cos(5\pi/3)+i\sin(5\pi/3)] = 2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1-i\sqrt{3}\ ,$$

da cui

$$z_1 = 2i-1+i\sqrt{3} = -1+i(2+\sqrt{3}) \qquad z_2 = 2i+1-i\sqrt{3} = 1+i(2-\sqrt{3}).$$

ESERCIZIO 2.8. Calcolare

$$\sqrt[7]{(-1+\sqrt{3}i)^7}.$$

Svolgimento : *Mentre nel campo reale l'espressione avrebbe condotto a una semplificazione di esponenti, qui dobbiamo aspettarci 7 soluzioni distinte, date dalle 7 radici settime del numero assegnato. Ponendo* $z=-1+\sqrt{3}i$, *si ottiene subito che* $\rho=|z|=2$ *e* $\vartheta=\mathrm{Arg}(z)=2\pi/3$. *Pertanto, indicando con* w_k, $k=0,\dots,6$, *le 7 radici complesse del numero dato, si ha*

$$w_k = \sqrt[7]{2^7}e^{i\left(\frac{14\pi/3+2k\pi}{7}\right)} = 2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{2k\pi}{7}\right)} \qquad k=0,\dots,6.$$

ESERCIZIO 2.9. Determinare le soluzioni $z\in\mathbb{C}$ dell'equazione $\qquad (2i+3z)^2=-1.$

Svolgimento : *Ponendo* $w=2i+3z$, *l'equazione proposta diviene* $w^2=-1$; *si tratta quindi di trovare le due radici quadrate complesse di* -1, *cioè* $w_{1,2}=\pm i$. *Pertanto*

$$z_1 = \frac{1}{3}(w_1-2i) = -\frac{i}{3} \qquad z_2 = \frac{1}{3}(w_2-2i) = -i\ .$$

ESERCIZIO 2.10. Calcolare in campo complesso $\qquad \sqrt[4]{3-3i}$.

Svolgimento : *Poiché il numero complesso* $3-3i$ *si può scrivere in forma esponenziale come* $3\sqrt{2}\ e^{-i\pi/4}$, *applicando la formula delle radici, si ottiene*

$$\sqrt[4]{3-3i} = \begin{cases} \sqrt[4]{3}\sqrt[8]{2}\ e^{-i\frac{\pi}{16}} \\ \sqrt[4]{3}\sqrt[8]{2}\ e^{i\frac{7\pi}{16}} \\ \sqrt[4]{3}\sqrt[8]{2}\ e^{i\frac{15\pi}{16}} \\ \sqrt[4]{3}\sqrt[8]{2}\ e^{i\frac{23\pi}{16}} \end{cases} .$$

ESERCIZIO 2.11. Determinare le soluzioni $z\in\mathbb{C}$ dell'equazione $\qquad z^3+8=0$.

Svolgimento : *L'equazione proposta si può riscrivere nella forma* $z^3=-8$; *pertanto, dalla formula delle radici si ottiene*

$$z = \sqrt[3]{-8} = \begin{cases} 2\ e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 1+i\sqrt{3} \\ 2e^{i\pi} = 2\left(\cos\pi+i\sin\pi\right) = -2 \\ 2\ e^{i\frac{5\pi}{3}} = 2\left[\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right)+i\sin\left(\frac{5}{3}\pi\right)\right] = 1-i\sqrt{3} \end{cases} .$$

ESERCIZIO 2.12. Risolvere in campo complesso l'equazione $\qquad e^{8iz}-1=0.$

Svolgimento : *Poniamo, come al solito,* $z=a+ib$, *con* $a,b\in\mathbb{R}$; *l'equazione proposta si riscrive nella forma*

$$e^{8iz} = e^{-8b}e^{8ia} = 1 = 1e^{i0}\ .$$

Pertanto, imponendo le condizioni separatamente sui moduli e sugli argomenti di ambo i membri, le soluzioni cercate devono risolvere il sistema

$$\begin{cases} e^{-8b}=1 \\ 8a = 0+2k\pi \qquad \text{con } k\in\mathbb{Z}\ , \end{cases}$$

da cui $b=0$ *e* $a=k\pi/4$. *Quindi i numeri complessi che risolvono l'equazione assegnata sono, in realtà, tutti numeri reali della forma* $z=k\pi/4$, *con* $k\in\mathbb{Z}$.

ESERCIZIO 2.13. Risolvere in campo complesso l'equazione $|e^z| = 7i$.

Svolgimento : *Poiché il modulo di un numero complesso è un numero reale e il numero $7i$ è invece un immaginario puro, l'equazione risulta impossibile.*

ESERCIZIO 2.14. Determinare l'insieme dei numeri $z \in \mathbb{C}$ che risolvono la disequazione

$$|z + 2\overline{z}| > 2 .$$

Svolgimento : *Innanzitutto osserviamo che la disequazione proposta, anche se coinvolge numeri complessi, è, in realtà, una disequazione in campo reale, in quanto il modulo di un numero complesso è reale(altrimenti, come già osservato, non avrebbe senso).*

Poniamo, come al solito, $z = a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$; allora $\overline{z} = a - ib$. Inoltre, $z + 2\overline{z} = 3a - ib$, e quindi la disequazione proposta si riscrive nella forma

$$\sqrt{9a^2 + b^2} > 2 \qquad \text{da cui} \qquad 9a^2 + b^2 > 4$$

dove l'ultima disequazione, riscritta in forma canonica, risulta essere data da

$$\frac{a^2}{(2/3)^2} + \frac{b^2}{2^2} > 1 .$$

Pertanto, l'insieme dei numeri complessi soluzione della disequazione proposta si rappresenta nel piano complesso come la parte esterna all'ellisse di centro l'origine e semiassi $a = 2/3$ e $b = 2$.

ESERCIZIO 2.15. Calcolare i^{223}.

Svolgimento : *Osserviamo che*

$$i^1 = i \qquad i^2 = -1 \qquad i^3 = -i \qquad i^4 = 1$$

e, in generale, se $n = 4k + h$, si ha

$$i^n = i^{4k+h} = i^{4k} i^h = (i^4)^k i^h = 1^k i^h = i^h .$$

Pertanto, per calcolare i^{223} è sufficiente calcolare il resto della divisione tra 223 e 4, ovvero 3, da cui

$$i^{223} = i^{220} i^3 = i^3 = -i .$$

ESERCIZIO 2.16. Calcolare $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^{327}$.

Svolgimento : *Osserviamo che in forma trigonometrica o esponenziale si ha*

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} = \cos\frac{\pi}{6} - i \sin\frac{\pi}{6} = e^{-i\pi/6}$$

da cui, utilizzando le proprietà delle potenze,

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^{327} = \left(e^{-i\pi/6}\right)^{327} = e^{-i\frac{327}{6}\pi} = e^{-i(54\pi + \pi/2)} = e^{-i\pi/2} = -i .$$

ESERCIZIO 2.17. Determinare le soluzioni complesse dell'equazione $z^5 = -\overline{z}$.

Svolgimento : *Esprimendo z in forma trigonometrica, l'equazione diventa*

$$\begin{aligned} \rho^5 [\cos(5\vartheta) + i \sin(5\vartheta)] &= -\rho[\cos\vartheta - i \sin\vartheta] \\ &= \rho[-\cos\vartheta + i \sin\vartheta] = \rho[\cos(\pi - \vartheta) + i \sin(\pi - \vartheta)] \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza è dovuta alle formule trigonometriche. Da ciò, si ricava il sistema

$$\begin{cases} \rho^5 = \rho \\ 5\vartheta = (-\vartheta + \pi) + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} \rho = 0; 1 \\ \vartheta = \dfrac{2k+1}{6}\pi \quad k \in \mathbb{Z} . \end{cases}$$

Pertanto, le soluzioni sono $z = 0$ e $z = \cos[(2k+1)\pi/6] + i \sin[(2k+1)\pi/6]$, con $k \in \mathbb{Z}$.

- Esercizi senza svolgimento

ESERCIZIO 2.18. Determinare le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione $z^4 + z^2 - 2 = 0$.

ESERCIZIO 2.19. Determinare le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione $(2i - z)^2 = -1$.

ESERCIZIO 2.20. Determinare le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione $(4z + 2i)^2 = 1$.

ESERCIZIO 2.21. Determinare le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione $z^4 - 16 = 0$.

ESERCIZIO 2.22. Determinare le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione $z^3 - 8 = 0$.

ESERCIZIO 2.23. Determinare le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione $(z + 2)^3 = -27$.

ESERCIZIO 2.24. Determinare le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione $2z^2 = |z|^2 + 2$.

ESERCIZIO 2.25. Determinare le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione $z|z|^2 = i$.

ESERCIZIO 2.26. Determinare le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione $z^2 + 2z\overline{z} = 1$.

ESERCIZIO 2.27. Trovare le soluzioni della seguente equazione in campo complesso, esprimendole in forma trigonometrica:

$$(3z^2 - 6z + 12)(z^3 + 3) = 0 .$$

ESERCIZIO 2.28. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$|z - 1| + i|z| = |z - i| + i .$$

ESERCIZIO 2.29. Determinare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione $z^3 = 1$.

ESERCIZIO 2.30. Risolvere in $\mathbb{C}$ la seguente equazione $(z^2 - 1)(\overline{z}^2 + i) = 0$.

ESERCIZIO 2.31. Risolvere in campo complesso l'equazione

$$2z^3 - 2z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - (1 - i\sqrt{3}) = 0 ,$$

esprimendo tutte le soluzioni in forma trigonometrica.

ESERCIZIO 2.32. Dato il numero $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$, calcolare $|z|$; scrivere z in forma trigonometrica; calcolarne le radici quarte.

ESERCIZIO 2.33. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione complessa

$$|z|^2 + z|z| - z = 0\,.$$

ESERCIZIO 2.34. Trovare i numeri complessi $z = a + ib$ soluzioni dell'equazione

$$|z + 2i|^2 e^{5z} = 8e^{5(\mathrm{Re}z)}$$

tali che $|\mathrm{Im}z| < 1$.

ESERCIZIO 2.35. Trovare le soluzioni della seguente equazione in campo complesso, esprimendole in forma trigonometrica:

$$z^4 - 4z^2 + 8 = 0.$$

ESERCIZIO 2.36. Calcolare

$$\sqrt[7]{(-\sqrt{3} + i)^7}.$$

ESERCIZIO 2.37. Dato il numero $z = 2\sqrt{3} - 2i$, calcolare $|z|$; esprimere z in forma trigonometrica; calcolare z^6.

ESERCIZIO 2.38. Calcolare $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{112}$.

ESERCIZIO 2.39. Determinare il modulo e tutti gli argomenti del numero complesso $z = (\sqrt{3} - i)^3$.

ESERCIZIO 2.40. Dato il numero complesso $z = -4 - 4\sqrt{3}i$, riscriverlo in forma trigonometrica; calcolarne tutte le radici quadrate e riscriverle in forma algebrica.

Risposte ai precedenti esercizi: **2.18**: $z = \pm i\sqrt{2}$; ± 1 - **2.19**: $z = i$; $3i$ - **2.20**: $z = (\pm 1 - 2i)/4$ - **2.21**: $z = \pm 2$; $\pm 2i$ - **2.22**: $z_1 = 2$; $z_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{3}$ - **2.23**: $z_1 = -5$; $z_{2,3} = -1/2 \pm i3\sqrt{3}/2$ - **2.24**: $z = \pm\sqrt{2}$ - **2.25**: $z = i$ - **2.26**: $z = \pm i$; $\pm 1/\sqrt{3}$ - **2.27**: $z_1 = 1 + i\sqrt{3} = 2[\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)]$; $z_2 = 1 - i\sqrt{3} = 2[\cos(\pi/3) - i\sin(\pi/3)]$; $z_3 = \sqrt[3]{3}[\cos\pi + i\sin\pi]$; $z_4 = \sqrt[3]{3}[\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)]$; $z_5 = \sqrt[3]{3}[\cos(5\pi/3) + i\sin(5\pi/3)]$ - **2.28**: $z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$ - **2.29**: $z_1 = 1$; $z_{2,3} = -1/2 \pm i\sqrt{3}/2$ - **2.30**: $z_{1,2} = \pm\sqrt{2}/2/ \pm i\sqrt{2}/2$; $z_{3,4} = \pm 1$ - **2.31**: $z_1 = 1 = \cos 0 + i\sin 0$; $z_2 = \sqrt{3}/2 + i/2 = \cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6)$; $z_3 = -\sqrt{3}/2 - i/2 = \cos(7\pi/6) + i\sin(7\pi/6)$ - **2.32**: $|z| = 1$; $z = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; $z_{1,2,3,4} = \cos\left(-\frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}\right)$, $k = 0, 1, 2, 3$ - **2.33**: $z = 0; 1/2$ - **2.34**: $z = \pm 2$ - **2.35**: $z_1 = \sqrt[4]{8}[\cos(\pi/8) + i\sin(\pi/8)]$; $z_2 = -\sqrt[4]{8}[\cos(\pi/8) + i\sin(\pi/8)]$; $z_3 = \sqrt[4]{8}[\cos(\pi/8) - i\sin(\pi/8)]$; $z_4 = -\sqrt[4]{8}[\cos(\pi/8) - i\sin(\pi/8)]$ - **2.36**: $w_k = 2e^{i\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{2k\pi}{7}\right)}$, $k = 0, 1, \ldots, 6$ - **2.37**: $|z| = 4$; $z = 4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$; $z^6 = 4^6[\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)] = -4096$ - **2.38**: $z^{112} = \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]^{112} = \cos(28\pi) + i\sin(28\pi) = 1$ - **2.39**: $z = 8\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = -8i$; $|z| = 8$; $\arg(z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ - **2.40**: $z = 8\left[\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right]$; $z_1 = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] = \sqrt{2}(1 - i\sqrt{3})$, $z_2 = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right] = \sqrt{2}(-1 + i\sqrt{3})$.

DOMANDA 2.41. Siano $z, w \in \mathbb{C}$ tali che $z \cdot w = 1$ e $|w| = 1$. Allora

$\boxed{a}$ $z = \overline{w}$; $\boxed{b}$ $z = w$; $\boxed{c}$ $z = 1$; $\boxed{d}$ $z \in \mathbb{R}$.

DOMANDA 2.42. Scrivere in forma algebrica il numero complesso $z = \frac{1}{2i+5}$

$\boxed{a}$ $z = 5 - 2i$; $\boxed{b}$ $z = 5 + 2i$; $\boxed{c}$ $z = \frac{2}{29}i + \frac{5}{29}$; $\boxed{d}$ $z = \frac{5}{29} - \frac{2}{29}i$.

DOMANDA 2.43. L'equazione $z^6 + 1 = 0$ con $z \in \mathbb{C}$ ha esattamente

$\boxed{a}$ solo la soluzione $z = -1$; $\boxed{b}$ la soluzione $z = -1$ con molteplicità 6; $\boxed{c}$ 6 soluzioni distinte; $\boxed{d}$ nessuna soluzione.

DOMANDA 2.44. Il modulo del numero complesso $(\sqrt{6} - i\sqrt{4})^4$ è

$\boxed{a}$ 2^4; $\boxed{b}$ 10^2; $\boxed{c}$ 2^2; $\boxed{d}$ 10^4.

DOMANDA 2.45. Dato $z = \frac{1}{e^i}$, la sua parte immaginaria è

$\boxed{a}$ $\sin(-i)$; $\boxed{b}$ $\sin 1$; $\boxed{c}$ $-\sin 1$; $\boxed{d}$ e^{-i}.

DOMANDA 2.46. Sia $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Allora

$\boxed{a}$ $z + \overline{z} = 2a$; $\boxed{b}$ $z - \overline{z} = 0$; $\boxed{c}$ $z \cdot \overline{z} = |z|$; $\boxed{d}$ $z - \overline{z} = 2b$.

DOMANDA 2.47. Dato $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, il modulo di e^{iz} vale

$\boxed{a}$ 1; $\boxed{b}$ $e^{|z|}$; $\boxed{c}$ e^a; $\boxed{d}$ e^{-b}.

DOMANDA 2.48. Dato $z = a + ib$ e $w = e^{iz}$, allora $\overline{w}$ è uguale a

$\boxed{a}$ $e^{-i\overline{z}}$; $\boxed{b}$ e^{-z}; $\boxed{c}$ $-e^z$; $\boxed{d}$ $e^{1/z}$.

DOMANDA 2.49. Siano $z = \rho e^{i\vartheta}$ e $w = re^{i\phi}$. Allora

$\boxed{a}$ $\arg(z + w) = \vartheta + \phi$; $\boxed{b}$ $|z + w| = \rho + r$; $\boxed{c}$ $\arg(z \cdot w) = \vartheta + \phi$; $\boxed{d}$ $\arg(z \cdot w) = \vartheta \cdot \phi$.

DOMANDA 2.50. Dato $z = a + ib$, $|z|^2$ vale

$\boxed{a}$ z^2; $\boxed{b}$ $a^2 + b^2$; $\boxed{c}$ $a^2 - b^2$; $\boxed{d}$ $\overline{z}^2$.

Risposte alle precedenti domande: **2.41**: a - **2.42**: d - **2.43**: c - **2.44**: b - **2.45**: c - **2.46**: a - **2.47**: d - **2.48**: a - **2.49**: c - **2.50**: b.

CAPITOLO 3

SUCCESSIONI E SERIE NUMERICHE

3.1. Successioni

• Limiti notevoli

1) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to \mathrm{e}$ per $n \to +\infty$;

2) $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \to \mathrm{e}$ $\quad \left(1+\frac{\vartheta}{a_n}\right)^{a_n} \to \mathrm{e}^{\vartheta}$ per $a_n \to +\infty$, $\forall \vartheta \in \mathbb{R}$;

3) $(1+\varepsilon_n)^{\frac{1}{\varepsilon_n}} \to \mathrm{e}$ per $\varepsilon_n \to 0$;

4) $\frac{\log(1+\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} \to 1$ $\quad \frac{\log_a(1+\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} \to \frac{1}{\log a}$ per $\varepsilon_n \to 0$, $\forall a > 0$, $a \neq 1$;

5) $\frac{a^{\varepsilon_n}-1}{\varepsilon_n} \to \log a$ per $\varepsilon_n \to 0$, $\forall a > 0$;

6) $\frac{(1+\varepsilon_n)^{\vartheta}-1}{\varepsilon_n} \to \vartheta$ per $\varepsilon_n \to 0$, $\forall \vartheta \in \mathbb{R}$;

7) $\frac{(a_n)^{\vartheta}}{\mathrm{e}^{a_n}} \to 0$ $\quad \frac{(a_n)^{\vartheta}}{a^{a_n}} \to 0$ per $a_n \to +\infty$, $\forall \vartheta \in \mathbb{R}$, $\forall a > 1$;

8) $\frac{(\log a_n)^{\vartheta}}{a_n} \to 0$ per $a_n \to +\infty$, $\forall \vartheta \in \mathbb{R}$;

9) $\sqrt[n]{n} \to 1$ per $n \to +\infty$;

10) $\frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \to 1$ per $\varepsilon_n \to 0$;

11) $\frac{1-\cos \varepsilon_n}{\varepsilon_n^2} \to \frac{1}{2}$ per $\varepsilon_n \to 0$;

12) $\frac{\tan \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \to 1$ per $\varepsilon_n \to 0$;

13) $\frac{\arcsin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \to 1$ per $\varepsilon_n \to 0$;

14) $\frac{\arctan \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \to 1$ per $\varepsilon_n \to 0$;

15) $\frac{\sinh \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \to 1$ per $\varepsilon_n \to 0$;

16) $\frac{\tanh \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \to 1$ per $\varepsilon_n \to 0$;

17) $\frac{\cosh \varepsilon_n - 1}{\varepsilon_n^2} \to \frac{1}{2}$ per $\varepsilon_n \to 0$;

18) $\varepsilon_n \left| \log |\varepsilon_n| \right|^{\beta} \to 0$ per $\varepsilon_n \to 0$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$;

Un'altra successione notevole importante è la *progressione geometrica*:

$$q^n \to \begin{cases} +\infty & \text{se } q > 1 \,, \\ 1 & \text{se } q = 1 \,, \\ 0 & \text{se } |q| < 1 \,, \\ \text{oscilla limitata} & \text{se } q = -1 \,, \\ \text{oscilla illimitata} & \text{se } q < -1 \,. \end{cases}$$

Da essa si ricava il comportamento della successione $(a_n)^n$, che è dato da

$$(a_n)^n \to \begin{cases} +\infty & \text{se } a_n \to l > 1 \,, \\ 0 & \text{se } a_n \to l \text{ con } |l| < 1 \,, \\ \text{non è regolare} & \text{se } a_n \to l < -1 \,, \\ \text{nulla si può dire} & \text{se } a_n \to l = -1 \text{ oppure } l = 1 \,, \end{cases}$$

come si può evincere dagli esempi

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to \mathrm{e} \qquad \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{\mathrm{e}} \,.$$

Osserviamo, anche, che, dal Teorema del Confronto, se $\{a_n\}$ è una successione limitata e $\{b_n\}$ è una successione infinitesima, allora la successione prodotto $\{a_n b_n\}$ risulta essere infinitesima.

Ricordiamo che, date due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$, i cui termini siano definitivamente non nulli, esse sono dette *asintotiche* fra loro (o *asintoticamente equivalenti*), se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \,;$$

in tal caso si scrive $a_n \sim b_n$. Ovviamente si ha che $a_n \sim b_n$ se e solo se $b_n \sim a_n$.
In particolare, dalla precedente tabella possono essere ricavate svariate espressioni asintotiche, utili nel calcolo dei limiti.

Si verifica immediatamente che se $a_n \sim b_n$ e $a_n \to l$, anche $b_n \to l$, ma ovviamente non vale il viceversa, cioè due successioni che hanno lo stesso limite non sono necessariamente asintotiche fra loro (per esempio $1/n \to 0$ e $1/n^2 \to 0$, ma $1/n \not\sim 1/n^2$). In realtà, se $a_n,\ b_n \to l \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, cioè entrambe le successioni ammettono lo stesso limite finito e non nullo, allora $a_n \sim b_n$.

Al contrario, due successioni possono essere fra loro asintotiche, anche se (ovviamente entrambe) non ammettono limite (per esempio $\frac{(-1)^n n}{n+1} \sim \frac{(-1)^n n}{n+3}$).

La nozione di asintotico è in generale molto utile nel calcolo dei limiti, poiché permette di sostituire a successioni complicate delle successioni più semplici, che mantengono le "principali" caratteristiche delle precedenti. Tale nozione va però usata con cautela; segnaliamo di seguito alcune situazioni significative. Assumiamo che $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ siano due succesioni regolari, fra loro asintotiche, e $\{c_n\}$ sia un'altra successione regolare; allora

- $a_n c_n \sim b_n c_n$, $a_n/c_n \sim b_n/c_n$ e $c_n/a_n \sim c_n/b_n$;
- $a_n \pm c_n \sim b_n \pm c_n$ solo se tra b_n e c_n "non avvengono delle semplificazioni". Ad esempio

$$\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} \qquad \text{e} \qquad \arctan\left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n^4}\right) \sim \frac{2}{n} - \frac{1}{n^4}$$

da cui

$$\sin\frac{1}{n} - \arctan\left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n^4}\right) \sim \frac{1}{n} - \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n^4}\right) = -\frac{1}{n} + \frac{1}{n^4} \sim -\frac{1}{n} \,;$$

mentre $\left\{\sin\frac{1}{n} - \arctan\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^4}\right)\right\}$ non è asintotica a $\left\{\frac{1}{n^4}\right\}$[1] anche se $\arctan\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^4}\right) \sim \frac{1}{n} - \frac{1}{n^4}$;

- se $c_n \to l \in \mathbb{R}$ (cioè $\{c_n\}$ non diverge), si ha che $(a_n)^{c_n} \sim (b_n)^{c_n}$; nel caso in cui invece $c_n \to \infty$, in generale non si può affermare che $\{(a_n)^{c_n}\}$ sia asintotica a $\{(b_n)^{c_n}\}$: ad esempio le due successioni $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ e $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$ sono fra loro asintotiche, poiché entrambe convergono ad e, ma $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^n$ e $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^3} = \left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^n$, pur divergendo entrambe, non sono fra loro asintotiche, poiché il limite del loro rapporto non vale 1[2];
- nel caso di successioni della forma $\{(c_n)^{a_n}\}$ e $\{(c_n)^{b_n}\}$ (dove, per semplicità, supponiamo $c_n > 0$), esse possono sempre essere riscritte nella forma $\{\mathrm{e}^{a_n \log c_n}\}$ e $\{\mathrm{e}^{b_n \log c_n}\}$, ma affinché queste ultime siano fra loro asintotiche, deve necessariamente accadere o che $c_n \to 1$ oppure che $a_n - b_n \to 0$, proprietà che in generale non è implicata dal fatto che $a_n \sim b_n$ (ad esempio $n^2 \sim n^2 + n$, ma $n^2 - (n^2+n) = -n \to -\infty \neq 0$). D'altra parte, queste condizioni non sono, in generale, sufficienti. Ad esempio, $3 + 1/\log n \sim 3 + 1/n$ e la loro differenza è infinitesima, ma $\{n^{3+1/\log n}\}$ e $\{n^{3+1/n}\}$, benché divergano entrambe, non sono fra loro asintotiche;
- se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ non convergono ad 1, $\log a_n \sim \log b_n$; ciò non vale in generale se $a_n, b_n \to 1$. Per esempio, $1 + 1/n \sim 1 + 1/n^2$, ma $\log(1+1/n) \sim 1/n$ e $\log(1+1/n^2) \sim 1/n^2$, quindi non sono asintotiche fra loro.

N.B. Si noti che, per definizione, nessuna successione può essere asintotica a 0.

- Casi di indecisione

$$\infty - \infty \qquad \pm\infty\cdot 0 \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \qquad \frac{0}{0} \qquad 0^0 \qquad (\pm\infty)^0 \qquad 1^{\pm\infty}$$

- Ordini di infinito

$$\log n \quad \ll \quad n \quad \ll \quad a^n,\ a > 1 \quad \ll \quad n! \quad \ll \quad n^n$$

Questo ordinamento di infiniti continua a valere anche nel caso in cui ciascun elemento della catena sia elevato alla stessa potenza positiva (ad esempio $\log^3 n$ è un infinito di ordine inferiore a n^3). Inoltre, se si esclude dalla precedente tabella $n!$, l'ordinamento degli infiniti continua a valere anche se ogni elemento della catena viene elevato ad una potenza positiva differente (ad esempio n^{150} è un infinito di ordine inferiore a $\mathrm{e}^{n/100}$). Nel caso del fattoriale, questa proprietà non è più vera, come si vedrà nell'esercizio 3.21. Infine, è utile osservare che il precedente ordinamento di infiniti continua a valere se si sostituisce alla successione $\{n\}$ una qualunque successione positivamente divergente $\{a_n\}$; ad esempio, $\log(n!)$ è un infinito di ordine inferiore a $\mathrm{e}^{n!}$.

- Formula di Stirling: per $n \to +\infty$ si ha

$$n! \sim n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n} \qquad\qquad \log n! \sim n\log n - n$$

(1) come sarà mostrato nel Capitolo 4, quando verranno trattati gli sviluppi di Taylor.
(2) come sarà mostrato nel Capitolo 4, quando verranno trattati gli sviluppi di Taylor.

• Esercizi con svolgimento

ESERCIZIO 3.1. Determinare il carattere della successione

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{5^n + n^3}{n!}} \, .$$

Svolgimento : *Dagli ordini di infinito ed utilizzando la formula di Stirling, si ricava*

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{5^n\left(1+\frac{n^3}{5^n}\right)}{n!}} \sim \sqrt[n]{\frac{5^n}{n!}} \sim \frac{5}{(n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n})^{1/n}} = \frac{5e}{n(\sqrt{2\pi n})^{1/n}} \, .$$

Poiché $\lim_{n\to+\infty} \frac{5e}{n} = 0$ *e* $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(\sqrt{2\pi n})^{1/n}} = 1$, *si ha che il limite proposto è nullo.*

ESERCIZIO 3.2. Calcolare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il limite per $n \to +\infty$ della successione

$$x_n(a) = \frac{a^n + (-1)^n}{n \log n} \, .$$

Svolgimento : *Conoscendo il carattere della progressione geometrica* $\{a^n\}$, *otteniamo*

$$x_n(a) \sim \frac{a^n}{n \log n} \to +\infty \qquad se \;\; a > 1 \, .$$

Per $|a| \leq 1$, *la successione* $\{a^n + (-1)^n\}$ *è limitata e, quindi, il prodotto con la successione infinitesima* $(\frac{1}{n \log n})$ *risulta essere esso stesso infinitesimo. Se* $a < -1$,

$$|x_n(a)| \sim \frac{|a|^n}{n \log n} \to +\infty \, ,$$

ma, poiché $\{a_n\}$ *è una successione a segno alterno,* $\{x_n(a)\}$ *non ammette limite. Ricapitolando,*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n(a) = \begin{cases} +\infty & se \; a > 1 \, , \\ 0 & se \; |a| \leq 1 \, , \\ \nexists & se \; a < -1 \, . \end{cases}$$

ESERCIZIO 3.3. Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} [\log(n+1) - \log_2 n] \, .$$

Svolgimento : *Per le proprietà dei logaritmi, riscriviamo*

$$a_n = \log(n+1) - \log_2 e \cdot \log n = \log\left[\frac{n+1}{n^{\log_2 e}}\right] \, .$$

Poiché $\log_2 e > 1$, *abbiamo*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n^{\log_2 e}} = 0 \qquad e \; quindi \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \, .$$

ESERCIZIO 3.4. Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^3 - n^2 - 1} - \sqrt{n^3 - n^2 + n}}{n - \sqrt{n^2 - n}} \, .$$

Svolgimento : *Il numeratore ed il denominatore danno luogo a forme indeterminate, che si risolvono tramite i prodotti notevoli, moltiplicando e dividendo per la somma delle radici. Perciò*

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\left(\sqrt{n^3-n^2-1} - \sqrt{n^3-n^2+n}\right)\left(\sqrt{n^3-n^2-1} + \sqrt{n^3-n^2+n}\right)\left(n+\sqrt{n^2-n}\right)}{\left(n-\sqrt{n^2-n}\right)\left(n+\sqrt{n^2-n}\right)\left(\sqrt{n^3-n^2-1}+\sqrt{n^3-n^2+n}\right)} \\ &= \frac{n^3-n^2-1-(n^3-n^2+n)}{n^2-(n^2-n)} \cdot \frac{\left(n+\sqrt{n^2-n}\right)}{\left(\sqrt{n^3-n^2-1}+\sqrt{n^3-n^2+n}\right)} \\ &= -\left(\frac{n+1}{n}\right) \cdot \left[\frac{n\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}{n^{3/2}\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)}\right] \sim -\frac{2(n+1)}{2n^{3/2}} \to 0 \, . \end{aligned}$$

ESERCIZIO 3.5. Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\frac{\sqrt{n^4+n^3} - \sqrt{n^4-n^3}}{n^\alpha + n}\right] \, .$$

Svolgimento : *Moltiplichiamo e dividiamo la frazione per la somma delle radici presenti a numeratore:*

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(\sqrt{n^4+n^3} - \sqrt{n^4-n^3})(\sqrt{n^4+n^3} + \sqrt{n^4-n^3})}{(n^\alpha+n)(\sqrt{n^4+n^3} + \sqrt{n^4-n^3})} \\ &= \frac{2n^3}{(n^\alpha+n)n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)} \sim \frac{n}{n^\alpha+n} \, . \end{aligned}$$

Pertanto,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} 0 & se \; \alpha > 1 \, , \\ 1/2 & se \; \alpha = 1 \, , \\ 1 & se \; \alpha < 1 \, . \end{cases}$$

ESERCIZIO 3.6. Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log(n^4)\sin\left(-\frac{1}{n}\right)}$.

Svolgimento : *Si ha*

$$\frac{1}{\log(n^4)\sin\left(-\frac{1}{n}\right)} \sim -\frac{1}{4\frac{1}{n}\log n} = -\frac{n}{4\log n},$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log(n^4)\sin\left(-\frac{1}{n}\right)} = -\infty \, .$$

ESERCIZIO 3.7. Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \log(n^3)\sin\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Svolgimento : *Si ha*

$$\log(n^3)\sin\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim -3(\log n)\frac{1}{\sqrt{n}} = -\frac{3\log n}{\sqrt{n}},$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} \log(n^3)\sin\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0 .$$

ESERCIZIO 3.8. Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n\,(1-\cos\frac{1}{n})}$.

Svolgimento : *Si ha*

$$\frac{1}{\log n\,(1-\cos\frac{1}{n})} \sim \frac{1}{(\log n)\frac{1}{2n^2}} = \frac{2n^2}{\log n},$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log(n)\,(1-\cos\frac{1}{n})} = +\infty .$$

ESERCIZIO 3.9. Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(e^{2n}-1)\cos^3 n}{n e^{n\alpha}} .$$

Svolgimento : *Osserviamo che*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(e^{2n}-1)\cos^3 n}{n e^{n\alpha}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cos^3 n}{n} e^{(2-\alpha)n} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha \geq 2 \,; \\ \textit{caso di indecisione } 0\cdot\infty & \text{se } \alpha < 2 \,. \end{cases}$$

Tuttavia, nel caso $\alpha < 2$, *il limite proposto non esiste, poiché* $\frac{e^{(2-\alpha)n}}{n}$ *è una successione divergente, mentre* $\cos^3 n$ *oscilla tra* -1 *ed* 1.

ESERCIZIO 3.10. Calcolare, se esiste, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{3}+\frac{1}{n}\right)\sin\left(\frac{5}{n}\right)$.

Svolgimento : *Si ha*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{3}+\frac{1}{n}\right)\sin\left(\frac{5}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3}\cdot\left(\frac{5}{n}\right) = \frac{5}{3}.$$

ESERCIZIO 3.11. Calcolare, se esiste, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (n^4+1)\left(1-\cos\frac{3}{n^2}\right)$.

Svolgimento : *Si ha*

$$\lim_{n\to\infty} (n^4+1)\left(1-\cos\frac{3}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} n^4\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{3}{n^2}\right)^2 = \frac{9}{2}.$$

ESERCIZIO 3.12. Calcolare, se esiste, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(5n-\frac{1}{n^2}\right)\log\left(1-\frac{4}{n}\right)$.

Svolgimento : *Si ha*

$$\lim_{n\to\infty} \left(5n-\frac{1}{n^2}\right)\log\left(1-\frac{4}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 5n\cdot\left(-\frac{4}{n}\right) = -20.$$

ESERCIZIO 3.13. Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2^{2^n}}}\left[n\ln\left(\frac{n+3}{n}\right)^2\right].$$

Svolgimento : *Osserviamo che*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2^{2^n}}}\left[n\ln\left(\frac{n+3}{n}\right)^2\right] = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{2^n/n}}\left[2n\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)\right]$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{2^n/n}}\left[2n\frac{3}{n}\right] = 6\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{2^n/n}} = 0^+$$

poiché $2^n/n \to +\infty$ *e, pertanto,* $2^{2^n/n} \to +\infty$.

ESERCIZIO 3.14. Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n!+5}{n!}\right)^{n!}.$$

Svolgimento : *Osserviamo che il limite proposto è un caso di indecisione* 1^∞ *e si può risolvere nel modo seguente:*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n!+5}{n!}\right)^{n!} = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(1+\frac{5}{n!}\right)^{n!/5}\right]^5 = e^5$$

dove l'ultimo limite è il noto limite notevole che fornisce il numero di Nepero.

ESERCIZIO 3.15. Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} [\sin(\sin^4 n)]^{n/4}.$$

Svolgimento : *Osservando che*

$$0 < \sin^4 n < 1 \qquad \Longrightarrow \qquad 0 < \sin(\sin^4 n) < \sin(1)$$

(in quanto $\sin x$ *è crescente nell'intervallo* $[0,1]$*) e che, posto* $q := \sqrt[4]{\sin(1)}$, *si ha* $0 < q < 1$, *dal "Teorema dei Carabinieri" o "Teorema del Confronto" si ottiene che il limite proposto è nullo, in quanto*

$$0 < [\sin(\sin^4 n)]^{n/4} < q^n \to 0 \qquad \textit{per } n \to +\infty .$$

ESERCIZIO 3.16. Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\cos\left(1+\frac{\cos n}{2}\right)\right]^n .$$

Svolgimento : *Osservando che*

$$\frac{1}{2} \leq 1+\frac{\cos n}{2} \leq \frac{3}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad 0 < q_1 := \cos\frac{3}{2} \leq \cos\left(1+\frac{\cos n}{2}\right) \leq \cos\frac{1}{2} =: q_2 < 1$$

(poiché $\cos x$ *è decrescente nell'intervallo* $[1/2, 3/2]$*) e poiché* $q_1^n \to 0^+$ *e* $q_2^n \to 0^+$, *dal "Teorema dei Carabinieri" o "Teorema del Confronto" si ottiene che*

$$lim_{n\to+\infty} \left[\cos\left(1+\frac{\cos n}{2}\right)\right]^n = 0^+ .$$

ESERCIZIO 3.17. Calcolare
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{2n}}{(\log n)^{n/2}}\,.$$

Svolgimento : *Per quanto visto sugli ordini di infinito,*
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{(\log n)^{1/2}}=+\infty\,;$$
pertanto
$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{n^2}{(\log n)^{1/2}}\right]^n=+\infty\,.$$

ESERCIZIO 3.18. Calcolare
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(\log n)^{2n}}{n^{n/2}}\,.$$

Svolgimento : *Per quanto visto sugli ordini di infinito,*
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(\log n)^2}{n^{1/2}}=0^+\,;$$
pertanto
$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{(\log n)^2}{n^{1/2}}\right]^n=0^+\,.$$

ESERCIZIO 3.19. Calcolare
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sin\frac{1}{n}\right)^{1-\cos(1/n)}\,.$$

Svolgimento : *Il limite proposto è un caso di indecisione della forma* $[0^0]$*; passando alla forma esponenziale*
$$\left(\sin\frac{1}{n}\right)^{(1-\cos\frac{1}{n})}=\exp\left[\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\log\left(\sin\frac{1}{n}\right)\right]\,,$$
possiamo studiare l'esponente, utilizzando i limiti notevoli, cioè ricordando che $1-\cos\frac{1}{n}\sim\frac{1}{2n^2}$ *e* $\sin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}$
$$\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\log\left(\sin\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{2n^2}\log\frac{1}{n}=-\frac{\log n}{2n^2}\to 0\,.$$
Da ciò si ottiene
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sin\frac{1}{n}\right)^{1-\cos(1/n)}=\lim_{n\to+\infty}\exp\left[\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\log\left(\sin\frac{1}{n}\right)\right]=e^0=1\,.$$

ESERCIZIO 3.20. Calcolare, in dipendenza del parametro reale α, il seguente limite
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\log n^\alpha+\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right).$$

Svolgimento : *Poniamo, per semplicità,*
$$a_n(\alpha)=\log n^\alpha+\frac{1}{n^{\alpha+1}}=\alpha\log n+\frac{1}{n^{\alpha+1}}\,.$$
Osserviamo che
$$\lim_{n\to+\infty}\alpha\log n=\begin{cases}+\infty & se\ \alpha>0\,,\\ 0 & se\ \alpha=0\,,\\ -\infty & se\ \alpha<0\,,\end{cases}\quad e\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{\alpha+1}}=\begin{cases}0 & se\ \alpha>-1\,,\\ 1 & se\ \alpha=-1\,,\\ +\infty & se\ \alpha<-1\,.\end{cases}$$
Pertanto, per $\alpha\ge-1$,
$$\lim_{n\to+\infty}a_n(\alpha)=\begin{cases}+\infty & se\ \alpha>0\,,\\ 0 & se\ \alpha=0\,,\\ -\infty & se\ -1\le\alpha<0\,.\end{cases}$$
Per $\alpha<-1$*, il termine* $1/(n^{\alpha+1})$ *si può riscrivere come* $n^{|\alpha+1|}$ *ed il suo limite è* $+\infty$*. D'altra parte* $\alpha\log n\to-\infty$*. Siamo quindi di fronte ad un caso di indeterminazione della forma* $-\infty+\infty$*, ma ricordando che qualunque potenza positiva di* n *diverge più velocemente di* $\log n$*, si ottiene che, in questo caso, il limite proposto è ancora* $+\infty$*. Ricapitolando:*
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\log n^\alpha+\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)=\begin{cases}+\infty & se\ \alpha<-1,\ \alpha>0;\\ 0 & se\ \alpha=0;\\ -\infty & se\ -1\le\alpha<0.\end{cases}$$

ESERCIZIO 3.21. Calcolare
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{(n^n)^{1/2}}\,.$$

Svolgimento : *Utilizzando la formula di Stirling, si ottiene*
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{(n^n)^{1/2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^ne^{-n}\sqrt{2\pi n}}{n^{n/2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{n/2}\sqrt{2\pi n}}{e^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n^n)^{1/2}}{e^n}\sqrt{2\pi n}=+\infty\,.$$
In particolare, osserviamo che il precedente risultato dimostra come $n!$ *sia di ordine superiore a* $(n^n)^{1/2}$.

ESERCIZIO 3.22. Calcolare
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n!)^2e^{2n}}{n^{2n+1}}\,.$$

Svolgimento : *Utilizzando la formula di Stirling, si ha*
$$\frac{(n!)^2e^{2n}}{n^{2n+1}}\sim\frac{\left(n^ne^{-n}\sqrt{2\pi n}\right)^2e^{2n}}{n^{2n+1}}=\frac{n^{2n}(2\pi n)}{n^{2n+1}}=2\pi\,.$$
Pertanto la successione proposta converge a 2π.

ESERCIZIO 3.23. Verificare che la successione
$$a_n=\frac{n^4-1}{n-1}$$
è crescente (cioè $a_{n+1}>a_n$ oppure $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$) per ogni $n>1$.

Svolgimento : *Osserviamo che*

$$n^4 - 1 = (n^2+1)(n^2-1) = (n^2+1)(n+1)(n-1) \,.$$

Pertanto

$$a_n = \frac{(n^2+1)(n+1)(n-1)}{(n-1)} = (n^2+1)(n+1) \qquad \forall n > 1 \,.$$

Poiché

$$[(n+1)^2+1] > n^2+1 > 0 \qquad e \qquad [(n+1)+1] > n+1 > 0 \,,$$

si ottiene facilmente che $a_{n+1} > a_n$*, per ogni* $n > 1$.

ESERCIZIO 3.24. Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n - 2^{n\log n}}{n^n} \,.$$

Svolgimento : *Ricordando che, per le regole dei logaritmi, si ha*

$$2^{n\log n} = n^{n\log 2} \,,$$

riscriviamo la successione nella forma

$$\frac{e^n}{n^n} - \frac{(n^n)^{\log 2}}{n^n} = \frac{e^n}{n^n} - (n^n)^{\log 2 - 1} \to 0$$

dove l'ultimo passaggio si ottiene ricordando che $e^n/n^n \to 0$ *e* $\log 2 - 1 < 0$.

ESERCIZIO 3.25. Stabilire il carattere della successione

$$a_n = e^{\log(\arctan n)} \,.$$

Ha senso calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} e^{\log(\arcsin n)} \;?$$

Perché ?

Svolgimento : *Poiché* $\arctan n \to \pi/2$*, per* $n \to +\infty$*, e* $e^{\log(\arctan n)} = \arctan n$*, il limite proposto vale* $\pi/2$.

Non ha senso calcolare $\lim_{n\to+\infty} e^{\log(\arcsin n)}$*, perché* $\arcsin x$ *è definito solo per* $-1 \le x \le 1$.

ESERCIZIO 3.26. Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}}$$

Svolgimento : *Innanzitutto, ricordiamo che* $\binom{n}{m} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$*, per ogni* $n \ge m$*. Pertanto, per ogni* $n \ge 3$*, si ha*

$$\frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}} = \left(\frac{n!}{2!(n-2)!}\right) \cdot \left(\frac{3!(n-3)!}{n!}\right)$$

$$= \frac{3(n-3)!}{(n-2)(n-3)!} = \frac{3}{(n-2)} \to 0 \,.$$

ESERCIZIO 3.27. Date le successioni

$$a_n = \frac{n!}{2^n} \qquad ; \qquad b_n = n \quad ,$$

a) verificare se siano monotone;
b) calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n - b_n) \,.$$

Svolgimento : a) *Osserviamo che*

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} = \frac{(n+1)n!}{2^n 2} = \frac{(n+1)}{2} a_n > a_n \qquad \forall n > 1 \,;$$

e

$$b_{n+1} = n+1 > n = b_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \,.$$

b) *Osserviamo che*

$$a_n - b_n = \frac{n!}{2^n} - n = \frac{n}{2}\left[\frac{(n-1)!}{2^{n-1}} - 2\right] \to +\infty$$

poiché la successione $\{(n-1)!/2^{n-1}\}$ *è infinita per* $n \to +\infty$.

ESERCIZIO 3.28. Determinare, al variare del parametro reale α, il carattere della successione

$$a_n(\alpha) = \frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}} - 1}{\log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)} \,.$$

Svolgimento : *Osserviamo che*

$$\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}} - 1 \sim \frac{1}{3n^2} \qquad e \qquad \log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right) \sim \begin{cases} \dfrac{1}{n^\alpha} & se\ \alpha > 0 \,, \\ \log 2 & se\ \alpha = 0 \,, \\ \log(n^{-\alpha}) = -\alpha \log n & se\ \alpha < 0 \,. \end{cases}$$

Da ciò segue che

$$a_n(\alpha) \sim \begin{cases} \dfrac{1}{3n^2\frac{1}{n^\alpha}} = \dfrac{n^\alpha}{3n^2} & se\ \alpha > 0 \,; \\ \dfrac{1}{3n^2 \log 2} \to 0 & se\ \alpha = 0 \,; \\ \dfrac{1}{(-3\alpha)n^2 \log n} \to 0 & se\ \alpha < 0 \,. \end{cases}$$

Pertanto l'unico caso che resta da studiare è quello relativo ad $\alpha > 0$*, che fornisce*

$$a_n(\alpha) \sim \frac{n^\alpha}{3n^2} = \frac{n^{\alpha-2}}{3} \to \begin{cases} 0 & se\ 0 < \alpha < 2 \,; \\ 1/3 & se\ \alpha = 2 \,; \\ +\infty & se\ \alpha > 2 \,. \end{cases}$$

Concludendo, si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} a_n(\alpha) = \begin{cases} 0 & se\ \alpha < 2 \,; \\ 1/3 & se\ \alpha = 2 \,; \\ +\infty & se\ \alpha > 2 \,. \end{cases}$$

ESERCIZIO 3.29. Calcolare il $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\sin\frac{1}{n^3}\right)^{n^3}$.

Svolgimento : *Conviene riscrivere la successione proposta in forma esponenziale*

$$\left(1+\sin\frac{1}{n^3}\right)^{n^3} = e^{n^3\log\left(1+\sin\frac{1}{n^3}\right)}$$

e studiare il comportamento dell'esponente, che è dato da

$$n^3\log\left(1+\sin\frac{1}{n^3}\right)\sim n^3\sin\frac{1}{n^3}\sim n^3\frac{1}{n^3}=1\,.$$

Pertanto

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\sin\frac{1}{n^3}\right)^{n^3} = \lim_{n\to+\infty} e^{n^3\log\left(1+\sin\frac{1}{n^3}\right)} = e\,.$$

- Esercizi senza svolgimento

ESERCIZIO 3.30. Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{2^{2n}+5^n}{6^n}}\,.$$

ESERCIZIO 3.31. Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty}[\sin(|\sin n|^{1/4})]^{4n}.$$

ESERCIZIO 3.32. Determinare il carattere della successione

$$a_n=\left[\frac{n^n+3^n}{n!}\right]^{\frac{1}{n}}\,.$$

ESERCIZIO 3.33. Determinare il carattere della successione

$$a_n=\frac{n^4\sin\frac{1}{n^2}}{5n^2+2n}\,.$$

ESERCIZIO 3.34. Determinare il carattere della successione

$$a_n=\frac{n^5\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{3n^3-2n+1}\,.$$

ESERCIZIO 3.35. Calcolare il limite della successione

$$a_n=\frac{\log(1+n)}{n^3}\,.$$

ESERCIZIO 3.36. Calcolare $\lim_{n\to+\infty}\frac{\log(1+e^n)}{\sqrt{1+n^2}}$.

ESERCIZIO 3.37. Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\sin\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]\cdot\left[\frac{n^4-1}{n-1}\right]\,.$$

Risposte ai precedenti esercizi: **3.30**: il limite proposto vale 5/6 - **3.31**: il limite proposto è nullo - **3.32**: la successione proposta converge a e - **3.33**: la successione proposta converge a 1/5 - **3.34**: la successione proposta converge a 1/3 - **3.35**: la successione proposta converge a 0 - **3.36**: la successione proposta converge a 1 - **3.37**: la successione proposta converge a 1 .

DOMANDA 3.38. Il $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin n^2}{n^2}$ vale

$\boxed{a}$ 1; $\boxed{b}$ 0; $\boxed{c}$ $+\infty$; $\boxed{d}$ non esiste.

DOMANDA 3.39. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}$ una successione tale che $a_n\ge a_{n+1}$ e $a_n\ge 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Allora

$\boxed{a}$ $a_n\to 1$; $\boxed{b}$ nulla si può dire sulla convergenza della successione $\{a_n\}$; $\boxed{c}$ $\{a_n\}$ è divergente; $\boxed{d}$ esiste finito il $\lim_{n\to+\infty}a_n$.

DOMANDA 3.40. Assumiamo che $\{a_n\}$ sia una successione di numeri reali tale che $\lim_{n\to+\infty}a_n=-\infty$. Allora

$\boxed{a}$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists n_0\in\mathbb{N}$ tale che, $\forall n\ge n_0$, $|a_n-l|<\varepsilon$; $\boxed{b}$ $\forall M>0$, $\exists n_0\in\mathbb{N}$ tale che, $\forall n\ge n_0$, $a_n<-M$; $\boxed{c}$ $\exists M>0$ tale che, $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n<-M$; $\boxed{d}$ $\exists M>0$ ed $\exists n_0\in\mathbb{N}$ tale che, $\forall n\ge n_0$, $a_n<-M$.

DOMANDA 3.41. Il $\lim_{n\to+\infty}\log\left(e^{\arctan n}\right)$ vale

$\boxed{a}$ $+\infty$; $\boxed{b}$ $\pi/2$; $\boxed{c}$ 0; $\boxed{d}$ non esiste.

DOMANDA 3.42. Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali. Allora $\{a_n\}$ è di Cauchy se

$\boxed{a}$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists n_0\in\mathbb{N}$ tale che $\forall n\ge n_0$ si ha $|a_n-a_{n+1}|<\varepsilon$; $\boxed{b}$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists n_0\in\mathbb{N}$ tale che $\forall n,m\ge n_0$ si ha $|a_n-a_m|<\varepsilon$; $\boxed{c}$ $\exists n_0\in\mathbb{N}$ tale che $\forall\varepsilon>0$ e $\forall n,m\ge n_0$ si ha $|a_n-a_m|<\varepsilon$; $\boxed{d}$ $\forall\varepsilon>0$, $\forall n_0\in\mathbb{N}$ e $\forall n,m\ge n_0$ si ha $|a_n-a_m|<\varepsilon$.

DOMANDA 3.43. Il $\lim_{n\to+\infty}\sin[\arctan(-n)]$ vale

$\boxed{a}$ oscilla; $\boxed{b}$ $-\pi/2$; $\boxed{c}$ -1; $\boxed{d}$ 0.

DOMANDA 3.44. Il $\lim_{n\to+\infty}(\cos n)^2$ vale

$\boxed{a}$ nessuna delle altre affermazioni è corretta; $\boxed{b}$ oscilla tra -1 ed 1; $\boxed{c}$ $+\infty$; $\boxed{d}$ non esiste.

DOMANDA 3.45. Il $\lim_{n\to+\infty}\frac{e^n-1}{n}$ vale

$\boxed{a}$ 1; $\boxed{b}$ non esiste; $\boxed{c}$ 0; $\boxed{d}$ $+\infty$.

DOMANDA 3.46. Sia $a_n\to+\infty$. Allora il $\lim_{n\to+\infty}\frac{\log(1+a_n)}{a_n}$ vale

[a] 1; [b] non esiste; [c] 0; [d] $+\infty$.

DOMANDA 3.47. Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni di numeri reali tali che $a_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora

[a] se $b_n \to 0$, si ha che $a_n \to 0$; [b] se $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\{b_n\}$ converge, si ha che $\{a_n\}$ è limitata; [c] se $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\{b_n\}$ converge, si ha che $\{a_n\}$ ammette limite; [d] nessuna delle precedenti affermazioni è esatta.

DOMANDA 3.48. Il $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-\cos n}{n^2}$ vale

[a] 1/2; [b] non esiste; [c] 0; [d] $+\infty$.

DOMANDA 3.49. La successione

$$a_n = n^2 - e^{n^2}, \qquad \forall\, n \geq 1$$

[a] è strettamente crescente e $\sup a_n = 10$; [b] è strettamente decrescente e $\inf a_n = 0$; [c] è strettamente crescente e $\sup a_n = +\infty$; [d] è strettamente decrescente e $\inf a_n = -\infty$.

DOMANDA 3.50. La successione

$$a_n = \log(\sqrt{n}) - n, \qquad \forall\, n \geq 1$$

[a] è strettamente crescente e $\sup a_n = 25$; [b] è strettamente decrescente e $\inf a_n = -\infty$; [c] è decrescente e $\inf a_n = \log 2 - 4$; [d] è crescente e $\sup a_n = +\infty$.

Risposte alle precedenti domande: **3.38**: b - **3.39**: d - **3.40**: b - **3.41**: b - **3.42**: b - **3.43**: c - **3.44**: d - **3.45**: d - **3.46**: c - **3.47**: b - **3.48**: c - **3.49**: d - **3.50**: b .

3.2. Serie a termini positivi

Prima di soffermarci sulle serie a termini positivi, ricordiamo la seguente proprietà, valida per tutte le serie, indipendentemente dal segno del termine generale a_n.

• **Teorema (Condizione necessaria per la convergenza).** *Sia data la serie $\sum a_n$ ed assumiamo che essa converga. Allora il termine generale a_n è infinitesimo, cioè $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$.*

Il resto di questo paragrafo sarà dedicato alle serie a termini non negativi. Innanzitutto ricordiamo che esse sono sempre regolari, cioè o convergono o divergono, ma non possono mai oscillare.

• **Teorema (Criterio del rapporto).** *Sia data $\sum a_n$, con $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Assumiamo che esista il $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in [0,+\infty]$. Allora si ha*

$$\begin{cases} l > 1 & \textit{la serie proposta diverge;} \\ l < 1 & \textit{la serie proposta converge;} \\ l = 1 & \textit{il criterio non fornisce alcuna informazione.} \end{cases}$$

• **Teorema (Criterio della radice).** *Sia data $\sum a_n$, con $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Assumiamo che esista il $\lim \sqrt[n]{a_n} = l \in [0,+\infty]$. Allora si ha*

$$\begin{cases} l > 1 & \textit{la serie proposta diverge;} \\ l < 1 & \textit{la serie proposta converge;} \\ l = 1 & \textit{il criterio non fornisce alcuna informazione.} \end{cases}$$

N.B. Nel caso $l = 1$, i due precedenti criteri non forniscono alcuna informazione sul carattere della serie considerata; ciò significa che la serie va studiata con altri metodi e non che essa è indeterminata.

Per esempio, consideriamo la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |q|^n ;$$

applicando il criterio della radice o del rapporto si ricava immediatamente che per

$$\begin{cases} |q| < 1 & \text{la serie converge;} \\ |q| > 1 & \text{la serie diverge.} \end{cases}$$

Quando $|q| = 1$, i due criteri non danno informazioni, ma è immediato verificare che, in tal caso, il termine generale non è infinitesimo, quindi la serie diverge. Infine, per $|q| < 1$, si può anche calcolare esplicitamente la somma della serie e si ottiene

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |q|^n = \frac{1}{1-|q|} \qquad \forall |q| < 1 .$$

• **Teorema (Criterio del confronto e del confronto asintotico).** *Siano date $\sum a_n$ e $\sum b_n$, con a_n, $b_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

a) Assumiamo che $a_n \leq b_n$, definitivamente. Allora si ha

(i) se la serie $\sum a_n$ diverge, anche la serie $\sum b_n$ diverge;

(ii) se la serie $\sum b_n$ converge, anche la serie $\sum a_n$ converge.

b) Assumiamo invece che $a_n \sim b_n$. Allora il carattere della serie $\sum a_n$ coincide con il carattere della serie $\sum b_n$, cioè o convergono entrambe o divergono entrambe.

• Serie notevoli

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \quad \begin{cases} \text{converge per} & p > 1 \\ \text{diverge per} & p \leq 1 \end{cases}$$

(serie armonica generalizzata; per $n = 1$ semplicemente serie armonica)

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^p \log^q n} \quad \begin{cases} \text{converge per} & p > 1 \\ \text{converge per} & p = 1 \text{ se } q > 1 \\ \text{diverge per} & p = 1 \text{ se } q \leq 1 \\ \text{diverge per} & p < 1 \end{cases}$$

(serie di Abel)

Consideriamo le due serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^2-1} .$$

In entrambi i casi, sia il criterio del rapporto che quello della radice non danno informazioni, poiché si ottiene $l = 1$. D'altra parte, utilizzando, invece, il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata, si ottiene

$$\frac{1}{2n+1} \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{2n^2-1} \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

e quindi la prima serie diverge, mentre la seconda converge.

- Esercizi con svolgimento

ESERCIZIO 3.51. Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\log 2)^n}{2n+3/2} .$$

Svolgimento : *Utilizzando il criterio della radice, si ottiene*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{(\log 2)^n}{2n+3/2}} = \frac{\log 2}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2n+3/2}} = \log 2 < 1 .$$

Poiché il limite ottenuto è strettamente minore di 1*, il criterio applicato ci permette di affermare che la serie proposta converge.*

ESERCIZIO 3.52. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (n^4 - n^2 + \log n) \arctan\left(\frac{2}{n^5}\right) .$$

Svolgimento : *Posto* $a_n = (n^4 - n^2 + \log n) \arctan\left(\frac{2}{n^5}\right)$, *otteniamo facilmente*

$$a_n \sim n^4 \frac{2}{n^5} = \frac{2}{n} .$$

Pertanto, poiché il secondo membro è il termine generale della serie armonica, che diverge, la serie proposta diverge.

ESERCIZIO 3.53. Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ è convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{2-\alpha}}{\arctan \frac{1}{n^2} + \frac{1}{\sqrt{n}}} .$$

Svolgimento : *Si ha:*

$$\frac{n^{2-\alpha}}{\arctan \frac{1}{n^2} + \frac{1}{\sqrt{n}}} \sim \frac{n^{2-\alpha}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{\sqrt{n}}} \sim \frac{n^{2-\alpha}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = n^{\frac{5}{2}-\alpha} .$$

Dal criterio del confronto asintotico segue che la serie converge se e solo se

$$\frac{5}{2} - \alpha < -1 \iff \alpha > \frac{7}{2} .$$

ESERCIZIO 3.54. Stabilire se la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n^3}} - 1\right)}$$

converge.

Svolgimento : *Ricordando che*

$$\sqrt{1+\frac{3}{n^3}} - 1 = \left(1+\frac{3}{n^3}\right)^{1/2} - 1 \sim \frac{3}{2n^3} ,$$

si ottiene

$$\frac{1}{n\left(\sqrt{1+3/n^3} - 1\right)} \sim \frac{1}{n\left(\frac{3}{2n^3}\right)} = \frac{2}{3} n^2 .$$

Pertanto, la serie proposta, essendo a termini positivi, diverge, poiché il termine generale non è infinitesimo.

ESERCIZIO 3.55. Stabilire per quali valori del parametro $\alpha > 0$ la seguente serie converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{n^{3\alpha}}\right) n^{\frac{3}{2}-2\alpha} .$$

Svolgimento : *Poiché, per* $\alpha > 0$,

$$\left(\sin \frac{1}{n^{3\alpha}}\right) n^{3/2-2\alpha} \sim \frac{n^{3/2-2\alpha}}{n^{3\alpha}} = \frac{1}{n^{5\alpha-3/2}} ,$$

dal criterio del confronto asintotico segue che la serie converge se e solo se $5\alpha - 3/2 > 1$, *cioè se* $\alpha > \frac{1}{2}$.

ESERCIZIO 3.56. Stabilire per quali valori del parametro $\alpha > 0$ la seguente serie converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{1}{n^{\alpha}} - 1\right) n^{1-\alpha} .$$

Svolgimento : *Innanzitutto osserviamo che la serie proposta è a termini tutti negativi, quindi a meno di raccogliere* -1 *nella parentesi tonda, essa si riconduce ad una serie a termini positivi, alla quale è possibile applicare i criteri ricordati. Poiché, per* $\alpha > 0$,

$$\left(\cos \frac{1}{n^{\alpha}} - 1\right) n^{1-\alpha} \sim -\frac{1}{2n^{2\alpha}} n^{1-\alpha} = -\frac{1}{2n^{3\alpha-1}} ,$$

dal criterio del confronto asintotico segue che la serie converge se e solo se $3\alpha - 1 > 1$, *cioè se* $\alpha > \frac{2}{3}$.

ESERCIZIO 3.57. Stabilire per quali valori del parametro $\alpha > 0$ la seguente serie converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n^{\alpha}}} - 1\right) n^{2-\alpha} .$$

Svolgimento : *Poiché, per* $\alpha > 0$,

$$\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^\alpha}}-1\right) n^{2-\alpha} \sim \frac{1}{2n^\alpha}\, n^{2-\alpha} = \frac{1}{2n^{2\alpha-2}}\,,$$

dal criterio del confronto asintotico segue che la serie converge se e solo se $\alpha > \frac{3}{2}$.

ESERCIZIO 3.58. Stabilire per quali valori del parametro reale α la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{n^3\,(7^{\alpha+2})^n}$$

converge.

Svolgimento : *Utilizzando il criterio della radice, si ottiene*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{4^n}{n^3(7^{\alpha+2})^n}} = \frac{4}{7^{\alpha+2}} \cdot \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^3$$

$$= \frac{4}{7^{\alpha+2}} \begin{cases} <1 & \text{se } 4 < 7^{\alpha+2}, \quad \text{ovvero} \quad \alpha > \dfrac{\log 4}{\log 7} - 2\,, \quad \text{e la serie converge;} \\ >1 & \text{se } 4 > 7^{\alpha+2}, \quad \text{ovvero} \quad \alpha < \dfrac{\log 4}{\log 7} - 2\,, \quad \text{e la serie diverge;} \\ =1 & \text{se } 4 = 7^{\alpha+2}, \quad \text{ovvero} \quad \alpha = \dfrac{\log 4}{\log 7} - 2\,. \end{cases}$$

Nell'ultimo caso, sostituendo il valore di α *nella serie, si ottiene* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$, *che è convergente. Concludendo, la serie proposta converge per* $\alpha \geq \frac{\log 4}{\log 7} - 2$.

ESERCIZIO 3.59. Stabilire per quali valori del parametro $\alpha > 0$ la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left[\cos\left(\frac{1}{n+2}\right)^\alpha - 1\right] n^4$$

converge.

Svolgimento : *La serie proposta è a termini negativi; pertanto, possiamo applicare ad essa i criteri delle serie a termini positivi, mettendo in evidenza il segno negativo. Osservando che*

$$\left[\cos\left(\frac{1}{n+2}\right)^\alpha - 1\right] n^4 \sim -\frac{n^4}{2(n+2)^{2\alpha}} \sim -\frac{1}{2n^{2\alpha-4}}\,,$$

si ottiene subito che la serie converge per $2\alpha - 4 > 1$, *cioè per* $\alpha > 5/2$.

ESERCIZIO 3.60. Determinare, al variare del parametro reale α, il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{[2(\log n)^{\alpha-7}]^n}{n^2}\,.$$

Svolgimento : *Ponendo* $a_n = \frac{[2(\log n)^{\alpha-7}]^n}{n^2}$ *ed osservando che, per ogni* $n \geq 2$, $a_n > 0$, *possiamo applicare il criterio della radice, ottenendo*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 2 \lim_{n\to+\infty} \frac{(\log n)^{\alpha-7}}{n^{2/n}} = 2 \lim_{n\to+\infty} (\log n)^{\alpha-7} = \begin{cases} 2 & \text{se } \alpha = 7\,; \\ +\infty & \text{se } \alpha > 7\,; \\ 0 & \text{se } \alpha < 7\,. \end{cases}$$

Pertanto la serie proposta converge per $\alpha < 7$, *mentre diverge a* $+\infty$ *per* $\alpha \geq 7$.

ESERCIZIO 3.61. Determinare, al variare del parametro $x \in (0, 5/4)$, il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (\log n)^{(x-\frac{3}{2})} \log\left[1 + \left(\sin\frac{1}{n}\right)^{(-4x^2+5x)}\right].$$

Svolgimento : *Per* $x \in (0, 5/4)$, *si ha che l'esponente della successione* $\{\sin(1/n)\}$, *cioè* $(-4x^2+5x)$, *è sempre positivo, quindi tale successione è sempre infinitesima. Pertanto, utilizzando i limiti notevoli, abbiamo*

$$a_n(x) \sim (\log n)^{(x-3/2)} \left(\sin\frac{1}{n}\right)^{(-4x^2+5x)} \sim \frac{1}{(\log n)^{(3/2-x)} n^{(-4x^2+5x)}}.$$

Il termine a ultimo membro corrisponde a quello della serie di Abel. Da quanto visto nell'introduzione, la serie converge se

$$-4x^2 + 5x > 1 \qquad \text{oppure se} \qquad \begin{cases} -4x^2 + 5x = 1 \\ 3/2 - x > 1 \end{cases}$$

e diverge altrimenti. Risolvendo, si ottiene che la serie converge per $1/4 \leq x < 1$ *e, quindi, diverge per* $0 < x < 1/4$ *e* $1 \leq x < 5/4$.

ESERCIZIO 3.62. Determinare, al variare del parametro $x < -\sqrt{3}$ e $x > \sqrt{3}$, il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\log n)^{(2x-1)}} \arctan\left(\frac{1}{n^{(x^2-3)}}\right).$$

Svolgimento : *Per* $x < -\sqrt{3}$ *e* $x > \sqrt{3}$, *si ha che l'esponente di* n *è sempre positivo, quindi la successione* $\{1/(n^{x^2-3})\}$ *è sempre infinitesima. Pertanto, utilizzando i limiti notevoli, si ha*

$$a_n(x) \sim \frac{1}{(\log n)^{(2x-1)} n^{x^2-3}}.$$

Il termine a ultimo membro corrisponde a quello della serie di Abel. Da quanto visto nell'introduzione, la serie converge se

$$x^2 - 3 > 1 \qquad \text{oppure se} \qquad \begin{cases} x^2 - 3 = 1 \\ 2x - 1 > 1 \end{cases}$$

e diverge altrimenti. Risolvendo, si ottiene che la serie converge per $x \geq 2$ *e* $x < -2$ *e, quindi, diverge per* $-2 \leq x < -\sqrt{3}$ *e* $\sqrt{3} < x < 2$.

3.3. Serie a termini di segno alterno

• **Teorema (Criterio della convergenza assoluta).** *Sia data la serie $\sum a_n$. Assumiamo che $\sum |a_n|$ converga (cioè che la serie proposta converga assolutamente). Allora, anche $\sum a_n$ converge.*

• **Teorema (Criterio di Leibniz).** *Sia data la serie $\sum (-1)^n a_n$, con $a_n \geq 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Assumiamo che*

(i) *$\{a_n\}$ sia infinitesima;*

(ii) *$\{a_n\}$ sia definitivamente monotona non crescente, cioè $a_n \geq a_{n+1}$, per n sufficientemente grande.*

Allora, la serie proposta converge semplicemente.

Ricordiamo che questo criterio (come del resto tutti quelli richiamati in precedenza) è solo una condizione sufficiente. Per esempio, la serie definita da

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n \qquad \text{dove} \qquad a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{se } n \text{ è dispari;} \\ \frac{1}{n^3+2} & \text{se } n \text{ è pari;} \end{cases}$$

è una serie a segni alterni, in cui la successione $\{a_n\}$ è positiva e infinitesima, ma ovviamente non è monotona, neppure definitivamente, quindi in questo caso non è possibile applicare il criterio di Leibniz. D'altra parte, poiché $a_n \leq 1/n^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, per confronto con la serie armonica generalizzata di esponente $2 > 1$, si ottiene che essa converge assolutamente (e quindi anche semplicemente).

Sottolineiamo, anche, che la convergenza semplice è una proprietà meno forte della convergenza assoluta ed, in generale, non la implica. Ad esempio, la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^\alpha}$$

converge assolutamente, e quindi semplicemente, per $\alpha > 1$, converge semplicemente, ma <u>non</u> assolutamente, per $0 < \alpha \leq 1$, non converge per $\alpha \leq 0$.

• Esercizi con svolgimento

ESERCIZIO 3.63. Studiare convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n} + \log n} \,.$$

Svolgimento : *Poiché*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \log n} = 0 \,,$$

la condizione (i) *del criterio di Leibniz è soddisfatta. Inoltre,*

$$\sqrt{n+1} > \sqrt{n} \qquad \text{e} \qquad \log(n+1) > \log n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \,,$$

quindi

$$\sqrt{n+1} + \log(n+1) > \sqrt{n} + \log n \qquad \text{da cui} \qquad \frac{1}{\sqrt{n+1} + \log(n+1)} < \frac{1}{\sqrt{n} + \log n} \,,$$

ovvero $a_{n+1} < a_n$ per ogni indice $n \in \mathbb{N}$, cioè anche la condizione (ii) *del criterio di Leibniz è soddisfatta. Pertanto la serie proposta converge semplicemente.*

Osserviamo, però, che, per $n \to +\infty$, si ha

$$\left| (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n} + \log n} \right| = \frac{1}{\sqrt{n} + \log n} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

e quindi la serie non converge assolutamente.

ESERCIZIO 3.64. Studiare convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2 + 2(-1)^n n} \,.$$

Svolgimento : *Osserviamo che i termini della serie sono della forma*

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n^2 + 2n} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \dfrac{1}{n^2 - 2n} & \text{se } n \text{ è dispari} \,, \end{cases}$$

e quindi

$$\left| (-1)^n \frac{1}{n^2 + 2(-1)^n n} \right| = \frac{1}{n^2 + 2(-1)^n n} \sim \frac{1}{n^2} \,.$$

Pertanto, la serie proposta converge assolutamente. Dal criterio della convergenza assoluta segue che essa converge anche semplicemente.

Osserviamo che, in questo caso, mentre la condizione (i) *del criterio di Leibniz è ovviamente soddisfatta, la condizione di monotonia* (ii) *non lo è. Infatti, se n è dispari (cioè $n+1$ è pari), si ha*

$$a_n = \frac{1}{n^2 - 2n} \qquad \text{e} \qquad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2 + 2(n+1)} \,,$$

e si verifica facilmente che, per ogni n dispari, $a_n > a_{n+1}$. Al contrario, se n è pari (cioè $n+1$ è dispari), si ha

$$a_n = \frac{1}{n^2 + 2n} \qquad \text{e} \qquad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2 - 2(n+1)} \,,$$

e si verifica facilmente che, per ogni n pari, la condizione $a_n > a_{n+1}$ non è mai verificata. Questo fatto mostra che il criterio di Leibniz fornisce solo una condizione sufficiente e non necessaria per la convergenza semplice di una serie.

ESERCIZIO 3.65. Studiare convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2 - n} \,.$$

Svolgimento : *Innanzitutto, osserviamo che* $\frac{1}{2-n} < 0$*, per ogni* $n \geq 3$*, e*

$$\left|(-1)^n \frac{1}{2-n}\right| = \frac{1}{n-2} \sim \frac{1}{n} ,$$

pertanto, la serie proposta non converge assolutamente. Per applicare il criterio di Leibniz, riscriviamo la serie nella forma

$$\sum_{n=3}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{2-n} = -\sum_{n=3}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{n-2} = \sum_{n=3}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n-2} .$$

Operando la sostituzione $m = n-2$*, da cui* $n = m+2$*, otteniamo*

$$\sum_{m=1}^{+\infty}(-1)^{m+3}\frac{1}{m} = -\sum_{m=1}^{+\infty}(-1)^m \frac{1}{m} ,$$

ovvero, la ben nota serie armonica a segni alterni, che converge semplicemente a $\log 2$.

ESERCIZIO 3.66. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{n+\log n}{n^2} .$$

Svolgimento : *Osserviamo che*

$$\left|(-1)^n \frac{n+\log n}{n^2}\right| = \frac{n+\log n}{n^2} \geq \frac{1}{n} ,$$

quindi la serie non converge assolutamente.

D'altra parte, abbiamo

$$\begin{aligned} &i) \quad a_n = \frac{n+\log n}{n^2} \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \to 0 \qquad per \ n \to +\infty , \\ &ii) \quad a_{n+1} \leq a_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} ; \end{aligned}$$

infatti

$$\begin{aligned} &\frac{(n+1)+\log(n+1)}{(n+1)^2} \leq \frac{n+\log n}{n^2} \\ \iff \quad & n^2(n+1) + n^2\log[n(1+1/n)] \leq n(n+1)^2 + (n+1)^2 \log n \\ \iff \quad & n^2 + n + 2n\log n + \log n - n^2 \log(1+1/n) \geq 0 \end{aligned}$$

e l'ultima disuguaglianza è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$*, poiché* $\log(1+1/n) \leq 1/n$ *e, quindi,*

$$n^2 + (2n+1)\log n + [n - n^2\log(1+1/n)] \geq n^2 + (2n+1)\log n \geq 0 .$$

Pertanto, la serie proposta converge semplicemente, per il criterio di Leibniz.

ESERCIZIO 3.67. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n\pi)e^{-2n}\log n}{n} .$$

Svolgimento : *Ricordiamo che* $\cos(n\pi) = (-1)^n$*; pertanto, la serie è a termini di segno alterno. Poiché* $\log n < n$*, per ogni* $n \in \mathbb{N}$*, abbiamo*

$$|a_n| = \left|\frac{(-1)^n e^{-2n}\log n}{n}\right| = \left(\frac{1}{e^2}\right)^n \left(\frac{\log n}{n}\right) \leq \left(\frac{1}{e^2}\right)^n .$$

Poiché la serie dei moduli è maggiorata dalla serie geometrica di ragione $q = \frac{1}{e^2} < 1$*, che converge, dal criterio del confronto, si ottiene che la serie proposta converge assolutamente e, quindi, anche semplicemente.*

ESERCIZIO 3.68. Stabilire per quali valori del parametro reale x la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \left[\frac{e^{n(x^2+x-1)}}{2n}\right] .$$

coverge assolutamente e semplicemente.

Svolgimento : *Ponendo* $a_n(x) = (-1)^n \left[\frac{e^{n(x^2+x-1)}}{2n}\right]$*, dal criterio della radice si ottiene che, se*

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n(x)|} = \lim_{n\to+\infty}\frac{e^{(x^2+x+1)}}{\sqrt[n]{2n}} = e^{(x^2+x-1)} < 1 ,$$

allora la serie convergerà assolutamente.

Ciò porta alla condizione $x^2+x-1 < 0$*, ovvero* $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$*. Se* $x < (-1-\sqrt{5})/2$ *oppure* $x > (-1+\sqrt{5})/2$*, il termine generale* $a_n(x)$ *non tende a zero e quindi, non essendo soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza della serie, essa non convergerà neppure semplicemente. Infine, per* $x = (-1 \pm \sqrt{5})/2$*, il criterio della radice non da informazioni. Sostituendo tali valori nella serie, otteniamo* $\sum \frac{(-1)^n}{2n}$*, che è riconducibile alla serie armonica di segno alterno, che converge semplicemente, ma non assolutamente. Concludendo, la serie converge semplicemente per* $(-1-\sqrt{5})/2 \leq x \leq (-1+\sqrt{5})/2$*, e converge assolutamente per* $(-1-\sqrt{5})/2 < x < (-1+\sqrt{5})/2$.

ESERCIZIO 3.69. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n \frac{1-\sin^2(n\pi/2)}{3n+\sin n} .$$

Svolgimento : *Osserviamo che*

$$\sin^2(n\pi/2) = \begin{cases} 0 & se\ n\ è\ pari,\ cioè\ n = 2k , \\ 1 & se\ n\ è\ dispari,\ cioè\ n = 2k+1 ; \end{cases}$$

pertanto, posto $a_n = \frac{1-\sin^2(n\pi/2)}{3n+\sin n}$*, si ha*

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{3n+\sin n} & se\ n = 2k , \\ 0 & se\ n = 2k+1 . \end{cases}$$

Quindi, la serie proposta si può riscrivere nella forma

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{2k}\frac{1}{3(2k)+\sin(2k)} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{6k+\sin(2k)} ,$$

cioè è una serie a termini positivi. Poiché $\frac{1}{6k+\sin(2k)} \sim \frac{1}{6k}$*, per* $k \to +\infty$*, dal criterio del confronto asintotico con la serie armonica, si ricava che la serie proposta diverge.*

ESERCIZIO 3.70. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\left[\frac{n}{2}\right]-\frac{n}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{2^{n/2}}{\log n}\right).$$

Svolgimento : *Osserviamo che*

$$\left[\frac{n}{2}\right]=\begin{cases}\frac{n}{2}=k & se\ n=2k\,,\\ \frac{n-1}{2}=k & se\ n=2k+1\,;\end{cases}$$

pertanto,

$$\left(\left[\frac{n}{2}\right]-\frac{n}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}=\begin{cases}0 & se\ n=2k\,,\\ \left(k-\frac{2k+1}{2}\right)^k=\left(-\frac{1}{2}\right)^k & se\ n=2k+1\,.\end{cases}$$

Sostituendo quanto ottenuto nella serie proposta, si ottiene

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\left[\frac{n}{2}\right]-\frac{n}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{2^{n/2}}{\log n}\right)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2^k}\frac{2^{\frac{2k+1}{2}}}{\log(2k+1)}=\sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\log(2k+1)}\,.$$

La serie ad ultimo membro è una serie a termini di segno alterno, dove, posto $a_k=\frac{1}{\log(2k+1)}$, *si ha che la successione* $\{a_k\}$ *è infinitesima e monotona decrescente (poiché* a_k *è l'inverso di* $\log(2k+1)$, *che è crescente). Pertanto, dal criterio di Leibniz, la serie converge semplicemente.*
Concludiamo osservando che la serie proposta non converge assolutamente, in quanto $\left|\frac{(-1)^k\sqrt{2}}{\log(2k+1)}\right|\sim\frac{\sqrt{2}}{\log k}$, *che è il termine generale della serie di Abel, con potenze* $p=0$ *e* $q=1$, *che quindi diverge.*

- Esercizi senza svolgimento

ESERCIZIO 3.71. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n\log n}\,.$$

ESERCIZIO 3.72. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\cos(n\pi)}{n^2\log n}\,.$$

ESERCIZIO 3.73. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\right]e^{-4n}\log^2 n}{n+1}.$$

ESERCIZIO 3.74. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\cos(n\pi)\cos n}{n\log^2 n}\,.$$

ESERCIZIO 3.75. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{\log n}\,.$$

ESERCIZIO 3.76. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\cos[(2n+1)\pi]}{n^2}\,.$$

Risposte agli esercizi non svolti: **3.71**: la serie proposta converge semplicemente, ma non assolutamente - **3.72**: la serie proposta converge assolutamente - **3.73**: la serie proposta converge assolutamente - **3.74**: la serie proposta converge assolutamente - **3.75**: la serie proposta converge semplicemente, ma non assolutamente - **3.76**: la serie proposta converge assolutamente .

3.4. Esercizi di ricapitolazione

Consideriamo in questo paragrafo esercizi tipici da temi d'esame, quindi, in certi casi, più generali di quelli finora visti. In particolare, la risoluzione di alcuni di essi necessiterà di nozioni che, in questo testo, vengono affrontate in capitoli successivi. Tali esercizi verranno contraddistinti con un asterisco.

Prima di passare agli esercizi, però, esponiamo alcune osservazioni sulle relazioni che intercorrono tra la serie di una somma e la somma delle serie.

Date due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$, in generale la serie della somma, cioè $\sum(a_n+b_n)$, non coincide con la somma delle serie, cioè con $\sum a_n+\sum b_n$, a meno che almeno una delle due non sia convergente. Ad esempio

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\left(\frac{1}{2n}\right)+\left(-\frac{1}{2n+1}\right)\right]=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n(2n+1)}\right)$$

che è convergente, per confronto con la serie armonica generalizzata di potenza $2>1$, mentre $\sum(\frac{1}{2n})$ e $\sum(-\frac{1}{2n+1})$ (sempre per confronto con la serie armonica) sono entrambe divergenti e la loro somma non è neppure definita. Viceversa,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2n}\right)+\left(\frac{(-1)^n}{2n+1}\right)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2n+1}\right)$$

che è divergente, poichè la prima serie diverge mentre la seconda è semplicemente convergente.

ESERCIZIO 3.77. Calcolare il seguente

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^{\tan(1/n)}.$$

Svolgimento : *Il limite proposto è un caso di indecisione della forma* $[0^0]$; *passando alla forma esponenziale, cioè*

$$\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^{\tan(1/n)} = \exp\left[\tan\left(\frac{1}{n}\right)\log\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\right],$$

possiamo utilizzare i confronti asintotici. Ricordando che

$$\tan\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n} \qquad e \qquad 1-\cos\frac{1}{n}\sim\frac{1}{2n^2},$$

si ottiene

$$\tan\left(\frac{1}{n}\right)\log\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{n}\log\frac{1}{2n^2}=-\left(\frac{2\log n+\log 2}{n}\right)\to 0 .$$

Da ciò si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^{\tan(1/n)} = \lim_{n\to+\infty}\exp\left[\tan(1/n)\log(1-\cos\frac{1}{n})\right] = e^0 = 1 .$$

ESERCIZIO 3.78. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1+n\cos(n\pi)}{2n^2+1} .$$

Svolgimento : *Poiché* $\frac{1}{2n^2+1}\le\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}$, *dal criterio del confronto con la serie armonica generalizzata di esponente* $2>1$, *si ottiene che* $\sum\frac{1}{2n^2+1}$ *converge. Pertanto, possiamo riscrivere*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1+n\cos(n\pi)}{2n^2+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2n^2+1}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n\cos(n\pi)}{2n^2+1}$$

e la convergenza della serie proposta dipende dal comportamento del secondo addendo a secondo membro (visto che abbamo già osservato che il primo addendo è una serie a termini positivi convergente).

Per studiare il comportamento di $\sum\frac{n\cos(n\pi)}{2n^2+1}$, *come visto in precedenza, sostituiamo* $\cos(n\pi)$ *con* $(-1)^n$ *e indichiamo con* $a_n=\frac{n}{2n^2+1}$. *La serie, perciò, si riscrive nella forma* $\sum(-1)^n a_n$ *ed è una serie a termini di segno alterno. Osserviamo che essa non converge assolutamente, poiché* $|(-1)^n a_n|\sim\frac{1}{2n}$; *d'altra parte*

$$i)\quad a_n\le\frac{n}{2n^2}=\frac{1}{2}\frac{1}{n}\to 0 \qquad per\ n\to+\infty ,$$

$$ii)\quad a_{n+1}\le a_n \qquad \forall n\in\mathbb{N} ;$$

infatti

$$\frac{n+1}{2(n+1)^2+1}\le\frac{n}{2n^2+1} \iff 2n^3+n+2n^2+1\le[2(n+1)^2+1]n$$

$$\iff 2n^2+2n-1\ge 0$$

e l'ultima disuguaglianza è verificata per ogni $n\in\mathbb{N}$. *Dal criterio di Leibniz, si ottiene che* $\sum\frac{n\cos(n\pi)}{2n^2+1}$ *converge semplicemente e, poiché* $\sum\frac{1}{2n^2+1}$ *converge, la serie proposta converge semplicemente, in quanto somma di una serie convergente e di una serie semplicemente convergente.*

ESERCIZIO 3.79*. Calcolare il

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n} .$$

Svolgimento : *Riscrivendo il numeratore in forma esponenziale, otteniamo*

$$a_n=\frac{e^{n^2\log(1+1/n)}}{e^n}=e^{n^2\log(1+1/n)-n} .$$

Studiamo l'esponente: utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine di $\log(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+o(t^2)$, *con* $t=\frac{1}{n}$, *si ottiene*

$$n^2\log\left(1+\frac{1}{n}\right)-n\sim n^2\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}\right]-n=-\frac{1}{2} ,$$

cioè

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\exp\left(\lim_{n\to+\infty}[n^2\log(1+1/n)-n]\right)=e^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{e}} .$$

ESERCIZIO 3.80*. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}n\left(\frac{2}{\sqrt{n}}-\sin\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^2 .$$

Svolgimento : *Innanzitutto osserviamo che si tratta di una serie a termini non negativi. Posto* $a_n=n\left(\frac{2}{\sqrt{n}}-\sin\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^2$ *ed utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al terzo ordine per* $\sin t$, *con* $t=2/\sqrt{n}$, *si ha*

$$a_n\sim n\left\{\frac{2}{\sqrt{n}}-\left[\frac{2}{\sqrt{n}}-\frac{1}{3!}\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^3\right]\right\}^2=n\left(\frac{2}{\sqrt{n}}-\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{4}{3n^{3/2}}\right)^2=\frac{16}{9}\frac{1}{n^2} .$$

Per confronto con la serie armonica generalizzata di esponente $2>1$, *si ricava che la serie proposta converge.*

ESERCIZIO 3.81. Determinare, al variare di $x\in\mathbb{R}^+$, il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(5+\log x-|1-\log x|)^n}{n^{4/9}+3} .$$

Svolgimento : *Se indichiamo con* $a_n(x)$ *il termine generale della serie proposta, osserviamo innanzitutto che, al variare di* x, $a_n(x)$ *assume valori di segno arbitrario. Dobbiamo, quindi, per prima cosa, verificare che sia soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza, cioè che* $a_n(x)\to 0$. *Tenendo conto degli ordini di infinito, ciò avviene solo se*

$$\Big|5+\log x-|1-\log x|\Big|\le 1 \iff -1\le 5+\log x-|1-\log x|\le 1$$

ovvero solo se

$$\begin{cases}\log x\le 1\\ -1\le 5+\log x-1+\log x\le 1\end{cases} \bigcup \begin{cases}\log x>1\\ -1\le 5+\log x+1-\log x\le 1 .\end{cases}$$

Si osserva immediatamente che il secondo sistema è impossibile; per quanto riguarda invece il primo, facendo i conti si ottiene

$$\begin{cases} 0 < x \leq \mathrm{e} \\ -5/2 \leq \log x \leq -3/2 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < x \leq \mathrm{e} \\ \mathrm{e}^{-5/2} \leq x \leq \mathrm{e}^{-3/2} \, . \end{cases}$$

Pertanto studiamo la convergenza della serie solo nell'insieme $[\mathrm{e}^{-5/2}, \mathrm{e}^{-3/2}]$. *Applicando il criterio del rapporto, per studiare la convergenza assoluta, otteniamo*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\frac{(5+\log x - |1-\log x|)^{n+1}}{(n+1)^{4/9}+3}\right|}{\left|\frac{(5+\log x-|1-\log x|)^n}{n^{4/9}+3}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|(5+\log x - |1-\log x|)|(n^{4/9}+3)}{(n+1)^{4/9}+3} = \Big|5+\log x - |1-\log x|\Big| \, .$$

Quindi se $\Big|5+\log x - |1-\log x|\Big| < 1$, *ovvero, dai conti fatti in precedenza, se* $x \in (\mathrm{e}^{-5/2}, \mathrm{e}^{-3/2})$, *la serie converge assolutamente.*

Restano da studiare i due valori $x = \mathrm{e}^{-5/2}$ *e* $x = \mathrm{e}^{-3/2}$. *Sostituendo il primo valore nella serie, si ottiene*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{4/9}+3}$$

che converge semplicemente per il criterio di Leibniz, ma non assolutamente, per confronto con la serie armonica generalizzata di esponente $4/9 < 1$. *Sostituendo il secondo valore nella serie, si ottiene*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{4/9}+3}$$

che è una serie a termini positivi e non converge per confronto con la serie armonica generalizzata di esponente $4/9 < 1$.

Concludendo, la serie proposta converge assolutamente per $x \in (\mathrm{e}^{-5/2}, \mathrm{e}^{-3/2})$, *converge semplicemente per* $x = \mathrm{e}^{-5/2}$ *e non converge per* $x \in (0, \mathrm{e}^{-5/2}) \cup [\mathrm{e}^{-3/2}, +\infty)$.

ESERCIZIO 3.82*. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right) \, .$$

ESERCIZIO 3.83. Stabilire per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ è convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1-\alpha}}{\arctan\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n^3}} .$$

ESERCIZIO 3.84*. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^{3/2}} \, .$$

Svolgimento : *Innanzitutto, possiamo riscrivere il termine generale della serie nella forma*

$$\exp\left(n + n^{3/2}\log\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \, .$$

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al quarto ordine per $\log(1+t)$, *con* $t = -1/\sqrt{n}$, *otteniamo*

$$n + n^{3/2}\log\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim n + n^{3/2}\left(-\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{3\sqrt{n^3}} - \frac{1}{4n^2}\right) =$$

$$n - n - \frac{1}{2}\sqrt{n} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4\sqrt{n}} = -\frac{1}{2}\sqrt{n} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4\sqrt{n}} \, .$$

Poiché i termini successivi a $-1/3$ *sono infinitesimi, avremo che*

$$\exp\left(n + n^{3/2}\log\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \sim \exp\left(-\frac{1}{2}n^{1/2} - \frac{1}{3}\right)$$

Studiamo, quindi, la serie

$$\mathrm{e}^{-1/3}\sum_{n=1}^{+\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}n^{1/2}\right) \, , \tag{3.1}$$

che, per il criterio del confronto asintotico, ha lo stesso comportamento della serie proposta. Osserviamo che, per $t \to +\infty$, $t^8\mathrm{e}^{-t} \to 0$, *da cui, ponendo* $t = \sqrt{n}$ *e calcolando la radice quadrata, si ottiene* $\left[(\sqrt{n})^8\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}\right]^{1/2} = \frac{n^2}{\exp(\sqrt{n}/2)} \to 0$, *per* $n \to +\infty$, *quindi, almeno definitivamente, si ha che* $\exp(-\frac{1}{2}n^{1/2}) \leq 1/n^2$. *Pertanto, dal criterio del confronto con la serie armonica di esponente* $2 > 1$, *si deduce che la serie in (3.1) converge e quindi anche la serie proposta è convergente.*

ESERCIZIO 3.85. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{3n+1} .$$

Svolgimento : *La serie proposta diverge, poichè si ha*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+(-1)^n}{3n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3n+1} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$$

dove la prima serie è divergente, per confronto con la serie armonica, mentre la seconda è semplicemente convergente, per il criterio di Leibniz.

ESERCIZIO 3.86*. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\sin\frac{1}{\sqrt{n}} - \log\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right] \, .$$

Svolgimento : *Osserviamo che non è possibile studiare separatamente le due serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{1}{\sqrt{n}} \qquad e \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) ,$$

poiché sono entrambe divergenti, in quanto $\sin\frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \log\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
Utilizzando, invece, gli sviluppi di Mc Laurin al terzo ordine per $\sin t$ *e* $\log(1+t)$, *con* $t = 1/\sqrt{n}$, *si ottiene*

$$\begin{aligned}\sin\frac{1}{\sqrt{n}} - \log\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) &\sim \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3 - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3 \\ &= -\frac{1}{6n^{3/2}} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^{3/2}} \sim \frac{1}{2n} .\end{aligned}$$

Da ciò si ricava che la serie proposta è, almeno definitivamente, a termini non negativi e, per il criterio del confronto asintotico, ha il medesimo carattere della serie armonica; pertanto, essa diverge a $+\infty$.

ESERCIZIO 3.87. Stabilire se la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2\left(\sqrt{1+\frac{7}{n^4}}-1\right)}$$

converge.

ESERCIZIO 3.88. Stabilire se la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1-\sqrt{1-\frac{5}{n^3}}}{\sqrt{n}}$$

converge.

ESERCIZIO 3.89. Stabilire per quali valori del parametro reale α la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(4^{\alpha+2})^n}{2n^2 7^n}$$

converge.

ESERCIZIO 3.90*. Determinare, al variare del parametro reale x, il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{2/n}-1-\frac{x}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}}} .$$

Svolgimento : *Osserviamo che, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per* e^t, *con* $t = 2/n$, *si ottiene*

$$\begin{aligned}\frac{e^{2/n}-1-\frac{x}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}}} &\sim \sqrt{n}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{2!}\left(\frac{2}{n}\right)^2-1-\frac{x}{n}\right) \\ &= \sqrt{n}\left(\frac{2-x}{n}+\frac{2}{n^2}\right) = \frac{(2-x)}{n^{1/2}} + \frac{2}{n^{3/2}} \sim \begin{cases} \frac{(2-x)}{n^{1/2}} & se\ x \neq 2 , \\ \frac{2}{n^{3/2}} & se\ x = 2 .\end{cases}\end{aligned}$$

Pertanto, la serie proposta è una serie a termini di segno fissato (positivo per $x \leq 2$ *e negativo per* $x > 2$*) e, dal confronto asintotico con la serie armonica generalizzata, risulta essere divergente per* $x \neq 2$ *e convergente per* $x = 2$.

ESERCIZIO 3.91. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n(1+\log^2 n)} .$$

Svolgimento : *La serie proposta è a termini di segno arbitrario, ma non di tipo alterno. D'altra parte, se consideriamo il valore assoluto del termine generale, otteniamo*

$$\left|\frac{\cos n}{n(1+\log^2 n)}\right| \leq \frac{1}{n(1+\log^2 n)} \sim \frac{1}{n\log^2 n}$$

e, per confronto con la serie di Abel, si ha che la serie proposta converge assolutamente.

ESERCIZIO 3.92. Stabilire per quali valori del parametro reale α la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(6^{\alpha-1})^n}{n^2 3^n}$$

converge.

ESERCIZIO 3.93*. Determinare, al variare del parametro reale $\alpha > 0$, il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sinh\frac{1}{\sqrt{n}} - \arctan\frac{1}{n^\alpha}\right) .$$

Svolgimento : *Osserviamo che* $\sum \sinh\frac{1}{\sqrt{n}}$ *è sempre divergente, poiché* $\sinh\frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$, *mentre* $\sum \arctan\frac{1}{n^\alpha}$ *converge per* $\alpha > 1$ *e diverge per* $\alpha \leq 1$, *poiché* $\arctan\frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{n^\alpha}$. *Pertanto, per* $\alpha > 1$, *possiamo studiare le due serie separatamente, ottenendo che la serie proposta diverge, in quanto somma di una serie divergente e di una serie convergente.*
Per $\alpha \leq 1$, *invece, non si possono separare le due serie. Ricordando che*

$$\sinh t = t + \frac{t^3}{6} + o(t^4) \qquad e \qquad \arctan t = t - \frac{t^3}{3} + o(t^4)$$

da cui

$$\sinh\frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{6n^{3/2}} \qquad e \qquad \arctan\frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{3n^{3\alpha}}$$

si ottiene

$$\sinh\frac{1}{\sqrt{n}} - \arctan\frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{6n^{3/2}} - \frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{3n^{3\alpha}} \sim \begin{cases} -\frac{1}{n^\alpha} & se\ 0 < \alpha < 1/2 , \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & se\ 1/2 < \alpha \leq 1 , \\ \frac{1}{2n^{3/2}} & se\ \alpha = 1/2 .\end{cases}$$

Quindi, la serie proposta è definitivamente a termini di segno fissato (positivi per $1/2 \leq \alpha \leq 1$ *e negativi per* $0 < \alpha < 1/2$*) e, per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata, converge solo per* $\alpha = 1/2$.

ESERCIZIO 3.94*. Determinare il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{2n+2\sin n}$.

Svolgimento : *Osserviamo innanzitutto che* $\cos(n\pi) = (-1)^n$, *quindi la serie proposta si può riscrivere come*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n \qquad \text{dove} \qquad a_n = \frac{1}{2n+2\sin n} > 0 \qquad \forall n \geq 1 .$$

Ovviamente, $a_n \to 0$, *ma* $a_n \geq \frac{1}{2n+2}$; *pertanto, per confronto con la serie armonica, la serie proposta non converge assolutamente. D'altra parte, se consideriamo la funzione* $f(x) = \frac{1}{2x+2\sin x}$, *risulta che essa è monotona decrescente, in quanto* $f'(x) = -\frac{2+2\cos x}{(2x+2\sin x)^2} \leq 0$ *per tutti gli* $x \geq 1$. *Da ciò segue che anche la successione* $\{a_n\}$ *è monotona decrescente e quindi la serie proposta converge semplicemente, per il criterio di Leibniz.*

ESERCIZIO 3.95. Stabilire per quali valori $\alpha < 0$ la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left\{1 - \cos\left[\left(\frac{1}{n+1}\right)^{-\alpha}\right]\right\} (n+2)^3$$

converge.

ESERCIZIO 3.96*. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left[\left(\sinh\frac{1}{n}\right)^2 - \frac{1}{n^2}\right] n^{8/3} .$$

ESERCIZIO 3.97. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{2n+5} .$$

Svolgimento : *Osserviamo che*

$$\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^k & \text{per } n = 2k+1, \text{ cioè } n \text{ dispari ;} \\ 0 & \text{per } n = 2k, \text{ cioè } n \text{ pari ;} \end{cases}$$

quindi la serie proposta, in realtà, è sommata solo sugli indici dispari e si può riscrivere nella forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{2n+5} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2k+1}(-1)^k}{2(2k+1)+5} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4k+7} .$$

Chiaramente, quest'ultima serie è una serie a segni alterni ed è semplicemente convergente, per il criterio di Leibniz, ma non assolutamente convergente.

ESERCIZIO 3.98. Determinare, al variare del parametro reale α, il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3^n n^3}{[(\log n)^{\alpha-5}]^n} .$$

ESERCIZIO 3.99. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin\left[(2n-1)\frac{\pi}{2}\right] e^{-n} \log^3 n}{n-1} .$$

ESERCIZIO 3.100. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{1/n}-1}{n+(-1)^n} .$$

Svolgimento : *Osserviamo, innanzitutto, che* $e^{1/n} - 1 > 0$, *per ogni* $n \in \mathbb{N}$, *e che il denominatore del termine generale vale* $n+1$ *oppure* $n-1$, *a seconda che l'indice* n *sia pari o dispari. Pertanto, la serie proposta è a termini positivi e si ha*

$$\frac{e^{1/n}-1}{n+(-1)^n} \leq \frac{e^{1/n}-1}{n-1} \sim \frac{1/n}{n-1} \sim \frac{1}{n^2} .$$

Quindi, applicando successivamente sia il criterio del confronto che il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di potenza $2 > 1$, *si ricava che la serie proposta è convergente.*

ESERCIZIO 3.101*. Determinare il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin[(2n+1)\pi/2]}{4n+\sin(n/2)}$.

ESERCIZIO 3.102. Determinare il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin[(2n+1)\pi/2]}{2+\cos(n/3)}$.

ESERCIZIO 3.103. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos[(n+1)\pi]e^{-3n}\log^4 n}{2n}.$$

ESERCIZIO 3.104. Stabilire per quali valori del parametro reale x la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x-12|^{n+1}}{2n^2 e^{-n}}$$

converge.

Svolgimento : *Applicando il criterio del rapporto, abbiamo*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{|x-12|^{n+2}}{2(n+1)^2 e^{-n-1}}\right)\left(\frac{2n^2 e^{-n}}{|x-12|^{n+1}}\right) = e|x-12|\frac{n^2}{(n+1)^2} \to e|x-12| .$$

Pertanto, la serie converge se

$$|x-12| < \frac{1}{e} \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\frac{1}{e} < x - 12 < \frac{1}{e} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 12 - \frac{1}{e} < x < 12 + \frac{1}{e}$$

e diverge se $x < 12 - 1/e$ *e* $x > 12 + 1/e$. *Per* $x = 12 \pm 1/e$, *il criterio non ci da informazioni. Sostituendo i valori trovati nella serie, otteniamo*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2en^2} = \frac{1}{2e}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

che è, ovviamente, una serie convergente.

Ricapitolando, la serie converge per $12 - 1/e \leq x \leq 12 + 1/e$ *e diverge altrove.*

ESERCIZIO 3.105. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{3+\sin(5n)}{n} .$$

Svolgimento : *Osserviamo che, poiché $-1 \le \sin(5n) \le 1$, il numeratore del termine generale della serie proposta è compreso tra 2 e 4. Pertanto si tratta di una serie a termini positivi, dove vale la seguente diseguaglianza*

$$\frac{3+\sin(5n)}{n} \ge \frac{2}{n} .$$

Il criterio del confronto permette, quindi, di stabilire che tale serie è divergente.

ESERCIZIO 3.106. Stabilire per quali valori del parametro reale x la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x-12|^{n+2}}{n^3 e^{2n}}$$

converge.

ESERCIZIO 3.107. Determinare, al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$, il carattere della successione

$$a_n(x) = \frac{1}{n^{1-x^2}}$$

e della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x) .$$

ESERCIZIO 3.108. Data la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{|2\log x|^n}{n^{0,25}+n^{25}+15} ,$$

determinare, al variare di $x \in \mathbb{R}_+$,

a) dove converge assolutamente;

b) dove converge semplicemente ma non assolutamente;

c) dove non converge.

Svolgimento : *La serie è a segno alterno ed è definita per ogni $x > 0$. Determiniamo, innanzitutto, per quali valori del parametro x è verificata la condizione necessaria per la convergenza:*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|2\log x|^n}{n^{0,25}+n^{25}+15} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad |2\log x| \le 1$$

ovvero se e solo se

$$-1/2 \le \log x \le 1/2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1/\sqrt{e} \le x \le \sqrt{e} .$$

Pertanto, studieremo la convergenza solo nell'intervallo $[1/\sqrt{e}, \sqrt{e}]$. Per studiare la convergenza assoluta, come nello svolgimento dell'esercizio 3.81, applichiamo il criterio del rapporto, ottenendo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{|2\log x|^{n+1}}{(n+1)^{0,25}+(n+1)^{25}+15}}{\frac{|2\log x|^n}{n^{0,25}+n^{25}+15}} = \lim_{n\to+\infty} |2\log x| \frac{n^{0,25}+n^{25}+15}{(n+1)^{0,25}+(n+1)^{25}+15} = |2\log x| .$$

Quindi, se $|2\log x| < 1$, ovvero, dai conti fatti, $x \in (1/\sqrt{e}, \sqrt{e})$, si ha convergenza assoluta.

Restano da studiare i due valori $x = 1/\sqrt{e}$ e $x = \sqrt{e}$. Sostituendo questi due valori nella serie, si ottiene in entrambi i casi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{1/4}+n^{25}+15}$$

che converge assolutamente, per confronto con la serie armonica generalizzata di esponente $25 > 1$.

Concludendo, la serie proposta converge assolutamente per $x \in [1/\sqrt{e}, \sqrt{e}]$, non ci sono valori del parametro per cui la serie converge semplicemente, ma non assolutamente, e infine essa non converge per $x \in (0, 1/\sqrt{e}) \cup (\sqrt{e}, +\infty)$.

ESERCIZIO 3.109. Determinare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{|x-1|}\right)^n$$

e, per i valori del parametro per cui si ha convergenza, calcolare la somma della serie.

Svolgimento : *Siamo in presenza di una serie geometrica, di ragione $q = \frac{x}{|x-1|}$, definita per ogni $x \ne 1$. Essa converge, assolutamente e semplicemente, se e solo se $\left|\frac{x}{x-1}\right| < 1$, cioè se e solo se $-1 < \frac{x}{x-1} < 1$. Le soluzioni di questa disuguaglianza si ottengono risolvendo i due sistemi*

$$\begin{cases} x-1>0 \\ 1-x<x<x-1 \end{cases} \quad \bigcup \quad \begin{cases} x-1<0 \\ x-1<x<1-x \end{cases}$$

da cui, eliminando il primo sistema, che è impossibile, si ricava

$$\begin{cases} x<1 \\ x<1/2 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x < 1/2 .$$

Per tali valori di x, la somma della serie sarà $S(x) = \frac{1}{1-\frac{x}{|x-1|}} = \frac{|x-1|}{|x-1|-x} = \frac{x-1}{2x-1}$.

ESERCIZIO 3.110. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(\log\frac{1}{2})^n}{n(\log 2)^{n-1}} .$$

Svolgimento : *Ricordiamo che, per le proprietà dei logaritmi, si ha $\log\frac{1}{2} = -\log 2$, quindi*

$$\frac{(-1)^n(\log\frac{1}{2})^n}{n(\log 2)^{n-1}} = \frac{(-1)^n(-\log 2)^n}{n(\log 2)^{n-1}} = \frac{(-1)^{2n}\log 2}{n} = (\log 2)\,\frac{1}{n} .$$

Pertanto, la serie proposta, contrariamente a quanto poteva inizialmente sembrare, non è una serie a segno alterno, bensì una serie a termini positivi, che, a meno del fattore moltiplicativo $\log 2$, è proprio la serie armonica e quindi è divergente.

Risposte agli esercizi non svolti: **3.82**: la serie proposta converge - **3.83**: la serie proposta converge per $\alpha > 5/2$ - **3.87**: la serie proposta diverge - **3.88**: la serie proposta converge - **3.89**: la serie proposta converge per $\alpha \leq \frac{\log 7}{\log 4} - 2$ - **3.92**: la serie proposta converge per $\alpha \leq \frac{\log 3}{\log 6} + 1$ - **3.95**: la serie proposta converge per $\alpha < -2$ - **3.96**: la serie proposta converge assolutamente - **3.98**: la serie proposta converge per $\alpha > 5$ - **3.99**: la serie proposta converge assolutamente - **3.101**: la serie proposta converge semplicemente - **3.102**: la serie proposta non converge - **3.103**: la serie proposta converge assolutamente - **3.106**: la serie proposta converge per $12 - e^2 \leq x \leq 12 + e^2$ - **3.107**:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 < x < 1; \\ 1 & \text{se } x = \pm 1; \\ +\infty & \text{se } x < -1;\ x > 1\,. \end{cases}$$

La serie diverge per ogni $x \in \mathbb{R}$.

DOMANDA 3.111. Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali non negativi. Allora

$\boxed{a}$ $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ converge semplicemente; $\boxed{b}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge; $\boxed{c}$ $\{a_n\}$ è infinitesima; $\boxed{d}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è regolare.

DOMANDA 3.112. Sia $\{a_n\}$ una successione monotona decrescente. Allora

$\boxed{a}$ $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ converge semplicemente; $\boxed{b}$ se $a_n \geq 2$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge a $+\infty$; $\boxed{c}$ $a_n \to 0$; $\boxed{d}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

DOMANDA 3.113. Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni infinitesime di numeri reali. Allora

$\boxed{a}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ converge; $\boxed{b}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ diverge; $\boxed{c}$ se $a_n \sim \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ converge assolutamente; $\boxed{d}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

DOMANDA 3.114. Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni di numeri reali tali che, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 0$ e $b_n \geq 0$. Allora

$\boxed{a}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\right)$; $\boxed{b}$ se $a_n \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge; $\boxed{c}$ se $a_n \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge; $\boxed{d}$ se $a_n \sim b_n$, entrambe le serie o convergono o divergono.

DOMANDA 3.115. Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali tale che, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$ e $a_n \leq a_{n+1}$. Allora

$\boxed{a}$ $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ converge semplicemente; $\boxed{b}$ $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ non converge; $\boxed{c}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge assolutamente; $\boxed{d}$ nessuna delle precedenti affermazione è esatta.

Risposte alle precedenti domande: **3.111**: d - **3.112**: b - **3.113**: c - **3.114**: d - **3.115**: b .

CAPITOLO 4

FUNZIONI DI UNA VARIABILE REALE

4.1. Limiti, continuità e derivabilità

Ricordiamo che, pur di sostituire ad n, a_n ed ε_n una variabile continua che abbia lo stesso limite, la tabella dei limiti notevoli, così come gli ordini di infinito ($n!$ escluso), richiamati nel precedente capitolo, continuano ad essere validi. Riportiamo qui, avendoli adattati al caso delle funzioni, i risultati precedentemente enunciati per le successioni.

• Limiti notevoli

1) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x \to \mathrm{e}$ per $x \to \pm\infty$;

2) $\left(1+\dfrac{\vartheta}{x}\right)^{\alpha x} \to \mathrm{e}^{\alpha\vartheta}$ per $x \to +\infty$, $\forall\vartheta \in \mathbb{R}$, $\forall\alpha \in \mathbb{R}$;

3) $(1+x)^{\frac{1}{x}} \to \mathrm{e}$ per $x \to 0$;

4) $\dfrac{\log(1+x)}{x} \to 1$ $\quad \dfrac{\log_a(1+x)}{x} \to \dfrac{1}{\log a}$ per $x \to 0$, $\forall a > 0$, $a \neq 1$;

5) $\dfrac{a^x - 1}{x} \to \log a$ per $x \to 0$, $\forall a > 0$;

6) $\dfrac{(1+x)^\vartheta - 1}{x} \to \vartheta$ per $x \to 0$, $\forall\vartheta \in \mathbb{R}$;

7) $\dfrac{x^\vartheta}{\mathrm{e}^x} \to 0$ $\quad \dfrac{x^\vartheta}{a^x} \to 0$ per $x \to +\infty$, $\forall\vartheta \in \mathbb{R}$, $\forall a > 1$;

8) $\dfrac{(\log x)^\vartheta}{x} \to 0$ per $x \to +\infty$, $\forall\vartheta \in \mathbb{R}$;

9) $x^{1/x} \to 1$ per $x \to +\infty$;

10) $\dfrac{\sin x}{x} \to 1$ per $x \to 0$;

11) $\dfrac{1-\cos x}{x^2} \to \dfrac{1}{2}$ per $x \to 0$;

12) $\dfrac{\tan x}{x} \to 1$ per $x \to 0$;

13) $\dfrac{\arcsin x}{x} \to 1$ per $x \to 0$;

14) $\dfrac{\arctan x}{x} \to 1$ per $x \to 0$;

15) $\dfrac{\sinh x}{x} \to 1$ per $x \to 0$;

16) $\dfrac{\tanh x}{x} \to 1$ per $x \to 0$;

17) $\dfrac{\cosh x - 1}{x^2} \to \dfrac{1}{2}$ per $x \to 0$;

18) $x\Big|\log|x|\Big|^\beta \to 0$ per $x \to 0$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$;

Inoltre, date due funzioni f e g, definite e non nulle in un intorno di un punto $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, salvo al più il punto x_0 stesso, esse sono dette *asintotiche* fra loro (o *asintoticamente equivalenti*) per $x \to x_0$, se

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 ;$$

in tal caso si scrive $f(x) \sim g(x)$ per $x \to x_0$. Ovviamente, una funzione f può essere asintotica a g per $x \to x_0$, ma avere un comportamento completamente diverso dalla funzione g nell'intorno di un altro punto. Ad esempio, dalla precedente tabella, si ricava facilmente che $\sin x \sim x$ per $x \to 0$, ma ovviamente ciò non vale nell'intorno di qualunque altro punto $x_0 \neq 0$. Come detto in precedenza, la nozione di asintotico è in generale molto utile nel calcolo dei limiti, poiché permette di sostituire a funzioni complicate delle funzioni più semplici, che mantengono le "principali" caratteristiche di quelle eliminate. Tale nozione va però usata con cautela, ad esempio, nelle somme e nelle potenze (vedi osservazioni fatte all'inizio del Capitolo 3).

N.B. Si noti che, per definizione, nessuna funzione può essere asintotica a 0.

• Casi di indecisione

$$\infty - \infty \qquad \pm\infty \cdot 0 \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \qquad \frac{0}{0} \qquad 0^0 \qquad (\pm\infty)^0 \qquad 1^{\pm\infty}$$

• Ordini di infinito

Per $x \to +\infty$ si ha

$$\log x \quad \ll \quad x \quad \ll \quad a^x,\ a>1 \quad \ll \quad x^x$$

Questo ordinamento di infiniti continua a valere anche nel caso in cui ciascun elemento della catena venga elevato ad una potenza positiva differente (ad esempio x^{150} è un infinito di ordine inferiore a $e^{x/100}$).

• Infinitesimi equivalenti del primo ordine

Dai limiti notevoli precedentemente elencati si ricava che, per $x \to 0$,

$$\log(1+x) \sim (e^x - 1) \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \sinh x \sim \tanh x \sim x$$

• Operazioni fra "o piccoli": date due funzioni f, g definite in un intorno di un punto $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, si dice che $f = o(g)$, per $x \to x_0$, se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)/g(x) = 0$. Nel caso in cui $x_0 = 0$ e $g(x) = x^n$ o

$g(x) = x^m$, con $n, m \in \mathbb{N}$, abbiamo

$$C \cdot o(x^n) = o(x^n);$$
$$x^m \cdot o(x^n) = o(x^{m+n});$$
$$o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{m+n});$$
$$\frac{o(x^n)}{x^m} = o(x^{n-m}) \qquad (n \geq m);$$
$$\frac{o(x^n)}{o(x^m)} = o(x^{n-m}) \qquad (n > m);$$
$$o(x^n) \pm o(x^m) = o(x^M) \qquad \text{dove} \quad M = \min\{m,n\}\ .$$

• Richiami sulla continuità: osserviamo che la definizione dei punti di discontinuità non è in generale uguale in tutti i testi. In questo libro ci affideremo alle seguenti definizioni.

Data $f : I \to \mathbb{R}$, dove I è un intervallo aperto di numeri reali contenente il punto x_0, abbiamo:

- f è continua in x_0 se e solo se

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) ;$$

- f ha un punto di discontinuità eliminabile in x_0 se e solo se

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = l \neq f(x_0) \qquad \text{con } l \in \mathbb{R} ;$$

- f ha un punto di salto o di discontinuità di prima specie in x_0 se e solo se

$$\exists \lim_{x\to x_0^-} f(x) = l_- \in \mathbb{R} \qquad \exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) = l_+ \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \quad l_- \neq l_+ ;$$

- f ha un punto di discontinuità di seconda specie in x_0 se e solo se

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty ; \quad \text{oppure}$$
$$\text{in tutti gli altri casi in cui} \quad \nexists \lim_{x\to x_0} f(x) .$$

Naturalmente, non si può parlare di punti di discontinuità dove la funzione f non è definita.

• Esercizi sui limiti e sulla continuità

ESERCIZIO 4.1. Calcolare

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^3 + 9x^2 + 27x + 27}{x^2 + 6x + 9} .$$

Svolgimento : *Il limite proposto è un caso di indecisione* $[\frac{0}{0}]$; *d'altra parte, riscrivendo numeratore e denominatore, utilizzando i prodotti notevoli, si ottiene*

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^3 + 9x^2 + 27x + 27}{x^2 + 6x + 9} = \lim_{x\to -3} \frac{(x+3)^3}{(x+3)^2} = \lim_{x\to -3} (x+3) = 0 .$$

Notiamo che la funzione, non definita in $x = -3$, *è in realtà prolungabile con continuità in tale punto.*

ESERCIZIO 4.2. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{-8}}{\log(1+e^{4x})}$.

Svolgimento : *Ricordando che, per $t\to 0$, $\log(1+t)\sim t$ e, ponendo $t=e^{4x}$ per $x\to-\infty$, si ottiene*

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{-8}}{\log(1+e^{4x})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-4x}}{x^8}=+\infty\,.$$

ESERCIZIO 4.3. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x^6\log(1+e^{-3x})$.

ESERCIZIO 4.4. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{-4}}{\log(1+e^{5x})}$.

ESERCIZIO 4.5. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\log(1+x)}{2x^4-\sqrt{x}+x^2}$.

ESERCIZIO 4.6. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to3^+}\frac{(x^2-6x+9)^2}{[e^{(x^2-9)}-1]^4}\,.$$

Svolgimento : *Ponendo $t=x^2-9$ e utilizzando il fatto che, per $t\to0$, $e^t-1\sim t$, si ottiene*

$$\lim_{x\to3^+}\frac{(x^2-6x+9)^2}{[e^{(x^2-9)}-1]^4}=\lim_{x\to3^+}\frac{(x-3)^4}{(x^2-9)^4}=\lim_{x\to3^+}\frac{(x-3)^4}{(x-3)^4(x+3)^4}=\frac{1}{1296}\,.$$

ESERCIZIO 4.7. Calcolare

$$\lim_{x\to2^+}\frac{(\sqrt{x-2})^3\log[(x-1)^2]}{(x^2-4)^{5/2}}\,.$$

Svolgimento : *Riscrivendo*

$$\log(x-1)^2=2\log(x-1)=2\log[1+(x-2)]$$

ed utilizzando il fatto che $\log(1+t)\sim t$ con $t=x-2$, si ottiene

$$\lim_{x\to2^+}\frac{(\sqrt{x-2})^3\log[(x-1)^2]}{(x^2-4)^{5/2}}=\lim_{x\to2^+}\frac{2(x-2)^{3/2}(x-2)}{(x+2)^{5/2}(x-2)^{5/2}}=\lim_{x\to2^+}\frac{2}{(x+2)^{5/2}}=\frac{1}{16}\,.$$

ESERCIZIO 4.8. Data $f\in C^0(\mathbb{R})$ e sapendo che $f(1)=3$, calcolare $\displaystyle\lim_{x\to1}f\Big(\sin(\frac{\pi}{2}x)\Big)$, giustificando la risposta.

Svolgimento : *Poiché f è continua, si ha*

$$\lim_{x\to1}f\Big(\sin(\frac{\pi}{2}x)\Big)=f\Big(\lim_{x\to1}\sin\Big(\frac{\pi}{2}x\Big)\Big)=f(1)=3\,.$$

ESERCIZIO 4.9. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\log(1+3\sqrt[3]{x})}{x+2x^4+\frac12x^2}$.

Svolgimento : *Osservando che, per $y\to0$, $\log(1+y)\sim y$ e che, per $x\to0$, il termine dominante in una somma di potenze è quello di grado più basso, si ottiene*

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\log(1+3\sqrt[3]{x})}{x+2x^4+\frac12x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{3\sqrt[3]{x}}{x}=3\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^{2/3}}=+\infty\,.$$

ESERCIZIO 4.10. Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+e^x}{2x^3+\log x^2}\,.$$

Svolgimento : *Ricordando gli ordini di infinito si ottiene*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+e^x}{2x^3+\log x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x^3}=+\infty.$$

ESERCIZIO 4.11. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4+\sqrt{x}+2x^3}{e^x+1}$.

Svolgimento : *Poiché $e^x+1\sim e^x$ per $x\to+\infty$ e ricordando che in un polinomio domina l'infinito di potenza superiore, si ottiene*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4+\sqrt[2]{x}+2x^3}{e^x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{e^x}=0\,.$$

ESERCIZIO 4.12. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(2+x)}{3x^3-1+2x^2}$.

ESERCIZIO 4.13. Stabilire, motivando la risposta, se la seguente funzione è continua nel suo dominio:

$$f(x)=\begin{cases}x & x\le1\\ 3-x^3 & x>1.\end{cases}$$

Svolgimento : *La funzione proposta, definita in $\mathbb{R}$, non è continua, poiché*

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=2\qquad\textit{mentre}\qquad\lim_{x\to1^-}f(x)=1=f(1).$$

In particolare, $x=1$ è punto di salto.

ESERCIZIO 4.14. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\sin(3x)}{\frac14\sqrt[3]{x}+x^2+\frac12x^3}$.

ESERCIZIO 4.15. Data $f\in C^0(\mathbb{R})$ e sapendo che $f(2)=1/2$, calcolare $\displaystyle\lim_{x\to2}f\Big(2+\sin(\pi x)\Big)$, giustificando la risposta.

ESERCIZIO 4.16. Stabilire, motivando la risposta, se la seguente funzione è continua nel suo dominio:

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & x\le2\\ x^2-3 & x>2.\end{cases}$$

ESERCIZIO 4.17. Stabilire, motivando la risposta, se la seguente funzione è continua nel suo dominio:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{|x-1|} & x\ne1\\ 1 & x=1.\end{cases}$$

Svolgimento : *La funzione proposta non è continua; infatti*

$$\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty \qquad \textit{mentre} \quad f(1) = 1.$$

In particolare, $x = 1$ è punto di discontinuità di seconda specie.

ESERCIZIO 4.18. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{5x^2 + 12x^3 + 3x^{7/2}}{\sinh(2x^2)}$.

ESERCIZIO 4.19. Calcolare

$$\lim_{x\to 3^+} (x-3)^{[1-\cos(x-3)]}.$$

Svolgimento : *È sufficiente operare la sostituzione $t = x - 3$, riscrivere la funzione proposta in forma esponenziale ed utilizzare il fatto che $1 - \cos t \sim t^2/2$. Otteniamo così:*

$$\lim_{x\to 3^+} (x-3)^{1-\cos(x-3)} = \lim_{t\to 0^+} e^{(1-\cos t)\log t} = \lim_{t\to 0^+} e^{\frac{t^2}{2}\log t} = e^0 = 1 ,$$

poiché è noto che $t^2 \log t \to 0$, per $t \to 0^+$.

ESERCIZIO 4.20. Studiare la continuità in $\mathbb{R}$ della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2} - 1}{\log(x^2+1)} & \text{se } x > 0 \\[2ex] \dfrac{2x^2 + x^3}{(x-1)^2} & \text{se } x \le 0 \end{cases} .$$

Svolgimento : *In quanto composizione di funzioni continue, f risulta continua in tutto l'asse reale, salvo il punto $x = 0$, che risulta essere un punto di salto. Infatti, sfruttando le approssimazioni $e^{x^2} - 1 \sim x^2$ e $\log(1 + x^2) \sim x^2$, per $x \to 0$, otteniamo $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{x^2} = 1$, mentre $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 = f(0)$.*

ESERCIZIO 4.21. Calcolare i limiti della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log x + 2x}{e^{3x}} & \text{se } x > 0 \\[2ex] \dfrac{2x^2 + x^3}{(x-1)^2} & \text{se } x \le 0 \end{cases}$$

per $x \to \pm\infty$.

Svolgimento :

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\log x + 2x}{e^{3x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{e^{3x}} = 0 ;$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2 + x^3}{(x-1)^2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3}{x^2} = -\infty .$$

ESERCIZIO 4.22. Calcolare

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin x + 3}{x - \log x} .$$

Svolgimento : *Osserviamo che $x - \log x > 0$, per ogni $x > 0$, e che*

$$\frac{2}{x - \log x} \le \frac{\sin x + 3}{x - \log x} \le \frac{4}{x - \log x} .$$

Poiché $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (x - \log x) = +\infty$, per il "Teorema dei Carabinieri", otteniamo

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin x + 3}{x - \log x} = 0 .$$

ESERCIZIO 4.23. Calcolare

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2 - \cos x}{x + e^x} .$$

ESERCIZIO 4.24. Studiare la continuità in $\mathbb{R}$ della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(x+1)}{x^2 + x} & \text{se } x > 0 , \\[2ex] 3 & \text{se } x = 0 , \\[2ex] \dfrac{x^2 + 1}{(x-3)^2} & \text{se } x < 0 . \end{cases}$$

Svolgimento : *In quanto composizione di funzioni continue, f risulta continua in tutto l'asse reale, salvo il punto $x = 0$, che risulta essere un punto di salto. Infatti, per $x \to 0^+$, si ha*

$$\frac{\log(1+x)}{x^2 + x} \sim \frac{x}{x(x+1)} = \frac{1}{x+1}$$

quindi $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$, mentre $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1/9$.

ESERCIZIO 4.25. Calcolare i limiti della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log x}{x^2 + \sqrt{x}} & \text{se } x > 0 \\[2ex] \dfrac{x^3 + 1}{(x-3)^2} & \text{se } x \le 0 \end{cases}$$

per $x \to \pm\infty$.

ESERCIZIO 4.26. Calcolare

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 \log x \sin(x-3)}{(5x+1)[e^{(x-3)} - 1]} .$$

Svolgimento : *Utilizzando i limiti notevoli, si ottiene*

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 \log x \sin(x-3)}{(5x+1)[e^{(x-3)} - 1]} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2 \log x}{(5x+1)} \cdot \lim_{x\to 3} \frac{\sin(x-3)}{[e^{(x-3)} - 1]}$$
$$= \frac{9 \log 3}{16} \lim_{x\to 3} \frac{\sin(x-3)}{(x-3)} \cdot \frac{(x-3)}{e^{(x-3)} - 1} = \frac{9 \log 3}{16} .$$

ESERCIZIO 4.27. Determinare $\alpha \in \mathbb{R}$ affinchè la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \alpha & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{e^{3x} - 1}{x} + 2 & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

sia continua nel punto $x_0 = 0$.

Svolgimento : *Poiché* $\lim_{x\to 0} f(x) = 5$, *si ottiene che la funzione proposta è continua nel punto considerato se e solo se* $\alpha = 5$. *In tutti gli altri casi, f presenta una discontinuità eliminabile nel punto* $x = 0$.

ESERCIZIO 4.28. Calcolare

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x^2 - 4)\sin(\pi/x)}{(2x + 3)\sin(x - 2)} .$$

ESERCIZIO 4.29. Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -(x + \alpha)^2 & \text{se } x \geq 0; \\ \dfrac{1 - e^{x^3}}{\sin^3 x} & \text{se } -\pi < x < 0; \end{cases}$$

risulta continua in $x = 0$.

Svolgimento : *Osservando che*

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1 - e^{x^3}}{x^3} \cdot \frac{x^3}{\sin^3 x} = -1 \qquad e \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = -\alpha^2 ,$$

si ottiene che la funzione risulta continua in $x = 0$ *se e solo se* $\alpha = \pm 1$. *In tutti gli altri casi, f presenta un punto di salto in* $x = 0$.

ESERCIZIO 4.30. Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2 + e^x}{2x^3 + \log x^2} .$$

Svolgimento : *Osservando che* $e^x \to 1$ *e* $\log x^2 \to -\infty$, *per* $x \to 0$, *si ottiene*

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2 + e^x}{2x^3 + \log x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\log x^2} = 0^- .$$

ESERCIZIO 4.31. Calcolare

$$\lim_{x\to +\infty} 3x^2 \left(1 - \cos\frac{1}{x}\right) .$$

ESERCIZIO 4.32. Determinare $\alpha \in \mathbb{R}$ in modo tale che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3\alpha x^2)}{5x^2} = 1 .$$

Svolgimento : *Ricordando che* $\frac{\sin t}{t} \to 1$, *per* $t \to 0$, *e ponendo* $t = 3\alpha x^2$ *si ottiene*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3\alpha x^2)}{5x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{5x^2} \left(\frac{\sin(3\alpha x^2)}{3\alpha x^2}\right) 3\alpha x^2 = \frac{3}{5}\alpha.$$

Da ciò si ottiene $\alpha = 5/3$.

ESERCIZIO 4.33. Calcolare

$$\lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt[3]{x} - 2)^4}{(x^2 - 4)^{1/3} \log[(x - 1)^4]} .$$

ESERCIZIO 4.34. Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\sin^2 x} - 1}{x^2} & \text{se } x > 0; \\ (x - \alpha)^2 & \text{se } x \leq 0; \end{cases}$$

risulta continua in $x = 0$.

ESERCIZIO 4.35. Calcolare

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^5 - x^3 + e^x - 2x}{e^x - 1 + \frac{1}{4}x - x^2} .$$

ESERCIZIO 4.36. Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 + x\sin x + 1}{x^2} \cdot \log x \; ; \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 + x\sin x + 1}{x^2} \cdot \log x \; .$$

ESERCIZIO 4.37. Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{(x + 1)\log(1 + \frac{1}{x})}{x} \; ; \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{(x + 1)\log(1 + \frac{1}{x})}{x} \; .$$

ESERCIZIO 4.38. Calcolare

$$\lim_{x\to +\infty} x\left[\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}\right] .$$

Svolgimento : *Il limite proposto è un caso di indecisione del tipo* $[\infty \cdot (\infty - \infty)]$. *Risolviamo moltiplicando e dividendo la funzione per la somma delle radici quadrate:*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to +\infty} x\left[\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}\right] &= \lim_{x\to +\infty} \frac{x\left[\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}\right]\left[\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}\right]}{\left[\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}\right]} \\ &= \lim_{x\to +\infty} \frac{x\left[(x^2 + 1) - (x^2 - 1)\right]}{x\left[\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right]} = 1 . \end{aligned}$$

ESERCIZIO 4.39. Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(\arcsin x)}{x} .$$

Svolgimento : *Poiché, per* $x \to 0$, $\arcsin x \sim x$ *e, per* $t \to 0$, $\tan t \sim t$, *ponendo* $t = \arcsin x$, *avremo*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(\arcsin x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1 .$$

ESERCIZIO 4.40. Determinare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha(e^{x^3} - 1) & \text{se } x > 0 , \\ 0 & \text{se } x = 0 , \end{cases}$$

risulta continua in $x = 0$.

Risposte agli esercizi non svolti: **4.3**: il limite proposto vale 0 - **4.4**: il limite proposto vale $+\infty$ - **4.5**: il limite proposto vale 0 - **4.12**: il limite proposto vale 0 - **4.14**: il limite proposto vale 0 - **4.15**: il limite proposto vale 1/2, poiché f è continua e $\sin 2\pi = 0$ - **4.16**: no, poiché in $x = 2$ la funzione presenta un salto - **4.18**: il limite proposto vale 5/2 - **4.23**: il limite proposto vale 0 - **4.25**: i limiti proposti valgono 0 per $x \to +\infty$ e $-\infty$ per $x \to -\infty$ - **4.28**: il limite proposto vale 4/7 - **4.31**: il limite proposto vale 3/2 - **4.33**: il limite proposto vale $\frac{1}{4\sqrt[3]{4}}$ - **4.34**: la funzione proposta risulta continua per $\alpha = \pm 1$ - **4.35**: il limite proposto vale 1 - **4.36**: i limiti proposti valgono rispettivamente $+\infty$ e $-\infty$. - **4.37**: i limiti proposti valgono rispettivamente 0 e $+\infty$. - **4.40**: $\alpha > -3$.

• Richiami sulla derivabilità: data $f : I \to \mathbb{R}$, dove I è un intervallo aperto di numeri reali contenente il punto x_0 ed f è una funzione continua, abbiamo le seguenti utili definizioni:

- f è derivabile in x_0 se e solo se
$$\exists \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad \text{ed è finito ;}$$
- f ha un punto angoloso in x_0 se e solo se esistono i seguenti limiti e
$$\mathbb{R} \ni \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \neq \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R} ;$$
oppure
$$\pm\infty = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \neq \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R} ;$$
oppure il primo è finito ed il secondo no ;
- f ha un punto di cuspide in x_0 se e solo se
$$\exists \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \pm\infty \quad \text{e} \quad \exists \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \mp\infty ;$$
- f ha un punto di flesso a tangente verticale in x_0 se e solo se
$$\exists \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \pm\infty .$$

• **Teorema di derivazione delle funzioni composte.** *Sia* $f : I \to \mathbb{R}$ *derivabile in un punto* x_0 *appartenente all'intervallo reale* I. *Sia* $J \subseteq \mathbb{R}$ *un intervallo tale che* $f(I) \subseteq J$ *e sia* $g : J \to \mathbb{R}$ *derivabile in* $y_0 = f(x_0)$. *Allora, la funzione* $h = g \circ f : I \to \mathbb{R}$, *definita da* $h(x) = g(f(x))$, *per ogni* $x \in I$, *è derivabile nel punto* x_0 *e si ha*

$$h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) .$$

• Derivate delle funzioni elementari

$f(x) = C$ (costante)	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^\alpha$	$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \log a$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \log a}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = \cot x$	$f'(x) = -(1 + \cot^2 x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$f(x) = \sinh x$	$f'(x) = \cosh x$
$f(x) = \cosh x$	$f'(x) = \sinh x$
$f(x) = \tanh x$	$f'(x) = 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$
$f(x) = \arcsin x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arccos x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arctan x$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

• Esercizi sulla derivabilità

ESERCIZIO 4.41. Calcolare la derivata della funzione

$$f(x) = \log(\sin 2x) .$$

Svolgimento : *Utilizzando il teorema di derivazione delle funzioni composte, si ottiene*

$$f'(x) = [\log y]'_{y=\sin 2x} \cdot [\sin t]'_{t=2x} \cdot (2x)' = \frac{2\cos(2x)}{\sin(2x)} .$$

ESERCIZIO 4.42. Calcolare la derivata prima della funzione $\quad f(x) = \dfrac{\log x}{\arctan x}$.

Svolgimento : *Ricordando la legge di derivazione dei rapporti, si ottiene*

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\arctan x - \frac{1}{1+x^2}\log x}{\arctan^2 x} = \frac{\arctan x + x^2 \arctan x - x\log x}{x(1+x^2)\arctan^2 x} .$$

ESERCIZIO 4.43. Calcolare la derivata della funzione

$$f(x) = \log(\sin x^2) .$$

ESERCIZIO 4.44. Calcolare la derivata della funzione

$$f(x) = \sin(\log x^2) .$$

ESERCIZIO 4.45. Studiare la derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x(x-2)} & \text{se } x \leq 0 \text{ oppure } x \geq 2 \\ \sqrt{x} - \frac{1}{(x-2)} & \text{se } 0 < x < 2 \end{cases}$$

in $x = 0$ e $x = 2$.

Svolgimento : *Si ha* $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1/2 \neq 0 = f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$ *e* $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \sqrt{2} - \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = +\infty \neq 0 = f(2) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$. *Pertanto, la funzione proposta non è continua in* $x = 0$, *né in* $x = 2$, *quindi in tali punti essa non è neppure derivabile.*

ESERCIZIO 4.46. Data

$$f(x) = \frac{\log(x^2+1)}{x-2} ,$$

calcolarne la derivata prima.

Svolgimento : *Applicando la formula di derivazione del quoziente, si ottiene*

$$f'(x) = \frac{[\log(x^2+1)]'(x-2) - \log(x^2+1)(x-2)'}{(x-2)^2} = \frac{\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)(x-2) - \log(x^2+1)}{(x-2)^2}$$
$$= \frac{2x(x-2) - (x^2+1)\log(x^2+1)}{(x^2+1)(x-2)^2} .$$

ESERCIZIO 4.47. Data

$$f(x) = \frac{(2x+3)\log x}{e^x} ,$$

calcolarne la derivata prima.

Svolgimento : *La funzione può essere riscritta come un prodotto:* $f(x) = (2x+3)e^{-x}\log x$, *da cui*

$$f'(x) = (2x+3)'e^{-x}\log x + (2x+3)(e^{-x})'\log x + (2x+3)e^{-x}(\log x)'$$
$$= \left[2\log x - (2x+3)\log x + \frac{(2x+3)}{x}\right] e^{-x} = \frac{2x+3 - x(2x+1)\log x}{xe^x} .$$

ESERCIZIO 4.48. Data

$$f(x) = \frac{xe^x}{x+2} ,$$

calcolarne la derivata prima.

ESERCIZIO 4.49. Studiare la derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} - \frac{1}{(x-2)} & \text{se } -2 < x < 2 \\ \sqrt{(x+2)(x-2)} & \text{se } x \leq -2 \text{ oppure } x \geq 2 \end{cases}$$

in $x = -2$ e $x = 2$.

ESERCIZIO 4.50. Data

$$f(x) = \frac{\sin(x^2+1)}{3x} ,$$

calcolarne la derivata prima.

ESERCIZIO 4.51. Stabilire se la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sqrt[3]{x+3-(2x+7)}$ è derivabile nel punto $x_0 = -4$.

Svolgimento : *La funzione* f *è continua in tutto* $\mathbb{R}$. *Calcoliamone la derivata, utilizzando il rapporto incrementale:*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(-4+h) - f(-4)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-\sqrt[3]{h} - 0}{h} = -\infty .$$

La funzione non è dunque derivabile nel punto considerato, che risulta essere un punto di flesso a tangente verticale. Si osservi che, poiché

$$f'(x) = (\sqrt[3]{-x-4})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+4)^2}}$$

ed esiste $\lim_{x\to -4} f'(x)$, *si può ottenere il medesimo risultato calcolando*

$$\lim_{x\to -4} f'(x) = -\lim_{x\to -4} \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+4)^2}} = -\infty .$$

ESERCIZIO 4.52. Stabilire se la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |3x - 1 + (5-2x)|$ è derivabile nel punto $x_0 = -4$.

Svolgimento : *Poiché* f *è continua in tutto* $\mathbb{R}$ *e* $\lim_{h\to 0^\pm} \frac{f(-4+h) - f(-4)}{h} = \lim_{h\to 0^\pm} \frac{|h| - 0}{h} = \pm 1$, *si ottiene che la funzione non è derivabile nel punto considerato, che risulta essere invece un punto angoloso. Allo stesso risultato si può giungere, osservando che*

$$f(x) = |x+4| = \begin{cases} x+4 & se\ x \geq -4 , \\ -x-4 & se\ x < -4 , \end{cases} \quad e \quad f'(x) = \begin{cases} 1 & se\ x > -4 , \\ -1 & se\ x < -4 , \end{cases}$$

da cui, poiché esistono $\lim_{x\to -4^\pm} f'(x)$, *si ottiene*

$$f'_+(-4) := \lim_{x\to -4^+} f'(x) = 1 \neq -1 = \lim_{x\to -4^-} f'(x) =: f'_-(-4) .$$

ESERCIZIO 4.53. Calcolare la derivata della funzione

$$f(x) = \arctan\left[\log\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\right] .$$

ESERCIZIO 4.54. Calcolare la derivata della funzione

$$f(x) = \sqrt{\arctan\left(\sqrt{x^4+1}\right)}\ .$$

ESERCIZIO 4.55. Calcolare la derivata della funzione

$$f(x) = (\sin x)^{\sin x} - \sin(\sin x)\ .$$

Svolgimento : *Riscriviamo* $(\sin x)^{\sin x} = e^{\sin x \log(\sin x)}$. *Pertanto*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[e^{\sin x \log(\sin x)}\right]' - \cos(\sin x)\cos x \\ &= e^{\sin x \log(\sin x)}\left[\sin x \log(\sin x)\right]' - \cos(\sin x)\cos x \\ &= (\sin x)^{\sin x}\left[\cos x \log(\sin x) + \frac{\sin x}{\sin x}\cos x\right] - \cos(\sin x)\cos x \\ &= \left\{(\sin x)^{\sin x}\left[\log(\sin x)+1\right] - \cos(\sin x)\right\}\cos x\ . \end{aligned}$$

ESERCIZIO 4.56. Calcolare la derivata della funzione

$$f(x) = \tan\left[\log(\sqrt{1-2x})\right]\ .$$

ESERCIZIO 4.57. Calcolare la derivata della funzione

$$f(x) = (\cos x)^{\tan x} - \cos(\tan x)\ .$$

ESERCIZIO 4.58. Calcolare la derivata della funzione

$$f(x) = \cos\left[\sqrt{\tan x}\right]\ .$$

ESERCIZIO 4.59. Determinare gli insiemi di continuità e derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \log(1+x) & \text{se } x \ge 0; \\ |1+x|-1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Svolgimento : *Poiché le funzioni* $x \mapsto |1+x|$ *e* $x \mapsto \log(1+x)$ *sono continue in* $\mathbb{R}$, *dobbiamo verificare la continuità di* f *solo in* $x = 0$. *Si ha*

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 = f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x)\ .$$

La funzione è continua in $\mathbb{R}$. *Per quanto riguarda la derivata, riscriviamo, dapprima, la funzione nella forma*

$$f(x) = \begin{cases} \log(1+x) & se\ x \ge 0\ , \\ x & se\ -1 \le x < 0\ , \\ -x-2 & se\ x < -1\ . \end{cases}$$

Da ciò segue

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & se\ x > 0\ , \\ 1 & se\ -1 < x < 0\ , \\ -1 & se\ x < -1\ . \end{cases}$$

Si nota subito che la funzione non è derivabile in $x = -1$, *dove ha un punto angoloso. Al contrario,*

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1 = \lim_{x\to 0^-} f'(x)\ ,$$

quindi la funzione è derivabile in $x = 0$. *Pertanto, l'insieme di derivabilità è* $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

ESERCIZIO 4.60. Stabilire per quali valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la seguente funzione è continua e derivabile in $(0,+\infty)$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x-1}-1}{x\sin(x^2-1)} & \text{se } 0 < x < 1; \\ \alpha x + \beta & \text{se } 1 \le x \le 2; \\ (x-2)^2\log^2(x-2) & \text{se } x > 2\ . \end{cases}$$

Svolgimento : *Ovviamente, la funzione proposta è continua negli intervalli* $(0,1)$, $(1,2)$ *e* $(2,+\infty)$. *Studiamo la continuità di* $f(x)$ *in* $x_1 = 1$*: poiché per* $t \to 0$ *si ha* $\sin t \sim t$ *ed* $e^t \sim 1+t$, *avremo che, per* $t = x-1$ *e* $x \to 1^-$,

$$f(x) \sim \frac{1+(x-1)-1}{x(x^2-1)} = \frac{1}{x(x+1)} \to \frac{1}{2},$$

da cui $\alpha + \beta = \frac{1}{2}$.

Studiamo ora la continuità in $x_2 = 2$*: poiché* $\lim_{t\to 0^+} t^\alpha|\log t|^\beta = 0$ *per ogni* $\alpha > 0$ *e* $\beta \in \mathbb{R}$, *per* $t = (x-2)$, *avremo*

$$\lim_{x\to 2^+}(x-2)^2\log^2(x-2) = 0,$$

da cui $2\alpha + \beta = 0$. *Otteniamo così le soluzioni* $\alpha = -\frac{1}{2}$; $\beta = 1$, *che garantiscono la continuità di* f *in* $(0,+\infty)$.

Per la verifica della derivabilità, si noti che il calcolo di $f'(x)$ *in* $(0,1)$ *è decisamente più complicato che in* $(2,+\infty)$. *Pertanto verifichiamo innanzitutto la derivabilità di* f *in* $x_2 = 2$.

Poiché

$$f'(x) = 2(x-2)\log^2(x-2) + 2(x-2)\log(x-2) \qquad \forall x > 2,$$

ripetendo i precedenti calcoli, si ottiene

$$\lim_{x\to 2^+} f'(x) = 0 \ne \lim_{x\to 2^-} f'(x) = -\frac{1}{2}.$$

Pertanto, per $\alpha = -\frac{1}{2}$; $\beta = 1$, *la funzione è continua in* $(0,+\infty)$, *ma non è ivi derivabile. Per tutti gli altri valori di* α *e* β, *la funzione non è continua in* $(0,+\infty)$ *(e quindi neppure derivabile).*

ESERCIZIO 4.61. Data la funzione $f(x) = \arctan(x^2+1)$, calcolarne la derivata prima e la derivata seconda.

ESERCIZIO 4.62. Calcolare la derivata terza della funzione $f(x) = \log(1+e^{3x})$.

ESERCIZIO 4.63. Calcolare la derivata prima e la derivata seconda della funzione

$$f(x) = \tan\left[\arccos\sqrt{1-\sin^2 x}\right]\ ,$$

quando $x \in (0,\pi/2)$.

Svolgimento : *In* $(0,\pi/2)$, $\sqrt{1-\sin^2 x} = \cos x$ *e* $\arccos(cosx) = x$. *Pertanto, la funzione si riscrive nella forma* $f(x) = \tan x$, *da cui segue immediatamente*

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad e \qquad f''(x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}\,.$$

ESERCIZIO 4.64. Determinare l'insieme in cui la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 1 & \text{se } x \geq 0\,, \\ 1 - 3\arctan x & \text{se } x < 0\,, \end{cases}$$

è continua e derivabile.

ESERCIZIO 4.65. Stabilire se è possibile applicare il Teorema di Lagrange alla funzione

$$f(x) = \arctan(1+5x) + (3-x)^{1/5}$$

nell'intervallo $[1,4]$.

Svolgimento : *La funzione è definita e continua in* $\mathbb{R}$; *inoltre*

$$f'(x) = \frac{5}{1+(5x+1)^2} - \frac{1}{5(3-x)^{4/5}}\,,$$

da cui segue che la derivata non è definita in $x = 3$. *Pertanto, non possiamo applicare il Teorema di Lagrange, che richiede che la funzione sia dovunque derivabile in* $(1,4)$.

Risposte agli esercizi non svolti: **4.43**: $f'(x) = \frac{2x\cos(x^2)}{\sin(x^2)} = \frac{2x}{\tan(x^2)}$ - **4.44**: $f'(x) = \frac{2\cos(\log x^2)}{x}$ - **4.48**: $f'(x) = \left(\frac{e^x(x+1)(x+2)-xe^x}{(x+2)^2}\right) = e^x\left[\frac{x^2+2x+2}{(x+2)^2}\right]$ - **4.49**: la funzione non è derivabile in $x = \pm 2$, poiché in tali punti essa non è neppure continua - **4.50**: $f'(x) = \left(\frac{2x^2\cos(x^2+1)-\sin(x^2+1)}{3x^2}\right)$ - **4.53**: $f'(x) = \frac{1}{1+\log^2(1+x^2)}\left(\frac{-2x}{1+x^2}\right)$ - **4.54**: $f'(x) = \frac{x^3}{x^4+2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\arctan\left(\sqrt{x^4+1}\right)} \cdot \sqrt{x^4+1}}$ - **4.56**: $f'(x) = \frac{1}{(2x-1)\cos^2\left[\frac{1}{2}\log(1-2x)\right]}$ - **4.57**: $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}\{[\log(\cos x) - \sin^2 x](\cos x)^{\tan x} + \sin(\tan x)\}$ - **4.58**: $f'(x) = -\frac{\sin\left(\sqrt{\tan x}\right)}{2\cos^2 x\sqrt{\tan x}}$ - **4.61**: $f'(x) = \frac{2x}{1+(x^2+1)^2} = \frac{2x}{x^4+2x^2+2}$; $f''(x) = \frac{2(-3x^4-2x^2+2)}{(x^4+2x^2+2)^2}$ - **4.62**: $f'''(x) = \frac{27e^{3x}(1-e^{3x})}{(1+e^{3x})^3}$ - **4.64**: $f \in C^1(\mathbb{R})$.

4.2. Studi di funzione

• Asintoti.

- Asintoto verticale: sia $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, dove I è un intervallo di numeri reali contenente il punto x_0. La retta verticale $x = x_0$ è *asintoto verticale* per $x \to x_0$ (rispettivamente, per $x \to x_0^-$ oppure per $x \to x_0^+$) se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \qquad (\text{rispett.} \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty\ )\,.$$

In tal caso, il punto x_0 è detto *punto di infinito*.

- Asintoto orizzontale: sia $f : (a,+\infty) \to \mathbb{R}$ (rispettivamente $f : (-\infty,b) \to \mathbb{R}$). La retta orizzontale $y = y_0$ è detta *asintoto orizzontale* per $x \to +\infty$ (rispettivamente, per $x \to -\infty$) se

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = y_0 \qquad (\text{rispett.} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = y_0\ )\,.$$

- Asintoto obliquo: sia $f : (a,+\infty) \to \mathbb{R}$ (rispettivamente $f : (-\infty,b) \to \mathbb{R}$). La retta obliqua $y = mx + q$ è detta *asintoto obliquo* per $x \to +\infty$ (rispettivamente, per $x \to -\infty$) se

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty \qquad e \qquad \begin{cases} \exists \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ \exists \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = q \in \mathbb{R}\,; \end{cases}$$

$$(\text{rispettivamente} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty \qquad e \qquad \begin{cases} \exists \displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ \exists \displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) - mx = q \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

• Monotonia ed estremanti: sia data $f : I \to \mathbb{R}$, dove I è un intervallo di numeri reali contenente nel suo interno il punto x_0, ed f è una funzione continua e derivabile in I.

- f è *monotona non decrescente* in I se e solo se $f' \geq 0$ in I;
- f è *monotona non crescente* in I se e solo se $f' \leq 0$ in I;
- se $f' > 0$ in I, allora f è *monotona crescente* in I;
- se $f' < 0$ in I, allora f è *monotona decrescente* in I;
- se x_0 è un *estremante locale* (cioè se x_0 è un punto di minimo o massimo locale) per f in I, allora $f'(x_0) = 0$;
- se $f'(x_0) = 0$, $f'(x) \leq 0$ (rispettivamente $f'(x) \geq 0$) in un intorno sinistro di x_0 e $f'(x) \geq 0$ (rispettivamente $f'(x) \leq 0$) in un intorno destro di x_0, allora x_0 è un *punto di minimo locale* (rispettivamente, *punto di massimo locale*) per f in I;
- se f è 2 volte derivabile in x_0, $f'(x_0) = 0$ ed $f''(x_0) > 0$ (rispettivamente, $f''(x) < 0$), allora x_0 è un *punto di minimo locale* (rispettivamente, *punto di massimo locale*), per f in I;
- se $f'(x_0) = 0$ e la derivata prima non cambia segno in un intorno di x_0, allora x_0 è *punto di flesso a tangente orizzontale*.

L'insieme dei punti in cui la derivata prima si annulla, sono detti *punti critici o stazionari* per la funzione f. Da quanto detto, tutti gli estremanti interni al dominio di definizione di una funzione derivabile sono punti critici. Ovviamente, è ben noto che non vale il viceversa, come si ricava studiando la funzione $f(x) = x^3$.

Ricordiamo anche il Teorema di Weierstrass[1], che garantisce l'esistenza di estremanti assoluti per le funzioni continue definite su intervalli chiusi e limitati.

[1] **Teorema di Weierstrass.** *Sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua sull'intervallo chiuso e limitato* $[a,b]$. *Allora, esistono almeno un punto di massimo assoluto ed un punto di minimo assoluto per* f *in* $[a,b]$. *In particolare,* f *è limitata nell'insieme* $[a,b]$.

• Concavità e convessità: sia data $f : I \to \mathbb{R}$, dove I è un intervallo di numeri reali contenente nel suo interno il punto x_0, ed f è una funzione continua e 2 volte derivabile in I.

- f è *convessa* (o concava verso l'alto) in I se e solo se $f'' \geq 0$ in I;
- f è *concava* (o concava verso il basso) in I se e solo se $f'' \leq 0$ in I;
- se $f'' > 0$ in I, allora f è *strettamente convessa* in I;
- se $f'' < 0$ in I, allora f è *strettamente concava* in I;
- se $f''(x_0) = 0$, $f''(x) < 0$ (rispettivamente $f''(x) > 0$) in un intorno sinistro di x_0 e $f''(x) > 0$ (rispettivamente $f''(x) < 0$) in un intorno destro di x_0, allora x_0 è un *punto di flesso* per f in I.

• Esercizi

ESERCIZIO 4.66. Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = (\cos x)^{(\tan x)} - \cos(\tan x) .$$

Svolgimento : *Il primo addendo è definito quando la base è strettamente positiva e quando* $\tan x$ *è definita, mentre il secondo è definito lì dove il suo argomento è definito. Pertanto l'insieme di definizione si ottiene dal sistema*

$$\begin{cases} \cos x > 0 \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

da cui $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$; $k \in \mathbb{Z}$.

ESERCIZIO 4.67. Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = (\sin x)^{(\sin x)} - \sin(\sin x) .$$

ESERCIZIO 4.68. Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \sqrt{\arctan\left(\sqrt{x^4+1}\right)} .$$

Svolgimento : *Poiché* $x^4 + 1 > 0$, *per ogni* $x \in \mathbb{R}$, *la radice quadrata più interna è sempre definita. Conseguentemente, è sempre definita e positiva anche* $\arctan\left(\sqrt{x^4+1}\right)$, *così come è sempre definita la radice quadrata più esterna, in quanto il suo argomento è positivo su tutto* $\mathbb{R}$. *Pertanto* $I_{def} = \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 4.69. Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \arctan\left(\log\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\right) .$$

ESERCIZIO 4.70. Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \tan\left[\log(\sqrt{1-2x})\right] .$$

Svolgimento : *La radice quadrata è definita (e non negativa) quando il suo argomento è non negativo. La presenza del logaritmo, però, impone che la radice sia strettamente positiva. Infine, occorre imporre che la tangente sia definita, escludendo valori del suo argomento pari a* $\frac{\pi}{2} + k\pi$. *Abbiamo pertanto il sistema*

$$\begin{cases} 1-2x > 0 \\ \log(\sqrt{1-2x}) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ \sqrt{1-2x} \neq e^{\pi/2+k\pi} \quad ; \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ 1-2x \neq e^{(2k+1)\pi} \quad ; \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

da cui, infine, $x \in (-\infty, 1/2) \setminus \left\{x = \frac{1}{2}\left[1 - e^{(2k+1)\pi}\right] \ , \ \forall k \in \mathbb{Z}\right\}$.

ESERCIZIO 4.71. Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \sqrt{|x^2-9|} .$$

ESERCIZIO 4.72. Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \sqrt{2x^2 - |x+1|} .$$

Svolgimento : *La radice quadrata è definita se*

$$2x^2 - |x+1| \geq 0 \iff |x+1| \leq 2x^2$$

$$\text{da cui} \quad -2x^2 \leq x+1 \leq 2x^2 \iff \begin{cases} 2x^2 + x + 1 \geq 0 \\ 2x^2 - x - 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \leq -1/2 \ ; \ x \geq 1 . \end{cases}$$

Da ciò si ottiene che il campo di esistenza è

$$C.E. = (-\infty, -1/2] \cup [1, +\infty) .$$

ESERCIZIO 4.73. Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \cos(\sqrt{\tan x}) .$$

ESERCIZIO 4.74. Determinare i punti di massimo e minimo locale della funzione

$$f(x) = \arctan(-x(x-1)) .$$

Svolgimento : *Poiché* $f \in C^1(\mathbb{R})$ *e*

$$f'(x) = \frac{1-2x}{1+x^2(x-1)^2} \ \begin{smallmatrix} \leq \\ > \end{smallmatrix} \ 0 \iff x \ \begin{smallmatrix} \geq \\ < \end{smallmatrix} \ \frac{1}{2},$$

l'unico punto di massimo locale è $x = \frac{1}{2}$ *e non esistono punti di minimo locale.*

ESERCIZIO 4.75. Studiare la concavità e la convessità di $f(x) = \log(1+x^2)$.

Svolgimento : *Poiché*

$$f'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)}\ ; \qquad f''(x) = 2\frac{(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \begin{cases} >0 & per\ -1<x<1\ ; \\ <0 & per\ x<-1\ e\ x>1\ ; \\ =0 & per\ x=\pm 1\ ; \end{cases}$$

la funzione f risulta convessa per $-1<x<1$ e concava per $x<-1$ e $x>1$; $x=\pm 1$ sono punti di flesso.

ESERCIZIO 4.76. Determinare limiti alla frontiera ed eventuali asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{x^3+2}{e^x+x^2}\ .$$

Svolgimento : *Si ottiene:* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x} = 0$, *pertanto $y=0$ è asintoto orizzontale a $+\infty$. D'altra parte,*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2} = -\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{xe^x+x^3} = 1$$
$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x] = \lim_{x\to-\infty}\frac{2-xe^x}{x^2} = 0$$

dove si è tenuto conto del fatto che $e^x\to 0$ e $xe^x\to 0$ per $x\to-\infty$. Pertanto, $y=x$ è asintoto obliquo a $-\infty$.

ESERCIZIO 4.77. Determinare i punti di massimo e minimo locale della funzione

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2+1}}\ .$$

ESERCIZIO 4.78. Studiare concavità e convessità della funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = 2xe^{(x^2+4)}\ .$$

Svolgimento : *Poiché*

$$f'(x) = 2(1+2x^2)e^{(x^2+4)}\ ; \quad f''(x) = 4x(2x^2+3)e^{(x^2+4)}$$

$$e \qquad f''(x)\begin{cases} >0 & per\ x>0\ ; \\ <0 & per\ x<0\ ; \\ =0 & per\ x=0\ ; \end{cases}$$

si ottiene che f è convessa per $x>0$, concava per $x<0$, e $x=0$ è punto di flesso.

ESERCIZIO 4.79. Studiare monotonia ed estremanti della funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da $f(x) = (3-x)e^{(x^2+1)}$.

Svolgimento : *Poiché*

$$f'(x) = [(3-x)2x-1]e^{(x^2+1)} = (-2x^2+6x-1)e^{(x^2+1)}\begin{cases} >0 & per\ \frac{3-\sqrt7}{2}<x<\frac{3+\sqrt7}{2}\ ; \\ <0 & per\ x<\frac{3-\sqrt7}{2}\ e\ x>\frac{3+\sqrt7}{2}\ ; \\ =0 & per\ x=\frac{3\pm\sqrt7}{2}\ ; \end{cases}$$

si ottiene che f decresce per $x<\frac{3-\sqrt7}{2}$ e $x>\frac{3+\sqrt7}{2}$, cresce per $\frac{3-\sqrt7}{2}<x<\frac{3+\sqrt7}{2}$, $x=\frac{3+\sqrt7}{2}$ è punto di massimo relativo e $x=\frac{3-\sqrt7}{2}$ è punto di minimo relativo.

ESERCIZIO 4.80. Determinare limiti alla frontiera ed eventuali asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{xe^x+2}{e^x+1}\ .$$

Svolgimento : *Si ottiene:*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{e^x} = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{xe^x} = 1$$
$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x] = \lim_{x\to+\infty}\frac{2-x}{e^x} = 0$$

pertanto $y=x$ è asintoto obliquo a $+\infty$. D'altra parte, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$, pertanto $y=2$ è asintoto orizzontale a $-\infty$.

ESERCIZIO 4.81. Determinare i punti di massimo e minimo locale della funzione

$$f(x) = \arctan\left(-\frac{1}{x^2+1}\right)\ .$$

ESERCIZIO 4.82. Studiare concavità e convessità della funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da $f(x) = (3x^2+1)e^{(x+2)}$.

Svolgimento : *Poiché*

$$f'(x) = (3x^2+6x+1)e^{(x+2)}\ ; \quad f''(x) = (3x^2+12x+7)e^{(x+2)}$$

$$e \qquad f''(x)\begin{cases} >0 & per\ x<\frac{-6-\sqrt{15}}{3}\ e\ x>\frac{-6+\sqrt{15}}{3}\ ; \\ <0 & per\ \frac{-6-\sqrt{15}}{3}<x<\frac{-6+\sqrt{15}}{3}\ ; \\ =0 & per\ x=\frac{-6\pm\sqrt{15}}{3}\ ; \end{cases}$$

si ottiene che f è convessa per $x<\frac{-6-\sqrt{15}}{3}$ e $x>\frac{-6+\sqrt{15}}{3}$, concava per $\frac{-6-\sqrt{15}}{3}<x<\frac{-6+\sqrt{15}}{3}$, e $x=\frac{-6\pm\sqrt{15}}{3}$ sono punti di flesso.

ESERCIZIO 4.83. Stabilire se la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da $f(x) = e^{2x}(\frac{5}{2}-x)$ ha un punto di massimo assoluto in $x_0 = 2$.

Svolgimento : *Poiché $f'(x) = e^{2x}(4-2x)$, si ottiene che $f'>0$, cioè f è crescente, per $x<2$, $f'<0$, cioè f è decrescente, per $x>2$. Pertanto $x_0=2$ è punto di massimo assoluto per f in $\mathbb{R}$.*

ESERCIZIO 4.84. Determinare gli asintoti della funzione $f(x) = \frac{3x+5x^2}{x-4}$.

Svolgimento : *La funzione non è definita in $x = 4$. Poiché $\lim_{x\to 4^\pm} f(x) = \pm\infty$, $x = 4$ è asintoto verticale; inoltre, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x^2}{x} = \pm\infty$, quindi non ci sono asintoti orizzontali. Infine, $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x+3}{x-4} = 5$ e $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - 5x] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{23x}{x} = 23$, per cui $y = 5x + 23$ è asintoto obliquo a $\pm\infty$.*

Osserviamo che avremmo ottenuto lo stesso risultato, effettuando la divisione fra numeratore e denominatore e riscrivendo la funzione nella forma

$$f(x) = 5x + 23 + \frac{92}{x-4},$$

da cui, per $x \to \pm\infty$, $y = 5x + 23$ è l'equazione dell'asintoto, in quanto $\frac{92}{x-4} \to 0$.

ESERCIZIO 4.85. Studiare monotonia ed estremanti della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = (x^2 - 2)e^{(x+3)}$.

Svolgimento : *Poiché $f'(x) = (x^2 + 2x - 2)e^{(x+3)}$, si ottiene che f cresce per $x < -1 - \sqrt{3}$ e $x > -1 + \sqrt{3}$, decresce per $-1 - \sqrt{3} < x < -1 + \sqrt{3}$, $x = -1 - \sqrt{3}$ è punto di massimo relativo e $x = -1 + \sqrt{3}$ è punto di minimo relativo.*

ESERCIZIO 4.86. Data la funzione
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x^3}{3x^2} & \text{per } x < 0\,; \\ -4(x-2)^2 + x^2 & \text{per } x \geq 0\,; \end{cases}$$
stabilire se $x = 0$ è punto di minimo assoluto per f nell'intervallo $[-5, 2]$.

Svolgimento: *Per $x < 0$, riscriviamo $f(x) = 1/3 - 2x/3$. Osserviamo che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = -16$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1/3$; la funzione ha, quindi, una discontinuità di salto nel punto $x = 0$. Inoltre, per $-5 \leq x < 0$, $f'(x) = -2/3 < 0$, cioè f è decrescente, mentre, per $0 < x \leq 2$, $f'(x) = -6x + 16$, quantità che è positiva per ogni $x < 8/3$, quindi, in particolare, per $0 < x \leq 2$, dove f è crescente. Da ciò segue subito che $x = 0$ è punto di minimo assoluto per f in $[-5, 2]$.*

Osserviamo che se la funzione proposta fosse stata

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3}x & \text{per } x \leq 0\,, \\ -4(x-2)^2 + x^2 & \text{per } x > 0\,, \end{cases}$$

il punto $x = 0$ sarebbe rimasto un punto di salto, in un intorno del quale la funzione avrebbe mantenuto la stessa monotonia del caso precedente; ma, per quanto riguarda i limiti in 0, avremmo ottenuto

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -16 \qquad e \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 1/3$$

e, quindi, $x = 0$ non sarebbe stato più un punto di minimo, anzi la funzione non avrebbe avuto nessun punto di minimo.

ESERCIZIO 4.87. Determinare i punti di massimo e minimo relativi e assoluti della funzione
$$f(x) = |x^3 - 3x^2 + 3x|$$
nell'intervallo $[-2, 3]$.

Svolgimento : *Essendo $f(x) \geq 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, e $f(0) = 0$, otteniamo subito che $x = 0$ è punto di minimo relativo e assoluto. Poiché $x^2 - 3x + 3 > 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha che $x^3 - 3x^2 + 3x = x(x^2 - 3x + 3) \geq 0$ se e solo se $x \geq 0$. Pertanto, possiamo riscrivere*
$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 3x & se\ x \geq 0\,, \\ -x^3 + 3x^2 - 3x & se\ x < 0\,. \end{cases}$$
Da ciò segue
$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6x + 3 & se\ x > 0\,, \\ -3x^2 + 6x - 3 & se\ x < 0\,. \end{cases}$$
Osservando che $3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x-1)^2 \geq 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, abbiamo che la funzione decresce in $[-2, 0)$ e cresce in $(0, 3]$. Quindi, $x = -2$ e $x = 3$ sono punti di massimo relativo. In particolare, confrontando i valori assunti da f in tali punti (cioè $f(-2) = 26$ e $f(3) = 9$), si ricava che il punto di massimo assoluto è $x = -2$.

Si osservi che in nessuno degli estremanti $x = -2$ e $x = 3$, che sono estremi dell'intervallo, la derivata si annulla. Inoltre, poiché
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 3 \neq -3 = \lim_{x\to 0^-} f'(x)\,,$$
la funzione ha in $x = 0$ un punto angoloso. L'unico punto stazionario risulta essere $x = 1$, che, per quanto visto, è un punto di flesso a tangente orizzontale.

ESERCIZIO 4.88. Determinare massimo e minimo assoluti della funzione
$$f(x) = |x^2 - 4x + 3|$$
nell'intervallo $[0, 5]$. Nell'intervallo $(0, 5)$, la funzione ammette ancora massimo e minimo assoluto?

Svolgimento : *Dal Teorema di Weierstrass, otteniamo che, nell'intervallo chiuso e limitato $[0, 5]$, la funzione continua f ha sicuramente massimo e minimo assoluti. Per la loro determinazione, procediamo in modo geometrico. Tracciamo il grafico di $g(x) = x^2 - 4x + 3$ e poi quello di $f(x) = |g(x)|$, che si ottiene "ribaltando", rispetto all'asse x, le parti del grafico di g a ordinata negativa.*

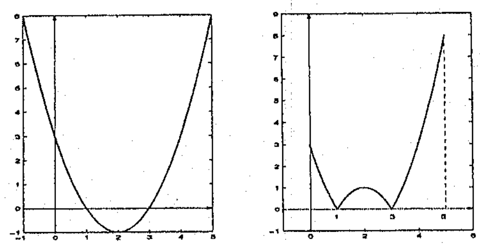


Figura 4.88

Grafico di $g(x) = x^2 - 4x + 3$ e di $f(x) = |g(x)|$

Lo studente verifichi analiticamente che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & se\ x \leq 1\ , \\ -x^2 + 4x - 3 & se\ 1 < x < 3\ , \\ x^2 - 4x + 3 & se\ x \geq 3\ , \end{cases}$$

decresce in $[0,1)$ *e* $(2,3)$*; cresce in* $(1,2)$ *e* $(3,5]$*; ha due punti di minimo assoluto, in* $x = 1$ *e* $x = 3$*, che risultano essere punti angolosi; ha due punti di massimo relativo, in* $x = 0$ *e* $x = 2$*, ed un punto di massimo assoluto in* $x = 5$.

Se consideriamo la funzione nell'intervallo $(0,5)$*, il Teorema di Weierstrass non è più applicabile. Infatti, benché si abbiano ancora i due punti di minimo assoluto, la funzione non ha più massimo assoluto.*

ESERCIZIO 4.89. Determinare massimi e minimi relativi assoluti della funzione

$$f(x) = (2-x)e^x$$

nell'intervallo $[-1,2]$.

ESERCIZIO 4.90. Determinare gli eventuali asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{x^2+2x}{x+1}\ .$$

ESERCIZIO 4.91. Determinare gli asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 5x + 1}{x^2 - 1}\ .$$

Svolgimento : *L'insieme di definizione della funzione proposta è* $\{x \in \mathbb{R}\ :\ x \neq \pm 1\}$*. Inoltre*

$$\lim_{x\to 1\pm} f(x) = \pm\infty \quad \Longrightarrow \quad x = 1 \quad \text{è asintoto verticale,}$$
$$\lim_{x\to -1^\pm} f(x) = \mp\infty \quad \Longrightarrow \quad x = -1 \quad \text{è asintoto verticale.}$$

Osserviamo, anche, che $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$*. Effettuando la divisione tra numeratore e denominatore, possiamo riscrivere la funzione nella forma*

$$f(x) = x - 3 + \frac{6x-2}{x^2-1}\ .$$

Poiché, per $x \to \pm\infty$, $\frac{6x-2}{x^2-1} \to 0$*, si ottiene subito che l'equazione dell'asintoto obliquo, sia a* $+\infty$ *che a* $-\infty$*, è* $y = x - 3$*. Lo studente provi a riottenere lo stesso risultato tramite le usuali formule per la determinazione degli asintoti obliqui.*

ESERCIZIO 4.92. Determinare il campo di esistenza e gli asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{\log x}{x} - x\ .$$

ESERCIZIO 4.93. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 1}$$

e tracciarne il grafico.

Svolgimento : $C.E. = \{x \in \mathbb{R} | x \neq \pm 1\}$.

Conviene determinare innanzitutto i limiti della funzione nei punti non appartenenti all'insieme di definizione. Osserviamo che

$$f(x) = \frac{(x-1)(x^2+x-2)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+x-2}{x+1} = \frac{(x-1)(x+2)}{x+1} = x - \frac{2}{x+1} \quad \forall x \neq \pm 1.$$

Pertanto

$$\lim_{x\to -1^+}\left(x - \frac{2}{x+1}\right) = -\infty \neq \lim_{x\to -1^-}\left(x - \frac{2}{x+1}\right) = +\infty;$$
$$\lim_{x\to 1} f(x) = 0.$$

Quindi, $x = -1$ *è punto di infinito, ovvero si ha un asintoto verticale di equazione* $x = -1$*. La funzione è, invece, prolungabile per continuità in* $x = 1$*, mediante la funzione*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)(x+2)}{x+1} & \forall x \neq \pm 1 \\ 0 & se\ x = 1\ . \end{cases}$$

Segno della funzione:

$$f(x) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{(x-1)(x+2)}{x+1} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in (-2,-1) \cup (1,+\infty)\ .$$

La funzione è negativa in $(-\infty,-2) \cup (-1,1)$*. Il numeratore si annulla in* $x = -2$ *e in* $x = 1$*, ma quest'ultimo punto non è compreso nell'insieme di definizione di* f*. Pertanto, la funzione si annulla solo in* $x = -2$.

Poiché $f(x) = x - \frac{2}{x+1}$ *e, per* $x \to \pm\infty$, $\frac{2}{x+1} \to 0$ *si ricava che essa ha asintoto obliquo,sia destro che sinistro, di equazione* $y = x$*. Il lettore riottenga questo risultato, sfruttando le consuete formule per la determinazione degli asintoti obliqui.*

Monotonia:

$$f'(x) = \frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2} > 0 \qquad \forall x \in C.E.$$

La funzione cresce in $(-\infty,-1)$*, in* $(-1,1)$ *e in* $(1,+\infty)$*. Non ci sono minimi o massimi relativi o assoluti. La funzione è illimitata.*

Concavità e convessità :

$$f''(x) = -\frac{4}{(x+1)^3} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x < -1.$$

La funzione è convessa nell'intervallo $(-\infty,-1)$ *e concava negli intervalli* $(-1,1)$*;* $(1,+\infty)$*. Il punto in cui cambia la concavità non è un punto di flesso, in quanto in esso la funzione non è definita. Il grafico è riportato nel Capitolo 11.*

ESERCIZIO 4.94. Studiare la funzione

$$f(x) = -\sqrt{4e^{2x} - 4}$$

e tracciarne il grafico.

Svolgimento : *C.E.* $= \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$. *La funzione è non positiva nel suo insieme di definizione e si annulla solo in* $x = 0$. *Per* $x \to +\infty$, $f(x) = -2\sqrt{e^{2x} - 1} \sim -2e^x$, *pertanto* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. *Avendo andamento asintotico esponenziale, la funzione non ha asintoto obliquo.*

Monotonia:

$$f'(x) = \frac{-2e^{2x}}{\sqrt{e^{2x} - 1}} < 0 \quad \forall x > 0$$

La funzione è strettamente decrescente nel suo insieme di definizione. Non ci sono punti stazionari. Si osservi che $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -\infty$. *Pertanto il grafico della funzione ha pendenza verticale nell'origine.*

Convessità e concavità:

$$f''(x) = \frac{-2e^{2x}(e^{2x} - 2)}{\sqrt{(e^{2x} - 1)^3}} > 0 \quad \iff \quad e^{2x} - 2 < 0 \quad \iff \quad x < \frac{\log 2}{2} .$$

La funzione è convessa nell'intervallo $[0, \log 2/2)$ *e concava nell'intervallo* $(\log 2/2, +\infty)$. *Il punto* $x = \log 2/2$ *è punto di flesso. Il grafico è riportato nel Capitolo 11.*

ESERCIZIO 4.95. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & \text{se } x \geq 0 \\ 1 + e^{1/x} & \text{se } x < 0 , \end{cases}$$

determinare l'insieme di definizione; l'insieme di continuità; l'insieme di derivabilità; gli intervalli di crescenza e decrescenza, gli intervalli di convessità e concavità, eventuali asintoti. Infine, disegnarne il grafico.

Svolgimento : *Poiché la funzione* $x \mapsto e^{1/x}$ *non è definita solo in* $x = 0$, *e tale punto non appartiene a* $(-\infty, 0)$, *dove* $f(x) = 1 + e^{1/x}$, *l'insieme di definizione di* f *è tutto l'asse reale.*

Continuità: essendo la funzione ovviamente continua per ogni $x \neq 0$, *dobbiamo solo studiare il punto* $x = 0$.

$$f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{-x^2} = 1 = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(1 + e^{1/x}\right) .$$

La funzione è continua su tutto l'asse reale.

Derivabilità:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x\, e^{-x^2} & \text{se } x > 0 \\ -\frac{1}{x^2}\, e^{1/x} & \text{se } x < 0 . \end{cases}$$

Ricordando che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{|x|^\alpha} e^{1/x} = 0$ *(è sufficiente operare la sostituzione* $t = \frac{1}{x}$ *e calcolare il limite, per* $t \to -\infty$, *della funzione* $g(t) = |t|^\alpha e^t$*), segue che*

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = 0.$$

La funzione è pertanto derivabile su tutto l'asse reale e $f'(0) = 0$. *In* $x = 0$ *si ha un punto stazionario. Poiché* $f'(x) < 0$, *per ogni* $x \neq 0$, *la funzione è sempre decrescente e quindi* $x = 0$ *è punto di flesso a tangente orizzontale.*

Convessità e concavità:

$$f''(x) = \begin{cases} (4x^2 - 2)e^{-x^2} & se\ x > 0 \\ \frac{2x+1}{x^4}\, e^{1/x} & se\ x < 0 . \end{cases}$$

Per $x > 0$,

$$f''(x) > 0 \quad \iff \quad 4x^2 - 2 > 0 \quad \iff \quad x > \frac{\sqrt{2}}{2} .$$

Per $x < 0$,

$$f''(x) > 0 \quad \iff \quad 2x + 1 > 0 \quad \iff \quad x > -\frac{1}{2} .$$

Quindi, la funzione è concava verso il basso in $(-\infty, -1/2) \cup (0, \sqrt{2}/2)$, *concava verso l'alto in* $(-1/2, 0) \cup (\sqrt{2}/2, +\infty)$ *ed i punti* $x = -1/2$ *e* $x = \sqrt{2}/2$ *sono punti di flesso. Infine,*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 1 + e^0 = 2.$$

La funzione ha asintoto orizzontale destro, di equazione $y = 0$ *e asintoto orizzontale sinistro, di equazione* $y = 2$. *Il grafico è riportato nel Capitolo 11.*

ESERCIZIO 4.96. Sia data la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 3}}{2x} \operatorname{sign}[\arctan(-|x|/2 - 1)]$$

Determinare campo di esistenza, segno, limiti alla frontiera, eventuali asintoti, monotonia e tracciare un grafico qualitativo di f, nell'ipotesi in cui il numero di flessi sia minimo.

Svolgimento : *La radice è definita per ogni* $x \in \mathbb{R}$. *Si osservi che* $-\frac{|x|}{2} - 1 < 0$, *per ogni* $x \in \mathbb{R}$; *quindi anche* $\arctan(-|x|/2 - 1) < 0$, *per ogni* $x \in \mathbb{R}$, *e, conseguentemente,* $\operatorname{sign}[\arctan(-|x|/2 - 1)] = -1$, *per ogni* $x \in \mathbb{R}$. *Pertanto, possiamo riscrivere la funzione assegnata nella forma*

$$f(x) = -\frac{\sqrt{2x^2 + 3}}{2x} .$$

Osserviamo anche che la funzione è dispari.

C.E. $= (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;

$f(x) > 0 \ \forall x < 0$; $\quad f(x) < 0 \ \forall x > 0$; *la funzione non si annulla mai* ;

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} -\frac{\sqrt{2}|x|}{2x}\sqrt{1 + \frac{3}{2x^2}} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}$;

$y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ *è asintoto orizzontale a* $+\infty$; $\quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ *è asintoto orizzontale a* $-\infty$;

$\lim_{x \to 0^\pm} f(x) = \mp\infty$; $\quad x = 0$ *è asintoto verticale* ;

$f'(x) = \frac{3}{2x^2\sqrt{2x^2 + 3}}$; $\quad f'(x) > 0 \ \forall x \in$ C.E. .

La funzione cresce in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$*. Non ci sono estremanti locali né assoluti.*

Anche se non è stato richiesto, studiamo la derivata seconda. Si ha

$$f''(x) = -\frac{3}{2\left[x^2\sqrt{2x^2+3}\right]^2}\left[x^2\sqrt{2x^2+3}\right]' = -\frac{9(x^2+1)}{x^3(2x^2+3)^{3/2}}$$

che risulta essere positiva per $x<0$ *e negativa per* $x>0$*. La funzione è quindi convessa in* $(-\infty,0)$ *e concava in* $(0,+\infty)$*. Non ci sono punti di flesso. Il grafico è riportato nel Capitolo 11.*

ESERCIZIO 4.97. Data

$$f(x) = \frac{e^x}{|e^{2x}-1|},$$

determinare campo di esistenza, segno, limiti alla frontiera, eventuali asintoti e monotonia. Tracciare un grafico qualitativo di f, nell'ipotesi in cui il numero di flessi sia minimo.

Svolgimento : *Osserviamo che*

$$f(x) = \frac{1}{e^{-x}|e^{2x}-1|} = \frac{1}{|e^x - e^{-x}|} = \frac{1}{2|\sinh x|}.$$

Pertanto, C.E. $= \mathbb{R}\setminus\{0\}$ *e* $f(x)>0$*, per ogni* $x \in$ *C.E.. Osserviamo, anche, che la funzione è pari. Inoltre,*

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0^+\ ; \quad y=0 \text{ è asintoto orizzontale a } \pm\infty\ ;$$
$$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = +\infty\ ; \quad x=0 \text{ è asintoto verticale}\ ;$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{\cosh x}{2\sinh^2 x} & \text{se } x>0\,, \\[2ex] \dfrac{\cosh x}{2\sinh^2 x} & \text{se } x<0\,, \end{cases}$$

da cui si ottiene che $f'(x)>0$ *se* $x<0$ *e* $f'(x)<0$ *se* $x>0$*. La funzione cresce in* $(-\infty,0)$ *e decresce in* $(0,+\infty)$*. Non ci sono estremanti locali né globali. Infine, anche se non è stato richiesto, studiamo la derivata seconda. Per* $x>0$*, si ha*

$$f''(x) = -\frac{1}{2}\left[\frac{\sinh^3 x - 2\cosh^2 x\sinh x}{\sinh^4 x}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\sinh^3 x}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\cosh^2 x + 1}{\sinh^3 x}\right],$$

dove abbiamo utilizzato l'identità $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$*, per ogni* $x\in\mathbb{R}$*. Si ottiene che* $f''(x)>0$ *se e solo se* $\sinh x>0$*, cioè se e solo se* $x>0$*. Pertanto, la funzione è convessa in* $(0,+\infty)$ *e, per parità, anche in* $(-\infty,0)$*. Non ci sono flessi. Il grafico è riportato nel Capitolo 11.*

ESERCIZIO 4.98. Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico:

$$f(x) = e^{\arctan|x^2-1|}$$

Svolgimento : *C.E.* $=\mathbb{R}$*. In quanto composizione di funzioni continue in* $\mathbb{R}$*,* $f\in C^0(\mathbb{R})$*. Inoltre,*

$$f(x)>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}\ ; \quad f(0) = e^{\arctan 1} = e^{\pi/4}\,.$$

La funzione è pari, in quanto

$$f(-x) = e^{\arctan(|(-x)^2-1|)} = e^{\arctan(|x^2-1|)} = f(x)\,.$$

Inoltre,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = e^{\pi/2}$$

e la funzione ha asintoto orizzontale destro e sinistro, di equazione $y=e^{\pi/2}$*.*

Monotonia:

$$f'(x) = \begin{cases} e^{\arctan(x^2-1)}\cdot\dfrac{2x}{1+(x^2-1)^2} & \text{se } x<-1\ ;\ x>1\,, \\[2ex] e^{\arctan(1-x^2)}\cdot\left[\dfrac{-2x}{1+(x^2-1)^2}\right] & \text{se } -1<x<1\ ; \end{cases}$$

$$f'(x)>0 \iff \begin{cases} x>0 \\ x<-1\ ;\ x>1 \end{cases} \cup \begin{cases} x<0 \\ -1<x<1 \end{cases} \iff \{x>1\}\cup\{-1<x<0\}\,.$$

La funzione decresce in $(-\infty,-1)\cup(0,1)$ *e cresce in* $(-1,0)\cup(1,+\infty)$*.*

Il punto $x=0$ *è punto di massimo relativo. I punti, simmetrici,* $x=\pm1$ *sono punti di minimo relativo e assoluto* ($f(\pm1)=1$)*. Poiché* $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = e^{\pi/2} > e^{\pi/4} = f(0)$*, non ci sono massimi assoluti. Il codominio è* $[1, e^{\pi/2})$*. La funzione ammette estremo superiore, dato da* $e^{\pi/2}$*.*

Si osservi che $\lim_{x\to1^+} f'(x) = 2 \neq \lim_{x\to1^-} f'(x) = -2$*. La funzione ha in* $x=1$ *e, per simmetria, in* $x=-1$*, due punti angolosi.*

Per $x<-1$ *,* $x>1$*:*

$$f''(x) = e^{\arctan(x^2-1)}\cdot\left\{\frac{4x^2}{[1+(x^2-1)^2]^2} + 2\left[\frac{1+(x^2-1)^2-4x^2(x^2-1)}{[1+(x^2-1)^2]^2}\right]\right\} =$$

$$= \frac{-2e^{\arctan(x^2-1)}}{[1+(x^2-1)^2]^2}(3x^4-4x^2-2)\,.$$

Per $-1<x<1$*:*

$$f''(x) = e^{\arctan(1-x^2)}\cdot\left\{\frac{4x^2}{[1+(x^2-1)^2]^2} - 2\left[\frac{1+(x^2-1)^2-4x^2(x^2-1)}{[1+(x^2-1)^2]^2}\right]\right\} =$$

$$= \frac{2e^{\arctan(1-x^2)}}{[1+(x^2-1)^2]^2}(3x^4-2)\,.$$

Pertanto

$$f''(x)>0 \iff \begin{cases} x<-1\ ;\ x>1 \\ 3x^4-4x^2-2<0 \end{cases} \cup \begin{cases} -1<x<1 \\ 3x^4-2>0 \end{cases} \iff$$

$$\left\{-\sqrt{\frac{2+\sqrt{10}}{3}} = x_1 < x < -1\ ;\ 1<x<x_2 = \sqrt{\frac{2+\sqrt{10}}{3}}\right\}$$

$$\cup\left\{-1<x<-\sqrt{\frac{2}{3}}\ ;\ \sqrt{\frac{2}{3}}<x<1\right\}.$$

Poiché la funzione è continua anche nei punti $x = \pm 1$, *essa è concava in* $(-\infty, x_1) \cup (-\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3}) \cup (x_2, +\infty)$ *e convessa in* $(x_1, -\sqrt{2/3}) \cup (\sqrt{2/3}, x_2)$. *I punti, simmetrici,* $x = \pm\sqrt{(2+\sqrt{10})/3}$ *e* $x = \pm\sqrt{2/3}$ *sono punti di flesso. Il grafico è riportato nel Capitolo 11.*

ESERCIZIO 4.99. Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico:

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(-\dfrac{2x}{\sqrt{4x^2+2}}\right) & \text{se } x \geq 0 \\ x\sqrt{|x-5|-3} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Svolgimento : *La funzione è definita per ogni* $x \geq 0$, *in quanto* $4x^2 + 2 > 0$ *sempre; per* $x < 0$, *abbiamo che* $|x-5| = 5 - x$ *e* $f(x) = x\sqrt{2-x}$, *sempre definita se* $(-\infty, 0)$. *Dunque, C.E.* $= \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0 = \lim_{x\to 0^-} f(x) \implies f \in C^0(\mathbb{R}) .$$

$f(x) < 0$, *per ogni* $x \neq 0$ *e si annulla solo nell'origine che, pertanto, è punto di massimo assoluto. Poiché, per* $x \to +\infty$, $f(x) \sim \arctan\left(-\dfrac{2x}{2x}\right) = -\dfrac{\pi}{4}$, *la funzione ha asintoto orizzontale destro, di equazione* $y = -\dfrac{\pi}{4}$. *Inoltre,*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x\sqrt{2-x} = -\infty .$$

Poiché, però, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{2-x} = +\infty$, *non si ha asintoto obliquo sinistro.*

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-2}{1+\left(\frac{4x^2}{4x^2+2}\right)} \cdot \left[\dfrac{\sqrt{4x^2+2} - \frac{4x^2}{\sqrt{4x^2+2}}}{4x^2+2}\right] & se\ x > 0 , \\ \sqrt{2-x} - \dfrac{x}{2\sqrt{2-x}} = & se\ x < 0 , \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{-2}{(4x^2+1)\sqrt{4x^2+2}} & se\ x > 0 , \\ \dfrac{4-3x}{2\sqrt{2-x}} & se\ x < 0 ; \end{cases}$$

$$f'(x) < 0 \quad \forall x > 0 \quad ; \quad f'(x) > 0 \quad \forall x < 0 ;$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\sqrt{2} \neq \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \sqrt{2} .$$

La funzione ha un punto angoloso in $x = 0$.

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{8x}{(4x^2+1)^2 \cdot (4x^2+2)^{3/2}} \cdot (12x^2+5) > 0 & \forall x > 0 , \\ \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{3x-8}{(2-x)^{3/2}}\right] < 0 & \forall x < 0 . \end{cases}$$

La funzione è concava in $(-\infty, 0)$ *e convessa in* $(0, +\infty)$. *Il grafico è riportato nel Capitolo 11.*

ESERCIZIO 4.100. Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico:

$$f(x) = -\frac{1}{\log(\arctan x + 1)}$$

Svolgimento : *L'insieme di definizione è dato da*

$$\begin{cases} \arctan x + 1 > 0 \\ \log(\arctan x + 1) \neq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \arctan x > -1 \\ \arctan x + 1 \neq 1 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} x > \tan(-1) = -\tan 1 \\ x \neq 0 \end{cases} \implies C.E. = (-\tan 1, 0) \cup (0, +\infty) .$$

Per $x > 0$, $f(x) < 0$ *; per* $-\tan 1 < x < 0$, $f(x) > 0$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty .$$

Asintoto verticale: $x = 0$.

$$\lim_{x\to(-\tan 1)^+} f(x) = 0^+ \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{-1}{\log\left(1+\frac{\pi}{2}\right)} .$$

Asintoto orizzontale destro: $y = \dfrac{-1}{\log\left(1+\frac{\pi}{2}\right)}$ *e la funzione è prolungabile con continuità in* $x = -\tan 1$.

$$f'(x) = \frac{1}{\log^2(\arctan x + 1)} \cdot \frac{1}{(\arctan x + 1)} \cdot \left(\frac{1}{x^2+1}\right) > 0$$

$$\iff \quad \arctan x + 1 > 0 \quad \iff \quad \forall x \in C.E.$$

La funzione cresce in $(-\tan 1, 0)$ *e in* $(0, +\infty)$. *La funzione è illimitata. Inoltre, non ha punti stazionari. L'esercizio non richiede il calcolo esplicito di* $f''(x)$. *Calcoliamo, invece,*

$$\lim_{x\to(-\tan 1)^+} f'(x) = \left(\frac{1}{\tan^2 1 + 1}\right) \cdot \lim_{x\to(-\tan 1)^+} \frac{1}{(\arctan x + 1)\cdot\log^2(\arctan x + 1)} .$$

Ponendo $t = \arctan x + 1$ *ed osservando che* $t \to 0^+$ *se* $x \to (-\tan 1)^+$, *otteniamo*

$$\lim_{x\to(-\tan 1)^+} f'(x) = \left(\frac{1}{\tan^2 1 + 1}\right) \cdot \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t\log^2 t} = +\infty .$$

Pertanto, la funzione ha una tangente verticale di equazione $x = -\tan 1$*; essendo crescente in* $(-\tan 1, 0)$, *essa è necessariamente concava in un intorno destro di* $x = -\tan 1$*; d'altra parte, essa diverge a* $+\infty$, *per* $x \to 0^-$, *e quindi è necessariamente convessa in un intorno sinistro di* $x = 0$. *Nell'ipotesi di un numero minimale di flessi, deve senz'altro esistere un flesso in un punto* x_0, *tale che* $-\tan 1 < x_0 < 0$. *Invece, poiché, per* $x \to 0^+$, $f(x) \to -\infty$ *ed è sempre crescente, con asintoto orizzontale per* $x \to +\infty$, *nell'ipotesi di un numero minimo di flessi, essa deve sempre essere concava in* $(0, +\infty)$. *Il grafico è riportato nel Capitolo 11.*

Risposte agli esercizi non svolti: **4.67**: la funzione è definita per $x \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$; $k \in \mathbb{Z}$ - **4.69**: la funzione è definita $\forall x \in \mathbb{R}$ - **4.71**: la funzione è definita $\forall x \in \mathbb{R}$ - **4.73**: la funzione è definita per $x \in (k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2})$; $k \in \mathbb{Z}$ - **4.77**: l'unico punto di minimo locale è $x = 0$ e non esistono punti di massimo locale - **4.81**: l'unico punto di minimo locale è $x = 0$ e non esistono punti di massimo locale - **4.89**: l'unico di massimo assoluto è $x = 1$; l'unico punto di minimo assoluto è $x = 2$ e il punto di minimo relativo è $x = -1$ - **4.90**: $x = -1$ è asintoto verticale; $y = x + 1$ è asintoto obliquo a $+\infty$ e a $-\infty$ - **4.92**: $C.E. = \{x \in \mathbb{R} \;:\; x > 0\}$; $x = 0$ è asintoto verticale; $y = -x$ è asintoto obliquo a $+\infty$.

4.3. Applicazioni delle derivate: sviluppi di Taylor e Teorema di de l'Hospital

• Sviluppi di Taylor: ricordiamo, per comodità del lettore, i principali sviluppi di Taylor con centro nell'origine (cioè gli sviluppi di Mc Laurin).

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k + o(x^n)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + o(x^n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + o(x^{2n+1})$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + o(x^{10})$$

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\sinh x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\cosh x = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!}x^{2k} + o(x^{2n+1})$$

$$\tanh x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + o(x^{10})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \ldots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k + o(x^n)$$

$$\text{dove} \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - n + 1)}{n!} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} .$$

Alcuni casi particolari dell'ultimo sviluppo sono dati da

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k + o(x^n)$$

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$$

Si osservi che, se $\alpha \in \mathbb{N}$, si ha

$$\binom{\alpha}{m} = 0 \qquad \forall\, m \geq \alpha + 1 .$$

Pertanto, lo sviluppo di Mc Laurin, di qualunque ordine maggiore o uguale ad α, della funzione $(1+x)^\alpha$, con $\alpha \in \mathbb{N}$, fornisce sempre un polinomio di grado α che, forzatamente, coincide con il polinomio assegnato. Inoltre, il resto dello sviluppo è identicamente nullo, cioè il polinomio ed il suo sviluppo di Mc Laurin (di grado opportuno) sono coincidenti fra loro.

• **Teorema di de l'Hospital.** *Sia I un intervallo di numeri reali, $x_0 \in \overline{I}$, $f, g : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ due funzioni continue e derivabili in I, con g e g' non nulle in un intorno di x_0. Assumiamo che f e g siano entrambe infinitesime o infinite per $x \to x_0$ e che*

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}} .$$

Allora, esiste $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *e*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

(In particolare, il risultato vale anche se si considera solo il limite per $x \to x_0^-$ oppure $x \to x_0^+$).

• Ordini di infinito e di infinitesimo: ricordiamo che, data $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, con $x_0 \in \overline{I}$, si dice che essa ha *ordine di infinitesimo* pari ad α, per $x \to x_0$, rispettivamente per $x \to x_0^\pm$, se è infinitesima e se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|x - x_0|^\alpha} = l \in (0, +\infty) ,$$

rispettivamente

$$\lim_{x \to x_0^\pm} \frac{f(x)}{|x - x_0|^\alpha} \quad \text{esistono finiti e non nulli} .$$

Ad esempio, la funzione $f(x) = (\sin x)^{3/5}$ è infinitesima di ordine $\alpha = 3/5$, per $x \to 0$, poiché, utilizzando i limiti notevoli, si ottiene subito

$$\lim_{x \to 0} \frac{|(\sin x)^{3/5}|}{|x|^{3/5}} = 1 .$$

Osserviamo che, in alcuni casi, può succedere che l'ordine di infinitesimo sia diverso per $x \to x_0^+$ e $x \to x_0^-$, oppure che in uno o in entrambi i casi non esista. Ad esempio, la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{se } x \geq 0\,, \\ \cos x - 1 & \text{se } x < 0\,, \end{cases}$$

ha ordine di infinitesimo pari ad 1, per $x \to 0^+$, e ordine di infinitesimo pari a 2, per $x \to 0^-$; infatti, ricordando i limiti notevoli, si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}\,.$$

Invece, la funzione $f(x) = e^{-1/|x|}$ è infinitesima per $x \to 0$, ma non ha ordine di infinitesimo, poiché

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/|x|}}{|x|^\alpha} = 0 \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

Stesso discorso si può fare per $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ (oppure $f : (-\infty, b) \to \mathbb{R}$), infinitesima per $x \to \infty$. In tal caso, si parla di ordine di infinitesimo rispetto a $\frac{1}{x}$. Ad esempio, la funzione $f(x) = \log(1 + 1/\sqrt{|x|})$ è infinitesima di ordine $1/2$, per $x \to \pm\infty$, poiché

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{|\log(1 + 1/\sqrt{|x|})|}{|1/x|^{1/2}} = 1\,.$$

In modo del tutto analogo, si può introdurre il concetto di *ordine di infinito*. Una funzione $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ (rispettivamente $f : (-\infty, b) \to \mathbb{R}$) si dice che ha *ordine di infinito* pari ad α, per $x \to +\infty$ (rispettivamente, per $x \to -\infty$), se diverge e se

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,, \qquad \text{(rispettivamente} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{|x|^\alpha} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\})\,.$$

Operando la sostituzione $t = \frac{1}{(x-x_0)}$, si può ripetere il ragionamento precedente per definire l'ordine di infinito di f rispetto a $\frac{1}{(x-x_0)}$, per $x \to x_0$.

Per determinare l'ordine di infinitesimo o di infinito di una funzione, si possono utilizzare opportune espressioni asintotiche della funzione assegnata, ottenute tramite i limiti notevoli o gli sviluppi asintotici o ricorrendo agli ordini di infinito. Per esempio, sapendo che $f(x) = \log(1+x) - x$ si può riscrivere nella forma $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$, per $x \to 0$, si ricava subito che f è infinitesima di ordine 2, per $x \to 0$; come, del resto, sapendo che $f(x) = \frac{x^2+\log x}{x} \sim x$, per $x \to +\infty$, si ricava subito che f ha ordine di infinito pari ad 1, per $x \to +\infty$. D'altra parte, poiché, per definizione, l'ordine di infinitesimo o di infinito si determina mediante il calcolo di un limite che, ovviamente, si presenta nella forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$ oppure $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, se la regolarità di f lo permette, si può anche risolvere il problema utilizzando il Teorema di de L'Hospital. Ad esempio, se $f(x) = \sin x^2$, e si vuole determinarne l'ordine di infinitesimo per $x \to 0$, si procede come di seguito:

$$\text{per } \alpha > 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x^2}{x^\alpha} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{2x\cos x^2}{\alpha x^{\alpha-1}}$$

$$\text{per } \alpha > 1 \qquad \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{2\cos x^2 - 4x^2 \sin x^2}{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}} = \frac{2}{\alpha(\alpha-1)} \iff \alpha = 2\,,$$

e in modo analogo si procede per $x \to 0^-$. Da ciò si ricava che f ha ordine di infinitesimo pari a 2, per $x \to 0$. In realtà, se l'ordine non è intero, questo procedimento non è di facile applicazione.

- Esercizi

ESERCIZIO 4.101. Determinare il polinomio di Taylor di ordine 5, centrato nel punto $x_0 = 2$, della funzione $f(x) = \log x$. Qual è la formula del polinomio di grado generico n?

Svolgimento : *Calcoliamo esplicitamente le derivate:*

$$\begin{aligned} & & f(2) &= \log 2\,; \\ f'(x) &= \frac{1}{x} = \frac{0!}{x}\,; & f'(2) &= \frac{1}{2}\,; \\ f''(x) &= -\frac{1}{x^2} = -\frac{1!}{x^2}\,; & f''(2) &= -\frac{1}{4}\,; \\ f'''(x) &= \frac{2}{x^3} = \frac{2!}{x^3}\,; & f'''(2) &= \frac{2}{8} = \frac{1}{4}\,; \\ f^{iv}(x) &= -\frac{6}{x^4} = -\frac{3!}{x^4}\,; & f^{iv}(2) &= -\frac{6}{16} = -\frac{3}{8}\,; \\ f^{v}(x) &= \frac{24}{x^5} = \frac{4!}{x^5}\,; & f^{v}(2) &= \frac{24}{32} = \frac{3}{4}\,. \end{aligned}$$

Pertanto,

$$P_5(x,2) = \log 2 + \frac{1}{2}\,(x-2) - \frac{1}{4}\,\frac{(x-2)^2}{2!} + \frac{1}{4}\,\frac{(x-2)^3}{3!} - \frac{3}{8}\,\frac{(x-2)^4}{4!} + \frac{3}{4}\,\frac{(x-2)^5}{5!} =$$

$$= \log 2 + \frac{1}{2}\,(x-2) - \frac{1}{8}\,(x-2)^2 + \frac{1}{3\cdot 2^3}\,(x-2)^3 - \frac{1}{4\cdot 2^4}\,(x-2)^4 + \frac{1}{5\cdot 2^5}\,(x-2)^5\,.$$

Si osservi che

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{(k-1)}\,\frac{(k-1)!}{x^k} \quad \text{e} \quad f^{(k)}(2) = (-1)^{(k-1)}\,\frac{(k-1)!}{2^k} \quad \forall k \in \mathbb{N}\,.$$

Quindi il polinomio di Taylor di grado generico n è dato da

$$P_n(x,2) = \log 2 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{(k-1)}\,\frac{(k-1)!}{2^k}\cdot\frac{(x-2)^k}{k!} = \log 2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{(k-1)}}{2^k k}\,(x-2)^k\,.$$

Notiamo che, scrivendo $f(x) = \log[2 + (x-2)] = \log 2 + \log\left[1 + \left(\frac{x-2}{2}\right)\right]$, ponendo $t = \frac{x-2}{2}$ e utilizzando la formula del polinomio di Mc Laurin del logaritmo, otteniamo

$$P_n(x,2) = \log 2 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{(k-1)}\cdot\frac{\left(\frac{(x-2)}{2}\right)^k}{k} = \log 2 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{(x-2)^k}{2^k k}\,,$$

cioè la formula precedentemente trovata.

ESERCIZIO 4.102. Determinare il polinomio di Taylor di ordine 3, centrato nel punto $x_0 = \frac{\pi}{4}$, della funzione $f(x) = \sin x$. Qual è la formula del polinomio di grado generico n?

Svolgimento :

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt2}{2}\ ;$$

$$f'(x)=\cos x \quad ; \quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt2}{2}\ ;$$

$$f''(x)=-\sin x \quad ; \quad f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt2}{2}\ ;$$

$$f'''(x)=-\cos x \quad ; \quad f'''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt2}{2}\ .$$

Pertanto

$$P_3\left(x,\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{(x-\frac{\pi}{4})^2}{2}-\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{(x-\frac{\pi}{4})^3}{3!}=$$

$$=\frac{\sqrt2}{2}\left[1+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{(x-\frac{\pi}{4})^2}{2}-\frac{(x-\frac{\pi}{4})^3}{3!}\right].$$

Per determinare il polinomio di grado generico, ricordiamo le utili formule

$$\frac{d^k}{dx^k}(\sin x)=\sin\left(x+k\frac{\pi}{2}\right) \quad ; \quad \frac{d^k}{dx^k}(\cos x)=\cos\left(x+k\frac{\pi}{2}\right),$$

per cui

$$f^{(k)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right).$$

L'espressione assume periodicamente i valori $\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2},-\frac{\sqrt2}{2},-\frac{\sqrt2}{2}$, *da cui*

$$f^{(k)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=(-1)^{[k/2]}\cdot\frac{\sqrt2}{2},$$

dove $[x]$ *indica la parte intera di* $x\in\mathbb{R}$. *Quindi*

$$P_n\left(x,\frac{\pi}{4}\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)}{k!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{[k/2]}}{k!}\cdot\frac{\sqrt2}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^k.$$

ESERCIZIO 4.103. Determinare il polinomio di Taylor di ordine 3, centrato nel punto $x_0=\frac{\pi}{3}$, della funzione $f(x)=\cos x$.

ESERCIZIO 4.104. Determinare il polinomio di Taylor di ordine 3, centrato nel punto $x_0=2$, della funzione $f(x)=\sqrt{1+x}$.

ESERCIZIO 4.105. Determinare il polinomio di Taylor di ordine 3, centrato nel punto $x_0=1$, della funzione $f(x)=\frac{1}{x+1}$. Qual è la formula del polinomio di grado generico n?

ESERCIZIO 4.106. Data la funzione

$$g(x)=x\cos(x^3),$$

determinare

a) l'equazione della retta tangente al grafico di $g(x)$ nel punto $P_0=(0,0)$;

b) il polinomio di Mc Laurin di ordine 1;

c) il polinomio di Mc Laurin di ordine 7.

Svolgimento :

a) *l'equazione della retta tangente nel punto* $(x_0,g(x_0))$ *è* $y=g(x_0)+g'(x_0)\cdot(x-x_0)$. *Occorre pertanto calcolare* $g(x_0)$ *e* $g'(x_0)$.

$$g(0)=0 \quad ; \quad g'(x)=\cos(x^3)-3x^3\sin(x^3) \quad \Longrightarrow \quad g'(0)=1\ .$$

L'equazione cercata è quindi $y=x$;

b) *per definizione, il polinomio di Mc Laurin del primo ordine coincide con la retta tangente; pertanto esso sarà dato da* $P_1(x)=x$;

c) *poiché la funzione* $g(x)$ *è data dal prodotto di un polinomio e di una funzione il cui sviluppo di Mc Laurin è noto, possiamo evitare il calcolo diretto delle derivate fino all'ordine settimo sostituendo, nello sviluppo di Mc Laurin di* $\cos t$, x^3 *al posto di* t, *per poi moltiplicare lo sviluppo ottenuto per* x. *Si osservi che, a causa della sostituzione, quando ci si limita allo sviluppo di ordine 2 in* t, *si ottiene lo sviluppo di ordine 6 in* x, *tale che il resto risulta* $o(x^9)$. *Si ricava così:*

$$g(x)=x\cdot\left(1-\frac{(x^3)^2}{2}+o(x^9)\right)=x-\frac{x^7}{2}+o(x^{10})$$

da cui $P_7(x)=x-\frac{x^7}{2}$. *L'unicità del polinomio di Mc Laurin garantisce che il polinomio trovato corrisponda a quello cercato. In effetti, considerando anche il termine di ordine 4 dello sviluppo di Mc Laurin in* t, *si può facilmente dimostrare che il resto dello sviluppo di ordine 7 di* $g(x)$ *è addirittura* $o(x^{12})$.

ESERCIZIO 4.107. Calcolare il polinomio di Mc Laurin di grado 8 della funzione

$$[x^2-\log(1+x^2)]\sin^2 x\ .$$

Svolgimento : *L'esercizio non intende, ovviamente, far calcolare otto derivate allo studente! Ricordando che*

$$\log(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+o(t^3)$$

e quindi, ponendo $t=x^2$, *si ha*

$$\log(1+x^2)=x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}+o(x^6)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$$

da cui

$$\sin^2 x=x^2+\left(\frac{x^3}{3!}\right)^2-2\frac{x^4}{3!}+o(x^4)=x^2-\frac{1}{3}x^4+o(x^4)\ .$$

Pertanto,

$$[x^2-\log(1+x^2)]\sin^2 x=\left[\frac{x^4}{2}-\frac{x^6}{3}+o(x^6)\right]\left(x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^4)\right)=\frac{1}{2}x^6-\frac{1}{3}x^8-\frac{1}{6}x^8+o(x^8)\ .$$

Quindi, il polinomio cercato sarà $P_8(x)=\frac{1}{2}(x^6-x^8)$.

ESERCIZIO 4.108. Calcolare
$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin^2 x - x^3}{5x\log(1+x^4)}\,.$$

Svolgimento : *Ricordando gli sviluppi di Mc Laurin delle funzioni* $\sin t$ *e* $\log(1+t)$*, si ottiene*
$$\sin^2 x = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\;;$$
$$\log(1+x^4) = x^4 + o(x^4)\,.$$
Inserendo quanto trovato nel limite proposto, si ricava
$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin^2 x - x^3}{5x\log(1+x^4)} = \lim_{x\to 0}\frac{x(x^2 - x^4/3) - x^3}{5x\cdot x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^5}{3}\cdot\frac{1}{5x^5} = -\frac{1}{15}\,.$$
Nel caso in cui volessimo calcolare il limite sfruttando il Teorema di de l'Hospital, avremmo, dopo aver semplificato la frazione:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x^2}{5\log(1+x^4)} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x - 2x}{\left(\frac{20x^3}{x^4+1}\right)} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^4+1}{20}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x - 2x}{x^3} \overset{H}{=} \frac{1}{30}\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x - 1}{x^2} = -\frac{1}{15}\,,$$
dove, nell'ultimo passaggio, si è sfruttato un ben noto limite notevole.

ESERCIZIO 4.109. Stabilire l'ordine di infinitesimo della funzione
$$\frac{(e^{x^2}-1)x - x^3}{x(\sqrt{x} - \sin\sqrt{x})}$$
per $x \to 0^+$, rispetto all'infinitesimo campione x.

Svolgimento : *Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per* e^t*, con* $t = x^2$ *e quello al terzo ordine per* $\sin t$*, con* $t = \sqrt{x}$*, si ottiene*
$$f(x) \sim \frac{(1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 - 1)x - x^3}{x(\sqrt{x} - \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x^3}}{3!})} = \frac{\frac{1}{2}x^5}{\frac{1}{6}x^{5/2}} = 3x^{5/2}.$$
Quindi l'ordine di infinitesimo richiesto è $5/2$.

ESERCIZIO 4.110. Stabilire l'ordine di infinito, rispetto a $\frac{1}{x}$, per $x \to 0^+$, della seguente funzione:
$$f(x) = \frac{\pi - 2\arctan\frac{1}{x^3}}{x^4}.$$

Svolgimento : *Ricordando che* $\arctan t + \arctan(\frac{1}{t}) = \frac{\pi}{2}$*, possiamo scrivere*
$$f(x) = \frac{2\arctan(x^3)}{x^4} \sim \frac{2}{x} \qquad per\;\; x \to 0^+\;;$$
pertanto $f(x) \to +\infty$ *per* $x \to 0^+$*, con ordine* $\alpha = 1$.

Possiamo giungere allo stesso risultato utilizzando il Teorema di de L'Hospital:
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\pi - 2\arctan\frac{1}{x^3}}{x^{4-\alpha}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{6}{(4-\alpha)}\cdot\frac{x^2}{(x^6+1)x^{3-\alpha}} =$$
$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{6}{(4-\alpha)(x^6+1)}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^{1-\alpha}}.$$
Tale limite è finito e diverso da zero se e solo se $\alpha = 1$.

ESERCIZIO 4.111. Data la funzione
$$f(x) = \begin{cases} x^4 + 3x^3 & \text{per } x \geq 0; \\ \dfrac{\log(1+x^2) - x^2}{\sqrt[3]{x}} & \text{per } x < 0; \end{cases}$$

a) stabilire se f è continua su $\mathbb{R}$;
b) calcolare la derivata destra e sinistra di f in $x = 0$;
c) stabilire se f è derivabile in $\mathbb{R}$.

Svolgimento : *Ovviamente la funzione proposta è continua e derivabile in ogni punto di* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$*, in quanto composizione di funzioni continue e derivabili. Pertanto bisogna solo studiare il comportamento di* f *nell'origine. Ovviamente* $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0$*. Ricordando poi lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per* $\log(1+t)$*, con* $t = x^2$*, si ottiene che*
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{x^2 - x^4/2 - x^2}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to 0^-} -\frac{x^{11/3}}{2} = 0 = f(0).$$
Quindi f *è continua anche nell'origine.*

Utilizzando i calcoli appena fatti e la definizione di derivata sinistra e destra, si ottiene
$$f'(0^-) := \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} -\frac{x^{11/3}}{2x} = \lim_{x\to 0^-} -\frac{x^{8/3}}{2} = 0;$$
$$f'(0^+) := \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^4 + 3x^3}{x} = \lim_{x\to 0^+}(x^3 + 3x^2) = 0.$$
Poichè $f'_-(0) = 0 = f'_+(0)$*, la funzione risulta derivabile anche nell'origine.*

ESERCIZIO 4.112. Calcolare il seguente limite:
$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+1)^2\sin(x-1)}{\sqrt{x}\log x}\,.$$

Svolgimento : *Osservando che* $\log x = \log[1 + (x-1)]$*, ponendo* $t = x - 1$ *e utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per* $\sin t$ *e* $\log(1+t)$*, si ottiene*
$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+1)^2}{\sqrt{x}}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{\log x} = 4\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-1} = 4\,.$$
In alternativa, dopo aver distinto i termini a limite finito e diverso da zero da quelli infinitesimi, applichiamo il Teorema di de l'Hospital:
$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+1)^2\sin(x-1)}{\sqrt{x}\log x} = \lim_{x\to 1}\frac{(x^2+1)^2}{\sqrt{x}}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{\log x} \overset{H}{=} 4\lim_{x\to 1} x\cos(x-1) = 4\,.$$

ESERCIZIO 4.113. Calcolare
$$\lim_{x\to 2}\frac{e^{3(x-2)} - (x-1)^3 - \frac{3}{2}(x-2)^2}{(x-2)^4}\,.$$

Svolgimento : *Siamo in presenza di una forma indeterminata* $\left[\frac{0}{0}\right]$. *Applichiamo pertanto il Teorema di de l'Hospital:*

$$\lim_{x\to 2}\frac{e^{3(x-2)}-(x-1)^3-\frac{3}{2}(x-2)^2}{(x-2)^4}\overset{H}{=}\frac{3}{4}\lim_{x\to 2}\frac{e^{3(x-2)}-(x-1)^2-(x-2)}{(x-2)^3}\overset{H}{=}$$

$$\frac{1}{4}\lim_{x\to 2}\frac{3e^{3(x-2)}-2(x-1)-1}{(x-2)^2}\overset{H}{=}\frac{1}{8}\lim_{x\to 2}\frac{9e^{3(x-2)}-2}{(x-2)}=\frac{7}{8}\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\,.$$

Utilizzando separatamente il Teorema di de L'Hospital per $x\to 2^-$ *e* $x\to 2^+$, *otteniamo*

$$\frac{7}{8}\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x-2}=-\infty \qquad e \qquad \frac{7}{8}\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2}=+\infty\,;$$

la funzione, quindi, non ha limite in $x=2$, *ma ha un punto di infinito. Il calcolo del limite ha comportato l'applicazione del Teorema di de l'Hospital 3 volte, situazione assai frequente nella risoluzione di forme indeterminate. In questo caso, però, l'applicazione degli sviluppi di Taylor non risulta molto più agevole. Riscrivendo infatti il limite nella forma*

$$\lim_{x\to 2}\frac{e^{3(x-2)}-[1+(x-2)]^3-\frac{3}{2}(x-2)^2}{(x-2)^4}\,,$$

ed utilizzando gli sviluppi di Mc Laurin di e^t *e di* $(1+t)^\alpha$ *al terzo ordine con* $t=(x-2)$, *otteniamo*

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^4}\left\{\left[1+3(x-2)+\frac{9}{2}(x-2)^2+\frac{9}{2}(x-2)^3\right]\right.$$

$$\left.-\left[1+3(x-2)+\binom{3}{2}(x-2)^2+\binom{3}{3}(x-2)^3\right]-\frac{3}{2}(x-2)^2+o((x-2)^3)\right\}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\frac{9}{2}(x-2)^2+\frac{9}{2}(x-2)^3-[3(x-2)^2+(x-2)^3]-\frac{3}{2}(x-2)^2+o((x-2)^3)}{(x-2)^4}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{7}{2}\left[\frac{(x-2)^3+o((x-2)^3)}{(x-2)^4}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{7}{2}\frac{1}{(x-2)}\,,$$

da cui segue il risultato precedentemente ottenuto. Si osservi che, in questo caso, è stato necessario utilizzare gli sviluppi di Mc Laurin fino al terzo ordine, in quanto i termini di ordine inferiore si semplificano tra di loro.

ESERCIZIO 4.114. Determinare l'ordine di infinitesimo, per $x\to+\infty$, della funzione

$$g(x)=\exp\left(\frac{1}{x^2}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\,.$$

Svolgimento : *L'esercizio può essere risolto operando la sostituzione* $t=\frac{1}{x}$ *ed utilizzando gli sviluppi di Mc Laurin delle funzioni* e^t *e* $\cos t$, *per* $t\to 0^+$. *Si ha*

$$g(x)\sim\left[1+\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]-\left[1-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]=\frac{3}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\,.$$

Pertanto, l'ordine di infinitesimo, per $x\to+\infty$, *è* $\alpha=2$.

In alternativa, applichiamo il Teorema di de l'Hospital al quoziente della funzione rispetto all'infinitesimo campione $1/x^\alpha=x^{-\alpha}$, *per* $x\to+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\exp\left(\frac{1}{x^2}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^{-\alpha}}\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{2}{x^3}\exp\left(\frac{1}{x^2}\right)-\frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{-\alpha x^{-\alpha-1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2\exp\left(\frac{1}{x^2}\right)-x\,\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{-\alpha x^{-\alpha+2}}=\frac{3}{\alpha}\lim_{x\to+\infty}x^{\alpha-2}\,,$$

dove, nell'ultimo passaggio, si è sfruttato il limite notevole

$$\lim_{x\to+\infty}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t}=1\,.$$

Poiché il limite di $\frac{g(x)}{x^{-\alpha}}$ *esiste finito e diverso da zero se e solo se* $\alpha=2$, *si ottiene che l'ordine di infinitesimo è 2, come già visto in precedenza.*

ESERCIZIO 4.115. Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x\log\left(\frac{1}{1+x}\right)+x\log x+1\right]\,.$$

A seconda del limite trovato, calcolare l'eventuale ordine di infinito o di infinitesimo.

Svolgimento : *Si osservi che, per* $x\to+\infty$,

$$x\log\left(\frac{1}{1+x}\right)+x\log x+1=1+x\log\left(\frac{x}{1+x}\right)=$$

$$=1-\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\to 1-\log e=0\,.$$

Poiché, per $x\to+\infty$,

$$f(x)=1-x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\sim 1-x\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}\right]=\frac{1}{2x}\,,$$

si ricava che l'ordine di infinitesimo della funzione, per $x\to+\infty$, *è* $\alpha=1$.

Alternativamente, possiamo applicare il Teorema di de L'Hospital:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{-\alpha}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\log x-x\log(1+x)+1}{x^{-\alpha}}\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x+1-\log(1+x)-\frac{x}{1+x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\log\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{1+x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}}\overset{H}{=}-\frac{1}{\alpha}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x(x+1)}-\frac{1}{(1+x)^2}}{-(\alpha+1)x^{-\alpha-2}}$$

$$=\frac{1}{\alpha(\alpha+1)}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha+1}}{(1+x)^2}=\frac{1}{\alpha(\alpha+1)}\lim_{x\to+\infty}x^{\alpha-1}\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\iff\alpha=1\,.$$

ESERCIZIO 4.116. Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{7x^{18}}{(x-\sin x)^4}\,.$$

Svolgimento : *Poiché, per* $x \to 0$, $\sin x \sim x - \dfrac{x^3}{6}$, *abbiamo*

$$\lim_{x\to 0} \frac{7x^{18}}{(x-\sin x)^4} = \lim_{x\to 0} \frac{7x^{18}}{\left(\frac{x^3}{6}\right)^4} = 6^4 \cdot 7 \lim_{x\to 0} \frac{x^{18}}{x^{12}} = 0\,.$$

ESERCIZIO 4.117. Data la funzione

$$f(x) = \frac{e^{-x} - \log(1+x) - (x-1)^2}{x^3}\,,$$

calcolare il $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ e il $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

Svolgimento : *Per* $x \to 0$,

$$f(x) = \frac{1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) - (x^2 - 2x + 1) + o(x^3)}{x^3} = \frac{-\frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^3} \longrightarrow -\frac{1}{2}\,.$$

Con il Teorema di de L'Hospital, abbiamo, analogamente:

$$\lim_{x\to 0} f(x) \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-e^{-x} - \frac{1}{1+x} - 2(x-1)}{3x^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x} + \frac{1}{(1+x)^2} - 2}{6x}$$
$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-e^{-x} - \frac{2}{(1+x)^3}}{6} = -\frac{1}{2}\,.$$

Per $x \to +\infty$, $f(x) \sim -\frac{x^2}{x^3} \longrightarrow 0$.

ESERCIZIO 4.118. Determinare l'ordine di infinitesimo, per $x \to 0$, della funzione

$$g(x) = x\sin x - x^2\cos x\,.$$

ESERCIZIO 4.119. Determinare l'ordine di infinitesimo, per $x \to 0$, della funzione

$$g(x) = x\cos x - \sin x\,.$$

ESERCIZIO 4.120. Calcolare, se esistono,

$$\lim_{x\to 2} \frac{e^{(x-2)}\,(x-2) - \sin(x-2)}{(x-2)^\alpha}$$

per $\alpha = 2$ e $\alpha = 3$.

Risposte agli esercizi non svolti: **4.103**: il polinomio di Taylor è $P_3\left(x, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}\,\frac{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3}{3!}$ - **4.104**: il polinomio di Taylor è $P_3(x,2) = \sqrt{3} + \frac{1}{2\sqrt{3}}(x-2) - \frac{1}{8\cdot 3^{3/2}}(x-2)^2 + \frac{1}{3!\cdot 8\cdot 3^{3/2}}(x-2)^3$ - **4.105**: il polinomio di Taylor è $P_3(x,1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-1) + \frac{1}{8}(x-1)^2 - \frac{1}{16}(x-1)^3$; $P_n(x,1) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^{k+1}}(x-1)^k$ - **4.118**: l'ordine di infinitesimo è $\alpha = 4$ - **4.119**: l'ordine di infinitesimo è $\alpha = 3$ - **4.120**: per $\alpha = 2$: $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1$; per $\alpha = 3$: $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$, quindi $\not\exists \lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

4.4. Esercizi di ricapitolazione

ESERCIZIO 4.121. Studiare le seguenti funzioni e disegnarne il grafico:

1) $f(x) = e^{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

2) $f(x) = x + e^x$;

3) $f(x) = \log(x^2 + x)$;

4) $f(x) = \dfrac{e^x + 2e^{-2x}}{3}$;

5) $f(x) = \arcsin(e^x)$;

6) $f(x) = |\log|x||$;

7) $f(x) = \left(\dfrac{x-1}{x}\right) e^{(x\log x)}$;

8) $f(x) = \log(e^x - e^{-x})$;

9) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x} - 1}$;

10) $f(x) = \tan(\arcsin x)$;

11) $f(x) = \begin{cases} \log(1+x) & \text{se } x \ge 0 \\ |1+x| - 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$;

12) $f(x) = \dfrac{x^3 + 9x^2 + 27x + 27}{x^2 + 6x + 9}$;

13) $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} - 4$;

14)* $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{2x}\,\mathrm{sign}[\arctan(-|x| - \pi)]$;

15)† $f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x - 1}$;

16) $f(x) = \arccos|x - 1|$;

---

* non è richiesto lo studio della derivata seconda

† tenere presente che $e^x > x + 1\ \ \forall x \in \mathbb{R}$; inoltre non è richiesto lo studio della derivata seconda

17)* $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x - x^2}}{|x-1|}$;

18)* $f(x) = \dfrac{e^x}{x\sqrt{|x-1|}}$;

19)* $f(x) = \dfrac{e^x \sqrt[3]{e^x - 1}}{e^x - e}$;

20)* $f(x) = \dfrac{xe^x}{(x+1)^2}$;

21)* $f(x) = -\mathrm{sign}(-x)\sqrt{e^{2x} - 4e^x - 5}$;

22)* $f(x) = \log(3 - |2x+1|)$;

23) $f(x) = \arctan\left(-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}\right)$;

24) $f(x) = \sqrt{|2x-5| - 3}$.

ESERCIZIO 4.122. Stabilire se la funzione $f(x) = \arctan(1 + x^2)$ è invertibile in $\mathbb{R}^+$, motivando la risposta.

Svolgimento : *Poiché $f'(x) = \frac{2x}{1+(1+x^2)^2}$ è strettamente positiva in $\mathbb{R}^+$, la funzione proposta è strettamente monotona crescente in $\mathbb{R}^+$ e quindi essa è invertibile in $\mathbb{R}^+$.*

ESERCIZIO 4.123. Data

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-3x^2 - x^3}{2x^2} & \text{per } x > 0\,; \\ (x+2)^3 + 5x^3 & \text{per } x \le 0\,; \end{cases}$$

stabilire se $x = 0$ è punto di massimo assoluto per f nell'intervallo $[-1, 10]$.

ESERCIZIO 4.124. Determinare, se esiste, il periodo della funzione $f(x) = \cos(2x) - \sin(x)$.

Svolgimento : *Affinché f sia periodica di periodo T, si deve avere*

$$f(x+T) = \cos(2x + 2T) - \sin(x+T) = f(x) = \cos(2x) - \sin(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

e ciò si ottiene se e solo se

$$\begin{cases} 2T = 2h\pi \\ T = 2k\pi \end{cases} \quad \textit{per qualche } h, k \in \mathbb{Z}\,,$$

ovvero se $2k = h$. Pertanto, prendendo $k = 1$, $h = 2$, si ottiene che la funzione proposta è periodica di periodo $T = 2\pi$.

ESERCIZIO 4.125. Date le funzioni

$$f(x) = \log(x^2) \quad ; \quad g(x) = |x^2| \quad ; \quad h(x) = \sqrt[3]{x}\,,$$

stabilire quali

a) sono invertibili nel loro insieme di definizione e, in tal caso, determinarne l'inversa;

b) sono continue nel loro insieme di definizione;

c) sono derivabili nel loro insieme di definizione.

Disegnare i grafici delle tre funzioni.

* non è richiesto lo studio della derivata seconda

ESERCIZIO 4.126. Determinare gli eventuali punti di minimo e/o di massimo, relativi e/o assoluti, della funzione

$$f(x) = \frac{x}{2} + |\sin x|$$

nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

Stabilire in quali punti si annulla $f(x)$.

ESERCIZIO 4.127. Dire se e perché la funzione $f(x) = \log(1 + x^2)$ è invertibile in $\mathbb{R}^+$.

ESERCIZIO 4.128. Determinare, se esiste, il periodo della funzione

$$f(x) = \cos(x) + \sin(4x)\,.$$

ESERCIZIO 4.129. Studiare la concavità e la convessità di $f(x) = e^{1-x^2}$.

ESERCIZIO 4.130. Determinare lo sviluppo di Mc Laurin di ordine 7 della seguente funzione

$$[x - \log(1+x)]^2 \sin x^2\,.$$

ESERCIZIO 4.131. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}\sin^2(x-1)}{(x+1)^3 \log^2 x}\,.$$

Risposte agli esercizi non svolti: **4.121**: per i grafici, vedere Capitolo 11 - **4.123**: $x = 0$ è punto di massimo assoluto - **4.125**: **a)** $h(x)$ è invertibile; $h^{-1}(y) = y^3$; **b)** tutte e tre le funzioni sono continue nel loro insieme di definizione; **c)** $f(x)$ e $g(x)$ sono derivabili ; per i grafici, vedere Capitolo 11 - **4.126**: punti di minimo relativo: $x = 0$ $(f(0) = 0)$ e $x = \pi$ $(f(\pi) = \frac{\pi}{2})$; punto di minimo assoluto: $x = -\pi$ $(f(-\pi) = -\frac{\pi}{2})$; punto di massimo relativo: $x = -\pi/3$ $(f(-\pi/3) = -\pi/6 + \sqrt{3}/2)$; punto di massimo assoluto: $x = 2\pi/3$ $(f(2\pi/3) = \pi/2 + \sqrt{3}/2)$; la funzione si annulla in due punti: $x_1 \in (-\pi, -\pi/3)$ e $x_2 = 0$ - **4.127**: la funzione è invertibile, poiché è strettamente crescente in $\mathbb{R}^+$ - **4.128**: la funzione proposta è periodica di periodo $T = 2\pi$ - **4.129**: la funzione risulta concava per $-1/\sqrt{2} < x < 1/\sqrt{2}$ e convessa per $x < -1/\sqrt{2}$ e $x > 1/\sqrt{2}$; $x = \pm 1/\sqrt{2}$ sono punti di flesso - **4.130**: $[x - \log(1+x)]^2 \sin x^2 = \frac{x^6}{4} - \frac{x^7}{3} + o(x^7)$ - **4.131**: il limite proposto vale $1/8$.

DOMANDA 4.132. Data la funzione $f(x) = \log(1 + \frac{\sin x^2}{2})$, allora, per $x \to 0$, si ha

$\boxed{a}$ $f(x) \sim \frac{1}{2}\tan x^2$; $\boxed{b}$ $f(x) \sim \sin x^2$; $\boxed{c}$ $f(x) \sim x^2$; $\boxed{d}$ $f(x) \sim 1 + \frac{1}{2}\sin x^2$.

DOMANDA 4.133. Sia $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $\exists \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$. Allora

$\boxed{a}$ f è continua nel punto $x = 1$; $\boxed{b}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} f(1 + \frac{1}{n}) = 3$; $\boxed{c}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} f(1 - \frac{1}{n}) = f(1)$;
$\boxed{d}$ $f(1) = 3$.

DOMANDA 4.134. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Allora

$\boxed{a}$ $\exists\delta > 0$ tale che $f(x) > 0$ $\forall x \in (-\delta,\delta)$; $\boxed{b}$ $\exists\delta > 0$ tale che $f(x) \geq 0$ $\forall x \in (0,\delta)$ ed $f(x) \leq 0$ $\forall x \in (-\delta, 0)$; $\boxed{c}$ $f(x) = 1 - \cos x$; $\boxed{d}$ la funzione $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $\tilde{f}(x) = f(x)$ per $x \neq 0$ e $\tilde{f}(0) = 0$ è continua nell'origine.

DOMANDA 4.135. La derivata della funzione $f(x) = x^{x^{2}}$ per $x > 0$ vale

$\boxed{a}$ $2x \cdot x^{x^2}$; $\boxed{b}$ $f'(x) \equiv 0$ $\forall x > 0$; $\boxed{c}$ $x^{x^2}[2x \log x + x]$; $\boxed{d}$ f non è derivabile.

DOMANDA 4.136. Sia data $f(x) = \log_{(-x)} x^2$ per $x < -1$. Allora

$\boxed{a}$ $f'(x) = \frac{1}{x^2}$; $\boxed{b}$ $f'(x) = \frac{2}{x}$; $\boxed{c}$ $f'(x)$ non esiste; $\boxed{d}$ $f'(x) = 0$.

DOMANDA 4.137. Sia $f(x) = x^{\log x}$ per $x > 0$. Allora

$\boxed{a}$ $f'(x)$ non esiste; $\boxed{b}$ $f'(x) = 2x^{[\log x - 1]} \log x$; $\boxed{c}$ $f(x) = \exp[(\log x)^{\log x}]$; $\boxed{d}$ $f(x) = \exp(2 \log x)$.

DOMANDA 4.138. Data $f(x) = \sin 6x^2$, il polinomio di Mc Laurin di ordine 7 è

$\boxed{a}$ $6x^2 - 36x^6 + o(x^6)$; $\boxed{b}$ $6x^2 - 36x^6$; $\boxed{c}$ non esiste; $\boxed{d}$ $x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7!$.

DOMANDA 4.139. Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione convessa di classe C^2 tale che $f'(0) = 0$. Allora

$\boxed{a}$ f assume il suo massimo assoluto nel punto $x = 0$; $\boxed{b}$ $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in [0, +\infty)$; $\boxed{c}$ f è una funzione non negativa in $[0, +\infty)$; $\boxed{d}$ nessuna delle altre risposte è esatta.

DOMANDA 4.140. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione che ha in x_0 un punto di massimo locale. Allora

$\boxed{a}$ $f'(x_0) = 0$; $\boxed{b}$ $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$; $\boxed{c}$ $\exists\delta > 0$: $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$; $\boxed{d}$ $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

DOMANDA 4.141. La funzione $(x^3 + \tanh^4 x)^2$ per $x \to 0$ è

$\boxed{a}$ un infinitesimo di ordine 6 rispetto ad x; $\boxed{b}$ $o(x^6)$; $\boxed{c}$ un infinitesimo di ordine 3 rispetto ad x; $\boxed{d}$ $o(x^8)$.

DOMANDA 4.142. La funzione $g(x) = x - \sin x$ per $x \in \mathbb{R}$

$\boxed{a}$ non ha limite per $x \to +\infty$; $\boxed{b}$ è invertibile; $\boxed{c}$ è periodica; $\boxed{d}$ ha infiniti punti di estremo relativo.

DOMANDA 4.143. Sia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x + \log x$. Allora

$\boxed{a}$ f ha asintoto obliquo di equazione $y = x$; $\boxed{b}$ f ha asintoto orizzontale di equazione $y = 1$; $\boxed{c}$ f non ha asintoti obliqui; $\boxed{d}$ f non ha asintoti verticali.

DOMANDA 4.144. Sia $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = 3x + \frac{x}{\log x}$. Allora

$\boxed{a}$ $y = 3$ è asintoto orizzontale per f a $+\infty$; $\boxed{b}$ $y = 3x$ è asintoto obliquo per f a $+\infty$; $\boxed{c}$ f non ha asintoti obliqui a $+\infty$; $\boxed{d}$ f non ammette limite per $x \to 1^+$.

DOMANDA 4.145. La funzione $f(x) = x^2 \log x$, per $x \to 0^+$, è

$\boxed{a}$ un infinitesimo di ordine 2 rispetto ad x; $\boxed{b}$ un $o(x)$; $\boxed{c}$ un $o(x^2)$; $\boxed{d}$ un infinitesimo di ordine 1 rispetto ad x.

DOMANDA 4.146. Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ una funzione tale che $f(1) = 0$ ed $f'(1) = 1$. Allora il $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{x-1}$

$\boxed{a}$ vale 1; $\boxed{b}$ non esiste; $\boxed{c}$ nulla si può dire, senza ulteriori informazioni; $\boxed{d}$ vale 0.

DOMANDA 4.147. Sia $f \in C^2(\mathbb{R})$ una funzione tale che $f'(0) = 0$. Allora

$\boxed{a}$ 0 è un punto estremante per f; $\boxed{b}$ $f(x) = x^3$; $\boxed{c}$ se $f''(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, 0 è punto di minimo assoluto per f; $\boxed{d}$ se $f'(x) > 0$ $\forall x < 0$, 0 è punto di massimo per f.

DOMANDA 4.148. La funzione $f(x) = |x|^{3/2}$ ha in $x = 0$

$\boxed{a}$ un punto di discontinuità; $\boxed{b}$ un un punto angoloso; $\boxed{c}$ un un punto di minimo assoluto; $\boxed{d}$ un punto di cuspide.

DOMANDA 4.149. Sia $f(x) = |x|[2 - \cos x]$. Allora

$\boxed{a}$ $x = 0$ è punto di minimo assoluto; $\boxed{b}$ f non ammette limite per $x \to -\infty$; $\boxed{c}$ $f(x) = x$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$; $\boxed{d}$ $f'(0) = 1$.

DOMANDA 4.150. Siano $x > 0$, $y = x^2$ ed $f(x) = x^{\log_y x}$. Allora

$\boxed{a}$ $f(x) = x^2$; $\boxed{b}$ $f(x) = \sqrt{x}$; $\boxed{c}$ $f(x)$ non è definita; $\boxed{d}$ $f(x) = x$.

Risposte alle precedenti domande: **4.132**: a - **4.133**: b - **4.134**: d - **4.135**: c - **4.136**: d - **4.137**: b - **4.138**: b - **4.139**: b - **4.140**: c - **4.141**: a - **4.142**: b - **4.143**: c - **4.144**: c - **4.145**: b - **4.146**: a - **4.147**: c - **4.148**: c - **4.149**: a - **4.150**: b .

CAPITOLO 5

INTEGRALI DI FUNZIONI DI UNA VARIABILE REALE

5.1. Principali metodi di integrazione

• Ricordiamo che, assegnata una funzione $f : I \to \mathbb{R}$, dove I è un intervallo di numeri reali, una funzione $\phi : I \to \mathbb{R}$, derivabile in I, si dice *primitiva* della funzione f se $\phi'(x) = f(x)$, per ogni $x \in I$. In particolare, se una funzione f ammette una primitiva ϕ nell'intervallo I, allora essa ne ammette infinite e l'insieme delle primitive di f, che si indica con la notazione $\int f(x)\, dx$ (cioè l'*integrale indefinito* di f) è dato da

$$\int f(x)\, dx = \phi(x) + C \qquad \text{al variare della costante } C \in \mathbb{R}\,.$$

• **Teorema (Teorema di Torricelli o primo Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale).** *Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua in I. Dato $x_0 \in I$, sia $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$, per ogni $x \in I$, la funzione integrale di f, con punto iniziale x_0. Allora, F è derivabile in I e vale la formula*

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in I\,.$$

In altre parole, F è una primitiva in I della funzione f.

• **Teorema (secondo Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale).** *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in I e sia $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ una primitiva di f in $[a,b]$. Allora, vale la formula*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \phi(b) - \phi(a)\,.$$

• Integrali immediati

$$\int x^\alpha\, dx = \frac{1}{\alpha+1}\, x^{\alpha+1} + C \quad \forall \alpha \neq -1; \qquad \int \frac{1}{x}\, dx = \log|x| + C;$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C; \qquad \int \sin x\, dx = -\cos x + C;$$

$$\int e^x\, dx = e^x + C; \qquad \int a^x\, dx = \frac{a^x}{\log a} + C;$$

$$\int \sinh x\, dx = \cosh x + C; \qquad \int \cosh x\, dx = \sinh x + C;$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x + C; \qquad \int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arccos x + C;$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2 x}\, dx = \tanh x + C; \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x + C;$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \tan x + C; \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = -\cot x + C.$$

• Formula di integrazione per parti

$$\int u(x) \cdot v'(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\, dx$$

• Formule di sostituzione di variabile

$$\int f(\phi(y))\phi'(y)\,dy = \left(\int f(x)\,dx\right)_{x=\phi(y)}$$

$$\int f(x)\,dx = \left(\int f(\phi(y))\phi'(y)\,dy\right)_{y=\phi^{-1}(x)}$$

• Formule utili per il calcolo degli integrali

$$\int [f(x)]^\alpha \cdot f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad \forall\alpha \neq -1; \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + C;$$

$$\int \cos[f(x)]\cdot f'(x)\,dx = \sin[f(x)] + C; \qquad \int \sin[f(x)]\cdot f'(x)\,dx = -\cos[f(x)] + C;$$

$$\int e^{f(x)}\cdot f'(x)\,dx = e^{f(x)} + C; \qquad \int a^{f(x)}\cdot f'(x)\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\log a} + C;$$

$$\int \sinh[f(x)]\cdot f'(x)\,dx = \cosh[f(x)] + C; \qquad \int \cosh[f(x)]\cdot f'(x)\,dx = \sinh[f(x)] + C;$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\,dx = \arcsin[f(x)] + C; \qquad \int -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\,dx = \arccos[f(x)] + C;$$

$$\int \frac{f'(x)}{\cosh^2[f(x)]}\,dx = \tanh[f(x)] + C; \qquad \int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}\,dx = \arctan[f(x)] + C;$$

$$\int \frac{f'(x)}{\cos^2[f(x)]}\,dx = \tan[f(x)] + C; \qquad \int \frac{f'(x)}{\sin^2[f(x)]}\,dx = -\cot[f(x)] + C.$$

• Formule di razionalizzazione tramite particolari sostituzioni (R è una funzione razionale dell'argomento in parentesi)

$$\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})\,dx \qquad x = a\sin t\,; \qquad dx = a\cos t\,dt;$$

$$\int R(x, \sqrt{a^2+x^2})\,dx \qquad x = a\sinh t\,; \qquad dx = a\cosh t\,dt;$$

$$\int R(x, \sqrt{x^2-a^2})\,dx \qquad x = a\cosh t\,; \qquad dx = a\sinh t\,dt;$$

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx \qquad t = \tan(\tfrac{x}{2})\,; \qquad dx = \tfrac{2}{1+t^2}\,dt;$$

$$\cos x = \tfrac{1-t^2}{1+t^2}; \qquad \sin x = \tfrac{2t}{1+t^2};$$

$$\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \tan x)\,dx \qquad t = \tan x\,; \qquad dx = \tfrac{1}{1+t^2}\,dt;$$

$$\cos^2 x = \tfrac{1}{1+t^2}; \qquad \sin^2 x = \tfrac{t^2}{1+t^2};$$

$$\int R(\cos x)\sin x\,dx \qquad t = \cos x\,; \qquad dt = -\sin x\,dx;$$

$$\int R(\sin x)\cos x\,dx \qquad t = \sin x\,; \qquad dt = \cos x\,dx;$$

$$\int R(e^x)\,e^x\,dx \qquad t = e^x\,; \qquad dt = e^x\,dx.$$

• Funzioni razionali proprie

Consideriamo solo il semplice caso in cui il grado del denominatore sia 2 e sia anche strettamente maggiore del grado del numeratore. In tal caso, a seconda che il discriminante dell'equazione

associata al denominatore sia positivo, nullo o negativo, il denominatore ammette due zeri reali distinti, che indicheremo con α e β, un unico zero reale, che indicheremo con γ (ovvero due zeri reali coincidenti), oppure non ammette zeri. Pertanto, se $b^2-4c>0$, avremo

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+bx+c}\,dx = \int \frac{Ax+B}{(x-\alpha)(x-\beta)}\,dx = \frac{B+\alpha A}{\alpha-\beta}\int\frac{1}{x-\alpha}\,dx + \frac{B+\beta A}{\beta-\alpha}\int\frac{1}{x-\beta}\,dx\,;$$

se $b^2-4c=0$, avremo

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+bx+c}\,dx = \int \frac{Ax+B}{(x-\gamma)^2}\,dx = A\int\frac{1}{x-\gamma}\,dx + (B+\gamma A)\int\frac{1}{(x-\gamma)^2}\,dx\,;$$

in entrambi i casi ci siamo ricondotti al calcolo di integrali immediati. Infine, se $b^2-4c<0$, avremo

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+bx+c}\,dx = \frac{A}{2}\log(x^2+bx+c) + \frac{2B-Ab}{\sqrt{4c-b^2}}\arctan\left(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right) + C\,.$$

5.2. Integrali indefiniti

ESERCIZIO 5.1. Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$I = \int \frac{2x+1}{(x+2)^2}\,dx\,.$$

Svolgimento : *Utilizziamo i criteri di integrazione per le funzioni razionali, riscrivendo la funzione integranda nella forma*

$$\frac{2x+1}{(x+2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} = \frac{A(x+2)+B}{(x+2)^2}\,.$$

Imponendo l'eguaglianza fra i numeratori del primo e del terzo membro, arriviamo all'equazione

$$Ax + 2A + B = 2x + 1\,,$$

che, sfruttando il principio di identità dei polinomi, si trasforma nell'eguaglianza dei coefficienti dei termini di uguale grado:

$$\begin{cases} A = 2 \\ 2A + B = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = -3\,. \end{cases}$$

Si ottiene

$$I = 2\int\frac{1}{x+2}\,dx - \int\frac{3}{(x+2)^2}\,dx = 2\log|x+2| + \frac{3}{x+2} + C\,.$$

Saremmo potuti arrivare più brevemente allo stesso risultato, osservando direttamente che

$$\frac{2x+1}{(x+2)^2} = \frac{2(x+2)-3}{(x+2)^2} = \frac{2}{x+2} - \frac{3}{(x+2)^2}\,.$$

ESERCIZIO 5.2. Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$I = \int 2x\arctan x\,dx\,.$$

Svolgimento : *Integrando per parti, con $v'(x) = 2x$ e $u(x) = \arctan x$, si ottiene*

$$I = x^2 \arctan x - \int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx = x^2 \arctan x - \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\, dx$$
$$= x^2 \arctan x - \int 1\, dx + \int \frac{1}{1+x^2}\, dx = x^2 \arctan x - x + \arctan x + C\ .$$

ESERCIZIO 5.3. Determinare la primitiva di $f(x) = \frac{x}{x+1}$ che vale 0 in $x = 0$.

Svolgimento : *Poiché f è una funzione razionale, in cui il grado del numeratore è uguale a quello del denominatore, si ottiene*

$$F_C(x) = \int \frac{x}{x+1}\, dx = \int \frac{x+1-1}{x+1}\, dx$$
$$= \int 1\, dx - \int \frac{1}{x+1}\, dx = x - \log|x+1| + C\ ,$$

da cui, imponendo la condizione $F_C(0) = 0$, si ricava $C = 0$, cioè la primitiva cercata è data da $F(x) = x - \log(x+1)$, definita per $x > -1$.

ESERCIZIO 5.4. Calcolare la primitiva di

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

che vale 0 in $x = 0$.

ESERCIZIO 5.5. Determinare le primitive della funzione

$$f(x) = \frac{\sin(\log x)}{x\cos(\log x)}.$$

Svolgimento : *Ponendo $y = \log x$, da cui $x = e^y$ e $dx = e^y dy$, si ottiene*

$$\int \frac{\sin(\log x)}{x\cos(\log x)}\, dx = \int \frac{\sin y}{e^y \cos y}\, e^y\, dy = \int \frac{\sin y}{\cos y}\, dy$$
$$= -\int \frac{1}{\cos y}\,(\cos y)'\, dy = -\log|\cos y| + C = -\log|\cos(\log x)| + C.$$

ESERCIZIO 5.6. Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$I = \int \frac{\cos(2\log x)}{x}\, dx\ .$$

Svolgimento : *Utilizzando la sostituzione di variabile $t = \log x$, da cui $dt = \frac{1}{x}\, dx$, si ottiene*

$$I = \int \cos(2t)\, dt = \frac{\sin(2t)}{2} + C = \frac{\sin(2\log x)}{2} + C\ .$$

ESERCIZIO 5.7. Calcolare la primitiva di

$$f(x) = \frac{1}{2x(2-x)}$$

che vale 0 in $x = 1$.

Svolgimento : *Utilizziamo il metodo di integrazione delle funzioni razionali:*

$$\frac{1}{2x(2-x)} = \frac{1}{2}\left[\frac{A}{x} + \frac{B}{(2-x)}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2A + (B-A)x}{x(2-x)}\right]\ .$$

Osservando che il numeratore del primo membro è una costante, il principio di identità dei polinomi, applicato ai numeratori del primo e del terzo membro, porta a

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ B - A = 0 \end{cases} \Longrightarrow A = B = \frac{1}{2}\ .$$

Pertanto,

$$\int \frac{1}{2x(2-x)}\, dx = \frac{1}{4}\int \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{(2-x)}\right] dx = \frac{1}{4}(\log|x| - \log|2-x|) + C = \frac{1}{4}\log\left|\frac{x}{2-x}\right| + C\ .$$

Infine, sostituendo il valore $x = 1$ nella precedente espressione, si ha

$$\frac{1}{4}\log\left|\frac{1}{2-1}\right| + C = 0 \Longleftrightarrow C = 0\ .$$

Si osservi che, poiché $\frac{x}{2-x} > 0$ se $0 < x < 2$, che è l'intervallo massimale di continuità della funzione integranda, contenente il punto $x_0 = 1$, possiamo togliere il modulo. Otteniamo, allora, che la primitiva richiesta è $F(x) = \frac{1}{4}\log\left(\frac{x}{2-x}\right)$, definita per $0 < x < 2$.

ESERCIZIO 5.8. Calcolare la primitiva della funzione

$$f(x) = e^x \left(\frac{\cosh x}{\sinh x}\right)$$

in $(0, +\infty)$, che assume il valore $\log\left(\frac{e-1}{e+1}\right)$ nel punto $x = 1$.

Svolgimento : *Ricordando che $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ e $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, ed effettuando una sostituzione di variabile $t = e^x$, da cui $dt = e^x\, dx$, si ottiene*

$$I = \int e^x \left(\frac{\cosh x}{\sinh x}\right) dx = \int e^x\, \frac{e^{2x}+1}{2e^x} \cdot \frac{2e^x}{e^{2x}-1}\, dx = \int \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\, e^x\, dx$$
$$= \left(\int \frac{t^2+1}{t^2-1}\, dt\right)_{t=e^x} = \left(\int \frac{t^2-1+2}{t^2-1}\, dt\right)_{t=e^x} = \left(\int \left[1 + \frac{2}{t^2-1}\right] dt\right)_{t=e^x}\ .$$

Il metodo di integrazione delle funzioni razionali porta ad avere

$$\frac{2}{t^2-1} = \frac{2}{(t+1)(t-1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t-1} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases}\ .$$

Pertanto,

$$I = \left(t + \int \frac{1}{t-1}\, dt - \int \frac{1}{t+1}\, dt\right)_{t=e^x} = \left(t + \log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)_{t=e^x} + C$$
$$= e^x + \log\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right) + C\ .$$

Imponendo la condizione assegnata, si trova $C = -e$; pertanto, la primitiva richiesta è

$$F(x) = e^x + \log\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right) - e \qquad per \quad x \in (0, +\infty)\ .$$

ESERCIZIO 5.9. Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$I = \int \left[(e^x)^2 + 1\right] e^x \, dx .$$

ESERCIZIO 5.10. Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$I = \int \frac{1}{1+\log^2 x} \cdot \frac{1}{x} \, dx .$$

ESERCIZIO 5.11. Determinare le primitive F_C della funzione

$$f(x) = \frac{\cos x}{\log(\sin x)\sin x}.$$

ESERCIZIO 5.12. Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{1}{2\tan x + 3\cos x} \, dx$$

Svolgimento : *Ricordando che* $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, *l'integrale proposto si può riscrivere nella forma*

$$\int \frac{\cos x}{2\sin x + 3\cos^2 x} \, dx = \int \frac{\cos x}{2\sin x + 3 - 3\sin^2 x} \, dx.$$

Osservando, inoltre, che $\cos x$ *è la derivata di* $\sin x$, *si può effettuare il cambiamento di variabile* $y = \sin x$, *riconducendosi così al calcolo dell'integrale, risolubile con il metodo di integrazione delle funzioni razionali, dato da*

$$\int \frac{1}{3+2y-3y^2} \, dy = -\frac{1}{2\sqrt{10}} \left[\int \frac{1}{y - \frac{1+\sqrt{10}}{3}} \, dy - \int \frac{1}{y - \frac{1-\sqrt{10}}{3}} \, dy\right]$$
$$= -\frac{1}{2\sqrt{10}} \log\left|\frac{y - \frac{1+\sqrt{10}}{3}}{y - \frac{1-\sqrt{10}}{3}}\right| + C .$$

Pertanto

$$\int \frac{1}{2\tan x + 3\cos x} \, dx = (1/2\sqrt{10}) \log\left|\frac{\sin x - \frac{1-\sqrt{10}}{3}}{\sin x - \frac{1+\sqrt{10}}{3}}\right| + C .$$

ESERCIZIO 5.13. Determinare la primitiva F della funzione $f(x) = \tan(2x)$ tale che

$$\lim_{x\to 0} F(x) = \sqrt{e} .$$

Svolgimento : *Operando la sostituzione di variabile* $t = \cos(2x)$, *da cui* $dt = -2\sin(2x)\,dx$, *si ottiene*

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}\,dx = -\frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{t}\,dt\right)_{t=\cos(2x)} = -\frac{1}{2}\log(|\cos(2x)|) + C .$$

La soluzione, dovendo essere definita in un intorno di $x = 0$, *va considerata nell'intervallo* $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, *dove* $\cos(2x) > 0$. *Inoltre,* $\lim_{x\to 0} -\frac{1}{2}\log(\cos(2x)) + C = C$, *da cui segue che* $\lim_{x\to 0} F(x) = \sqrt{e} \iff C = \sqrt{e}$. *Pertanto la primitiva cercata è*

$$F(x) = -\frac{1}{2}\log(\cos(2x)) + \sqrt{e} .$$

ESERCIZIO 5.14. Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$I = \int (2x+1)e^x \, dx .$$

ESERCIZIO 5.15. Determinare la primitiva di $f(x) = \frac{2x}{x^2+2} + 1$ che vale $\log 2$ in $x = 0$.

ESERCIZIO 5.16. Determinare l'insieme delle primitive della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = -3\cos^2(3x)\sin^3(3x)$.

Svolgimento : *L'insieme delle primitive richiesto è dato da*

$$F_C(x) = -\int 3\cos^2(3x)\sin^3(3x)\,dx = \left(-\int \cos^2 t \sin^3 t\,dt\right)_{t=3x}$$
$$= \left(-\int \cos^2 t(1-\cos^2 t)\sin t\,dt\right)_{t=3x} = \left(\int z^2(1-z^2)\,dz\right)_{z=\cos 3x}$$
$$= \left(\int (z^2 - z^4)\,dz\right)_{z=\cos 3x} = \left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{5}\right)_{z=\cos 3x} + C = \frac{\cos^3(3x)}{3} - \frac{\cos^5(3x)}{5} + C$$

dove sono state utilizzate la sostituzione di variabili $t = 3x$, *da cui* $dt = 3\,dx$, *l'identità fondamentale della trigonometria* $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, *e l'ulteriore sostituzione* $z = \cos t$, *da cui* $dz = -\sin t\,dt$.

ESERCIZIO 5.17. Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{1}{\tan x + \cos x} \, dx$$

ESERCIZIO 5.18. Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{1}{2\cot x + 3\sin x} \, dx .$$

ESERCIZIO 5.19. Determinare tutte le primitive della funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}$$

nell'intervallo $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Svolgimento : *Ponendo* $x = \sqrt{2}\sin t$, *da cui* $dx = \sqrt{2}\cos t\,dt$ *e* $t = \arcsin(x/\sqrt{2})$, *ed osservando che, se* $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, *allora* $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ *e quindi* $\cos t > 0$, *si ottiene*

$$\int \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\,dx = \left(\int \frac{\sqrt{2}\cos t}{\sqrt{2(1-\sin^2 t)}}\,dt\right)_{t=\arcsin(x/\sqrt{2})} = \left(\int \frac{\cos t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\,dt\right)_{t=\arcsin(x/\sqrt{2})}$$
$$= \left(\int dt\right)_{t=\arcsin(x/\sqrt{2})} = (t+C)_{t=\arcsin(x/\sqrt{2})} = \arcsin(x/\sqrt{2}) + C .$$

ESERCIZIO 5.20. Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx\,.$$

Svolgimento : *Ponendo $x = \sinh t$, da cui $dx = \cosh t\,dt$ e $t = \operatorname{sett\,sinh} x$, si ottiene*

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+x^2}\,dx &= \left(\int \sqrt{1+\sinh^2 t}\,\cosh t\,dt\right)_{t=\operatorname{sett\,sinh}x} \\ &= \left(\int \cosh^2 t\,dt\right)_{t=\operatorname{sett\,sinh}x} = \left(\frac{\sinh t\cosh t + t}{2}\right)_{t=\operatorname{sett\,sinh}x} + C\,.\end{aligned}$$

Osserviamo che l'ultima uguaglianza si è ottenuta integrando due volte per parti e, in analogia con simili integrali per le funzioni trigonometriche, sfruttando l'identità fondamentale delle funzioni iperboliche ($\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$):

$$\begin{aligned}\int \cosh^2 t\,dt &= \int \cosh t\cosh t\,dt = \sinh t\cosh t - \int \sinh t\sinh t\,dt \\ &= \sinh t\cosh t - \int(\cosh^2 t - 1)\,dt = \sinh t\cosh t + t - \int \cosh^2 t\,dt\end{aligned}$$

da cui

$$2\int \cosh^2 t\,dt = \sinh t\cosh t + t + C\,.$$

Poiché, infine, $\cosh t = \sqrt{1+\sinh^2 t}$, si ricava

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \left(\frac{\sinh t\sqrt{1+\sinh^2 t} + t}{2}\right)_{t=\operatorname{sett\,sinh}x} + C = \frac{x\sqrt{1+x^2} + \operatorname{sett\,sinh}x}{2} + C\,.$$

ESERCIZIO 5.21. Determinare tutte le primitive della funzione

$$h(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1}\,,$$

ESERCIZIO 5.22. Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int x^3\sqrt{x^2-4}\,dx\,.$$

ESERCIZIO 5.23. Determinare la primitiva $F(x)$ della funzione

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

tale che $F(0) = 1$.

Svolgimento : *Ponendo $t = \sqrt{x}$, da cui $x = t^2$ e $dx = 2t\,dt$, si ottiene*

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}\,dx &= 2\left(\int \frac{t}{t+1}\,dt\right)_{t=\sqrt{x}} = 2\left(\int dt - \int \frac{1}{t+1}\,dt\right)_{t=\sqrt{x}} \\ &= 2\,(t - \log|t+1|)_{t=\sqrt{x}} + C = 2\sqrt{x} - 2\log(\sqrt{x}+1) + C\,.\end{aligned}$$

Imponendo la condizione

$$\left(2\sqrt{x} - 2\log(\sqrt{x}+1) + C\right)_{x=0} = 1$$

si ottiene $C = 1$, da cui si ricava che la primitiva cercata è $F(x) = 2\sqrt{x} - 2\log(\sqrt{x}+1) + 1$.

ESERCIZIO 5.24. Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{1}{4\cos x + 3\sin x}\,dx\,.$$

Svolgimento : *Utilizziamo le formule parametriche richiamate all'inizio del capitolo, per riscrivere le funzioni seno e coseno in termini della tangente dell'angolo dimezzato. Otteniamo così*

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x} &= \left(\int \frac{1}{4\frac{1-t^2}{1+t^2} + 3\frac{2t}{1+t^2}}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt\right)_{t=\tan(x/2)} = -\left(\int \frac{dt}{2t^2-3t-2}\right)_{t=\tan(x/2)} \\ &= -\left(\int \frac{dt}{(t-2)(2t+1)}\right)_{t=\tan(x/2)} = \frac{1}{5}\left(2\int \frac{dt}{2t+1} - \int \frac{dt}{t-2}\right)_{t=\tan(x/2)} \\ &= \frac{1}{5}\left(\log\left|\frac{2t+1}{t-2}\right|\right)_{t=\tan(x/2)} + C = \frac{1}{5}\log\left|\frac{2\tan(x/2)+1}{\tan(x/2)-2}\right| + C\,.\end{aligned}$$

ESERCIZIO 5.25. Determinare la primitiva $F(x)$ della funzione

$$g(x) = \frac{\sqrt{x} + x\log x}{x}$$

tale che $F(1) = 3$.

Risposte agli esercizi non svolti: **5.4**: $F(x) = \frac{1}{2}\log(1+x^2)$ - **5.9**: l'integrale proposto vale $\frac{e^{3x}}{3} + e^x + C$ - **5.10**: l'integrale proposto vale $\arctan(\log x) + C$ - **5.11**: $F_C(x) = \log|\log(\sin x)| + C$ - **5.14**: l'integrale proposto vale $(2x-1)e^x + C$ - **5.15**: la primitiva cercata è $F(x) = \log(x^2+2) + x$ - **5.17**: l'integrale proposto vale $-(1/\sqrt{5})\log\left|\frac{y-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{y-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\right| + C$ - **5.18**: l'integrale proposto vale $(1/2\sqrt{10})\log\left|\frac{\cos x - \frac{1+\sqrt{10}}{3}}{\cos x - \frac{1-\sqrt{10}}{3}}\right| + C$ - **5.21**: le primitive cercate sono della forma $F_C(x) = -\frac{1}{e^x+1} + C$ - **5.22**: l'integrale proposto vale $\left(\left[\frac{32}{3}\sinh^3 t + \frac{32}{5}\sinh^5 t\right]\right)_{\operatorname{sett\,cosh}(x/2)} + C = \frac{4}{3}(x^2-4)^{3/2} + \frac{1}{5}(x^2-4)^{5/2} + C$ - **5.25**: la primitiva cercata è $F(x) = 2\sqrt{x} + x(\log x - 1) + 2$.

5.3. Integrali definiti

• Richiami: ricordiamo che l'integrale definito di una funzione continua e non negativa ha un'interpretazione geometrica come area del sottografico. Infatti, se $f : [a,b] \to [0,+\infty)$ è una funzione continua e se indichiamo con R_f il suo sottografico, cioè

$$R_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a \le x \le b\,,\ 0 \le y \le f(x) \ \ \forall x \in [a,b]\}$$

abbiamo

$$area(R_f) = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Più in generale, se R_{fg} è un insieme della forma

$$R_{fg} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a \le x \le b,\ f(x) \le y \le g(x) \ \ \forall x \in [a,b]\}$$

dove $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sono due funzioni continue, con $f \le g$, si ha

$$area(R_{fg}) = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx\,.$$

• Esercizi

ESERCIZIO 5.26. Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int_0^1 x^2 e^{-2x}\,dx.$$

Svolgimento : *Utilizziamo il teorema di integrazione per parti, una prima volta con* $u(x) = x^2$ *e* $v'(x) = e^{-2x}$ *ed una seconda volta con* $u(x) = x$ *e ancora* $v'(x) = e^{-2x}$*, in modo da azzerare il grado del polinomio. Svolgiamo l'esercizio in due modi, assolutamente equivalenti, sfruttando il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale: in un caso calcoliamo i valori della primitiva agli estremi di integrazione a ogni passo, in modo da poter, eventualmente, semplificare l'espressione in qualche passo dell'integrazione; nel secondo caso, calcoliamo prima l'integrale indefinito, per poi calcolare la primitiva negli estremi solo all'ultimo passaggio.*

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 e^{-2x}\,dx &= -\frac{1}{2}x^2 e^{-2x}\Big|_0^1 + \int_0^1 x e^{-2x}\,dx\\ &= -\frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{2}x e^{-2x}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-2x}\,dx\\ &= -\frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{4}e^{-2x}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}(1-5e^{-2})\,.\end{aligned}$$

Oppure:

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{-2x}\,dx &= -\frac{1}{2}x^2 e^{-2x} + \int x e^{-2x}\,dx\\ &= -\frac{1}{2}x^2 e^{-2x} - \frac{1}{2}x e^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\,dx\\ &= -\frac{1}{4}e^{-2x}(2x^2+2x+1) + C =: F(x) + C,\end{aligned}$$

da cui

$$\int_0^1 x^2 e^{-2x}\,dx = F(1) - F(0) = -\frac{1}{4}(5e^{-2}-1).$$

ESERCIZIO 5.27. Calcolare il seguente integrale definito:

$$I = \int_0^{\pi/2} 2x\sin x\,dx\,.$$

Svolgimento : *Integrando per parti, con* $u(x) = 2x$ *e* $v'(x) = \sin x$*, si ottiene*

$$I = -2x\cos x\Big|_0^{\pi/2} + 2\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx = 2\sin x\Big|_0^{\pi/2} = 2\,.$$

ESERCIZIO 5.28. Calcolare l'area della regione di piano A compresa tra il grafico della funzione $f(x) = -x\sin(x^2) + \sqrt{\pi/2}$, con $x \in [0, \sqrt{\pi/2}]$, e l'asse delle ascisse.

Svolgimento : *Studiamo il segno della funzione* f*. Poiché* $f'(x) = -\sin(x^2) - 2x^2\cos(x^2)$ *e nell'intervallo in esame le funzioni* $\sin(x^2)$ *e* $\cos(x^2)$ *sono non negative, segue che la derivata è sempre non positiva e la funzione è non crescente. Il suo minimo assoluto si avrà pertanto nel punto* $\sqrt{\pi/2}$*, dove* $f(\sqrt{\pi/2}) = 0$*. La funzione, dunque, è non negativa nell'intervallo considerato.*

Per definizione, $area(A) = \int_0^{\sqrt{\pi/2}}[-x\sin(x^2) + \sqrt{\pi/2}]\,dx$*. Decomponendo l'integrale per somma ed effettuando nel primo la sostituzione* $t = x^2$*, da cui* $\frac{1}{2}\,dt = x\,dx$*,* $t(0) = 0$*,* $t(\sqrt{\pi/2}) = \pi/2$*, si ottiene*

$$area(A) = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin t\,dt + \sqrt{\pi/2}\int_0^{\sqrt{\pi/2}} 1\,dx = \frac{1}{2}\cos t\Big|_0^{\pi/2} + \sqrt{\pi/2}\,x\Big|_0^{\sqrt{\pi/2}} = \frac{1}{2}(\pi-1)\,.$$

ESERCIZIO 5.29. Calcolare il seguente integrale definito:

$$I = \int_0^{\pi/2} e^{\sin x}\cos x\,dx\,.$$

Svolgimento : *Effettuando la sostituzione* $t = \sin x$*, da cui* $dt = \cos x\,dx$ *,* $t(0) = 0$ *,* $t(\pi/2) = 1$*, si ottiene* $I = \int_0^1 e^t\,dt = e - 1$.

ESERCIZIO 5.30. Calcolare il seguente integrale definito:

$$I = \int_1^2 \frac{e^t(e^t-1)}{e^{2t}-1}\,dt\,.$$

Svolgimento : *Effettuando la sostituzione* $x = e^t$*, da cui* $dx = e^t\,dt$*,* $x(1) = e$*,* $x(2) = e^2$*, si ottiene*

$$I = \int_e^{e^2}\frac{x-1}{x^2-1}\,dx = \int_e^{e^2}\frac{1}{x+1}\,dx = \log|x+1|\Big|_e^{e^2} = \log\left(\frac{e^2+1}{e+1}\right)\,.$$

ESERCIZIO 5.31. Calcolare il seguente integrale definito:

$$I = \int_0^1 \frac{1}{e^x+1}e^x\,dx\,.$$

ESERCIZIO 5.32. Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_1^2 \frac{2x}{(x+1)(x-3)}\,dx\,.$$

Svolgimento : *Applicando il metodo di integrazione per le funzioni razionali, si ottiene*

$$\frac{2x}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} = \frac{(A+B)x + B - 3A}{(x+1)(x-3)}$$

$$\iff \begin{cases} A+B=2\\ B-3A=0\end{cases} \iff A = \frac{1}{2}\,,\ B = \frac{3}{2}\,.$$

Perciò

$$\frac{2x}{(x+1)(x-3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{3}{x-3}\right)$$

e

$$\int_1^2 \frac{2x}{(x+1)(x-3)}\,dx = \left[\frac{1}{2}\log|x+1| + \frac{3}{2}\log|x-3|\right]_1^2 = \frac{1}{2}\log\frac{3}{16}.$$

ESERCIZIO 5.33. Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_0^2 \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\, dx\,.$$

Ha senso calcolare

$$\int_0^2 \frac{2x+4}{x^2+4x-5}\, dx\ ?$$

Svolgimento : *Osserviamo che, nel primo caso, il denominatore non si annulla mai e che il numeratore è la derivata del denominatore. Pertanto*

$$\int_0^2 \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\, dx = \log(x^2+4x+5)\Big|_0^2 = \log\left(\frac{17}{5}\right)\,.$$

Nel secondo caso, invece, il denominatore può essere riscritto nella forma $(x+5)(x-1)$ *e quindi si annulla in* 1. *Non ha perciò senso calcolare l'integrale nell'intervallo* $[0,2]$.

ESERCIZIO 5.34. Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_1^2 \frac{x-1}{x(x+2)}\, dx\,.$$

DOMANDA 5.35. Siano $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue. Allora
$\boxed{a}$ $\int_0^1 f\cdot g\, dx = \left(\int_0^1 f\, dx\right)\left(\int_0^1 g\, dx\right)$; $\boxed{b}$ $\int_0^1 f\cdot g\, dx = f(1)g(1) - f(0)g(0)$; $\boxed{c}$ $\int_0^1 f\cdot g\, dx = f(1)g'(1) - f(0)g'(0) - \int_0^1 f'g\, dx$; $\boxed{d}$ $\int_0^{1/2} f\, dx + \int_{1/2}^1 g\, dx \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 5.36. Calcolare il seguente integrale definito:

$$I = \int_0^{\sqrt{\pi/2}} 2x \sin x^2\, dx\,.$$

ESERCIZIO 5.37. Calcolare l'area della regione di piano A compresa tra il grafico della funzione $f(x) = -xe^{x^2} + e$, con $x \in [0,1]$, e l'asse delle ascisse.

Svolgimento : *Studiamo il segno di* f. *Poiché* $f'(x) = -(2x^2+1)e^{x^2} < 0$ *per* $x \in \mathbb{R}$, *la funzione è strettamente decrescente e, nell' intervallo in considerazione, assumerà il minimo in* $x = 1$ *dove si ha* $f(1) = 0$. *Dunque, nell'intervallo* $[0,1]$, *la funzione è non negativa. Per definizione,* $area(A) = \int_0^1 [-xe^{x^2} + e]\, dx$. *Decomponendo l'integrale per somma ed effettuando nel primo la sostituzione* $t = x^2$, *da cui* $\frac{1}{2}\, dt = x\, dx$, $t(0) = 0$, $t(1) = 1$, *si ottiene*

$$area(A) = -\frac{1}{2}\int_0^1 e^t\, dt + e\int_0^1 1\, dx = -\frac{1}{2}e^t\Big|_0^1 + ex\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(e+1)\,.$$

ESERCIZIO 5.38. Calcolare l'area del dominio A, delimitato dalle curve di equazione

$$x = 0\ ; \qquad x = 2\pi\ ;$$
$$f_1(x) = 3 + \sin x\ ; \qquad f_2(x) = 3 + \cos x\,.$$

Svolgimento : *Occorre innanzitutto stabilire dove* $f_1(x) \geq f_2(x)$, *ovvero quando* $\sin x \geq \cos x$. *Come si può evincere anche dal grafico in figura 5.38,* $\cos x \geq \sin x$ *negli intervalli* $[0, \frac{\pi}{4}]$ *e* $[\frac{5}{4}\pi, 2\pi]$, *mentre* $\sin x \geq \cos x$ *in* $[\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi]$. *Pertanto, avremo che*

$$area(A) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (3+\cos x - 3 - \sin x)\, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}} (3+\sin x - 3 - \cos x)\, dx +$$
$$+ \int_{\frac{5}{4}}^{2\pi} (3+\cos x - 3 - \sin x)\, dx$$
$$= [\cos x + \sin x]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - [\cos x + \sin x]\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}} + [\cos x + \sin x]\Big|_{\frac{5}{4}}^{2\pi} = 4\sqrt{2}\,.$$

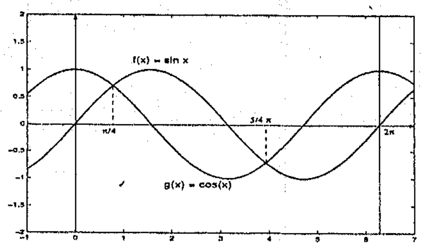


Figura 5.38

Grafico di $f(x) = \sin x$ *e* $g(x) = \cos x$

ESERCIZIO 5.39. Calcolare il seguente integrale definito:

$$I = \int_0^1 \frac{x+2}{x^2+1}\, dx\,.$$

Svolgimento : *Si ha*

$$I = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\, dx + 2\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\, dx + 2\arctan x\Big|_0^1$$
$$= \left[\frac{1}{2}\log(x^2+1) + 2\arctan x\right]\Big|_0^1 = \frac{\log 2 + \pi}{2}\,.$$

ESERCIZIO 5.40. Calcolare il seguente integrale definito:

$$I = \int_1^e \frac{\log x^2}{x}\, dx\,.$$

ESERCIZIO 5.41. Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_0^1 \frac{\log(\arctan x + 1)}{(1+x^2)(\arctan x + 1)^2}\, dx\,.$$

Svolgimento : *Effettuando il cambiamento di variabile $t = \arctan x$ ed osservando che $\frac{1}{1+x^2}\,dx = dt$, $t(0) = 0$ e $t(1) = \pi/4$, l'integrale proposto si riscrive nella forma*

$$\int_0^1 \frac{\log(\arctan x + 1)}{(1+x^2)(\arctan x + 1)^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\log(t+1)}{(t+1)^2}\,dt\,.$$

Integrando l'ultima espressione per parti, con $u(t) = \log(t+1)$ e $v'(t) = \frac{1}{(t+1)^2}$, si ottiene

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\log(t+1)}{(t+1)^2}\,dt &= -\frac{\log(t+1)}{(t+1)}\bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(t+1)^2}\,dt\\ &= -\frac{1}{(1+\frac{\pi}{4})}[\log(1+\pi/4)] - \frac{1}{t+1}\bigg|_0^{\pi/4}\\ &= -\frac{1}{(1+\frac{\pi}{4})}[\log(1+\pi/4)+1]+1\,.\end{aligned}$$

ESERCIZIO 5.42. Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_0^2 \frac{e^x\log(1+e^x)}{1+e^x}\,dx\,.$$

Svolgimento : *Osserviamo che, effettuando la sostituzione di variabile $t = 1+e^x$, da cui $dt = e^x\,dx$, $t(0) = 2$, $t(2) = 1+e^2$, l' integrale proposto diviene*

$$\int_0^2 \frac{e^x\log(1+e^x)}{1+e^x}\,dx = \int_2^{1+e^2} \frac{\log t}{t}\,dt = \frac{1}{2}\log^2 t\bigg|_2^{1+e^2} = \frac{1}{2}[\log^2(1+e^2) - \log^2 2]\,.$$

ESERCIZIO 5.43. Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_1^2 \frac{1}{x^3}\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\,dx\,.$$

Svolgimento : *Osserviamo che, effettuando la sostituzione di variabile $t = \frac{1}{x}$, da cui $dt = -\frac{1}{x^2}\,dx$, $t(1) = 1$, $t(2) = 1/2$, l'integrale proposto diviene*

$$\begin{aligned}&\int_1^2 \frac{1}{x^3}\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\,dx = -\int_1^2 \frac{1}{x}\arctan x\left(-\frac{1}{x^2}\right)\,dx = \int_{1/2}^1 t\arctan t\,dt\\ &= \frac{1}{2}t^2\arctan t\bigg|_{1/2}^1 - \frac{1}{2}\int_{1/2}^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,dt\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\arctan\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\int_{1/2}^1\left[1 - \frac{1}{1+t^2}\right]\,dt\\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{8}\arctan\frac{1}{2} - \frac{1}{2}[t - \arctan t]\bigg|_{1/2}^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} - \frac{5}{8}\arctan\frac{1}{2}\,,\end{aligned}$$

dove si è utilizzato il teorema di integrazione per parti.

ESERCIZIO 5.44. Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_{-5}^5 \frac{e^{x^2}\sin x}{\log(1+|x|)+1}\,dx.$$

Svolgimento : *Osserviamo che l'intervallo d'integrazione è simmetrico rispetto all'origine, la funzione integranda è dispari e quindi l'integrale proposto è nullo.*

ESERCIZIO 5.45. Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_1^4 \arctan\left(\frac{x+1}{|x|}\right)\,dx\,.$$

Svolgimento : *Innanzitutto, osserviamo che nell'intervallo di integrazione si ha $x > 0$; pertanto possiamo togliere il modulo. Integrando, successivamente, per parti, con $u(x) = \arctan\frac{x+1}{x}$ e $v'(x) = 1$, si ha*

$$\begin{aligned}\int_1^4 \arctan\left(\frac{x+1}{|x|}\right)\,dx &= x\arctan\left(\frac{x+1}{x}\right)\bigg|_1^4 - \int_1^4 x\,\frac{1}{1+(\frac{x+1}{x})^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\,dx\\ &= 4\arctan\left(\frac{5}{4}\right) - \arctan 2 + \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{x}{x^2+x+1/2}\,dx\\ &= 4\arctan\left(\frac{5}{4}\right) - \arctan 2 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\log(x^2+x+1/2) - \arctan(2x+1)\right]\bigg|_1^4\\ &= 4\arctan\left(\frac{5}{4}\right) - \arctan 2 + \frac{1}{4}\log\left(\frac{41}{5}\right) + \frac{1}{2}\arctan 3 - \frac{1}{2}\arctan 9\,.\end{aligned}$$

ESERCIZIO 5.46. Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_1^3 \log\left(\frac{x^2+2x+3}{|x|}\right)\,dx\,.$$

ESERCIZIO 5.47. Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_1^{e^{2\pi}} \frac{\sin(\log x)}{x}\log x\,dx\,.$$

ESERCIZIO 5.48. Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_0^1 t\left(e^{(1+t^2)} + \frac{t}{1+t^3}\right)\,dt\,.$$

Svolgimento : *Osserviamo che*

$$\begin{aligned}\int_0^1 t\left(e^{(1+t^2)} + \frac{t}{1+t^3}\right)\,dt &= \int_0^1 te^{(1+t^2)}\,dt + \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^3}\,dt\\ &= \frac{1}{2}e^{(1+t^2)}\bigg|_0^1 + \frac{1}{3}\log(1+t^3)\bigg|_0^1 = \frac{1}{2}(e^2-e) + \frac{1}{3}\log 2.\end{aligned}$$

ESERCIZIO 5.49. Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{e^{|x^3|}\tan x}{\log(1+x^2)+1}\,dx\,.$$

ESERCIZIO 5.50. Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_0^{\pi/4} \cos^6 x \tan^5 x\,dx\,.$$

ESERCIZIO 5.51. Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx\,.$$

Svolgimento : *Ponendo* $x = 2\cos t$, *da cui* $dx = -2\sin t\,dt$, $t = \arccos(x/2)$, $t(0) = \pi/2$, $t(\sqrt{3}) = \pi/6$, *si ottiene*

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx &= -16\int_{\pi/2}^{\pi/6} \frac{\cos^3 t\sin t}{\sqrt{4(1-\cos^2 t)}}\,dt = 8\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos^3 t\sin t}{\sin t}\,dt\\ &= 8\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos^2 t\cos t\,dt = 8\int_{\pi/6}^{\pi/2} (1-\sin^2 t)\cos t\,dt\\ &= 8\left(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\right)\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/2} = 5/3\,.\end{aligned}$$

ESERCIZIO 5.52. Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{1}{\sin^2 x + \sin x}\,dx\,.$$

ESERCIZIO 5.53. Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sin^2 x + 1}\,dx\,.$$

Svolgimento : *Utilizziamo le formule parametriche richiamate all'inizio del capitolo, per riscrivere le potenze pari delle funzioni seno e coseno in termini della tangente. Poniamo, quindi,* $t = \tan x$, *da cui* $x = \arctan t$, $dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt$, $t(0) = 0$, $t(\pi/4) = 1$. *Otteniamo così*

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sin^2 x + 1}\,dx &= \int_0^1 \frac{1}{\frac{t^2}{1+t^2}+1}\,\frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{1+2t^2}\,dt\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}t)\Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\sqrt{2}\,.\end{aligned}$$

ESERCIZIO 5.54. Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cos^2 x}{\cot x}\,dx\,.$$

ESERCIZIO 5.55. Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_0^{(\log 2)/2} e^{2x}\log(1+e^{2x})\,dx\,.$$

DOMANDA 5.56. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione pari e continua. Allora

$\boxed{a}$ f ha un punto di massimo assoluto in $x=0$; $\boxed{b}$ $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 0$; $\boxed{c}$ f ha un punto di minimo assoluto in $x=0$; $\boxed{d}$ $\int_{-4}^{4} f(x)\,dx = 2\int_{-4}^{0} f(x)\,dx$.

ESERCIZIO 5.57. Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_0^1 t\left[\frac{\log(1+t^2)+1}{1+t^2}\right]dt\,.$$

ESERCIZIO 5.58. Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_0^{\pi/2} (\cos x)\log(1+\sin x)\,dx\,.$$

ESERCIZIO 5.59. Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}+1}\,dx\,.$$

ESERCIZIO 5.60. Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos^4 x(1+\tan^2 x)}\,dx\,.$$

Risposte agli esercizi non svolti: **5.31**: l'integrale proposto vale $\log\left(\frac{e+1}{2}\right)$ - **5.34**: l'integrale proposto vale $\frac{1}{2}\log\frac{32}{27}$ - **5.35**: d - **5.36**: l'integrale proposto vale 1 - **5.40**: l'integrale proposto vale 1 - **5.46**: l'integrale proposto vale $\log 36 - 2 + \log 3 + 2\sqrt{2}\arctan\frac{4}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{2}\arctan\frac{2}{\sqrt{2}}$ - **5.47**: l'integrale proposto vale -2π - **5.49**: l'integrale proposto vale 0 - **5.50**: l'integrale proposto vale $\frac{1}{48}$ - **5.52**: l'integrale proposto vale $\log\sqrt{3}+\frac{3+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ - **5.54**: l'integrale proposto vale $\frac{1}{8}$ - **5.55**: l'integrale proposto vale $\frac{1}{2}(3\log 3 - 2\log 2 - 1)$ - **5.56**: d - **5.57**: l'integrale proposto vale $\frac{1}{4}\log^2 2 + \frac{1}{2}\log 2$ - **5.58**: l'integrale proposto vale $2\log 2 - 1$ - **5.59**: l'integrale proposto vale $3 - 4\log 2$ - **5.60**: l'integrale proposto vale $\sqrt{3}$.

5.4. Integrali impropri

• Ricordiamo che, date due funzioni continue e non negative $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$, con $f \sim g$ per $x \to a^+$, si ha che f è impropriamente integrabile in un intorno di $x = a$ se e solo se anche g lo è. Inoltre, se $f(x) \le g(x)$ in un intorno di $x = a$, allora se g è impropriamente integrabile in un intorno di $x = a$, anche f lo è, mentre se f non è impropriamente integrabile in un intorno di $x = a$, anche g non lo è. Un analogo risultato vale per funzioni continue e non negative $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$, con $f \sim g$ per $x \to b^-$, in un intorno di $x = b$. Inoltre, se $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, sono due funzioni continue e non negative, con $f \sim g$ per $x \to +\infty$, si ha che f è impropriamente integrabile in un intorno di $+\infty$ se e solo se anche g lo è. Inoltre, se $f(x) \le g(x)$ in un intorno di $+\infty$, allora se g è impropriamente integrabile all'infinito, anche f lo è, mentre se f non è impropriamente integrabile all'infinito, anche g non lo è. Un analogo risultato vale per funzioni continue e non negative $f, g : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$, con $f \sim g$ per $x \to -\infty$, in un intorno di $-\infty$.

• Funzioni di confronto:

$$\boxed{\frac{1}{|x - x_0|^p}} \begin{cases} \text{in un intorno di } \infty & \begin{cases} \text{l'integrale improprio converge per} & p > 1\,, \\ \text{l'integrale improprio diverge per} & p \le 1\,; \end{cases} \\[2ex] \text{in un intorno di } x = x_0 & \begin{cases} \text{l'integrale improprio converge per} & p < 1\,, \\ \text{l'integrale improprio diverge per} & p \ge 1\,; \end{cases} \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{1}{|x|^p \left|\log|x|\right|^q}} \begin{cases} \text{in un intorno di } \infty & \begin{cases} \text{l'integrale improprio converge per} & p > 1,\ \forall q \in \mathbb{R}\,, \\ \text{l'integrale improprio converge per} & p = 1,\ q > 1\,, \\ \text{l'integrale improprio diverge per} & p = 1,\ q \le 1\,, \\ \text{l'integrale improprio diverge per} & p < 1,\ \forall q \in \mathbb{R}\,; \end{cases} \\[2ex] \text{in un intorno di } x = 0 & \begin{cases} \text{l'integrale improprio converge per} & p < 1,\ \forall q \in \mathbb{R}\,, \\ \text{l'integrale improprio converge per} & p = 1,\ q > 1\,, \\ \text{l'integrale improprio diverge per} & p = 1,\ q \le 1\,, \\ \text{l'integrale improprio diverge per} & p > 1,\ \forall q \in \mathbb{R}\,; \end{cases} \\[2ex] \text{in un intorno di } x = 1 & \begin{cases} \text{l'integrale improprio converge per} & q < 1,\ \forall p \in \mathbb{R}\,, \\ \text{l'integrale improprio diverge per} & q \ge 1,\ \forall p \in \mathbb{R}\,. \end{cases} \end{cases}$$

• Esercizi

ESERCIZIO 5.61. Stabilire se la funzione $f(x) = \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ è impropriamente integrabile nell'intervallo $(0, +\infty)$. Calcolare esplicitamente l'integrale

$$\int_0^1 \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)\, dx\,.$$

Svolgimento : *Per $x \to +\infty$, $f(x) \sim \frac{1}{x}$. Essa, pertanto, non è integrabile in $(0, +\infty)$. D'altra parte, per $x \to 0^+$,*

$$f(x) \sim \log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log x = -\frac{1}{x^0 (\log x)^{-1}}\,.$$

Poiché l'ultima funzione è integrabile in un intorno destro di $x = 0$, f risulta integrabile in $(0, 1]$ e si ha

$$\int_0^1 \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)\, dx = \int_0^1 [\log(x+1) - \log x]\, dx = [(x+1)\log(x+1) - x - x\log x + x]\big|_0^1 =$$
$$= 2\log 2 - \lim_{x \to 0^+} [(x+1)\log(x+1) - x\log x] = 2\log 2\,.$$

ESERCIZIO 5.62. Studiare l'integrabilità in $\mathbb{R}$ della funzione $f(x) = \arctan(x) \cdot \arctan(2x)$.

Svolgimento : *La funzione è pari, perché prodotto di due funzioni dispari. Pertanto*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 2\int_0^{+\infty} f(x)\, dx\,.$$

D'altra parte, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$. Poiché la funzione tende a un limite finito positivo, essa ha integrale divergente positivamente.

ESERCIZIO 5.63. Applicando i criteri di integrabilità, stabilire se esiste finito

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\,(1 + \sqrt{x})^3}\, dx\,.$$

In caso affermativo, calcolare l'integrale.

Svolgimento : *Per $x \to 0^+$, $\frac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})^3} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$. La funzione, pertanto, risulta integrabile in senso improprio in $(0, 1]$. Effettuando la sostituzione $t = \sqrt{x}$, da cui $dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$, $t(0) = 0$ e $t(1) = 1$, si ha*

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})^3}\, dx = \int_0^1 \frac{2}{(1+t)^3}\, dt = -\frac{1}{(1+t)^2}\bigg|_0^1 = \frac{3}{4}\,.$$

ESERCIZIO 5.64. Stabilire se esiste il seguente integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(3 + 5x^5)\arctan x^{3/2}}\, dx\,.$$

Svolgimento : *Per stabilire l'esistenza dell'integrale improprio proposto, dobbiamo studiare il comportamento della funzione integranda in un intorno destro di $x = 0$, dove il denominatore non è definito, ed in un intorno di $+\infty$. Otteniamo*

$$U(0^+) \quad f(x) \sim \frac{x^2}{3x^{3/2}} \sim \frac{x^{1/2}}{3} = \frac{1}{3x^{-1/2}} \implies \textit{esiste l'integrale improprio, poiché } -1/2 < 1\,;$$

$$U(+\infty) \quad f(x) \sim \frac{x^2}{5x^5\pi/2} \sim \frac{2}{5\pi x^3} \implies \textit{esiste l'integrale improprio, poiché } 3 > 1\,.$$

Pertanto, l'integrale improprio proposto esiste. Osserviamo che, in realtà, poiché $f(x) \sim \frac{\sqrt{x}}{3}$, per $x \to 0^+$, essa è prolungabile con continuità in $x = 0$ e quindi ha integrale finito in $U(0^+)$.

DOMANDA 5.65. $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$ vale

$\boxed{a}$ $+\infty$; $\boxed{b}$ -1; $\boxed{c}$ non esiste; $\boxed{d}$ esiste finito. ✓

ESERCIZIO 5.66. Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito il seguente integrale improprio

$$\int_0^{1/2} \frac{[x(1-2x)]^{\alpha-5}}{\sin x}\, dx .$$

Svolgimento : *Per stabilire se l'integrale improprio proposto esiste finito, dobbiamo studiare il comportamento della funzione integranda in un intorno destro di $x = 0$, dove si annullano il denominatore e il termine $x^{\alpha-5}$ (che per $\alpha < 5$ si troverà anch'esso al denominatore), e in un intorno sinistro di $x = \frac{1}{2}$, dove si annulla il termine $(1-2x)^{\alpha-5}$ (che per $\alpha < 5$ si troverà al denominatore). Otteniamo:*

$$\text{per } x \to 0^+ \qquad f(x) \sim \frac{1}{x^{5-\alpha}\sin x} \sim \frac{1}{x^{6-\alpha}} \qquad \Longrightarrow \qquad \text{l'integrale esiste finito se } \alpha > 5 .$$

Poiché, per $\alpha > 5$, l'espressione $(1-2x)^{\alpha-5}$ ha sempre esponente positivo, cioè si trova sempre al numeratore, la funzione integranda si può prolungare con continuità in $x = 1/2$ e, quindi, ha integrale finito in un intorno sinistro di $x = 1/2$. Pertanto l'integrale improprio proposto esiste finito per $\alpha > 5$.

DOMANDA 5.67. Sia $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2}$. Allora

$\boxed{a}$ $\int_{10}^{+\infty} f(x)\, dx \in \mathbb{R}$; $\boxed{b}$ $\int_1^5 f(x)\, dx \notin \mathbb{R}$; $\boxed{c}$ $\int_5^{+\infty} f(x)\, dx$ non esiste finito; $\boxed{d}$ $\int_0^1 f(x)\, dx \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 5.68. Determinare i valori $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\arctan(x^\alpha)$ risulti integrabile nell'intervallo $(0, +\infty)$. Calcolare esplicitamente

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx .$$

Svolgimento : *Per $x \to +\infty$,*

$$\begin{aligned}
&\arctan(x^\alpha) \to \frac{\pi}{2} \quad \textit{se} \quad \alpha > 0 ;\\
&\arctan(x^\alpha) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \quad \textit{se} \quad \alpha = 0 ;\\
&\arctan(x^\alpha) \sim x^\alpha \quad \textit{se} \quad \alpha < 0 ;
\end{aligned}$$

pertanto

$$f(x) \sim \begin{cases} \dfrac{\pi}{2x^2} & \textit{se } \alpha > 0 \textit{ (integrabile in un intorno di } +\infty) ;\\[2mm] \dfrac{\pi}{4x^2} & \textit{se } \alpha = 0 \textit{ (integrabile in un intorno di } +\infty) ;\\[2mm] \dfrac{1}{x^{2-\alpha}} & \textit{se } \alpha < 0 \textit{ (integrabile se } \alpha < 1) . \end{cases}$$

Per $x \to 0^+$,

$$\begin{aligned}
&\arctan(x^\alpha) \sim x^\alpha \quad \textit{se} \quad \alpha > 0 ;\\
&\arctan(x^\alpha) = \frac{\pi}{4} \quad \textit{se} \quad \alpha = 0 ;\\
&\arctan(x^\alpha) \to \frac{\pi}{2} \quad \textit{se} \quad \alpha < 0 ;
\end{aligned}$$

pertanto

$$f(x) \sim \begin{cases} \dfrac{1}{x^{2-\alpha}} & \textit{se } \alpha > 0 \textit{ (integrabile in un intorno di } 0 \textit{ se } \alpha > 1) ;\\[2mm] \dfrac{\pi}{4x^2} & \textit{se } \alpha = 0 \textit{ (non integrabile)} ;\\[2mm] \dfrac{\pi}{2x^2} & \textit{se } \alpha < 0 \textit{ (non integrabile)} . \end{cases}$$

Quindi la funzione è impropriamente integrabile in $(0, +\infty)$ per $\alpha > 1$.

Poiché

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} \arctan(x^{-1})\, dx$$

(cioè $\alpha = -1$), l'integrale richiesto diverge positivamente.

Calcoliamolo, in ogni caso, esplicitamente. Ponendo $t = 1/x$, da cui $dt = -1/x^2\, dx$, otteniamo

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx &= -\int_{+\infty}^0 \arctan t\, dt = \\
&= \left[t \arctan t \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^2}\, dt \right] = \left[t \arctan t - \frac{1}{2}\log(1+t^2) \right]\Big|_0^{+\infty} = \\
&= \lim_{t \to +\infty} \left[t \arctan t - \frac{1}{2}\log(1+t^2) \right] = +\infty .
\end{aligned}$$

ESERCIZIO 5.69. Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esiste finito

$$\int_0^1 \frac{\arctan(x^{2/\alpha})}{\sin\sqrt{x} + x}\, dx .$$

Svolgimento : *Osserviamo che l'integrale proposto è un integrale improprio, poiché il denominatore si annulla per $x = 0$ e, per $\alpha < 0$, $x^{2/\alpha} = \frac{1}{x^{2/|\alpha|}}$. Pertanto bisogna studiare il comportamento della funzione in un intorno destro di $x = 0$. Si ottiene che, per $x \to 0^+$,*

$$f(x) \sim \begin{cases} \dfrac{\pi/2}{\sqrt{x}+x} \sim \dfrac{\pi}{2\sqrt{x}} & \textit{se } \alpha < 0 ;\\[2mm] \dfrac{x^{2/\alpha}}{\sqrt{x}+x} \sim \dfrac{1}{x^{1/2-2/\alpha}} & \textit{se } \alpha > 0 ; \end{cases}$$

pertanto, poiché $1/2 - 2/\alpha < 1$ per $\alpha > 0$, l'integrale improprio esiste finito per ogni $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

ESERCIZIO 5.70. Stabilire per quali valori del parametro reale α l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{|x^2-1|^\alpha}{|\log x|} \sinh x\, dx$$

esiste finito.

Svolgimento : *Osserviamo che f va studiata in un intorno destro di $x = 0$ e in un intorno sinistro di $x = 1$. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per* $\sinh x$, *si ottiene che, per* $x \to 0^+$,

$$f(x) \sim \frac{x}{|\log x|} = \frac{1}{x^{-1}|\log x|}$$

che è impropriamente integrabile. In realtà, per $x \to 0^+$, $f(x) \to 0$, quindi essa è prolungabile con continuità in $x = 0$ e, pertanto, è sicuramente integrabile.

Per $x \to 1^-$, riscriviamo la funzione integranda nella forma

$$f(x) = \frac{|x+1|^\alpha \cdot |x-1|^\alpha}{|\log[1+(x-1)]|} \cdot \sinh x \, .$$

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per $\log(1+t)$, *con $t = x - 1$, si ottiene che, per $x \to 1^-$,*

$$f(x) \sim 2^\alpha (\sinh 1)\frac{|x-1|^\alpha}{|x-1|} = \frac{2^\alpha \sinh 1}{|x-1|^{1-\alpha}}$$

che è impropriamente integrabile per $\alpha > 0$. Quindi l'integrale proposto esiste finito per $\alpha > 0$.

ESERCIZIO 5.71. Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito il seguente integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x^2)}{x^\alpha(1+x^3)}\, dx \, .$$

Svolgimento : *La funzione è definita e continua in $(0, +\infty)$.*

Per $x \to 0^+$, $f(x) \sim \dfrac{x^2}{x^\alpha} = \dfrac{1}{x^{\alpha-2}}$, che è impropriamente integrabile per $\alpha < 3$.

Per $x \to +\infty$, $f(x) \sim \dfrac{\log(x^2)}{x^\alpha \cdot x^3} = \dfrac{2\log x}{x^{\alpha+3}} = \dfrac{2}{x^{\alpha+3}(\log x)^{-1}}$, che è impropriamente integrabile per $\alpha > -2$. In conclusione, l'integrale converge se $-2 < \alpha < 3$.

DOMANDA 5.72. Sia $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che esiste il $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Allora

$\boxed{a}$ $\frac{f(x)}{x^2}$ è impropriamente integrabile in $[1, +\infty)$; $\boxed{b}$ $\int_1^2 f(x)\, dx = +\infty$; $\boxed{c}$ $f(x) \sim \frac{1}{x}$ per $x \to +\infty$; $\boxed{d}$ $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 5.73. Stabilire per quali valori del parametro reale α l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{|\log x|}{|x^2-1|^\alpha} \sin x \, dx$$

esiste finito.

Svolgimento : *La funzione è continua in $(0, 1)$. Per $x \to 0^+$, $f(x) \sim |\log x| x \to 0$ ed è quindi prolungabile con continuità in $x = 0$; pertanto, f ha integrale finito in un intorno destro di $x = 0$. Per $x \to 1^-$, riscriviamo la funzione nella forma*

$$f(x) = \frac{|\log[1+(x-1)]|}{|x+1|^\alpha \cdot |x-1|^\alpha} \cdot \sin x \sim \frac{\sin 1}{2^\alpha} \cdot \frac{|x-1|}{|x-1|^\alpha} = \frac{\sin 1}{2^\alpha} \cdot \frac{1}{|x-1|^{\alpha-1}}$$

e il suo integrale converge in $(0, 1)$ se $\alpha < 2$.

DOMANDA 5.74. Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua, limitata e strettamente positiva. Allora

$\boxed{a}$ $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ esiste finito; $\boxed{b}$ $\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x^2}\, dx$ esiste finito; $\boxed{c}$ f non è impropriamente integrabile in $[0, +\infty)$; $\boxed{d}$ $\int_0^1 f(x)\, dx = +\infty$.

ESERCIZIO 5.75. Stabilire per quali valori del parametro reale α l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{|\log x|(\sin x)^\alpha}\, dx$$

esiste finito.

ESERCIZIO 5.76. Stabilire per quali valori del parametro reale α l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{1-x^2}}{|\log x|} (\sinh x)^\alpha \, dx$$

esiste finito.

DOMANDA 5.77. Sia $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ una funzione continua. Allora

$\boxed{a}$ $\int_0^1 f(x)\, dx = +\infty$; $\boxed{b}$ $\int_1^{10} f(x)\, dx = +\infty$; $\boxed{c}$ se, per $x \to 0^+$, $f(x) \sim \frac{x}{x^{3/2}+x^4}$, $\int_0^1 f(x)\, dx \in \mathbb{R}$; $\boxed{d}$ $\int_0^1 f(x)\, dx \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 5.78. Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esiste finito

$$\int_0^1 \frac{\arctan(x^{1/2\alpha})}{\sin \sqrt[3]{x} + x^2}\, dx \, .$$

Svolgimento : *La funzione è continua in $(0, 1]$. Quindi studiamo il suo comportamento solo per $x \to 0^+$:*

$$\text{per } \alpha > 0, \quad \arctan\left(x^{1/(2\alpha)}\right) \sim x^{1/(2\alpha)} \, ,$$

$$\text{per } \alpha < 0, \quad \arctan\left(x^{1/(2\alpha)}\right) \to \frac{\pi}{2} \, .$$

Pertanto, per $\alpha > 0$,

$$f(x) \sim \frac{x^{1/(2\alpha)}}{x^{1/3}+x^2} \sim \frac{x^{1/(2\alpha)}}{x^{1/3}} = \frac{1}{x^{\frac{2\alpha-3}{6\alpha}}}$$

ed è impropriamente integrabile se $\dfrac{2\alpha-3}{6\alpha} < 1$, ovvero per $\alpha > -3/4$, condizione sempre verificata per $\alpha > 0$.

Per $\alpha < 0$, $f(x) \sim \dfrac{\pi}{2x^{1/3}}$ ed è impropriamente integrabile per ogni $\alpha < 0$. In conclusione, la funzione è integrabile per ogni $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

ESERCIZIO 5.79. Studiare l'integrabilità in $(0, +\infty)$ della funzione

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \, .$$

ESERCIZIO 5.80. Applicando i criteri di integrabilità, stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}^+$ l'integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{(\sin x)^\alpha}\, dx$$

risulta convergente. In caso di convergenza, calcolare l'integrale.

Svolgimento : *Per $x \to 0^+$, $f(x) \sim \dfrac{1}{x^\alpha}$ ed è integrabile per $\alpha < 1$. In tal caso, si ha*

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{(\sin x)^\alpha}\, dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}\, (\sin x)^{1-\alpha}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} & \text{se} \quad \alpha \neq 1 \\ \log(\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} & \text{se} \quad \alpha = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}\, \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{1-\alpha} - \lim_{x\to 0^+} (\sin x)^{1-\alpha}\right] & \text{se} \quad \alpha \neq 1 \\ \log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \lim_{x\to 0^+} \log(\sin x) & \text{se} \quad \alpha = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}\, 2^{\frac{\alpha-1}{2}} & \text{se} \quad \alpha < 1 \\ +\infty & \text{se} \quad \alpha \geq 1 \end{cases} .$$

ESERCIZIO 5.81. Applicando i criteri di integrabilità, stabilire se gli integrali

$$\text{a)} \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\tan x}\, \cos^2 x}\, dx \qquad ; \qquad \text{b)} \quad I_2 = \int_2^{+\infty} \frac{x}{1 + x\sqrt{x}}\, dx$$

sono convergenti. In caso di convergenza, calcolare l'integrale.

ESERCIZIO 5.82. Studiare l'integrabilità, nell'intervallo $(0, \pi/2)$, della funzione

$$f(x) = \frac{\sin\sqrt{x}}{\sin x \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2} - x}} .$$

ESERCIZIO 5.83. Studiare l'integrabilità, nell'intervallo $(3, +\infty)$, della funzione

$$f(x) = \frac{x^3 - 8x^2 + 21x - 18}{(x-2)^3\, (x-3)^2} .$$

In caso affermativo, calcolare

$$\int_3^{+\infty} \frac{x^3 - 8x^2 + 21x - 18}{(x-2)^3\, (x-3)^2}\, dx .$$

Cosa si può dire dell'integrabilità di f nell'intervallo $(2, +\infty)$?

Svolgimento : *Poiché anche il numeratore si annulla in $x = 3$, possiamo fattorizzarlo, riscrivendo $f(x)$ nella forma*

$$f(x) = \frac{(x-3)(x^2 - 5x + 6)}{(x-2)^3\, (x-3)^2} = \frac{(x-3)^2\, (x-2)}{(x-2)^3\, (x-3)^2} = \frac{1}{(x-2)^2} \qquad \forall x \neq 3 .$$

La funzione, dunque, è prolungabile per continuità nel punto $x = 3$, quindi è integrabile in ogni intervallo limitato $[3, a]$. Inoltre, per $x \to +\infty$, $f(x) \sim \dfrac{x^3}{x^5} = \dfrac{1}{x^2}$, che è impropriamente integrabile in un intorno di $+\infty$. Pertanto, l'integrale converge e si ha

$$\int_3^{+\infty} f(x)\, dx = \int_3^{+\infty} \frac{1}{(x-2)^2}\, dx = -\frac{1}{(x-2)}\Big|_3^{+\infty} = -\left[\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-2} - 1\right] = 1 .$$

Poiché, per $x \to 2^+$, $f(x) \sim \dfrac{1}{(x-2)^2}$, essa non è integrabile in senso improprio in $(2, +\infty)$.

ESERCIZIO 5.84. Calcolare il seguente integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} x^3\, e^{-x}\, dx .$$

Svolgimento : *Si procede integrando tre volte per parti ed osservando che*

$$x^n\, e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} (x^n\, e^{-x}) = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N} .$$

Si ha

$$\int_0^{+\infty} x^3\, e^{-x}\, dx = -x^3\, e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 3x^2\, e^{-x}\, dx = 3\left[-x^2\, e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2x\, e^{-x}\, dx\right]$$
$$= 6\left[-x\, e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx\right] = 6\left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty}$$
$$= -6\left(\lim_{x\to+\infty} e^{-x} - 1\right) = 6 .$$

In generale, si può dimostrare che

$$\int_0^{+\infty} x^n\, e^{-x}\, dx = n! \qquad \forall n \in \mathbb{N} ,$$

effettuando n integrazioni per parti.

ESERCIZIO 5.85. Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito il seguente integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{(x-1)^\alpha \log x}{1 + \log^2 x}\, dx .$$

Risposte agli esercizi non svolti: **5.65**: d - **5.67**: a - **5.72**: a - **5.74**: b - **5.75**: $\alpha < 1$ - **5.76**: $\alpha > -1$ - **5.77**: c - **5.79**: l'integrale diverge positivamente - **5.81**: **a)** funzione integrabile: $I_1 = 2$; **b)** l'integrale diverge positivamente - **5.82**: l'integrale converge - **5.85**: $-2 < \alpha < -1$.

5.5. *Funzioni integrali*

Il Teorema di Torricelli, o Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale, e l'integrazione impropria sono utili strumenti nello studio delle funzioni integrali. In particolare, è ben noto che, se la funzione integranda è continua, la funzione integrale risulta essere continua e derivabile e la sua derivata coincide con la funzione integranda stessa. In realtà, la funzione integrale mantiene le proprietà di continuità e derivabilità anche nei punti in cui la funzione integranda ha delle discontinuità eliminabili o è prolungabile con continuità. Qualora, invece, la funzione integranda abbia un punto di discontinuità di salto o un punto di infinito, in cui risulti essere integrabile in senso improprio, si può dimostrare che la funzione integrale è ancora continua in tale punto, anche se non più derivabile. In questi casi, infatti, si forma un angolo, una cuspide oppure un flesso a tangente verticale. Dunque, la funzione integrale può essere prolungabile oltre l'intervallo di continuità della funzione integranda, contenente l'estremo fisso di integrazione, come si potrà osservare negli esercizi proposti. Chiaramente, nel caso in cui si possa esplicitare la funzione integrale, lo studio del suo comportamento qualitativo si può svolgere in modo diretto, senza ricorrere agli strumenti sopra richiamati.

Ricordiamo che ogni funzione integrale costruita a partire da una funzione integrabile e dispari è una funzione pari, mentre ogni funzione integrale di una funzione integrabile e pari è data da una funzione dispari sommata ad una costante, corrispondente al valore della funzione integrale in considerazione calcolato nell'origine. In particolare, se il valore della funzione integrale nell'origine è nullo e l'integranda è pari, allora la funzione integrale corrispondente è dispari.

- Esercizi[1]

ESERCIZIO 5.86. Calcolare la derivata prima della funzione integrale

$$F(x) = \int_1^x \frac{t\log(1+t)}{2t^2+5}\,dt\,.$$

Svolgimento : *Dal Teorema di Torricelli, si ottiene immediatamente* $F'(x) = \frac{x\log(1+x)}{2x^2+5}$.

ESERCIZIO 5.87. Determinare i punti di massimo e minimo locali della funzione

$$F(x) = \int_0^{x^2} \frac{e^t(2t-t^2)}{\pi - 2\arctan t}\,dt\,.$$

Svolgimento : *Osserviamo che, dal Teorema di Torricelli, si ha che, se* $F(x) = \int_{x_0}^{\alpha(x)} f(t)\,dt$, *con* $\alpha(x) \in C^1(\mathbb{R})$, *allora* $F'(x) = f(\alpha(x))\cdot\alpha'(x)$. *Pertanto,*

$$F'(x) = \frac{e^{x^2}(2x^2-x^4)}{\pi - 2\arctan x^2}2x = 2x^3(2-x^2)\frac{e^{x^2}}{\pi-2\arctan x^2}\,,$$

dove $\frac{e^{x^2}}{\pi-2\arctan x^2} > 0$, *in quanto* $\arctan t < \frac{\pi}{2}$, *per ogni* $t \in \mathbb{R}$. *Da ciò segue facilmente che* $F'(x) = 0$ *per* $x = 0, \pm\sqrt{2}$; *inoltre* $F'(x) < 0$ *per* $-\sqrt{2} < x < 0$ *e* $x > \sqrt{2}$, *ed* $F'(x) > 0$ *per* $x < -\sqrt{2}$ *e* $0 < x < \sqrt{2}$. *Pertanto* $x = \pm\sqrt{2}$ *sono punti di massimo, mentre* $x = 0$ *è punto di minimo.*

[1] Negli esercizi di questo paragrafo, anche se non sarà espressamente indicato, useremo per convenzione la lettera f per indicare la funzione integranda, seguendo la notazione utilizzata nell'enunciato del Teorema di Torricelli.

ESERCIZIO 5.88. Data $F(x) = \int_0^{4x} \frac{e^t}{(|t|+1)\cosh t}\,dt$, calcolare $F'(0)$.

Svolgimento : *Dal Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale si ottiene* $F'(x) = 4\frac{e^{4x}}{(|4x|+1)\cosh(4x)}$, *da cui* $F'(0) = 4$.

ESERCIZIO 5.89. Determinare gli eventuali punti di discontinuità e di non derivabilità della funzione

$$F(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 6 & \text{se } x \geq 0 \\ 2 + \int_0^x t\cos t\,dt & \text{se } -\pi < x < 0 \\ \pi(x+\pi) & \text{se } x \leq -\pi\,. \end{cases}$$

Svolgimento : *Ognuna delle tre funzioni in cui è spezzata* F *è definita su tutto l'asse reale. Pertanto la funzione stessa è definita su tutto* $\mathbb{R}$.

$$F(0) = 6 = \lim_{x\to 0^+} F(x) \neq \lim_{x\to 0^-} F(x) = 2 + \int_0^0 t\cos t\,dt = 2\,.$$

In $x = 0$ *abbiamo una discontinuità di salto.*

Calcolando per parti l'integrale definito, abbiamo

$$\int_0^x t\cos t\,dt = [t\sin t]\Big|_0^x - \int_0^x \sin t\,dt = x\sin x + \cos x - 1\,.$$

Segue che

$$\lim_{x\to-\pi^+} F(x) = \lim_{x\to-\pi^+}(2 + x\sin x + \cos x - 1) = 0 = \lim_{x\to-\pi^-} F(x) = F(-\pi)\,.$$

La funzione è continua nel punto $x = -\pi$.

Per il Teorema di Torricelli, abbiamo

$$F'(x) = \begin{cases} 2x - 5 & se\ x > 0 \\ x\cos x & se\ -\pi < x < 0 \\ \pi & se\ x < -\pi\,. \end{cases}$$

Pertanto

$$\lim_{x\to-\pi^+} F'(x) = \pi = \lim_{x\to-\pi^-} F'(x)\,.$$

La funzione è dunque anche derivabile in $x = -\pi$ *e la sua derivata, in tale punto, vale* π. *Ovviamente, la funzione, non essendo continua in* $x = 0$, *non è neanche derivabile in tale punto.*

ESERCIZIO 5.90. Determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza della funzione integrale

$$F(x) = \int_0^x t(1-t^2)e^{\cos(t^2)}\,dt\,.$$

Svolgimento : *La funzione è definita su tutto l'asse reale. Per il Teorema di Torricelli, abbiamo*

$$F'(x) = x(1-x^2)e^{\cos(x^2)} \geq 0 \iff x(1-x^2) \geq 0 \iff x \in (-\infty,-1] \cup [0,1] .$$

Pertanto, $F(x)$ cresce negli intervalli $(-\infty,-1)$ e $(0,1)$; decresce negli intervalli $(-1,0)$ e $(1,+\infty)$. In $x = \pm 1$ la funzione ha dei massimi relativi, mentre in $x = 0$ ha un minimo relativo.

Si osservi che, data la disparità della funzione integranda, F è una funzione pari, in accordo con la presenza di un estremante in $x = 0$ e con la simmetria degli altri due estremanti.

ESERCIZIO 5.91. Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{3x^8} \int_0^x t\sin(t^7)\, dt .$$

Svolgimento : *Il limite da luogo a una forma indeterminata, che può essere risolta per mezzo del Teorema di de L'Hospital:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x t\sin(t^7)\, dt}{(3x^8)} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{x\sin(x^7)}{24x^7} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{24} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^7)}{x^7} = 0 .$$

ESERCIZIO 5.92. Calcolare la derivata prima della funzione integrale

$$F(x) = \int_1^x \frac{\sin(1+2t)}{1+t^2}\, dt .$$

DOMANDA 5.93. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua, non negativa e monotona crescente. Allora, posta $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$,

$\boxed{a}$ F è convessa; $\boxed{b}$ F è monotona crescente e limitata; $\boxed{c}$ non esiste il $\lim_{x\to+\infty} F(x)$;
$\boxed{d}$ $F(x) \geq 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 5.94. Determinare i punti di massimo e minimo locali della funzione integrale

$$F(x) = \int_0^{2x+1} \frac{t^2+t}{\log(2+t^2)}\, dt .$$

DOMANDA 5.95. Sia $f : \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ una funzione di classe $C^1(\mathbb{R})$. Allora, posto $F(x) = \int_1^x t^2 f(t)\, dt$, si ha:

$\boxed{a}$ F è convessa in $\mathbb{R}$; $\boxed{b}$ F è crescente in $\mathbb{R}$; $\boxed{c}$ esiste finito il $\lim_{x\to+\infty} F(x)$; $\boxed{d}$ $F(0) = 0$.

ESERCIZIO 5.96. Calcolare la derivata prima della funzione integrale

$$F(x) = \int_x^1 \frac{e^t}{2+\sin t^2}\, dt .$$

ESERCIZIO 5.97. Determinare i punti di massimo e minimo locali della funzione

$$F(x) = \int_0^{3x+2} \frac{t^2-t}{e^{2+\sin t}}\, dt .$$

DOMANDA 5.98. Sia $F(x) = \int_0^{x^2} f(t)\, dt$ con $f : \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ continua. Allora

$\boxed{a}$ $F'(x) = f(x^2)$; $\boxed{b}$ $F'(x) = f(x^2) - f(0)$; $\boxed{c}$ F ha un punto di minimo per $x = 0$;
$\boxed{d}$ $F(x) > 0$ per $x > 0$ ed $F(x) < 0$ per $x < 0$.

ESERCIZIO 5.99. Data $\qquad F(x) = \int_2^{x/2} \frac{e^{2t}}{e^{4t}+1}\, dt$, calcolare $F'(0)$.

ESERCIZIO 5.100. Data la funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_1^x \frac{e^t-1}{t}\, dt & \text{se } x > 1; \\ x - 1 & \text{se } x \leq 1; \end{cases}$$

stabilire la natura del punto $x = 1$.

Svolgimento : *Osserviamo innanzitutto che la funzione $f(t) = \frac{e^t-1}{t}$ è continua nell'intervallo $[1,x]$, per ogni $x > 1$ e pertanto è ivi integrabile. Quindi, anche la funzione F è continua in $x = 1$, in quanto*

$$\lim_{x\to 1^+} F(x) = \int_1^1 h(t)\, dt = 0 = F(1) = \lim_{x\to 1^-} F(x) .$$

Osserviamo poi che

$$F'(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x-1}{x} & se\ x > 1\ ; \\ 1 & se\ x < 1\ . \end{cases}$$

Calcolando, infine, i limiti destro e sinistro di $F'(x)$ per $x \to 1$, si ottiene

$$\lim_{x\to 1^-} F'(x) = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 1^+} F'(x) = e - 1 ,$$

che sono entrambi finiti, ma diversi. Pertanto, si ha che $x = 1$ è punto angoloso.

DOMANDA 5.101. Sia $F(x) = \int_{\sin x}^2 f(t)\, dt$ con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Allora

$\boxed{a}$ $F'(x) = f(\sin x)$; $\boxed{b}$ $F'(x) = -f(\sin x)$; $\boxed{c}$ $F'(x) = (\cos x) f(\sin x)$; $\boxed{d}$ $F'(x) = (-\cos x) f(\sin x)$.

ESERCIZIO 5.102. Data la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{se } x \leq 2; \\ \displaystyle\int_2^x \frac{\log(1+t)}{t}\, dt & \text{se } x > 2; \end{cases}$$

stabilire la natura del punto $x = 2$.

ESERCIZIO 5.103. Stabilire se la funzione integrale

$$F(x) = \int_0^x \frac{\log(1+t^2)}{\sqrt{t^2+1}}\, dt$$

ammette asintoti obliqui per $x \to \pm\infty$.

Svolgimento : *Poiché la funzione integranda è pari e, in questo caso, $F(0) = 0$, la funzione integrale è dispari e, quindi, sarà sufficiente studiarne il comportamento solo a $+\infty$. Poiché per $t \to +\infty$ si ha*

$$f(t) \sim 2\frac{\log t}{t} ,$$

che non è impropriamente integrabile (in quanto $(\log t)/t > 1/t$, per $t > e$), otteniamo che $F(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$, quindi non esiste asintoto orizzontale a $+\infty$ (e, per simmetria, neppure a $-\infty$). D'altra parte

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} F'(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}} = 0$$

e ciò comporta che non esiste asintoto obliquo a $+\infty$ (e, per simmetria, neppure a $-\infty$).

ESERCIZIO 5.104. Data la funzione integrale

$$F(x) = \int_0^x \sin(t^2)\, dt ,$$

a) calcolare F', F'', F''';

b) calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x^3} ;$$

c) determinare l'ordine di infinitesimo di F in $x = 0$.

ESERCIZIO 5.105. Data la funzione integrale

$$F(x) = \int_0^x \left[e^{2t^2} - 3e^{t^2} + \frac{5}{4} \right] dt ,$$

calcolarne la derivata prima e seconda, determinarne gli intervalli di concavità e di convessità e gli eventuali flessi.

ESERCIZIO 5.106. Data la funzione integrale

$$F(x) = \int_0^x \left[\sin^2(t^2) - 3\sin(t^2) + \frac{5}{4} \right] dt ,$$

calcolarne la derivata prima e seconda, determinarne gli intervalli di concavità e di convessità e gli eventuali flessi.

DOMANDA 5.107. Sia $F : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $F(x) = \int_0^{\log x} e^t f'(e^t)\, dt$, dove $f \in C^1(\mathbb{R})$. Allora

$\boxed{a}$ $F(x) = \int_0^{\log x} f(s)\, ds$; $\boxed{b}$ $F(x) = \int_0^{\log x} f'(s)\, ds$; $\boxed{c}$ $F(x) = xf(\log x) - f(0)$;
$\boxed{d}$ $F(x) = f(x) - f(1)$.

ESERCIZIO 5.108. Studiare la funzione

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2}\,\mathrm{sign}(x+2) + \dfrac{\pi}{3} & \text{se} \quad x \le 0 , \\[2mm] 1 + \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^3+3t}\, e^{3\log t}\, dt & \text{se} \quad x > 0 , \end{cases}$$

tracciandone il grafico.

Svolgimento : *Osserviamo che, poiché $e^{3\log t} = t^3$ $\forall t > 0$, possiamo riscrivere la funzione nel seguente modo (anche tenendo conto del comportamento della funzione $\mathrm{sign}(x)$):*

$$F(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{\pi}{3} & se \quad x < -2 , \\[2mm] \dfrac{\pi}{3} & se \quad x = -2 , \\[2mm] \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{\pi}{3} & se \quad -2 < x \le 0 , \\[2mm] 1 + \displaystyle\int_1^x \frac{t^2}{t^2+3}\, dt = 1 + \int_1^x \left[1 - \frac{3}{t^2+3}\right] dt & se \quad x > 0 . \end{cases}$$

Per $x \le 0$ il grafico di F è dato da due rami di parabola, tra loro disgiunti, in quanto

$$\lim_{x\to-2^-} F(x) = -2 + \frac{\pi}{3} \neq \lim_{x\to-2^+} F(x) = 2 + \frac{\pi}{3} ;$$

la funzione ha, quindi, una discontinuità di salto in $x = -2$.

Risolviamo l'integrale per $x > 0$:

$$F(x) = 1 + \int_1^x \left[1 - \frac{3}{t^2+3}\right] dt = 1 + \left[t - \sqrt{3}\,\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right]_1^x =$$
$$= x + \frac{\sqrt{3}}{6}\,\pi - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) .$$

Per il teorema di Torricelli,

$$F'(x) = \begin{cases} -x & se \quad x < -2 , \\[2mm] x & se \quad -2 < x < 0 , \\[2mm] \dfrac{x^2}{x^2+3} & se \quad x > 0 . \end{cases}$$

Dunque la funzione cresce in $(-\infty,-2) \cup (0,+\infty)$ e decresce in $(-2,0)$. Essendo

$$\lim_{x\to-2^-} F(x) < F(-2) = \frac{\pi}{3} < \lim_{x\to-2^+} F(x) ,$$

il punto $x = -2$ non è di minimo né di massimo. Inoltre, $\lim_{x\to0^+} F(x) = \frac{\sqrt{3}}{6}\,\pi$. Poiché, in un intorno sinistro di $x = 0$, $F(x) > F(0) = \frac{\pi}{3}$, ma $F(0) > \lim_{x\to0^+} F(x)$, il punto $x = 0$ (in cui abbiamo una discontinuità di salto) non è di minimo né di massimo.

Asintoti:

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[x + \frac{\sqrt{3}}{6}\,\pi - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\right] = +\infty ;$$

$$\lim_{x\to+\infty} F'(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2+3} = 1 ;$$

$$\lim_{x\to+\infty} [F(x) - x] = \frac{\sqrt{3}}{6}\,\pi - \sqrt{3} \lim_{x\to+\infty} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}\,\pi .$$

Pertanto la funzione ha asintoto obliquo per $x \to +\infty$, di equazione $y = x - \frac{\sqrt{3}}{3}\pi$, mentre, ovviamente, la funzione non ha asintoto obliquo per $x \to -\infty$.

Concavità e convessità:

$$F''(x) = \begin{cases} -1 & se \quad x < -2\,, \\ 1 & se \quad -2 < x < 0\,, \\ \dfrac{6x}{(x^2+3)^2} & se \quad x > 0\,; \end{cases}$$

quindi, $F''(x) > 0$ per $x > 0$. Pertanto, la funzione è concava in $(-\infty, -2)$; convessa in $(-2, 0) \cup (0, +\infty)$. Il grafico è riportato nel Capitolo 11.

ESERCIZIO 5.109. Facendo uso dei teoremi fondamentali del calcolo integrale, determinare l'insieme di definizione, gli intervalli di monotonia, concavità e convessità della funzione

$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\frac{5}{2}}^{x} \log(3-t)\, dt & \text{se} \quad x \le \frac{5}{2}\,, \\ x^2 - \dfrac{25}{4} & \text{se} \quad x > \frac{5}{2}\,. \end{cases}$$

Successivamente, calcolare l'integrale definito e studiare il comportamento asintotico e gli eventuali punti singolari della funzione e della sua derivata.

ESERCIZIO 5.110. Facendo uso dei teoremi fondamentali del calcolo integrale, determinare l'insieme di definizione, gli intervalli di monotonia, concavità e convessità della funzione

$$F(x) = \int_0^x t^3\,(1+t^2)^{1/2}\, dt - 2$$

Successivamente,

- **a)** calcolare l'integrale definito;
- **b)** studiare il comportamento asintotico e gli eventuali punti singolari della funzione e della sua derivata;
- **c)** scrivere l'equazione della tangente geometrica alla curva grafico negli eventuali punti di flesso;
- **d)** disegnare il grafico della funzione.

Svolgimento : *La funzione, essendo primitiva di funzione dispari, è pari. Inoltre, poiché la funzione integranda è continua in tutto $\mathbb{R}$, si ha $F \in C^1(\mathbb{R})$. Dal teorema di Torricelli, otteniamo*

$$F'(x) = x^3\,\sqrt{x^2+1} > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x > 0\,.$$

In $x = 0$ si ha un punto di minimo assoluto e $F(0) = -2$.

$$F''(x) = \frac{x^2(4x^2+3)}{\sqrt{x^2+1}} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}\,;$$

la funzione è sempre convessa. Non ci sono flessi.

a) *Calcoliamo l'integrale: ponendo $y = t^2 + 1$, da cui $dy = 2t\,dt$, si ha*

$$\int t^3\,(t^2+1)^{1/2}\,dt = \frac{1}{2}\int t^2(t^2+1)^{1/2}(2t\,dt) = \frac{1}{2}\left(\int (y-1)y^{1/2}\,dy\right)\Big|_{y=1+t^2}$$
$$= \left(\frac{1}{5}y^{5/2} - \frac{1}{3}y^{3/2} + C\right)\Big|_{y=1+t^2} = \frac{1}{5}(1+t^2)^{5/2} - \frac{1}{3}(1+t^2)^{3/2} + C$$

e

$$F(x) = \left[\frac{1}{5}(1+t^2)^{5/2} - \frac{1}{3}(1+t^2)^{3/2}\right]\Big|_0^x - 2$$
$$= \frac{1}{5}(1+x^2)^{5/2} - \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} - \frac{28}{15}$$
$$= \frac{1}{15}(1+x^2)^{3/2}(3x^2-2) - \frac{28}{15}\,.$$

b)

$$\lim_{x\to\pm\infty} F(x) = +\infty\,;$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} F'(x) = \pm\infty\,.$$

Non esistono asintoti obliqui. Da tali limiti ricaviamo anche che non esistono massimi relativi o assoluti. Come già osservato, $F \in C^1(\mathbb{R})$. Non ci sono punti singolari.

c) *Come già osservato, non ci sono punti di flesso.*

d) *Non essendo semplice stabilire in quali punti F si annulli, possiamo solo affermare che, poiché $F(0) = -2 < 0$, la funzione si annulla in due soli punti, fra loro opposti. Il grafico è riportato nel Capitolo 11.*

ESERCIZIO 5.111. Facendo uso dei teoremi fondamentali del calcolo integrale, determinare l'insieme di definizione, gli intervalli di monotonia, concavità e convessità della funzione

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{t + |t| + 9}\; dt\,.$$

Successivamente,

- **a)** calcolare l'integrale definito;
- **b)** studiare il comportamento asintotico e gli eventuali punti singolari della funzione e della sua derivata;
- **c)** scrivere l'equazione della tangente geometrica alla curva grafico nel punto $x_0 = \frac{7}{2}$;
- **d)** disegnare il grafico della funzione.

Svolgimento :

$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \sqrt{2t+9}\,dt & \forall x \ge 0\,, \\ \displaystyle\int_0^x 3\,dt = 3x & \forall x < 0\,. \end{cases}$$

Poiché $2t + 9 \ge 0$, per $t \ge 0$, si ha C.E.$(F) = \mathbb{R}$. Il grafico di F, per $x < 0$, è una retta. Essendo la funzione integranda continua in tutto $\mathbb{R}$, segue che $F \in C^1(\mathbb{R})$. Per il Teorema di Torricelli, $F'(x) = \sqrt{x + |x| + 9} > 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. La funzione è strettamente crescente e, *poiché* $F(0) = 0$, *essa è negativa in* $(-\infty, 0)$ *e positiva in* $(0, +\infty)$. *Non ci sono punti di minimo o di massimo. Poiché* $\lim_{x\to 0} F'(x) = F'(0) = 3$, *otteniamo*

$$F'(x) = \begin{cases} 3 & \forall x \le 0\,, \\ \sqrt{2x+9} & \forall x > 0\,; \end{cases} \qquad F''(x) = \begin{cases} 0 & \forall x < 0\,, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2x+9}} > 0 & \forall x > 0\,. \end{cases}$$

La funzione è lineare in $(-\infty, 0)$ *e convessa in* $(0, +\infty)$. *Non esistono flessi. Inoltre,* $F \notin C^2(\mathbb{R})$; *infatti*

$$\lim_{x\to 0^+} F''(x) = \frac{1}{3} \neq \lim_{x\to 0^-} F''(x) = 0\,.$$

a) *Poiché* $\int \sqrt{2t+9}\, dt = \frac{1}{3}\,(2t+9)^{3/2} + C$, *abbiamo*

$$F(x) = \begin{cases} 3x & \forall x < 0\,, \\ \frac{1}{3}\left[(2x+9)^{3/2} - 27\right] & \forall x \ge 0\,. \end{cases}$$

b) *Poiché* $F \in C^1(\mathbb{R})$, *non abbiamo punti di singolarità. Inoltre,*

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty\,; \qquad \lim_{x\to+\infty} F'(x) = +\infty\,;$$

quindi non si ha asintoto obliquo destro, mentre, ovviamente, l'asintoto obliquo sinistro ha equazione $y = 3x$.

c) *Poiché* $F(7/2) = 37/3$; $F'(7/2) = 4$, *l'equazione della retta tangente alla curva grafico nel punto* $x_0 = 7/2$ *è* $y = \frac{37}{3} + 4\left(x - \frac{7}{2}\right)$, *cioè* $y = 4x - \frac{5}{3}$.

d) *Il grafico è riportato nel Capitolo 11.*

ESERCIZIO 5.112. Studiare la funzione

$$F(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & \text{se} \quad x \le 3\,, \\ \displaystyle\int_4^x \frac{2t-3}{9-t^2}\, dt & \text{se} \quad x > 3\,, \end{cases}$$

tracciandone il grafico.

ESERCIZIO 5.113. Studiare la funzione

$$F(x) = \int_1^x \frac{|t-2|}{\sqrt{t}}\, dt$$

tracciandone il grafico.

Svolgimento : $C.E.(f) = (0, +\infty)$. *Poiché, per* $t \to 0^+$, $f(t) \sim \frac{2}{\sqrt{t}}$, *che è impropriamente integrabile in un intorno di* $x = 0$, *si ha che* $\lim_{x\to 0^+} F(x)$ *esiste finito e quindi si può prolungare la funzione integrale in* $x = 0$. *Pertanto,* $C.E.(F) = [0, +\infty)$.

Poiché

$$|t-2| = \begin{cases} t-2 & se\ t \ge 2\,, \\ 2-t & se\ t < 2\,, \end{cases} \tag{5.1}$$

la funzione proposta si può riscrivere nella forma

$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_1^x \frac{2-t}{\sqrt{t}}\, dt & se\ 0 \le x < 2\,, \\ \displaystyle\int_1^2 \frac{2-t}{\sqrt{t}}\, dt + \int_2^x \frac{t-2}{\sqrt{t}}\, dt & se\ x \ge 2\,, \end{cases}$$

che ne permette il calcolo esplicito. Poiché

$$\int \frac{t-2}{\sqrt{t}}\, dt = \int \sqrt{t}\, dt - \int \frac{2}{\sqrt{t}}\, dt = \frac{2}{3}\sqrt{t^3} - 4\sqrt{t} + C\,,$$

si ricava

$$F(x) = \begin{cases} \left(4\sqrt{t} - \frac{2}{3}\sqrt{t^3}\right)\Big|_1^x & se\ 0 \le x < 2\,, \\ \left(4\sqrt{t} - \frac{2}{3}\sqrt{t^3}\right)\Big|_1^2 + \left(\frac{2}{3}\sqrt{t^3} - 4\sqrt{t}\right)\Big|_2^x & se\ x \ge 2\,, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 4\sqrt{x} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{10}{3} & se\ 0 \le x < 2\,, \\ \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 4\sqrt{x} + \frac{16}{3}\sqrt{2} - \frac{10}{3} & se\ x \ge 2\,. \end{cases}$$

Dal Teorema di Torricelli si ricava

$$F'(x) = \frac{|x-2|}{\sqrt{x}}\,,$$

$$\lim_{x\to+\infty} F'(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to 0^+} F'(x) = +\infty\,.$$

Pertanto, $F'(x) > 0$ *per* $x \in (0,2) \cup (2, +\infty)$ *e* $F'(2) = 0$, *quindi* F *è strettamente crescente ed ha un punto di flesso a tangente orizzontale in* $x = 2$. *Inoltre, dal primo dei precedenti limiti, segue che* $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$ *e non ci sono asintoti obliqui.*

Lo studio del segno di F *non è agevole. Osserviamo però che, essendo* f *sempre non negativa, si ottiene che* $F(x) < 0$ *per* $x \in [0,1)$, $F(x) > 0$ *per* $x \in (1, +\infty)$ *e* $F(1) = 0$. *In particolare,* $F(0) = -\frac{10}{3}$ *e* $x = 0$ *è punto di minimo relativo e assoluto.*

Concavità e convessità:

$$F''(x) = \begin{cases} -\dfrac{x+2}{2\sqrt{x^3}} & se\ 0 < x < 2\,, \\ \dfrac{x+2}{2\sqrt{x^3}} & se\ x > 2\,, \end{cases}$$

da cui segue che la funzione è concava in $(0,2)$ *e convessa in* $(2,+\infty)$. *Osserviamo che, in* $x=2$, *non esiste la derivata seconda, in quanto*

$$\lim_{x\to 2^-} F''(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \neq \frac{1}{\sqrt{2}} = \lim_{x\to 2^+} F''(x) .$$

Il grafico è riportato nel Capitolo 11.

ESERCIZIO 5.114. Sia data

$$F(x) = \int_1^x (1-|t|)e^{-t}\, dt .$$

a) Determinare campo di esistenza, segno, monotonia, concavità e convessità di F.

b) Calcolare esplicitamente l'integrale e tracciare il grafico qualitativo di F.

Svolgimento :

a)

$$C.E.(f) = \mathbb{R} \Rightarrow C.E.(F) = \mathbb{R} ;$$

$$F(x) = \begin{cases} \int_1^x (1-t)e^{-t}\, dt & se \quad x \geq 0 , \\ \int_1^0 (1-t)e^{-t}\, dt + \int_0^x (1+t)e^{-t}\, dt & se \quad x<0 ; \end{cases}$$

$f \in C^0(\mathbb{R}) \Rightarrow F \in C^1(\mathbb{R})$ *e*

$$F' = f(x) = (1-|x|)e^{-x} = \begin{cases} (1-x)e^{-x} & se \quad x \geq 0 , \\ (1+x)e^{-x} & se \quad x<0 ; \end{cases}$$

$$F'(x) > 0 \iff -1 < x < 1 ,$$
$$F'(x) < 0 \iff x < -1 , \ x > 1 .$$

La funzione decresce in $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$; *cresce in* $(-1,1)$; $x=-1$ *è punto di minimo relativo;* $x=1$ *è punto di massimo relativo e* $F(1)=0$.
Poiché, per $t\to+\infty$, $f(t)\sim -te^{-t}$, *che è integrabile impropriamente in un intorno di* $+\infty$, *come ogni funzione della forma* $P_n(t)e^{-t}$ *(dove* P_n *è un polinomio di grado generico* n*), allora il* $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ *esiste finito (e negativo) per* $x\to+\infty$, *quindi esiste l'asintoto orizzontale. D'altra parte,*

$$\lim_{t\to-\infty} f(t) = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} F(x) = +\infty$$

(si ricordi che, per $x<0$, $\int_0^x f(t)\, dt = -\int_{[x,0]} f(t)\, dt$*) e non si ha asintoto obliquo per* $x\to-\infty$. *Non esiste massimo assoluto.*
A causa dei risultati sopra ottenuti, in base ai quali $F(-1)<0$, *la funzione si annulla solo in* $x=1$ *e in un punto* $x_0<-1$. *Essa è positiva in* $(-\infty,x_0)$ *e negativa in* $(x_0,1)\cup(1,+\infty)$. *Non conoscendo quanto valga* $\lim_{x\to+\infty} F(x)$, *non siamo ancora in grado di stabilire se esista minimo assoluto.*

Concavità e convessità:

$$F''(x) = \begin{cases} (x-2)e^{-x} & se \quad x>0 , \\ -xe^{-x} > 0 & se \quad x<0 . \end{cases}$$

Per $x<0$ *e* $x>2$, $F''(x)>0$; *per* $0<x<2$, $F''(x)<0$. *La funzione è convessa in* $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ *e concava in* $(0,2)$. *La funzione non ha derivata seconda in* $x=0$, *in quanto* $\lim_{x\to0^-} F''(x) = 0 \neq \lim_{x\to0^+} F''(x) = -2$.

b) *Calcoliamo esplicitamente l'integrale, utilizzando il metodo di integrazione per parti. Si ha*

$$F(x) = \begin{cases} xe^{-x} - \frac{1}{e} & se \quad x \geq 0 , \\ -(x+2)e^{-x} + 2 - \frac{1}{e} & se \quad x<0 ; \end{cases}$$

$\lim_{x\to+\infty} F(x) = -\frac{1}{e}$ *asintoto orizzontale destro, di equazione* $y = -\frac{1}{e}$;

$F(-1) = -e + 2 - \frac{1}{e} < -\frac{1}{e}$ ($x=-1$ *è dunque punto di minimo assoluto*) ;

$F(0) = -\frac{1}{e}$; $F(2) = \frac{2}{e^2} - \frac{1}{e}$.

Il grafico è riportato nel Capitolo 11.

ESERCIZIO 5.115. Sia data

$$F(x) = \int_{-1}^x \frac{t-|t|}{t^2-2t+1}\, dt .$$

a) Determinare campo di esistenza, segno, monotonia, concavità e convessità di F.

b) Calcolare esplicitamente l'integrale e tracciare il grafico qualitativo di F.

Svolgimento :

a) *Poiché* $f(t) = \frac{t-|t|}{(t-1)^2}$, *abbiamo* $C.E.(f) = \mathbb{R}\setminus\{1\}$. *Inoltre,*

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2t}{(t-1)^2} & se \quad t<0 , \\ 0 & se \quad t \geq 0 ; \ t \neq 1 . \end{cases}$$

Dunque f *è integrabile in un intorno di* $t=1$. *Pertanto possiamo prolungare* F *anche a destra di* $x=1$, *cosicché* $C.E.(F)=\mathbb{R}$ *(*F *risulterà costante per ogni* $x\geq 0$*).*

$$F(x) = \begin{cases} \int_{-1}^x \frac{2t}{(t-1)^2}\, dt & se \quad x<0 , \\ \int_{-1}^0 \frac{2t}{(t-1)^2}\, dt + \int_0^x 0\, dt = \int_{-1}^0 \frac{2t}{(t-1)^2}\, dt & se \quad x \geq 0 . \end{cases}$$

La funzione f *è continua per* $t\neq1$ *e prolungabile con continuità in* $t=1$; *quindi* $F\in C^1(\mathbb{R})$ *e, per il Teorema di Torricelli,*

$$F'(x) = \frac{x-|x|}{(x-1)^2} = \begin{cases} \frac{2x}{(x-1)^2} < 0 & se \quad x<0 , \\ 0 & se \quad x \geq 0 . \end{cases}$$

Poiché la funzione decresce in $(-\infty, 0)$, *è costante in* $[0, +\infty)$ *e* $F(-1) = 0$, *essa è positiva in* $(-\infty, -1)$ *e negativa in* $(-1, +\infty)$.

Per $t \to -\infty$, $f(t) \sim 2/t$, *che non è integrabile impropriamente; allora* $\lim_{x\to-\infty} F(x) = +\infty$.

Inoltre, $\lim_{x\to-\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$; *quindi, non c'è asintoto obliquo per* $x \to -\infty$, *mentre, ovviamente, c'è asintoto orizzontale per* $x \to +\infty$.

Concavità e convessità:

$$F''(x) = \begin{cases} -\dfrac{2(x+1)}{(x-1)^3} & se \quad x < 0 \,, \\ 0 & se \quad x > 0 \,. \end{cases}$$

Per $x \in (-1, 0)$, $F''(x) > 0$; *per* $x < -1$, $F''(x) < 0$. *La funzione è concava in* $(-\infty, -1)$ *e convessa in* $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$; $x = -1$ *è punto di flesso; in* $x = 0$ *non esiste la derivata seconda, poiché*

$$\lim_{x\to 0^-} F''(x) = 2 \neq 0 = \lim_{x\to 0^+} F''(x) \,.$$

b) *Calcoliamo l'integrale; con il metodo di integrazione delle funzioni razionali, otteniamo*

$$\int \frac{2t}{(t-1)^2}\, dt = \int \left[\frac{2}{t-1} + \frac{2}{(t-1)^2}\right] dt = \left[2\log|t-1| - \frac{2}{(t-1)}\right] + C \,,$$

da cui

$$F(x) = \begin{cases} \left[2\log|t-1| - \frac{2}{(t-1)}\right]\Big|_{-1}^{x} & se \quad x < 0 \,, \\ \left[2\log|t-1| - \frac{2}{(t-1)}\right]\Big|_{-1}^{0} & se \quad x \geq 0 \,, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2\log(1-x) - \frac{2}{x-1} - 2\log 2 - 1 & se \quad x < 0 \,, \\ 1 - 2\log 2 & se \quad x \geq 0 \,. \end{cases}$$

Pertanto, $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1 - 2\log 2$ *e l'equazione dell'asintoto orizzontale destro è* $y = 1 - 2\log 2$. *Il grafico è riportato nel Capitolo 11.*

ESERCIZIO 5.116. Studiare la funzione

$$F(x) = \int_1^x \frac{t + |t|}{t^2 + 4t + 4}\, dt$$

tracciandone il grafico.

ESERCIZIO 5.117. Studiare la funzione

$$F(x) = \int_0^x \frac{t}{|t-1| - 2}\, dt$$

tracciandone il grafico.

ESERCIZIO 5.118. Sia data

$$F(x) = \int_2^x \frac{e^t}{t^{\frac{1}{3}}(t+1)}\, dt.$$

a) Determinare campo di esistenza, segno, monotonia, concavità e convessità di F.

b) Dimostrare che $\exists \lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

c) Sapendo che $\exists \lim_{x\to-1^+} F(x) = +\infty$, tracciare il grafico qualitativo di F.

Svolgimento :

a) C.E. $(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$. *Possiamo studiare il comportamento di* F *per* $x \to 0$ *e per* $x \to -1$, *utilizzando i criteri dell'integrazione impropria. Poiché, per* $t \to 0$, $f(t) \sim 1/t^{1/3}$, *essa ammette integrale in senso improprio in un intorno di* $x = 0$. *Dunque* F *ha limite finito per* $x \to 0$, *ed è prolungabile per continuità in* $x = 0$. *Poiché, per* $t \to -1$, $f(t) \sim -\dfrac{1}{e(t+1)}$, *essa non ammette integrale improprio in alcun intorno di* $x = -1$ *e la funzione* F *non è ulteriormente prolungabile. Da ciò si ricava che* C.E. $(F) = (-1, +\infty)$. *Inoltre, poiché*

$$\int_2^x f(t)\, dt = -\int_x^2 f(t)\, dt \qquad e \qquad f(t) < 0 \quad \forall t \in (-1, 0) \,,$$

allora

$$\lim_{x\to-1^+} F(x) = \lim_{x\to-1^+} -\int_x^2 f(t)\, dt = +\infty \,.$$

Monotonia:

$$F'(x) = \frac{e^x}{\sqrt[3]{x}(x+1)} = f(x) > 0 \qquad \forall x \in (0, +\infty); \qquad F'(x) < 0 \qquad \forall x \in (-1, 0);$$

$$\lim_{x\to 0^+} F'(x) = +\infty; \qquad \lim_{x\to 0^-} F'(x) = -\infty; \qquad x = 0 \text{ è un punto di cuspide} \,.$$

Poiché $f(t) > 0$, *per ogni* $t \in (0, +\infty)$, *si ha*

$$F(x) > 0 \ se \ x > 2 \,; \qquad F(x) < 0 \ se \ 0 < x < 2 \,; \qquad F(2) = 0 \,.$$

Poiché $F(x) \to +\infty$, *per* $x \to -1^+$, F *è continua e decrescente in* $(-1, 0)$ *e* $F(0) < 0$, *la funzione si annulla in un solo altro punto* $x_0 \in (-1, 0)$.

Concavità e convessità:

$$F''(x) = \frac{e^x[3x^2 - x - 1]}{3\sqrt[3]{x^4}(x+1)^2}; \qquad F''(x) = 0 \iff 3x^2 - x - 1 = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{6};$$

$$F''(x) < 0 \ se \ -1 < \frac{1 - \sqrt{13}}{6} < x < \frac{1 + \sqrt{13}}{6} < 2 \,; \ x \neq 0, \quad (F \text{ è concava})$$

$$F''(x) > 0 \ se \ x > \frac{1 + \sqrt{13}}{6}, \quad -1 < x < \frac{1 - \sqrt{13}}{6}, \quad (F \text{ è convessa}).$$

Quindi F *è decrescente in* $(-1, 0)$ *e crescente in* $(0, +\infty)$, *ha una cuspide in* $x = 0$ *e due flessi in* $x = (1 \pm \sqrt{13})/6$.

b) *Per $x > 2$, essendo $f(x) > 0$, F è positiva e monotona crescente, quindi ammette limite positivo per $x \to +\infty$. Essendo anche convessa, non può ammettere asintoto orizzontale, quindi necessariamente diverge a $+\infty$.*

c) *asintoto verticale: $x = -1$; non esiste asintoto obliquo per $x \to +\infty$, perché $\lim_{x\to+\infty} F'(x) = +\infty$. Il grafico di F è riportato nel Capitolo 11.*

ESERCIZIO 5.119. Sia data

$$F(x) = \int_3^x (\sin^2 t)\log(t-2)\, dt.$$

a) Determinare campo di esistenza, segno, monotonia e punti di flesso a tangente orizzontale.

b) Sapendo che $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$, tracciare il grafico qualitativo di F, evidenziando anche il comportamento della derivata per $x \to 2^+$.

c) Calcolare $\lim_{x\to3}[F(x)/(x-3)^2]$.

Svolgimento :

a) *C.E. $(f) = (2,+\infty)$; poiché, per $t \to 2^+$, $f(t) \sim (\sin^2 2)\log(t-2)$, che è impropriamente integrabile (perché $\log s$ è integrabile per $s \to 0^+$), F è prolungabile per continuità in $x = 2$ e C.E. $(F) = [2,+\infty)$. Poiché $F(x) = 0$ per $x = 3$; $f(t) \ge 0$, per $t \ge 3$, e $f(t) < 0$, per $2 < t < 3$, si ha $F(x) > 0$, per ogni $x \in$ C.E. $\setminus \{3\}$.*

Monotonia:

$$F'(x) = f(x) = (\sin^2 x)\log(x-2);$$
$$F'(x) > 0 \quad se \quad x > 3,\ x \ne k\pi\ ,\ k \ge 1; \qquad F'(x) < 0 \quad se \quad 2 < x < 3;$$
$$F'(x) = 0 \quad se \quad x = 3, \quad oppure \quad x = k\pi\ ,\ k \ge 1;$$

La funzione decresce in $(2,3)$; cresce in $(3,+\infty)$; $x = 2$ è punto di massimo relativo; $x = 3$ è punto di minimo assoluto, $x = k\pi$, $k \ge 1$, sono punti di flesso a tangente orizzontale.

b)

$$\lim_{x\to2^+} F'(x) = \lim_{x\to2^+} f(x) = -\infty\ .$$

Osserviamo che, benché non sia richiesto dall'esercizio, è possibile stabilire direttamente il $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ (che esiste, perché F è monotona crescente), nonostante non si conosca l'espressione esplicita della funzione e non esista $\lim_{t\to+\infty} f(t)$. Infatti

$$\log(t-2)\ \sin^2 t \ge \sin^2 t \qquad \forall t \ge e+2\ ; \qquad \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sin^2 t\, dt = \frac{1}{2}\pi\ ;$$

$$\int_3^{n\pi} f(t)\, dt \ \ge \int_{2\pi}^{n\pi} f(t)\, dt \ge \sum_{k=2}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sin^2 t\, dt = \frac{(n-2)\pi}{2}\ ,$$

da cui

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_3^{+\infty} f(t)\, dt \ge \lim_{n\to+\infty} \frac{(n-2)\pi}{2} = +\infty\ .$$

Il grafico è riportato nel Capitolo 11.

c) *Applicando due volte il teorema di de l'Hospital, si ottiene*

$$\lim_{x\to3} \frac{F(x)}{(x-3)^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to3} \frac{F'(x)}{2(x-3)} = \lim_{x\to3} \frac{f(x)}{2(x-3)} = \lim_{x\to3} \frac{(\sin^2 x)\log(x-2)}{2(x-3)}$$
$$\overset{H}{=} \lim_{x\to3} \frac{2\sin x\cos x\log(x-2) + (\sin^2 x)\frac{1}{x-2}}{2} = \frac{\sin^2 3}{2}.$$

DOMANDA 5.120. Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^+)$ e $F(x) = \int_{x\log x}^1 f'(t)\, dt$ per $x > 0$. Allora

$\boxed{a}$ $F'(x) = f(1) - f(x\log x)$; $\boxed{b}$ $F'(x) = -f'(x\log x)$; $\boxed{c}$ $F'(x) = f'(x)$; $\boxed{d}$ $F(x) = f(1) - f(x\log x)$.

ESERCIZIO 5.121. Sia data

$$F(x) = \int_{\frac{1}{2}}^x (t^2 - \frac{1}{4})e^{2t^4}\, dt.$$

a) Determinare campo di esistenza, monotonia, concavità e convessità di F.

b) Dimostrare che $\lim_{x\to\pm\infty} F(x) = \pm\infty$ e che F non ammette asintoti obliqui.

c) Tracciare il grafico qualitativo di F.

Svolgimento :

a)

$$\text{C.E.}(f) = \text{C.E.}(F) = (-\infty,+\infty); \qquad F'(x) = f(x) = (x^2 - \frac{1}{4})e^{2x^4};$$
$$F'(x) > 0 \quad se \quad x < -\frac{1}{2} \quad oppure \quad x > \frac{1}{2}; \qquad F'(x) < 0 \quad se \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2};$$
$$F'(x) = 0 \quad se \quad x = \pm\frac{1}{2}$$
$$x = -\frac{1}{2}\ \text{punto di massimo relativo};\ x = \frac{1}{2}\ \text{punto di minimo relativo};$$
$$F''(x) = f'(x) = 2x(4x^4 - x^2 + 1)e^{2x^4}; \qquad 4x^4 - x^2 + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \implies$$
$$F''(x) > 0 \quad se \quad x > 0; \qquad F''(x) < 0 \quad se \quad x < 0; \qquad F''(x) = 0 \quad se \quad x = 0.$$

La funzione F è concava in $(-\infty,0)$; è convessa in $(0,+\infty)$; ha un flesso in $x = 0$. Osserviamo anche che $F(x) = 0$ per $x = \frac{1}{2}$ ed inoltre, poiché $f(t) > 0$ per $t < -\frac{1}{2}$ e $t > \frac{1}{2}$ ed $f(t) < 0$ per $-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}$, ne consegue che $F(x) > 0$ per $x > \frac{1}{2}$ e almeno per $-\frac{1}{2} \le x < \frac{1}{2}$.

b) *Poichè F è convessa e crescente per $x \to +\infty$, essa ammette necessariamente limite pari a $+\infty$; analogamente, poiché F è concava e decrescente per $x \to -\infty$, essa ammette necessariamente limite pari a $-\infty$. Infine, poiché*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{F(x)}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to\pm\infty} F'(x) = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty,$$

F non ammette asintoti obliqui.

c) *Essendo F crescente in $(-\infty,-1/2)$ ed essendo $F(-1/2) > 0$, essa si annulla in un solo altro punto $x_0 < -1/2$. Il grafico è riportato nel Capitolo 11.*

ESERCIZIO 5.122. Sia data

$$F(x) = \int_0^x e^{t^2}(\sin^2 t - 1)\, dt, \quad x \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Determinare segno, monotonia, concavità e convessità di F e tracciarne il grafico qualitativo, evidenziando il comportamento della funzione e della sua derivata agli estremi del campo di esistenza.

Svolgimento : *La funzione integranda f è pari; pertanto, la funzione integrale, dato che $F(0) = 0$, è dispari. Poiché $f(t) \in C^0([-\pi/2, \pi/2])$, esistono*

$$F(\pm\pi/2) = \int_0^{\pm\pi/2} f(t)\, dt = \mp\alpha, \quad con\ \alpha > 0.$$

Inoltre,

$f(t) = -e^{t^2}(1 - \sin^2 t) \leq 0 \quad \forall t \in [-\pi/2, \pi/2];$ *dunque*

$F(x) > 0$ *se* $-\pi/2 \leq x < 0$; $F(x) < 0$ *se* $0 < x \leq \pi/2$; $F(x) = 0$ *se* $x = 0$.

$F'(x) = f(x) = -e^{x^2}(1 - \sin^2 x) < 0 \quad \forall x \in (-\pi/2, \pi/2);$

$x = -\dfrac{\pi}{2}$ *punto di massimo relativo e assoluto;* $x = \dfrac{\pi}{2}$ *punto di minimo relativo e assoluto;*

$F'(\pm\pi/2) = f(\pm\pi/2) = 0;$

$F''(x) = f'(x) = 2e^{x^2}\cos x(\sin x - x\cos x)$; *poiché* $\cos x \geq 0$ *in* $[-\pi/2, \pi/2]$, *si ha*

$F''(x) > 0 \iff \sin x - x\cos x > 0 \iff \tan x > x \iff x \in (0, \pi/2).$

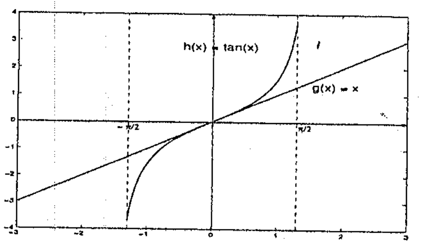


Figura 5.122

Confronto tra le funzioni $h(x) = \tan x$ e $g(x) = x$

Inoltre, $F''(x) = 0$ se $x = 0$; $x = \pm\pi/2$. La funzione F è concava in $[-\pi/2, 0)$ e convessa in $(0, \pi/2]$; ha un flesso in $x = 0$. Il grafico è riportato nel Capitolo 11.

DOMANDA 5.123. Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^+)$ e $F(x) = \int_{x\log x}^1 f'(t)\, dt$ per $x > 0$. Allora

$\boxed{a}$ $F'(x) = f(1) - f(x\log x)$; $\boxed{b}$ $F'(x) = -f'(x\log x)$; $\boxed{c}$ $F'(x) = f'(x)$; $\boxed{d}$ $F'(x) = -(\log x + 1)f'(x\log x)$.

ESERCIZIO 5.124. Sia data

$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_1^x \frac{\log t}{te^t}\, dt & \text{se } x > 0; \\ |x^2 - 4| - 4 & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Determinare segno, limiti alla frontiera, monotonia, concavità e convessità di F e tracciarne il grafico qualitativo. Stabilire inoltre la natura dei punti $x = 0$ e $x = -2$.

Svolgimento :

$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_1^x \frac{\log t}{te^t}\, dt & se\ x > 0; \\ -x^2 & se\ -2 \leq x \leq 0; \\ x^2 - 8 & se\ x < -2; \end{cases}$$

$$F(x) = 0 \quad se \quad x = -2\sqrt{2},\ x = 0,\ x = 1;$$

Poiché $\frac{\log t}{te^t} > 0$, per $t > 1$, e $\frac{\log t}{te^t} < 0$ per $0 < t < 1$, e, per $x > 0$, $F(x) = \int_1^x \frac{\log t}{te^t}\, dt = -\int_x^1 \frac{\log t}{te^t}\, dt$, si ha che essa è positiva per ogni $x > 1$ e per ogni $x \in (0,1)$. Quindi la funzione non si annulla in altri punti. Riassumendo:

$$F(x) < 0 \quad se \quad -2\sqrt{2} < x < 0; \quad F(x) > 0 \quad se \quad x < -2\sqrt{2}, \quad 0 < x < 1, \quad x > 1\,.$$

Ovviamente, la funzione è continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Inoltre,

$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} F(x) = -\int_0^1 \frac{\log t}{te^t}\, dt = +\infty,$ *poiché, per $t \to 0^+$,* $f(t) = \dfrac{\log t}{te^t} \sim \dfrac{1}{t(\log t)^{-1}}$,

che non è impropriamente integrabile in un intorno di 0^+;

$x = 0$ *è punto di infinito per F, quindi* $x = 0$ *è asintoto verticale per $x \to 0^+$;*

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\log t}{te^t}\, dt = \alpha > 0,$ *poiché in un intorno di $+\infty$*

$0 < \dfrac{\log t}{te^t} < e^{-t}$, *che è impropriamente integrabile;* $y = \alpha$ *è asintoto orizzontale a $+\infty$.*

Data l'impossibilità di esplicitare la funzione integrale, non è possibile stabilire il valore di α. Per $x \to -\infty$ la funzione, il cui grafico è un ramo di parabola, non ha asintoti.

Monotonia:

$$F'(x) = \begin{cases} \dfrac{\log x}{xe^x} & se\ x > 0; \\ -2x & se\ -2 < x < 0; \\ 2x & se\ x < -2; \end{cases}$$

$F'(x) > 0$ *se* $-2 < x < 0$, $x > 1$; $F'(x) < 0$ *se* $x < -2$, $0 < x < 1$;

$F'(x) = 0$ *se* $x = 1$.

La funzione decresce in $(-\infty, -2) \cup (0,1)$; cresce in $(-2, 0) \cup (1, +\infty)$; $x = 1$ è punto di minimo relativo. Osserviamo, anche, che

$$\lim_{x\to 0^-} F'(x) = 0 \quad e \quad \lim_{x\to -2^\pm} F'(x) = \pm 4\,;$$

quindi, in particolare, si ottiene che $x = -2$ *è punto angoloso e punto di minimo relativo. Poiché* $F(-2) = -4$ *e* $F(1) = 0$, *si ottiene che* $x = -2$ *è, in realtà, punto di minimo assoluto.*

Concavità e convessità:

$$F''(x) = \begin{cases} \dfrac{1-(x+1)\log x}{x^2 e^x} & \text{se } x > 0; \\ -2 & \text{se } -2 < x < 0; \\ 2 & \text{se } x < -2; \end{cases}$$

ovviamente, f *è convessa in* $(-\infty, -2)$ *e concava in* $(-2, 0)$. *Per* $x > 0$,

$$F''(x) > 0 \iff 1-(x+1)\log x > 0 \iff \log x < \frac{1}{x+1} \quad (\textit{essendo } x+1 > 0 \ \forall x > 0)$$
$$\iff 0 < x < x_0 ,$$

con $x_0 > 1$, *come si evince dalla Figura 5.124.*

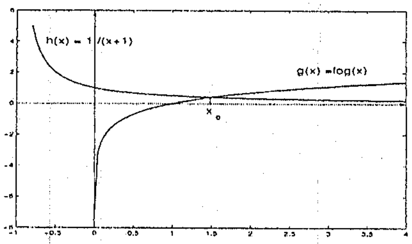


Figura 5.124

Confronto tra il grafico di $h(x) = \frac{1}{x+1}$ *e* $g(x) = \log x$

La funzione è, quindi, convessa in $(0, x_0)$ *e concava in* $(x_0, +\infty)$. *Il grafico della funzione è riportato nel Capitolo 11.*

ESERCIZIO 5.125. Sia data

$$F(x) = \int_0^x \frac{\log(1+t)}{\sqrt{|t-1|}}\, dt .$$

Determinare campo di esistenza, segno, comportamento alla frontiera, eventuali asintoti, monotonia e tracciare un grafico qualitativo di F nell'ipotesi in cui il numero di flessi sia minimo. Studiare la natura del punto $x = 1$.

Svolgimento : C.E. $(f) = (-1, 1) \cup (1, +\infty)$; *poiché*

$$\textit{per } t \to 1 \quad f(t) \sim \frac{\log 2}{\sqrt{|t-1|}} \quad \textit{e per } t \to -1^+ \quad f(t) \sim \frac{1}{\sqrt{2}\,[\log(1+t)]^{-1}} ,$$

essa è integrabile in senso improprio in un intorno di $x = 1$ *e in un intorno destro di* $x = -1$. *Pertanto esistono finiti* $\lim_{x\to 1} F(x)$ *e* $\lim_{x\to -1^+} F(x)$; *dunque* F *è prolungabile con continuità in* $x = \pm 1$. *Pertanto,* C.E. $(F) = [-1, +\infty)$.

Essendo $f(t) > 0$, *per* $t > 0$; $f(t) < 0$, *per* $t \in (-1, 0)$ *e* $F(0) = 0$; *si ha che* $F(x) > 0$, *per* $x \in [-1, +\infty) \setminus \{0\}$.

Poiché, per $x \to +\infty$, $f(x) \sim \frac{1}{x^{1/2}\log^{-1} x}$, *essa non è integrabile in senso improprio in un intorno di* $+\infty$, *quindi* $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

Monotonia:

$$F'(x) = \frac{\log(x+1)}{\sqrt{|x-1|}} ;$$

$$F'(x) > 0 \ \ \forall x \in (0, +\infty) \setminus \{1\} ; \quad F'(x) < 0 \ \ \forall x \in (-1, 0) ; \quad F'(x) = 0 \ \ \textit{se} \ \ x = 0 ;$$

$$\lim_{x\to -1^+} F'(x) = -\infty ; \qquad \lim_{x\to 1^\pm} F'(x) = +\infty .$$

La funzione decresce in $(-1, 0)$ *e cresce in* $(0, +\infty)$; $x = -1$ *è punto di massimo relativo;* $x = 0$ *è punto di minimo relativo e assoluto;* $x = 1$ *punto di flesso a tangente verticale. Infine,*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} F'(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+x)}{\sqrt{|x-1|}} = 0 .$$

La funzione assegnata non ha asintoti di alcun genere.

Poiché la funzione ha tangente verticale in $x = -1$ *e parte decrescente, nell'ipotesi di numero minimo di flessi, essa sarà convessa in* $(-1, 1)$ *e concava in* $(1, +\infty)$. *Il grafico è riportato nel Capitolo 11.*

Risposte agli esercizi non svolti e alle domande proposte: **5.92**: $F'(x) = \frac{\sin(1+2x)}{1+x^2}$ - **5.93**: a - **5.94**: $x = -1/2$ è punto di minimo, $x = -1$ è punto di massimo - **5.95**: b - **5.96**: $F'(x) = -\frac{e^x}{2+\sin x^2}$ **5.97**: $x = -1/3$ è punto di minimo, $x = -2/3$ è punto di massimo - **5.98**: c - **5.99**: $F'(0) = 1/4$ **5.101**: d - **5.102**: il punto considerato è un punto angoloso - **5.104**: **a)** $F'(x) = \sin(x^2)$, $F''(x) = 2x\cos(x^2)$, $F'''(x) = 2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2)$; **b)** il limite proposto vale 1/3; **c)** F è un infinitesimo di ordine 3, per $x \to 0$ - **5.105**: $F'(x) = e^{2x^2} - 3e^{x^2} + 5/4$; $F''(x) = 2xe^{x^2}\left(2e^{x^2} - 3\right)$; la funzione proposta è concava verso l'alto in $\left(-\sqrt{\log\frac{3}{2}}\ ,\ 0\right)$ e in $\left(\sqrt{\log\frac{3}{2}}\ ,\ +\infty\right)$ e concava verso il basso in $\left(-\infty\ ,\ -\sqrt{\log\frac{3}{2}}\right)$ e in $\left(0\ ,\ \sqrt{\log\frac{3}{2}}\right)$; i punti $x = 0$ e $x = \pm\sqrt{\log\frac{3}{2}}$ sono di flesso - **5.106**: $F'(x) = \sin^2(x^2) - 3\sin(x^2) + \frac{5}{4}$; $F''(x) = 2x\cos(x^2)\left[2\sin(x^2) - 3\right]$; la funzione proposta è concava verso l'alto in ogni intervallo del tipo $\left(-\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}\ ,\ -\sqrt{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}\ \right)$, con $k \in \mathbb{N}$, $\left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, 0\right)$ e $\left(\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}\ ,\ \sqrt{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}\ \right)$, con $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, e concava verso il basso nel complementare dell'unione di tali intervalli, estremi esclusi; i punti $x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}$, con $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sono di flesso - **5.107**: d - **5.109**: per il grafico, vedere Capitolo 11 - **5.112**: per il grafico, vedere Capitolo 11 - **5.116**: per il grafico, vedere Capitolo 11 - **5.117**: per il grafico, vedere Capitolo 11 **5.120**: d - **5.123**: d .

CAPITOLO 6

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

6.1. Equazioni a variabili separabili

• Richiami: ricordiamo che un'equazione differenziale del primo ordine è detta *a variabili separabili* se è della forma

$$y'(x) = f(x) \cdot g\Big(y(x)\Big)$$

dove f, g sono funzioni continue nei loro insiemi di definizione.

Per determinare l'integrale generale di un'equazione a variabili separabili, si procede in due passi:

(i) si determinano gli eventuali valori reali $\overline{y}$ tali che $g(\overline{y}) = 0$, da cui si ottiene che le funzioni costanti, date da $y(x) = \overline{y}$, sono *soluzioni singolari* (o anche *soluzioni particolari*) dell'equazione;

(ii) per $y \neq \overline{y}$, si procede con la separazione delle variabili, ottenendo

$$\int \frac{y'(x)}{g\Big(y(x)\Big)}\, dx = \int f(x)\, dx$$

ed effettuando un cambiamento di variabile nel primo integrale, si ottiene

$$\left(\int \frac{1}{g(y)}\, dy\right)_{y=y(x)} = \int f(x)\, dx \,.$$

Dette G ed F due primitive di $1/g$ ed f, rispettivamente, si ha

$$G\Big(y(x)\Big) = F(x) + C$$

da cui si ricaverà esplicitamente l'integrale generale dell'equazione proposta, una volta che si è in grado di invertire la funzione G.

È ben noto che, dati due intervalli reali I e J, con $x_0 \in I$ e $y_0 \in J$, e considerato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x) \cdot g\Big(y(x)\Big) \;; \\ y(x_0) = y_0 \;; \end{cases}$$

dove $f \in C^0(I)$ e $g \in C^1(J)$, esso ha sempre una ed una sola soluzione di classe C^1, definita in un intorno del punto iniziale x_0. Essa andrà cercata o tra le soluzioni singolari (se ne esistono e una di queste verifica la condizione iniziale) oppure, in caso contrario, imponendo la condizione iniziale all'integrale generale ottenuto per separazione di variabili.

• Esercizi

ESERCIZIO 6.1. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{x}{y^4(x)} \;; \\ y(0) = 1 \,. \end{cases}$$

Svolgimento : *L'equazione differenziale proposta è definita per* $y \neq 0$. *Poiché essa è un'equazione a variabili separabili e non ha soluzioni singolari, si ottiene* $\int y^4\,dy = \int x\,dx$ *che fornisce l'integrale generale*

$$\frac{y^5(x)}{5} = \frac{x^2}{2} + C\,.$$

Imponendo la condizione iniziale, si ottiene

$$C = \frac{1}{5} \qquad \text{ovvero} \qquad \frac{y^5(x)}{5} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{5} \qquad \text{da cui} \qquad y(x) = \sqrt[5]{\frac{5}{2}x^2 + 1}\,.$$

ESERCIZIO 6.2. Siano $y_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$, le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = -y^{n+1}(t)\,; \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

Calcolare $\lim_{n\to\infty} y_n(1)$.

Svolgimento : *L'equazione è a variabili separabili, quindi l'integrale generale è dato dalla soluzione singolare costante* $y(t) \equiv 0$ *e, imponendo* $y \neq 0$, *da*

$$-\int \frac{dy}{y^{n+1}} = \int dt \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{n}\,y^{-n} = t + C \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Imponendo subito la condizione iniziale, otteniamo $C = 1/n$, *da cui*

$$y_n(t) = (nt+1)^{-1/n} = \frac{1}{\sqrt[n]{nt+1}}\,.$$

Notiamo che la soluzione è definita solo nell'intervallo $(-1/n, +\infty)$. *Infine,*

$$\lim_{n\to\infty} y_n(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} = 1\,.$$

ESERCIZIO 6.3. Dati i problemi di Cauchy

$$(*) \begin{cases} y'(x) + \dfrac{6x+3}{x^2+x+1}(y(x)-1)^2 = 0\,; \\ y(0) = \dfrac{3\log 3 - 1}{3\log 3}\,; \end{cases} \qquad (**) \begin{cases} y'(x) + \dfrac{6x+3}{x^2+x+1}(y(x)-1)^2 = 0\,; \\ y(0) = 1\,; \end{cases}$$

determinare le rispettive soluzioni.

Svolgimento : *Poiché* $x^2+x+1 > 0$, *per ogni* $x \in \mathbb{R}$, *l'equazione è definita su tutto* $\mathbb{R}$. *Osserviamo che l'equazione comune ad entrambi i problemi di Cauchy è a variabili separabili ed ha come integrale singolare la funzione* $y(x) \equiv 1$. *Pertanto,* $(**)$ *ha come unica soluzione definita su tutto l'asse reale la funzione costante* $y(x) \equiv 1$, *cioè l'integrale singolare. Per trovare invece l'unica soluzione di* $(*)$, *si procede separando le variabili e, dopo una semplice integrazione, si ottiene*

$$\frac{1}{y-1} = 3\log(x^2+x+1) + C$$

da cui, esplicitando y *e imponendo la condizione iniziale, si ha*

$$y(x) = 1 + \frac{1}{3\log\left(\frac{x^2+x+1}{3}\right)}\,,$$

che risulta definita per $x \neq -2, 1$. *Essendo stata assegnata la condizione iniziale nel punto* $x = 0$, *la soluzione richiesta sarà definita in* $(-2, 1)$.

ESERCIZIO 6.4. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + x^3y^3(x) + x^3y(x) = 0\,; \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

ESERCIZIO 6.5. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{y(x)\log y(x)}{x}\,; \\ y(-1) = 1\,. \end{cases}$$

6.2. Equazioni lineari del primo ordine

• Richiami: ricordiamo che le equazioni differenziali lineari del primo ordine sono equazioni differenziali della forma

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$$

con a, b funzioni continue nel loro insieme di definizione I. Se $b(x) \equiv 0$ in I, l'equazione si chiama *omogenea* ed è, in particolare, anche un'equazione a variabili separabili; se invece b non è la funzione identicamente nulla, allora l'equazione è detta *non omogenea.*

L'integrale generale di un'equazione lineare del primo ordine è dato da

$$y(x) = Ce^{-\int a(x)\,dx} + e^{-\int a(x)\,dx} \int b(x)\, e^{\int a(x)\,dx}\,dx\,.$$

Osserviamo che il primo addendo della precedente formula è l'integrale generale dell'equazione omogenea associata(1), mentre il secondo addendo è una soluzione particolare dell'equazione completa(2).

È ben noto che il problema di Cauchy per un'equazione differenziale lineare del primo ordine ha sempre una ed una sola soluzione di classe C^1 definita in tutto l'intervallo I ed essa viene determinata imponendo la condizione iniziale nell'espressione precedente. Infatti, siano $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$ e sia assegnato il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + a(x)y(x) = b(x)\,; \\ y(x_0) = y_0\,. \end{cases}$$

Allora la soluzione è data da

$$y(x) = y_0\, e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt} + e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt} \int_{x_0}^{x} b(t)\, e^{\int_{x_0}^{t} a(s)\,ds}\,dt\,.$$

---

(1) esso si può determinare per separazione di variabili o, nel caso in cui a sia costante, tramite l'equazione caratteristica associata.

(2) esso si può determinare utilizzando il metodo della variazione delle costanti arbitrarie oppure, nel caso in cui a sia costante e b sia di tipo polinomiale, esponenziale o trigonometrico, tramite il principio di somiglianza.

• Esercizi

ESERCIZIO 6.6. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 5y(x) + e^x ; \\ y(0) = 0 . \end{cases}$$

Svolgimento : *L'equazione proposta è lineare del primo ordine non omogenea; pertanto, dalla formula risolutiva otteniamo*

$$y(x) = e^{\int_0^x 5\,dt} \int_0^x e^t\, e^{-\int_0^t 5\,ds}\, dt = e^{5x} \int_0^x e^{-4t}\, dt = \frac{1}{4}e^{5x} - \frac{1}{4}e^x .$$

ESERCIZIO 6.7. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'(x) + \frac{1}{\sqrt{x}}y(x) = 1$$

e trovare le (eventuali) soluzioni tali che $\lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$.

Svolgimento : *L'equazione è definita per $x > 0$. Usando la formula risolutiva, abbiamo*

$$y(x) = e^{-\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx} \left[\int e^{\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx}\, dx + C \right] = e^{-2\sqrt{x}} \left[\int e^{2\sqrt{x}}\, dx + C \right] .$$

Effettuando la sostituzione $t = 2\sqrt{x}$, da cui $dt = \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$, ovvero $dx = \frac{t}{2}\,dt$, abbiamo

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-2\sqrt{x}} \left[\frac{1}{2} \int t e^t\, dt + C \right]_{t=2\sqrt{x}} = e^{-2\sqrt{x}} \left[\frac{1}{2}te^t - \frac{1}{2}\int e^t\, dt + C \right]_{t=2\sqrt{x}} \\ &= e^{-2\sqrt{x}} \left[\frac{1}{2}te^t - \frac{1}{2}e^t + C \right]_{t=2\sqrt{x}} = e^{-2\sqrt{x}} [\sqrt{x}e^{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}e^{2\sqrt{x}} + C] \\ &= \sqrt{x} - \frac{1}{2} + Ce^{-2\sqrt{x}} . \end{aligned}$$

Imponendo ora la condizione asintotica, si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2} + Ce^{-2\sqrt{x}} \right) = +\infty \qquad \forall C \in \mathbb{R} .$$

ESERCIZIO 6.8. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'(t) + y(t) = 1 - t .$$

Svolgimento : *L'equazione proposta è lineare del primo ordine non omogenea; pertanto, utilizzando la formula risolutiva, otteniamo*

$$y(t) = Ce^{-\int 1\,dt} + e^{-\int 1\,dt} \int (1-t)e^{\int 1\,dt}\, dt = Ce^{-t} + e^{-t} \int (1-t)e^t\, dt = Ce^{-t} - t + 2 .$$

ESERCIZIO 6.9. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + xy(x) = e^x(x+1) ; \\ y(0) = 2 . \end{cases}$$

Svolgimento : *Dalla formula risolutiva per le equazioni differenziali lineari del primo ordine, con $a(x) = x$ e $b(x) = e^x(x+1)$, si ottiene che l'integrale generale è dato da*

$$\begin{aligned} y(x) &= Ce^{-\int x\,dx} + e^{-\int x\,dx} \int e^x(x+1)\, e^{\int x\,dx}\, dx \\ &= Ce^{-x^2/2} + e^{-x^2/2} \int (x+1)e^{(x^2/2+x)}\, dx \\ &= Ce^{-x^2/2} + e^{-x^2/2} \int e^{(x^2/2+x)}(x^2/2+x)'\, dx = Ce^{-x^2/2} + e^x . \end{aligned}$$

Imponendo la condizione iniziale, si ricava $C = 1$, da cui la soluzione cercata $y(x) = e^{-x^2/2} + e^x$.

ESERCIZIO 6.10. Data l'equazione differenziale

$$y'(x) - \frac{3\cos x}{1 + \sin x}y(x) = 0 ,$$

determinare la soluzione passante per il punto $P_0 = (\pi/2, 1)$.

6.3. Equazioni lineari del secondo ordine

• Richiami: ricordiamo che le equazioni differenziali lineari del secondo ordine sono equazioni differenziali della forma

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x)$$

con a, b, f funzioni continue nel loro insieme di definizione I. Se $f(x) \equiv 0$ in I, l'equazione si chiama *omogenea*, se invece f non è la funzione identicamente nulla, allora l'equazione è detta *non omogenea*. Se a, b sono delle funzioni costanti, l'equazione si chiama *a coefficienti costanti*.

Per determinare l'integrale generale di un'equazione lineare del secondo ordine, si procede in tre passi:

(i) si trova l'integrale generale dell'equazione omogenea associata;

(ii) si determina una soluzione particolare dell'equazione completa;

(iii) infine, detti y_o e y_p, rispettivamente, l'integrale generale dell'omogenea associata e l'integrale particolare dell'equazione completa, la soluzione cercata sarà della forma

$$y(x) = y_o(x) + y_p(x) \qquad \forall x \in I .$$

Osserviamo che l'integrale generale dell'equazione omogenea associata $y_o(x)$ è della forma $y_o(x) = C_1 y_{o1}(x) + C_2 y_{o2}(x)$, cioè combinazione lineare di due soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea, mentre y_p si determina come segue.

Data f, funzione continua, si procede utilizzando il *metodo della variazione delle costanti arbitrarie*, cioè determinando le due funzioni $C_1(x)$ e $C_2(x)$, le cui derivate sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} C_1'(x)y_{o1}(x) + C_2'(x)y_{o2}(x) = 0 \\ C_1'(x)y_{o1}'(x) + C_2'(x)y_{o2}'(x) = f(x) . \end{cases}$$

Una soluzione particolare sarà data da $y_p(x) = C_1(x)y_{o1}(x) + C_2(x)y_{o2}(x)$.

È ben noto che il problema di Cauchy per un'equazione differenziale lineare del secondo ordine ha sempre una ed una sola soluzione di classe $\mathcal{C}^2$ definita in tutto l'intervallo I ed essa può essere determinata imponendo la condizione iniziale nell'espressione precedentemente trovata per l'integrale generale dell'equazione completa.

Rimane aperto il problema di determinare le due soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea associata; ciò è possibile solo in alcune situazioni particolari. Noi ci limiteremo a considerare esclusivamente i seguenti due casi: quello delle equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti e quello delle equazioni di Eulero, che sono equazioni a coefficienti variabili, ma che, come vedremo, si possono ricondurre al caso delle equazioni a coefficienti costanti con un opportuno cambiamento di variabile.

• Equazioni a coefficienti costanti: si tratta di equazioni differenziali della forma

$$a_0 y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = f(x) \ ,$$

con $a_i \in \mathbb{R}$, per $i = 0, 1, 2$, e $a_0 \neq 0$. Per determinare le due soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea, si considera l'*equazione caratteristica* o *secolare* associata, cioè l'equazione algebrica del secondo ordine data da:

$$a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0 \ .$$

A seconda che il discriminante di tale equazione sia positivo, nullo o negativo, l'equazione avrà, rispettivamente, due soluzioni reali distinte, una sola soluzione reale, due soluzioni complesse coniugate. In corrispondenza, avremo le due soluzioni indipendenti dell'equazione differenziale omogenea, secondo la seguente tabella:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \quad \text{soluzioni } \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \ \text{ distinte} & \begin{cases} y_{o1}(x) = e^{\lambda_1 x} \ , \\ y_{o2}(x) = e^{\lambda_2 x} \ , \end{cases} \\ \iff \quad y_o(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \ ; & \\ \Delta = 0 \quad \text{unica soluzione } \ \lambda \in \mathbb{R} & \begin{cases} y_{o1}(x) = e^{\lambda x} \ , \\ y_{o2}(x) = x e^{\lambda x} \ , \end{cases} \\ \iff \quad y_o(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} \ ; & \\ \Delta < 0 \quad \text{soluzioni } \ \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C} \ , \ \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} & \begin{cases} y_{o1}(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x) \ , \\ y_{o2}(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x) \ , \end{cases} \\ \iff \quad y_o(x) = e^{\alpha x}[C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)] \ . & \end{cases}$$

Ricordiamo anche che, nel caso delle equazioni a coefficienti costanti e per particolari funzioni continue f, una soluzione particolare dell'equazione completa si può determinare evitando tutta la

procedura della variazione delle costanti, ed utilizzando, invece, il *metodo di somiglianza*:

- $f(x) = \alpha_0 x^r + \alpha_1 x^{r-1} + \ldots + \alpha_{r-1}x + \alpha_r$ polinomio di grado r

$\Longrightarrow$

$$y_p(x) = p_0 x^s + p_1 x^{s-1} + \ldots + p_{s-1}x + p_s \qquad \begin{cases} \text{polinomio di grado } s = r + 2 - m \\ \text{dove } m = 0, 1, 2 \text{ è il più grande indice} \\ \text{t.c. } a_m \neq 0 \text{ nell'equazione} \\ \text{differenziale;} \end{cases}$$

- $f(x) = e^{Ax}[\alpha_0 x^r + \alpha_1 x^{r-1} + \ldots + \alpha_{r-1}x + \alpha_r]$

$\Longrightarrow$

$$y_p(x) = e^{Ax} x^m [p_0 x^r + p_1 x^{r-1} + \ldots + p_{r-1}x + p_r] \qquad \begin{cases} \text{dove } \ m = 0, \text{ se } A \text{ non è soluzione} \\ \text{dell'equazione caratteristica, } m = 1, 2, \\ \text{se tale è la molteplicità con cui } A \text{ è} \\ \text{soluzione dell'equazione caratteristica.} \end{cases}$$

- $f(x) = e^{Ax}[k_1 \cos(Bx) + k_2 \sin(Bx)]$ $\quad \begin{cases} A = 0 & \text{funzione trigonometrica pura,} \\ B = 0 & \text{funzione esponenziale pura,} \end{cases}$

$\Longrightarrow$

$$y_p(x) = \begin{cases} e^{Ax}[p_1 \cos(Bx) + p_2 \sin(Bx)] & \begin{cases} \text{se } A + iB \text{ non è soluzione} \\ \text{dell'equazione caratteristica.} \end{cases} \\ x e^{Ax}[p_1 \cos(Bx) + p_2 \sin(Bx)] & \begin{cases} \text{se } A + iB \text{ è soluzione dell'equazione} \\ \text{caratteristica;} \end{cases} \end{cases}$$

Restano da determinare i coefficienti p_i, che si ricavano come soluzioni dell'equazione ottenuta inserendo l'espressione trovata per $y_p(x)$ nell'equazione differenziale completa.

Nel caso in cui f risulti essere la somma di più termini $f_1 + f_2 + \ldots$, si può ricorrere al *principio di sovrapposizione*, cioè si determina una soluzione particolare relativa all'equazione completa con secondo membro dato di volta in volta da ciascuna f_i separatamente (cioè: $a_0 y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = f_i(x)$); una soluzione particolare relativa al secondo membro pari ad f si otterrà sommando le soluzioni così trovate. Questo principio può risultare molto utile proprio quando tutte o almeno alcune delle f_i si possono determinare con il metodo di somiglianza.

• Equazioni di Eulero: si tratta di equazioni lineari a coefficienti non costanti di forma particolare, che si possono ricondurre ad equazioni a coefficienti costanti. Più precisamente, un'equazione di Eulero del secondo ordine è della forma:

$$a_0 x^2 y''(x) + a_1 x y'(x) + a_2 y(x) = f(x) \ .$$

Non è difficile verificare che, con la sostituzione di variabile $x = e^t$, nel caso si cerchino soluzioni per $x > 0$, la precedente equazione si trasforma nell'equazione lineare data da

$$a_0 \widetilde{y}''(t) + (a_1 - a_0)\widetilde{y}'(t) + a_2 \widetilde{y}(t) = \widetilde{f}(t) \ , \tag{6.1}$$

dove $\widetilde{f}(t) = f(e^t)$. A questo punto abbiamo un'equazione a coefficienti costanti, che si tratta come visto in precedenza. Una volta trovato l'integrale generale come funzione di t, si effettua la trasformazione inversa di variabile $t = \log x$, ottenendo così l'integrale generale dell'equazione di Eulero proposta, che sarà della forma $y(x) = c_1 y_{o1}(x) + c_2 y_{o2}(x) + y_p(x)$, con

$$y_{o1}(x) = x^{\lambda_1} \qquad y_{o2}(x) = x^{\lambda_2} \; ;$$

$$y_{o1}(x) = x^{\lambda} \qquad y_{o2}(x) = x^{\lambda}\log x \; ;$$

$$y_{o1}(x) = x^{\alpha}\cos(\beta\log x) \quad y_{o2}(x) = x^{\alpha}\sin(\beta\log x) \; ;$$

dove λ_1, λ_2, oppure λ, oppure $\alpha \pm i\beta$ sono soluzioni dell'equazione caratteristica associata a (6.1), a seconda del segno del discriminante. Nel caso in cui si cerchino soluzioni per $x < 0$, si procede in modo analogo, con la sostituzione $x = -e^t$, ovvero $t = \log(-x)$.

- Esercizi

ESERCIZIO 6.11. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + y'(x) - 2y(x) = \sin x \; ; \\ y(0) = y'(0) = 0 \; . \end{cases}$$

Svolgimento : *L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda_{1,2} = 1; -2$; pertanto,*

$$y_o(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x} \; .$$

Poiché $f(x) = \sin x$ (cioè $A = 0$ e $B = 1$ nella tabella relativa al metodo di somiglianza) e $\lambda = 0 + i$ non è soluzione dell'equazione caratteristica, il metodo di somiglianza suggerisce che una soluzione particolare sarà della forma

$$y_p(x) = p_1\cos x + p_2\sin x \; ,$$

dove è necessario scegliere sempre una combinazione di seni e coseni, anche se il termine noto dell'equazione assegnata contiene solo una delle due funzioni trigonometriche. Derivando due volte la soluzione particolare considerata ed inserendo quanto trovato nell'equazione differenziale di partenza, otteniamo

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= -p_1\sin x + p_2\cos x \\ y''(x) &= -p_1\cos x - p_2\sin x \\ (-p_1 - 3p_2)\sin x &+ (p_2 - 3p_1)\cos x = \sin x \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{cases} -p_1 - 3p_2 = 1 \; , \\ p_2 - 3p_1 = 0 \; , \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} p_1 = -\dfrac{1}{10} \; , \\ p_2 = -\dfrac{3}{10} \; . \end{cases}$$

L'integrale generale sarà, quindi, dato da

$$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{10}\cos x - \frac{3}{10}\sin x \; .$$

Imponendo le condizioni iniziali, si ricava

$$\begin{cases} y(0) = \left(C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x} - \dfrac{1}{10}\cos x - \dfrac{3}{10}\sin x\right)_{x=0} = C_1 + C_2 - \dfrac{1}{10} = 0 \\ y'(0) = \left(C_1 e^{x} - 2C_2 e^{-2x} + \dfrac{1}{10}\sin x - \dfrac{3}{10}\cos x\right)_{x=0} = C_1 - 2C_2 - \dfrac{3}{10} = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{6} \\ C_2 = -\dfrac{1}{15} \; . \end{cases}$$

da cui

$$y(x) = \frac{1}{6}e^{x} - \frac{1}{15}e^{-2x} - \frac{1}{10}\cos x - \frac{3}{10}\sin x \; .$$

ESERCIZIO 6.12. Data l'equazione differenziale

$$y''(x) - 3y'(x) - 18y(x) = 11e^{-2x} \; ,$$

determinare l'integrale generale e le (eventuali) soluzioni che verificano le condizioni

$$y(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} y(x) = 0 \; .$$

Svolgimento : *Poiché l'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 3\lambda - 18 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda_{1,2} = 6; -3$, si ottiene*

$$y_o(x) = C_1 e^{6x} + C_2 e^{-3x} \; .$$

Poiché $f(x) = e^{-2x}$ e $\lambda = -2$ non è soluzione dell'equazione caratteristica, il metodo di somiglianza suggerisce di cercare una soluzione particolare della forma $y_p(x) = pe^{-2x}$. Derivando due volte ed inserendo nell'equazione differenziale assegnata, ricaviamo

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= -2pe^{-2x} \\ y_p''(x) &= 4pe^{-2x} \\ p(4 + 6 - 18)\, e^{-2x} &= 11e^{-2x} \; , \end{aligned}$$

da cui $p = -11/8$. L'integrale generale risulta quindi essere

$$y(x) = C_1 e^{6x} + C_2 e^{-3x} - \frac{11}{8}e^{-2x} \; .$$

Poiché

$$\lim_{x\to+\infty} |y(x)| = \lim_{x\to+\infty} |C_1 e^{6x}| = +\infty \qquad \forall C_1 \neq 0 \; ,$$

occorre imporre $C_1 = 0$. L'altra condizione, invece, implica

$$y(0) = C_2 - \frac{11}{8} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad C_2 = 11/8 \; ,$$

da cui la soluzione cercata risulta essere unica e data da

$$y(x) = \frac{11}{8}\left(e^{-3x} - e^{-2x}\right) \; .$$

ESERCIZIO 6.13. Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$3y''(x) + 4y(x) = \sin x \ .$$

Svolgimento : *Osserviamo che l'equazione differenziale assegnata è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica associata è* $3\lambda^2 + 4 = 0$. *Quest'ultima ha come soluzioni* $\lambda_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}i$ *e* $\lambda_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}}i$; *pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è*

$$y_o(x) = C_1 \cos\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x\right) \ .$$

Poiché l'equazione contiene solo derivate pari, è sufficiente considerare, per il metodo di somiglianza, una soluzione particolare della forma $y_p(x) = p \sin x$, *da cui segue* $y''(x) = -p \sin x$. *Da ciò, si ottiene* $p = 1$; *pertanto l'integrale generale dell'equazione completa è dato da*

$$y(x) = C_1 \cos\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x\right) + \sin x \ .$$

ESERCIZIO 6.14. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$x^2 y''(x) - 3xy'(x) + 8y(x) = 0 \ .$$

Svolgimento : *L'equazione proposta è un'equazione di Eulero ed è definita per* $x > 0$ *oppure* $x < 0$. *Determiniamo la soluzione per* $x > 0$ *(in modo analogo si procede per* $x < 0$*). Operando la sostituzione* $x = e^t$, *l'equazione si riconduce all'equazione lineare del secondo ordine*

$$\widetilde{y}''(t) - 4\widetilde{y}'(t) + 8\widetilde{y}(t) = 0$$

la cui equazione caratteristica associata è data da $\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$, *che ha come soluzioni* $\lambda_{1,2} = 2 \pm 2i$. *Pertanto, l'integrale generale sarà dato da*

$$\widetilde{y}(t) = e^{2t}\Big(C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t)\Big)$$

ovvero

$$y(x) = x^2\Big(C_1 \cos(2 \log x) + C_2 \sin(2 \log x)\Big) \ .$$

ESERCIZIO 6.15. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} xy''(x) - 5y'(x) + \dfrac{8}{x}y(x) = x^2 \ ; \\ y(1) = 0 \ ; \\ y'(1) = 1 \ . \end{cases}$$

…mento : *Moltiplicando per* x *l'equazione proposta, si ottiene l'equazione di Eulero* $x^2y''(x) -$ …$x)$ $+ 8y(x) = x^3$, *che, una volta operata la sostituzione* $x = e^t$, *si può riscrivere nella forma* … $6\widetilde{y}'(t) + 8\widetilde{y}(t) = e^{3t}$. *L'equazione caratteristica associata è data da* $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$, …*ha come soluzioni* $\lambda_1 = 4$ *e* $\lambda_2 = 2$; *quindi, l'integrale generale dell'equazione omogenea è* … $C_1 e^{4t} + C_2 e^{2t}$. *Poiché* $\widetilde{f}(t) = e^{3t}$ *e* $\lambda = 3$ *non è soluzione dell'equazione caratteristica, dal* …*odo di somiglianza si ottiene* $\widetilde{y}_p(t) = -e^{3t}$. *Pertanto, l'integrale generale è dato da*

$$\widetilde{y}(t) = C_1 e^{4t} + C_2 e^{2t} - e^{3t}$$

ovvero

$$y(x) = C_1 x^4 + C_2 x^2 - x^3 \ .$$

…*ponendo le condizioni iniziali, si ottiene che la soluzione cercata è*

$$y(x) = x^4 - x^3 \ .$$

6.4. Esercizi di ricapitolazione

…SERCIZIO 6.16. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 4y(x) + e^{3x} \ ; \\ y(0) = 0 \ . \end{cases}$$

…SERCIZIO 6.17. Siano $y_n(t)$ le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = -ny^3(t) \ ; \\ y(0) = 1 \ . \end{cases}$$

…alcolare $\lim\limits_{n\to\infty} (y_n(1))^2$.

…SERCIZIO 6.18. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'''(x) - y'(x) = e^{2x} \ ; \\ y(0) = 0 \quad y'(0) = 0 \quad y''(0) = 0 \ . \end{cases}$$

…volgimento : *Ponendo* $z(x) = y'(x)$, *l'equazione proposta diventa un'equazione lineare non omo…nea del secondo ordine a coefficienti costanti. Le soluzioni dell'equazione caratteristica associata …ono* $\lambda_{1,2} = \pm 1$, *pertanto la soluzione dell'equazione omogenea associata è* $z_o(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$, *…entre la soluzione particolare, che si può ricavare con il metodo di somiglianza, è* $z_p(x) = \frac{1}{3}e^{2x}$, *da …ui si ottiene l'integrale generale* $z(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x}$. *Effettuando, infine, un'integrazione, …tteniamo*

$$y(x) = \int \left[C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x}\right] dx = C_1 e^x - C_2 e^{-x} + \frac{1}{6}e^{2x} + C_3 \ .$$

Imponendo le condizioni iniziali, si ricava

$$y(0) = C_1 - C_2 + \frac{1}{6} + C_3 = 0$$

$$y'(0) = z(0) = C_1 + C_2 + \frac{1}{3} = 0$$

$$y''(0) = z'(0) = C_1 - C_2 + \frac{2}{3} = 0$$

da cui $C_1 = -1/2$, $C_2 = 1/6$, $C_3 = 1/2$. *Pertanto, la soluzione è*

$$y(x) = -\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{6}e^{-x} + \frac{1}{6}e^{2x} + \frac{1}{2} \ .$$

ESERCIZIO 6.19. Determinare l'integrale generale dell'equazione $y' + 4y = 5t + 1$.

ESERCIZIO 6.20. Determinare la soluzione $y \in C^1(\mathbb{R})$ dell'equazione differenziale

$$y''(x) + 4y'(x) - 5y(x) = f(x) \qquad \text{ove} \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \geq 0; \\ e^x & \text{se } x < 0; \end{cases}$$

tale che

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) = \lim_{x \to +\infty} y(x) = 0 .$$

Svolgimento : *L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine, a coefficienti costanti e non omogenea, in cui il termine di non omogeneità non è continuo. Pertanto, non potremo avere una soluzione* $y \in C^2(\mathbb{R})$. *L'equazione caratteristica associata è data da* $\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$ *ed ha come soluzioni* $\lambda_{1,2} = 1, -5$. *Risolvendo separatamente l'equazione differenziale completa per* $x > 0$ *ed* $x < 0$, *poiché* $\lambda = 1$ *è soluzione dell'equazione caratteristica con molteplicità pari ad* 1, *il metodo di somiglianza suggerisce di cercare una soluzione particolare della forma* $y_p(x) = pxe^x$, *per* $x < 0$. *Sostituendo nell'equazione, si ottiene* $y_p(x) = \frac{1}{6}xe^x$, *per* $x < 0$. *Pertanto, l'integrale generale sarà dato da*

$$y(x) = \begin{cases} C_1e^x + C_2e^{-5x} & \text{per } x > 0 ; \\ C_3e^x + C_4e^{-5x} + \frac{1}{6}xe^x & \text{per } x < 0 . \end{cases}$$

Imponendo le condizioni sui limiti, si ha

$$0 = \lim_{x \to -\infty} y(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(C_3e^x + C_4e^{-5x} + \frac{1}{6}xe^x \right) = \lim_{x \to -\infty} C_4e^{-5x} ,$$
$$0 = \lim_{x \to +\infty} y(x) = \lim_{x \to +\infty} (C_1e^x + C_2e^{-5x}) = \lim_{x \to +\infty} C_1e^x ,$$

da cui si ricava subito $C_1 = C_4 = 0$. *Imponendo, poi, le condizioni di continuità e derivabilità in* $x = 0$, *si ottiene il sistema*

$$\begin{cases} C_2 = C_3 \\ -5C_2 = C_3 + \frac{1}{6} \end{cases}$$

che ha come soluzioni $C_2 = C_3 = -\frac{1}{36}$. *Pertanto, la soluzione cercata sarà*

$$y(x) = \begin{cases} -\frac{1}{36}e^{-5x} & \text{per } x \geq 0 ; \\ -\frac{1}{36}e^x + \frac{1}{6}xe^x & \text{per } x < 0 . \end{cases}$$

ESERCIZIO 6.21. Determinare, al variare del parametro reale α, la soluzione $y_\alpha \in C^1(\mathbb{R})$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - 8y'(x) - 9y(x) = 0 ; \\ y(0) = 1 \qquad y'(0) = \alpha . \end{cases}$$

Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il $\lim_{x \to +\infty} y_\alpha(x)$ esiste finito.

Svolgimento : *Osserviamo che l'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare a coefficienti costanti omogenea del secondo ordine, la cui equazione caratteristica è data da* $\lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0$, *che ha come soluzioni* $\lambda_{1,2} = -1, 9$. *Pertanto, l'integrale generale sarà* $y_\alpha(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{9x}$. *Imponendo le condizioni iniziali, si ottiene*

$$y_\alpha(x) = \frac{9 - \alpha}{10}e^{-x} + \frac{\alpha + 1}{10}e^{9x} ,$$

che ammette limite finito per $x \to +\infty$ *se e solo se* $\alpha = -1$.

ESERCIZIO 6.22. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = 1 + (y')^2(x) ; \\ y(0) = 1 \quad y'(0) = 0 . \end{cases}$$

Svolgimento : *Osserviamo che, ponendo* $y'(x) = z(x)$, *l'equazione del secondo ordine proposta (che è non lineare) si trasforma nell'equazione del primo ordine a variabili separabili nell'incognita* z, *data da* $z'(x) = 1 + z^2(x)$, *con* $z(0) = 0$. *Procedendo per separazione di variabili, dopo aver osservato che non ci sono integrali singolari, e tenendo conto della condizione iniziale, otteniamo*

$$\int_0^{z(x)} \frac{1}{1 + \zeta^2} \, d\zeta = \int_0^x 1 \, dt$$

da cui

$$\arctan z(x) = x .$$

Tale funzione è ben definita ed invertibile per $x \in (-\pi/2, \pi/2)$. *In tale intervallo, possiamo scrivere* $y'(x) = z(x) = \tan x$, *ovvero*

$$y(x) = \int_0^x \tan t \, dt + 1 = \int_0^x \frac{\sin t}{\cos t} \, dt + 1 = -\log(\cos x) + 1 \qquad \forall x \in (-\pi/2, \pi/2) .$$

ESERCIZIO 6.23. Determinare le soluzioni della seguente equazione differenziale

$$2y''(x) + 3y'(x) - y(x) = e^x ,$$

che soddisfano le condizioni

$$y(0) = 0 ; \quad \lim_{x \to -\infty} y(x) = -\infty .$$

Stabilire se, fra le soluzioni trovate, ne esiste una che soddisfi l'ulteriore condizione $y'(0) = 0$.

Svolgimento : *Osserviamo che l'equazione proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica associata è data da*

$$2\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 .$$

Quest'ultima equazione ha come soluzioni $\lambda_1 = \frac{-3-\sqrt{17}}{4} < 0$ *e* $\lambda_2 = \frac{-3+\sqrt{17}}{4} > 0$, *pertanto l'integrale generale è dato da*

$$y(x) = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x} + \frac{1}{4}e^x ,$$

dove si è tenuto conto che $y_p(x) = \frac{1}{4}e^x$ *è una soluzione particolare, ottenuta con il metodo di somiglianza. Imponendo le condizioni richieste, si ottiene*

$$\begin{aligned} &C_1 + C_2 + \frac{1}{4} = 0 && \Longrightarrow && C_2 = -C_1 - \frac{1}{4}\,, \\ &\lim_{x\to-\infty} y(x) = \lim_{x\to-\infty} C_1 e^{\lambda_1 x} = +\infty\cdot \operatorname{sign}(C_1) = -\infty && \Longleftrightarrow && C_1 < 0\,; \end{aligned}$$

pertanto, le soluzioni del problema assegnato sono date da

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} - \left(C_1 + \frac{1}{4}\right) e^{\lambda_2 x} + \frac{1}{4}e^x\,; \qquad C_1 \in (-\infty, 0)\,.$$

Imponendo l'ulteriore condizione $y'(0) = 0$, *si ottiene il sistema*

$$\begin{cases} C_1 < 0\,, \\ C_1\lambda_1 - \left(C_1 + \frac{1}{4}\right)\lambda_2 + \frac{1}{4} = 0\,, \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} C_1 < 0\,, \\ C_1 = \dfrac{1}{4}\dfrac{(\lambda_2 - 1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)} = \dfrac{7-\sqrt{17}}{8\sqrt{17}} > 0\,, \end{cases}$$

che risulta impossibile. Quindi non esiste nessuna soluzione del problema proposto che soddisfi anche l'ulteriore condizione $y'(x) = 0$.

ESERCIZIO 6.24. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - \dfrac{2y'(x)}{x\log x} + \dfrac{2\sqrt{y'(x)}}{x\log x} = 0\,; \\ y(e) = 0\,; \\ y'(e) = 1\,. \end{cases}$$

ESERCIZIO 6.25. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + \dfrac{2x}{4+x^2}\, y(x) = \sqrt[5]{x}\,; \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

ESERCIZIO 6.26. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + \dfrac{1}{x^2}\, y(x) = e^{\frac{1}{x}} \arctan x\,; \\ \\ y(1) = 0\,. \end{cases}$$

ESERCIZIO 6.27. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y^{iv}(x) - 2y'''(x) + \alpha y''(x) = e^{-x}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Verificare che, per $\alpha > 1$, vi è una sola soluzione y_α tale che

$$\lim_{x\to+\infty} y_\alpha(x) = 0\,.$$

Facoltativo: Stabilire che cosa accade per $\alpha \le 1$.

Svolgimento : *L'equazione può essere abbassata di grado, osservando che* y *e* y' *non compaiono esplicitamente. Ponendo* $z(x) = y''(x)$, *otteniamo* $z''(x) - 2z'(x) + \alpha z(x) = e^{-x}$. *L'equazione secolare associata è data da* $\lambda^2 - 2\lambda + \alpha = 0$, *le cui soluzioni sono* $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-\alpha}$, *e dipendono, quindi, da* α.

Studiamo separatamente i tre casi: **a)** $\alpha > 1$, **b)** $\alpha = 1$, **c)** $\alpha < 1$.

a) *se* $\alpha > 1$, $\lambda_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{\alpha - 1}$ *e*

$$z_o(x) = K_1 e^x \cos(\sqrt{\alpha-1}\;x) + K_2 e^x \sin(\sqrt{\alpha-1}\;x)\,.$$

Poiché $f(x) = e^{-x}$ *e* $\lambda = -1$ *non è soluzione dell'equazione caratteristica, un integrale particolare dell'equazione non omogenea va cercato nella forma* $z_p(x) = pe^{-x} \Longrightarrow z_p'(x) = -pe^{-x} \Longrightarrow z_p''(x) = pe^{-x}$, *da cui, sostituendo nell'equazione,*

$$p(1 + 2 + \alpha)e^{-x} = e^{-x} \Longrightarrow p = \frac{1}{\alpha+3}\,.$$

L'integrale generale è, pertanto,

$$z(x) = y''(x) = K_1 e^x \cos(\sqrt{\alpha-1}\;x) + K_2 e^x \sin(\sqrt{\alpha-1}\;x) + \frac{1}{\alpha+3}e^{-x}\,.$$

Integriamo ora due volte i due membri:

$$y(x) = \int \left\{ \int \left[K_1 e^x \cos(\sqrt{\alpha-1}\;x) + K_2 e^x \sin(\sqrt{\alpha-1}\;x) + \frac{1}{\alpha+3}e^{-x} \right] dx \right\} dx\,.$$

Osserviamo che ogni integrale di funzioni della forma $K_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + K_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ *è ancora, a meno di costanti, della forma* $C_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x)$, *con* C_1, C_2, *in generale, diverse da* K_1, K_2. *Invitiamo il lettore a verificare direttamente questa proprietà, ad esempio utilizzando le formule di Eulero; in tal caso, si può riscrivere la funzione integranda nella forma*

$$K_1 e^x \cos(\sqrt{\alpha-1}\;x) + K_2 e^x \sin(\sqrt{\alpha-1}\;x) = H_1 e^{x+i\sqrt{\alpha-1}\;x} + H_2 e^{x-i\sqrt{\alpha-1}\;x}\,,$$

e poi integrare due volte quest'ultima espressione, tenendo conto che

$$\int e^{\alpha\pm i\beta}\, dx = \frac{1}{\alpha \pm i\beta}\, e^{\alpha\pm i\beta} + C.$$

D'altro canto,

$$\int \left[\int \frac{1}{\alpha+3}\, e^{-x}\, dx \right] dx = \int \left[-\frac{1}{\alpha+3}\, e^{-x} + C_3 \right] dx = \frac{1}{\alpha+3}\, e^{-x} + C_3 x + C_4\,,$$

quindi, l'integrale generale, per $\alpha > 1$ *è dato da*

$$y_\alpha(x) = e^x \left[C_1 \cos(\sqrt{\alpha-1}\;x) + C_2 \sin(\sqrt{\alpha-1}\;x) \right] + \frac{1}{\alpha+3}e^{-x} + C_3 x + C_4\,;$$

b) *se* $\alpha = 1$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ *e*

$$z_o(x) = K_1 e^x + K_2 x e^x\,.$$

Poiché $f(x) = e^{-x}$ *e ancora* $\lambda = -1$ *non è soluzione dell'equazione caratteristica, un integrale particolare dell'equazione non omogenea va cercato nella forma* $z_p(x) = pe^{-x}$, *da cui, ripetendo i passaggi svolti nel caso* **a**), *si ha*

$$z_p(x) = \frac{1}{\alpha+3}\Big|_{\alpha=1} e^{-x} = \frac{1}{4} e^{-x} ,$$

ovvero

$$z(x) = K_1 e^x + K_2 x e^x + \frac{1}{4} e^{-x}$$

$$y'(x) = \int z(x)\, dx = K_1 e^x + K_2(x-1)e^x + C_3 - \frac{1}{4} e^{-x}$$

$$y(x) = K_1 e^x + K_2(x-2)e^x + C_3 x + C_4 + \frac{1}{4} e^{-x} ,$$

da cui, rinominando le costanti $(C_1 = K_1 - 2K_2 \ ; \ C_2 = K_2)$,

$$y_1(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x + C_4 + \frac{1}{4} e^{-x} ;$$

c) *se* $\alpha < 1$, $\lambda_1 = 1 + \sqrt{1-\alpha}$; $\lambda_2 = 1 - \sqrt{1-\alpha}$ *e*

$$z_o(x) = \begin{cases} K_1 e^{(1+\sqrt{1-\alpha})x} + K_2 e^{(1-\sqrt{1-\alpha})x} & se \quad \alpha \neq 0 \\ K_1 e^{2x} + K_2 & se \quad \alpha = 0 \end{cases}$$

In questo caso, dobbiamo distinguere due casi diversi:

- $\lambda = -1$ *è soluzione dell'equazione caratteristica; ciò accade se* $\alpha = -3$ *(valore per il quale* $\lambda_1 = 3$; $\lambda_2 = -1$);
- $\lambda = -1$ *non è soluzione dell'equazione caratteristica, cioè* $\alpha \neq -3$.

Per $\alpha < 1$; $\alpha \neq -3$, *una soluzione particolare si cerca nella forma* $z_p(x) = pe^{-x}$, *da cui, come già visto nei precedenti casi,*

$$z(x) = \begin{cases} K_1 e^{(1+\sqrt{1-\alpha})\, x} + K_2 e^{(1-\sqrt{1-\alpha})\, x} + \frac{1}{\alpha+3} e^{-x} & se \quad \alpha \neq 0 \\ K_1 e^{2x} + K_2 + \frac{1}{3} e^{-x} & se \quad \alpha = 0 \end{cases}$$

e, con conti simili ai precedenti,

$$y(x) = \begin{cases} C_1 e^{(1+\sqrt{1-\alpha})\, x} + C_2 e^{(1-\sqrt{1-\alpha})\, x} + C_3 x + C_4 + \frac{1}{\alpha+3} e^{-x} & se \quad \alpha \neq 0 \\ C_1 e^{2x} + C_2 x^2 + C_3 x + C_4 + \frac{1}{3} e^{-x} & se \quad \alpha = 0 \end{cases}$$

Per $\alpha = -3$, *la soluzione particolare va cercata nella forma*

$$z_p(x) = pxe^{-x} \Longrightarrow z_p'(x) = p(1-x)e^{-x} \Longrightarrow z_p''(x) = p(x-2)e^{-x}$$
$$\Longrightarrow p[x - 2 - 2(1-x) - 3x]e^{-x} = e^{-x} \Longrightarrow p = -\frac{1}{4} ,$$

da cui l'integrale generale

$$z(x) = K_1 e^{3x} + K_2 e^{-x} - \frac{1}{4} x e^{-x} ;$$

dato che

$$\int \left[\int -\frac{1}{4} x e^{-x}\, dx \right] dx = \int \frac{1}{4}(x+1)e^{-x}\, dx + C_3 = -\frac{1}{4}(x+2)e^{-x} + C_3 x + C_4 ,$$

avremo che, per $\alpha = -3$,

$$y_{-3}(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} + C_3 x + C_4 - \frac{1}{4} x e^{-x} .$$

Imponendo la condizione al limite e ricordando il comportamento asintotico di polinomi ed esponenziali, avremo

$$\lim_{x \to +\infty} y_\alpha(x) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\text{a)} \quad y_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha+3} e^{-x} \qquad se \quad \alpha > 1$$

$$\text{b)} \quad y_1(x) = \frac{1}{4} e^{-x} \qquad se \quad \alpha = 1$$

$$\text{c)} \quad y_{-3}(x) = \left[C_2 - \frac{1}{4}x\right] e^{-x} \qquad se \quad \alpha = -3 .$$

Il caso $\alpha < 1$; $\alpha \neq 0$; $\alpha \neq -3$ *va ulteriormente diviso in due sottocasi, perché l'esponente* $1 - \sqrt{1-\alpha}$ *è*

- *negativo* $\Longleftrightarrow \quad 1 < \sqrt{1-\alpha} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha < 0$;
- *positivo* $\Longleftrightarrow \quad \alpha > 0$.

Pertanto

$$\lim_{x \to +\infty} C_2\, e^{(1-\sqrt{1-\alpha})x} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \forall\, C_2 \in \mathbb{R} & se \quad \alpha < 0 \ ; \ \alpha \neq -3 \\ C_2 = 0 & se \quad 0 < \alpha < 1 , \end{cases}$$

da cui

$$y_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}\, e^{-x} & se \quad \alpha = 0 \\ \frac{1}{\alpha+3}\, e^{-x} & se \quad 0 < \alpha < 1 \\ C_2\, e^{(1-\sqrt{1-\alpha})x} + \frac{1}{\alpha+3}\, e^{-x} \ ; \ C_2 \in \mathbb{R} & se \quad \alpha < 0 \ ; \ \alpha \neq -3 . \end{cases}$$

Ricapitolando,

$$\lim_{x \to +\infty} C_2\, e^{(1-\sqrt{1-\alpha})x} = 0 \Longleftrightarrow$$

$$y_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+3}\, e^{-x} & se\ \alpha \geq 0 \\ C_2\, e^{(1-\sqrt{1-\alpha})x} + \frac{1}{\alpha+3}\, e^{-x} \ ; \ C_2 \in \mathbb{R} & se \quad \alpha < 0 \ ; \ \alpha \neq -3 \\ (C_2 - \frac{1}{4}x)\ e^{-x} \ ; \ C_2 \in \mathbb{R} & se \quad \alpha = -3 . \end{cases}$$

Per $\alpha \geq 0$ *si ha una soluzione; per* $\alpha < 0$ *si hanno infinite soluzioni.*

ESERCIZIO 6.28. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + 8y'(x) + 16y(x) = 3x - 2 \; ; \\ y(0) = 0 \; ; \\ y'(0) = 0 \; . \end{cases}$$

ESERCIZIO 6.29. Determinare tutte le soluzioni del problema

$$\begin{cases} y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = e^x \; ; \\ y(0) = 2 \; ; \\ \lim_{x\to-\infty} y(x) = 0 \; . \end{cases}$$

ESERCIZIO 6.30. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale non omogenea

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x \; .$$

Stabilire quali, tra le soluzioni, soddisfino la condizione

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0 \; .$$

Svolgimento : *L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine non omogenea, la cui equazione caratteristica associata è data da* $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, *che ha come soluzione* $\lambda = 1$ *con molteplicità 2. Pertanto, la soluzione dell'equazione omogenea sarà*

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^x + C_2 x\mathrm{e}^x \; .$$

Poiché $f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x$ *e* $\lambda = 1$ *è soluzione dell'equazione caratteristica con molteplicità 2, il metodo di somiglianza fornisce una soluzione particolare della forma* $y_p(x) = px^2\mathrm{e}^x$. *Inserendo tale funzione nell'equazione differenziale completa, si ottiene* $p = 1/4$, *da cui*

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^x + C_2 x\mathrm{e}^x + \frac{1}{4}x^2\mathrm{e}^x \; .$$

È immediato verificare che non ci sono soluzioni che soddisfino la condizione richiesta.

ESERCIZIO 6.31. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 2\mathrm{e}^x + 3\mathrm{e}^{-2x} \; .$$

ESERCIZIO 6.32. Data l'equazione differenziale

$$y'''(x) + 2y''(x) + y'(x) = \mathrm{e}^{-x}$$

determinare l'integrale generale e la soluzione del problema di Cauchy relativo alle condizioni

$$y(0) = 1 \; ; \qquad y'(0) = 2 \; ; \qquad y''(0) = 0 \; .$$

ESERCIZIO 6.33. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'''(x) - \dfrac{2}{x+2}y''(x) = 1 \; ; \\ y(0) = 0 \; ; \\ y'(0) = 2/3 \; ; \\ y''(0) = 2 \; . \end{cases}$$

ESERCIZIO 6.34. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + xy'(x) = 2x\sqrt{y'(x)} \; ; \\ y(0) = 0 \; ; \\ y'(0) = 4 \; . \end{cases}$$

ESERCIZIO 6.35. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''(x) + \frac{y'(x)}{x} + \frac{4y(x)}{x^2} = \frac{\cos(2\log x)}{x^2} \; .$$

Risposte agli esercizi non svolti: **6.4**: $y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}^{x^4/2} - 1}}$ - **6.5**: $y(x) = 1$ - **6.10**: $y(x) = \frac{1}{8}(1 + \sin x)^3$ - **6.16**: $y(x) = \mathrm{e}^{4x} - \mathrm{e}^{3x}$ - **6.17**: $y_n(t) = \sqrt{\frac{1}{2nt+1}}$; $\lim_{n\to\infty} (y_n(1))^2 = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{2n+1} = 0$ - **6.19**: $y(t) = C\mathrm{e}^{-4t} + \frac{5}{4}t - \frac{1}{16}$ - **6.24**: $y(x) = x - \mathrm{e}$ (integrale singolare) - **6.25**: $y(x) = \frac{1}{(4+x^2)}\left[\frac{10}{3}x^{\frac{6}{5}} + \frac{5}{16}x^{\frac{16}{5}} + 4\right]$ - **6.26**: $y(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\left[\, x\arctan x - \frac{1}{2}\log(\, 1 + x^2 \,) + \frac{1}{2}\log 2 - \frac{\pi}{4}\right]$ - **6.28**: $y(x) = \frac{7}{32}\mathrm{e}^{-4x} + \frac{11}{16}x\mathrm{e}^{-4x} + \frac{3}{16}x - \frac{7}{32}$ - **6.29**: $y(x) = C_1 e^x + (2 - C_1)e^{2x} - xe^x$ - **6.31**: $y(x) = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^x - 3x\mathrm{e}^{-2x}$ - **6.32**: l'integrale generale è dato da $y(x) = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-x} + C_3 x\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-x}$; la soluzione del problema di Cauchy è data da $6 - 5\mathrm{e}^{-x} - 3x\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-x}$ - **6.33**: $y(x) = \frac{x(x+2)^3}{12}$ - **6.34**: $y(x) = 4x$ (integrale singolare)- **6.35**: $y(x) = C_1\cos(2\log x) + C_2\sin(2\log x) + \frac{1}{4}\log x\sin(2\log x)$ per $x > 0$.

CAPITOLO 7

FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

7.1. Limiti e continuità

Sebbene quanto verrà di seguito ricordato si può facilmente estendere al caso di funzioni definite su insiemi di $\mathbb{R}^n$, con $n > 2$, noi ci limiteremo a considerare il caso delle funzioni di 2 variabili reali.

• Richiami: ricordiamo che, per il calcolo dei limiti (e quindi anche per lo studio della continuità) per funzioni di due variabili, si possono utilizzare alcuni utili strumenti quali:

- *cambiamento in coordinate polari*: detto (x_0, y_0) il punto in cui si vuole calcolare il limite, si effettua la sostituzione
$$x = x_0 + \rho\cos\vartheta \qquad y = y_0 + \rho\sin\vartheta$$
e si calcola il limite per $\rho \to 0^+$ della funzione, riscritta nelle nuove variabili. Sottolineiamo che il nuovo limite, affinché esista, deve risultare <u>indipendente</u> da ϑ;
- utilizzare delle *disuguaglianze*, quali ad esempio:

$$(i) \quad 2|a\cdot b| \le a^2 + b^2 \quad \text{o, più in generale,} \quad 2|a\cdot b| \le \frac{1}{\lambda}\,a^2 + \lambda\,b^2$$
$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ \forall \lambda \in (0, +\infty)\ ;$$

$$(ii) \quad \frac{f(x,y)}{g(x,y)+h(x,y)} \le \frac{f(x,y)}{g(x,y)} \quad \text{oppure} \quad \frac{f(x,y)}{g(x,y)+h(x,y)} \le \frac{f(x,y)}{h(x,y)}$$
dove f, g, h sono funzioni positive .

<u>N.B.</u> È importante ricordarsi che, per ottenere l'esistenza di un assegnato limite, non si può calcolarlo solo lungo qualche direzione (o anche lungo tutte le direzioni), né lungo qualche curva particolare. Infatti, ad esempio, la funzione $f(x,y) = \frac{|x|\sqrt{|y|}}{x^4+|y|}$, per $(x,y) \to (0,0)$, ammette limite pari a 0 lungo ogni direzione, poiché

$$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{|x|\sqrt{|mx|}}{x^4 + |mx|} = \lim_{x\to 0} \sqrt{\left|\frac{x}{m}\right|} = 0 \quad \forall m \neq 0 \qquad \text{e} \qquad f(x,0) = f(0,y) = 0\ ,$$

ma

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \quad \text{non esiste poiché} \quad \lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^4+x^2} = 1 \neq 0\ ,$$

dove l'ultimo limite è stato calcolato restringendosi alla parabola di equazione $y = x^2$.

• Esercizi

ESERCIZIO 7.1. Calcolare
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\ .$$

Svolgimento : *Siamo in presenza di una forma indeterminata* $\left[\frac{0}{0}\right]$. *Effettuando una sostituzione in coordinate polari centrate nell'origine, si ottiene*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^2\cos\vartheta\sin\vartheta}{\rho} = \lim_{\rho\to 0^+} \rho\cos\vartheta\sin\vartheta = 0$$

dove l'ultimo limite è stato calcolato osservando che, per ogni ϑ, *si ha*

$$0 \le |\rho\cos\vartheta\sin\vartheta| \le \rho \to 0 \qquad per \quad \rho \to 0^+$$

ed utilizzando il Teorema del Confronto.

ESERCIZIO 7.2. Calcolare $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2}$.

Svolgimento : *Siamo in presenza di una forma indeterminata* $\left[\frac{0}{0}\right]$. *Effettuando una sostituzione in coordinate polari piane, centrate nell'origine, si ottiene*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^3\sin^3\vartheta}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \rho\sin^3\vartheta = 0\ ,$$

indipendentemente da ϑ, *poiché*

$$0 \le \rho|\sin^3\vartheta| \le \rho \to 0 \qquad per \quad \rho\to 0^+\ .$$

ESERCIZIO 7.3. Calcolare

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{y(x-1)(y-1)^3}{(x-1)^2+|y-1|}\ .$$

Svolgimento : *Siamo in presenza di una forma indeterminata* $\left[\frac{0}{0}\right]$. *Poiché, per* $(x,y)\to(1,1)$,

$$0 \le \frac{|y(x-1)(y-1)^3|}{(x-1)^2+|y-1|} \le \frac{|y|\ |x-1|\ |y-1|^3}{|y-1|} = |y|\ |x-1|\ (y-1)^2 \ \to\ 0\ ,$$

il limite proposto è nullo.

ESERCIZIO 7.4. Dimostrare che il seguente limite non esiste:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3-3x^2}{x^2+y^2}\ .$$

Svolgimento : *È sufficiente osservare che, lungo gli assi coordinati, si ha*

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = 0 \ne -3 = \lim_{x\to 0} f(x,0)\ .$$

ESERCIZIO 7.5. Calcolare

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^2(e^{x-1}-1)}{x^2+y^2-2x+1}\ .$$

Svolgimento : *Ricordando che, per* $x\to 1$, $(e^{x-1}-1)\sim(x-1)$ *ed utilizzando il cambiamento in coordinate polari* $x = 1+\rho\cos\vartheta$, $y=\rho\sin\vartheta$, *il limite proposto diviene*

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^2(e^{x-1}-1)}{x^2+y^2-2x+1} = \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^2(x-1)}{(x-1)^2+y^2}$$
$$= \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^3\sin^2\vartheta\cos\vartheta}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \rho\sin^2\vartheta\cos\vartheta = 0\ ,$$

indipendentemente da ϑ, *poiché*

$$0 \le \rho\sin^2\vartheta|\cos\vartheta| \le \rho \to 0 \qquad per \quad \rho\to 0^+\ .$$

ESERCIZIO 7.6. Calcolare, se esiste,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-3y^3}{x^2+y^2}\ .$$

ESERCIZIO 7.7. Calcolare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{4y^3}-1+x^2+y^2}{x^2+y^2}\ .$$

Svolgimento : *Con un cambiamento in coordinate polari centrate nell'origine ed utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per* e^t, *con* $t = 4\rho^3\sin^3\vartheta$, *ci si riconduce al calcolo del seguente limite*

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{\exp(4\rho^3\sin^3\vartheta)-1+\rho^2}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{4\rho^3\sin^3\vartheta+\rho^2}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0^+}(4\rho\sin^3\vartheta+1) = 1$$

indipendentemente da ϑ, *poiché*

$$0 \le |[4\rho\sin^3\vartheta+1]-1| = 4\rho|\sin^3\vartheta| \le 4\rho \to 0 \qquad per \quad \rho\to 0^+\ .$$

ESERCIZIO 7.8. Stabilire se la seguente funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+3|y|^3)-x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\ne(0,0); \\ -1 & \text{se } (x,y)=(0,0); \end{cases}$$

è continua.

Svolgimento : *La funzione proposta è chiaramente continua fuori dall'origine. Studiamo la continuità nell'origine: con un cambiamento in coordinate polari centrate nell'origine ed utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per* $\log(1+t)$, *con* $t = 3\rho^3|\sin\vartheta|^3$, *ci si riconduce al calcolo del seguente limite*

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{\log(1+3\rho^3|\sin\vartheta|^3)-\rho^2}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{3\rho^3|\sin\vartheta|^3-\rho^2}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0^+}(3\rho|\sin\vartheta|^3-1) = -1$$

indipendentemente da ϑ. *Quindi la funzione è continua anche nell'origine.*

ESERCIZIO 7.9. Stabilire se la seguente funzione

$$f(x,y)=\frac{[(x-1)^3y+2xy+4y^2]^{7/3}}{[\sqrt{(x-1)^2+y^2}]^{2/3}}$$

è prolungabile con continuità nel punto $(1,0)$ ed in caso affermativo stabilire quale valore deve assumere il prolungamento di f nel punto $(1,0)$.

Svolgimento : *Effettuando un cambiamento di variabile in coordinate polari con centro in* $(1,0)$, *ci si riconduce a calcolare il seguente limite:*

$$\lim_{\rho\to0^+}\frac{[\rho^4\cos^3\vartheta\sin\vartheta+2(1+\rho\cos\vartheta)\rho\sin\vartheta+4\rho^2\sin^2\vartheta]^{7/3}}{[\sqrt{\rho^2\cos^2\vartheta+\rho^2\sin^2\vartheta}]^{2/3}}=$$

$$\lim_{\rho\to0^+}\frac{(2\rho\sin\vartheta)^{7/3}}{\rho^{2/3}}\left[\frac{1}{2}\rho^3\cos^3\vartheta+(1+\rho\cos\vartheta)+2\rho\sin\vartheta\right]^{7/3}=$$

$$\lim_{\rho\to0^+}\frac{(2\rho\sin\vartheta)^{7/3}}{\rho^{2/3}}=\lim_{\rho\to0^+}\rho^{5/3}(2\sin\vartheta)^{7/3}=0$$

indipendentemente da ϑ. Quindi la funzione è prolungabile con continuità nel punto $(1,0)$ *ed il suo prolungamento dovrà assumere il valore* 0 *in tale punto.*

ESERCIZIO 7.10. Calcolare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\log(1+2x^3)}{x^2+y^2}.$$

Svolgimento : *Con un cambiamento in coordinate polari centrate nell'origine ed utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per* $\log(1+t)$, *con* $t=2\rho^3\cos^3\vartheta$, *ci si riconduce al calcolo del seguente limite*

$$\lim_{\rho\to0^+}\frac{\log(1+2\rho^3\cos^3\vartheta)}{\rho^2}=\lim_{\rho\to0^+}\frac{2\rho^3\cos^3\vartheta}{\rho^2}=\lim_{\rho\to0^+}2\rho\cos^3\vartheta=0$$

indipendentemente da ϑ.

ESERCIZIO 7.11. Calcolare

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{|x|^{5/2}|y-1|}{x^4-2y+y^2+1}.$$

Svolgimento : *Poiché, utilizzando la disuguaglianza*

$$2|x^2\cdot(y-1)|\le x^4+(y-1)^2,$$

si ottiene

$$0\le\frac{|x|^{5/2}|y-1|}{x^4+(y-1)^2}\le\frac{|x|^{5/2}|y-1|}{2x^2|y-1|}=\frac{1}{2}|x|^{1/2}\to0\qquad per\ (x,y)\to(0,1)\ ;$$

per il Teorema del Confronto, il limite proposto è nullo.

ESERCIZIO 7.12. Calcolare

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{x^3\sin(y-1)}{x^2+y^2-2y+1}.$$

ESERCIZIO 7.13. Calcolare, al variare del parametro reale α,

$$\lim_{(x,y)\to(3,1)}\frac{x[(x-3)^2+(y-1)^2]^{\alpha/2}}{x^2+y^2-6x-2y+10}.$$

Svolgimento : *Effettuando un cambiamento in coordinate polari centrate nel punto* $(3,1)$, *si ottiene*

$$\lim_{(x,y)\to(3,1)}\frac{x[(x-3)^2+(y-1)^2]^{\alpha/2}}{x^2+y^2-6x-2y+10}=\lim_{(x,y)\to(3,1)}\frac{x[(x-3)^2+(y-1)^2]^{\alpha/2}}{(x-3)^2+(y-1)^2}=$$

$$\lim_{\rho\to0^+}\frac{(3+\rho\cos\vartheta)[\rho^2\cos^2\vartheta+\rho^2\sin^2\vartheta]^{\alpha/2}}{\rho^2\cos^2\vartheta+\rho^2\sin^2\vartheta}=\lim_{\rho\to0^+}\frac{(3+\rho\cos\vartheta)\rho^\alpha}{\rho^2}=$$

$$3\lim_{\rho\to0^+}\rho^{\alpha-2}=\begin{cases}0 & se\ \alpha>2;\\ 3 & se\ \alpha=2;\\ +\infty & se\ \alpha<2.\end{cases}$$

ESERCIZIO 7.14. Stabilire se esiste il seguente limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

ESERCIZIO 7.15. Calcolare

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{[x^3+4xy+10x(y-1)^2]^{5/3}}{[\sqrt{x^2+(y-1)^2}]^{1/2}}.$$

Svolgimento : *Effettuando un cambiamento di variabile in coordinate polari con centro in* $(0,1)$, *ci si riconduce a calcolare il seguente limite:*

$$\lim_{\rho\to0^+}\frac{[\rho^3\cos^3\vartheta+4\rho\cos\vartheta(1+\rho\sin\vartheta)+10\rho^3\cos\vartheta\sin^2\vartheta]^{5/3}}{[\sqrt{\rho^2\cos^2\vartheta+\rho^2\sin^2\vartheta}]^{1/2}}=$$

$$\lim_{\rho\to0^+}\frac{(4\rho\cos\vartheta)^{5/3}[(1/4)\rho^2\cos^2\vartheta+(1+\rho\sin\vartheta)+(5/2)\rho^2\sin^2\vartheta]^{5/3}}{\rho^{1/2}}=$$

$$\lim_{\rho\to0^+}\frac{(4\rho\cos\vartheta)^{5/3}}{\rho^{1/2}}=\lim_{\rho\to0^+}\rho^{7/6}(4\cos\vartheta)^{5/3}=0$$

indipendentemente da ϑ.

ESERCIZIO 7.16. Calcolare

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{[(x-1)^3(y-1)+x(y-1)+4(y-1)^2]^{7/3}}{[\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}]^{1/2}}.$$

ESERCIZIO 7.17. Calcolare
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2y^2}{x^2+y^2} .$$

ESERCIZIO 7.18. Calcolare
$$\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{y\sin\left[(x-2)^2\right]}{x^2-4x+y^2+4} .$$

ESERCIZIO 7.19. Calcolare, se esiste, il seguente limite:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2+xy-x^2}{x^2+y^2} .$$

Svolgimento : *Poiché, lungo gli assi coordinati, si ha*
$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = 1 \neq -1 = \lim_{x\to 0} f(x,0) ,$$
il limite proposto non esiste

ESERCIZIO 7.20. Calcolare
$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{|x-1|^{3/2}y^2}{x^2-2x+y^4+1} .$$

ESERCIZIO 7.21. Calcolare, al variare del parametro reale α,
$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{y[(x-1)^2+(y-2)^2]^{\alpha/2}}{x^2+y^2-2x-4y+5} .$$

ESERCIZIO 7.22. Stabilire se la funzione
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(e^x-1)\ \log(1+y^2)}{|y|+|x|} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) ; \\ 0 & \text{se } \quad (x,y)=(0,0) ; \end{cases}$$
è continua nell'origine.

Svolgimento : *Il limite per $(x,y)\to(0,0)$ da luogo a una forma indeterminata. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per e^x e per $\log(1+t)$, con $t=y^2$, si ottiene*
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(e^x-1)\ \log(1+y^2)}{|y|+|x|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\ y^2}{|y|+|x|} = 0 ,$$
in quanto $0 \leq \dfrac{|x\ y^2|}{|y|+|x|} \leq \dfrac{|x|\ y^2}{|x|} = y^2 \to 0$ *per* $(x,y)\to(0,0)$. *Quindi la funzione è continua nell'origine.*

ESERCIZIO 7.23. Stabilire se esiste
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(1+x)^{5/2}-1}{x^2+y^2}$$
e, in caso affermativo, calcolarlo.

Svolgimento : *Calcolando il limite proposto lungo una generica retta non verticale, di equazione $y=mx$, ed utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per $(1+x)^{5/2}$, ci si riconduce a determinare il seguente limite*
$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{5/2}-1}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(5/2)x}{(1+m^2)x^2} = \begin{cases} +\infty & se\ x\to 0^+ , \\ -\infty & se\ x\to 0^- . \end{cases}$$
Pertanto, il limite proposto non esiste.

ESERCIZIO 7.24. Stabilire se la funzione
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2\ \log(1+|y|)}{(x-1)^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(1,0) ; \\ 1 & \text{se } (x,y)=(1,0) ; \end{cases}$$
è continua in $(1,0)$.

ESERCIZIO 7.25. Stabilire se esiste
$$\lim_{(x,y)\to(0,3)} \frac{\log(1+x^2)}{y^2-6y+9}$$
e, in caso affermativo, calcolarlo.

Svolgimento : *Effettuando un cambiamento in coordinate polari centrate in $(0,3)$ ed utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per $\log(1+t)$, con $t=x^2$, il limite proposto si riscrive nella forma*
$$\lim_{(x,y)\to(0,3)} \frac{\log(1+x^2)}{(y-3)^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^2\cos^2\vartheta}{\rho^2\sin^2\vartheta} = \lim_{\rho\to 0^+} \cot^2\vartheta .$$
Pertanto il limite proposto, dipendendo da ϑ, non esiste.

Risposte agli esercizi non svolti: **7.6**: il limite proposto vale 0 - **7.12**: il limite proposto vale 0 - **7.14**: il limite proposto non esiste - **7.16**: il limite proposto vale 0 - **7.17**: il limite proposto non esiste - **7.18**: il limite proposto vale 0 - **7.20**: il limite proposto vale 0 - **7.21**: il limite proposto vale 0 per $\alpha>2$, vale 2 per $\alpha=2$ e vale $+\infty$ per $\alpha<2$ - **7.24**: la funzione non è continua in $(1,0)$.

7.2. Derivabilità e differenziabilità

• Derivate parziali, direzionali, differenziabilità. Sia $f: A\to\mathbb{R}$, dove $A\subseteq\mathbb{R}^2$ è un insieme aperto contenente il punto (x_0,y_0); sia $\vec{v}=(v_1,v_2)$ una direzione di $\mathbb{R}^2$, cioè $\|\vec{v}\|^2=v_1^2+v_2^2=1$. Allora, si dice che f è *derivabile parzialmente rispetto ad x (rispetto ad y)* oppure *derivabile lungo la direzione $\vec{v}$*, nel punto (x_0,y_0), se esistono finiti i seguenti limiti:

$$f_x(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)}{t} \qquad \text{derivata parziale di } f \text{ rispetto ad } x,$$
$$f_y(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0,y_0+t)-f(x_0,y_0)}{t} \qquad \text{derivata parziale di } f \text{ rispetto ad } y,$$
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+tv_1,y_0+tv_2)-f(x_0,y_0)}{t} \qquad \text{derivata direzionale di } f \text{ lungo } \vec{v},$$
$$\operatorname{grad} f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right) \qquad \text{gradiente di } f .$$

Inoltre, si dice che f è differenziabile nel punto (x_0, y_0), se essa ammette entrambe le derivate parziali in (x_0, y_0) e si ha

$$\exists \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 .$$

Osserviamo che l'esistenza delle derivate parziali, o anche di tutte le derivate direzionali, nel punto (x_0, y_0) non garantisce la continuità di f in tale punto. Se invece una funzione è differenziabile in (x_0, y_0), allora essa è continua e ammette tutte le derivate direzionali in tale punto; inoltre vale la formula

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0)\cdot \vec{v} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)v_2 . \tag{7.1}$$

Notiamo che la formula precedente non vale per una generica f non differenziabile; inoltre, tale formula mostra che, se f è differenziabile, le sue derivate direzionali dipendono linearmente dalle componenti della direzione $\vec{v}$. Pertanto, una funzione le cui derivate direzionali nel punto (x_0, y_0) sono, per esempio, della forma $v_1^4 + 2v_2^3$, non può certamente essere differenziabile in tale punto.

Infine, ricordiamo che, se f ammette derivate parziali continue in un intorno di (x_0, y_0), allora essa è differenziabile (e quindi anche continua) in tale punto.

- Differenziabilità della funzione composta.

Sia $f : A \to \mathbb{R}$, una funzione differenziabile nel punto $(x_0, y_0) \in A$, sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^2$. Siano $x, y : I \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili nel punto $t_0 \in I$, intervallo di $\mathbb{R}$, tali che $(x(t), y(t)) \in A$, per ogni $t \in I$ e $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$. Allora, la funzione $F : I \to \mathbb{R}$, definita da $F(t) = f(x(t), y(t))$, è derivabile in t_0 e vale la formula

$$\begin{aligned} F'(t_0) &= f_x(x(t_0), y(t_0))x'(t_0) + f_y(x(t_0), y(t_0))y'(t_0) \\ &= f_x(x_0,y_0)x'(t_0) + f_y(x_0,y_0)y'(t_0) . \end{aligned} \tag{7.2}$$

Sia $\phi : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile nel punto $t_0 \in I$, intervallo di $\mathbb{R}$. Sia $f : A \to \mathbb{R}$, una funzione differenziabile nel punto $(x_0, y_0) \in A$, sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^2$, tale che $f(x, y) \in I$, per ogni $(x, y) \in A$ e $f(x_0, y_0) = t_0$. Allora, la funzione $F : A \to \mathbb{R}$, definita da $F(x, y) = \phi(f(x, y))$, è differenziabile in (x_0, y_0) e vale la formula

$$\begin{aligned} F_x(x_0,y_0) &= \phi'(f(x_0,y_0))f_x(x_0,y_0) = \phi'(t_0)f_x(x_0,y_0) , \\ F_y(x_0,y_0) &= \phi'(f(x_0,y_0))f_y(x_0,y_0) \;. = \phi'(t_0)f_y(x_0,y_0) , \end{aligned} \tag{7.3}$$

Sia $f : A \to \mathbb{R}$, una funzione differenziabile nel punto $(x_0, y_0) \in A$, sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^2$. Siano $x, y : B \to \mathbb{R}$ due funzioni differenziabili nel punto $(u_0, v_0) \in B$, sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^2$, tali che $(x(u, v), y(u, v)) \in A$, per ogni $(u, v) \in B$ e $(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0)) = (x_0, y_0)$. Allora, la funzione $F : B \to \mathbb{R}$, definita da $F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$, è differenziabile in (u_0, v_0) e vale la formula

$$\begin{aligned} F_u(u_0,v_0) &= f_x(x(u_0,v_0), y(u_0,v_0))x_u(u_0,v_0) + f_y(x(u_0,v_0), y(u_0,v_0))y_u(u_0,v_0) , \\ &= f_x(x_0,y_0)x_u(u_0,v_0) + f_y(x_0,y_0)y_u(u_0,v_0) , \\ F_v(u_0,v_0) &= f_x(x(u_0,v_0), y(u_0,v_0))x_v(u_0,v_0) + f_y(x(u_0,v_0), y(u_0,v_0))y_v(u_0,v_0) \\ &= f_x(x_0,y_0)x_v(u_0,v_0) + f_y(x_0,y_0)y_v(u_0,v_0) . \end{aligned} \tag{7.4}$$

- Esercizi

ESERCIZIO 7.26. Data la funzione

$$f(x,y) = \frac{\arctan y - \frac{\pi}{4}}{e^{1/x}-1} ,$$

calcolare il gradiente nel punto $P \equiv (1, 1)$.

Svolgimento : *La funzione è data dal quoziente di due funzioni rispettivamente della sola x e della sola y. Pertanto le derivate parziali saranno date da*

$$f_x(x,y) = \left(\arctan y - \frac{\pi}{4}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{e^{1/x}-1}\right) = \left(\arctan y - \frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{e^{1/x}}{x^2\left(e^{1/x}-1\right)^2}\right) ;$$

$$f_y(x,y) = \left(\frac{1}{e^{1/x}-1}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\arctan y - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\left(e^{1/x}-1\right)(1+y^2)} .$$

Poiché

$$f_x(1,1) = \left(\arctan 1 - \frac{\pi}{4}\right)\left[\frac{e}{(e-1)^2}\right] = 0 \quad ; \quad f_y(1,1) = \frac{1}{2(e-1)} ,$$

si ha $\nabla f(1,1) = \left(0, \frac{1}{2(e-1)}\right)$.

ESERCIZIO 7.27. Data la funzione

$$f(x,y) = \log[\log(x^y)] ,$$

calcolare le derivate parziali prime e seconde.

Svolgimento : *La funzione può essere riscritta nella forma*

$$f(x,y) = \log\left[y\log(x)\right] = \log|y| + \log|\log x| .$$

Pertanto,

$$f_x(x,y) = \frac{1}{x\log x} \quad ; \quad f_y(x,y) = \frac{1}{y} ;$$

$$f_{xx}(x,y) = -\left[\frac{\log x + 1}{(x\log x)^2}\right] \quad ; \quad f_{yy}(x,y) = -\frac{1}{y^2} \quad ; \quad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 0 .$$

ESERCIZIO 7.28. Data la funzione

$$f(x,y) = \left(\frac{x-1}{y+\log x}\right)^e ,$$

calcolare $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$.

Svolgimento :

$$f_x(x,y) = e\left(\frac{x-1}{y+\log x}\right)^{(e-1)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-1}{y+\log x}\right) = e\left(\frac{x-1}{y+\log x}\right)^{(e-1)}\left[\frac{xy + x\log x - x + 1}{x(y+\log x)^2}\right] ;$$

$$f_y(x,y) = e\left(\frac{x-1}{y+\log x}\right)^{(e-1)}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x-1}{y+\log x}\right) = -e\left(\frac{x-1}{y+\log x}\right)^{(e-1)}\left[\frac{x-1}{(y+\log x)^2}\right] .$$

ESERCIZIO 7.29. Stabilire se la funzione $(2y+5x)^{8/5}$ è differenziabile nel suo insieme di definizione e calcolarne il gradiente.

ESERCIZIO 7.30. Stabilire se la funzione $(3x-5y)^{4/3}$ è differenziabile nel suo insieme di definizione e calcolarne il gradiente.

ESERCIZIO 7.31. Assegnate le funzioni $f(x,y)=3x^2y$; $x(t)=\cos t$; $y(t)=-\sin t$, si consideri la funzione composta $F(t)=f(x(t),y(t))$. Stabilire se $F\in C^1(\mathbb{R})$ e, in caso affermativo, scrivere l'espressione della sua derivata rispetto a t.

Svolgimento : *Poiché* $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$, $x,y\in C^1(\mathbb{R})$, *segue che* $F\in C^1(\mathbb{R})$. *Inoltre, si ha*

$$\frac{dF}{dt}(t)=\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))x'(t)+\frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))y'(t)$$

$$=\frac{\partial(3x^2y)}{\partial x}\Big|_{(\cos t,-\sin t)}(-\sin t)+\frac{\partial(3x^2y)}{\partial y}\Big|_{(\cos t,-\sin t)}(-\cos t)$$

$$=-6\cos t\sin t(-\sin t)+3(\cos t)^2(-\cos t)=3\cos t(3\sin^2 t-1)\ .$$

ESERCIZIO 7.32. Assegnate le funzioni $f(x,y)=2xy^3$; $x(t)=e^t$; $y(t)=t$, si consideri la funzione composta $F(t)=f(x(t),y(t))$. Stabilire se $F\in C^1(\mathbb{R})$ e, in caso affermativo, scrivere l'espressione della sua derivata rispetto a t.

ESERCIZIO 7.33. Calcolare la derivata direzionale della funzione $f(x,y)=\log(1+x^2y^2)$ nel punto $P_0=(1,1)$ e lungo la direzione parallela al vettore $\vec r=(\sqrt3,1)$.

Svolgimento : *Innanzitutto, osserviamo che, poiché* $\|\vec r\|=2$, *la direzione parallela ad* $\vec r$ *è data da* $\vec v=(\sqrt3/2,1/2)$. *Poiché la funzione è continua nel suo insieme di definizione, insieme alle sue derivate parziali*

$$f_x(x,y)=\frac{2xy^2}{1+x^2y^2}\quad e\quad f_y(x,y)=\frac{2x^2y}{1+x^2y^2}\ ,$$

essa risulta essere differenziabile in $(1,1)$ *e quindi la derivata direzionale può essere calcolata tramite la formula*

$$\frac{\partial f}{\partial\vec v}\Big|_{(1,1)}=\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)f_x(1,1)+\frac12\ f_y(1,1)=\frac12(\sqrt3+1)\ .$$

ESERCIZIO 7.34. Calcolare la derivata direzionale della funzione $f(x,y)=\arctan(x+y)$ nel punto $P_0=(1,0)$ e lungo la direzione parallela al vettore $\vec r=(2,2)$.

ESERCIZIO 7.35. Data $f(x,y)=x+\log(xy+1)$, calcolare $\nabla f(1,0)$.

Svolgimento : *Poiché*

$$\nabla f(x,y)=\left(1+\frac{y}{xy+1},\frac{x}{xy+1}\right),$$

si ottiene $\nabla f(1,0)=(1,1)$.

ESERCIZIO 7.36. Data la funzione $f(x,y)=\log\left(\frac{1}{|\tan x|+1}\right)-2(x+3y)^2$, calcolare (x,y).

ESERCIZIO 7.37. Data la funzione $f(x,y)=\arcsin\left(\frac{1}{|\cos x|+1}\right)+3(2x-y)^2$, calcolare (x,y).

ESERCIZIO 7.38. Data $f(x,y)=y^2\sin x$, calcolare $\nabla f(\pi,-1)$.

Svolgimento : *Si ha*

$$\nabla f(x,y)=(y^2\cos x,2y\sin x)\ ,$$

quindi $\nabla f(\pi,-1)=(-1,0)$.

ESERCIZIO 7.39. Sia $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione derivabile e si consideri la funzione $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definita da $F(x,y)=\phi(\cos x+e^{(x+1)y})$. Sapendo che $\phi'(2)=\pi$, calcolare $\nabla F(0,0)$.

Svolgimento : *Poniamo* $f(x,y)=\cos x+e^{(x+1)y}$. *Poiché la funzione* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *è differenziabile, si ottiene subito che anche la funzione* $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *è differenziabile, in quanto* $F(x,y)=\phi(f(x,y))$. *Inoltre, dalla formula (7.3) si ha*

$$F_x(0,0)=\phi'(f(0,0))f_x(0,0)=\phi'(2)(-\sin x+ye^{(x+1)y})|_{(0,0)}=0\ ,$$
$$F_y(0,0)=\phi'(f(0,0))f_y(0,0)=\phi'(2)((x+1)e^{(x+1)y})|_{(0,0)}=\pi\ .$$

ESERCIZIO 7.40. Sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una funzione differenziabile e si consideri la funzione $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da $F(t)=f(t^2-1,te^t)$. Sapendo che $\nabla f(0,e)=(2,1)$, calcolare $F'(1)$.

ESERCIZIO 7.41. Data la funzione $f(x,y)=\frac{\arctan y}{1+e^{\sin^2 y}}e^x$, calcolare $\frac{\partial f}{\partial x}$.

ESERCIZIO 7.42. Data la funzione $f(x,y)=\frac{\log(1+y^2)}{\pi+\arctan y}(2x+1)$, calcolare $\frac{\partial f}{\partial x}$.

ESERCIZIO 7.43. Data $f(x,y)=xy^2-\log x$, calcolare $\nabla f(1,2)$.

ESERCIZIO 7.44. Data la funzione $f(x,y)=\arccos\left(\frac{1}{e^{|x|}+1}\right)-4(3x-y)^2$, calcolare $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

ESERCIZIO 7.45. Sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una funzione differenziabile e si consideri la funzione $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definita da $F(u,v)=f(3u,u+v)$. Sapendo che $\nabla f(3,2)=(\pi,-\pi)$, calcolare $\nabla F(1,1)$.

Svolgimento : *Poniamo* $x(u,v)=3u$ *ed* $y(u,v)=u+v$. *Poiché le funzioni* $x,y:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *sono differenziabili, si ottiene subito che anche la funzione* $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *è differenziabile, in quanto* $F(u,v)=f(x(u,v),y(u,v))$. *Inoltre, dalla formula (7.4) si ha*

$$\begin{aligned}F_u(1,1)&=f_x(x(1,1),y(1,1))x_u(1,1)+f_y(x(1,1),y(1,1))y_u(1,1)\\&=f_x(3,2)3+f_y(3,2)1=2\pi\ ,\\F_v(1,1)&=f_x(x(1,1),y(1,1))x_v(1,1)+f_y(x(1,1),y(1,1))y_v(1,1)\\&=f_x(3,2)0+f_y(3,2)1=-\pi\ .\end{aligned}$$

ESERCIZIO 7.46. Data la funzione $f(x,y) = \dfrac{3x^2 e^x}{\arcsin x + 2} \log y$, calcolare $\frac{\partial f}{\partial y}$.

ESERCIZIO 7.47. Data $f(x,y) = xy - x\cos y$, calcolare $\nabla f(1,\pi)$.

DOMANDA 7.48. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $f(0,0) = 1$, $f_x(0,0) = 1$, $f_y(0,0) = 0$. Allora

$\boxed{a}$ f è continua in $(0,0)$; $\boxed{b}$ f è derivabile in $(0,0)$ lungo ogni direzione; $\boxed{c}$ f è discontinua in $(0,0)$; $\boxed{d}$ $\lim_{x\to 0} f(x,0) = 1$.

ESERCIZIO 7.49. Stabilire per quali valori del parametro reale α la funzione

$$f_\alpha(x,y) = e^{\alpha y^2} \log(1 + |x|^{\alpha^2 + 2/3})$$

ammette entrambe le derivate parziali nel punto $P_0 = (0,0)$ e per tali valori di α calcolarle.

Svolgimento : *È immediato verificare che $f_\alpha(0,0) = \dfrac{\partial f_\alpha}{\partial y}(0,0) = 0$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Calcoliamo quindi l'altra derivata parziale.*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_\alpha}{\partial x}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f_\alpha(t,0) - f_\alpha(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\log(1 + |t|^{\alpha^2/2 + 2/3})}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{|t|^{\alpha^2 + 2/3}}{|t|} \operatorname{sign}(t) = \lim_{t\to 0} |t|^{\alpha^2 - 1/3} \cdot \operatorname{sign}(t) ,
\end{aligned} \tag{7.5}$$

ove, nell'ultimo passaggio, si è utilizzato lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per $\log(1+x)$ con $x = |t|^{\alpha^2 + 2/3}$ e il fatto che $|t| = t \cdot \operatorname{sign}(t)$. Da (7.5) si ottiene facilmente che la derivata parziale rispetto ad x di f_α nell'origine esiste se e solo se $\alpha^2 - 1/3 > 0$, cioè per $\alpha < -1/\sqrt{3}$ e $\alpha > 1/\sqrt{3}$. In tal caso si ottiene che $\dfrac{\partial f_\alpha}{\partial x}(0,0) = 0$.

ESERCIZIO 7.50. Data

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2 + x}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0); \end{cases}$$

stabilire se

a) f è continua in $\mathbb{R}^2$;

b) esistono direzioni $\vec{v}$ lungo le quali è definita $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$ e, per tali direzioni, calcolare tale derivata;

c) f è differenziabile in $(0,0)$.

Svolgimento :

a) *Osserviamo, innanzitutto che f è chiaramente di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus (0,0))$. D'altra parte, utilizzando un cambiamento in coordinate polari centrate in $(0,0)$, si ottiene*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} [f(x,y) - f(0,0)] = \lim_{\rho\to 0^+} \left[1 + \frac{\rho\cos\vartheta}{\rho^2} - 1\right] = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\cos\vartheta}{\rho} .$$

Poiché $\cos\vartheta/\rho$ dipende da ϑ, il limite non esiste. Pertanto, f non è continua nell'origine.

b) *Dalla definizione, si ottiene*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[\frac{t^2(v_1^2 + v_2^2) + tv_1}{t^2(v_1^2 + v_2^2)} - 1\right] \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{tv_1}{t^3} = v_1 \lim_{t\to 0} \frac{1}{t^2} ,
\end{aligned}$$

che esiste finito se e solo se $v_1 = 0$. Quindi $\vec{v} = (0, \pm 1)$ è l'unica direzione lungo la quale esiste la derivata direzionale nell'origine. Essa coincide con la direzione dell'asse y; inoltre, per tale direzione si ha $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

c) *Per quanto osservato nei punti (a) e (b) si ha subito che f non può essere differenziabile nell'origine.*

ESERCIZIO 7.51. Stabilire se la seguente funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^3} - 1}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0); \end{cases}$$

è continua e differenziabile in $\mathbb{R}^2$. Calcolare, inoltre, le derivate direzionali di f nell'origine.

Svolgimento : *La funzione proposta è chiaramente continua e differenziabile fuori dall'origine, in quanto composizione di funzioni continue e differenziabili. Cominciamo, quindi, a studiare la continuità nell'origine: con un cambiamento in coordinate polari centrate in $(0,0)$ ed utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per e^t, con $t = \rho^3\cos^3\vartheta$, ci si riconduce al calcolo del seguente limite*

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{\exp(\rho^3\cos^3\vartheta) - 1}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^3\cos^3\vartheta}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \rho\cos^3\vartheta = 0$$

indipendentemente da ϑ. Quindi la funzione è continua anche nell'origine. Osservando che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{t^3} - 1}{t^3} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t^3} = 0$$

si ricava $\nabla f(0,0) = (1,0)$. Per lo studio della differenziabilità nell'origine ci si riconduce al calcolo del seguente limite

$$\begin{aligned}
&\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h, 0+k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{e^{h^3} - 1}{h^2 + k^2} - h}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\
&= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{e^{h^3} - 1 - h(h^2 + k^2)}{(h^2 + k^2)^{3/2}} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{e^{(\rho^3\cos^3\vartheta)} - 1 - \rho^3\cos^3\vartheta - \rho^3\cos\vartheta\sin^2\vartheta}{\rho^3} \\
&= \lim_{\rho\to 0^+} \frac{(1/2)\rho^6\cos^6\vartheta - \rho^3\cos\vartheta\sin^2\vartheta}{\rho^3} = \lim_{\rho\to 0^+} [(1/2)\rho^3\cos^6\vartheta - \cos\vartheta\sin^2\vartheta] \\
&= -\lim_{\rho\to 0^+} \cos\vartheta\sin^2\vartheta \neq 0 ,
\end{aligned}$$

dove abbiamo operato un cambiamento di variabile in coordinate polari centrate nell'origine ($h = \rho\cos\vartheta$; $k = \rho\sin\vartheta$) ed abbiamo utilizzato lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per e^t, con $t = \rho^3\cos^3\vartheta$. Il limite dipende dall'angolo ϑ, quindi non esiste. La funzione, quindi, non è differenziabile nell'origine. Per il calcolo delle derivate direzionali bisogna pertanto procedere mediante la definizione:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\exp(t^3v_1^3) - 1}{t^3} = v_1^3$$

dove $\vec{v} = (v_1, v_2)$.

DOMANDA 7.52. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione assegnata. Allora

$\boxed{a}$ se f è continua in P_0, f è differenziabile in P_0; $\boxed{b}$ se f ammette tutte le derivate parziali in P_0, f è continua in P_0; $\boxed{c}$ se f è differenziabile in P_0, f ammette derivate direzionali in P_0 lungo ogni direzione; $\boxed{d}$ se f è differenziabile in P_0, f ammette derivate parziali continue in P_0.

ESERCIZIO 7.53. Stabilire per quali valori del parametro reale α la funzione

$$f_\alpha(x,y) = e^{\alpha x}\sin[(\alpha^2 - 1)y]\cos x^2$$

ha la derivata direzionale lungo la direzione $\vec{v} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ nel punto $P_0 = (0,0)$ pari a 0.

Svolgimento : *Osservando che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, f_α è differenziabile in P_0 e ricordando la formula (7.1), si ottiene*

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial x}(0,0) = e^{\alpha x}\sin[(\alpha^2 - 1)y](\alpha\cos x^2 - 2x\sin x^2)\Big|_{(0,0)} = 0$$

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial y}(0,0) = (\alpha^2 - 1)e^{\alpha x}\cos x^2\cos[(\alpha^2 - 1)y]\Big|_{(0,0)} = \alpha^2 - 1$$

da cui

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{v}}(0,0) = 0\frac{1}{\sqrt{2}} + (\alpha^2 - 1)\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\alpha^2 - 1}{\sqrt{2}} .$$

Pertanto, affinché $\frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{v}}(0,0) = 0$, si deve necessariamente avere $\alpha = \pm 1$.

ESERCIZIO 7.54. Stabilire per quali valori del parametro reale α la funzione

$$f_\alpha(x,y) = e^{\alpha x^2}\log[1 + |y|^{2\alpha^2 + 1/2}]$$

ammette entrambe le derivate parziali nel punto $P_0 = (0,0)$ e per tali valori di α calcolarle.

DOMANDA 7.55. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $f(x,0) = f(0,y) = 0$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Allora

$\boxed{a}$ f è continua in $(0,0)$; $\boxed{b}$ $\frac{\partial f}{\partial x}(3,0) = 0$; $\boxed{c}$ f ha tutte le derivate direzionali in $(0,0)$ pari a 0; $\boxed{d}$ f non ammette derivate parziali in $(0,0)$.

ESERCIZIO 7.56. Studiare continuità, derivabilità parziale e direzionale, differenziabilità della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2y^3)}{x^2 + y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Svolgimento : *Ovviamente, la funzione proposta è differenziabile (e quindi anche continua e derivabile lungo ogni direzione) in tutti i punti di $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. L'unico punto da studiare esplicitamente è perciò proprio l'origine.*

Osservando che f è identicamente nulla lungo gli assi cartesiani, si ottiene che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) .$$

Inoltre, tenendo conto che

$$0 \le \left|\frac{h^2k^3}{(h^2 + k^4)\sqrt{h^2 + k^2}}\right| \le \frac{h^2|k|^3}{h^2\sqrt{k^2}} = k^2 \to 0 ,$$

e ricordando che $\sin t \sim t$ per $t \to 0$, dopo aver posto $t = h^2k^3$, si ricava

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(0+h, 0+k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} =$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\sin h^2k^3}{(h^2 + k^4)\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{h^2k^3}{(h^2 + k^4)\sqrt{h^2 + k^2}} = 0 ,$$

cioè f è differenziabile nell'origine. Da ciò segue che f è anche continua e derivabile lungo ogni direzione $\vec{v} = (v_1, v_2)$ e

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \nabla f(0,0)\cdot\vec{v} = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)v_2 = 0 .$$

ESERCIZIO 7.57. Stabilire per quali valori del parametro reale α la funzione

$$f_\alpha(x,y) = \cos(\pi/2 + \alpha y)\sin(x^2 + \pi/2)\log[(e + y)^{\alpha - 1}]$$

ha la derivata direzionale lungo la direzione $v = (1/2, \sqrt{3}/2)$ nel punto $P_0 = (0,0)$ pari a $-\sqrt{3}$.

DOMANDA 7.58. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,1) = 3v_1^2 + v_2^3$ per ogni direzione $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\}$. Allora

$\boxed{a}$ f è differenziabile in $(1,1)$; $\boxed{b}$ f è continua in $(1,1)$; $\boxed{c}$ f non è differenziabile in $(1,1)$; $\boxed{d}$ $\nabla f(1,1) = (3,1)$.

DOMANDA 7.59. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora

$\boxed{a}$ f è differenziabile; $\boxed{b}$ f ammette tutte le derivate parziali in $(0,0)$; $\boxed{c}$ f può non essere differenziabile; $\boxed{d}$ il $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ può non esistere.

ESERCIZIO 7.60. Siano $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e $g \in C^1(\mathbb{R})$ due funzioni assegnate e si consideri la funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $F(t) = f(g(t), g^2(t))$. Sapendo che $\nabla f(-1,1) = (1,1)$, $g(0) = -1$ e $g'(0) = 2$, calcolare $F'(0)$.

Svolgimento : *Poniamo $x(t) = g(t)$ e $y(t) = g^2(t)$. Poiché, per le ipotesi fatte, le funzioni $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono derivabili ed $F(t) = f(x(t), y(t))$, si ottiene che F è essa stessa derivabile. Inoltre, dalla formula (7.2) si ha*

$$F'(0) = f_x(x(0), y(0))x'(0) + f_y(x(0), y(0))y'(0) = f_x(-1,1)g'(0) + f_y(-1,1)2g(0)g'(0) = -2 .$$

DOMANDA 7.61. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione assegnata. Allora

$\boxed{a}$ se f è continua in P_0, f è differenziabile in P_0; $\boxed{b}$ se f ammette tutte le derivate parziali continue in P_0, f è continua in P_0; $\boxed{c}$ se f è continua in P_0, f ammette derivate direzionali in P_0 lungo ogni direzione; $\boxed{d}$ se f è differenziabile in P_0, f ammette derivate parziali continue in P_0.

DOMANDA 7.62. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile, tale che $\nabla f(1,1)$ sia nullo. Allora, dato $\vec{v} = (1/2, \sqrt{3}/2)$,

$\boxed{a}$ $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,1) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$; $\boxed{b}$ nulla si può dire di $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,1)$; $\boxed{c}$ non esiste $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$; $\boxed{d}$ $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,1) = 0$.

ESERCIZIO 7.63. Sia $g \in C^1(\mathbb{R})$ una funzione assegnata e si consideri la funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $F(t) = f\left(e^{g(t)}, \frac{1}{1+g^2(t)}\right)$. Sapendo che $\nabla f(1,1) = (1,0)$, $g(0) = 0$ e $g'(0) = 4$, calcolare $F'(0)$.

ESERCIZIO 7.64. Data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(e^{x^2} - 1)\, y}{x} & \text{se } x \neq 0\, ; \\ 0 & \text{se } \quad x = 0\, ; \end{cases}$$

calcolare $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1)$.

Svolgimento : *Dalla definizione, si ha*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,1) - f(0,1)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{e^{t^2} - 1}{t} \cdot \frac{1}{t} = 1\, ,$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che $e^{t^2} - 1 \sim t^2$ per $t \to 0$.

ESERCIZIO 7.65. Data

$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x \log(1 + |y|^\alpha)}{1 + \sin^2 x} & \text{se } y \neq 0\, ; \\ 0 & \text{se } \quad y = 0\, ; \end{cases}$$

calcolare $\dfrac{\partial f_\alpha}{\partial y}(\pi, 0)$, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Risposte agli esercizi non svolti: **7.29**: $\nabla f(x,y) = \left(8(2y+5x)^{3/5}, \frac{16}{5}(2y+5x)^{3/5}\right)$ e f è differenziabile - **7.30**: $\nabla f(x,y) = \left(4(3x-5y)^{1/3}, -\frac{20}{3}(3x-5y)^{1/3}\right)$ e f è differenziabile - **7.32**: $F \in C^1(\mathbb{R})$ e $F'(t) = 2t^3 e^t + 6t^2 e^t$ - **7.34**: $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}\right|_{(1,0)} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ - **7.36**: $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2\frac{\partial}{\partial y}(x+3y)^2 = -12(x+3y)$ - **7.37**: $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3\frac{\partial}{\partial y}(2x-y)^2 = -6(2x-y)$ - **7.40**: $F'(1) = 4 + 2e$ - **7.41**: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\arctan y}{1+e^{\sin^2 y}} e^x$ - **7.42**: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2\frac{\log(1+y^2)}{\pi + \arctan y}$ - **7.43**: $\nabla f(1,2) = (3,4)$ - **7.44**: $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -4\frac{\partial}{\partial y}(3x-y)^2 = 8(3x-y)$ - **7.46**: $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left(\frac{3x^2 e^x}{\arcsin x + 2}\right)\frac{1}{y}$ - **7.47**: $\nabla f(1,\pi) = (1+\pi, 1)$ - **7.48**: d - **7.52**: c - **7.54**: entrambe le derivate parziali esistono se e solo se $\alpha < -1/2$; $\alpha > 1/2$ ed in tal caso valgono entrambe 0 - **7.55**: b - **7.57**: $\alpha = -1; 2$ - **7.58**: c - **7.59**: c - **7.61**: b - **7.62**: d - **7.63**: $F'(0) = 4$ - **7.65**: per $\alpha > 1$, il limite del rapporto incrementale è 0, quindi $\frac{\partial f_\alpha}{\partial y}(\pi, 0) = 0$; per $\alpha \leq 1$, il limite del rapporto incementale non esiste, quindi $\frac{\partial f_\alpha}{\partial y}(\pi, 0)$ non esiste .

7.3. Campo d'esistenza

ESERCIZIO 7.66. Determinare il campo di esistenza E della funzione

$$f(x,y) = \log[\log(x^y)]\, ,$$

fornendone la rappresentazione grafica e stabilendone la natura topologica.

Svolgimento : *La funzione può essere riscritta nella forma*

$$f(x,y) = \log[y \cdot \log(x)]\, .$$

Pertanto, ricordando il campo di esistenza dei logaritmi, imponiamo

$$\begin{cases} x > 0 \\ y \log x > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x > 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \\ x < 1 \end{cases} .$$

Graficamente abbiamo

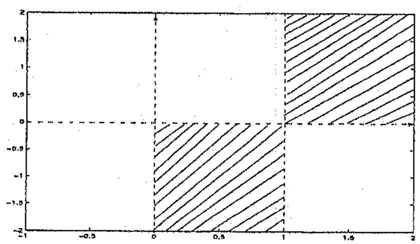


Figura 7.66

Insieme E

L'insieme è aperto, perché privo della sua frontiera, costituita dal semiasse delle x positive, dal semiasse delle y negative e dalla retta verticale $x = 1$; illimitato; sconnesso, in quanto il punto $(1,0)$ non appartiene all'insieme.

ESERCIZIO 7.67. Data la funzione

$$f(x,y) \ = \ \left(\frac{x-1}{y+\log x}\right)^{e} \, ,$$

determinare l'insieme di definizione E, specificandone la natura topologica e fornendone la rappresentazione grafica nel piano cartesiano.

Svolgimento : *Siamo in presenza di una potenza a esponente irrazionale positivo, pertanto E è determinato dalla seguente disequazione:*

$$\frac{x-1}{y+\log x} \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 1 \\ y > -\log x \end{cases} \cup \begin{cases} x > 0 \\ x \leq 1 \\ y < -\log x \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ \\ y > -\log x \end{cases} \cup \begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ \\ y < -\log x \end{cases} ,$$

ed è rappresentato in Figura 7.67.

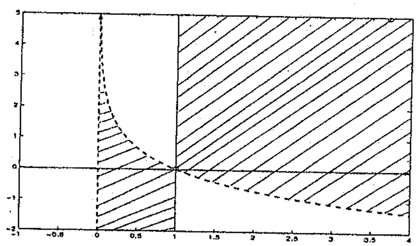


Figura 7.67

Insieme E

L'insieme è illimitato; né aperto, né chiuso, in quanto privo delle parti di frontiera di equazione $y = -\log x$ e $x = 0$ (asse delle y), ma contenente la retta $x = 1$ (a parte il punto $(1,0)$); sconnesso, in quanto il punto $(1,0)$ non appartiene all'insieme.

ESERCIZIO 7.68. Data la funzione

$$f(x,y) \ = \ (3y - 2|\arctan x|)^{\frac{3}{4}} \, ,$$

determinare l'insieme di definizione E, specificandone la natura topologica e fornendone la rappresentazione grafica nel piano cartesiano.

Svolgimento : *La funzione è una potenza con esponente razionale positivo, il cui denominatore è un numero pari. Pertanto l'insieme di definizione si ottiene imponendo*

$$y \geq \frac{2}{3}|\arctan x| \, ,$$

e la sua rappresentazione grafica è data in Figura 7.68.

L'insieme è illimitato; chiuso, perché contiene la sua frontiera, di equazione $y = \frac{2}{3}|\arctan x|$; connesso e semplicemente linearmente connesso.

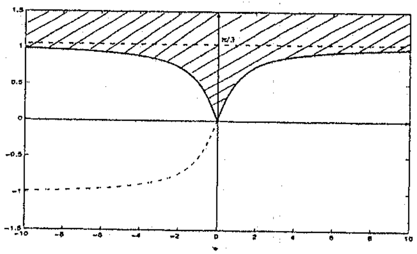


Figura 7.68

Insieme E

ESERCIZIO 7.69. Determinare l'insieme di definizione E della funzione

$$f(x,y) = \frac{\arctan y - \frac{\pi}{4}}{e^{\frac{1}{x}} - 1} \, .$$

ESERCIZIO 7.70. Data la funzione

$$f(x,y) \ = \ (4-y^2)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + (y-x^2)^{\sqrt{2}} \, ,$$

determinare l'insieme di definizione E, specificandone la natura topologica e fornendone la rappresentazione grafica nel piano cartesiano.

Risposte agli esercizi non svolti: **7.69**: $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$ - **7.70**: $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}\, ;\ x^2 \leq y \leq 2\}$; insieme chiuso, limitato, connesso e semplicemente linearmente connesso. La sua rappresentazione grafica è:

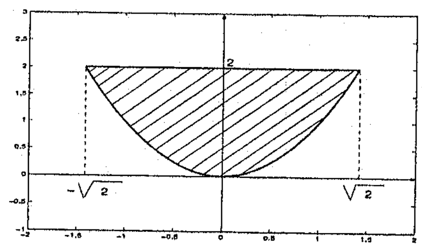


Figura 7.70

Insieme E

7.4. Massimi e minimi

- Massimi e minimi liberi

Sia data $f : A \to \mathbb{R}$, dove $A \subseteq \mathbb{R}^2$ è un insieme aperto contenente il punto (x_0, y_0), ed f è una funzione differenziabile in A. L'insieme dei punti in cui il gradiente di f si annulla sono detti *punti stazionari o critici* per la funzione. Se (x_0, y_0) è un *estremante locale* (cioè se esso è un punto di minimo o massimo locale) per f in A, allora $\nabla f(x_0, y_0) = (0,0)$, cioè esso è un punto critico per f. Ovviamente non vale il viceversa, cioè non tutti i punti critici sono degli estremanti (vedi gli esempi più sotto).

Supponiamo, ora, che f sia 2 volte differenziabile nel punto critico (x_0, y_0), e indichiamo con $H_f(x_0, y_0)$ la matrice Hessiana di f in tale punto. Valgono, allora, i seguenti risultati:

- se $H_f(x_0, y_0)$ è *definita positiva* (cioè ha tutti gli autovalori strettamente maggiori di zero), il punto (x_0, y_0) è punto di minimo locale;
- se $H_f(x_0, y_0)$ è *definita negativa* (cioè ha tutti gli autovalori strettamente minori di zero), il punto (x_0, y_0) è punto di massimo locale;
- se $H_f(x_0, y_0)$ è *indefinita* (cioè ha autovalori sia positivi che negativi), il punto (x_0, y_0) è punto di sella;
- se (x_0, y_0) è punto di minimo locale, $H_f(x_0, y_0)$ è *semidefinita positiva* (cioè ha tutti gli autovalori non negativi);
- se (x_0, y_0) è punto di massimo locale, $H_f(x_0, y_0)$ è *semidefinita negativa* (cioè ha tutti gli autovalori non positivi).

N.B. Sottolineiamo che, se in un punto stazionario (x_0, y_0) la matrice Hessiana è solo semidefinita (positiva o negativa), questo fatto non permette di stabilire la natura di tale punto. Possono chiarire la situazione i ben noti esempi, dati dalle funzioni

$$f(x,y) = x^3 + y^3 \quad \text{che ha un punto di sella nell'origine ;}$$
$$f(x,y) = x^4 + y^4 \quad \text{che ha un punto di minimo nell'origine ;}$$
$$f(x,y) = -x^4 - y^4 \quad \text{che ha un punto di massimo nell'origine ;}$$

tutte con un unico punto critico in $(0,0)$, dove la matrice Hessiana risulta essere identicamente nulla (quindi solo semidefinita).

Osserviamo che, esclusivamente per $n = 2$, valgono le seguenti caratterizzazioni:

- $H_f(x_0, y_0)$ è definita positiva se e solo se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ e il determinante della matrice Hessiana è strettamente positivo;
- $H_f(x_0, y_0)$ è definita negativa se e solo se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$ e il determinante della matrice Hessiana è strettamente positivo;
- $H_f(x_0, y_0)$ è indefinita se e solo se il determinante della matrice Hessiana è strettamente negativo.

• Massimi e minimi su insiemi chiusi e limitati

Per quanto riguarda lo studio degli estremanti di una funzione f di classe C^2 in insiemi chiusi (per semplicità considereremo solo quelli assoluti), va innanzitutto tenuto presente il Teorema di Weierstrass[(1)], che garantisce l'esistenza di estremanti assoluti per le funzioni continue definite su insiemi chiusi e limitati. Per determinare esplicitamente gli estremanti assoluti in un insieme

(1) **Teorema di Weierstrass.** *Sia $f : K \to \mathbb{R}$ una funzione continua su K, insieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^n$. Allora, esistono almeno un punto di massimo assoluto ed un punto di minimo assoluto per f in K. In particolare, f è limitata sull'insieme K.*

chiuso e limitato, che supporremo sempre essere l'unione di un insieme aperto e del suo bordo, parametrizzabile a tratti tramite una semplice funzione di una variabile, si procede in due passi:

- si determinano eventuali estremanti interni all'insieme, utilizzando i metodi del calcolo differenziale (cioè gradiente ed Hessiano);
- si determinano eventuali estremanti sul bordo dell'insieme, parametrizzandone la frontiera e studiando la funzione di una sola variabile reale, così ottenuta;

si confrontano infine i valori della funzione calcolata nei punti così trovati, selezionando il punto (o i punti) in cui si è ottenuto il valore massimo (questi saranno i punti di massimo assoluto) e il punto (o i punti) in cui si è ottenuto il valore minimo (questi saranno i punti di minimo assoluto).

• Massimi e minimi vincolati

Supponiamo ora di voler studiare gli estremanti di una funzione differenziabile $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sotto la condizione che essi soddisfino un vincolo assegnato. Un caso particolare è proprio quello descritto nel precedente capoverso, dove il vincolo era espresso dalla frontiera dell'insieme di definizione. In tal caso, abbiamo supposto che la frontiera si potesse parametrizzare a tratti mediante una semplice funzione di una variabile; è evidente, però, che questa situazione particolarmente favorevole non rappresenta il caso generale.

Limitandoci, per semplicità, al caso bidimensionale, supporremo che il vincolo $V \subset A$ sia espresso da una condizione della forma $V = \{(x,y) \in A \ : \ g(x,y) = 0\}$, dove $g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe $C^1(A)$. Chiaramente, se l'equazione $g(x,y) = 0$ permette di esplicitare (almeno a tratti) una variabile rispetto all'altra, cioè se si riesce a determinare esplicitamente una funzione regolare $y(x)$ (equivalentemente $x(y)$) tale che $g(x, y(x)) = 0$ (equivalentemente $g(x(y), y) = 0$), si potrà procedere utilizzando i metodi del calcolo differenziale per le funzioni di una variabile. Quando ciò non è possibile, si dovrà invece ricorrere al metodo dei *Moltiplicatori di Lagrange*; si dovrà, cioè, costruire la Lagrangiana $L(x,y,\lambda) := f(x,y) - \lambda g(x,y)$ e studiarne gli estremanti liberi in $A \times \mathbb{R}$. Ricordiamo, infatti, che vale il seguente risultato: sia $(x_0, y_0) \in V$ un punto regolare per g, cioè tale che $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$; se (x_0, y_0) è punto di estremo per f soggetto al vincolo V, allora esiste un moltiplicatore di Lagrange $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tale che la terna (x_0, y_0, λ_0) è un punto stazionario libero per la Lagrangiana, cioè è soluzione del seguente sistema

$$\nabla L(x,y,\lambda) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} f_x(x,y) = \lambda g_x(x,y) \\ f_y(x,y) = \lambda g_y(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

A questo punto, per determinare gli estremi vincolati di f su V si procederà, dapprima, selezionando, fra i punti regolari di g, i punti critici liberi per la Lagrangiana; poi, studiando la natura dei punti selezionati (ricorrendo, se necessario, al Teorema di Weierstrass); ed, infine, studiando separatamente i punti non regolari.

• Esercizi

ESERCIZIO 7.71. Determinare massimi e minimi, relativi e assoluti, della funzione

$$f(x,y) = xy(x+1)$$

in $\mathbb{R}^2$.

Svolgimento : *Osserviamo che*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y = 0 \,, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 + x = 0 \,, \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \,,\ x = -1 \,, \\ y = 0 \,. \end{cases}$$

Quindi gli unici punti stazionari sono $(0,0)$ *e* $(-1,0)$.

La matrice Hessiana è data da

$$H_f = \begin{pmatrix} 2y & 2x+1 \\ 2x+1 & 0 \end{pmatrix}$$

e nei punti stazionari si ha

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{che è indefinita}$$

$$H_f(-1,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{che è indefinita .}$$

Quindi $(0,0)$ *e* $(-1,0)$ *sono entrambi punti di sella ed* f *non ha estremanti relativi né assoluti. Poiché, ad esempio,* $\lim_{x\to+\infty} f(x,1) = \lim_{x\to+\infty} x(x+1) = +\infty$ *e* $\lim_{x\to+\infty} f(x,-1) = \lim_{x\to+\infty} -x(x+1) = -\infty$*, la funzione è illimitata.*

ESERCIZIO 7.72. Determinare massimi e minimi, relativi e assoluti, della funzione

$$f(x,y) = xy + y^2 + x^2$$

in $\mathbb{R}^2$.

Svolgimento : *Osserviamo che*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x + y = 0 \,, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x + 2y = 0 \,, \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \,, \\ y = 0 \,. \end{cases}$$

Quindi l'unico punto stazionario è $(0,0)$.

La matrice Hessiana è data da

$$H_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} ,$$

che è definita positiva. Pertanto $(0,0)$ *è punto di minimo relativo. Osservando che l'equazione* $x^2 + xy + y^2$ *nell'incognita* x*, dove* y *va considerata come parametro, ha discriminante negativo* $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$*, si ottiene che* $f(x,y) > 0$ *per ogni* $(x,y) \neq (0,0)$ *e, poiché* $f(0,0) = 0$*, l'origine risulta essere punto di minimo assoluto. Infine, dal fatto che, ad esempio,* $\lim_{x\to+\infty} f(x,0) = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$*, si ottiene che* f *è superiormente illimitata.*

ESERCIZIO 7.73. Determinare massimi e minimi, relativi e assoluti, della funzione

$$f(x,y) = x^3 + 2x^2 + x + y^3 + 2y^2 + y$$

in $\mathbb{R}^2$.

Svolgimento : *Osserviamo che*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 4x + 1 = 0 \,, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + 4y + 1 = 0 \,, \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \,,\ x = -1 \,, \\ y = -\frac{1}{3} \,,\ y = -1 \,. \end{cases}$$

Quindi gli unici punti stazionari sono $(-1/3,-1/3)$, $(-1,-1/3)$; $(-1/3,-1)$, $(-1,-1)$.

La matrice Hessiana è data da

$$H_f = \begin{pmatrix} 6x+4 & 0 \\ 0 & 6y+4 \end{pmatrix}$$

e nei punti stazionari si ha

$$H_f\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{che è definita positiva}$$

$$H_f(-1,-1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{che è definita negativa}$$

$$H_f\left(-\frac{1}{3},-1\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{che è indefinita}$$

$$H_f\left(-1,-\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{che è indefinita .}$$

Quindi $(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$ *è punto di minimo relativo;* $(-1,-1)$ *è punto di massimo relativo; mentre i punti* $(-\frac{1}{3},-1)$ *e* $(-1,-\frac{1}{3})$ *sono entrambi di sella.*

Poiché, ad esempio, $\lim_{x\to+\infty} f(x,0) = \lim_{x\to+\infty} x^3 + 2x^2 + x = +\infty$ *e* $\lim_{x\to-\infty} f(x,0) = \lim_{x\to-\infty} x^3 + 2x^2 + x = -\infty$*, la funzione è illimitata.*

ESERCIZIO 7.74. Determinare massimi e minimi, relativi e assoluti, della funzione

$$f(x,y) = xy(x+y)$$

in $\mathbb{R}^2$.

Svolgimento : *Osserviamo che*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y^2 = 0 \ , \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2xy = 0 \ , \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x = 0 \ , \\ y = 0 \ . \end{cases}$$

Quindi l'unico punto stazionario è $(0,0)$.

La matrice Hessiana è data da

$$H_f = \begin{pmatrix} 2y & 2x+2y \\ 2x+2y & 2x \end{pmatrix}$$

e in $(0,0)$ *si ha*

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Lo studio della matrice Hessiana, dunque, non fornisce alcuna indicazione.

Osserviamo però che la funzione è data dal prodotto di due fattori: l'uno, xy, *positivo quando* x *e* y *sono concordi, cioè nel primo e nel terzo quadrante, e negativo negli altri due quadranti; il secondo,* $x+y$, *positivo per* $y > -x$ *e negativo per* $y < -x$. *La funzione si annulla lungo gli assi e lungo la retta* $y = -x$. *Dal grafico in Figura 7.74, possiamo concludere che, in ogni intorno dell'origine, la funzione assume valori sia positivi che negativi. Pertanto,* $(0,0)$ *è un punto di sella.*

Poiché, ad esempio, $\lim_{x\to+\infty} f(x,x) = \lim_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$ *e* $\lim_{x\to-\infty} f(x,x) = \lim_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$, *la funzione è illimitata.*

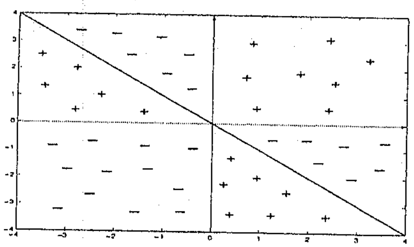


Figura 7.74

Segno di $f(x,y) = xy(x+y)$

ESERCIZIO 7.75. Determinare i punti critici e, sapendo che esiste, il minimo assoluto della funzione

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 4x + 4y + 6xy$$

nell'insieme $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \le 0 \ , \ y \le 0\}$.

Svolgimento : *Per trovare i punti stazionari interni all'insieme* Q, *imponiamo che il gradiente sia nullo, cioè risolviamo il sistema*

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2x + 4 + 6y = 0 \\ f_y(x,y) = 4y + 4 + 6x = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $(x,y) = (-2/7, -4/7)$. *Calcolando la matrice Hessiana in tale punto, si ottiene*

$$H_f(-2/7,-4/7) = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

che ha determinante negativo; pertanto, l'unico punto stazionario individuato risulta essere un punto di sella.

Osserviamo, anche, che la funzione assegnata, per $x \to -\infty$ *e* $y \to -\infty$, *diverge a* $+\infty$, *cioè è superiormente illimitata. Infine, studiando* f *ristretta ai due semiassi negativi, che costituiscono la frontiera di* Q, *si trova* $f(x,0) = x^2 + 4x$, *che risulta avere un minimo nel punto* $x = -2$, *ed* $f(0,y) = 2y^2 + 4y$, *che risulta avere un minimo nel punto* $y = -1$. *Dunque, la funzione, ristretta alla frontiera, ha due punti di minimo relativo:* $P_1 = (-2,0)$, *con* $f(P_1) = -4$, *e* $P_2 = (0,-1)$, *con* $f(P_2) = -2$. *Confrontando i valori della funzione calcolati nei due punti trovati, si ottiene che il punto di minimo assoluto è* $P_1 = (-2,0)$.

Benché non richiesto dall'esercizio, è istruttivo mostrare che il punto P_1 *è effettivamente punto di minimo assoluto. Infatti, riscrivendo*

$$f(x,y) = x(x+4) + 2y(y+2) + 6xy$$

osserviamo che, mentre il terzo addendo è sempre non negativo in Q, *il primo è non negativo per* $x \le -4$ *ed il secondo lo è per* $y \le -2$. *Pertanto, considerando il rettangolo* $\widetilde{Q} = [-4,0] \times [-2,0]$, *si ricava facilmente che*

$$f(x,y) \ge 0 > f(P_1) \qquad \text{in } Q \setminus \widetilde{Q} \ \text{ e in } \partial(Q \setminus \widetilde{Q}) \ .$$

Inoltre, dal Teorema di Weierstrass, f *ammette minimo assoluto nell'insieme chiuso e limitato* $\widetilde{Q}$, *che, dai conti precedenti, risulta essere assunto proprio nel punto* P_1. *Pertanto,* $f(x,y) \ge f(P_1)$ *per ogni* $(x,y) \in Q$ *e quindi* P_1 *è punto di minimo assoluto per* f *in* Q.

ESERCIZIO 7.76. Determinare massimo e minimo assoluti per

$$f(x,y) = xy\,e^{-xy}$$

in $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le x, 1 \le y \le 2, |xy| \le 1\}$.

Svolgimento : *Poiché* f *è continua su* D, *insieme chiuso e limitato (vedi Figura 7.76), per il Teorema di Weierstrass essa ammette massimo e minimo assoluti.*

Per determinarli, si può semplicemente osservare che f *dipende da* x *e* y *solo tramite il loro prodotto:*

$$f(x,y) = g(xy), \qquad \text{dove} \quad g(t) := te^{-t}.$$

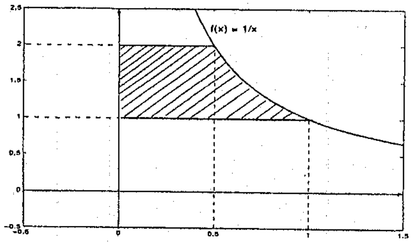


Figura 7.76

Insieme D

Poiché D appartiene al primo quadrante, si ha $0 \le xy \le 1$; è, allora, sufficiente studiare la funzione g in $[0,1]$. Si ha

$$g'(t) = (1-t)e^{-t}, \qquad \text{in particolare} \quad g'(t) \ge 0 \quad \forall t \in [0,1],$$

per cui il massimo e il minimo di g su $[0,1]$ sono assunti rispettivamente in $t=1$ e $t=0$, e valgono rispettivamente e^{-1} e 0. Pertanto

$$\max_D f = e^{-1} \qquad \text{assunto in} \qquad D \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\},$$
$$\min_D f = 0 \qquad \text{assunto in} \qquad D \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}.$$

Alternativamente, si può procedere utilizzando gli usuali metodi visti per le funzioni di due variabili. Studiamo, dapprima, il comportamento di f all'interno di D. Poiché

$$\nabla f(x,y) = (y(1-xy)e^{-xy}, x(1-xy)e^{-xy}) = (0,0) \iff \begin{cases} (x,y) = (0,0) \\ \text{oppure} \\ xy = 1, \end{cases}$$

non ci sono punti stazionari interni a D. Pertanto, gli estremanti di f sono da ricercarsi sulla frontiera del dominio:

$$\partial D = \bigcup_{i=1}^{4} \gamma_i, \qquad \text{dove} \qquad \begin{cases} \gamma_1 = \partial D \cap \{x = 0\} \\ \gamma_2 = \partial D \cap \{y = 1\} \\ \gamma_3 = \partial D \cap \{xy = 1\} \\ \gamma_4 = \partial D \cap \{y = 2\} \end{cases}.$$

Si ha

$$f\Big|_{\gamma_1} = f(0,y) \equiv 0,$$

$$f\Big|_{\gamma_2} = f(x,1) = xe^{-x} =: g_2(x), \qquad x = [0,1], \qquad \begin{cases} \max\limits_{[0,1]} g_2(x) = g_2(1) = e^{-1}, \\ \min\limits_{[0,1]} g_2(x) = g_2(0) = 0 \end{cases}$$

$$f\Big|_{\gamma_3} = f(x,1/x) \equiv e^{-1},$$

$$f\Big|_{\gamma_4} = f(x,2) = 2xe^{-2x} =: g_4(x), \qquad x = [0,1/2], \qquad \begin{cases} \max\limits_{[0,1/2]} g_4(x) = g_4(1/2) = e^{-1}, \\ \min\limits_{[0,1/2]} g_4(x) = g_4(0) = 0. \end{cases}$$

Dal confronto tra i valori di massimo e di minimo trovati sulla frontiera, si conclude che il minimo assoluto è 0, assunto su γ_1, e il massimo assoluto è e^{-1}, assunto su γ_3.

DOMANDA 7.77. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ tale che la sua matrice Hessiana nel punto stazionario $(0,0)$ abbia autovalori 3 e -2. Allora

$\boxed{a}$ $(0,0)$ è un punto di minimo locale per f in $\mathbb{R}^2$; $\boxed{b}$ $(0,0)$ è un punto di massimo locale per f in $\mathbb{R}^2$; $\boxed{c}$ $(0,0)$ è un punto di sella per f in $\mathbb{R}^2$; $\boxed{d}$ nulla si può dire sulla natura del punto $(0,0)$.

DOMANDA 7.78. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ e sia $H_f(0,0)$ la sua matrice Hessiana nel punto stazionario $(0,0)$. Allora

$\boxed{a}$ se $(0,0)$ è punto di sella per f, $H_f(0,0)$ è indefinita; $\boxed{b}$ se $H_f(0,0)$ è indefinita, $(0,0)$ è punto di sella per f; $\boxed{c}$ se $H_f(0,0)$ è semidefinita, $(0,0)$ è punto di sella per f; $\boxed{d}$ se $(0,0)$ è punto di sella per f, $H_f(0,0)$ è semidefinita.

ESERCIZIO 7.79. Determinare i punti di massimo e minimo assoluto di

$$f(x,y) = y(y-x) \qquad \text{in} \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le -3x+3\}.$$

Svolgimento : *Innanzitutto osserviamo che l'insieme D è il triangolo chiuso di vertici $O = (0,0)$, $A = (1,0)$ e $B = (0,3)$. Poiché f è continua su D, che è chiuso e limitato, per il teorema di Weierstrass, essa ammette massimo e minimo assoluto in D.*

Si verifica facilmente che non ci sono estremanti interni, poiché

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = -y \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y - x \end{cases}$$

ed esse si annullano contemporaneamente solo nell'origine, che appartiene al bordo di D. Pertanto, i punti di massimo e minimo assoluti si trovano necessariamente sulla frontiera. Restringendo f alla frontiera di D, che può essere parametrizzata a tratti, si osserva, con semplici conti, che $f(x,0) = 0$ per $x \in [0,1]$, $f(0,y) = y^2$, che è crescente per $y \in [0,3]$ con $f(0,3) = 9$, $f(x,-3x+3) = 3(4x^2 - 7x + 3) = g(x)$, che è decrescente per $x \in [0,7/8)$, mentre è crescente per $x \in (7/8,1]$, in quanto $g'(x) = 3(8x-7)$ e $g(7/8) = -3/16$. Pertanto, il minimo assoluto è assunto nel punto $(7/8,3/8)$; mentre $(0,3)$ è punto di massimo assoluto.

ESERCIZIO 7.80. Sia T il triangolo chiuso delimitato dalle rette $y = 0$, $y = x$ e $y = -x+1$. Determinare i punti di massimo e di minimo della funzione

$$f(x) = (y-x)(y+2x)$$

nel triangolo T.

Svolgimento : *Il triangolo T ha per vertici i punti $(0,0)$; $(1/2,1/2)$; $(1,0)$, quindi giace nel primo quadrante, dove la disuguaglianza $y+2x \geq 0$ è sempre verificata. Dunque la funzione è non positiva nei punti tali che $y \leq x$, ovvero in tutto T. Sul lato di T giacente sulla retta $y=x$ è nulla; quindi tutti i punti della forma (x,x), con $0 \leq x \leq 1/2$, sono punti di massimo assoluto. Poiché, inoltre, f è continua su T, che è chiuso e limitato, per il teorema di Weierstrass essa ha anche minimo assoluto in T.*

Utilizzando i metodi del calcolo differenziale, si osserva subito che internamente a T non ci sono punti stazionari, in quanto $\nabla f(x,y) = (-4x+y, 2y+x)$, che si annulla solo nell'origine, che è uno dei vertici del triangolo T.

Studiando, infine, la funzione ristretta ai lati di T giacenti sulle rette $y=-x+1$ (dove $x \in [1/2,1]$ e $f(x,-x+1) = -2x^2-x+1 = g_1(x)$) e $y=0$ (dove $x \in [0,1]$ e $f(x,0) = -2x^2 = g_2(x)$), si ottiene che in entrambi i casi f risulta decrescente, in quanto $g_1'(x) = -4x-1 < 0$, per $1/2 < x < 1$, e $g_2'(x) = -4x < 0$, per $0 < x < 1$. Pertanto il punto $(1,0)$ è punto di minimo assoluto.

DOMANDA 7.81. Sia $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ tale che la sua matrice Hessiana nel punto $(0,0)$ abbia autovalori 1 e 2. Allora

$\boxed{a}$ $(0,0)$ è punto di minimo locale per f in $\mathbb{R}^2$; $\boxed{b}$ $(0,0)$ è punto di massimo locale per f in $\mathbb{R}^2$; $\boxed{c}$ $(0,0)$ è punto di sella per f in $\mathbb{R}^2$; $\boxed{d}$ $(0,0)$ è punto di minimo locale per f in $\mathbb{R}^2$ se e solo se $\nabla f(0,0)$ è nullo.

ESERCIZIO 7.82. Determinare il valore del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ per il quale la funzione

$$f(x,y) = \lambda x^2 - y^2 - 4x + 6y$$

ha un punto critico in $(-1,3)$. Verificare che tale punto è di massimo locale.

ESERCIZIO 7.83. Data la funzione

$$f(x,y) = (3y - 2|\arctan x|)^{\frac{3}{4}} ,$$

calcolare $f_y(x,y)$ e determinare il valore del minimo globale di $f(x,y)$.

Svolgimento : *Ovviamente,*

$$f_y(x,y) = \frac{9}{4\,(3y-2|\arctan x|)^{\frac{1}{4}}} .$$

Per lo studio del minimo non è necessario utilizzare lo strumento delle derivate: è sufficiente notare che la funzione, essendo una potenza con esponente razionale positivo, il cui denominatore è pari, assume solo valori non negativi; pertanto i punti in cui la funzione si annulla sono i punti di minimo globale. Tali punti si trovano imponendo la condizione $3y - 2|\arctan x| = 0 \iff y = \frac{2}{3}|\arctan x|$.

ESERCIZIO 7.84. Data la funzione

$$f(x,y) = (4-y^2)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + (y-x^2)^{\sqrt{2}} ,$$

calcolare le derivate parziali e dire se f è dotata di massimo e/o minimo globali. In caso affermativo, determinare il valore di minimo globale e i punti del piano in cui è assunto.

Svolgimento :

$$f_x(x,y) = -2\sqrt{2}\, x\, (y-x^2)^{(\sqrt{2}-1)} ;$$
$$f_y(x,y) = -\sqrt{2}\, y\, (4-y^2)^{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)} + \sqrt{2}\,(y-x^2)^{(\sqrt{2}-1)} .$$

Come già visto nell'Esercizio 7.70, l'insieme di definizione è $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}\ ;\ x^2 \leq y \leq 2\}$. Poiché tale insieme è chiuso e limitato, il Teorema di Weierstrass garantisce l'esistenza di minimi e massimi globali. Per la ricerca dei minimi globali, basta osservare che la funzione è data dalla somma di due termini non negativi. Pertanto, i punti in cui i due addendi si annullano contemporaneamente rappresentano i minimi cercati. Poniamo dunque

$$\begin{cases} 4-y^2 = 0 \\ y = x^2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ y = 2 \end{cases} .$$

Quindi il minimo globale di f è pari a 0 ed è assunto nei due punti $(\pm\sqrt{2},2)$.

DOMANDA 7.85. Sia $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ e sia $H_f(0,0)$ la sua matrice Hessiana nel punto stazionario $(0,0)$. Allora

$\boxed{a}$ se $(0,0)$ è punto di minimo per f, $H_f(0,0)$ è indefinita; $\boxed{b}$ se $H_f(0,0)$ è indefinita, $(0,0)$ è punto di minimo per f; $\boxed{c}$ se $H_f(0,0)$ è semidefinita positiva, $(0,0)$ è punto di minimo per f; $\boxed{d}$ se $(0,0)$ è punto di minimo per f, $H_f(0,0)$ è semidefinita positiva.

ESERCIZIO 7.86. Determinare massimi e minimi della funzione $f(x,y) = x+y-1$, soggetta al vincolo $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ x^2+y^2-2x = 0\}$. Stabilire quali, fra i punti di estremo vincolato, sono anche punti di massimo o minimo assoluto per f sull'insieme $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ x^2+y^2-2x \leq 0\}$.

Svolgimento : *Osserviamo che V è la circonferenza unitaria di centro $(1,0)$, cioè un insieme chiuso e limitato, e che f è una funzione continua su V; pertanto, il Teorema di Weierstrass garantisce l'esistenza di almeno un punto di massimo ed un punto di minimo assoluti per f in V. Inoltre, V si può parametrizzare in coordinate polari come segue:*

$$V = \begin{cases} x = 1+\cos\vartheta \\ y = \sin\vartheta \end{cases} \qquad \vartheta \in [0,2\pi] .$$

Pertanto, $f|_V = f(x(\vartheta),y(\vartheta)) = 1+\cos\vartheta+\sin\vartheta-1 = \cos\vartheta+\sin\vartheta =: g(\vartheta)$, da cui $g'(\vartheta) = -\sin\vartheta+\cos\vartheta$. Studiando il segno di $g'(\vartheta)$, si ricava che $\vartheta = \pi/4$ è punto di massimo relativo ed assoluto per g e $\vartheta = 5\pi/4$ è punto di minimo relativo ed assoluto per g, cioè $(1+\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ è punto di massimo relativo ed assoluto per f su V e $(1-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ è punto di minimo relativo ed assoluto per f su V.

Utilizzando il metodo della Lagrangiana si ottiene che $L(x,y,\lambda) = x+y-1-\lambda(x^2+y^2-2x)$, *da cui*

$$\nabla L(x,y,\lambda)=0 \iff \begin{cases} 1+\lambda(2-2x)=0 \\ 1-2\lambda y=0 \\ x^2+y^2-2x=0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} \lambda=\dfrac{1}{2y} \\ 1+\dfrac{1-x}{y}=0 \\ x^2+y^2-2x=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda=\dfrac{1}{2y} \\ y=x-1 \\ x^2+(x-1)^2-2x=0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} \lambda=\dfrac{1}{2y} \\ y=x-1 \\ x=\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} (x_1,y_1,\lambda_1)=(1+\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2,1/\sqrt{2}) \\ (x_2,y_2,\lambda_2)=(1-\sqrt{2}/2,-\sqrt{2}/2,-1/\sqrt{2})\,. \end{cases}$$

Calcolando ora $f(x_1,y_1)$ e $f(x_2,y_2)$, come prima, ricaviamo che (x_1,y_1) è punto di massimo relativo ed assoluto per f in V e (x_2,y_2) è punto di minimo relativo ed assoluto per f in V.

Infine, poiché $\nabla f(x,y)=(1,1)$, la funzione f non ha estremanti liberi all'interno di T. D'altra parte, sempre per il Teorema di Weierstrass, f ammette massimo e minimo assoluti in T e quindi essi devono necessariamente essere assunti sulla frontiera di T, cioè su V. Quindi (x_1,y_1) e (x_2,y_2) sono estremanti per f anche su T.

ESERCIZIO 7.87. Determinare massimi e minimi della funzione $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, soggetta al vincolo $V=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x^2/9+y^2=1\}$.

Svolgimento : *Osserviamo che V è un'ellisse di semiassi $a=3$ e $b=1$, cioè un insieme chiuso e limitato, e che f è una funzione continua su V; pertanto, il Teorema di Weierstrass garantisce l'esistenza di almeno un punto di massimo ed un punto di minimo assoluti per f in V.*

Riscrivendo la funzione in coordinate polari, si ottiene $\tilde{f}(\rho,\vartheta)=\rho$, che risulta essere una funzione a simmetria radiale e, quindi, costante su ogni fissata circonferenza. Inoltre, $\tilde{f}$ è crescente rispetto a ρ. Poiché l'ellisse, che rappresenta il vincolo V, è tangente alle circonferenze di raggio 1, nei punti $(0,\pm1)$, e di raggio 3, nei punti $(\pm3,0)$, si ottiene che $(0,\pm1)$ sono punti di minimo relativo ed assoluto per f su V e si ha $f(0,\pm1)=1$, mentre $(\pm3,0)$ sono punti di massimo relativo ed assoluto per f su V e si ha $f(\pm3,0)=3$.

Alternativamente, si può procedere utilizzando il metodo della Lagrangiana. In tal caso si ha

che $L(x,y,\lambda)=\sqrt{x^2+y^2}-\lambda(x^2/9+y^2-1)$, da cui

$$\nabla L(x,y,\lambda)=0 \iff \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{2\lambda x}{9}=0 \\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-2\lambda y=0 \\ x^2/9+y^2-1=0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x=0,\ y\neq0 \\ y^2-1=0 \\ \dfrac{1}{|y|}-2\lambda=0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x\neq0,\ y=0 \\ x^2/9-1=0 \\ \dfrac{1}{|x|}-2\lambda/9=0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x\neq0,\ y\neq0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{2\lambda}{9}=0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-2\lambda=0 \\ x^2/9+y^2-1=0\,. \end{cases}$$

Tenendo conto che il terzo sistema risulta impossibile, le uniche soluzioni sono

$$(x_1,y_1,\lambda_1)=(0,1,1/2) \qquad (x_2,y_2,\lambda_2)=(0,-1,1/2)$$
$$(x_3,y_3,\lambda_3)=(3,0,3/2) \qquad (x_4,y_4,\lambda_4)=(-3,0,3/2)\,.$$

Calcolando ora $f(x_i,y_i)$, $i=1,2,3,4$, come prima, ricaviamo che (x_i,y_i) sono punti di minimo relativo ed assoluto per f in V, se $i=1,2$, mentre (x_i,y_i) sono punti di massimo relativo ed assoluto per f in V, se $i=3,4$.

ESERCIZIO 7.88. Determinare massimi e minimi assoluti della funzione $f(x,y)=x^2+y^2$, soggetta al vincolo $V=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x^2+y^2+x^2y^2=1\}$.

Svolgimento : *Poiché $x^2\le x^2+y^2+x^2y^2$ e $y^2\le x^2+y^2+x^2y^2$, si ottiene che, se $(x,y)\in V$, allora $|x|\le1$ e $|y|\le1$, cioè $V\subset[-1,1]\times[-1,1]$, ovvero è un insieme limitato. Inoltre, poiché la funzione $g(x,y)=x^2+y^2+x^2y^2-1$ è continua su $\mathbb{R}^2$ e $V=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ g(x,y)=0\}$, si ricava che V è un insieme chiuso. Pertanto, poiché f è una funzione continua su V, dal Teorema di Weierstrass si ottiene l'esistenza di almeno un punto di massimo ed un punto di minimo assoluti per f in V.*

Utilizzando il metodo della Lagrangiana, si ha che $L(x,y,\lambda)=x^2+y^2-\lambda(x^2+y^2+x^2y^2-1)$, da cui

$$\nabla L(x,y,\lambda)=0 \iff \begin{cases} 2x-\lambda(2x+2xy^2)=0 \\ 2y-\lambda(2y+2x^2y)=0 \\ x^2+y^2+x^2y^2-1=0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x=0,\ y\neq0 \\ y^2-1=0 \\ 1-\lambda=0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x\neq0,\ y=0 \\ x^2-1=0 \\ 1-\lambda=0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x\neq0,\ y\neq0 \\ 1-\lambda(1+y^2)=0 \\ 1-\lambda(1+x^2)=0 \\ x^2+y^2+x^2y^2-1=0\,. \end{cases}$$

Le uniche soluzioni dei primi due sistemi sono

$$(x_1, y_1, \lambda_1) = (0,1,1) \qquad (x_2, y_2, \lambda_2) = (0,-1,1)$$
$$(x_3, y_3, \lambda_3) = (1,0,1) \qquad (x_4, y_4, \lambda_4) = (-1,0,1)$$

mentre per il terzo sistema, ricavando y^2 dalla prima equazione e x^2 dalla seconda e sostituendo poi nella terza, si ha

$$\begin{cases} y^2 = \dfrac{1-\lambda}{\lambda} \\ x^2 = \dfrac{1-\lambda}{\lambda} \\ -2\lambda^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

da cui

$$(x_5, y_5, \lambda_5) = (\sqrt{\sqrt{2}-1}, \sqrt{\sqrt{2}-1}, 1/\sqrt{2}) \qquad (x_6, y_6, \lambda_6) = (\sqrt{\sqrt{2}-1}, -\sqrt{\sqrt{2}-1}, 1/\sqrt{2})$$
$$(x_7, y_7, \lambda_7) = (-\sqrt{\sqrt{2}-1}, \sqrt{\sqrt{2}-1}, 1/\sqrt{2}) \qquad (x_8, y_8, \lambda_8) = (-\sqrt{\sqrt{2}-1}, -\sqrt{\sqrt{2}-1}, 1/\sqrt{2}) \,.$$

Calcolando ora $f(x_i, y_i)$, $i = 1,2,3,4,5,6,7,8$, ricaviamo che (x_i, y_i) sono punti di massimo relativo ed assoluto per f in V, se $i = 1,2,3,4$, mentre (x_i, y_i) sono punti di minimo relativo ed assoluto per f in V, se $i = 5,6,7,8$.

ESERCIZIO 7.89. Determinare massimi e minimi assoluti della funzione $f(x,y) = (x-1)^2 - y^2$, soggetta al vincolo $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = 1\}$.

Svolgimento : *Osserviamo che V è la circonferenza unitaria di centro $(0,0)$, quindi esso è un insieme chiuso e limitato; pertanto, poiché f è una funzione continua su V, dal Teorema di Weierstrass si ottiene l'esistenza di almeno un punto di massimo ed un punto di minimo assoluti per f in V.*

Poiché dall'equazione che determina il vincolo possiamo ricavare $y^2 = 1 - x^2$, sostituendo tale relazione nell'espressione di f, otteniamo

$$f|_V = (x-1)^2 - (1-x^2) = 2(x^2 - x) =: g(x) \qquad x \in [-1,1]$$

da cui $g'(x) = 4x - 2$. Pertanto, la funzione decresce per $x \in [-1, 1/2)$ e cresce per $x \in (1/2, 1]$, ovvero f assume il valore minimo assoluto vincolato a V in $(1/2, \pm\sqrt{3}/2)$ ed ha due massimi vincolati a V nei punti $(-1,0)$ e $(1,0)$. Confrontando i valori di f in questi due punti si ha: $f(-1,0) = 4$ ed $f(1,0) = 0$, da cui si ricava che il punto di massimo assoluto vincolato a V è il punto $(-1,0)$.

Alternativamente, si può utilizzare il metodo della Lagrangiana. In tal caso si ha che $L(x,y,\lambda) = (x-1)^2 - y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$, da cui

$$\begin{cases} 2(x-1) - 2\lambda x = 0 \\ -2y - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 1 \\ \lambda = \dfrac{x-1}{x} \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} \lambda = -1 \\ 2x - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \,.$$

Il primo sistema ha come soluzioni $(x_1, y_1, \lambda_1) = (1,0,0)$ e $(x_2, y_2, \lambda_2) = (-1,0,-2)$, mentre il secondo sistema ha come soluzioni $(x_3, y_3, \lambda_3) = (1/2, \sqrt{3}/2, -1)$ e $(x_4, y_4, \lambda_4) = (1/2, -\sqrt{3}/2, -1)$. Confrontando il valore di f nei punti (x_i, y_i), $i = 1,2,3,4$, si ricava, in accordo con quanto ottenuto in precedenza, che i punti (x_i, y_i) sono punti di minimo assoluto per f vincolato a V, per $i = 3,4$, mentre (x_2, y_2) è l'unico punto di massimo assoluto per f vincolato a V.

ESERCIZIO 7.90. Determinare massimi e minimi assoluti della funzione $f(x,y) = xy$ nell'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -2 \le x \le 1 \ ; \ -4 \le y \le -1\}$.

Svolgimento : *Osserviamo, preliminarmente, che $f \ge 0$ per $-2 \le x \le 0$, $f \le 0$ per $0 \le x \le 1$ ed f si annulla per $x = 0$. Inoltre, poiché D è un insieme chiuso e limitato ed f è una funzione continua, dal Teorema di Weierstrass si ottiene l'esistenza di almeno un punto di massimo ed un punto di minimo assoluti per f in D. Per quanto osservato sul segno di f, si avrà che il punto di massimo dovrà avere l'ascissa in $[-2,0)$, mentre il punto di minimo dovrà avere l'ascissa in $(0,1]$.*

Studiamo, innanzitutto, la funzione all'interno di D, con i metodi del calcolo differenziale:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = y = 0 \\ f_y(x,y) = x = 0 \end{cases} \iff (x,y) = (0,0) \,.$$

Poiché l'unico punto stazionario trovato non appartiene all'insieme D, la funzione proposta non ammette estremanti all'interno di D. Studiamo, pertanto, cosa accade sulla frontiera di D, che risulta essere composta da quattro curve regolari:

$$\gamma_1 = \begin{cases} x = -2 \\ y \in [-4,-1] \end{cases} \qquad \gamma_2 = \begin{cases} x \in [-2,1] \\ y = -1 \end{cases} \qquad \gamma_3 = \begin{cases} x = 1 \\ y \in [-4,-1] \end{cases} \qquad \gamma_4 = \begin{cases} x \in [-2,1] \\ y = -4 \end{cases} \,.$$

Lungo γ_1 si ha che $f(-2,y) = g_1(y) = -2y$. Poiché $g_1'(y) = -2$, la funzione decresce da $y = -4$ a $y = -1$, pertanto $(-2,-4)$ è punto di massimo vincolato a γ_1, mentre $(-2,-1)$ è punto di minimo vincolato a γ_1. Lungo γ_2 si ha che $f(x,-1) = g_2(x) = -x$. Poiché $g_2'(x) = -1$, la funzione decresce da $x = -2$ a $x = 1$, pertanto $(-2,-1)$ è punto di massimo vincolato a γ_2, mentre $(1,-1)$ è punto di minimo vincolato a γ_2. Lungo γ_3 si ha che $f(1,y) = g_3(y) = y$. Poiché $g_3'(y) = 1$, la funzione cresce da $y = -4$ a $y = -1$, pertanto $(1,-4)$ è punto di minimo vincolato a γ_3, mentre $(1,-1)$ è punto di massimo vincolato a γ_3. Lungo γ_4 si ha che $f(x,-4) = g_4(x) = -4x$. Poiché $g_4'(x) = -4$, la funzione decresce da $x = -2$ a $x = 1$, pertanto $(-2,-4)$ è punto di massimo vincolato a γ_4, mentre $(1,-4)$ è punto di minimo vincolato a γ_4. Concludendo, in accordo con quanto osservato inizialmente, si ottiene che $(-2,-4)$ è il punto di massimo assoluto per f in D e si ha $f(-2,-4) = 8$, mentre $(1,-4)$ è il punto di minimo assoluto per f in D e si ha $f(1,-4) = -4$.

Risposte agli esercizi non svolti: 7.77: c - **7.78**: b - **7.81**: d - **7.82**: $\lambda = -2$; il punto $(-1,3)$ è di massimo locale, in quanto la matrice Hessiana è definita negativa - **7.85**: d .

CAPITOLO 8

INTEGRALI DOPPI E TRIPLI - FORME DIFFERENZIALI

8.1. Integrali multipli

• Riduzione degli integrali doppi: ricordiamo che si definisce *dominio y-semplice* (oppure *normale rispetto all'asse x*) un insieme $D \subset \mathbb{R}^2$ della forma

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in [a,b], \ g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \ \forall x \in [a,b]\}$$

dove $g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ sono due funzioni continue, con $g_1 \leq g_2$. Analogamente, si definisce *dominio x-semplice* (oppure *normale rispetto all'asse y*) un insieme $D \subset \mathbb{R}^2$ della forma

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \in [c,d], \ g_3(y) \leq x \leq g_4(y) \ \forall y \in [c,d]\}$$

dove $g_3, g_4 : [c,d] \to \mathbb{R}$ sono due funzioni continue, con $g_3 \leq g_4$.

Si dice che un dominio è semplice se esso è x o y-semplice. Inoltre, si definisce *dominio normale* un insieme $D \subset \mathbb{R}^2$ che sia l'unione di un numero finito di domini semplici disgiunti (ovvero che possono intersecarsi solo sulla frontiera).

Se $f : D \to \mathbb{R}$ è una funzione continua e $D \subset \mathbb{R}^2$ è un dominio y-semplice, è possibile calcolare l'integrale doppio di f su D, utilizzando il teorema di riduzione degli integrali: il calcolo dell'integrale doppio si riconduce al calcolo iterato di due integrali in una sola variabile, ovvero vale la formula

$$\iint_D f(x,y)\ dx\ dy = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\ dy\right]\ dx\ .$$

In modo del tutto analogo, su un dominio x-semplice abbiamo

$$\iint_D f(x,y)\ dx\ dy = \int_c^d \left[\int_{g_3(y)}^{g_4(y)} f(x,y)\ dx\right]\ dy\ .$$

Nel caso di domini normali, è sufficiente decomporre l'integrale nella somma di un numero finito di integrali, calcolati sui domini x o y-semplici, di cui D è l'unione.

Un caso particolarmente semplice si ha quando D è un rettangolo, cioè $D = [a,b] \times [c,d]$ ed f è una funzione a variabili separabili, cioè $f(x,y) = f_1(x) f_2(y)$. Solo in tal caso, si ha

$$\iint_D f(x,y)\ dx\ dy = \left(\int_a^b f_1(x)\ dx\right)\left(\int_c^d f_2(y)\ dy\right)\ .$$

• Riduzione degli integrali tripli: in modo del tutto analogo a quanto fatto in precedenza si possono definire i cosiddetti domini semplici di $\mathbb{R}^3$. Ad esempio, un dominio $E \subset \mathbb{R}^3$ è detto *z-semplice* (o *normale rispetto al piano* (x,y)) se è della forma

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x,y) \in D, \ h_1(x,y) \leq z \leq h_2(x,y) \ \ \forall (x,y) \in D\}$$

dove $D \subset \mathbb{R}^2$ è un dominio semplice ed $h_1, h_2 : D \to \mathbb{R}$ sono due funzioni continue, con $h_1 \leq h_2$. Equivalentemente si possono definire i domini semplici rispetto alle altre variabili e i domini normali come unione finita di domini semplici disgiunti.

Se $f : E \to \mathbb{R}$ è una funzione continua ed $E \subset \mathbb{R}^3$ è un dominio, per esempio, z-semplice, è possibile calcolare l'integrale triplo di f su E, utilizzando il teorema di riduzione degli integrali: il calcolo dell'integrale triplo si riconduce al calcolo iterato di due integrali: il più interno sarà un integrale in una sola variabile nell'intervallo, detto *filo*, $I_{x,y} = \{z \in \mathbb{R} \,:\, h_1(x,y) \le z \le h_2(x,y)\}$, con $(x,y) \in D$ fissati, mentre quello più esterno sarà, invece, un integrale doppio su un dominio semplice di $\mathbb{R}^2$ e ad esso sarà quindi possibile applicare la formula di riduzione precedentemente ricordata. Più precisamente, si ha

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_D \left[\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dx\,dy\ .$$

Quest'ultima formula è nota anche come formula di *integrazione per fili*. Per domini x o y-semplici si procede allo stesso modo, ridefinendo opportunamente il ruolo delle variabili.

Per taluni domini tridimensionali, può essere più comodo procedere mediante la cosiddetta *integrazione per strati* o *per sezioni*. Ad esempio, se $E \subset \mathbb{R}^3$ è della forma

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \alpha \le z \le \beta\ ,\ (x,y) \in D_z\} \quad \text{dove} \quad D_z \text{ è } x \text{ o } y\text{-semplice } \forall z \in [\alpha,\beta]$$

allora

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_\alpha^\beta \left[\iint_{D_z} f(x,y,z)\,dx\,dy\right] dz\ ,$$

dove ora l'integrale più interno è un integrale doppio sul dominio semplice o *strato* $D_z \subset \mathbb{R}^2$ (ad esso sarà quindi possibile applicare la formula di riduzione degli integrali doppi precedentemente ricordata), mentre l'integrale più esterno è un integrale in una sola variabile sull'intervallo $[\alpha,\beta]$. Ridefinendo opportunamente il ruolo delle variabili, si ottengono formule analoghe per strati rispetto alle altre variabili.

Un caso particolarmente semplice si ha quando E è un parallelepipedo, cioè $E = [a,b] \times [c,d] \times [\alpha,\beta]$ ed f è una funzione a variabili separabili, cioè $f(x,y,z) = f_1(x)f_2(y)f_3(z)$. Solo in tal caso, si ha

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \left(\int_a^b f_1(x)\,dx\right)\left(\int_c^d f_2(y)\,dy\right)\left(\int_\alpha^\beta f_3(z)\,dz\right)\ .$$

• Solidi di rotazione: un altro caso particolarmente semplice è il calcolo del volume di un solido E, ottenuto dalla rotazione attorno all'asse z del grafico di una funzione non negativa della variabile z nel piano xz (o, equivalentemente, nel piano yz). In tal caso si ha

$$vol(E) = \pi \int_\alpha^\beta f^2(z)\,dz\ ,$$

dove $f : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ è la funzione continua, il cui grafico, ruotato attorno all'asse z, determina la superficie che racchiude il volume in questione. Con ovvie permutazioni del ruolo delle variabili, si ottengono analoghi risultati per solidi di rotazione attorno agli altri assi.

• Cambiamento di variabile negli integrali doppi e tripli: come per gli integrali delle funzioni di una variabile reale, in alcuni casi può essere utile scrivere l'integrale multiplo rispetto ad altre

variabili, nelle quali i calcoli risultino più semplici. Consideriamo dapprima il caso degli integrali doppi: se $f : D \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, $D \subset \mathbb{R}^2$ è un dominio semplice, e $\phi : \widetilde{D} \to D$ è una funzione di classe C^1, invertibile e tale che $\phi^{-1} : D \to \widetilde{D}$ è anch'essa una funzione di classe C^1, abbiamo la seguente formula di cambiamento di variabile:

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\widetilde{D}} f(\phi(u,v))\,|det(J_\phi(u,v))|\,du\,dv\ ,$$

dove $\phi = (\phi_1,\phi_2)$ e $J_\phi(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial u} & \frac{\partial\phi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial u} & \frac{\partial\phi_2}{\partial v} \end{pmatrix}$ è la matrice Jacobiana della trasformazione ϕ. Nel caso degli integrali tripli, si ha

$$\int_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{\widetilde{E}} f(\phi(u,v,w))\,|det(J_\phi(u,v,w))|\,du\,dv\,dw\ ,$$

dove E è un dominio semplice di $\mathbb{R}^3$, $\phi = (\phi_1,\phi_2,\phi_3) : \widetilde{E} \to E$ è una funzione di classe C^1, insieme alla sua inversa, e

$$J_\phi(u,v,w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial u} & \frac{\partial\phi_1}{\partial v} & \frac{\partial\phi_1}{\partial w} \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial u} & \frac{\partial\phi_2}{\partial v} & \frac{\partial\phi_2}{\partial w} \\ \frac{\partial\phi_3}{\partial u} & \frac{\partial\phi_3}{\partial v} & \frac{\partial\phi_3}{\partial w} \end{pmatrix}\ .$$

I principali cambiamenti di variabile negli integrali doppi e tripli sono:

coordinate polari piane
$$\begin{cases} x = x_0 + \rho\cos\vartheta & \rho \in [0,+\infty) \\ y = y_0 + \rho\sin\vartheta & \vartheta \in [0,2\pi]\ (\text{o } [-\pi,\pi]) \end{cases} \qquad |det(J)| = \rho\ ;$$

coordinate sferiche (I caso)
$$\begin{cases} x = x_0 + \rho\cos\phi\cos\vartheta & \rho \in [0,+\infty) \\ y = y_0 + \rho\sin\phi\cos\vartheta & \phi \in [0,2\pi] \\ z = z_0 + \rho\sin\vartheta & \vartheta \in [-\pi/2,\pi/2] \end{cases} \qquad |det(J)| = \rho^2\cos\vartheta\ ;$$

coordinate sferiche (II caso)
$$\begin{cases} x = x_0 + \rho\cos\phi\sin\vartheta & \rho \in [0,+\infty) \\ y = y_0 + \rho\sin\phi\sin\vartheta & \phi \in [0,2\pi] \\ z = z_0 + \rho\cos\vartheta & \vartheta \in [0,\pi] \end{cases} \qquad |det(J)| = \rho^2\sin\vartheta\ ;$$

coordinate cilindriche
$$\begin{cases} x = x_0 + \rho\cos\vartheta & \rho \in [0,+\infty) \\ y = y_0 + \rho\sin\vartheta & \vartheta \in [0,2\pi] \\ z = z & z \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad |det(J)| = \rho\ .$$

Tali trasformazioni, in verità, non sono invertibili su tutto il loro insieme di definizione (ad esempio, nel caso delle coordinate polari piane, alle due differenti coppie di valori $(\rho,0)$ e $(\rho,2\pi)$ corrisponde lo stesso punto). È però possibile dimostrare che, in questi casi, la teoria rimane valida anche in assenza di biunivocità negli estremi degli intervalli di variazione delle coordinate.

• Settore polare: chiameremo *settore polare* un dominio S del piano che, in coordinate polari, assume la forma

$$S_{fg} = \{(\rho,\vartheta) \in [0,+\infty) \times [0,2\pi) \,:\, \vartheta \in [\vartheta_0,\vartheta_1] \text{ e } f(\vartheta) \le \rho \le g(\vartheta)\}\ ,$$

dove $f, g : [\vartheta_0, \vartheta_1] \to \mathbb{R}$ sono due funzioni continue tali che $f \le g$. In particolare, si ha

$$area(S_{fg}) = \frac{1}{2}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} [g^2(\vartheta) - f^2(\vartheta)]\, d\vartheta\,.$$

• Esercizi

ESERCIZIO 8.1. Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_D e^{y-3x}\, dx\, dy\,,$$

dove $D = [-1, 2] \times [1, 3]$.

Svolgimento : *Dal teorema di riduzione degli integrali doppi e tenendo conto che l'insieme D è un rettangolo ed $f(x,y) = e^{-3x}\cdot e^y$ è a variabili separabili, si ottiene*

$$\iint_D e^{y-3x}\, dx\, dy = \left(\int_{-1}^2 e^{-3x}\, dx\right)\left(\int_1^3 e^y\, dy\right) = \frac{1}{3}(e^3 - e^{-6})(e^3 - e)\,.$$

ESERCIZIO 8.2. Sia $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 3,\ 0 \le x \le y\}$. Calcolare

$$\iint_D y\, dx\, dy\,.$$

Svolgimento :

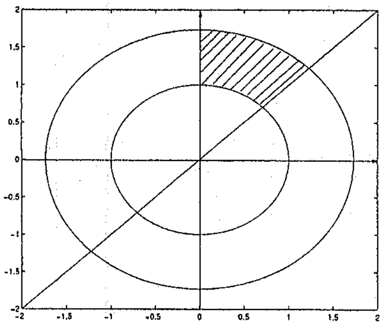


Figura 8.2

Insieme D

Passando in coordinate polari, con centro nell'origine, si ottiene che l'insieme D si trasforma nell'insieme

$$\begin{aligned}\widetilde{D} &= \{(\rho,\vartheta) \in [0,+\infty) \times [-\pi,\pi] \ :\ 1 \le \rho^2 \le 3\,,\ 0 \le \rho\cos\vartheta \le \rho\sin\vartheta\}\\ &= \{(\rho,\vartheta) \in [0,+\infty) \times [-\pi,\pi] \ :\ 1 \le \rho \le \sqrt{3}\,,\ 0 \le \cos\vartheta \le \sin\vartheta\}\\ &= \{(\rho,\vartheta) \in [0,+\infty) \times [-\pi,\pi] \ :\ 1 \le \rho \le \sqrt{3}\,,\ \pi/4 \le \vartheta \le \pi/2\}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\iint_D y\, dx\, dy &= \int_1^{\sqrt{3}}\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \rho^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\rho = \left(\int_1^{\sqrt{3}} \rho^2\, d\rho\right)\left(\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin\vartheta\, d\vartheta\right)\\ &= \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_1^{\sqrt{3}} \Big[-\cos\vartheta\Big]_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} = \frac{\sqrt{2}}{6}(3\sqrt{3} - 1)\,.\end{aligned}$$

ESERCIZIO 8.3. Calcolare

$$\iint_D x^3\, dx\, dy, \qquad D = \{|x| \le 1\} \cap \{x^2 + y^2 \le 9\}\,.$$

Svolgimento : *Poiché D è simmetrico rispetto all'asse y ed $f(x,y) = x^3$ è dispari rispetto ad x, l'integrale proposto è nullo.*

ESERCIZIO 8.4. Calcolare

$$I = \iint_D \frac{2xy}{1 + 2x^2 + 2y^2}\, dx\, dy$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ x^2 + y^2 \le 1\,,\ x \ge 0\,,\ y \le 0\}$.

Svolgimento : *L'insieme D è il quarto di cerchio compreso nel quarto quadrante. Utilizzando un cambiamento in coordinate polari $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$, il dominio D si trasforma nel nuovo dominio*

$$\begin{aligned}\widetilde{D} &= \{(r,\vartheta) \in [0,+\infty) \times [-\pi,\pi] \ :\ r^2 \le 1\,,\ \cos\vartheta \ge 0\,,\ \sin\vartheta \le 0\}\\ &= \{(r,\vartheta) \in [0,+\infty) \times [-\pi,\pi] \ :\ r \le 1\,,\ -\pi/2 \le \vartheta \le \pi/2\,,\ -\pi \le \vartheta \le 0\}\\ &= \{(r,\vartheta) \in [0,+\infty) \times [-\pi,\pi] \ :\ r \le 1\,,\ -\pi/2 \le \vartheta \le 0\}\end{aligned}$$

e l'integrale proposto diviene

$$\begin{aligned}I = \iint_{\widetilde{D}} \frac{2r^2\cos\vartheta\sin\vartheta}{1 + 2r^2} r\, dr\, d\vartheta &= \left(\int_{-\pi/2}^0 \cos\vartheta\sin\vartheta\, d\vartheta\right)\left(\int_0^1 \frac{2r^3}{1 + 2r^2}\, dr\right)\\ &= \left(\frac{\sin^2\vartheta}{2}\right)\Bigg|_{-\pi/2}^0 \left(\int_0^1 \frac{r(2r^2 + 1 - 1)}{(1 + 2r^2)}\, dr\right)\\ &== \left(\frac{\sin^2\vartheta}{2}\right)\Bigg|_{-\pi/2}^0 \left(\int_0^1 r\, dr - \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{4r}{(1 + 2r^2)}\, dr\right)\\ &= \left(\frac{\sin^2\vartheta}{2}\right)\Bigg|_{-\pi/2}^0 \left(\frac{r^2}{2} - \frac{1}{4}\log(1 + 2r^2)\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\log 3\right)\end{aligned}$$

ESERCIZIO 8.5. Calcolare

$$\iint_D \frac{x e^{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}}{x^2 + y^2}\, dx\, dy$$

dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4\,,\ 0 \le y \le x\}\,.$$

Svolgimento : *Osserviamo che per calcolare l'integrale proposto, può essere utile un cambiamento in coordinate polari, che porta l'insieme D nell'insieme $\widetilde{D} = \{(\rho,\vartheta) \in [0,+\infty) \times [-\pi,\pi] \ :\ 1 \le \rho \le 2\,,\ 0 \le \vartheta \le \pi/4\}$. Applicando poi il teorema di riduzione degli integrali doppi, si ottiene*

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\, dx\, dy &= \int_1^2\int_0^{\pi/4} \cos\vartheta\, e^{\sin\vartheta}\, d\vartheta\, d\rho = \left(\int_1^2 d\rho\right)\left(\int_0^{\pi/4} \cos\vartheta\, e^{\sin\vartheta}\, d\vartheta\right)\\ &= \left(\rho\Big|_1^2\right)\left(e^{\sin\vartheta}\Big|_0^{\pi/4}\right) = e^{1/\sqrt{2}} - 1\,.\end{aligned}$$

ESERCIZIO 8.6. Calcolare

$$\iint_R y\ e^{y^2+x}\ dx\ dy$$

dove $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ 0 \le x \le 2y^2\ ,\ 0 \le y \le 1\}$.

Svolgimento : *Osservando che R è un dominio x-semplice ed utilizzando la formula di riduzione degli integrali doppi, otteniamo*

$$\iint_R y\ e^{y^2+x}\ dx\ dy = \int_0^1 y\ e^{y^2}\left[\int_0^{2y^2} e^x\ dx\right]\ dy = \int_0^1 y\ e^{y^2}\left[e^x\Big|_0^{2y^2}\right]\ dy$$

$$= \int_0^1 y\left[e^{3y^2} - e^{y^2}\right]\ dx = \left[\frac{e^{3y^2}}{6} - \frac{e^{y^2}}{2}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6}e^3 - \frac{1}{2}e + \frac{1}{3}\,.$$

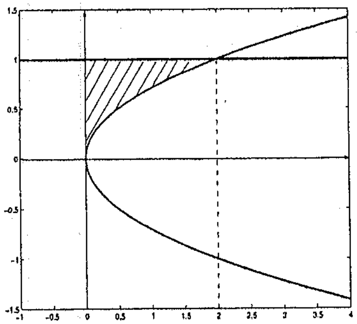


Figura 8.6

Insieme R

ESERCIZIO 8.7. Calcolare

$$\iint_C [1 + 4(x^2+y^2)]\sqrt{1+4x^2+4y^2}\ dx\ dy$$

dove C è la corona circolare di centro l'origine e raggi 1 e 2.

Svolgimento : *Osserviamo che $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$. Utilizzando un cambiamento in coordinate polari piane, l'insieme C si trasforma nell'insieme $\widetilde{C} = \{(\rho,\vartheta) \in [0,+\infty) \times [0,2\pi]\ :\ 1 \le \rho \le 2\ ,\ 0 \le \vartheta \le 2\pi\}$ e l'integrale proposto diviene*

$$\iint_C [1 + 4(x^2+y^2)]\sqrt{1+4x^2+4y^2}\ dx\ dy = \iint_C [1+4(x^2+y^2)]^{3/2}\ dx\ dy$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_1^2 (1+4\rho^2)^{3/2}\rho\ d\rho\ d\vartheta = 2\pi\int_1^2 \rho(1+4\rho^2)^{3/2}\ d\rho$$

$$= \frac{\pi}{10}(1+4\rho^2)^{5/2}\Big|_1^2 = \frac{\pi}{10}\left[17^{5/2} - 5^{5/2}\right]\,.$$

ESERCIZIO 8.8. Calcolare

$$\iint_D \frac{1}{x(1-\log^2 x)}\ dx\,,$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ 1 \le x \le \sqrt{e}\ ,\ 0 \le y \le \pi\}$.

Svolgimento : *Utilizzando la formula di riduzione degli integrali doppi, si ottiene*

$$\iint_D \frac{1}{x(1-\log^2 x)}\ dx\ dy = \int_0^\pi\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\log^2 x)}\ dx\ dy = \left(\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\log^2 x)}\ dx\right)\left(\int_0^\pi\ dy\right)$$

$$= \pi\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\log^2 x)}\ dx = \pi\int_0^{1/2} \frac{1}{(1-t^2)}\ dt$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\int_0^{1/2}\frac{1}{1-t}\ dt + \int_0^{1/2}\frac{1}{1+t}\ dt\right] = \pi\log\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\Bigg|_0^{1/2} = \pi\log\sqrt{3}\,,$$

dove, nella quarta uguaglianza, è stata effettuata la sostituzione $t = \log x$, da cui $\frac{1}{x}\ dx = dt$, $t(1) = 0$, $t(\sqrt{e}) = 1/2$, e nella quinta uguaglianza si è usata la decomposizione $\frac{1}{(1-t^2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-t} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+t}$.

ESERCIZIO 8.9. Calcolare

$$\iint_D \frac{x e^{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}}{x^2+y^2}\ dx\ dy$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ |x| \le y \le 1\}$.

Svolgimento :

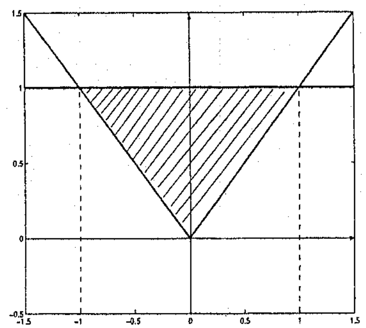


Figura 8.9

Insieme D

Osserviamo che l'insieme D è simmetrico rispetto all'asse y. Poiché la funzione è dispari rispetto alla variabile x, si ottiene facilmente che essa ha integrale nullo su D.

ESERCIZIO 8.10. Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_D e^{3x-2y}\, dx\, dy\ ,$$

dove $D = [0,2] \times [-1,4]$.

ESERCIZIO 8.11. Calcolare il volume del solido

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x^2+z^2 \le 4\ ,\ z-y+1 \ge 0\ ,\ y \ge -4\ \}\ .$$

Svolgimento : *Possiamo riscrivere*

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ -4 \le y \le z+1\ ,(x,z) \in D\} \quad dove \quad D = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2\ :\ x^2+z^2 \le 4\}\ .$$

Siamo in presenza di un dominio normale al piano (x,z); inoltre, D è, a sua volta, normale rispetto all'asse x, cioè

$$D = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2\ :\ -\sqrt{4-x^2} \le z \le \sqrt{4-x^2}\ ,\ -2 \le x \le 2\}\ .$$

Utilizzando la formula di riduzione degli integrali tripli, otteniamo

$$vol(V) = \iiint_V dx\, dy\, dz = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{-4}^{z+1} dy\, dz\, dx$$

$$= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}(z+5)\, dz\, dx = \int_{-2}^{2}\left(\frac{1}{2}z^2+5z\right)\Bigg|_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$= \int_{-2}^{2}\left[\frac{1}{2}(4-x^2)+5\sqrt{4-x^2}-\frac{1}{2}(4-x^2)-5(-\sqrt{4-x^2})\right] dx$$

$$= 10\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\, dx = 40\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2 t}\ \cos t\, dt$$

$$= 40\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\, dt = 80\left(\frac{\cos t\sin t+t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = 20\pi\ ,$$

dove si è utilizzata la sostituzione $x = 2\sin t$, da cui $dx = 2\cos t\ dt$, $t(-2) = -\pi/2$, $t(2) = \pi/2$, e si è sfruttato il fatto che, in $[-\pi/2,\pi/2]$, la funzione $t \mapsto \cos t$ è pari e non negativa.

Alternativamente, riscrivendo D in coordinate polari piane, si ottiene

$$vol(V) = \iiint_V dx\, dy\, dz = \iint_D\left(\int_{-4}^{z+1} dy\right) dx\, dz$$

$$= \iint_D (z+5)\, dx\, dz = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^2(\rho\sin\vartheta+5)\rho\, d\rho\right] d\vartheta$$

$$= 10\pi\int_0^2 \rho\, d\rho + \left(\int_0^{2\pi}\sin\vartheta\, d\vartheta\right)\left(\int_0^2 \rho^2\, d\rho\right) = 20\pi\ ,$$

dove, nell'ultima uguaglianza, abbiamo utilizzato il fatto che l'integrale sul periodo della funzione $\vartheta \mapsto \sin\vartheta$ è nullo.

ESERCIZIO 8.12. Sia $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ y \ge 0,\ y \ge x\}$. Calcolare

$$\iint_D y\, dx\, dy\ .$$

ESERCIZIO 8.13. Calcolare

$$\iint_R \frac{x^2}{1+(xy)^2}\, dx\, dy\ ,$$

dove $R = [0,1] \times [0,1]$.

Svolgimento : *Osservando che R è un rettangolo, e quindi in particolare è un dominio y-semplice, ed utilizzando la formula di riduzione degli integrali doppi, otteniamo*

$$\iint_R \frac{x^2}{1+(xy)^2}\, dx\, dy = \int_0^1 x^2\left[\int_0^1 \frac{1}{1+(xy)^2}\, dy\right] dx = \int_0^1 x^2\left[\frac{\arctan(xy)}{x}\Bigg|_0^1\right] dx$$

$$= \int_0^1 x\arctan x\, dx = \frac{x^2}{2}\arctan x\Bigg|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) dx$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right) dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}[x-\arctan x]\big|_0^1 = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

dove si è utilizzata la formula di integrazione per parti, per calcolare l'integrale della funzione $f(x) = \arctan x$.

ESERCIZIO 8.14. Calcolare

$$\iint_D y^5\, dx\, dy, \qquad D = \{|y| \ge 1/x > 0\} \cap \{x^2+y^2 \le 4\}\ .$$

ESERCIZIO 8.15. Calcolare l'area del dominio piano

$$T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ 1 \le x \le 2\ ;\ \frac{1}{x} \le y \le \frac{2}{x}\right\}\ .$$

ESERCIZIO 8.16. Calcolare il volume dell'insieme

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2 \le ze^{z^2+1}\quad z \in [0,1]\}\ .$$

Svolgimento : *Osserviamo che E è tale che ogni sua sezione con piani di equazione $z = k$ (per $k \in [0,1]$) è un cerchio di raggio $\sqrt{ke^{k^2+1}}$, in altre parole, E è l'insieme ottenuto dalla rotazione del grafico della funzione $f(z) = \sqrt{ze^{z^2+1}} = \sqrt{z}\ e^{\frac{z^2+1}{2}}$ intorno all'asse z. Pertanto, applicando la formula per il calcolo del volume dei solidi di rotazione, si ottiene*

$$vol(E) = \iiint_E dx\, dy\, dz = \pi\int_0^1 ze^{z^2+1}\, dz = \frac{\pi}{2}\ e^{z^2+1}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}(e^2-e)\ .$$

ESERCIZIO 8.17. Calcolare

$$\iiint_E \frac{x^2+y^2}{z^2}\, dx\, dy\, dz\ ,$$

dove $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x \ge 0\ ,\ y \ge 0\ ,\ x^2+y^2 \le 1\ ,\ \frac{1}{x^2+y^2} \le z \le \frac{2}{x^2+y^2}\}$.

Svolgimento : *Il dominio è z-semplice. Passando in coordinate cilindriche, l'insieme E si trasforma nell'insieme* $\widetilde{E} = \{(\rho,\vartheta,z)\in\mathbb{R}^3 \ : \ \frac{1}{\rho^2}\le z\le \frac{2}{\rho^2}\ , 0\le\vartheta\le\pi/2\ ,\ 0\le\rho\le 1\}$ *e*

$$\begin{aligned}\iiint_E \frac{x^2+y^2}{z^2}\,dx\,dy\,dz &= \iiint_{\widetilde{E}} \frac{\rho^2}{z^2}\,\rho\,d\rho\,d\vartheta\,dz = \int_0^{\pi/2}\left[\int_0^1 \rho^3\left(\int_{1/\rho^2}^{2/\rho^2}\frac{1}{z^2}\,dz\right)d\rho\right]d\vartheta\\ &= \left(\int_0^{\pi/2} d\vartheta\right)\int_0^1 \rho^3\left(-\frac{1}{z}\right)\Big|_{1/\rho^2}^{2/\rho^2} d\rho = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \rho^3\left(\rho^2-\frac{\rho^2}{2}\right)d\rho\\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{\rho^5}{2}\,d\rho = \frac{\pi}{2}\,\frac{\rho^6}{12}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{24}\,.\end{aligned}$$

ESERCIZIO 8.18. Calcolare

$$\iint_D (x^2+1)\,dx\,dy$$

dove

$$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2\le 1\}\,.$$

ESERCIZIO 8.19. Calcolare il volume del solido E ottenuto dalla rotazione del grafico della funzione $y = z^{1/2}(\sin z)^{1/2}$, con $z\in[0,\pi]$, attorno all'asse z.

Svolgimento : *Sfruttando la formula richiamata all'inizio del capitolo, si ottiene*

$$vol(E) = \pi\int_0^\pi z\sin z\,dz = \pi\left[-z\cos z|_0^\pi + \int_0^\pi \cos z\,dz\right] = \pi[\pi+\sin z|_0^\pi] = \pi^2\,.$$

ESERCIZIO 8.20. Calcolare il volume dell'insieme E ottenuto dalla rotazione del grafico della funzione $y = \sqrt{\log(1+x)}$, con $x\in[0,\mathrm{e}-1]$, attorno all'asse x.

ESERCIZIO 8.21. Calcolare

$$I = \iiint_E \frac{1}{z(z+1)}\,dx\,dy\,dz\,,$$

dove $E = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ : \ 0\le x\le 1\ ,\ 0\le y\le x\ ,\ \frac{1}{x+1}\le z\le\frac{1}{1+y}\}$.

Svolgimento : *Osserviamo che*

$$\frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}\,.$$

Pertanto, utilizzando il teorema di riduzione degli integrali tripli ed il metodo di integrazione per le funzioni razionali, si ottiene

$$\begin{aligned}I &= \int_0^1\left\{\int_0^x\left[\int_{\frac{1}{1+x}}^{\frac{1}{1+y}}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}\right)dz\right]dy\right\}dx = \int_0^1\left[\int_0^x \log\left(\frac{z}{z+1}\right)\Big|_{\frac{1}{1+x}}^{\frac{1}{1+y}}dy\right]dx\\ &= \int_0^1\left\{\int_0^x\left[\log\left(\frac{1}{1+y}\cdot\frac{1}{\frac{1}{1+y}+1}\right)-\log\left(\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{\frac{1}{1+x}+1}\right)\right]dy\right\}dx\\ &= \int_0^1\left\{\int_0^x\left[\log\left(\frac{1}{2+y}\right)-\log\left(\frac{1}{2+x}\right)\right]dy\right\}dx\\ &= \int_0^1\left\{\int_0^x [\log(x+2)-\log(y+2)]\,dy\right\}dx\,.\end{aligned}$$

Procediamo risolvendo l'integrale interno per parti; si ricava:

$$\begin{aligned}\int_0^x [\log(x+2)-\log(y+2)]\,dy &= [y\log(x+2)-(y+2)\log(y+2)]\Big|_0^x + \int_0^x (y+2)\,\frac{1}{y+2}\,dy\\ &= x\log(x+2)-(x+2)\log(x+2)+2\log 2+x\\ &= -2\log(x+2)+2\log 2+x\,,\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}&\int_0^1\left\{\int_0^x [\log(x+2)-\log(y+2)]\,dy\right\}dx = -2\int_0^1 \log(x+2)\,dx + \int_0^1 2\log 2\,dx + \int_0^1 x\,dx =\\ &-2(x+2)\log(x+2)\Big|_0^1 + 2\int_0^1 (x+2)\,\frac{1}{x+2}\,dx + (2\log 2)x\Big|_0^1 + \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 =\\ &-6\log 3+4\log 2+2+2\log 2+\frac{1}{2} = 6\log\left(\frac{2}{3}\right)+\frac{5}{2}\,.\end{aligned}$$

ESERCIZIO 8.22. Calcolare l'integrale

$$\iint_D \frac{|y|}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy\,,$$

dove $D : \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ 1\le x^2+y^2\le 4x\ ,\ |y|\le\sqrt{3}x\}$.

Svolgimento :

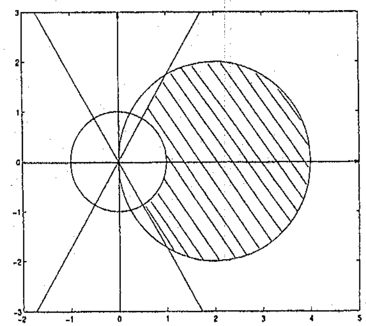


Figura 8.22

Insieme D

Operando un cambiamento in coordinate polari centrate nell'origine, l'insieme D si trasforma nell'insieme

$$\begin{aligned}\widetilde{D} &= \{(\rho,\vartheta)\in[0,+\infty)\times[-\pi,\pi] \ : \ \rho^2\ge 1\ ,\ \rho^2\le 4\rho\cos\vartheta\ ,\ |\sin\vartheta|\le\sqrt{3}\cos\vartheta\}\\ &= \{(\rho,\vartheta)\in[0,+\infty)\times[-\pi,\pi] \ : \ \cos\vartheta\ge 0\ ,\ 1\le\rho\le 4\cos\vartheta\ ,\ |\tan\vartheta|\le\sqrt{3}\}\\ &= \{(\rho,\vartheta)\in[0,+\infty)\times[-\pi,\pi] \ : \ -\pi/2\le\vartheta\le\pi/2\ ,\ -\pi/3\le\vartheta\le\pi/3\ ,\ 1\le\rho\le 4\cos\vartheta\}\\ &= \{(\rho,\vartheta)\in[0,+\infty)\times[-\pi,\pi] \ : \ -\pi/3\le\vartheta\le\pi/3\ ,\ 1\le\rho\le 4\cos\vartheta\}\,.\end{aligned}$$

Pertanto,

$$\iint_D \frac{|y|}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy = \iint_{\widetilde{D}} \frac{\rho|\sin\vartheta|}{\rho^4}\rho\,d\rho\,d\vartheta = 2\int_0^{\pi/3}\left(\int_1^{4\cos\vartheta}\frac{\rho^2\sin\vartheta}{\rho^4}\,d\rho\right)\,d\vartheta$$
$$= 2\int_0^{\pi/3}\sin\vartheta\left(-\frac{1}{\rho}\right)\Bigg|_1^{4\cos\vartheta}\,d\vartheta = 2\int_0^{\pi/3}\left[\sin\vartheta - \frac{1}{4}\tan\vartheta\right]\,d\vartheta$$
$$= 2\left[-\cos\vartheta + \frac{1}{4}\log|\cos\vartheta|\right]\Bigg|_0^{\pi/3} = 1 - \frac{1}{2}\log 2\,,$$

dove, nella seconda uguaglianza, abbiamo utilizzato il fatto che il dominio $\widetilde{D}$ è simmetrico rispetto all'asse ρ e la funzione f, riscritta nelle variabili polari, è pari rispetto a ϑ.

ESERCIZIO 8.23. Calcolare

$$\iint_D \frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

dove

$$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ 1\le x^2+y^2\le 4\}\,.$$

ESERCIZIO 8.24. Calcolare l'integrale

$$\iint_T e^{\sqrt{x^2+y^2}}|x|\,dx\,dy\,,$$

dove $T:\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ 4\le x^2+y^2\le 16\,,\ y\ge 0\}$.

ESERCIZIO 8.25. Calcolare l'integrale

$$\iint_T \sqrt{4-x^2-y^2}\,dx\,dy\,,$$

dove $T:\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ 0\le 2y\le x^2+y^2\le 4\}$.

ESERCIZIO 8.26. Calcolare l'integrale

$$\iiint_D y\,dx\,dy\,dz\,,$$

dove $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x^2+(y-3)^2+z^2\le 1\}$.

Svolgimento : *Osserviamo, innanzitutto, che D è la sfera unitaria di centro $(0,3,0)$. Operando un cambiamento in coordinate sferiche centrate in $(0,3,0)$, il dominio D si trasforma nell'insieme*

$$\widetilde{D} = \{(\rho,\vartheta,\phi)\in[0,+\infty)\times[0,\pi)\times[0,2\pi)\ :\ \rho\le 1\}\,.$$

Pertanto

$$\iiint_D y\,dx\,dy\,dz = \int_0^\pi\left[\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1(3+\rho\sin\phi\sin\vartheta)\rho^2\sin\vartheta\,d\rho\right)\,d\phi\right]\,d\vartheta$$
$$= \int_0^\pi\sin\vartheta\left[\int_0^{2\pi}\left(\rho^3+\frac{\rho^4}{4}\sin\phi\sin\vartheta\right)\Bigg|_0^1\,d\phi\right]\,d\vartheta$$
$$= \int_0^\pi\sin\vartheta\left[\int_0^{2\pi}\left(1+\frac{1}{4}\sin\phi\sin\vartheta\right)\,d\phi\right]\,d\vartheta$$
$$= \int_0^\pi\sin\vartheta\left[\phi-\frac{1}{4}\cos\phi\sin\vartheta\right]\Bigg|_0^{2\pi}\,d\vartheta$$
$$= 2\pi\int_0^\pi\sin\vartheta\,d\vartheta = -2\pi\cos\vartheta|_0^\pi = 4\pi\,.$$

Osserviamo che si poteva giungere allo stesso risultato anche ricordando che, in un solido D di densità costante, le coordinate del baricentro sono date da

$$x_b = \frac{1}{vol(D)}\iiint_D x\,dx\,dy\,dz \qquad y_b = \frac{1}{vol(D)}\iiint_D y\,dx\,dy\,dz \qquad z_b = \frac{1}{vol(D)}\iiint_D z\,dx\,dy\,dz$$

e che, nella sfera, il baricentro coincide con il centro stesso. Pertanto, si ottiene subito

$$\iiint_D x\,dx\,dy\,dz = x_b vol(D) = 0 \qquad \iiint_D y\,dx\,dy\,dz = y_b vol(D) = 3\,\frac{4}{3}\pi = 4\pi$$

$$\iiint_D z\,dx\,dy\,dz = z_b vol(D) = 0\,.$$

ESERCIZIO 8.27. Si calcoli l'area del settore polare

$$S = \left\{(\rho,\vartheta)\in[0,+\infty)\times[0,2\pi)\ :\ \vartheta\in[0,\pi/2]\ \text{ e }\ 0\le\rho\le\frac{6\sin\vartheta\cos\vartheta}{\cos^3\vartheta+\sin^3\vartheta}\right\}\,.$$

(Ricordiamo che la curva polare $\rho(\vartheta) = \frac{a\sin\vartheta\cos\vartheta}{\cos^3\vartheta+\sin^3\vartheta}$, con $a>0$ e $\vartheta\in[0,\pi/2]$, è detta *folium di Cartesio.*)

Svolgimento : *Ricordando la formula richiamata all'inizio del capitolo, si ottiene*

$$area(S) = \int_0^{\pi/2}\left[\frac{6\sin\vartheta\cos\vartheta}{\cos^3\vartheta+\sin^3\vartheta}\right]^2\,d\vartheta = 36\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta}{\cos^6\vartheta(1+\tan^3\vartheta)^2}\,d\vartheta$$
$$= 36\int_0^{\pi/2}\frac{\tan^2\vartheta}{(1+\tan^3\vartheta)^2}\,\frac{1}{\cos^2\vartheta}\,d\vartheta\,.$$

Ponendo $t=\tan\vartheta$, da cui $dt=\frac{1}{\cos^2\vartheta}\,d\vartheta$, $t(0)=0$, $t(\pi/2)=+\infty$, otteniamo

$$area(S) = 36\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^3)^2}\,dt = -\frac{36}{3}\,\frac{1}{1+t^3}\Bigg|_0^{+\infty} = 12\,.$$

ESERCIZIO 8.28. Assegnato il dominio $T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x-y-z\le 1\,;\ x\ge 0\,;\ y\le 0\,;\ z\le 0\}$, si calcoli il volume di T e l'integrale

$$\iiint_T \frac{1}{(2-x+y+z)^2}\,dx\,dy\,dz\,.$$

Svolgimento : *Come mostrato in figura 8.28, poiché $x-y-z=1$ è l'equazione di un piano passante per i punti $A=(1,0,0)$, $B=(0,-1,0)$ e $C=(0,0,-1)$, il dominio T è un tetraedro, il cui volume è dato dalla formula $vol(T)=\frac{1}{3}area(base)\cdot h$, dove l'area di base è pari a $1/2$ e l'altezza h è pari a 1. Dunque, si ottiene subito $vol(T)=1/6$.*

Osserviamo anche che il dominio T è un dominio semplice, che può essere riscritto nella forma

$$T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x-y-1\le z\le 0\,;\ x-1\le y\le 0\,;\ 0\le x\le 1\}\,;$$

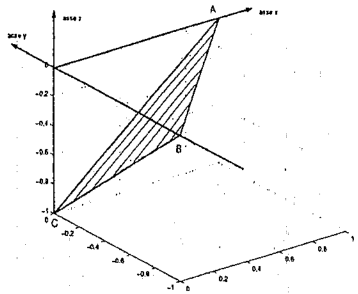


Figura 8.28

Insieme T

infatti, dalla prima condizione, si ha che $x-y-1\le 0$, che, unitamente alla richiesta $y\le 0$, porta alla seconda condizione, e, dalla seconda condizione, si ha che $x-1\le 0$, che, unitamente alla richiesta $x\ge 0$, porta alla terza condizione. Segue che

$$\begin{aligned}
&\iiint_T \frac{1}{(2-x+y+z)^2}\,dx\,dy\,dz\\
&=\int_0^1\left[\int_{x-1}^0\left(\int_{x-y-1}^0 \frac{1}{[(2-x+y)+z]^2}\,dz\right)dy\right]dx\\
&=\int_0^1\left[\int_{x-1}^0\left(-\frac{1}{(2-x+y)+z}\right)\Bigg|_{x-y-1}^0 dy\right]dx=\int_0^1\left[\int_{x-1}^0\left(1-\frac{1}{2-x+y}\right)dy\right]dx\\
&=\int_0^1 (y-\log|2-x+y|)\Big|_{x-1}^0\,dx=\int_0^1[-\log(2-x)-(x-1)]\,dx\\
&=\left[-(x-2)\log(2-x)+(x-2)-\frac{(x-1)^2}{2}\right]\Bigg|_0^1=\frac{3}{2}-2\log 2\,,
\end{aligned}$$

dove si è sfruttato il fatto che $\int\log|t|\,dt=t\log|t|-t$, ottenuto integrando per parti.

ESERCIZIO 8.29. Calcolare l'integrale

$$\iint_T\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,,$$

dove $T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x^2+y^2-x-y\ge 0\ ;\ x^2+y^2-2x-2y\le 0\}$.

Svolgimento : *L'insieme T è compreso fra le due circonferenze*

$$\begin{aligned}
C_1&=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ (x-1/2)^2+(y-1/2)^2=1/2\}\\
C_2&=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ (x-1)^2+(y-1)^2=2\}
\end{aligned}$$

come mostrato in figura 8.29.

Operando un cambiamento in coordinate polari centrate nell'origine, il dominio T si trasforma nell'insieme

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}&=\{(\rho,\vartheta)\in[0,+\infty)\times[-\pi,\pi)\ :\ \rho^2-\rho(\cos\vartheta+\sin\vartheta)\ge 0\ ;\ \rho^2-2\rho(\cos\vartheta+\sin\vartheta)\le 0\}\\
&=\{(\rho,\vartheta)\in[0,+\infty)\times[-\pi,\pi)\ :\ \cos\vartheta+\sin\vartheta\le\rho\le 2(\cos\vartheta+\sin\vartheta)\}\,.
\end{aligned}$$

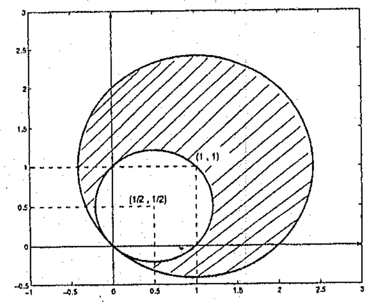


Figura 8.29

Insieme T

L'ultima condizione trovata implica che si abbia $\cos\vartheta+\sin\vartheta\le 2(\cos\vartheta+\sin\vartheta)$, ovvero $\cos\vartheta\ge-\sin\vartheta$, che è soddisfatta per $\vartheta\in[-\pi/4,3\pi/4]$. Quindi si ottiene

$$\widetilde{T}=\{(\rho,\vartheta)\in[0,+\infty)\times[-\pi,\pi)\ :\ \cos\vartheta+\sin\vartheta\le\rho\le 2(\cos\vartheta+\sin\vartheta)\ ;\ \vartheta\in[-\pi/4,3\pi/4]\}\,.$$

Pertanto, l'integrale proposto diventa ,

$$\begin{aligned}
&\iint_T\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy=\int_{-\pi/4}^{3\pi/4}\left(\int_{\cos\vartheta+\sin\vartheta}^{2(\cos\vartheta+\sin\vartheta)}\rho^2\,d\rho\right)d\vartheta\\
=&\frac{1}{3}\int_{-\pi/4}^{3\pi/4}\left[8(\cos\vartheta+\sin\vartheta)^3-(\cos\vartheta+\sin\vartheta)^3\right]d\vartheta=\frac{7}{3}\int_{-\pi/4}^{3\pi/4}(\cos\vartheta+\sin\vartheta)^3\,d\vartheta\\
=&\frac{7}{3}\int_{-\pi/4}^{3\pi/4}(\cos^3\vartheta+\sin^3\vartheta+3\cos^2\vartheta\sin\vartheta+3\cos\vartheta\sin^2\vartheta)\,d\vartheta\\
=&\frac{7}{3}\int_{-\pi/4}^{3\pi/4}[(1-\sin^2\vartheta)\cos\vartheta+(1-\cos^2\vartheta)\sin\vartheta+3\cos^2\vartheta\sin\vartheta+3\cos\vartheta\sin^2\vartheta]\,d\vartheta\\
=&\frac{7}{3}\int_{-\pi/4}^{3\pi/4}(\cos\vartheta+\sin\vartheta+2\cos^2\vartheta\sin\vartheta+2\sin^2\vartheta\cos\vartheta)\,d\vartheta\\
=&\frac{7}{3}\left(\sin\vartheta-\cos\vartheta-\frac{2}{3}\cos^3\vartheta+\frac{2}{3}\sin^3\vartheta\right)\Bigg|_{-\pi/4}^{3\pi/4}\\
=&\frac{7}{3}\left[\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}-\frac{2}{3}\left(-\frac{\sqrt2}{2}\right)^3+\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^3-\left(-\frac{\sqrt2}{2}-\frac{\sqrt2}{2}-\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^3+\frac{2}{3}\left(-\frac{\sqrt2}{2}\right)^3\right)\right]\\
=&\frac{56}{9}\sqrt2\,.
\end{aligned}$$

ESERCIZIO 8.30. Calcolare l'integrale

$$\iint_D xy^2\,dx\,dy\,,$$

dove D è l'insieme del II quadrante soddisfacente la condizione $x+y-2\le 2x-3y$.

Svolgimento : *Poiché i punti del II quadrante sono caratterizzati dalle condizioni $x \leq 0$ e $y \geq 0$, si ottiene che l'insieme D si può riscrivere nella forma*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \leq 0 \ ; \ y \geq 0 \ ; \ x + y - 2 \leq 2x - 3y\} \ .$$

L'ultima condizione equivale a $y \leq \frac{x+2}{4}$, che, unitamente alla richiesta $y \geq 0$, fornisce $0 \leq y \leq \frac{x+2}{4}$. In particolare, la precedente condizione implica che si abbia anche $x + 2 \geq 0$, che, unitamente alla richiesta $x \leq 0$, fornisce $-2 \leq x \leq 0$. Pertanto, possiamo riscrivere D nella forma

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -2 \leq x \leq 0 \ ; \ 0 \leq y \leq \frac{x+2}{4}\} \ .$$

L'integrale proposto diventa

$$\iint_D xy^2 \, dx \, dy = \int_{-2}^{0} x \left(\int_0^{\frac{x+2}{4}} y^2 \, dy \right) dx = \frac{1}{3} \int_{-2}^{0} xy^3 \Big|_0^{\frac{x+2}{4}} dx$$
$$= \frac{1}{192} \int_{-2}^{0} (x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 8x) \, dx = \frac{1}{192} \left(\frac{1}{5}x^5 + \frac{6}{4}x^4 + \frac{12}{3}x^3 + \frac{8}{2}x^2 \right) \Big|_{-2}^{0} = -\frac{1}{120} \ .$$

Risposte agli esercizi non svolti: **8.10**: l'integrale proposto vale $\frac{1}{6}(e^6 - 1)(e^2 - e^{-8})$ - **8.12**: l'integrale proposto vale $\frac{7}{6}(2 + \sqrt{2})$ - **8.14**: l'integrale proposto vale 0 - **8.15**: l'area proposta vale $\log 2$ - **8.18**: l'integrale proposto vale $\frac{5}{4}\pi$ - **8.20**: il volume di E vale π - **8.23**: l'integrale proposto vale 8 - **8.24**: l'integrale proposto vale $4e^2(5e^2 - 1)$ - **8.25**: l'integrale proposto vale $32/9$.

8.2. Curve e integrali di linea di prima specie

• Richiami: si chiama *curva regolare* o *parametrizzazione di una curva regolare* di $\mathbb{R}^n$ una funzione $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ continua e derivabile con continuità, tale che la sua derivata non si annulli mai nell'insieme di definizione. Ricordiamo che il *versore tangente* (cioè il vettore tangente di norma o modulo unitario) ad una curva regolare in un punto t_0 esiste sempre ed è dato da

$$\vec{T}(t_0) = \frac{\phi'(t_0)}{\|\phi'(t_0)\|} = \left(\frac{\phi_1'(t_0)}{\|\phi'(t_0)\|}, \ldots, \frac{\phi_n'(t_0)}{\|\phi'(t_0)\|} \right) \ .$$

Una curva regolare è sempre *rettificabile* (cioè ha sempre lunghezza finita) e la sua lunghezza non dipende dalla parametrizzazione scelta. Inoltre, se γ è parametrizzata da $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, indicata con $l(\gamma)$ la sua lunghezza, vale la formula

$$l(\gamma) = \int_\gamma dl = \int_a^b \|\phi'(t)\| \, dt = \int_a^b \sqrt{\left(\phi_1'(t)\right)^2 + \ldots + \left(\phi_n'(t)\right)^2} \, dt \ .$$

Se γ, parametrizzata da $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, è una curva regolare, la cui immagine è contenuta in un aperto $D \subseteq \mathbb{R}^2$ e $g : D \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, possiamo definire l'*integrale curvilineo* (o *integrale di linea di prima specie*) della funzione g lungo la curva γ; vale la formula

$$\int_\gamma g \, dl = \int_a^b g(\phi_1(t), \phi_2(t)) \sqrt{\left(\phi_1'(t)\right)^2 + \left(\phi_2'(t)\right)^2} \, dt \ .$$

• Curve cartesiane e polari. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1; la curva regolare $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ di parametrizzazione

$$\phi(t) = \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \end{cases} \qquad t \in [a,b]$$

è detta *curva cartesiana* (la sua immagine coincide proprio con il grafico della funzione f). In questo caso, si ha

$$l(\gamma) = \int_\gamma dl = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} \, dx \ .$$

Una curva regolare $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ della forma $\gamma : \{\rho = \rho(\vartheta) \ : \ \vartheta \in [\vartheta_1, \vartheta_2]\}$, con $\rho \in C^1([\vartheta_1, \vartheta_2])$, è detta, invece, *curva polare*. Una sua parametrizzazione canonica è data da

$$\phi(\vartheta) = \begin{cases} x(\vartheta) = \rho(\vartheta) \cos\vartheta \\ y(\vartheta) = \rho(\vartheta) \sin\vartheta \end{cases} \qquad \vartheta \in [\vartheta_1, \vartheta_2]$$

e, in questo caso, si ha

$$l(\gamma) = \int_\gamma dl = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sqrt{\left(\rho'(\vartheta)\right)^2 + \left(\rho(\vartheta)\right)^2} \, d\vartheta \ .$$

• Esercizi

ESERCIZIO 8.31. Calcolare la lunghezza della curva

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 10t + 25 \\ z(t) = t + 5 \end{cases} \qquad t \in [-5, 0] \ .$$

Svolgimento : *Osservando che $dl = \|\phi'(t)\| \, dt = \sqrt{1 + 10^2 + 1} \, dt$, si ottiene*

$$l(\gamma) = \int_\gamma dl = \int_{-5}^{0} \sqrt{1 + 100 + 1} \, dt = 5\sqrt{102} \ .$$

ESERCIZIO 8.32. Data la curva piana γ di parametrizzazione $\phi(t) = (e^{t-1} + 1, \log t + t)$ con $t \in [1/2, 10]$, determinare il versore tangente a γ nel punto $(2,1)$.

Svolgimento : *Osserviamo, innanzitutto, che $e^{t-1} + 1 = 2$ se e solo se $e^{t-1} = 1$, ovvero, se e solo se $t = 1$ e che, pertanto, il punto $(2,1)$ è raggiunto in corrispondenza del parametro $t = 1$. Inoltre,*

$$\phi'(t) = \begin{cases} e^{t-1} \\ \dfrac{1}{t} + 1 \end{cases} , \qquad \textit{da cui} \qquad \phi'(1) = (1,2) \qquad e \qquad \|\phi'(1)\| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \ .$$

Pertanto, il versore tangente a γ in $t = 1$ è $\vec{T}(1) = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$.

ESERCIZIO 8.33. Scrivere l'equazione della retta tangente a

$$\gamma : \{\rho(\vartheta) = (e^{\vartheta}+1)\cos\vartheta \ : \ -\pi/2 \le \vartheta \le \pi/2\}$$

nel punto $P_0 = (2,0)$.

Svolgimento : *Osservando che una parametrizzazione canonica della curva polare γ è fornita da*

$$\phi(\vartheta) = \begin{cases} x(\vartheta) = \rho(\vartheta)\cos\vartheta = (e^{\vartheta}+1)\cos^2\vartheta \\ y(\vartheta) = \rho(\vartheta)\sin\vartheta = (e^{\vartheta}+1)\cos\vartheta\sin\vartheta \end{cases}$$

da cui $y(\vartheta) = 0$ per $\vartheta = 0$ e $\vartheta = \pm\pi/2$. Si verifica facilmente che, fra questi tre valori, l'unico che fornisce $x(\vartheta) = 2$ è $\vartheta = 0$; quindi, $P_0 = \phi(0)$. Inoltre,

$$\phi'(\vartheta) = \begin{cases} e^{\vartheta}\cos^2\vartheta - 2(e^{\vartheta}+1)\cos\vartheta\sin\vartheta \\ e^{\vartheta}\cos\vartheta\sin\vartheta + (e^{\vartheta}+1)(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) \end{cases}$$

da cui $\phi'(0) = (1,2)$ e quindi la retta tangente alla curva γ in P_0 ha equazioni parametriche date da

$$\begin{cases} x(t) = 2+t \\ y(t) = 2t \end{cases}$$

Ricavando il parametro t in funzione di x dalla prima equazione e sostituendolo nella seconda, si ottiene che la retta tangente alla curve γ, in forma cartesiana, è data da $y = 2x - 4$.

DOMANDA 8.34. Sia γ una curva regolare. Allora

$\boxed{a}$ γ potrebbe non essere rettificabile; $\boxed{b}$ γ è sempre rettificabile, ma la sua lunghezza dipende dalla parametrizzazione; $\boxed{c}$ la lunghezza di γ è data da $\int_a^b \phi'(t)\,dt$ dove $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è una parametrizzazione di γ; $\boxed{d}$ esiste sempre il versore tangente a γ.

ESERCIZIO 8.35. Data la funzione continua $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y,z) = \frac{x^2+y}{\sqrt{2+4z^2}}$ calcolare $\int_\gamma f\,dl$ ove γ è l'arco di curva, giacente nel semispazio $\{y \le 0\}$, definito da

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 - 4 \\ z(t) = t \end{cases} \qquad -2 \le t \le 2\,.$$

Svolgimento : *Poiché $dl = \|\phi'(t)\|\,dt = \sqrt{1+(2t)^2+1}\,dt$, utilizzando la formula per il calcolo degli integrali di linea di prima specie, si ottiene*

$$\int_\gamma f\,dl = \int_{-2}^{2} f\big(x(t),y(t),z(t)\big)\sqrt{2+4t^2}\,dt = \int_{-2}^{2}\frac{t^2+(t^2-4)}{\sqrt{2+4t^2}}\sqrt{2+4t^2}\,dt$$

$$= \int_{-2}^{2}(2t^2-4)\,dt = \left(\frac{2}{3}t^3 - 4t\right)\Big|_{-2}^{2} = -\frac{16}{3}\,.$$

ESERCIZIO 8.36. Determinare per quali valori di $\alpha > 0$ la retta tangente alla curva

$$\gamma : \{x = \arctan(y+1)^{\alpha} \ : \ y \in [-1,1]\}$$

nel punto $P_0 = (\pi/4, 0)$ è parallela alla retta $y = x$.

Svolgimento : *Osserviamo innanzitutto che possiamo parametrizzare γ nel modo seguente:*

$$\phi(t) = \begin{cases} x(t) = \arctan(t+1)^{\alpha} \\ y(t) = t \end{cases} \qquad t \in [-1,1]$$

da cui

$$\phi'(t) = \begin{cases} \dfrac{\alpha(t+1)^{\alpha-1}}{1+(t+1)^{2\alpha}} \\ 1 \end{cases} \qquad t \in [-1,1]\,.$$

La curva γ risulta quindi essere regolare in $(-1,1]$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Affinché essa sia regolare in tutto l'intervallo $[-1,1]$, dobbiamo supporre $\alpha \ge 1$. Inoltre, $P_0 = \gamma(0)$ e il vettore tangente a γ in P_0 è dato da

$$\vec{\tau}(P_0) = \left(\frac{\alpha}{2}, 1\right)\,.$$

Pertanto, poiché a sua volta il vettore tangente alla retta assegnata è dato da $(1,1)$, le due rette saranno parallele se e solo se $\vec{\tau}(P_0) = \lambda\cdot(1,1)$, cioè se e solo se $\lambda = 1$ e $\alpha = 2$.

ESERCIZIO 8.37. Calcolare la lunghezza della curva

$$\gamma = \begin{cases} x(t) = \int_0^t e^{2s}(e^s\sin s^2 + \cos s^2)\,ds \\ y(t) = \int_0^t e^{2s}(e^s\cos s^2 - \sin s^2)\,ds \end{cases} \qquad t \in [0,1]\,.$$

Svolgimento : *Dal Teorema di Torricelli, otteniamo*

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt \\ &= \sqrt{[e^{2t}(e^t\sin t^2 + \cos t^2)]^2 + [e^{2t}(e^t\cos t^2 - \sin t^2)]^2}\,dt \\ &= e^{2t}\sqrt{e^{2t}+1}\,dt\,. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} l(\gamma) &= \int_0^1 \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt = \int_0^1 e^{2t}\sqrt{e^{2t}+1}\,dt \\ &= \frac{1}{3}\left[e^{2t}+1\right]^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\left[(e^2+1)^{3/2} - (2)^{3/2}\right]\,. \end{aligned}$$

DOMANDA 8.38. Sia data la curva $\gamma \ : \ \{y = 3x \ : \ x \in [0,2]\}$. Allora

$\boxed{a}$ γ non è regolare; $\boxed{b}$ $l(\gamma) = 2\sqrt{10}$; $\boxed{c}$ il vettore tangente a γ nel punto $(1/2, 3/2)$ è dato da $(1/2, 3/2)$; $\boxed{d}$ il vettore tangente a γ nel punto $(1,3)$ non esiste.

ESERCIZIO 8.39. Data la funzione continua $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$ calcolare $\int_\gamma f\ dl$ ove γ è l'arco di curva giacente nel semispazio $\{z \geq 0\}$ definito da

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t \\ z(t) = 1 - t^2 \end{cases} \qquad -1 \leq t \leq 1 .$$

Svolgimento : *Poiché* $dl = \sqrt{1+1+(-2t)^2}\ dt$, *si ottiene*

$$\int_\gamma f\ dl = \int_{-1}^1 f\Big(x(t), y(t), z(t)\Big)\sqrt{2+4t^2}\ dt = \int_{-1}^1 \frac{1-t^2}{\sqrt{1+t^2+t^2}}\sqrt{2+4t^2}\ dt$$

$$= 2\int_0^1 (1-t^2)\frac{\sqrt{2(1+2t^2)}}{\sqrt{1+2t^2}}\ dt = 2\sqrt{2}\int_0^1 (1-t^2)\ dt = 2\sqrt{2}\left(t - \frac{1}{3}t^3\right)\Bigg|_0^1 = \frac{4\sqrt{2}}{3} ,$$

dove, nella terza uguaglianza, si è usato il fatto che l'integrale di una funzione pari in un intervallo simmetrico rispetto all'origine corrisponde al doppio dell'integrale calcolato su metà intervallo.

DOMANDA 8.40. Sia γ una curva regolare. Allora

$\boxed{a}$ γ è sempre rettificabile; $\boxed{b}$ γ è una curva cartesiana; $\boxed{c}$ può accadere che il vettore tangente a γ sia nullo in qualche punto; $\boxed{d}$ γ non è continua.

ESERCIZIO 8.41. Scrivere l'equazione della retta tangente a

$$\gamma : \{\rho(\vartheta) = (e^{2\vartheta} + 3)\sin\vartheta\ :\ 0 \leq \vartheta \leq \pi\}$$

nel punto $P_0 = (0, e^\pi + 3)$.

DOMANDA 8.42. Sia γ la curva di $\mathbb{R}^2$ parametrizzata da $\phi(t) = (\cos^2 t, 3t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Allora

$\boxed{a}$ γ è una curva chiusa; $\boxed{b}$ il versore tangente a γ nel punto $(1, 3\pi)$ è dato da $(\cos^2 1, 9\pi)$; $\boxed{c}$ il versore tangente a γ nel punto $(1, 3\pi)$ è dato da $(0,1)$; $\boxed{d}$ γ non è regolare.

ESERCIZIO 8.43. Determinare per quali valori di $\alpha > 0$ la retta tangente alla curva

$$\gamma\ :\ \left\{x = \arctan\left[\sqrt{3}(y+1)^{\alpha+1}\right]\ :\ y \in [-1,1]\right\}$$

nel punto $P_0 = (\pi/3, 0)$ è parallela alla retta $\frac{\sqrt{3}}{4}y = x$.

ESERCIZIO 8.44. Determinare il vettore tangente alla curva

$$\gamma\ :\ \begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = 2\sin t \\ z(t) = t^2 + 1 \end{cases} \qquad t \in [-\pi, \pi]$$

nel punto $(2,0,1)$.

ESERCIZIO 8.45. Determinare il vettore tangente alla curva

$$\gamma\ :\ \begin{cases} x(t) = \cos 3t \\ y(t) = \sin 3t \\ z(t) = \log(2\sin 3t) \end{cases} \qquad t \in \left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}\right]$$

nel punto $(0, 1, \log 2)$.

Risposte agli esercizi non svolti: 8.34: d - 8.38: b - 8.40: a - 8.41: in forma parametrica abbiamo $r : \Big(x(t) = -(e^\pi+3)t\ ,\ y(t) = (e^\pi+3)+2e^\pi t\Big)$ - 8.42: c - 8.43: $\alpha = 0$ - 8.44: $\vec{r}(2,0,1) = \vec{r}(x(0), y(0), z(0)) = (0,2,0)$ - 8.45: $\vec{r}(0,1,\log 2) = \vec{r}(x(\pi/6), y(\pi/6), z(\pi/6)) = (-3,0,0)$.

8.3. Forme differenziali

• Richiami: si chiama forma differenziale in $\mathbb{R}^2$ un'espressione del tipo

$$\omega(x,y) = A(x,y)\ dx + B(x,y)\ dy$$

dove $A, B : \Omega \to \mathbb{R}$ sono due funzioni continue, definite nell'aperto connesso $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, dette *coefficienti della forma differenziale.* La forma differenziale ω è associata in modo univoco al campo vettoriale $\vec{V}(x,y) = \Big(A(x,y), B(x,y)\Big)$ e viceversa.

Le forme differenziali possono essere integrate lungo curve, secondo la seguente formula, detta anche *integrale curvilineo di seconda specie,*

$$\int_\gamma \omega(x,y) = \int_a^b \Big[A(x(t), y(t))x'(t) + B(x(t), y(t))y'(t)\Big]\ dt\ , \tag{8.1}$$

dove γ è una curva piana regolare (o regolare a tratti) la cui immagine è contenuta in Ω (in tal caso diremo semplicemente che γ è contenuta in Ω), ed è parametrizzata da $\phi(t) = (x(t), y(t))$ con $t \in [a,b]$.

Utilizzando un approccio più fisico, possiamo definire il vettore

$$d\vec{l} := (dx, dy) = (x'(t)\ dt, y'(t)\ dt)$$

e riscrivere

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \vec{V}\cdot d\vec{l}\ ,$$

ovvero rileggere l'integrale di una forma differenziale lungo un curva γ come il lavoro effettuato dal campo di forze $\vec{V}$ associato ad ω per spostare un corpo di massa unitaria lungo la curva γ.

Una forma differenziale ω è detta *esatta,* se esiste una funzione differenziabile $F : \Omega \to \mathbb{R}$ (detta *primitiva* o *potenziale* di ω) tale che

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = A(x,y) \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = B(x,y)\ ,$$

ovvero

$$\nabla F(x,y) = \vec{V}(x,y)\ .$$

Ricordando la fisica, quest'ultima relazione suggerisce che una forma differenziale è esatta se e solo se il campo vettoriale associato è conservativo.
L'esattezza di una forma differenziale è equivalente alle seguenti condizioni:
- l'integrale di ω lungo una qualsiasi curva chiusa e regolare a tratti contenuta in Ω deve essere nullo (cioè la *circuitazione* del campo $\vec{V}$ deve essere nulla);
- l'integrale di ω lungo una curva regolare a tratti contenuta in Ω, congiungente due punti ordinatamente assegnati P_1 e P_2 di Ω, deve dipendere solo dai punti P_1 e P_2 e non dalla curva che li congiunge.

Se i coefficienti della forma differenziale ω sono di classe C^1, si può introdurre la nozione di *forma differenziale chiusa*, ovvero una forma differenziale tale che

$$\frac{\partial A}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial B}{\partial x}(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \Omega .$$

Con terminologia fisica, una forma differenziale chiusa coincide con un *campo irrotazionale*.

Ricordiamo che una forma differenziale esatta di classe C^1 è sempre chiusa, ovvero un campo conservativo di classe C^1 è sempre irrotazionale, ma non vale il viceversa, come si può ricavare dal ben noto esempio

$$\omega(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}\, dx - \frac{x}{x^2+y^2}\, dy ,$$

che è fornito dalla Legge di Biot e Savart, per il campo magnetico generato da un filo rettilineo infinito.

In realtà, per certe particolari geometrie dell'insieme di definizione Ω, la condizione di chiusura diventa una condizione sufficiente per l'esattezza. Gli insiemi più generali su cui ciò avviene sono gli insiemi *semplicemente connessi* o *linearmente semplicemente connessi*. Essi sono caratterizzati dal fatto che ogni curva chiusa regolare a tratti in essi contenuta è frontiera di un dominio tutto contenuto nell'insieme stesso. Ad esempio, $\mathbb{R}^2$ è un insieme semplicemente connesso, così come tutti i rettangoli o, più in generale, gli insiemi stellati, mentre $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x_0,y_0)\}$ ha una lacuna e quindi <u>non</u> è semplicemente connesso.

Come abbiamo detto, le forme differenziali chiuse non sono, in generale, esatte, quindi non vale per esse la condizione che la circuitazione lungo ogni curva chiusa è nulla. Si ha però un risultato più debole, che afferma che l'integrale di una forma differenziale chiusa è costante lungo curve chiuse fra loro omotope[(1)] cioè, detto in termini più semplici, lungo tutte le curve chiuse del piano che "girino attorno" alle stesse lacune, nello stesso verso, lo stesso numero di volte. Questo risultato può essere utilizzato con profitto, quando si è in presenza di forme chiuse su insiemi non semplicemente connessi, per dimostrarne l'esattezza. In tal caso, infatti, supponendo che la semplice connessione venga a mancare a causa della presenza di una lacuna, si può andare a calcolare l'integrale di ω lungo una qualunque curva chiusa regolare a tratti, che giri una volta intorno alla lacuna. Se questa circuitazione fornisce un valore diverso da zero, la forma ovviamente non è esatta; se invece l'integrale è nullo, esso risulterà nullo anche su tutte le altre curve regolari

(1) Due curve chiuse γ_1 e γ_2, parametrizzate, rispettivamente, da $\phi_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ e $\phi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, sono dette *omotope* se esiste una funzione continua $\Phi : [a,b] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$ tale che $\Phi(t,0) = \phi_1(t)$ e $\Phi(t,1) = \phi_2(t)$ per ogni $t \in [a,b]$.

a tratti che girano una volta intorno alla stessa lacuna; pertanto, essendo inevitabilmente nulla la circuitazione lungo tutte le curve chiuse che non girano intorno alla lacuna, la forma differenziale risulterà essere esatta, grazie ad una delle condizioni equivalenti sopra ricordate.

Un'altra utile applicazione di questo risultato è la possibilità di sostituire ad una curva assegnata un'altra curva ad essa omotopa, nel calcolo dell'integrale di linea di una forma chiusa, ma non esatta, al fine di rendere più semplici i calcoli.

Ricordiamo, infine, che una forma differenziale si dice *positivamente omogenea di grado* α se $\omega(tx,ty) = t^\alpha \omega(x,y)$, per ogni $t > 0$ e per ogni $(x,y) \in \Omega$. Il Teorema di Eulero garantisce che ogni forma differenziale omogenea di grado $\alpha \neq -1$, chiusa in un aperto Ω, è anche esatta in tale aperto e che una sua primitiva F è data dalla formula

$$F(x,y) = \frac{1}{\alpha+1}[xA(x,y) + yB(x,y)] .$$

Concludiamo questi brevi richiami, ricordando che la teoria delle forme differenziali può essere generalizzata, senza eccessiva difficoltà, in $\mathbb{R}^N$ ed, in particolare, in $\mathbb{R}^3$ (spazio naturale per le applicazioni fisiche). In questo testo ci limiteremo, però, allo studio delle forme differenziali in $\mathbb{R}^2$.

- Esercizi

ESERCIZIO 8.46. Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale

$$\omega(x,y) = (y^3 + x)\, dx - \sqrt{x}\, dy$$

lungo la parabola γ di equazione $x = y^2$ che congiunge l'origine con il punto $(1,1)$.

Svolgimento : *Poiché la parabola γ si può parametrizzare nella forma $x(t) = t^2$, $y(t) = t$, $t \in [0,1]$, avremo*

$$\int_\gamma \omega(x,y) = \int_0^1 \{[y^3(t) + x(t)]\, x'(t) - \sqrt{x(t)}\, y'(t)\}\, dt$$
$$= \int_0^1 (2t^4 + 2t^3 - t)\, dt = \left(\frac{2}{5}t^5 + \frac{1}{2}t^4 - \frac{1}{2}t^2\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{5} .$$

ESERCIZIO 8.47. Calcolare

$$\int_\gamma y^2\, dx + (2xy+1)\, dy ,$$

dove γ è la curva di equazione $y = \sqrt{|x-1|}$, con $x \in [0,2]$.

Svolgimento : *La forma differenziale proposta è definita in tutto $\mathbb{R}^2$ e chiusa; infatti,*

$$\frac{\partial A}{\partial y}(x,y) = 2y = \frac{\partial B}{\partial x}(x,y) .$$

Pertanto, poiché $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso, la forma differenziale proposta è anche esatta. In base ad una delle condizioni equivalenti di esattezza richiamate all'inizio del paragrafo, l'integrale curvilineo assume lo stesso valore lungo una qualsiasi curva regolare a tratti congiungente il medesimo punto iniziale e finale; pertanto, tenendo conto che la curva γ congiunge il punto $(0,1)$ con il punto $(2,1)$, l'integrale proposto può essere calcolato, in modo più semplice, integrando la forma differenziale lungo il segmento $x(t) = t \in [0,2]$, $y(t) \equiv 1$, da cui $x'(t) = 1$ e $y'(t) = 0$. In tal caso si ha

$$\int_\gamma y^2\, dx + (2xy+1)\, dy = \int_0^2 dt = 2 .$$

ESERCIZIO 8.48. Verificare che la forma differenziale

$$\left(\sin\frac{x}{y}+\frac{x}{y}\cos\frac{x}{y}\right)\,dx+\left(-\frac{x^2}{y^2}\cos\frac{x}{y}+3\right)\,dy$$

è esatta in ciascuno dei due semipiani aperti $y \neq 0$ e determinare la primitiva F tale che $F(\pi,1)=3$.

Svolgimento : *La forma differenziale proposta è chiusa; infatti*

$$\frac{\partial A}{\partial y}(x,y)=-\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}+x\left[-\frac{1}{y^2}\cos\frac{x}{y}+\frac{x}{y^3}\sin\frac{x}{y}\right]=-\frac{2x}{y^2}\cos\frac{x}{y}+\frac{x^2}{y^3}\sin\frac{x}{y}=\frac{\partial B}{\partial x}(x,y)\,.$$

Inoltre, ciascuno dei due semipiani aperti $y>0$ e $y<0$ è un insieme semplicemente connesso, pertanto la forma proposta è esatta sia per $y>0$ che per $y<0$. Determiniamo in ognuno dei semipiani l'insieme delle primitive, integrando rispetto ad y la seconda componente:

$$F(x,y)=\int\left(-\frac{x^2}{y^2}\cos\frac{x}{y}+3\right)\,dy=x\sin\frac{x}{y}+3y+\phi(x)\,.$$

Determiniamo ora ϕ derivando rispetto ad x ed utilizzando la condizione

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=A(x,y)\qquad\Longleftrightarrow\qquad\sin\frac{x}{y}+\frac{x}{y}\cos\frac{x}{y}+\phi'(x)=\sin\frac{x}{y}+\frac{x}{y}\cos\frac{x}{y}$$

che implica $\phi'(x)=0$, cioè $\phi(x)=C$. Pertanto, in entrambi i semipiani le primitive sono date da

$$F(x,y)=x\sin\frac{x}{y}+3y+C\,.$$

Poiché il punto $(\pi,1)$ appartiene al semipiano $y>0$, cerchiamo la primitiva richiesta in tale semipiano, imponendo la condizione $F(\pi,1)=3$, ovvero

$$\pi\sin\pi+3+C=3\qquad\Longleftrightarrow\qquad C=0\,.$$

La primitiva cercata è, quindi, $F(x,y)=x\sin\frac{x}{y}+3y$.

ESERCIZIO 8.49. Determinare gli insiemi di definizione e di esattezza delle forma differenziale

$$\omega(x,y)=-\frac{6xy}{(3x^2+y^2)^2}\,dx+\frac{3x^2-y^2}{(3x^2+y^2)^2}\,dy\,.$$

Svolgimento : *La forma differenziale proposta è chiusa; infatti,*

$$\frac{\partial A}{\partial y}(x,y)=\frac{18x(y^2-x^2)}{(3x^2+y^2)^3}=\frac{\partial B}{\partial x}(x,y)\,.$$

D'altra parte, essa è definita in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, che non è un insieme semplicemente connesso, quindi non possiamo concludere che sia esatta. Per stabilirne l'esattezza, calcoliamo l'integrale di ω lungo l'ellisse γ di equazione $3x^2+y^2=1$, che gira attorno alla lacuna in senso antiorario. In forma parametrica, si ha

$$\gamma\ :\ \begin{cases}x(\vartheta)=\dfrac{1}{\sqrt3}\cos\vartheta\\ y(\vartheta)=\sin\vartheta\end{cases}\qquad\vartheta\in[0,2\pi]\,.$$

Pertanto,

$$\begin{aligned}\int_\gamma\omega(x,y)&=\int_0^{2\pi}\left[-\frac{6}{\sqrt3}\cos\vartheta\sin\vartheta\left(-\frac{1}{\sqrt3}\sin\vartheta\right)+(\cos^2\vartheta-\sin^2\vartheta)\cos\vartheta\right]\,d\vartheta\\&=\int_0^{2\pi}\left(2\cos\vartheta\sin^2\vartheta+\cos^3\vartheta-\sin^2\vartheta\cos\vartheta\right)\,d\vartheta\\&=\int_0^{2\pi}\cos\vartheta(\sin^2\vartheta+\cos^2\vartheta)\,d\vartheta=\sin\vartheta\Big|_0^{2\pi}=0\,.\end{aligned}$$

La forma differenziale proposta è, dunque, esatta nel suo insieme di definizione.

Determiniamo le sue primitive. Si osservi che, integrando $B(x,y)$ rispetto ad y, i calcoli sono piuttosto complicati; proponiamo quindi di integrare $A(x,y)$ rispetto ad x. Otteniamo così

$$F(x,y)=\int A(x,y)\,dx=-y\int\frac{6x}{(3x^2+y^2)^2}\,dx=-y\left(-\frac{1}{3x^2+y^2}\right)+\phi(y)=\frac{y}{3x^2+y^2}+\phi(y)\,.$$

Derivando, ora, F rispetto ad y ed utilizzando la condizione

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=B(x,y)\qquad\Longleftrightarrow\qquad\left[\frac{3x^2+y^2-2y^2}{(3x^2+y^2)^2}\right]+\phi'(y)=\frac{3x^2-y^2}{(3x^2+y^2)^2}\,,$$

otteniamo $\phi'(y)=0$, ovvero $\phi(y)=C$. Le primitive saranno, quindi, date da

$$F(x,y)=\frac{y}{3x^2+y^2}+C\,.$$

Alternativamente, una volta verificato che la forma è chiusa, osserviamo che essa è anche positivamente omogenea di grado $\alpha=-2$; infatti,

$$A(tx,ty)=-6\left[\frac{txty}{(3t^2x^2+t^2y^2)^2}\right]=-\frac{6t^2}{t^4}\left[\frac{xy}{(3x^2+y^2)^2}\right]=\frac{1}{t^2}A(x,y)\,,$$

$$B(tx,ty)=\frac{3t^2x^2-t^2y^2}{(3t^2x^2+t^2y^2)^2}=-\frac{t^2}{t^4}\left[\frac{3x^2-y^2}{(3x^2+y^2)^2}\right]=\frac{1}{t^2}B(x,y)\,.$$

Pertanto, dal Teorema di Eulero, la forma differenziale proposta è esatta nel suo insieme di definizione e l'insieme delle primitive è dato da

$$F(x,y)=-\left[-\frac{6x^2y}{(3x^2+y^2)^2}+\frac{3x^2y-y^3}{(3x^2+y^2)^2}\right]+C=\frac{y^3+3x^2y}{(3x^2+y^2)^2}+C=\frac{y}{(3x^2+y^2)^2}+C\,.$$

ESERCIZIO 8.50. Determinare gli insiemi di definizione e di esattezza della forma differenziale

$$\omega(x,y)=\left(\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)\,dx-\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}\,dy\,.$$

Calcolare, inoltre, la primitiva F di ω, che soddisfa la condizione $F(1,\pi/4)=0$.

Svolgimento : *La forma differenziale proposta è definita per $x \neq 0$, cioè in due semipiani aperti disgiunti, in ognuno dei quali è esatta, in quanto chiusa; infatti,*

$$\frac{\partial A}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x^2}\left[\cos\frac{y}{x} - \frac{y}{x}\sin\frac{y}{x}\right] = \frac{\partial B}{\partial x}(x,y) .$$

Per determinare la primitiva richiesta, integriamo la forma differenziale lungo una spezzata γ, congiungente il punto $(1,\pi/4)$, che appartiene al semipiano destro, cioè all'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$, con un generico punto (x,y) del medesimo semipiano. La spezzata γ sarà costituita dai due segmenti

$$\gamma_1 : \begin{cases} t \in [1,x] \\ y = \pi/4 \end{cases} \qquad \gamma_2 : \begin{cases} t \in [\pi/4, y] \\ x = costante \end{cases} .$$

Otteniamo così:

$$F(x,y) = \int_1^x \frac{\pi}{4t^2}\cos\frac{\pi}{4t}\,dt - \frac{1}{x}\int_{\pi/4}^y \cos\frac{t}{x}\,dt = -\left(\sin\frac{\pi}{4t}\right)\Big|_1^x - \left(\sin\frac{t}{x}\right)\Big|_{\pi/4}^y$$

$$= -\sin\frac{\pi}{4x} + \sin\frac{\pi}{4} - \sin\frac{y}{x} + \sin\frac{\pi}{4x} = -\sin\frac{y}{x} + \sin\frac{\pi}{4} .$$

Ovviamente, per come è stata calcolata (cioè proprio a partire dal punto $(1,\pi/4)$), la primitiva trovata soddisfa la condizione richiesta, ovvero $F(1,\pi/4) = 0$.

ESERCIZIO 8.51. Stabilire se la forma differenziale

$$\omega(x,y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}e^y\,dx + \frac{x(x^2+y^2-2y)}{(x^2+y^2)^2}e^y\,dy$$

è esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Calcolare, inoltre, $\int_\gamma \omega(x,y)$, dove

$$\gamma : \{y = \cos x,\ -\pi/2 \le x \le \pi/2\} \cup \{y = x^2 - \pi^2/4,\ -\pi/2 \le x \le \pi/2\}$$

percorsa una volta in senso antiorario.

Svolgimento : *Innanzitutto osserviamo che*

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}e^y\right) = \frac{y^4 - x^4 - 2y^3 + 6x^2y}{(x^2+y^2)^3}e^y = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x(x^2+y^2-2y)}{(x^2+y^2)^2}e^y\right)$$

quindi la forma differenziale proposta è chiusa. Poiché, però, essa è definita in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, che non è un aperto semplicemente connesso, non siamo ancora in grado di affermare che essa sia esatta. Proviamo, pertanto, a calcolare l'integrale di ω lungo una curva chiusa e regolare di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ che giri una volta intorno all'origine, ad esempio la circonferenza unitaria $\partial B_1 = (\cos t, \sin t)$, con $t \in [0,2\pi]$. Otteniamo

$$\int_{\partial B_1}\omega(x,y) = \int_0^{2\pi}\{(\sin^2 t - \cos^2 t)e^{\sin t}(-\sin t) + (\cos^3 t + \cos t\sin^2 t - 2\cos t\sin t)e^{\sin t}\cos t\}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi}(-\sin t + \cos^2 t)e^{\sin t}\,dt = -\int_0^{2\pi}\sin t\ e^{\sin t}\,dt + \cos t\ e^{\sin t}\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\sin t\ e^{\sin t}\,dt = 0$$

dove $\int \cos^2 t\ e^{\sin t}\,dt$ è stato calcolato per parti, prendendo $u(t) = \cos t$ e $v'(t) = \cos t\ e^{\sin t}$. Da ciò l'esattezza della forma differenziale proposta. Infine, osservando che la curva γ assegnata è una curva regolare a tratti e chiusa di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ed ω è esatta, si ricava che $\int_\gamma \omega(x,y) = 0$.

ESERCIZIO 8.52. Data la forma differenziale

$$\omega(x,y) = -\frac{y^2x}{2(x^2+y^2)^{5/4}}\,dx + \frac{4x^2y + 3y^3}{2(x^2+y^2)^{5/4}}\,dy$$

stabilire se essa è esatta in $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ed in caso affermativo calcolare il potenziale che vale 0 nel punto $(1,0)$.

Svolgimento : *Innanzitutto osserviamo che ω risulta chiusa in Ω, in quanto*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y}\left(-\dfrac{y^2x}{2(x^2+y^2)^{5/4}}\right) = \dfrac{-2xy(x^2+y^2)^{5/4} + (5/4)y^2x(x^2+y^2)^{1/4}2y}{2(x^2+y^2)^{5/2}} = \dfrac{xy\left(\frac14 y^2 - x^2\right)}{(x^2+y^2)^{9/4}} ; \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{4x^2y+3y^3}{2(x^2+y^2)^{5/4}}\right) = \dfrac{8xy(x^2+y^2)^{5/4} - (5/4)(4x^2y+3y^3)(x^2+y^2)^{1/4}2x}{2(x^2+y^2)^{5/2}} = \dfrac{xy\left(\frac14 y^2 - x^2\right)}{(x^2+y^2)^{9/4}} . \end{cases}$$

Poiché, però, essa è definita in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, che non è un aperto semplicemente connesso, non siamo ancora in grado di affermare che essa sia esatta. Proviamo, pertanto, a calcolare l'integrale di ω lungo una curva chiusa e regolare di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ che giri una volta intorno all'origine, ad esempio la circonferenza unitaria $\partial B_1 = (\cos t, \sin t)$, con $t \in [0,2\pi]$. Otteniamo

$$\int_{\partial B_1}\omega(x,y) = \int_0^{2\pi}\left[\frac{\sin^3\vartheta\cos\vartheta}{2} + \frac{4\cos^3\vartheta\sin\vartheta + 3\cos\vartheta\sin^3\vartheta}{2}\right]d\vartheta$$

$$= \frac12\left[\frac{\sin^4\vartheta}{4} - \cos^4\vartheta + \frac{3\sin^4\vartheta}{4}\right]\Big|_0^{2\pi} = 0 .$$

Questo ci permette di affermare che la forma differenziale è, in realtà, esatta sull'insieme Ω e quindi essa ammette potenziale. Per calcolarlo, è sufficiente integrare la nostra forma differenziale lungo una arbitraria curva di Ω, che sia regolare a tratti e congiunga il punto fissato $(1,0)$ con un arbitrario punto (x,y). Prendendo, ad esempio, la spezzata data da $\gamma_1 \cup \gamma_2$, dove $\gamma_1 : (x(t) = t, y(t) = 0)$ con $t \in [1,x]$ e $\gamma_2 : (x = x, y(t) = t)$ con $t \in [0,y]$, ed utilizzando la formula per il calcolo dell'integrale di linea di seconda specie, si ottiene

$$F(x,y) = \int_1^x 0\,dt + \int_0^y \frac{4x^2t + 3t^3}{2(x^2+t^2)^{5/4}}\,dt = 2x^2\int_0^y \frac{t}{(x^2+t^2)^{5/4}}\,dt + \frac32\int_0^y \frac{t^3}{(x^2+t^2)^{5/4}}\,dt$$

$$= 2x^2\int_0^y \frac{t}{(x^2+t^2)^{5/4}}\,dt + \frac32\int_0^y \frac{t(t^2+x^2-x^2)}{(x^2+t^2)^{5/4}}\,dt$$

$$= 2x^2\int_0^y \frac{t}{(x^2+t^2)^{5/4}}\,dt + \frac32\int_0^y \frac{t}{(x^2+t^2)^{1/4}}\,dt - \frac32 x^2\int_0^y \frac{t}{(x^2+t^2)^{5/4}}\,dt$$

$$= \frac12 x^2\int_0^y \frac{t}{(x^2+t^2)^{5/4}}\,dt + \frac32\int_0^y \frac{t}{(x^2+t^2)^{1/4}}\,dt = -\frac{x^2}{(x^2+t^2)^{1/4}}\Big|_0^y + (x^2+t^2)^{3/4}\Big|_0^y$$

$$= -\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{1/4}} + x^{3/2} + (x^2+y^2)^{3/4} - x^{3/2} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{1/4}} .$$

Alternativamente, dopo aver verificato che la forma differenziale proposta è chiusa, si può osservare che essa è anche positivamente omogenea di grado $\alpha = 1/2$; infatti,

$$A(tx,ty) = -\left[\frac{t^2y^2tx}{2(t^2x^2+t^2y^2)^{5/4}}\right] = -\frac{t^3}{t^{5/2}}\left[\frac{y^2x}{2(x^2+y^2)^{5/4}}\right] = t^{1/2}A(x,y)\ ,$$
$$B(tx,ty) = \frac{4t^2x^2ty+3t^3y^3}{2(t^2x^2+t^2y^2)^{5/4}} = \frac{t^3}{t^{5/2}}\left[\frac{4x^2y+3y^3}{2(x^2+y^2)^{5/4}}\right] = t^{1/2}B(x,y)\ .$$

Pertanto, per il Teorema di Eulero, la forma proposta è esatta nel suo insieme di definizione e le sue primitive sono date da

$$F(x,y) = \frac{2}{3}\left[-\frac{x^2y^2}{2(x^2+y^2)^{5/4}} + \frac{4x^2y^2+3y^4}{2(x^2+y^2)^{5/4}}\right] + C = \frac{1}{3}\left[\frac{3x^2y^2+3y^4}{(x^2+y^2)^{5/4}}\right] + C = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{1/4}} + C\ .$$

ESERCIZIO 8.53. Determinare un aperto in cui la forma differenziale

$$\omega(x,y) = \log y \cos x\, dx + \frac{\sin x}{y}\, dy$$

risulti esatta. Calcolare la primitiva $F(x,y)$ che soddisfa la condizione $F\left(\frac{\pi}{12},1\right) = 0$.

ESERCIZIO 8.54. Calcolare il lavoro compiuto dal campo vettoriale

$$\vec{V}(x,y) = \left(\log(x+y) + \frac{x}{x+y}\quad ;\quad \frac{x}{x+y}\right)$$

per spostare un corpo di massa unitaria lungo la circonferenza

$$x^2 - 4x + y^2 + 3 = 0$$

a partire dal punto $P \equiv (1\ ,\ 0)$ e facendogli compiere un giro completo in senso antiorario.

Svolgimento : *Il lavoro compiuto da $\vec{V}$ coincide con l'integrale curvilineo della forma*

$$\omega(x,y) = \left[\log(x+y) + \frac{x}{x+y}\right]\, dx + \frac{x}{x+y}\, dy$$

lungo la circonferenza assegnata, di centro $(2,0)$ e raggio 1. La forma è definita in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > -x\}$, che è, ovviamente, semplicemente connesso e dove giace la circonferenza assegnata. Poiché

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\log(x+y) + \frac{x}{x+y}\right] = \frac{y}{(x+y)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x+y}\right)\ ,$$

la forma è chiusa e, conseguentemente, esatta in $\{y > -x\}$. Dunque l'integrale proposto (cioè il lavoro compiuto dal campo vettoriale $\vec{V}$) è nullo.

ESERCIZIO 8.55. Verificare che valgono le condizioni necessarie e le condizioni sufficienti affinché il campo vettoriale

$$\vec{V}(x,y) = \left(2x^3y + 3x^2y^2\ ,\ \frac{x^4}{2} + 2x^3y + 1\right)$$

sia conservativo. Calcolarne, poi, un potenziale.

ESERCIZIO 8.56. Verificare che valgono le condizioni necessarie e le condizioni sufficienti affinché il campo vettoriale

$$\vec{V}(x,y) = \left(\frac{3}{2}x^2y - 2xy^2\ ,\ \frac{x^3}{2} - 2x^2y - 1\right)$$

sia conservativo. Calcolarne, poi, un potenziale.

ESERCIZIO 8.57. Data

$$\omega(x,y) = -\frac{2y}{x^2+2y^2}\, dx + \frac{2x}{x^2+2y^2}\, dy\ ,$$

calcolare

$$\int_{\partial T^+} \omega(x,y)\ ,$$

dove $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ 1 \le x^2 + 2y^2 \le 4\}$.

Svolgimento : *Osserviamo, innanzitutto, che la forma differenziale proposta è chiusa; infatti,*

$$\frac{\partial A}{\partial y}(x,y) = \frac{4y^2 - 2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial B}{\partial x}(x,y)\ .$$

D'altra parte, poiché essa è definita in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, che non è un insieme semplicemente connesso, non possiamo concludere che essa sia esatta. Osserviamo, inoltre, che l'insieme ∂T^+ è costituito dalle due ellissi $\gamma_1 = \{x^2+2y^2 = 1\}$ e $\gamma_2 = \{x^2+2y^2 = 4\}$, dove la prima è percorsa in senso orario e la seconda in senso antiorario. Poiché le due curve che compongono T^+ girano proprio attorno alla lacuna, l'integrale di ω lungo ciascuna delle due curve potrebbe non essere nullo. Procediamo, quindi, nel calcolo. È usuale parametrizzare le ellissi nel modo seguente:

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t \end{cases} \quad t \in [0,2\pi] \quad e \quad \begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = \sqrt{2}\sin t \end{cases} \quad t \in [0,2\pi]\ .$$

Utilizzando la formula (8.1), si ottiene

$$\begin{aligned}\int_{\partial T^+} \omega(x,y) = &-\int_0^{2\pi}\left[-\frac{2(1/\sqrt{2})\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}(-\sin t) + \frac{2\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t}((1/\sqrt{2})\cos t)\right]\, dt \\ &+ \int_0^{2\pi}\left[-\frac{2\sqrt{2}\sin t}{4\cos^2 t + 4\sin^2 t}(-2\sin t) + \frac{4\cos t}{4\cos^2 t + 4\sin^2 t}(\sqrt{2}\cos t)\right]\, dt \\ = &-\int_0^{2\pi}\left[\sqrt{2}\sin^2 t + \sqrt{2}\cos^2 t\right]\, dt + \int_0^{2\pi}\left[\sqrt{2}\sin^2 t + \sqrt{2}\cos^2 t\right]\, dt = 0\ .\end{aligned}$$

Osserviamo che si poteva giungere al medesimo risultato, tenendo presente che la forma differenziale proposta è chiusa e che le due ellissi sono omotope fra loro (e quindi la forma differenziale ha, in valore assoluto, lo stesso integrale di linea in entrambi i casi), ma, nell'integrazione, le due curve vanno percorse l'una in senso opposto all'altra.

ESERCIZIO 8.58. Determinare l'insieme di definizione e quello di esattezza della forma differenziale

$$\omega(x,y) = \left[\log(1+x^2) + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]\, dx + \left[\log(1+y^2) + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]\, dy\ .$$

Determinare, nell'insieme di esattezza, una primitiva F.

Svolgimento : *Ovviamente, l'insieme di definizione di ω è $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; inoltre, possiamo riscrivere $\omega = \omega_1 + \omega_2$ dove*

$$\omega_1(x,y) = \log(1+x^2)\ dx + \log(1+y^2)\ dy \qquad e \qquad \omega_2(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\ dy\ .$$

La forma differenziale ω_1 è banalmente definita e chiusa su tutto $\mathbb{R}^2$, che è un insieme semplicemente connesso, quindi essa è esatta. Per quanto riguarda, invece, ω_2, si ha

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

cioè anch'essa è chiusa. Inoltre, calcolando l'integrale di ω_2 lungo la circonferenza unitaria, centrata nell'origine, otteniamo

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_1} \omega_1(x,y) &= \int_0^{2\pi}\left[\frac{\cos t}{\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}}(-\sin t) + \frac{\sin t}{\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}}(\cos t)\right] dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin t\cos t + \sin t\cos t)\ dt = 0\ ,\end{aligned}$$

da cui segue che anche ω_2 è esatta. Pertanto, ω è esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Per determinare un potenziale F, procediamo come di seguito, utilizzando l'integrazione per parti:

$$\begin{aligned}F(x,y) &= \int\left[\log(1+x^2) + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right] dx + G(y) \\ &= x\log(1+x^2) - 2x + 2\arctan x + \sqrt{x^2+y^2} + G(y)\ .\end{aligned}$$

Inoltre si deve avere $F_y(x,y) = B(x,y)$, cioè

$$\log(1+y^2) + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + G'(y)$$

$$\textit{da cui} \qquad G(y) = \int \log(1+y^2)\ dy = y\log(1+y^2) - 2y + 2\arctan y + C\ ,$$

(dopo aver utilizzato nuovamente il metodo di integrazione per parti). Concludendo, si ha

$$F(x,y) = x\log(1+x^2) - 2x + 2\arctan x + \sqrt{x^2+y^2} + y\log(1+y^2) - 2y + 2\arctan y + C\ .$$

ESERCIZIO 8.59. Determinare l'insieme di definizione e quello di esattezza della forma differenziale

$$\omega(x,y) = \left[\arctan x + x(\sqrt{x^2+y^2})^{-3}\right]\ dx + \left[\arctan y + y(\sqrt{x^2+y^2})^{-3}\right]\ dy\ .$$

Determinare, nell'insieme di esattezza, una primitiva F.

ESERCIZIO 8.60. Determinare l'insieme di definizione e quello di esattezza della forma differenziale

$$\omega(x,y) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+4y^2}}\ dx + \frac{8y}{\sqrt{x^2+4y^2}}\ dy\ .$$

Determinare, nell'insieme di esattezza, una primitiva F.

ESERCIZIO 8.61. Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale

$$\omega(x,y) = \sqrt{y}\ dx + (x^3+y)\ dy$$

lungo la parabola $y = x^2$ che congiunge l'origine con il punto $(1,1)$.

ESERCIZIO 8.62. Calcolare

$$\int_\gamma (y+2)\ dx + x\ dy$$

dove γ è la curva di equazione $y = \log(1+|x-1|)$, con $x \in [0,2]$.

ESERCIZIO 8.63. Determinare gli insiemi di definizione e di esattezza della seguente forma differenziale

$$\omega(x,y) = e^{x^2/y^2}\left[\frac{2x}{y}\ dx + \left(1 - 2\frac{x^2}{y^2}\right)\ dy\right]\ .$$

Calcolarne, inoltre, le primitive F.

ESERCIZIO 8.64. Determinare l'insieme di definizione della forma differenziale

$$\omega(x,y) = \frac{2}{\sqrt[4]{(2x+3y)^3}}\ dx + \frac{3}{\sqrt[4]{(2x+3y)^3}}\ dy\ .$$

Determinare l'insieme di esattezza di ω e calcolarne la primitiva F che, nel punto $(8,0)$, assume il valore 4.

ESERCIZIO 8.65. Determinare l'insieme di definizione ed un aperto connesso in cui la forma differenziale

$$\omega(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2y}}\ dx + \frac{1}{\sqrt{x^2+2y}}\ dy$$

sia esatta e calcolarne tutte le primitive.

Risposte agli esercizi non svolti: **8.53**: l'insieme di definizione e di esattezza è $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$; $F(x,y) = \log y \sin x$ - **8.55**: il potenziale cercato è $F(x,y) = \frac{x^4}{2}y + x^3y^2 + y + C$ - **8.56**: il potenziale cercato è $F(x,y) = \frac{1}{2}x^3y - x^2y^2 - y + C$ - **8.59**: l'insieme di definizione e di esattezza è $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; $F(x,y) = x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + y\arctan y - \frac{1}{2}\log(1+y^2) - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + C$ - **8.60**: l'insieme di definizione e di esattezza è $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; $F(x,y) = 2\sqrt{x^2+4y^2} + C$ - **8.61**: 7/5 - **8.62**: $2(\log 2 + 2)$ - **8.63**: gli insiemi di definizione e di esattezza sono $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ e $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0\}$; $F(x,y) = ye^{x^2/y^2} + C$ - **8.64**: l'insieme di definizione e di esattezza è $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > -2x/3\}$, $F(x,y) = 4\sqrt[4]{2x+3y} - 4$ - **8.65**: l'insieme di definizione e di esattezza è $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > -x^2/2\}$, $F(x,y) = \sqrt{x^2+2y} + C$.

CAPITOLO 9

SUCCESSIONI E SERIE DI FUNZIONI

9.1. Successioni e serie di funzioni

• Richiami: ricordiamo che, data una successione di funzioni $f_n : I \to \mathbb{R}$, dove I è un intervallo della retta reale, si dice che essa *converge puntualmente* in I ad un funzione $f : I \to \mathbb{R}$ se, per ogni $x \in I$, la successione numerica $\{f_n(x)\}$ risulta convergere al valore $f(x)$. Analogamente, si dice che la serie di funzioni $\sum f_n$ *converge puntualmente* in I alla funzione $S : I \to \mathbb{R}$, se, per ogni $x \in I$, la serie numerica $\sum f_n(x)$ risulta convergere al valore $S(x)$. Si dice che la serie *converge assolutamente* in I, se converge assolutamente la serie numerica $\sum |f_n(x)|$, per ogni $x \in I$. Infine, si dice che la serie *converge totalmente* in I se converge la serie numerica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x)| \ .$$

Ricordiamo che, se esiste una successione $\{c_n\}$ tale che, definitivamente, $|f_n(x)| \leq c_n$, per ogni $x \in I$, e $\sum c_n$ è convergente, allora la serie converge totalmente in I. Inoltre, se f_n è una funzione continua in I, per ogni $n \in \mathbb{N}$, e la serie $\sum f_n$ converge totalmente in I, allora anche la funzione S, somma della serie, sarà una funzione continua in I e, se $I = [a,b]$, si ha

$$\int_a^b S(x)\ dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\ dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\ dx \ ,$$

cioè vale il Teorema di Integrazione per Serie.

Se, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha $f_n \in C^1(I)$ ed entrambe le serie $\sum f_n$ e $\sum f_n'$ convergono totalmente[1] in I, allora anche la funzione somma $S \in C^1(I)$ e si ha

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x) \ ,$$

cioè vale il Teorema di Derivazione per Serie.

• Esercizi

ESERCIZIO 9.1. Studiare la convergenza puntuale della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{nx+1}$$

nell'intervallo $[0, +\infty)$.

[1] In realtà, si può dimostrare che è sufficiente richiedere la convergenza di $\sum f_n$ in un punto di I e la convergenza totale di $\sum f_n'$ in I. Per comodità di scrittura e di esposizione, però, molti testi preferiscono l'enunciato sopra riportato.

Svolgimento : *Osserviamo che per $x = 0$ la successione è identicamente nulla e quindi converge a 0; se invece $x > 0$, si ha*

$$0 < f_n(x) < xe^{-nx} \longrightarrow 0 \qquad per\ \ n \to +\infty,$$

quindi la successione proposta converge puntualmente alla funzione identicamente nulla per tutti gli $x \in [0, +\infty)$.

ESERCIZIO 9.2. Studiare la convergenza puntuale della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2x^2+1}$$

e determinarne il limite $f(x)$.

ESERCIZIO 9.3. Studiare la convergenza puntuale della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{1}{1+n^x}.$$

Svolgimento : *Osserviamo che*

$$n^x \to \begin{cases} 0 & se\ x < 0\ ; \\ 1 & se\ x = 0\ ; \\ +\infty & se\ x > 0\ . \end{cases}$$

Pertanto

$$f_n(x) \to \begin{cases} 1 & se\ x < 0\ ; \\ 1/2 & se\ x = 0\ ; \\ 0 & se\ x > 0\ . \end{cases}$$

ESERCIZIO 9.4. Stabilire se c'è convergenza totale in $\mathbb{R}$ della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2kx)}{k^2+1}$$

e della serie delle sue derivate.

Svolgimento : *La serie converge totalmente in $\mathbb{R}$, poiché*

$$\sup_{\mathbb{R}} \left| \frac{\sin(2kx)}{k^2+1} \right| = \frac{1}{k^2+1} < \frac{1}{k^2}$$

e la $\sum \frac{1}{k^2}$ converge, in quanto si tratta di una serie armonica generalizzata di potenza $2 > 1$. Al contrario, la serie delle derivate

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k\cos(2kx)}{k^2+1}$$

non converge totalmente in $\mathbb{R}$, in quanto

$$\sup_{\mathbb{R}} \left| \frac{2k\cos(2kx)}{k^2+1} \right| = \frac{2k}{k^2+1} \sim \frac{2}{k}$$

e la $\sum \frac{1}{k}$ diverge, in quanto si tratta della serie armonica.

ESERCIZIO 9.5. Stabilire se c'è convergenza totale in $\mathbb{R}$ della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\cos(3kx)}{k^2+2}$$

e della serie delle sue derivate.

ESERCIZIO 9.6. Studiare la convergenza puntuale ed assoluta della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)\, x \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n.$$

Stabilire se la serie converge totalmente nell'intervallo $[1, 2]$ e calcolare

$$\int_1^2 \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)\, x \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n.$$

Svolgimento : *Innanzitutto, osserviamo che, per $x = 0$, la serie proposta converge, poiché coincide con la serie identicamente nulla. Per $x \neq 0$, possiamo riscrivere la serie nella forma*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)\, x \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n = x \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n.$$

La serie è a termini positivi. Applichiamo il Criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} = \frac{n}{n-1} \left(\frac{1}{1+x^2}\right) \to \left(\frac{1}{1+x^2}\right) < 1 \quad \forall x \neq 0\,.$$

La serie proposta converge puntualmente ed assolutamente per $x \neq 0$ e, unitamente a quanto trovato per $x = 0$, possiamo affermare che si ha convergenza puntuale ed assoluta per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Poiché in $[1, 2]$ si ha

$$0 \leq (n-1)\, x \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n \leq 2\frac{(n-1)}{2^n}$$

e la serie $\sum \frac{n}{2^n}$ converge, otteniamo che la serie converge totalmente nell'intervallo considerato; possiamo, pertanto, applicare il Teorema di Integrazione per Serie ed otteniamo

$$\begin{aligned}\int_1^2 \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)x\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n &= -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_1^2 2(1-n)x(1+x^2)^{-n} = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{n-1}\Big|_1^2 \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{5^{n-1}} - \frac{1}{2^{n-1}}\right] = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{5^n} - \frac{1}{2^n}\right] \\ &= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-1/5} - \frac{1}{1-1/2}\right] = \frac{1}{2}(2-5/4) = 3/8\,,\end{aligned}$$

dove si è sfruttata la formula per la somma delle serie geometriche.

ESERCIZIO 9.7. Determinare l'insieme di convergenza puntuale e la funzione limite f della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{(\cos x)^n + 2}{2 + x^{2n}}.$$

ESERCIZIO 9.8. Studiare la convergenza puntuale ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n^2}.$$

ESERCIZIO 9.9. Determinare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n\cos^2 x+2}}{(n+1)^\alpha}$$

converge totalmente su $\mathbb{R}$. Verificare che, per tali valori di α, la serie è anche derivabile termine a termine.

Svolgimento : *Poiché*

$$\frac{\sqrt{n\cos^2 x+2}}{(n+1)^\alpha} \geq \frac{\sqrt{2}}{(n+1)^\alpha} \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

per $\alpha \leq 0$, il termine generale non è infinitesimo, e quindi la serie non converge. Per $\alpha > 0$, si ha, invece,

$$\sup_{\mathbb{R}}\frac{\sqrt{n\cos^2 x+2}}{(n+1)^\alpha} = \frac{\sqrt{n+2}}{(n+1)^\alpha} \sim \frac{\sqrt{n}}{n^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha-1/2}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pertanto, la serie proposta converge totalmente se e solo se $\alpha - 1/2 > 1$, ovvero $\alpha > 3/2$, per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente maggiore di 1.

Consideriamo ora la serie delle derivate; si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-2n\cos x\sin x}{2\sqrt{n\cos^2 x+2}\,(n+1)^\alpha} = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\cos x\sin x}{\sqrt{n\cos^2 x+2}\,(n+1)^\alpha}$$

e

$$\sup_{\mathbb{R}}\left|\frac{n\cos x\sin x}{\sqrt{n\cos^2 x+2}\,(n+1)^\alpha}\right| \leq \frac{n|\cos x|}{\sqrt{n\cos^2 x}\,n^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha-1/2}}.$$

Quindi, per $\alpha > 3/2$, anche la serie delle derivate converge totalmente, per confronto con la serie armonica generalizzata di esponente maggiore di 1. Dunque, la serie è derivabile termine a termine.

ESERCIZIO 9.10. Determinare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{x^2}}.$$

Risposte agli esercizi non svolti: **9.2**: l'insieme di convergenza puntuale è $[0,+\infty)$; $f(0) = 1$ e $f(x) = 0$, per $x > 0$ - **9.5**: la serie converge totalmente in $\mathbb{R}$, mentre la serie delle derivate non converge totalmente in $\mathbb{R}$ - **9.7**: l'insieme di convergenza puntuale è $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| > 1, \\ 2/3 & \text{se } x = \pm 1, \\ 3/2 & \text{se } x = 0, \\ 1 & \text{se } |x| < 1. \end{cases}$$

- **9.8**: l'insieme di convergenza puntuale ed assoluta è $\{x < 0\}$ - **9.10**: $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

9.3. Serie di potenze

- Richiami: si chiama *serie di potenze* con centro in x_0 una serie di funzioni della forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n,$$

dove la successione numerica $\{a_n\}$ è detta successione dei coefficienti della serie di potenze. Ovviamente, una serie di potenze converge sempre nel suo centro. Osserviamo, inoltre, che, operando il cambiamento di variabile $y = x - x_0$, ci si può sempre ricondurre ad una serie centrata nell'origine.

Ricordiamo anche che vale il seguente importante risultato relativo alla convergenza puntuale e assoluta ed alla convergenza totale di una serie di potenze. Supponiamo che esista in $[0,+\infty]$ il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = L;$$

allora, detto R il reciproco generalizzato di L, cioè

$$R = \begin{cases} 1/L & \text{se } L \in (0,+\infty); \\ +\infty & \text{se } L = 0; \\ 0 & \text{se } L = +\infty; \end{cases}$$

si ha

$$\begin{cases} \text{per } |x-x_0| < R & \text{la serie di potenze converge puntualmente e assolutamente,} \\ \forall\,\delta > 0 \text{ e per } |x-x_0| \leq R-\delta & \text{la serie converge totalmente,} \\ \text{per } |x-x_0| > R & \text{la serie non converge.} \end{cases}$$

In sostanza, a partire da questo risultato si ha che tutte le informazioni sulla convergenza della serie di potenze sono date dalla determinazione di R, tranne il comportamento per $x = x_0 \pm R$, che va studiato separatamente.

Gli stessi risultati si possono ottenere se i termini a_n sono definitivamente non nulli e se esiste in $[0,+\infty]$ il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L.$$

- Serie di Taylor: ricordiamo, per comodità del lettore, alcune fra le principali serie di Taylor con il rispettivo raggio di convergenza.

$$R = +\infty \qquad e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}x^k$$

$$R = 1 \qquad \log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + \ldots = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k$$

$$R = +\infty \qquad \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

$$R = +\infty \qquad \cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$$

$$R = +\infty \qquad \sinh x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

$$R = +\infty \qquad \cosh x = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!}x^{2k}$$

- Esercizi

ESERCIZIO 9.11. Data la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1/4)^n \frac{n[x-3]^n}{2n^2+1} \qquad x \in \mathbb{R}\,;$$

determinare l'insieme di convergenza puntuale e un insieme di convergenza totale.

Svolgimento : *Se poniamo*

$$y = x - 3 \qquad e \qquad a_n = (-1/4)^n \frac{n}{2n^2+1}$$

la serie assegnata si può riscrivere come

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n y^n \tag{9.1}$$

che risulta essere una serie di potenze con raggio di convergenza $R_y = 4$, ottenuto da

$$\frac{1}{R_y} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{4^n(2n^2+1)}} = 1/4\,.$$

Applicando i risultati precedentemente ricordati sulle serie di potenze, si ottiene che la serie (9.1) converge puntualmente e assolutamente per tutti gli $y \in \mathbb{R}$ tali che $|y| < 4$, ovvero la serie proposta

converge puntualmente e assolutamente per tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che $-1 < x < 7$. Sostituiamo $x = -1$ e $x = 7$ nella serie; nel primo caso otteniamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1/4)^n \frac{n(-4)^n}{2n^2+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2n^2+1}$$

che non converge, per confronto con la serie armonica, poiché $\frac{n}{2n^2+1} \sim \frac{1}{2n}$; nel secondo caso,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1/4)^n \frac{n4^n}{2n^2+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{2n^2+1}$$

che converge semplicemente per il criterio di Leibniz, poiché $\frac{n}{2n^2+1} \to 0$ in modo monotono decrescente. Infine, la serie (9.1) converge totalmente in tutti gli insiemi chiusi della forma $[-3+\delta, 3-\delta]$, per ogni $\delta > 0$ sufficientemente piccolo, ovvero la serie proposta converge totalmente in ogni insieme chiuso della forma $[-1+\delta, 7-\delta]$.

ESERCIZIO 9.12. Data la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[x(x+1)]^n}{3^n e^n}\,,$$

determinarne l'insieme di convergenza puntuale ed un insieme di convergenza totale.

Svolgimento : *Posto $y = [\frac{x(x+1)}{3e}]$, si ottiene che la serie proposta risulta essere la serie geometrica $\sum y^n$, con raggio di convergenza $R_y = 1$. Pertanto, la serie in y converge puntualmente ed assolutamente per $|y| < 1$, condizione che, risolta rispetto ad x, fornisce*

$$\left|\frac{x(x+1)}{3e}\right| < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -1 < \frac{x(x+1)}{3e} < 1$$

ovvero

$$\begin{cases} (i) & x^2 + x - 3e < 0 \\ (ii) & x^2 + x + 3e > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (i) & \dfrac{-1-\sqrt{1+12e}}{2} < x < \dfrac{-1+\sqrt{1+12e}}{2} \\ (ii) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Quindi, per $\frac{-1-\sqrt{1+12e}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{1+12e}}{2}$, la serie proposta converge puntualmente ed assolutamente. In ogni insieme chiuso contenuto in $(\frac{-1-\sqrt{1+12e}}{2}, \frac{-1+\sqrt{1+12e}}{2})$, si avrà invece convergenza totale. Infine, per $x = \frac{-1\pm\sqrt{1+12e}}{2}$ la serie non converge, poiché il temine generale vale 1 o $(-1)^n$, rispettivamente, e quindi non è infinitesimo.

ESERCIZIO 9.13(1)**.** Determinare l'insieme di convergenza puntuale ed assoluta della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{(e^x)^k}{k!}$$

e calcolarne la somma $S(x)$.

(1) In questo esercizio, la somma della serie è calcolabile utilizzando le serie di Taylor

ESERCIZIO 9.14[1]**.** Determinare l'insieme di convergenza puntuale ed assoluta e la funzione somma $S(x)$ della serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(x-1)^k}{2^{k-1}(k-1)!} .$$

Individuare almeno un insieme di convergenza totale della serie.

ESERCIZIO 9.15. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^k$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$ e calcolarne la somma $S(x)$.

ESERCIZIO 9.16. Studiare, al variare di $x \in \mathbb{R}$, la convergenza assoluta della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^k \cdot \frac{k!}{k^k} .$$

Svolgimento : *La serie è definita per $x \neq 0$. Poniamo $t = \frac{1}{x}$ e studiamo la convergenza della serie di potenze*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k!}{k^k} t^k .$$

Si ha

$$L = \lim_{k\to+\infty} \frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{k!} = \lim_{k\to+\infty} \frac{(k+1)}{(k+1)} \cdot \left(\frac{k}{k+1}\right)^k$$
$$= \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} = \frac{1}{\mathrm{e}} \qquad \Longrightarrow \qquad R = \mathrm{e} .$$

La serie converge assolutamente per ogni $\left|\frac{1}{x}\right| < \mathrm{e}$ e $x \neq 0$; cioè per $|x| > \frac{1}{\mathrm{e}}$, ovvero $x < -1/\mathrm{e}$ e $x > 1/\mathrm{e}$. Sostituendo i valori $x = \pm\frac{1}{\mathrm{e}}$ nella serie proposta, otteniamo

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (\pm \mathrm{e})^k \frac{k!}{k^k} .$$

Per lo studio della convergenza assoluta di queste ultime serie, procediamo utilizzando il criterio del confronto asintotico e sfruttando la Formula di Stirling:

$$\left|(\pm\mathrm{e})^k \frac{k!}{k^k}\right| \sim \frac{\mathrm{e}^k k^k \mathrm{e}^{-k}\sqrt{2\pi k}}{k^k} = \sqrt{2\pi k} \to +\infty .$$

Quindi, la serie non converge in $x = \pm\frac{1}{\mathrm{e}}$, in quanto il termine generale non è infinitesimo. Ricapitolando, la serie converge assolutamente per $x < -\frac{1}{\mathrm{e}}$ e $x > \frac{1}{\mathrm{e}}$.

ESERCIZIO 9.17. Data la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{\pi} \arcsin x\right)^n ,$$

determinare l'insieme di convergenza puntuale ed assoluta e la somma $S(x)$.

Indicare in quale dei tre intervalli

$$a) \quad [-1,1] \quad ; \quad b) \quad \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] \quad ; \quad c) \quad [-3,0)$$

essa converge totalmente, giustificando la risposta.

ESERCIZIO 9.18. Data la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi} \arctan x\right)^n ,$$

determinare l'insieme di convergenza puntuale ed assoluta e la somma $S(x)$.

Indicare in quale dei tre intervalli

$$a) \quad (-5,6] \quad ; \quad b) \quad [-1,1] \quad ; \quad c) \quad \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$$

essa converge totalmente, giustificando la risposta.

ESERCIZIO 9.19[1]**.** Determinare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^{nx}}{n 9^{n-1}} .$$

e calcolarne la somma $S(x)$.

ESERCIZIO 9.20. Determinare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(3x^2)^{2n}}{2n+1} .$$

ESERCIZIO 9.21. Determinare il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n a_n}{\mathrm{e}^n (n+1)} x^n ,$$

dove la successione $\{a_n\}$ è determinata dalla relazione

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{(n+2)!} x^n . \tag{9.2}$$

Svolgimento : *Dalla relazione (9.2), utilizzando lo sviluppo in serie di Taylor della funzione $x \mapsto \mathrm{e}^x$ e ricordando che lo sviluppo è unico, si ottiene*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{(n+2)!} x^n = \mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n ,$$

da cui

$$\frac{a_n}{(n+2)!} = \frac{1}{n!} \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_n = \frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2)(n+1)n!}{n!} = (n+2)(n+1) .$$

Pertanto la serie proposta si riscrive nella forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n+2)(n+1)}{\mathrm{e}^n (n+1)} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n+2)}{\mathrm{e}^n} x^n .$$

Calcoliamone ora il raggio di convergenza:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n(n+2)}{\mathrm{e}^n}} = \frac{1}{\mathrm{e}} \quad \textit{da cui} \quad R = \mathrm{e} .$$

[1] In questo esercizio, la somma della serie è calcolabile utilizzando le serie di Taylor

ESERCIZIO 9.22. Determinare l'insieme di convergenza puntuale della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n (x-1)^n \,,$$

dove la successione $\{a_n\}$ è determinata dalla relazione

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \,. \tag{9.3}$$

Svolgimento : *Dalla relazione (9.3), utilizzando lo sviluppo in serie di Taylor della funzione* $x \mapsto \sinh(x)$ *e ricordando che lo sviluppo è unico, si ottiene*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \sinh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \,,$$

da cui

$$\frac{a_n}{(2n+1)!} = \frac{1}{(2n+1)!} \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_n = \frac{(2n+1)!}{(2n+1)!} = 1 \,.$$

Pertanto la serie proposta si riscrive nella forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(x-1)^n \,.$$

Calcoliamone ora il raggio di convergenza:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \quad \text{da cui} \quad R = 1 \,,$$

quindi la serie converge puntualmente almeno in (0,2). Studiamo, infine, cosa avviene agli estremi di tale intervallo. Per $x = 0, 2$ *la serie proposta diviene*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(\mp 1)^n$$

che non converge in quanto il termine generale non è infinitesimo. Quindi la serie converge puntualmente solo nell'intervallo $(0,2)$.

ESERCIZIO 9.23. Dopo averne calcolato il raggio di convergenza, stabilire se la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n+1} (x-3)^n \,,$$

converge in: a) $x = 4$; b) $x = 0$; c) $x = 7/2$.

ESERCIZIO 9.24. Dopo averne calcolato il raggio di convergenza, stabilire se la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{(2n)!} x^{2n} \,,$$

dove la successione $\{a_n\}$ è determinata dalla relazione

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \,,$$

converge in $x = 5$.

ESERCIZIO 9.25. Calcolare il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \,,$$

dove la successione $\{a_n\}$ è determinata dalla relazione

$$a_n = \lim_{k\to+\infty} \frac{e^k}{n^2 e^k + k} \,.$$

Risposte agli esercizi non svolti: **9.13**: l'insieme di convergenza puntuale ed assoluta è $\mathbb{R}$; $S(x) = \exp(-e^x) - 1$ - **9.14**: l'insieme di convergenza puntuale ed assoluta è $\mathbb{R}$; la serie converge totalmente in ogni intervallo chiuso e limitato della retta reale; $S(x) = (x-1)\left[e^{\frac{x-1}{2}} - 1\right]$ - **9.15**: la serie è definita e converge $\forall x \neq 0$; $S(x) = \frac{x}{x - \sin x}$ - **9.17**: l'insieme di convergenza puntuale ed assoluta è $(-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2)$, $S(x) = \frac{\pi}{\pi - 3\arcsin x}$ e si ha convergenza totale in $[-1/3, 1/2]$ - **9.18**: l'insieme di convergenza puntuale ed assoluta è $(-1,1)$, $S(x) = \frac{\pi}{\pi - 4\arctan x}$ e si ha convergenza totale in $[-1/4, 1/\sqrt{3}]$ - **9.19**: l'insieme di convergenza è $(-\infty, 2]$; $S(x) = 9\log\left(1 + 3^{x-2}\right)$ - **9.20**: l'insieme di convergenza è $[-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3]$ - **9.23**: $R = 1$; in $x = 4$ ed in $x = 0$ la serie non converge, mentre in $x = 7/2$ converge - **9.24**: in $x = 5$ la serie converge, in quanto $R = +\infty$ - **9.25**: $R = 1$.

9.4. Serie di Fourier

• Richiami: si chiama *serie di Fourier* una serie di funzioni della forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)] \,,$$

dove le successioni numeriche $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ sono dette successioni dei *coefficienti di Fourier*. Ricordiamo che, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua e 2π-periodica, si possono definire i coefficienti di Fourier di f mediante le seguenti formule

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\, dx \qquad \forall k \geq 0 \,,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\, dx \qquad \forall k \geq 1 \,.$$

In tal caso, è possibile associare formalmente ad f la sua serie di Fourier, scrivendo

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)] \,.$$

In realtà, questa associazione formale si può fare ogniqualvolta abbia senso definire i coefficienti a_k e b_k, cioè per funzioni periodiche, non necessariamente continue, ma integrabili sul periodo.

Si tratta poi di andare a studiare la convergenza della serie così costruita e di stabilire, in caso affermativo, se la somma di tale serie coincide con la funzione f assegnata.

In alcuni casi particolari, la serie di Fourier di una assegnata funzione f assume una forma più semplice; precisamente si ha:

$$\begin{cases} f \text{ pari} & b_k \equiv 0 \ \ \forall k \geq 1 & \text{serie di soli coseni} \quad f(x) \sim \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(kx) \ , \\ \text{dove} & a_k = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} f(x) \cos(kx)\ dx \ ; & \\ f \text{ dispari} & a_k \equiv 0 \ \ \forall k \geq 0 & \text{serie di soli seni} \quad f(x) \sim \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(kx) \ , \\ \text{dove} & b_k = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} f(x) \sin(kx)\ dx \ . & \end{cases}$$

Ricordiamo che, se f è una funzione regolare a tratti in $\mathbb{R}$, allora la serie di Fourier ad essa associata converge puntualmente ad f in tutti i punti di continuità di f e totalmente in tutti gli intervalli chiusi di continuità di f. Nei punti di salto, la serie di Fourier converge al valor medio del salto di f. Se, invece, f, oltre che regolare a tratti, è una funzione continua su tutto $\mathbb{R}$, allora la serie di Fourier ad essa associata converge totalmente su tutto l'asse reale.

• Esercizi

ESERCIZIO 9.26. Determinare la serie di Fourier, l'insieme di convergenza e la somma della funzione $2\pi-$ periodica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se} \quad x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi] \ , \\ 0 & \text{se} \quad x \in (-\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi] \ , \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z} \ .$$

Svolgimento : *Come si può osservare dal grafico in figura 9.26, trascurando i punti di discontinuità, la funzione è pari; pertanto, i coefficienti b_k sono identicamente nulli per ogni $k \in \mathbb{N}$, mentre*

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\ dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx)\ dx \qquad \forall k \in \mathbb{N} \ .$$

Nel nostro caso,

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\ dx = 2 \ ,$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos(kx)\ dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{2}{k} \sin(kx) \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi k} \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) \ .$$

Si osservi che

$$\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} \sin(m\pi) = 0 & se \quad k = 2m \ , \\ \sin(m\pi + \frac{\pi}{2}) = (-1)^m & se \quad k = 2m+1 \ , \end{cases}$$

pertanto avremo

$$f(x) \sim 1 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4(-1)^m}{(2m+1)\pi} \cos[(2m+1)x] \ .$$

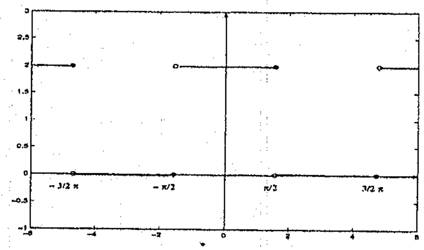


Figura 9.26

Grafico di f

Poiché la funzione ha al più discontinuità di salto, in cui esistono sia la derivata destra che quella sinistra, cioè è regolare a tratti, la serie converge su tutto l'asse reale. In particolare, la serie converge al valore della funzione nei punti di continuità di $f(x)$, mentre converge al valor medio della funzione nei punti di salto. Pertanto, la somma $S(x)$ della serie sarà

$$S(x) = \begin{cases} f(x) & se \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 1 & se \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z} \ .$$

ESERCIZIO 9.27. Determinare la serie di Fourier della funzione $2\pi-$ periodica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{se} \quad x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}) \\ -1 & \text{se} \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ 0 & \text{se} \quad x \in [\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases} \ .$$

Determinare la somma $S(x)$.

Svolgimento : *Osserviamo che si può riscrivere $f(x) = -1 + \widetilde{f}(x)$, dove $\widetilde{f}$ è la funzione 2π-periodica definita da*

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} -1 & se \quad x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}) \ , \\ 0 & se \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \ , \\ 1 & se \quad x \in [\frac{\pi}{2}, \pi) \ , \end{cases}$$

che, a parte i punti di discontinuità, risulta essere dispari. Poiché la serie di Fourier di una combinazione lineare di funzioni è data dalla combinazione lineare delle rispettive serie di Fourier, e la serie di una funzione costante è la funzione stessa, sarà sufficiente determinare la serie di Fourier della funzione $\widetilde{f}$, per la quale, data la sua disparità, si avrà $a_k = 0\ \forall k \geq 0$. Per i coefficienti b_k otteniamo

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\ dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx)\ dx \ ,$$

cioè, nel nostro caso,

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(kx)\ dx = -\frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{k} \cos(kx) \right] \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{2}{k\pi} \left[\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) - \cos(k\pi) \right] \ .$$

Pertanto,

$$f(x) \sim -1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \left[\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) - \cos(k\pi)\right] \sin(kx) .$$

Osservando che

$$\cos(k\pi) = (-1)^k$$

$$\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} \cos(m\pi) = (-1)^m & se \quad k = 2m \\ 0 & se \quad k = 2m+1 \end{cases} ,$$

avremo

$$f(x) \sim -1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m\pi} \sin(2mx) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{k\pi} \sin(kx) =$$

$$= -1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[(-1)^m - 1]}{m\pi} \sin(2mx) + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{(2m+1)\pi} \sin[(2m+1)x] =$$

$$= -1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)\pi} \sin[2(2n+1)x] + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{(2m+1)\pi} \sin[(2m+1)x] .$$

Poiché f è regolare a tratti, possiamo concludere che la serie converge su tutto $\mathbb{R}$ e che la sua somma $S(x)$ è uguale a

$$S(x) = \begin{cases} f(x) & se \quad x \neq \frac{\pi}{2} + h\pi \quad ; \quad x \neq (2h+1)\pi \\ -\frac{3}{2} & se \quad x = 2h\pi - \frac{\pi}{2} \\ -\frac{1}{2} & se \quad x = 2h\pi + \frac{\pi}{2} \\ -1 & se \quad x = (2h+1)\pi \end{cases} \qquad h \in \mathbb{Z} .$$

ESERCIZIO 9.28. Determinare la serie di Fourier della funzione $\pi-$ periodica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(x) = x + 1 \qquad \text{se } x \in (0, \pi] .$$

Determinare la somma della serie.

Svolgimento : *Poiché la funzione è π- periodica, al fine dello sviluppo della sua serie di Fourier conviene riscrivere la sua espressione in un intervallo di lunghezza 2π, come evidenziato nel grafico di Figura 9.28.*

Quindi, nell'intervallo $(-\pi, \pi]$, l'espressione di f è la seguente:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 + \pi & se \quad x \in (-\pi, 0] , \\ x + 1 & se \quad x \in (0, \pi] . \end{cases}$$

La funzione, dunque, è data dalla somma

$$f(x) = 1 + \frac{\pi}{2} + \widetilde{f}(x) ,$$

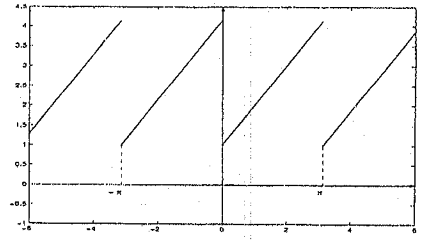


Figura 9.28

Grafico di f

dove

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} x + \frac{\pi}{2} & se \quad x \in (-\pi, 0] \\ x - \frac{\pi}{2} & se \quad x \in (0, \pi] \end{cases}$$

è una funzione dispari, a parte i punti di discontinuità. Calcoliamo dunque la serie di Fourier di $\widetilde{f}$, tenendo conto che, per essa, $a_k = 0 \ \forall k \geq 0$. Per definizione, abbiamo

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sin(kx) \, dx .$$

Integrando per parti, si ottiene

$$\int x \sin(kx) \, dx = \frac{1}{k} \left[\frac{1}{k} \sin(kx) - x\cos(kx)\right] ,$$

da cui

$$b_k = \frac{2}{\pi k} \left[\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos(kx) + \frac{1}{k} \sin(kx)\right]\Bigg|_0^{\pi} = -\frac{1}{k} \left[(-1)^k + 1\right] = \begin{cases} 0 & se \quad k = 2m+1 \\ -\dfrac{1}{m} & se \quad k = 2m \end{cases} .$$

Pertanto

$$f(x) \sim 1 + \frac{\pi}{2} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin(2mx) .$$

La serie converge su tutto l'asse reale, poiché la funzione è regolare a tratti e la sua somma $S(x)$ è

$$S(x) = \begin{cases} f(x) & se \quad x \neq k\pi \\ 1 + \dfrac{\pi}{2} & se \quad x = k\pi \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z} .$$

Poiché ogni termine di una serie di Fourier è continuo e la somma della serie non è continua, non possiamo aspettarci convergenza totale della serie su tutto $\mathbb{R}$.

ESERCIZIO 9.29. Determinare la serie di Fourier della funzione $2\pi-$ periodica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(x) = \begin{cases} \pi & \text{se} \quad x \in [0, \pi) \\ 2x - 4\pi & \text{se} \quad x \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$$

e stabilirne la somma $S(x)$ per $x \in \mathbb{R}$.

Individuare gli intervalli in cui non c'è convergenza totale.

ESERCIZIO 9.30. Determinare la serie di Fourier della funzione 2π-periodica $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definita da
$$f(x)=\frac{3}{2}+\cos(2x)+3\sin x+x \qquad \forall x\in[-\pi,\pi)\,.$$

Svolgimento : *Osserviamo che* $f(x)=g(x)+h(x)$, *per ogni* $x\in[-\pi,\pi)$, *dove* $g(x)=\frac{3}{2}+\cos(2x)+3\sin x$ *e* $h(x)=x$. *I coefficienti di Fourier di g sono immediati, in quanto essa risulta già sviluppata con*
$$\begin{array}{llll} a_0(g)=3 & a_n(g)=0 \quad \forall n\neq 2 & a_2(g)=1\,, \\ b_1(g)=3 & b_n(g)=0 \quad \forall n\geq 2\,; & \end{array}$$
infatti, la serie di Fourier di un polinomio trigonometrico coincide con il polinomio stesso. Per quanto riguarda, invece, la funzione h, osserviamo che essa è dispari (a parte i punti di discontinuità), per cui si svilupperà solo in serie di seni, con coefficienti che si ottengono dalla formula
$$b_k(h)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin(kx)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin(kx)\,dx \qquad \forall k\geq 1\,.$$
Svolgendo i conti, si ricava
$$b_k(h)=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos(kx)}{k}\bigg|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{\cos(kx)}{k}\,dx\right]=\frac{(-1)^{k+1}2}{k}\,.$$
Pertanto,
$$f(x)\sim\frac{3}{2}+\cos(2x)+5\sin x+2\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx)\,.$$

ESERCIZIO 9.31. Determinare lo sviluppo di Fourier della funzione 2π-periodica $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da
$$f(x)=e^x+5\sin(2x) \qquad \forall x\in[-\pi,\pi)\,.$$

Svolgimento : *Osserviamo che* $f(x)=g(x)+h(x)$, *per ogni* $x\in[-\pi,\pi)$, *dove* $g(x)=e^x$ *e* $h(x)=5\sin(2x)$. *I coefficienti di Fourier di h sono immediati, in quanto essa risulta già sviluppata con*
$$\begin{array}{ll} a_n(h)=0 \quad \forall n\geq 0 & \\ b_n(h)=0 \quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{2\} & b_2(h)=5\,. \end{array}$$
Restano, quindi, da calcolare i coefficienti di g. Per a_0 *si ricava*
$$a_0(g)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^x\,dx=\frac{1}{\pi}(e^{\pi}-e^{-\pi})\,.$$
Inoltre, poiché integrando due volte per parti si ha
$$\int e^x\cos(nx)\,dx=e^x\cos(nx)+n\int e^x\sin(nx)\,dx=e^x\cos(nx)+ne^x\sin(nx)-n^2\int e^x\cos(nx)\,dx\,,$$
segue che
$$\begin{aligned} a_n(g)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^x\cos(nx)\,dx \\ &=\frac{1}{\pi(1+n^2)}\left[e^x\Big(\cos(nx)+\sin(nx)\Big)\right]\bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{(-1)^n(e^{\pi}-e^{-\pi})}{\pi(1+n^2)} \qquad \forall n\in\mathbb{N}\,. \end{aligned} \tag{9.4}$$

Infine,
$$\begin{aligned} b_n(g)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^x\sin(nx)\,dx \\ &=\frac{1}{\pi}\left[e^x\sin(nx)\Big|_{-\pi}^{\pi}-n\int_{-\pi}^{\pi}e^x\cos(nx)\,dx\right]=-\frac{(-1)^n n}{\pi(1+n^2)}(e^{\pi}-e^{-\pi}) \qquad \forall n\in\mathbb{N}\,, \end{aligned}$$
dove si è sfruttato il risultato in (9.4). Pertanto si ottiene
$$\begin{aligned} &f(x) \\ &\sim\frac{(e^{\pi}-e^{-\pi})}{2\pi}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^n}{\pi(1+n^2)}(e^{\pi}-e^{-\pi})\cos(nx)+\frac{n(-1)^{n+1}}{\pi(1+n^2)}(e^{\pi}-e^{-\pi})\sin(nx)\right]+5\sin(2x) \\ &=\frac{\sinh\pi}{\pi}+\left(5-\frac{4\sinh\pi}{5\pi}\right)\sin(2x)+\frac{2\sinh\pi}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{1+k^2}\cos(kx)-\frac{2\sinh\pi}{\pi}\sum_{k\neq 2}\frac{(-1)^k k}{1+k^2}\sin(kx). \end{aligned}$$

ESERCIZIO 9.32. Determinare lo sviluppo di Fourier della funzione 2π-periodica $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da
$$f(x)=x^2 \qquad \forall x\in[-\pi,\pi)\,.$$

ESERCIZIO 9.33. Determinare lo sviluppo di Fourier della funzione 2π-periodica $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da
$$f(x)=\pi^2-x^2 \qquad \forall x\in[-\pi,\pi)\,.$$

ESERCIZIO 9.34. Determinare la serie di Fourier della funzione $2\pi-$ periodica $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definita da
$$f(x)=\begin{cases} 2x & \text{se} \quad x\in[0,\pi) \\ \pi & \text{se} \quad x\in[\pi,2\pi) \end{cases}$$
e stabilirne la somma $S(x)$ per $x\in\mathbb{R}$.

Individuare gli intervalli in cui non c'è convergenza totale.

ESERCIZIO 9.35. Determinare la serie di Fourier della funzione $2\pi-$ periodica $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definita da
$$f(x)=\begin{cases} 1+x & \text{se} \quad x\in[0,\pi) \\ -x & \text{se} \quad x\in[\pi,2\pi) \end{cases}$$
e stabilirne la somma $S(x)$ per $x\in\mathbb{R}$.

Risposte agli esercizi non svolti: 9.29:
$$\begin{aligned} f(x)&\sim\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{2}{\pi k^2}(1-(-1)^k)\cos(kx)+\frac{1}{k}(1-3(-1)^k)\sin(kx)\right] \\ &=\sum_{m=1}^{+\infty}\left[\frac{4}{\pi(2m-1)^2}\cos[(2m-1)x]+\frac{4}{2m-1}\sin[(2m-1)x]-\frac{1}{m}\sin(2mx)\right] \end{aligned}$$
$$S(x)=\begin{cases} -\pi/2 & \text{se } x=(2h+1)\pi\,;\ h\in\mathbb{Z} \\ \pi/2 & \text{se } x=2h\pi\,;\ h\in\mathbb{Z} \\ f(x) & \text{altrove} \end{cases}$$

la convergenza totale viene a mancare in ogni intervallo, la cui chiusura contenga almeno un punto della forma $x_h = h\pi$, $h \in \mathbb{Z}$ - **9.32**: $f(x) \sim \dfrac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{4}{k^2}(-1)^k \cos(kx)$ - **9.33**: $f(x) \sim \dfrac{2}{3}\pi^2 - 4\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k^2} \cos(kx)$ - **9.34**:

$$
\begin{aligned}
f(x) &\sim \pi + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{2}{\pi k^2}\left((-1)^k - 1\right)\cos(kx) - \frac{1}{k}\left((-1)^k + 1\right)\sin(kx) \right] \\
&= \pi - \sum_{m=1}^{+\infty} \left[\frac{4}{\pi(2m-1)^2} \cos[(2m-1)x] + \frac{1}{m}\sin[2mx] \right]
\end{aligned}
$$

$$
S(x) = \begin{cases} 3\pi/2 & \text{se } x = (2h+1)\pi \ ; \ h \in \mathbb{Z} \\ \pi/2 & \text{se } x = 2h\pi \ ; \ h \in \mathbb{Z} \\ f(x) & \text{altrove} \end{cases}
$$

la convergenza totale viene a mancare in ogni intervallo, la cui chiusura contenga almeno un punto della forma $x_k = k\pi$ - **9.35**:

$$
f(x) \sim \frac{1}{2}(1-\pi) - \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}\cos[(2m+1)x] + \frac{4\pi+2}{\pi}\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)}\sin[(2m+1)x]
$$

$$
S(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{se } x = (2h+1)\pi \ ; \ h \in \mathbb{Z} \\ (1-2\pi)/2 & \text{se } x = 2h\pi \ ; \ h \in \mathbb{Z} \\ f(x) & \text{altrove .} \end{cases}
$$

CAPITOLO 10

ESERCIZI PROPOSTI IN SESSIONE D'ESAME

TEMA D'ESAME 10.1

ESERCIZIO 1. Facendo uso dei teoremi fondamentali del calcolo integrale, determinare l'insieme di definizione, gli intervalli di monotonia, concavità e convessità della funzione

$$
F(x) = 1 - \int_0^x t^3 e^{-t^2}\, dt \ .
$$

* * *

ESERCIZIO 2. Relativamente alla funzione del precedente esercizio

a) calcolare l'integrale definito;

b) studiare il comportamento asintotico e gli eventuali punti singolari della funzione e della sua derivata;

c) scrivere l'equazione della tangente geometrica alla curva grafico negli *eventuali* punti di flesso;

d) disegnare il grafico della funzione.

* * *

ESERCIZIO 3. Applicando i criteri di integrabilità, stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}^+$ l'integrale

$$
\int_0^{+\infty} \frac{x-1}{(x^2-2x+2)^\alpha}\, dx
$$

risulta convergente.

In caso di convergenza, calcolare l'integrale.

TEMA D'ESAME 10.2

ESERCIZIO 1. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 3y(x) + 2x \,; \\ y(0) = 0 \,. \end{cases}$$

* * *

ESERCIZIO 2. Determinare il vettore tangente alla curva γ parametrizzata da

$$\phi(t) = \begin{cases} x(t) = 2t \\ y(t) = t^2 \\ z(t) = e^t \end{cases} \qquad t \in [-1,1]$$

nel punto $t = 0$.

* * *

ESERCIZIO 3. Calcolare $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0)$, dove

$$f(x,y) = 3x + e^{x-y} \,.$$

* * *

ESERCIZIO 4. Calcolare $$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-1)^2(y-1)^7}{[(x-1)^2+(y-1)^2]^{5/2}} \,.$$

* * *

ESERCIZIO 5. Calcolare

$$\iint_E \frac{y e^x}{(x^2+y^2)^{1/2}}\, dx\, dy$$

dove $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 < x^2+y^2 < 4 \,,\ y > x \,,\ x > 0\} \bigcup$
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 < x^2+y^2 < 4 \,,\ -\sqrt{3}x < y \,,\ x < 0\}$.

* * *

ESERCIZIO 6. Stabilire se la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5(3x+1)(e^{y^4}-1)}{x^6+y^8} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è continua e differenziabile in $(0,0)$.

TEMA D'ESAME 10.3

ESERCIZIO 1. Data

$$f(x,y) = \tan\left(\log\left(\frac{1}{|x|+1}\right)\right) + 5(x+2y)^2,$$

calcolare

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

* * *

ESERCIZIO 2. Calcolare $$\int_0^2 x^2 e^{2x}\, dx.$$

* * *

ESERCIZIO 3. Determinare le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione $z^4 - z^2 - 2 = 0.$

* * *

ESERCIZIO 4. Calcolare $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log(n^3)\sin\frac{1}{n}}.$$

* * *

ESERCIZIO 5. Determinare massimo e minimo assoluti per

$$f(x,y) = xy\, e^{-xy}$$

in $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 4, 0 \le y, |xy| \le 1\}$.

* * *

ESERCIZIO 6. Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ è convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha+1}}{\arctan\frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}} \,.$$

* * *

ESERCIZIO 7. Determinare le primitive della funzione

$$f(x) = \frac{\cos(\log x)}{x\sin(\log x)} \,.$$

* * *

DOMANDA 1. Stabilire se l'insieme $\left\{x \in \mathbb{R} : x + \dfrac{1}{5x} > 0\right\}$ è superiormente limitato.

* * *

DOMANDA 2. Dire se e perché la funzione $f(x) = e^{1+x^2}$ è invertibile in $\mathbb{R}^+$.

* * *

DOMANDA 3. Scrivere la definizione di limite (finito) di funzione per $x \to 3$.

TEMA D'ESAME 10.4

ESERCIZIO 1. Calcolare la derivata della funzione

$$f(x) = \sin(\log 2x)\ .$$

* * *

ESERCIZIO 2. Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_D e^{x-y}\, dx\, dy\ ,$$

dove $D = [0,1] \times [0,2]$.

* * *

ESERCIZIO 3. Determinare le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione $(3z - i)^2 = 1$.

* * *

ESERCIZIO 4. Calcolare $\lim_{x\to+\infty} x^2 \log(1 + e^{-7x})$.

* * *

ESERCIZIO 5. Sia data la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\ \mathrm{sign}[\arctan(|x|+1)]\ .$$

Determinare campo di esistenza, segno, limiti alla frontiera, eventuali asintoti, monotonia e tracciare un grafico qualitativo di f nell'ipotesi in cui il numero di flessi sia minimo.

* * *

ESERCIZIO 6. Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito

$$\int_0^1 \frac{\arctan(x^\alpha)}{\sin x + \sqrt{x}}\, dx\ .$$

* * *

ESERCIZIO 7. Stabilire se la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{2}{n}}}{n}$$

converge.

* * *

DOMANDA 1. Stabilire se l'insieme $E = \left\{ \frac{1}{\log n}\ :\ n \geq 2 \right\}$ è inferiormente limitato.

* * *

DOMANDA 2. Calcolare $\arccos\left(\cos \frac{20}{6}\pi\right)$.

* * *

DOMANDA 3. Scrivere la definizione di serie convergente.

TEMA D'ESAME 10.5

ESERCIZIO 1. Data

$$f(x) = \frac{\cos x}{1+x^2}\ ,$$

calcolare $f'(\pi)$.

* * *

ESERCIZIO 2. Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2} \arctan x\, dx\ .$$

* * *

ESERCIZIO 3. Determinare tutte le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + (3x+2)y(x) = 5y(x)\ ; \\ y(1) = 0\ . \end{cases}$$

* * *

ESERCIZIO 4. Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 + \sin n - e^n}{\log^2 n + n^n}\ .$$

* * *

DOMANDA 1. Disegnare il grafico qualitativo di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che abbia un salto di ampiezza 1 in $x = 0$ e $x = 2$, un punto angoloso in $x = 1$ e altrove sia continua è derivabile.

* * *

DOMANDA 2. Scrivere la definizione di punto di massimo assoluto per una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

* * *

DOMANDA 3. Determinare lo sviluppo di Taylor al terzo ordine, con centro in $x = 1$, della funzione

$$f(x) = \sin(\pi x)\ .$$

TEMA D'ESAME 10.6

ESERCIZIO 1. Calcolare la derivata prima della funzione $f(x) = \dfrac{\arctan x}{\log x}$.

* * *

ESERCIZIO 2. Calcolare in campo complesso $\sqrt[4]{3+3i}$.

* * *

ESERCIZIO 3. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{x^3}{y^2(x)} \,; \\ y(0) = 1 \,. \end{cases}$$

* * *

ESERCIZIO 4. Calcolare $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}$.

* * *

ESERCIZIO 5. Data

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{|e^x - 1|} \,,$$

determinare campo di esistenza, segno, limiti alla frontiera, eventuali asintoti e monotonia. Tracciare un grafico qualitativo di f nell'ipotesi in cui il numero di flessi sia minimo.

* * *

ESERCIZIO 6. Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{n\alpha}\cos^3 n}{n(e^{2n}-1)} \,.$$

* * *

ESERCIZIO 7. Stabilire se esiste il seguente integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^{1/2}(2+3x^4)}\, dx \,.$$

* * *

DOMANDA 1. Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f\left(3 + \sin\frac{1}{n}\right)$.

* * *

DOMANDA 2. Fornire un esempio di insieme limitato inferiormente in $\mathbb{R}$.

* * *

DOMANDA 3. Scrivere la definizione di funzione monotona non decrescente.

TEMA D'ESAME 10.7

ESERCIZIO 1. Determinare le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ tali che $(z-2i)^5 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$.

* * *

ESERCIZIO 2. Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3\left(1-\cos\frac{\log n}{n}\right)}$.

* * *

ESERCIZIO 3. Calcolare $\displaystyle\int_1^{e} \frac{\log x}{\log(ex)}\,\frac{1}{x}\, dx$.

* * *

ESERCIZIO 4. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = e^{\sin^2 x}$.

* * *

ESERCIZIO 5. Data la funzione

$$f(x) = e^{\frac{|x-1|}{x}} \,,$$

determinare campo di esistenza, segno, limiti alla frontiera, eventuali asintoti, monotonia, concavità e convessità e tracciarne un grafico qualitativo.

* * *

ESERCIZIO 6. Studiare, al variare del parametro reale α, la convergenza assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2+n^2\log n}{n^\alpha} \,.$$

Studiare poi la convergenza semplice.

* * *

ESERCIZIO 7. Stabilire se esiste finito il seguente integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x^2+5)\sqrt{|x^2-4|}}\, dx \,.$$

* * *

DOMANDA 1. Stabilire se esiste il $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (e^{-x} + \sin x)$.

* * *

DOMANDA 2. Data la funzione $F(x) = \int_2^{4x} \log(1+t^2)\, dt$, stabilire se essa è derivabile in $\mathbb{R}$ ed in caso affermativo, calcolarne la derivata.

* * *

DOMANDA 3. Determinare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine, con centro in $x = 2$, della funzione

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \,.$$

TEMA D'ESAME 10.8

ESERCIZIO 1. Determinare le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ tali che $(z-i)^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$.

* * *

ESERCIZIO 2. Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{3}{n^2}\right)}{\sin\left(\frac{2}{n^2}\right)}$.

* * *

ESERCIZIO 3. Calcolare $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, dove $f(x,y) = \log(1+xy) + e^{3x+2y}$.

* * *

ESERCIZIO 4. Calcolare $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2(y-1)^3}{[x^2+(y-1)^2]^{5/2}}$.

* * *

ESERCIZIO 5. Calcolare

$$\iint_E \frac{y\exp(x/\sqrt{x^2+y^2})}{(x^2+y^2)^{1/2}}\,dx\,dy$$

dove $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ 1 < x^2+y^2 < 4\ ,\ y > x\ ,\ x > 0\} \bigcup$
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ 1 < x^2+y^2 < 4\ ,\ -\sqrt{3}x < y\ ,\ x < 0\}$.

* * *

ESERCIZIO 6. Stabilire se la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(y^2-1)(3x+1)\sin(x^5)}{x^4+(y-1)^8} & \text{se } (x,y) \neq (0,1) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,1) \end{cases}$$

è continua e differenziabile in $(0,1)$.

* * *

ESERCIZIO 7. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = e^x y^2(x)\ ; \\ y(0) = 1\ . \end{cases}$$

* * *

DOMANDA 1. Stabilire se esiste il $\displaystyle\lim_{x\to0^+}(e^{-x} + \cos(3/x))$.

* * *

DOMANDA 2. Scrivere la definizione di funzione derivabile in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$.

* * *

DOMANDA 3. Data la funzione

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3k}{k(k+1)e^k}(x-2)^{k(2k+1)}\ ,$$

calcolare la derivata di ordine 37 di f nel punto $x_0 = 2$.

TEMA D'ESAME 10.9

ESERCIZIO 1. Data la funzione $f(x,y) = \dfrac{e^{x^2}+1}{\log(x^2+1)}y^2$, calcolare $\frac{\partial f}{\partial y}$.

* * *

ESERCIZIO 2. Determinare le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione $z^4 + 16 = 0$.

* * *

ESERCIZIO 3. Calcolare $I = \displaystyle\int e^x \sin(e^x)\,dx$.

* * *

ESERCIZIO 4. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{e^x - 1}{x^2 + 2\sqrt[3]{x} - x^3}$.

* * *

ESERCIZIO 5. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 3y(x) + 2e^{2x}\ ; \\ y(0) = 0\ . \end{cases}$$

* * *

ESERCIZIO 6. Determinare i punti di massimo e minimo locali della funzione

$$F(x) = \int_0^{x^2} (t^2 - 2t)e^t \log(1+t^2)\,dt\ .$$

* * *

ESERCIZIO 7. Stabilire per quali valori del parametro $\alpha > 0$ la seguente serie converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctan\frac{1}{n^\alpha}\right) n^{3-\alpha}.$$

* * *

DOMANDA 1. Stabilie se l'insieme $E = \{x \in \mathbb{R}\ :\ e^{3-x} > 1\}$ è inferiormente limitato.

* * *

DOMANDA 2. Dati $x, y > 0$, stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta:

(a) $\log(2x) = 2\log x$ (b) $\log x + \log y = \log(xy)$
(c) $(\log x)(\log y) = \log(xy)$ (d) $\log(x/y) = (\log x)/(\log y)$.

* * *

DOMANDA 3. Dare la definizione di punto di minimo assoluto per una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

TEMA D'ESAME 10.10

ESERCIZIO 1. Determinare i punti di massimo e minimo locale della funzione $f(x) = e^{-x(x-1)}$.

* * *

ESERCIZIO 2. Calcolare, se esiste, $$\lim_{n\to\infty} \left(n - \frac{4}{n}\right)\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}} - 1\right).$$

* * *

ESERCIZIO 3. Calcolare $$\int_0^1 \frac{x}{(x+1)(x+2)}\, dx.$$

* * *

ESERCIZIO 4. Data $f(x,y) = x^3 \log y$, calcolare $\nabla f(1, \frac{1}{e})$.

* * *

ESERCIZIO 5. Siano $y_n(t)$ le soluzioni del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'(t) = -y^2(t)\ ; \\ y(0) = n\ ; \end{cases}$$
calcolare $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} y_n(1)$.

* * *

ESERCIZIO 6. Sia $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 2,\ x \le -|y|\}$. Calcolare $\displaystyle\iint_D x\, dx\, dy$.

* * *

ESERCIZIO 7. Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito il seguente integrale improprio
$$\int_0^1 \frac{\log x}{[x(1-x)]^{2\alpha+1}}\, dx\ .$$

* * *

DOMANDA 1. Determinare, se esiste, il periodo della funzione $f(x) = \cos(\frac{1}{3}x) + \sin(x)$.

* * *

DOMANDA 2. Stabilire, motivando la risposta, se la seguente funzione è continua nel suo dominio:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0\ . \end{cases}$$

* * *

DOMANDA 3. Dimostrare che il seguente limite non esiste:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2 - 5xy}{x^2 + y^2}.$$

TEMA D'ESAME 10.11

ESERCIZIO 1. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{2x + 3x^2 - 5\sqrt{x}}{e^{2x} - 1}$.

* * *

ESERCIZIO 2. Data $\displaystyle F(x) = \int_1^{2x} \frac{\log(e + t^2)}{(t^2+2)e^t}\, dt$, calcolare $F'(0)$.

* * *

ESERCIZIO 3. Determinare le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione $(z-2)^3 = 27$.

* * *

ESERCIZIO 4. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale $y'(t) - 3y(t) = 2t$.

* * *

ESERCIZIO 5. Calcolare
$$\iint_D y\, dx\, dy, \qquad D = \{|y| \ge 1\} \cap \{x^2 + y^2 \le 4\}.$$

* * *

ESERCIZIO 6. Stabilire il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{3n + 2\cos n}$.

* * *

ESERCIZIO 7. Data la funzione
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x^2 + 2x}{3x} & \text{per } x > 0 \\ 3(x+3)^2 + 2x & \text{per } x \le 0 \end{cases}$$
stabilire se $x = 0$ è punto di massimo assoluto per f nell'intervallo $[-2, 5]$.

* * *

DOMANDA 1. Stabilire quale delle seguenti affermazioni è errata:

$(a)\ \dfrac{x^2 \cdot x^3}{x^{1/3}} = \dfrac{1}{x^{-14/3}}$ $\qquad (b)\ \dfrac{x^{1/3}}{x^2 \cdot x^3} = \dfrac{1}{x^{14/3}}$

$(c)\ x^2 \cdot x^3 = x^6$ $\qquad (d)\ \dfrac{1}{x^2 \cdot x^3} = x^{-5}$.

* * *

DOMANDA 2. Data $f \in C^0(\mathbb{R})$ e sapendo che $f(2) = 1$, calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0} f\Big(2\cos(\pi x)\Big)$, giustificando la risposta.

* * *

DOMANDA 3. Data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, scrivere la definizione di funzione parzialmente derivabile rispetto ad x nel punto $(2,1)$.

TEMA D'ESAME 10.12

ESERCIZIO 1. Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \log(1+x^2) & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

risulta continua in $x = 0$.

* * *

ESERCIZIO 2. Facendo uso dei teoremi fondamentali del calcolo integrale, determinare l'insieme di definizione, gli intervalli di monotonia, concavità e convessità della funzione

$$F(x) = \begin{cases} \frac{9}{4} - x^2 & \text{se} \quad x < -\frac{3}{2} \; ; \\ \displaystyle\int_{-\frac{3}{2}}^{x} \log(2+t)\, dt & \text{se} \quad x \geq -\frac{3}{2} \; . \end{cases}$$

Successivamente, calcolare l'integrale definito e studiare il comportamento asintotico e gli eventuali punti singolari della funzione e della sua derivata.

* * *

ESERCIZIO 3. Applicando i criteri di integrabilità, stabilire se gli integrali

$$\text{a)} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{x}}{\sin^2 x}\, dx \qquad ; \qquad \text{b)} \quad \int_{2^{-\frac{1}{4}}}^{+\infty} \frac{x^3}{1+4x^8}\, dx$$

sono convergenti.

In caso di convergenza, calcolare l'integrale.

TEMA D'ESAME 10.13

ESERCIZIO 1. Data la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{4^{kx}}{3k^{1/2}+1} \quad ,$$

determinare, al variare di $x \in \mathbb{R}$,

a) dove converge assolutamente;

b) dove converge semplicemente ma non assolutamente;

c) dove non converge.

* * *

ESERCIZIO 2. Data la funzione

$$f(x,y) \; = \; \left(\frac{\log x - y}{y+1}\right)^\pi \quad ,$$

a) determinare l'insieme di definizione E, specificandone la natura topologica e fornendone la rappresentazione grafica nel piano cartesiano;

b) calcolare $f_x(x,y)$.

* * *

ESERCIZIO 3. Determinare il valore del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ per il quale la funzione

$$f(x,y) \; = \; x^2 + \lambda y^2 - 4x + 2y$$

ha un punto critico in $(2\; , \; -1)$.

Verificare che tale punto è di minimo locale.

* * *

ESERCIZIO 4. Data l'equazione differenziale

$$y''(x) - 5y'(x) - 6y(x) = 16e^{-2x} \quad ,$$

determinare l'integrale generale e le (eventuali) soluzioni che verificano le condizioni

$$y(0) = 0 \; ; \qquad \lim_{x\to+\infty} y(x) = 0 \; .$$

TEMA D'ESAME 10.14

ESERCIZIO 1. Data la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \, (\log|x|)^k k^{-2} \quad ,$$

determinare, al variare di $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

a) dove converge assolutamente;

b) dove converge semplicemente ma non assolutamente;

c) dove non converge.

* * *

ESERCIZIO 2. Data la funzione

$$f(x,y) \;=\; (3|\arcsin x| - 2y)^{\frac{7}{2}} \quad ,$$

a) determinare l'insieme di definizione E, specificandone la natura topologica e fornendone la rappresentazione grafica nel piano cartesiano;

b) calcolare $f_y(x,y)$;

c) determinare il valore del minimo globale di $f(x,y)$.

* * *

ESERCIZIO 3. Determinare le (eventuali) soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - 8y'(x) + 17y(x) = 2x + 1 \; ; \\ y(0) = 0 \; ; \\ y'(0) = 0 \; . \end{cases}$$

TEMA D'ESAME 10.15

ESERCIZIO 1. Facendo uso dei teoremi fondamentali del calcolo integrale, determinare l'insieme di definizione, gli intervalli di monotonia, concavità e convessità della funzione

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{4 - t + |t|} \; dt \; .$$

* * *

ESERCIZIO 2. In relazione alla funzione dell'esercizio precedente

a) calcolare l'integrale definito;

b) studiare il comportamento asintotico e gli eventuali punti singolari della funzione e della sua derivata;

c) scrivere l'equazione della tangente geometrica alla curva grafico nel punto $x_0 = -6$;

d) disegnare il grafico della funzione.

* * *

ESERCIZIO 3. Applicando i criteri di integrabilità, stabilire se l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 8x + 17} \, dx$$

è convergente.

In caso di convergenza, calcolare l'integrale.

TEMA D'ESAME 10.16

ESERCIZIO 1. Data la funzione

$$f(x,y) = (x-y^2)^{\sqrt{3}} + (3-x^2)^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \quad ,$$

a) determinare l'insieme di definizione E, specificandone la natura topologica e fornendone la rappresentazione grafica nel piano cartesiano;
b) calcolare $f_y(x,y)$ (**Fac.**: calcolare $f_x(x,y)$) ;
c) dire se $f(x,y)$ è dotata di massimo e/o minimo globali. In caso affermativo, determinare il minimo globale e i punti del piano in cui è assunto.

* * *

ESERCIZIO 2. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + \dfrac{3x^2}{5+x^3}\, y(x) = \sqrt[3]{x} \, ; \\ y(0) = 1 \, . \end{cases}$$

TEMA D'ESAME 10.17

ESERCIZIO 1. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n \cdot n!} \, .$$

* * *

ESERCIZIO 2. Calcolare l'ordine di infinitesimo, per $x \to 0$, della funzione

$$f(x) = \log(1+x^2) - \cos^2 x + 1 \, .$$

* * *

ESERCIZIO 3. Determinare gli eventuali punti di minimo e di massimo, relativi e assoluti, della funzione

$$g(x) = x + |\cos x|$$

nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

In quanti punti si annulla $g(x)$? Perché?

* * *

ESERCIZIO 4. Calcolare $\sqrt[4]{z}$, dove $z = -32(\sqrt{3}i + 1)$.

* * *

ESERCIZIO 5. Calcolare

$$\int \left[\frac{\sqrt{x} - \log^2 x}{x} \right] dx \, .$$

TEMA D'ESAME 10.18

ESERCIZIO 1. Determinare i valori di α e $\beta \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} & \text{se} \quad x > 0 \\ \beta x + 2 & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

risulta continua e derivabile in $x = 0$.

* * *

ESERCIZIO 2. Data la successione

$$a_n = \frac{\sqrt{n^3+n^2-1} - \sqrt{n^3+n^2-n}}{\sqrt{n^2-n} - \sqrt{n^2+1}},$$

a) stabilirne il carattere ;

b) studiare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ad essa associata.

* * *

ESERCIZIO 3. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 3 & \text{se} \quad x \geq 2 \\ -x^2 + 5 & \text{se} \quad x < 2 \end{cases}$$

determinare l'intervallo in cui essa risulta non negativa e, in tale intervallo, calcolare l'area del suo sottografico.

* * *

ESERCIZIO 4. Calcolare il polinomio di Mc Laurin $P_6(x)$ di grado 6 della funzione

$$f(x) = \cos(x^3) - e^{x^3}.$$

Qual è l'ordine di infinitesimo della funzione per $x \to 0$?

Qual è l'ordine di infinitesimo del resto $f(x) - P_6(x)$?

* * *

ESERCIZIO 5. Facendo uso dei teoremi fondamentali del calcolo integrale, determinare l'insieme di definizione, gli intervalli di monotonia, concavità e convessità della funzione

$$F(x) = -x + \int_0^x \frac{1}{(1-t^2)} 2t \, dt .$$

Successivamente, calcolare l'integrale definito e completare lo studio del grafico della funzione $F(x)$.

Stabilire se la funzione integranda è integrabile rispettivamente negli intervalli $[0,1)$ e $(-1,0]$.

* * *

ESERCIZIO 6. Data la funzione

$$f(x,y) = \arcsin(xy) ,$$

a) determinare l'insieme di definizione E, specificandone la natura topologica e fornendone la rappresentazione grafica nel piano cartesiano;

b) individuare i punti stazionari, stabilendone la natura;

c) stabilire il valore massimo, il valore minimo e il codominio della funzione.

* * *

ESERCIZIO 7. Data l'equazione differenziale

$$y'(x) + \frac{1}{\sqrt{x}}\, y(x) = 1 ,$$

determinare l'integrale generale e le (eventuali) soluzioni che verificano la condizione

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = +\infty .$$

* * *

ESERCIZIO 8. Determinare la serie di Fourier della funzione 2π-periodica definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2\pi} & \text{se} \quad x \in (-\pi, 0] \\ 2 + \dfrac{x}{2\pi} & \text{se} \quad x \in (0, \pi] \end{cases}$$

e stabilire il valore della somma $S(x)$ della serie, al variare di $x \in \mathbb{R}$. Determinare gli intervalli di convergenza totale.

TEMA D'ESAME 10.19

ESERCIZIO 1. Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$:

$$z^2 - \overline{z} = 0 .$$

* * *

ESERCIZIO 2. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x < 0 \\ \log(1+x^2) - \arctan x & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a) stabilire gli eventuali punti di discontinuità e/o di non derivabilità;
b) studiarne il grafico.

* * *

ESERCIZIO 3. Calcolare

$$\int_0^1 \left[\log(1+x^2) - \arctan x\right] \, dx .$$

* * *

ESERCIZIO 4. Studiare la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin n)^n}{n^2} .$$

* * *

ESERCIZIO 5. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''(x) + y'(x) - 6y(x) = 5e^{2x} .$$

Fac.: Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''(x) + y'(x) - 6y(x) = 5e^{2x} - e^{3x} .$$

* * *

ESERCIZIO 6. Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} a & \text{in } \{x=0\} \cup \{y=0\} \\ xy \ \log(xy) & \text{altrove} \end{cases}$$

a) determinare l'insieme di definizione E, specificandone la natura topologica e fornendone la rappresentazione grafica nel piano cartesiano;
b) determinare il valore di $a \in \mathbb{R}$ che renda continua la funzione nell'origine;
Fac.: per tale valore la funzione è continua anche lungo gli assi?

* * *

ESERCIZIO 7. Facendo uso dei teoremi fondamentali del calcolo integrale, determinare l'insieme di definizione, gli intervalli di monotonia, concavità e convessità della funzione

$$F(x) = \int_0^x \left[\log(1+t^2) - \arctan t\right] \, dt .$$

Successivamente, calcolare l'integrale definito e completare lo studio del grafico della funzione $F(x)$.

* * *

ESERCIZIO 8. Determinare la serie di Fourier della funzione 2π-periodica definita da

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se} \quad x \in (-\pi, 0] \\ \dfrac{2x}{\pi} & \text{se} \quad x \in (0, \pi] \end{cases}$$

e stabilire il valore della somma $S(x)$ della serie, al variare di $x \in \mathbb{R}$.

* * *

ESERCIZIO 9. Stabilire per quali valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \frac{(\tan(x))^\alpha}{(\cos(x))^\beta}$$

è integrabile nell'intervallo $(0, \frac{\pi}{4})$. In caso di integrabilità, calcolare l'integrale per $\beta = 2$.

TEMA D'ESAME 10.20

ESERCIZIO 1. Studiare convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{\sqrt{k}}{(1-k)} \, .$$

* * *

ESERCIZIO 2. Determinare gli eventuali massimi e minimi, relativi e assoluti, nell'intervallo $[-\pi, \pi]$, della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{se} \quad x \in [-\pi, 0] \\ \cos x & \text{se} \quad x \in (0, \pi] \end{cases}$$

* * *

ESERCIZIO 3. Verificare se esistano i limiti, per $x \to 0$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, della funzione

$$g(x) = \left(\frac{e^x}{1-e^x}\right) \cdot \left(\frac{x^2-1}{x}\right) \, .$$

FAC.: determinare gli eventuali ordini di infinito o infinitesimo e gli eventuali asintoti, nei suddetti punti.

* * *

ESERCIZIO 4. Calcolare

$$\int_0^{\pi} e^{\cos x} \sin^3 x \, dx \, .$$

* * *

ESERCIZIO 5. Determinare la serie di Fourier della funzione 2π-periodica definita da

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se} \quad x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}) \\ 1 & \text{se} \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ 0 & \text{se} \quad x \in [\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases}$$

e stabilire il valore della somma della serie al variare di $x \in \mathbb{R}$.

Stabilire se la serie converge totalmente in $\mathbb{R}$.

* * *

ESERCIZIO 6. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'(x) + (\sin x) y(x) = \sin^3 x \, .$$

Quali soluzioni risultano limitate?

* * *

ESERCIZIO 7.

a) Facendo uso dei teoremi fondamentali del calcolo integrale, determinare l'insieme di definizione, gli intervalli di monotonia, concavità e convessità della funzione

$$F(x) = 2x + \int_1^x \frac{e^t}{1-e^t} \, dt \, .$$

b) calcolare l'integrale definito e completare lo studio del grafico della funzione $F(x)$.

* * *

ESERCIZIO 8. Studiare l'integrabilità, in $(0,1)$, della funzione

$$z(x) = \left(\frac{e^x}{e^x-1}\right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{1-x}}\right) \, .$$

* * *

ESERCIZIO 9. Determinare eventuali massimi e minimi relativi della funzione

$$G(x,y) = e^x \, (x-y)^2 \, .$$

Gli eventuali punti di massimo o di minimo sono anche assoluti?

SVOLGIMENTO TEMA 10.1

Svolgimento esercizio 1: La funzione integranda è definita e continua su tutto l'asse reale. Pertanto $C.E. = \mathbb{R}$. Inoltre,

$$F'(x) = -x^3 e^{-x^2} > 0 \iff x < 0 .$$

Dunque, la funzione cresce in $(-\infty, 0)$ e decresce in $(0, +\infty)$. Nel punto $x = 0$ si ha quindi un massimo relativo e assoluto, con $F(0) = 1$.

Concavità e convessità:

$$F''(x) = x^2\,(2x^2 - 3)e^{-x^2} > 0 \iff 2x^2 - 3 > 0 \iff x < -\sqrt{\frac{3}{2}} \quad ; \quad x > \sqrt{\frac{3}{2}} .$$

La funzione è concava verso l'alto in $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$; concava verso il basso in $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$; concava verso l'alto in $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$. I punti $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ sono punti di flesso.

Si osservi che, essendo la derivata prima dispari (in quanto prodotto di una funzione pari e di una dispari), la funzione stessa è pari, così come la derivata seconda; i punti di flesso, pertanto, sono simmetrici rispetto all'asse delle y. Si osservi, inoltre, che, nel punto di massimo, $F''(0) = 0$. Calcolando ulteriormente le derivate, come utile esercizio, si ha

$$F'''(x) = (-4x^5 + 14x^3 - 6x)e^{-x^2} \qquad \text{e} \qquad F'''(0) = 0 ,$$
$$F^{iv}(x) = (8x^6 - 48x^4 + 54x^2 - 6)e^{-x^2} \qquad \text{e} \qquad F^{iv}(0) = -6 < 0 ,$$

rispettando la teoria, che prevede che, se la prima derivata non nulla è di ordine pari ed è negativa, il punto stazionario è di massimo.

Infine, poiché la funzione $f(x) = P_n(x)e^{-x^2}$ è integrabile in senso improprio su $\mathbb{R}$ per ogni polinomio $P_n(x)$, si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} \int_0^x t^3 e^{-t^2}\, dt \in \mathbb{R} ,$$

cioè la funzione ammette limite finito, e quindi asintoto orizzontale, per $x \to \pm\infty$.

Svolgimento esercizio 2:

a) L'integrale può essere risolto sia con il metodo di sostituzione (ponendo $y = -t^2$, da cui $dy = -2\, dt$), sia integrando per parti. Utilizzeremo il secondo metodo, invitando il lettore a verificare il risultato col primo metodo.

$$\int t^3 e^{-t^2}\, dt = -\frac{1}{2}\int t^2 \left(e^{-t^2}\right)'\, dt = -\frac{1}{2}\left[t^2 e^{-t^2} - \int 2te^{-t^2}\, dt\right] = -\frac{1}{2}\,(t^2+1)e^{-t^2} + C .$$

Pertanto

$$F(x) = 1 + \frac{1}{2}\,(t^2+1)e^{-t^2}\Big|_0^x = \frac{1}{2}\left[1 + (x^2+1)e^{-x^2}\right] .$$

b) Come già osservato, la funzione è continua in $\mathbb{R}$ e, per il Teorema di Torricelli, derivabile. Inoltre (ricordando che la funzione è pari)

$$\lim_{x\to\pm\infty} F(x) = \frac{1}{2}\left[1 + \lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x^2+1)}{e^{x^2}}\right] = \frac{1}{2} .$$

Come previsto, la funzione ha asintoto orizzontale destro e sinistro, di equazione $y = \frac{1}{2}$.

c) La funzione ha due flessi. L'equazione della retta tangente alla curva grafico di F nel punto $(x_0, F(x_0))$ è $y = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0)$. Per $x_0 = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$, si ha

$$F\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{5}{2}e^{-3/2}\right] ;$$
$$F'\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = -\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3 e^{-3/2} = \mp\left(\frac{3}{2e}\right)^{3/2} .$$

Quindi, nei punti $\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2}\left[1 + \frac{5}{2}e^{-3/2}\right]\right)$ la tangente ha equazione

$$y = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{5}{2}e^{-3/2}\right] \mp \left(\frac{3}{2e}\right)^{3/2} \cdot \left[x \mp \sqrt{\frac{3}{2}}\right] = \frac{1}{2} + \frac{7}{2}\, e^{-3/2} \mp \left(\frac{3}{2e}\right)^{3/2} x .$$

d) Il grafico è riportato nel Capitolo 11.

Svolgimento esercizio 3: Poiché $x^2 - 2x + 2 > 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, la funzione integranda non ha singolarità. Occorre dunque stabilire il suo comportamento solo per $x \to +\infty$:

$$f(x) = \frac{x-1}{(x^2-2x+2)^\alpha} \sim \frac{x}{x^{2\alpha}} = \frac{1}{x^{2\alpha-1}} .$$

Quindi f è impropriamente integrabile se $2\alpha - 1 > 1$, cioè se $\alpha > 1$.

In tal caso, effettuando la sostituzione $x^2 - 2x + 2 = t$, da cui $dt = 2(x-1)\, dx$, $t(0) = 2$, $\lim_{x\to+\infty} t(x) = +\infty$, si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{x-1}{(x^2-2x+2)^\alpha}\, dx = \frac{1}{2}\int_2^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{2(1-\alpha)}\, t^{1-\alpha}\Big|_2^{+\infty} =$$
$$= \frac{1}{2(1-\alpha)}\left[\lim_{t\to+\infty} t^{1-\alpha} - 2^{1-\alpha}\right] = \frac{1}{2^\alpha(\alpha-1)}$$

(ricordando che $\alpha > 1$).

SVOLGIMENTO TEMA 10.2

Svolgimento esercizio 1: Utilizzando la formula risolutiva delle equazioni lineari, con $a(x) = -3$, $b(x) = 2x$ e $x_0 = 0$, si ottiene

$$y(x) = e^{3x} \int_0^x 2t \exp\left(-\int_0^t 3\, ds\right)\, dt = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{9}e^{3x} - \frac{2}{9}.$$

Svolgimento esercizio 2: Poiché $\phi'(t) = (2, 2t, e^t)$, si ottiene

$$\vec{T}(0) = \frac{(2,0,1)}{\sqrt{5}}.$$

Svolgimento esercizio 3: Poiché $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3 + e^{x-y}$, si ottiene $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 3 + e$.

Svolgimento esercizio 4: Effettuando un cambiamento in coordinate polari centrate nel punto $(1,1)$, cioè $x = 1 + r\cos\vartheta$, $y = 1 + r\sin\vartheta$, si ottiene

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-1)^2(y-1)^7}{[(x-1)^2+(y-1)^2]^{5/2}} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^9\cos^2\vartheta\sin^7\vartheta}{r^5} = 0.$$

Svolgimento esercizio 5: Effettuando un cambiamento in coordinate polari centrate nell'origine, cioè $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$, si ottiene

$$\iint_{\widetilde{E}} \frac{r^2 \sin\vartheta\, e^{r\cos\vartheta}}{r}\, dr\, d\vartheta$$

dove $\widetilde{E} = \{(r,\vartheta) \in \mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi) \ :\ 1 < r < 2,\ \pi/4 < \vartheta < 2\pi/3\}$. Quindi, l'integrale proposto diviene

$$\int_1^2 \left(\int_{\pi/4}^{2\pi/3} r\sin\vartheta\, e^{r\cos\vartheta}\, d\vartheta\right) dr = -\int_1^2 \left(e^{r\cos\vartheta}\Big|_{\pi/4}^{2\pi/3}\right) dr = -\int_1^2 \left(e^{-r/2} - e^{r/\sqrt{2}}\right) dr$$

$$= \left(2e^{-r/2} + \sqrt{2}e^{r/\sqrt{2}}\right)\Big|_1^2 = 2e^{-1} + \sqrt{2}e^{\sqrt{2}} - 2e^{-1/2} - \sqrt{2}e^{1/\sqrt{2}}.$$

Svolgimento esercizio 6: Osserviamo che f è nulla ristretta agli assi cartesiani, pertanto si ottiene subito che $\nabla f(0,0) = (0,0)$. A questo punto, per stabilire se f è differenziabile nell'origine, dobbiamo verificare se

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0. \tag{10.1}$$

Osserviamo che, per $(h,k) \to (0,0)$, si ha

$$0 \le \frac{|f(h,k)|}{\sqrt{h^2+k^2}} \sim \frac{|h^5k^4|}{h^6+k^8}\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} \le \frac{|h|^2}{2}\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} \le \frac{|h|^2}{2|h|} = \frac{|h|}{2} \to 0$$

dove la seconda disuguaglianza è conseguenza di

$$2|h^3k^4| \le h^6 + k^8,$$

e nella terza disuguaglianza si è minorato il denominatore, eliminando il termine k^2. Pertanto, dal Teorema del confronto, si ottiene che (10.1) è verificata e, quindi, f è differenziabile nell'origine; conseguentemente essa è anche continua in $(0,0)$.

SVOLGIMENTO TEMA 10.3

Svolgimento esercizio 1:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 5\frac{\partial}{\partial y}(x+2y)^2 = 20(x+2y).$$

Svolgimento esercizio 2:

$$\begin{aligned}\int_0^2 x^2 e^{2x}\, dx &= \frac{1}{2}x^2e^{2x}\Big|_0^2 - \int_0^2 xe^{2x}\, dx \\ &= 2e^4 - \frac{1}{2}xe^{2x}\Big|_0^2 + \frac{1}{2}\int_0^2 e^{2x}\, dx \\ &= 2e^4 - e^4 + \frac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^2 = \frac{1}{4}(5e^4 - 1).\end{aligned}$$

Oppure:

$$\begin{aligned}\int x^2e^{2x}\, dx &= \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \int xe^{2x}\, dx \\ &= \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{1}{2}\int e^{2x}\, dx \\ &= \frac{1}{4}e^{2x}(2x^2 - 2x + 1) + C =: F(x) + C,\end{aligned}$$

da cui

$$\int_0^2 x^2e^{2x}\, dx = F(2) - F(0) = \frac{1}{4}(5e^4 - 1).$$

Svolgimento esercizio 3: Ponendo $y = z^2$, si ottiene l'equazione

$$y^2 - y - 2 = 0 \iff y = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}.$$

Poiché si ha

$$z^2 = 2 \iff z = \pm\sqrt{2}, \qquad z^2 = -1 \iff z = \pm i,$$

le soluzioni sono $z = \pm\sqrt{2};\ \pm i$.

Svolgimento esercizio 4: Si ha

$$\frac{1}{\log(n^3)\sin\frac{1}{n}} \sim \frac{1}{3(\log n)\frac{1}{n}} = \frac{n}{3\log n},$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log(n^3)\sin\frac{1}{n}} = +\infty.$$

Svolgimento esercizio 5: Si può semplicemente osservare che

$$f(x,y) = g(xy), \qquad \text{dove} \quad g(t) := te^{-t}.$$

Poiché $\{xy : (x,y) \in D\} = [0,1]$, è sufficiente studiare la funzione g in $[0,1]$. Si ha

$$g'(t) = (1-t)e^{-t}, \qquad \text{in particolare} \quad g'(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0,1],$$

per cui il massimo e il minimo di g su $[0,1]$ sono assunti rispettivamente in $t = 1$ e $t = 0$, e valgono rispettivamente e^{-1} e 0. Pertanto

$$\begin{aligned} &\max_D f = e^{-1} \qquad &&\text{assunto in} \quad D \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}, \\ &\min_D f = 0 &&\text{assunto in} \quad D \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}. \end{aligned}$$

Oppure:

$$\nabla f(x,y) = (1-xy)e^{-xy}(y,x) = (0,0) \iff \begin{cases} (x,y) = (0,0) \\ xy = 1, \end{cases}$$

quindi non ci sono punti stazionari interni a D. Poiché f non ha punti singolari, i punti estremi sono da ricercarsi sulla frontiera del dominio:

$$\partial D = \bigcup_{i=1}^{4} \gamma_i, \qquad \begin{cases} \gamma_1 = \partial D \cap \{y = 0\} \\ \gamma_2 = \partial D \cap \{x = 4\} \\ \gamma_3 = \partial D \cap \{xy = 1\} \\ \gamma_4 = \partial D \cap \{x = 1\} \end{cases}.$$

Si ha

$$f\Big|_{\gamma_1} \equiv 0,$$

$$f\Big|_{\gamma_2} = 4ye^{-4y} =: g_2(y), \qquad y = [0, 1/4], \qquad \begin{cases} \max\limits_{[0,1/4]} g_2(y) = g_2(1/4) = e^{-1}, \\ \min\limits_{[0,1/4]} g_2(y) = g_2(0) = 0 \end{cases}$$

$$f\Big|_{\gamma_3} \equiv e^{-1},$$

$$f\Big|_{\gamma_4} = ye^{-y} =: g_4(y), \qquad y = [0,1], \qquad \begin{cases} \max\limits_{[0,1]} g_4(y) = g_4(1) = e^{-1}, \\ \min\limits_{[0,1]} g_4(y) = g_4(0) = 0, \end{cases}$$

da cui si conclude che il minimo assoluto è 0, assunto su γ_1, e il massimo assoluto è e^{-1}, assunto su γ_3.

Svolgimento esercizio 6: Si ha:

$$\frac{n^{\alpha+1}}{\arctan \frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}} \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}} \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = n^{\alpha+\frac{3}{2}}.$$

Dal criterio del confronto asintotico segue

$$\alpha + \frac{3}{2} < -1 \iff \alpha < -\frac{5}{2}.$$

Svolgimento esercizio 7: Ponendo

$$y = \log x \implies x = e^y, \; dx = e^y dy,$$

si ottiene

$$\int \frac{\cos(\log x)}{x \sin(\log x)}\, dx = \int \frac{\cos y}{e^y \sin y} e^y\, dy = \int \frac{\cos y}{\sin y}\, dy = \int \frac{1}{\sin y} \left(\frac{d}{dy} \sin y\right) dy$$
$$= \log|\sin y| + C = \log|\sin(\log x)| + C\,.$$

Risposta domanda 1: Si ha

$$x + \frac{1}{5x} > 0 \iff \begin{cases} 5x^2 + 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} 5x^2 + 1 < 0 \\ x < 0. \end{cases}$$

Pertanto

$$\left\{x \in \mathbb{R} : \; x + \frac{1}{5x} > 0\right\} = (0, +\infty)$$

che non è superiormente limitato.

Risposta domanda 2: La risposta è sì, perché f è strettamente monotona crescente in $\mathbb{R}^+$, come si deduce dal fatto che $f'(x) = 2xe^{1+x^2} > 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}^+$.

Risposta domanda 3: Si dice che la funzione $f : I \to \mathbb{R}$ ammette limite $l \in \mathbb{R}$ per $x \to 3$, se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tale che} \quad \forall x \in I$$
$$\text{se} \quad |x - 3| < \delta \quad \implies \quad |f(x) - l| < \varepsilon\,.$$

Alternativamente, si dice che la funzione $f : I \to \mathbb{R}$ ammette limite $l \in \mathbb{R}$ per $x \to 3$, se, per ogni successione $\{x_n\} \subseteq I$, con $x_n \neq 3$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, e tale che $x_n \to 3$, per $n \to +\infty$, si ha che $f(x_n) \to l$.

SVOLGIMENTO TEMA 10.4

Svolgimento esercizio 1: Utilizzando il teorema di derivazione delle funzioni composte, si ottiene

$$f'(x) = \frac{\cos(\log 2x)}{x} .$$

Svolgimento esercizio 2: Dal teorema di riduzione degli integrali doppi e tenendo conto che l'insieme D è un rettangolo ed $f(x,y) = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{-y}$, si ottiene

$$\iint_D \mathrm{e}^{x-y}\, dx\, dy = \left(\int_0^1 \mathrm{e}^x\, dx\right)\left(\int_0^2 \mathrm{e}^{-y}\, dy\right) = (\mathrm{e}-1)(1-\mathrm{e}^{-2}) .$$

Svolgimento esercizio 3: Ponendo $w = 3z - i$, l'equazione proposta diviene $w^2 = 1$; si tratta quindi di trovare le due radici complesse di 1, cioè $w_{1,2} = \pm 1$. Pertanto

$$z_1 = \frac{1+i}{3} \qquad z_2 = \frac{-1+i}{3} .$$

Svolgimento esercizio 4: Ricordando che, per $t \to 0$, $\log(1+t) \sim t$, e ponendo $t = \mathrm{e}^{-7x}$, per $x \to +\infty$, si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \log(1+\mathrm{e}^{-7x}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^{7x}} = 0 .$$

Svolgimento esercizio 5: Poiché per $t > 0$ si ha $\arctan t > 0$ e, quindi, $\mathrm{sign}(\arctan t) = 1$, otteniamo

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ (la funzione è dispari); C.E. $= (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;

$f(x) > 0 \ \ \forall x > 0$; $f(x) < 0 \ \ \forall x < 0$;

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm 1$;

$y = 1$ è asintoto orizzontale a $+\infty$; $y = -1$ è asintoto orizzontale a $-\infty$;

$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \pm\infty$; $x = 0$ è asintoto verticale per f ;

$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$; $f'(x) < 0 \ \ \forall x \in$ C.E. .

Anche se non è richiesto dall'esercizio, studiamo il segno della derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{3x^2+2}{x^3(x^2+1)^{3/2}} > 0 \qquad \text{per } x > 0 .$$

Pertanto la funzione è concava in $(-\infty, 0)$ e convessa in $(0, +\infty)$. Non vi sono punti di flesso. Il grafico è riportato nel Capitolo 11.

Svolgimento esercizio 6: Osserviamo che l'integrale proposto è un integrale improprio, pertanto bisogna studiare il comportamento della funzione in un intorno destro di $x = 0$. Si ottiene che in $U(0^+)$

$$f(x) \sim \begin{cases} \dfrac{\pi}{2\sqrt{x}} & \text{se } \alpha < 0 \,; \\ \dfrac{\pi}{4\sqrt{x}} & \text{se } \alpha = 0 \,; \\ \dfrac{1}{x^{1/2-\alpha}} & \text{se } \alpha > 0 \,; \end{cases}$$

pertanto l'integrale improprio esiste finito per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento Esercizio 7: Ricordando che, per $t \to 0$, $\sqrt{1+t} \sim 1 + \frac{1}{2}t$ e ponendo $t = -2/n$, si ottiene

$$\frac{1-\sqrt{1-2/n}}{n} \sim \frac{1-(1-1/n)}{n} = \frac{1}{n^2} .$$

Pertanto, la serie proposta converge.

Risposta domanda 1: Poiché $1/\log n$ è una successione monotona decrescente e infinitesima, si ottiene che $\inf E = 0$.

Risposta domanda 2:

$$\arccos[\cos(\frac{20}{6}\pi)] = \arccos[\cos(\frac{4}{3}\pi)] = \arccos[\cos(\frac{2}{3}\pi)] = \frac{2}{3}\pi .$$

Risposta domanda 3: Data $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e posta $s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$, si dice che la serie converge ad $S \in \mathbb{R}$ se $\lim_{N\to+\infty} s_N = S$.

SVOLGIMENTO TEMA 10.5

Svolgimento esercizio 1: Ricordando la legge di derivazione dei rapporti e utilizzando il teorema di derivazione delle funzioni composte, si ottiene

$$f'(x) = \frac{(-\sin x)(1+x^2) - 2x\cos x}{(1+x^2)^2},$$

da cui $f'(\pi) = \frac{2\pi}{(1+\pi^2)^2}$.

Svolgimento esercizio 2: Operando la sostituzione $t = \arctan x$, da cui $t(0) = 0$, $t(1) = \pi/4$, ed osservando che $\frac{1}{1+x^2}\, dx = dt$, si ottiene

$$\int_0^1 \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2} \arctan x \, dx = \int_0^{\pi/4} t\, e^t \, dt .$$

Integrando l'ultima espressione per parti, ricaviamo

$$\int_0^{\pi/4} t\, e^t\, dt = t\, e^t \Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} e^t\, dt = (t-1)e^t\,\Big|_0^{\pi/4} = (\pi/4 - 1)e^{\pi/4} + 1 .$$

Svolgimento esercizio 3: Poiché il problema di Cauchy proposto ammette un'unica soluzione e $y(x) \equiv 0$ risolve sia l'equazione differenziale che la condizione iniziale, si ha che la soluzione è proprio la funzione $y(x) \equiv 0$.

Svolgimento esercizio 4: Ricordando la gerarchia degli infiniti, otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 + \sin n - e^n}{\log^2 n + n^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-e^n}{n^n} = 0 .$$

Risposta domanda 1: Ad esempio

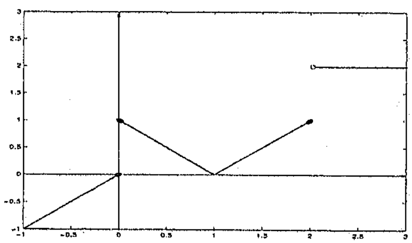


Figura 10.5

Grafico

Risposta domanda 2: Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice di massimo assoluto per f se

$$f(x) \le f(x_0) \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R} .$$

Risposta domanda 3: Utilizzando le formule della trigonometria si ottiene

$$f(x) = \sin(\pi x) = \sin[\pi(x-1) + \pi] = -\sin[\pi(x-1)] = \sin[\pi(1-x)] .$$

Ponendo quindi $t = \pi(1-x)$ e ricordando che $\sin t = t - t^3/6 + o(t)$, si ottiene

$$f(x) = \pi(1-x) - \frac{\pi^3(1-x)^3}{6} + o\Big((1-x)^3\Big) .$$

SVOLGIMENTO TEMA 10.6

Svolgimento esercizio 1: Ricordando la legge di derivazione dei rapporti e utilizzando il teorema di derivazione delle funzioni composte, si ottiene

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\log x - \frac{1}{x}\arctan x}{\log^2 x} = \frac{x\log x - \arctan x - x^2\arctan x}{x(1+x^2)\log^2 x} .$$

Svolgimento esercizio 2: Poiché il numero complesso $3+3i$ si può scrivere in forma esponenziale come $3\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$, si ottiene

$$\sqrt[4]{3+3i} = \begin{cases} \sqrt[4]{3}\sqrt[8]{2}\, e^{i\frac{\pi}{16}} \\ \sqrt[4]{3}\sqrt[8]{2}\, e^{i\frac{9\pi}{16}} \\ \sqrt[4]{3}\sqrt[8]{2}\, e^{i\frac{17\pi}{16}} \\ \sqrt[4]{3}\sqrt[8]{2}\, e^{i\frac{25\pi}{16}} \end{cases} .$$

Svolgimento esercizio 3: Poiché l'equazione differenziale proposta è a variabili separabili e non ha soluzioni singolari, si ottiene $\int y^2\, dy = \int x^3\, dx$ che fornisce, una volta inserita la condizione iniziale,

$$\frac{y^3(x)}{3} = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{3} \qquad \text{ovvero} \qquad y(x) = \sqrt[3]{\frac{3}{4}x^4 + 1} .$$

Svolgimento esercizio 4: Effettuando una sostituzione in coordinate polari piane centrate nell'origine, si ottiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^3\cos^3\vartheta}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \rho\cos^3\vartheta = 0 .$$

Svolgimento esercizio 5:

$\text{C.E.} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\quad f(x) > 0 \ \ \forall x \in \text{C.E.};$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ non ci sono asintoti obliqui a $+\infty$,

in quanto, per $x \to +\infty$, $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{e^x - 1} \sim e^x$;

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^+$ $\quad y = 0$ asintoto orizzontale a $-\infty$;

$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = +\infty$ $\quad x = 0$ asintoto verticale;

$$f'(x) = \begin{cases} e^{2x}\frac{e^x-2}{(e^x-1)^2} & \text{se } x > 0; \\ -e^{2x}\frac{e^x-2}{(e^x-1)^2} & \text{se } x < 0; \end{cases}$$

$f'(x) < 0$ per $0 < x < \log 2$; $\quad f'(x) > 0$ per $x < 0$, $x > \log 2$;

$f'(x) = 0$ per $x = \log 2$ punto di minimo relativo ; $\quad f(\log 2) = 4$.

Il grafico è riportato nel Capitolo 11.

Svolgimento esercizio 6: Osserviamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{n\alpha}\cos^3 n}{n(e^{2n}-1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cos^3 n}{n} e^{(\alpha-2)n} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha \le 2 ; \\ \text{caso di indecisione } [0\cdot\infty] & \text{se } \alpha > 2 . \end{cases}$$

Tuttavia, nel caso $\alpha > 2$, il limite proposto non esiste, poiché $\frac{e^{(\alpha-2)n}}{n}$ è una successione divergente, mentre $\cos^3 n$ oscilla tra -1 ed 1.

Svolgimento esercizio 7: Per stabilire l'esistenza dell'integrale improprio proposto, dobbiamo studiare il comportamento della funzione integranda in un intorno destro di $x = 0$ ed in un intorno di $+\infty$. Otteniamo

$$U(0^+) \qquad f(x) \sim \frac{x^{1/2}}{2} = \frac{1}{2x^{-1/2}} \qquad \Longrightarrow \quad \text{esiste l'integrale improprio, poiché } -1/2 < 1;$$

$$U(+\infty) \qquad f(x) \sim \frac{\pi/2}{3x^{9/2}} \qquad \Longrightarrow \quad \text{esiste l'integrale improprio, poiché } 9/2 > 1.$$

Pertanto, l'integrale proposto esiste in senso improprio.

Risposta domanda 1: Poiché $3 + \sin\frac{1}{n} \to 3$, per $n \to +\infty$, per definizione di funzione continua si ha

$$\lim_{n\to+\infty} f\left(3 + \sin\frac{1}{n}\right) = f(3) .$$

Risposta domanda 2: Per esempio, si può scegliere un intervallo del tipo (a, b) con $a > -\infty$.

Risposta domanda 3: Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice monotona non decrescente se, per ogni coppia di numeri $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tali che $x_1 \le x_2$ si ha $f(x_1) \le f(x_2)$.

SVOLGIMENTO TEMA 10.7

Svolgimento esercizio 1: Ponendo $z - 2i = w$, si ottiene $w = \sqrt[5]{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)}$, ovvero

$$w_1 = \cos\frac{\pi}{30} + i\sin\frac{\pi}{30} \qquad w_2 = \cos\frac{13\pi}{30} + i\sin\frac{13\pi}{30} \qquad w_3 = \cos\frac{25\pi}{30} + i\sin\frac{25\pi}{30}$$
$$w_4 = \cos\frac{37\pi}{30} + i\sin\frac{37\pi}{30} \qquad w_5 = \cos\frac{49\pi}{30} + i\sin\frac{49\pi}{30}\ .$$

Pertanto le soluzioni richieste sono

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{30} + i\left(2 + \sin\frac{\pi}{30}\right) \qquad z_2 = \cos\frac{13\pi}{30} + i\left(2 + \sin\frac{13\pi}{30}\right)$$
$$z_3 = \cos\frac{25\pi}{30} + i\left(2 + \sin\frac{25\pi}{30}\right)$$
$$z_4 = \cos\frac{37\pi}{30} + i\left(2 + \sin\frac{37\pi}{30}\right) \qquad z_5 = \cos\frac{49\pi}{30} + i\left(2 + \sin\frac{49\pi}{30}\right)\ .$$

Svolgimento esercizio 2: Ricordando che

$$(1 - \cos\varepsilon_n) \sim \frac{1}{2}\varepsilon_n^2 \qquad \text{per } \varepsilon_n \to 0$$

e ponendo $\varepsilon_n = \log n/n$, si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3\left(1 - \cos\frac{\log n}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3\frac{\log^2 n}{2n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n\log^2 n} = 0\ .$$

Svolgimento esercizio 3: Osservando che $\log(\mathrm{e}x) = \log \mathrm{e} + \log x = 1 + \log x$ ed effettuando il cambiamento di coordinate $y = \log x$, da cui $dy = \frac{1}{x}\,dx$, $y(1) = 0$ e $y(\mathrm{e}) = 1$, si ottiene

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\log x}{\log(\mathrm{e}x)}\,\frac{1}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{y}{1+y}\,dy = \int_0^1 1\,dy - \int_0^1 \frac{1}{1+y}\,dy = [y - \log(1+y)]\Big|_0^1 = 1 - \log 2\ .$$

Svolgimento esercizio 4: Ricordando le regole di derivazione delle funzioni composte, si ottiene

$$f'(x) = 2\sin x\cos x\,\mathrm{e}^{\sin^2 x}\ .$$

Svolgimento esercizio 5:

$$\text{C.E.} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)\ ; \qquad f(x) > 0 \quad \forall\, x \in \text{C.E.}\ ;$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1/\mathrm{e}\ ; \qquad \lim_{x\to0^-} f(x) = 0\ ; \qquad \lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty\ ; \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \mathrm{e}\ ;$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{x-1}{x}} & \text{se } x > 1 \\ -\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1-x}{x}} & \text{se } x < 0\ ,\ 0 < x < 1 \end{cases}\ ;$$

$f'(x) > 0$ per $x > 1$; $\quad f'(x) < 0$ per $x < 0$ e per $0 < x < 1$;

$$\lim_{x\to0^-} f'(x) = 0\ ; \qquad \lim_{x\to1^\pm} f'(x) = \pm1\ ;$$

$$f''(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^3}\right)\mathrm{e}^{\frac{x-1}{x}} & \text{se } x > 1 \\ \left(\frac{1}{x^4} + \frac{2}{x^3}\right)\mathrm{e}^{\frac{1-x}{x}} & \text{se } x < 0\ ,\ 0 < x < 1 \end{cases}\ ;$$

$f''(x) > 0$ per $-1/2 < x < 0$ e per $0 < x < 1$; $\quad f''(x) < 0$ per $x < -1/2$ e per $x > 1$;

$f''(x) = 0\ ,\ x = -1/2$.

La funzione assegnata ha asintoto orizzontale $y = 1/\mathrm{e}$, per $x \to -\infty$, ha asintoto orizzontale $y = \mathrm{e}$, per $x \to +\infty$, ha asintoto verticale per $x \to 0^+$. Inoltre ha un punto angoloso in $x = 1$ ed un punto di flesso in $x = -1/2$. Il grafico è riportato nel Capitolo 11.

Svolgimento esercizio 6: Ponendo $a_n = \frac{2+n^2\log n}{n^\alpha}$, lo studio della convergenza assoluta della serie proposta coincide con lo studio della convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Poiché, inoltre, $a_n \sim (n^2\log n)/n^\alpha = n^{2-\alpha}\log n$, per il criterio del confronto asintotico, si ottiene che la serie proposta converge se $\alpha > 3$, mentre diverge se $\alpha \le 3$.

Per quanto riguarda, invece, la convergenza semplice, notiamo che $a_n \to 0$, se e solo se $\alpha > 2$. In tal caso, ponendo $f(x) = \frac{2+x^2\log x}{x^\alpha} = \frac{2}{x^\alpha} + \frac{x^2\log x}{x^\alpha} =: f_1(x) + f_2(x)$, osserviamo che f_1 è monotona decrescente e

$$f_2'(x) = \frac{-\alpha x^{\alpha+1}\log x + x^{\alpha+1} + 2x^{\alpha+1}\log x}{x^{2\alpha}} \sim -\frac{(\alpha-2)\log x}{x^{\alpha-1}} < 0 \qquad \text{per } x \to +\infty\ ,$$

cioè anche f_2 è monotona decrescente, almeno per valori grandi di x. Pertanto, si ottiene che a_n è definitivamente monotona decrescente, in quanto lo è la funzione ad essa associata. Quindi, dal criterio di Leibniz, la serie proposta converge semplicemente per $\alpha > 2$.

Svolgimento esercizio 7: Osserviamo che la funzione integranda va studiata in un intorno di $+\infty$ ed in un intorno di 2. Nel primo caso, $f(x) \sim 1/x^3$, che è impropriamente integrabile all'infinito; nel secondo caso $f(x) \sim \frac{1}{18\sqrt{|x-2|}}$, che è impropriamente integrabile in un intorno di $x = 2$, pertanto l'integrale proposto esiste finito.

Risposta domanda 1: Poiché $\mathrm{e}^{-x} \to 0$ per $x \to +\infty$ e $\sin x$ non ammette limite per $x \to +\infty$, si ha che il limite proposto non esiste.

Risposta domanda 2: La funzione proposta è derivabile poiché è la composizione della funzione integrale $F(y) = \int_2^y \log(1+t^2)\,dt$, che è derivabile per il Teorema di Torricelli, in quanto la funzione integranda è continua, e della funzione lineare $g(x) = 4x$, che è ovviamente derivabile. La derivata richiesta, pertanto, è

$$F'(x) = 4\log(1 + 16x^2)\ .$$

Risposta domanda 3: Dalla formula di Taylor generale, si ha che

$$f(x) = f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + o\big((x-2)^2\big)\ .$$

Inoltre

$$f(2) = -1 \qquad f'(2) = -\frac{\pi}{2}\sin\pi = 0 \qquad f''(2) = -\frac{\pi^2}{4}\cos\pi = \frac{\pi^2}{4}$$

da cui segue

$$f(x) = -1 + \frac{\pi^2}{8}(x-2)^2 + o\big((x-2)^2\big)\ .$$

SVOLGIMENTO TEMA 10.8

Svolgimento esercizio 1: Se poniamo $w = z - i$, l'equazione proposta diviene $w^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$, cioè si tratta di trovare le 3 radici cubiche di $e^{-i\pi/4}$, che sono

$$w_1 = e^{-i\frac{\pi}{12}} \qquad w_2 = e^{i\frac{7\pi}{12}} \qquad w_3 = e^{i\frac{15\pi}{12}},$$

da cui

$$z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - i\left(\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) - 1\right) \qquad z_2 = \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\left(\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) + 1\right)$$

$$z_3 = \cos\left(\frac{15\pi}{12}\right) + i\left(\sin\left(\frac{15\pi}{12}\right) + 1\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Svolgimento esercizio 2:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(1 + \frac{3}{n^2}\right)}{\sin\left(\frac{2}{n^2}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{3}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{3}{2}.$$

Svolgimento esercizio 3:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\log(1+xy) + \frac{\partial}{\partial x}e^{3x+2y} = \frac{y}{1+xy} + 3e^{3x+2y},$$

da cui $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 3$.

Svolgimento esercizio 4: Effettuando un cambiamento in coordinate polari con centro in $(0,1)$, si ottiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2(y-1)^3}{[x^2+(y-1)^2]^{5/2}} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^5\cos^2\vartheta\sin^3\vartheta}{\rho^5} = \lim_{\rho\to 0^+}\cos^2\vartheta\sin^3\vartheta$$

da cui si deduce che il limite proposto non esiste.

Si può procedere anche in questo secondo modo: consideriamo le due rette $y = 1 + x$ e $y = 1 + 2x$ e calcoliamo il limite proposto lungo queste due direzioni:

$$\lim_{x\to 0} f(x, 1+x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2x^3}{[x^2+x^2]^{5/2}} = \lim_{x\to 0}\frac{x^5}{2^{5/2}x^5} = 2^{-5/2}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x, 1+2x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(2x)^3}{[x^2+(2x)^2]^{5/2}} = \lim_{x\to 0}\frac{8x^5}{5^{5/2}x^5} = \frac{8}{5^{5/2}}.$$

Poiché i due limiti vengono diversi, il limite proposto non esiste.

Svolgimento esercizio 5: Effettuando un cambiamento in coordinate polari centrate nell'origine, si ottiene

$$\iint_E \frac{y\, e^{x/\sqrt{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)^{1/2}}\,dx\,dy = \iint_{\widetilde{E}} \frac{\rho\sin\vartheta\, e^{\cos\vartheta}}{\rho}\rho\,d\rho\,d\vartheta$$

dove $\widetilde{E} = \{1 < \rho < 2\,,\ \pi/4 < \vartheta < 2\pi/3\}$. Utilizzando ora il teorema di riduzione e ponendo $s = \cos\vartheta$, da cui $\sin\vartheta\,d\vartheta = -ds$, $s(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ e $s(2\pi/3) = -1/2$, si ricava

$$\iint_E \frac{y\, e^{x/\sqrt{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)^{1/2}}\,dx\,dy = \left(\int_1^2 \rho\,d\rho\right)\left(-\int_{1/\sqrt{2}}^{-1/2} e^s\,ds\right) = \frac{3}{2}(e^{1/\sqrt{2}} - e^{-1/2}).$$

Svolgimento esercizio 6: Innanzitutto osserviamo che, per $(x,y)\to(0,1)$,

$$|f(x,y)| \le 3\left|\frac{(y-1)x^5}{x^4}\right| = 3|(y-1)x| \to 0$$

da cui si ottiene subito che f è continua. Per studiare la differenziabilità, dobbiamo preventivamente calcolare le derivate parziali in $(0,1)$. Ovviamente, esse sono entrambe nulle, poiché la funzione è costantemente nulla lungo gli assi $x = 0$ e $y = 1$. Non ci resta che controllare se è nullo il seguente limite

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,1+k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{k(2+k)(3h+1)\sin(h^5)}{(h^4+k^8)\sqrt{h^2+k^2}}.$$

Quest'ultimo limite risulta essere nullo, in quanto, per $(h,k)\to(0,0)$, si ha

$$\left|\frac{k(2+k)(3h+1)\sin(h^5)}{(h^4+k^8)\sqrt{h^2+k^2}}\right| \le \left|\frac{3kh^5}{h^4k}\right| \to 0.$$

Quindi la funzione è differenziabile.

Svolgimento esercizio 7: Osserviamo che l'equazione differenziale proposta è un'equazione a variabili separabili ed ha come unico integrale singolare $y(x) \equiv 0$, che non risolve il problema di Cauchy assegnato. Pertanto procediamo separando le variabili, si ottiene così

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int e^x\,dx$$

da cui si ricava $1/y(x) = -e^x + C$. Imponendo la condizione iniziale e ricavando, infine, $y(x)$, si ottiene

$$y(x) = \frac{1}{2 - e^x} \qquad \forall x \in (-\infty, \log 2).$$

Risposta domanda 1: Poichè, per $x \to 0^+$, si ha che $e^{-x}\to 1$, mentre $3/x \to +\infty$ ed il coseno è una funzione oscillante a $+\infty$, il limite proposto non esiste.

Risposta domanda 2: La funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice derivabile nel punto $x_0 \in I$ se esiste finito il limite del rapporto incrementale di f in x_0, cioè se esiste finito

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Risposta domanda 3: Ricordando che, per una funzione sviluppabile in serie di Taylor in $x_0 = 2$ si ha

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n \tag{10.2}$$

e nel nostro caso

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3k}{k(k+1)e^k}(x-2)^{k(2k+1)} \tag{10.3}$$

dobbiamo innanzitutto trovare, ammesso che esista, l'indice $k \in \mathbb{N}$ tale che $k(2k+1) = 37$. Risolvendo questa semplice equazione, si ottiene che non ha soluzioni intere, pertanto il termine $(x-2)^{37}$ non compare nella (10.3), ovvero il suo coefficiente è nullo. Confrontando con la (10.2), si ricava che la derivata di ordine 37 di f nel punto $x_0 = 2$ è nulla.

SVOLGIMENTO TEMA 10.9

Svolgimento esercizio 1: Ricordando la regole di derivazione parziale, si ottiene
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{e^{x^2}+1}{\log(x^2+1)}2y\,.$$

Svolgimento esercizio 2: L'equazione proposta si può riscrivere nella forma $z^4 = -16$, pertanto dalla formula delle radici si ottiene
$$z = \sqrt[4]{-16} = \begin{cases} 2\,e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}(1+i) \\ 2\,e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}(-1+i) \\ 2\,e^{i\frac{5\pi}{4}} = \sqrt{2}(-1-i) \\ 2\,e^{i\frac{7\pi}{4}} = \sqrt{2}(1-i) \end{cases}$$

Svolgimento esercizio 3: Utilizzando la sostituzione di variabile $t = e^x$, da cui $dt = e^x\,dx$, si ottiene
$$I = \int \sin t\,dt\Big|_{t=e^x} = (-\cos t + C)\Big|_{t=e^x} = -\cos(e^x) + C\,.$$

Svolgimento esercizio 4: Ricordando che, per $x \to 0$, $e^x - 1 \sim x$ e che in un polinomio domina l'infinitesimo di potenza inferiore, si ottiene
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{x^2 + 2\sqrt[3]{x} - x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{2\sqrt[3]{x}} = 0\,.$$

Svolgimento esercizio 5: L'equazione proposta è lineare del primo ordine non omogenea; pertanto, utilizzando la formula risolutiva con $a(x) = -3$ e $b(x) = 2e^{2x}$ e imponendo la condizione iniziale, si ottiene
$$y(x) = 2e^{3x} - 2e^{2x}\,.$$

Svolgimento esercizio 6: Osserviamo che, dal Teorema di Torricelli, si ha
$$F'(x) = 2x(x^4 - 2x^2)e^{x^2}\log(1+x^4) = 2x^3(x^2-2)e^{x^2}\log(1+x^4)$$
da cui segue facilmente che $F'(x) = 0$ per $x = 0, \pm\sqrt{2}$; inoltre $F'(x) > 0$ per $-\sqrt{2} < x < 0$ e $x > \sqrt{2}$, ed $F'(x) < 0$ per $x < -\sqrt{2}$ e $0 < x < \sqrt{2}$. Pertanto $x = \pm\sqrt{2}$ sono punti di minimo, mentre $x = 0$ è punto di massimo.

Svolgimento esercizio 7: Poiché, per $\alpha > 0$,
$$\left(\arctan\frac{1}{n^\alpha}\right) n^{3-\alpha} \sim n^{3-2\alpha} \quad \text{per } n \to \infty,$$
dal criterio del confronto asintotico segue che la serie converge se e solo se $\alpha > 2$.

Risposta domanda 1: Poiché $E = \{x \in \mathbb{R} \;:\; x < 3\} = (-\infty, 3)$, l'insieme proposto non è inferiormente limitato.

Risposta domanda 2: L'unca affermazione corretta è la (b).

Risposta domanda 3: Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice punto di minimo assoluto per $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se $f(x_0) \leq f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

SVOLGIMENTO TEMA 10.10

Svolgimento esercizio 1: Poiché $f \in C^1(\mathbb{R})$ ed
$$f'(x) = (1-2x)e^{-x(x-1)} \;\substack{\leq\\ \geq}\; 0 \iff x \;\substack{\geq\\ \leq}\; \frac{1}{2},$$
l'unico punto di massimo locale è $x = \frac{1}{2}$, e non esistono punti di minimo locale.

Svolgimento esercizio 2: Si ha
$$\lim_{n\to\infty}\left(n - \frac{4}{n}\right)\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{3}{n}\right) = \frac{3}{2}.$$

Svolgimento esercizio 3: Poiché
$$\frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{2}{x+2} - \frac{1}{x+1},$$
si ottiene
$$\int_0^1 \frac{x}{(x+1)(x+2)}\,dx = \Big[2\log|x+2| - \log|x+1|\Big]_0^1 = \log\frac{9}{8}.$$

Svolgimento esercizio 4: Si ha
$$\nabla f(x,y) = \left(3x^2\log y, \frac{x^3}{y}\right),$$
e quindi $\nabla f(1, \frac{1}{e}) = (-3, e)$.

Svolgimento esercizio 5: L'equazione è a variabili separabili, quindi l'integrale generale è dato dalla soluzione costante $y(t) \equiv 0$, che non risolve il problema di Cauchy, e da
$$-\int \frac{dy}{y^2} = \int dt \implies y(t) = \frac{1}{t+C}, \quad C \in \mathbb{R}.$$
La condizione iniziale implica $C = \frac{1}{n}$, e quindi
$$y_n(t) = \frac{1}{t+\frac{1}{n}} \quad \forall t \in (-\frac{1}{n}, +\infty) \qquad \text{da cui} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\,y_n(1) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0.$$

Svolgimento esercizio 6: Passando in coordinate polari centrate nell'origine, si ottiene
$$\iint_D x\,dx\,dy = \int_1^{\sqrt{2}}\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} r^2\cos\vartheta\,d\vartheta\,dr = \left[\frac{r^3}{3}\right]_1^{\sqrt{2}}\Big[\sin\vartheta\Big]_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} = -\frac{1}{3}(4-\sqrt{2}).$$

Svolgimento esercizio 7: Per stabilire se l'integrale improprio proposto esiste finito, dobbiamo studiare il comportamento della funzione integranda in un intorno destro di $x = 0$ ed in un intorno sinistro di $x = 1$. Otteniamo

$$U(0^+) \quad f(x) \sim \frac{1}{x^{2\alpha+1}\log^{-1} x} \quad \Longrightarrow \text{ l'integrale esiste finito se } \alpha < 0;$$

$$U(1^-) \quad f(x) \sim \frac{1}{(1-x)^{2\alpha+1}\log^{-1}[1+(x-1)]} \sim -\frac{1}{(1-x)^{2\alpha}}$$

$$\Longrightarrow \text{ l'integrale esiste finito se } \alpha < 1/2.$$

Pertanto, l'integrale improprio proposto esiste finito per $\alpha < 0$.

Risposta domanda 1: Si ha

$$f(x+T) = \cos(\frac{x}{3}+\frac{T}{3}) + \sin(x+T) = f(x) = \cos(\frac{x}{3}) + \sin(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

se e solo se

$$\begin{cases} T = 6h\pi \\ T = 2k\pi \end{cases} \quad \text{per qualche } h, k \in \mathbb{Z},$$

che è verificata per $k = 3h$; pertanto $(h = 1,\ k = 3)$ $T = 6\pi$.

Risposta domanda 2: No. Infatti

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty \qquad \text{mentre} \quad f(0) = 0.$$

Risposta domanda 3: È sufficiente osservare che

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = 1 \neq \lim_{x\to 0} f(x,0) = 0.$$

SVOLGIMENTO TEMA 10.11

Svolgimento esercizio 1: Osservando che, per $y \to 0$, $e^y - 1 \sim y$, si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2x + 3x^2 - 5\sqrt{x}}{e^{2x} - 1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-5\sqrt{x}}{2x} = -\frac{5}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}} = -\infty\,.$$

Svolgimento esercizio 2: Dal Teorema di Torricelli si ottiene

$$F'(x) = 2\frac{\log(e + 4x^2)}{(4x^2+2)e^{2x}}\,,$$

da cui $F'(0) = 1$.

Svolgimento esercizio 3: Ponendo $w = z - 2$, l'equazione proposta si può riscrivere nella forma $w^3 = 27$, da cui

$$w_0 = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i \qquad w_1 = +3 \qquad w_2 = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i\,.$$

Pertanto

$$z_0 = \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i \qquad z_1 = 5 \qquad z_2 = \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i\,.$$

Svolgimento esercizio 4: L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è $y_0(t) = Ce^{3t}$. Per determinare una soluzione particolare si può utilizzare il metodo di somiglianza:

$$y_p(t) = at + b \quad \Rightarrow \quad y_p'(t) - 3y_p(t) = a - 3at - 3b = 2t \quad \Longleftrightarrow \quad a = -\frac{2}{3}, b = -\frac{2}{9}.$$

Pertanto

$$y(t) = Ce^{3t} - \frac{2}{3}t - \frac{2}{9}.$$

Svolgimento esercizio 5: Poichè D è simmetrico rispetto all'asse x ed $f(x,y) = y$ è dispari rispetto ad y, l'integrale proposto è nullo.

Svolgimento esercizio 6: Osserviamo innanzitutto che $\cos(n\pi) = (-1)^n$, quindi la serie proposta si può riscrivere come

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n \qquad \text{dove} \qquad a_n = \frac{1}{3n + 2\cos n} > 0 \qquad \forall n \geq 0\,.$$

Ovviamente $a_n \to 0$ e $a_n \sim \frac{1}{3n}$, pertanto la serie proposta non converge assolutamente. D'altra parte, se consideriamo la funzione $f(x) = \frac{1}{3x+2\cos x}$, risulta che essa è monotona decrescente, in quanto $f'(x) = -\frac{3-2\sin x}{(3x+2\cos x)^2} < 0$ per tutti gli $x \geq 0$. Da ciò segue che anche la successione $\{a_n\}$ è monotona decrescente e quindi la serie proposta converge semplicemente per il criterio di Leibniz.

Svolgimento esercizio 7: Osserviamo che

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 27 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2+2x}{3x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{3x} = 2/3 \,.$$

Inoltre, per $-2 \leq x < 0$, $f'(x) = 6x + 20 > 0$, cioè f è crescente, mentre, per $0 < x \leq 5$, $f'(x) = -1/3 < 0$, cioè f è decrescente. Da ciò segue subito che $x = 0$ è punto di massimo assoluto per f in $[-2, 5]$.

Risposta domanda 1: L'unica affermazione errata è la (c).

Risposta domanda 2: Poiché f è continua, si ha

$$\lim_{x\to 0} f\Big(2\cos(\pi x)\Big) = f(2) = 1 \,.$$

Risposta domanda 3: Una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si dice parzialmente derivabile rispetto ad x nel punto $(2, 1)$ se esiste finito il seguente limite:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(2+t, 1) - f(2, 1)}{t} \,.$$

SVOLGIMENTO TEMA 10.12

Svolgimento esercizio 1: Poiché $\lim_{t\to 0} \log(1+t) = 0$, è chiaro che

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log(1+x^2) = 0 \qquad \forall \alpha \geq 0 \,.$$

Per $\alpha < 0$, ricordando il limite notevole $\lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1$, otteniamo

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha+2} \cdot \frac{\log(1+x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} x^{\alpha+2} = 0 \iff \alpha > -2 \,.$$

Dunque, la funzione è continua in $x = 0$ per ogni $\alpha > -2$.

Svolgimento esercizio 2: Per $x < -3/2$, la funzione F ha come grafico una parabola con la concavità rivolta verso il basso. Per $x \geq -\frac{3}{2}$, la funzione integranda è definita e continua, poiché l'argomento del logaritmo è positivo, quindi anche la funzione integrale è ivi definita e continua. In realtà, la funzione F è continua anche in $x = -\frac{3}{2}$. Infatti

$$\lim_{x\to -\frac{3}{2}^-} F(x) = 0 = F\left(-\frac{3}{2}\right) = \int_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{3}{2}} \log(2+t)\, dt = \lim_{x\to -\frac{3}{2}^+} F(x) \,.$$

(l'ultima uguaglianza essendo vera per la continuità della funzione integrale). Studieremo le derivate solo per $x > -\frac{3}{2}$, avendo presente che, per $x < -\frac{3}{2}$, la funzione è crescente e concava verso il basso.

Per il Teorema di Torricelli, abbiamo

$$\forall x > -\frac{3}{2} \quad F'(x) = \log(2+x) > 0 \qquad \iff \qquad x > -1 \,.$$

Dunque, la funzione decresce in $(-3/2, -1)$ e cresce in $(-1, +\infty)$. Il punto $x = -1$ è di minimo relativo (non assoluto, visto che $\lim_{x\to -\infty} F(x) = -\infty$). Il punto $x = -3/2$ è punto di massimo relativo (non assoluto, poiché $\lim_{t\to +\infty} \log(2+t) = +\infty$ e quindi $\lim_{x\to +\infty} F(x) = +\infty$). Poiché, per $x \to +\infty$, $F'(x) \to +\infty$, non esiste asintoto obliquo destro né, ovviamente, sinistro. Osservando che

$$\lim_{x\to -\frac{3}{2}^-} F'(x) = 3 \neq \lim_{x\to -\frac{3}{2}^+} F'(x) = -\log 2 \,,$$

otteniamo che la funzione ha in $x = -3/2$ un punto angoloso, che, come già visto, risulta essere punto di massimo relativo. Infine,

$$\forall x > -\frac{3}{2} \quad F''(x) = \frac{1}{x+2} > 0 \iff x > -2 \,.$$

Dunque, la derivata seconda è positiva per $x > -\frac{3}{2}$ e la funzione è concava verso l'alto in $(-3/2, +\infty)$.

Risolviamo ora esplicitamente l'integrale, utilizzando il metodo di integrazione per parti:

$$F(x)=\int_{-\frac{3}{2}}^{x}\log(t+2)\,dt=(t+2)\log(t+2)\Big|_{-\frac{3}{2}}^{x}-\int_{-\frac{3}{2}}^{x}\frac{t+2}{t+2}\,dt$$
$$=(x+2)\log(x+2)+\frac{1}{2}\log 2-x-\frac{3}{2}\qquad \forall x\geq-\frac{3}{2}\,.$$

Come utile esercizio, lo studente ricavi i risultati precedentemente ottenuti, studiando l'espressione esplicita di $F(x)$. Per completare lo studio, a noi è sufficiente stabilire il segno della funzione. Osserviamo che $F(-1)=\frac{1}{2}(\log 2-1)<0$, mentre $F(0)=\frac{5}{2}\log 2-\frac{3}{2}\sim 0,23$, quindi, tenendo conto del segno della derivata, la funzione è negativa in $(-\infty,-3/2)$, si annulla in $x=-3/2$, è negativa nell'intervallo $(-3/2,x_0)$, dove x_0 è un punto compreso fra -1 e 0, è positiva in $(x_0,+\infty)$. Il suo grafico è riportato nel Capitolo 11.

Svolgimento esercizio 3: Negli intervalli di integrazione considerati, entrambe le funzioni integrande sono positive, quindi gli integrali proposti esistono, finiti o infiniti. La prima funzione ha una singolarità in $x=0$, mentre la seconda è sempre definita e continua.

a) Ricordando che, per $x\to 0$, $\sin x\sim x$, possiamo scrivere

$$f_1(x):=\frac{\sqrt{x}}{\sin^2 x}\sim\frac{\sqrt{x}}{x^2}=\frac{1}{x^{3/2}}\,;$$

pertanto l'integrale di f_1 non converge.

b) Per $x\to+\infty$

$$f_2(x):=\frac{x^3}{1+4x^8}\sim\frac{x^3}{4x^8}=\frac{1}{4x^5}\,;$$

pertanto, f_2 ammette integrale improprio. Operando la sostituzione $t=2x^4$, da cui $dt=8x^3\,dx$, $t(2^{-1/4})=1$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}t(x)=+\infty$, abbiamo

$$\int_{2^{-1/4}}^{+\infty}\frac{x^3}{1+4x^8}\,dx=\frac{1}{8}\int_{1}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{8}\arctan t\Big|_{1}^{+\infty}=\frac{1}{8}\left[\lim_{t\to+\infty}\arctan t-\arctan 1\right]=$$
$$=\frac{1}{8}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right]=\frac{\pi}{32}\,.$$

SVOLGIMENTO TEMA 10.13

Svolgimento esercizio 1: Osserviamo innanzitutto che, posto $a_k=(-1)^k\frac{4^{kx}}{3\sqrt{k}+1}$, si ha

$$\lim_{k\to\infty}|a_k|=\lim_{k\to\infty}\frac{4^{kx}}{3\sqrt{k}+1}=0\iff x\leq 0\,.$$

Quindi la convergenza assoluta e semplice andrà studiata solo per $x\leq 0$. Per la convergenza assoluta utilizziamo il criterio del rapporto:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=4^x\left[\frac{3\sqrt{k}+1}{3\sqrt{k+1}+1}\right]\xrightarrow{k\to\infty}4^x<1\qquad\iff\qquad x<0\,.$$

La serie converge assolutamente e semplicemente per ogni $x<0$, mentre il criterio nulla ci dice nel caso $x=0$. In tal caso, la serie si scrive

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{3\sqrt{k}+1}\,.\tag{10.4}$$

Poiché $|a_k|\sim\frac{1}{3\sqrt{k}}$, la serie diverge assolutamente, perché asintotica alla serie armonica generalizzata, di esponente $1/2<1$.

Studiamo la convergenza semplice con il criterio di Leibniz, essendo la serie (10.4) di segno alterno. Come già visto, $|a_k|\to 0$ per $k\to\infty$. Inoltre,

$$3\sqrt{k+1}+1>3\sqrt{k}+1\implies\frac{1}{3\sqrt{k+1}+1}<\frac{1}{3\sqrt{k}+1}\implies|a_k|>|a_{k+1}|\,.$$

Pertanto, le ipotesi del criterio di Leibinz sono verificate e la serie converge semplicemente per $x=0$. Ricapitolando, abbiamo ottenuto:

a) convergenza assoluta e semplice per $x<0$;

b) convergenza semplice ma non assoluta per $x=0$;

c) non convergenza per $x>0$.

Svolgimento esercizio 2:

a) Poiché l'esponente è irrazionale positivo, il campo di esistenza si ottiene imponendo

$$\frac{\log x-y}{y+1}\geq 0\,,$$

cioè

$$\begin{cases}x>0\\ \log x-y\geq 0\\ y+1>0\end{cases}\cup\begin{cases}x>0\\ \log x-y\leq 0\\ y+1<0\end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases}x>0\\ y>-1\\ y\leq\log x\end{cases}\cup\begin{cases}x>0\\ y<-1\\ y\geq\log x\end{cases}$$

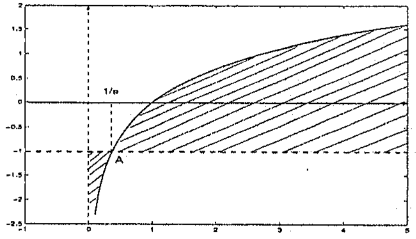


Figura 10.13

Insieme E

L'insieme è illimitato, né aperto né chiuso (contiene solo parti della sua frontiera) e sconnesso, in quanto il punto $A = \left(\frac{1}{e}, -1\right)$ non appartiene all'insieme.

b)

$$f_x(x,y) = \pi \left(\frac{\log x - y}{y+1}\right)^{\pi-1} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\log x - y}{y+1}\right) = \frac{\pi}{x(y+1)} \cdot \left(\frac{\log x - y}{y+1}\right)^{\pi-1} .$$

Anche se non richiesto dall'esercizio, calcoliamo egualmente l'altra derivata parziale:

$$f_y(x,y) = \pi \left(\frac{\log x - y}{y+1}\right)^{\pi-1} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\log x - y}{y+1}\right) = -\pi\,\frac{1+\log x}{(y+1)^2} \cdot \left(\frac{\log x - y}{y+1}\right)^{\pi-1} .$$

Svolgimento esercizio 3: Cerchiamo i punti a gradiente nullo:

$$\begin{cases} f_x = 2x - 4 = 0 \\ f_y = 2\lambda y + 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = -\frac{1}{\lambda}\,, \quad \lambda \neq 0 \end{cases} .$$

Affinché il punto critico si trovi in $(2, -1)$, dobbiamo porre $\lambda = 1$. Verifichiamo che esso è di minimo:

$$f_{xx} = 2 \quad ; \quad f_{xy} = f_{yx} = 0 \quad ; \quad f_{yy} = 2\lambda\Big|_{\lambda=1} = 2 .$$

Pertanto

$$\det\big(H_f(2,-1)\big) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 .$$

Dunque, poiché $f_{xx}(2,-1) = 2 > 0$ e $\det\big(H_f(2,-1)\big) = 4 > 0$, il punto $(2,-1)$ è effettivamente un punto di minimo locale. In altri termini, poiché la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ha solo autovalori positivi, essa è definita positiva e, pertanto, il punto critico è di minimo locale.

Osserviamo che, per $\lambda = 1$,

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x + 2y = (x-2)^2 + (y+1)^2 - 5 \geq -5 = f(2,-1) .$$

Pertanto, il punto $(2,-1)$ è punto di minimo assoluto.

Svolgimento esercizio 4: Determiniamo l'integrale generale dell'equazione omogenea associata $y''(x) - 5y'(x) - 6y(x) = 0$. La corrispondente equazione secolare, $\lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0$, ha come soluzioni $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = -1$. Abbiamo dunque

$$y_o(x) = C_1 e^{6x} + C_2 e^{-x} .$$

Poiché il valore $\lambda = -2$ non è soluzione dell'equazione secolare, la soluzione particolare dell'equazione non omogenea va cercata nella forma $y_p(x) = p e^{-2x}$. Si ha $y_p'(x) = -2p e^{-2x}$; $y_p''(x) = 4p e^{-2x}$ da cui, sostituendo nell'equazione,

$$p(4 + 10 - 6)e^{-2x} = 16 e^{-2x} \iff p = 2 .$$

L'integrale generale sarà dato da

$$y(x) = C_1 e^{6x} + C_2 e^{-x} + 2e^{-2x} .$$

Osserviamo che, per $x \to +\infty$, i due ultimi addendi tendono a 0, mentre il primo, se $C_1 \neq 0$, diverge. Quindi, per rispettare la seconda condizione, occorre porre $C_1 = 0$. Dalla prima condizione otteniamo, invece,

$$C_2 + 2 = 0 \iff C_2 = -2 ,$$

da cui l'unica soluzione

$$y(x) = 2\left(e^{-2x} - e^{-x}\right) .$$

SVOLGIMENTO TEMA 10.14

Svolgimento esercizio 1: La serie è definita in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Si osservi che, poiché $\log|x|$ è non negativo in $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ e negativo in $(-1,0)\cup(0,1)$, la serie non è a segno alterno per ogni valore di x, nonostante la fuorviante presenza del termine $(-1)^k$. Più precisamente, essa è a segno alterno per $|x|\geq 1$, mentre è a termini positivi per $0<|x|<1$. In quest'ultimo caso, infatti, $(-1)^k(\log|x|)^k = (-1)^k\,[(-1)|\log|x||]^k = |\log|x||^k$. Osserviamo che, per $k\to\infty$, posto $a_k = (-1)^k(\log|x|)^k k^{-2}$, si ha

$$|a_k| = \frac{|\log|x||^k}{k^2}\to 0 \iff |\log|x||\leq 1 \iff -1\leq \log|x|\leq 1 \iff \frac{1}{\mathrm{e}}\leq|x|\leq \mathrm{e}$$
$$\iff x\in\left[-\mathrm{e},-\frac{1}{\mathrm{e}}\right]\cup\left[\frac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}\right] =: I\,.$$

Studieremo dunque la convergenza della serie solo in I. Per la convergenza assoluta applichiamo, ad esempio, il criterio della radice:

$$\lim_{k\to+\infty}|a_k|^{1/k} = \lim_{k\to+\infty}\frac{|\log|x||}{\left(\sqrt[k]{k}\right)^2} = |\log|x||<1 \qquad\iff\qquad x\in\left(-\mathrm{e},-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\cup\left(\frac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}\right)\,.$$

Poiché il criterio della radice nulla ci dice sulla convergenza nei punti $x=\pm\frac{1}{\mathrm{e}}$; $x=\pm\mathrm{e}$, studiamo direttamente le serie numeriche ottenute sostituendo tali valori del parametro nella serie proposta.

Per $x=\pm\frac{1}{\mathrm{e}}$ abbiamo

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\left(\log\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\right)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\,,$$

che è una serie convergente, in quanto armonica generalizzata di esponente maggiore di 1.

Per $x=\pm\mathrm{e}$,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(\log\mathrm{e})^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\,,$$

che è una serie armonica generalizzata, di segno alterno, che, come noto, converge semplicemente e assolutamente, avendo esponente maggiore di 1.

In definitiva:

a) insieme di convergenza assoluta e semplice: $I=\left[-\mathrm{e},-\frac{1}{\mathrm{e}}\right]\cup\left[\frac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}\right]$;

b) insieme di convergenza semplice, ma non assoluta: $\emptyset$;

c) insieme di non convergenza: $I^C = (-\infty,-\mathrm{e})\cup(-\frac{1}{\mathrm{e}},0)\cup(0,\frac{1}{\mathrm{e}})\cup(\mathrm{e},+\infty)$.

Svolgimento esercizio 2:

a) Essendo in presenza di una potenza con esponente razionale positivo, tale che il suo denominatore è pari, dovremo porre la base non negativa e aggiungere la condizione sul dominio dell'arcoseno. Avremo cioè

$$\begin{cases}3|\arcsin x|-2y\geq 0\\ -1\leq x\leq 1\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}y\leq\frac{3}{2}|\arcsin x|\\ -1\leq x\leq 1\end{cases}\,.$$

Disegnando il grafico della funzione $\gamma(x)=\frac{3}{2}|\arcsin x|$, avremo l'insieme di figura 10.14. Esso è illimitato, chiuso, connesso e linearmente semplicemente connesso.

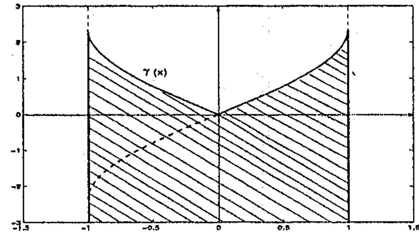


Figura 10.14

Insieme E

b)

$$f_y(x,y)=\frac{7}{2}\,[3|\arcsin x|-2y]^{5/2}\cdot(-2) = -7\;[3|\arcsin x|-2y]^{5/2}\,.$$

c) essendo $f(x,y)$ una potenza a base non negativa, essa assumerà solo valori non negativi. Pertanto, lì dove la base si annulla, la funzione, annullandosi anch'essa, assume i valori di minimo assoluto. In effetti

$$f(x,y)=0 \iff y=\frac{3}{2}|\arcsin x|\,.$$

Quindi, lungo il grafico della funzione γ, la funzione f assume il valore di minimo globale, pari a 0.

Svolgimento esercizio 3: L'integrale generale dell'equazione omogenea associata si ottiene tramite l'equazione caratteristica $\lambda^2-8\lambda+17=0$, le cui soluzioni sono complesse coniugate: $\lambda_1 = 4+i$; $\lambda_2=4-i$. Pertanto

$$y_o(x)=\mathrm{e}^{4x}\,[C_1\cos x + C_2\sin x]\,.$$

Poiché il termine non omogeneo è un polinomio e $\lambda=0$ non è radice del polinomio caratteristico, cercheremo una soluzione particolare dell'equazione non omogenea nella forma di un polinomio dello stesso grado del termine non omogeneo: $y_p(x)=p_0x+p_1 \Longrightarrow y_p'(x)=p_0$; $y_p''(x)=0$. Sostituendo nell'equazione non omogenea, otteniamo

$$-8p_0+17p_0x+17p_1 = 2x+1$$

da cui, per il principio di identità dei polinomi, $p_0 = \frac{2}{17}$; $p_1 = \frac{33}{289}$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione è

$$y(x) = e^{4x}\,[C_1 \cos x + C_2 \sin x] + \frac{2}{17}x + \frac{33}{289}\,.$$

Risolviamo, infine, il problema di Cauchy:

$$y'(x) = e^{4x}\,[4C_1 \cos x + 4C_2 \sin x - C_1 \sin x + C_2 \cos x] + \frac{2}{17}\,,$$

da cui

$$y(0) = C_1 + \frac{33}{289} = 0$$

$$y'(0) = 4C_1 + C_2 + \frac{2}{17} = 0$$

e, infine, $C_1 = -\frac{33}{289}$; $C_2 = \frac{98}{289}$, che forniscono l'unica soluzione del problema assegnato:

$$y(x) = \frac{e^{4x}}{289}\,[-33\cos x + 98 \sin x] + \frac{2}{17}x + \frac{33}{289}\,.$$

SVOLGIMENTO TEMA 10.15

Svolgimento esercizio 1: Poiché, fissata x, t varia tra 0 e x stessa, il segno di t coincide con quello di x. La funzione integranda è sempre definita, continua e positiva, in quanto

$$\sqrt{4-t+|t|} = \begin{cases} \sqrt{4} = 2 & \text{per } t \geq 0 \\ \sqrt{4-2t} & \text{per } t < 0 \end{cases}.$$

Pertanto, $F \in C^1(\mathbb{R})$. Avendo esplicitato la funzione integranda come nella precedente formula, possiamo riscrivere

$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x 2\,dx = 2x & \text{per } x \geq 0\,, \\ \displaystyle\int_0^x \sqrt{4-2t}\,\,dt & \text{per } x < 0\,. \end{cases}$$

Per $x \geq 0$, il grafico della funzione è ovvio. Per $x < 0$, $F(x) < 0$, in quanto la funzione integranda è positiva e $\int_0^x f(t)\,dt = -\int_{[x,0]} f(t)\,dt$.

Monotonia:

$$F'(x) = \sqrt{4-x+|x|} = \begin{cases} 2 & \text{per } x \geq 0 \\ \sqrt{4-2x} > 0 & \text{per } x < 0 \end{cases}.$$

La funzione è sempre strettamente crescente. Non abbiamo massimi o minimi, né relativi né assoluti. Poiché $F(0) = 0$, otteniamo in altro modo che la funzione è negativa per $x < 0$ e positiva per $x > 0$.

Inoltre, $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$ e la funzione ha, ovviamente, asintoto obliquo, di equazione $y = 2x$. D'altro canto, la funzione $f(t) = \sqrt{4-2t}$ non ha integrale convergente in $(-\infty, 0)$, perché, per $t \to -\infty$, $f(t) \to +\infty$. Quindi $\lim_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$. La funzione $F(x)$ non ha asintoto obliquo sinistro, dato che $\lim_{x\to-\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} F'(x) = +\infty$.

Convessità e concavità:

$$F''(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x > 0 \\ \dfrac{-1}{\sqrt{4-2x}} < 0 & \text{per } x < 0 \end{cases}.$$

La funzione è concava verso il basso in $(-\infty, 0)$ ed è lineare in $(0, +\infty)$. Si osservi che

$$\lim_{x\to 0^+} F''(x) = 0 \neq \lim_{x\to 0^-} F''(x) = -\frac{1}{2}\,.$$

Svolgimento esercizio 2:

a)

$$\int_0^x \sqrt{4-2t}\,dt = -\frac{1}{3}(4-2t)^{3/2}\Big|_0^x = \frac{1}{3}\left[8-(4-2x)^{3/2}\right] \qquad \forall x < 0\,.$$

Dunque

$$F(x) = \begin{cases} 2x & \text{per } x \geq 0 \\ \frac{1}{3}\left[8-(4-2x)^{3/2}\right] & \text{per } x < 0 \end{cases}.$$

b) Come già osservato, $F \in C^1(\mathbb{R})$, quindi non ammette singolarità; ha asintoto obliquo destro, di equazione $y = 2x$, ma non sinistro. Il lettore riottenga tali risultati, studiando l'espressione esplicita della F;

c) L'equazione della retta tangente nel generico punto $(x_0, F(x_0))$ è $y = F(x_0) + F'(x_0)\cdot(x - x_0)$. Poiché $F(-6) = -\frac{56}{3}$ e $F'(-6) = 4$, la retta tangente in $x_0 = -6$ ha equazione $y = -\frac{56}{3} + 4(x+6)$, cioè $y = 4x + \frac{16}{3}$.

d) Il grafico è riportato nel Capitolo 11.

Svolgimento esercizio 3: Poiché $x^2 + 8x + 17 > 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, la funzione integranda non ha singolarità in $[0, +\infty)$. Inoltre, per $x \to +\infty$,

$$f(x) \sim \frac{1}{x^2}$$

e ha quindi integrale improprio convergente per $x \to +\infty$.

Infine, si risolve l'integrale, utilizzando il metodo di integrazione delle funzioni razionali:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+8x+17}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+8x+16+1}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+4)^2+1}\,dx =$$

$$= \arctan(x+4)\Big|_0^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \arctan(x+4) - \arctan 4$$

$$= \frac{\pi}{2} - \arctan 4\,.$$

SVOLGIMENTO TEMA 10.16

Svolgimento esercizio 1:

a) La funzione $f(x,y)$ è data dalla somma di due potenze a esponente irrazionale positivo. Pertanto l'insieme di definizione si ottiene imponendo

$$\begin{cases} x - y^2 \geq 0 \\ 3 - x^2 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3} \\ x \geq y^2 \end{cases} \iff y^2 \leq x \leq \sqrt{3}\,.$$

Le curve $x = \sqrt{3}$ e $x = y^2$ si intersecano nei punti $(\sqrt{3}, \pm\sqrt[4]{3})$. Perciò l'insieme di definizione della funzione può essere riscritto nella forma normale rispetto all'asse y:

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\sqrt[4]{3} \leq y \leq \sqrt[4]{3}\,;\ y^2 \leq x \leq \sqrt{3}\}\,.$$

Graficamente otteniamo

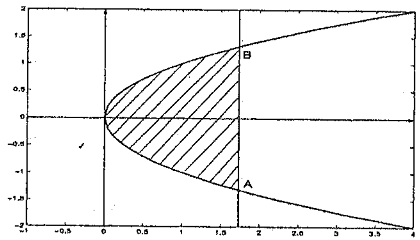


Figura 10.16

Insieme E

Esso è limitato, chiuso, connesso e linearmente semplicemente connesso.

b)

$$f_x(x,y) = \sqrt{3}\,(x-y^2)^{\sqrt{3}-1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,(3-x^2)^{\frac{1}{\sqrt{3}}-1}\cdot(-2x)$$

$$= \sqrt{3}\,(x-y^2)^{\sqrt{3}-1} - \frac{2}{\sqrt{3}}\,x\,(3-x^2)^{\frac{1}{\sqrt{3}}-1}\,;$$

$$f_y(x,y) = \sqrt{3}\,(x-y^2)^{\sqrt{3}-1}\cdot(-2y) = -2\sqrt{3}\,y\,(x-y^2)^{\sqrt{3}-1}\,.$$

c) La funzione è continua in un insieme chiuso e limitato; pertanto, per il Teorema di Weierstrass, ammette massimo e minimo globali. Si potrebbe determinare il massimo per mezzo delle tecniche di ricerca dei massimi e minimi liberi e vincolati di funzioni derivabili, ma la complicatezza delle derivate prime e seconde ci dissuade dal farlo (l'esercizio non lo richiede!). È invece semplice determinare il minimo globale: poiché $f(x,y)$ è la somma di due addendi non negativi, sarà sufficiente annullare entrambi gli addendi:

$$\begin{cases} x - y^2 = 0 \\ 3 - x^2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ y = \pm\sqrt{x} \end{cases} \implies \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = \pm\sqrt[4]{3} \end{cases}.$$

Il minimo globale si ha nei punti $A \equiv (\sqrt{3}, -\sqrt[4]{3})$, $B \equiv (\sqrt{3}, \sqrt[4]{3})$.

Svolgimento esercizio 2: L'equazione differenziale è definita per ogni $x \neq -\sqrt[3]{5}$. Poiché la condizione iniziale è assegnata nel punto $x_0 = 0 > -\sqrt[3]{5}$, studieremo la soluzione nell'intervallo $(-\sqrt[3]{5}, +\infty)$.

Sfruttando direttamente la formula risolutiva per le equazioni lineari del primo ordine, otteniamo l'integrale generale

$$y(x) = e^{-\int \frac{3x^2}{5+x^3}\,dx} \left[\int e^{\int \frac{3x^2}{5+x^3}\,dx} \sqrt[3]{x}\,dx + C\right] = e^{-\log|5+x^3|}\left[\int e^{\log|5+x^3|}\, x^{1/3}\,dx + C\right] =$$

$$= \frac{1}{5+x^3}\left[\int (5+x^3)\, x^{1/3}\,dx + C\right] = \frac{1}{5+x^3}\left[\frac{15}{4}x^{4/3} + \frac{3}{13}x^{13/3} + C\right].$$

Per risolvere il problema di Cauchy, poniamo

$$y(0) = \frac{1}{5}\cdot C = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad C = 5\,,$$

da cui l'unica soluzione

$$y(x) = \frac{1}{5+x^3}\left[\frac{15}{4}x^{4/3} + \frac{3}{13}x^{13/3} + 5\right].$$

SVOLGIMENTO TEMA 10.17

Svolgimento esercizio 1: La serie è a termini positivi, pertanto la studiamo utilizzando il criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5^{n+1}}{(n+1)(n+1)!}\cdot\frac{n\cdot n!}{5^n} = \frac{5n}{(n+1)^2} \to 0 < 1 \qquad \text{per } n \to +\infty\,.$$

Pertanto, la serie converge.

Svolgimento esercizio 2: Ricordando lo sviluppo di Mc Laurin di $\log(1+t)$, con $t = x^2$, e di $\cos x$, otteniamo

$$\log(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^5)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$$

da cui

$$f(x) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^5) - \left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right]^2 + 1$$

$$= 1 + x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^5) - \left[1 + \frac{x^4}{4} - x^2 + \frac{x^4}{12} + o(x^4)\right]$$

dove, nello sviluppo del quadrato, si sono utilizzate le proprietà degli infinitesimi, raccogliendo nel termine $o(x^4)$ tutti gli addendi dello sviluppo di ordine superiore a x^4. Sommando, si ricava

$$f(x) = 2x^2 - \frac{5}{6}x^4 + o(x^4)$$

quindi il termine "dominante" è $2x^2$ e l'ordine di infinitesimo è $\alpha = 2$.

Svolgimento esercizio 3: Poiché $g \in C^0([0, 2\pi])$, per il Teorema di Weierstrass, essa ammette punti di massimo e minimo assoluti. Tali punti andranno cercati tra

- i punti stazionari di g;
- i valori assunti da g negli estremi;
- i punti di non derivabilità .

$$g(x) = \begin{cases} x + \cos x & \text{se } x \in [0, \pi/2]\,, \\ x - \cos x & \text{se } x \in (\pi/2, 3\pi/2)\,, \\ x + \cos x & \text{se } x \in [3\pi/2, 2\pi]\,, \end{cases} \quad \text{da cui} \quad g'(x) = \begin{cases} 1 - \sin x & \text{se } x \in (0, \pi/2)\,, \\ 1 + \sin x & \text{se } x \in (\pi/2, 3\pi/2)\,, \\ 1 - \sin x & \text{se } x \in (3\pi/2, 2\pi)\,. \end{cases}$$

Nei punti $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$, la funzione non è derivabile, in quanto

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} g'(x) = 0^+\,; \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} g'(x) = 2\,;$$

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^-} g'(x) = 0^+\,; \qquad \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^+} g'(x) = 2\,;$$

tali punti sono, pertanto, punti angolosi. Osserviamo che la derivata prima è sempre positiva, dove è definita; quindi, la funzione è sempre crescente ed assumerà i valori massimo e minimo assoluto agli estremi dell'intervallo. Più precisamente, $x = 0$ è punto di minimo assoluto e $x = 2\pi$ è punto di massimo assoluto. La funzione non ammette altri punti di estremo relativo. Notiamo che la funzione non si annulla mai, poiché è sempre crescente e $g(0) = 1 > 0$. Infine, si ha $f(2\pi) = 2\pi + 1$.

Svolgimento esercizio 4: Abbiamo

$$|z| = 32\sqrt{3+1} = 64 \qquad \Longrightarrow \qquad z = 64\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 64\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right] .$$

Pertanto,

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{z} &= \sqrt[4]{64}\left[\cos\left(\frac{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{4}\right)\right] \\ &= 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{(3k-1)\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{(3k-1)\pi}{6}\right)\right]\end{aligned} \qquad k = 0,1,2,3 .$$

Svolgendo i conti, si ottiene

$$w_0 = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{6} - \sqrt{2}i$$

$$w_1 = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{6}i$$

$$w_2 = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right] = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{6} + \sqrt{2}i$$

$$w_3 = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)\right] = 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{6}i$$

Svolgimento esercizio 5: Abbiamo

$$\begin{aligned}\int \left[\frac{\sqrt{x} - \log^2 x}{x}\right] dx &= \int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx - \int \frac{\log^2 x}{x}\, dx = 2\sqrt{x} - \left(\int t^2\, dt\right)_{t=\log x} \\ &= 2\sqrt{x} - \frac{t^3}{3}\Big|_{t=\log x} + C = 2\sqrt{x} - \frac{\log^3 x}{3} + C ,\end{aligned}$$

dove, nel secondo integrale, è stata operata la sostituzione $t = \log x$, da cui $dt = \frac{1}{x}\, dx$.

SVOLGIMENTO TEMA 10.18

Svolgimento esercizio 1: <u>Continuità</u>:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha ,$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 2 ;$$

quindi la funzione sarà continua in $x = 0$ se e solo se $\alpha = 2$ e $\beta \in \mathbb{R}$.

<u>Derivabilità</u>: per $\alpha = 2$ e $x > 0$, si ha

$$f(x) = \frac{(1+x)^2 - 1}{x} = x + 2 .$$

Pertanto, è evidente che, al fine di raccordare con regolarità due rette passanti per un medesimo punto (nel nostro caso $(0,2)$), le loro equazioni devono coincidere, da cui $\beta = 1$.

Svolgimento esercizio 2:

a) Moltiplicando e dividendo per la somma delle radici ed utilizzando i prodotti notevoli, si ottiene che, per $n \to +\infty$,

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{[(n^3+n^2-1) - (n^3+n^2-n)](\sqrt{n^2-n} + \sqrt{n^2+1})}{[(n^2-n) - (n^2+1)](\sqrt{n^3+n^2-1} + \sqrt{n^3+n^2-n})} \\ &= \frac{(n-1)n\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)}{(-n-1)n^{3/2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}} + \sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}\right)} \sim \frac{2(n-1)}{2\sqrt{n}(-n-1)} \to 0 .\end{aligned} \tag{10.5}$$

b) Dalla (10.5) segue che $a_n < 0$, per ogni $n > 1$; la serie è, quindi, a termini negativi e

$$a_n \sim -\frac{n-1}{\sqrt{n}(n+1)} \sim -\frac{1}{\sqrt{n}} .$$

Dal criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente $1/2 < 1$, si ottiene che la serie proposta diverge negativamente.

Svolgimento esercizio 3:

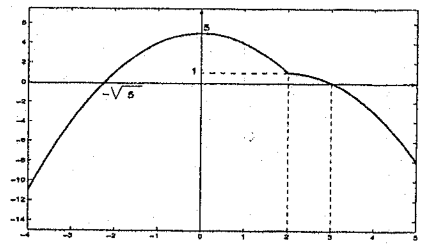


Figura 10.18a

Grafico di $f(x) = \begin{cases} -(x-1)(x-3) & \text{se } x \geq 2 , \\ 5 - x^2 & \text{se } x < 2 . \end{cases}$

La funzione si può riscrivere nella forma

$$f(x) = \begin{cases} -(x-1)(x-3) & \text{se } x \geq 2\,, \\ 5 - x^2 & \text{se } x < 2\,. \end{cases}$$

Pertanto, risolvendo le corrispondenti disequazioni, si ottiene che essa è non negativa nell'intervallo $[-\sqrt{5}, 3]$, come si evince dalla figura 10.18a. L'area del suo sottografico si ottiene calcolando l'integrale

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{5}}^{3} f(x)\, dx &= \int_{-\sqrt{5}}^{2} (5 - x^2)\, dx + \int_{2}^{3} (-x^2 + 4x - 3)\, dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + 5x \right]\Bigg|_{-\sqrt{5}}^{2} + \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x \right]\Bigg|_{2}^{3} = \frac{24 + 10\sqrt{5}}{3}\,. \end{aligned}$$

Svolgimento esercizio 4: Ricordando che

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3) \qquad \text{e} \qquad e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + o(t^3)\,,$$

avremo

$$\cos(x^3) - e^{x^3} = [1 - \frac{x^6}{2} + o(x^9)] - [1 + x^3 + \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{3!} + o(x^9)] = -x^3 - x^6 + \frac{x^9}{3!} + o(x^9)\,.$$

Pertanto, il polinomio richiesto è dato da $P_6(x) = -x^3 - x^6$ e l'ordine di infinitesimo della funzione assegnata, per $x \to 0$, è 3. Poiché $f(x) - P_6(x) = \frac{x^9}{3!} + o(x^9)$, si ottiene che il resto richiesto, per $x \to 0$, ha ordine di infinitesimo pari a 9.

Svolgimento esercizio 5: La funzione $f(t) = \frac{2t}{1-t^2}$ è continua nell'insieme $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. L'intervallo massimale di continuità di f, contenente l'origine, cioè $(-1, 1)$, coincide con l'intervallo di definizione di F, in quanto in un intorno di $x = -1$ e di $x = 1$, f non è integrabile in senso improprio. Infatti

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{2t}{(1+t)(1-t)} \sim \frac{1}{1-t} & \text{per } t \to 1^- \\ f(t) &= \frac{2t}{(1+t)(1-t)} \sim -\frac{1}{1+t} & \text{per } t \to -1^+\,, \end{aligned}$$

pertanto f non ammette integrale finito in $(-1, 1)$. Inoltre,

$$\lim_{x \to 1^-} F(x) = \lim_{x \to -1^+} F(x) = +\infty\,.$$

Pertanto

$$C.E.(F) = (-1, 1)\,;$$

$$F'(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{1 - x^2}\,; \qquad F'(-1 + \sqrt{2}) = 0\,;$$

$$F'(x) > 0 \text{ per } x \in (-1 + \sqrt{2}, 1)\,; \qquad F'(x) < 0 \text{ per } x \in (-1, -1 + \sqrt{2})\,.$$

La funzione decresce in $(-1, -1+\sqrt{2})$; cresce in $(-1+\sqrt{2}, 1)$ ed ha in $x_m = -1 + \sqrt{2} > 0$ un punto di minimo relativo e assoluto. Poiché $F(0) = 0$, otteniamo che $F(x_m) < 0$. Poiché la funzione è

illimitata superiormente, essa non ammette massimo assoluto. Le due rette $x = \pm 1$ sono asintoti verticali.

Convessità e concavità:

$$F''(x) = 2\left[\frac{1 + x^2}{(1 - x^2)^2}\right] > 0 \qquad \forall x \in (-1, 1)\,,$$

quindi la funzione è convessa (o concava verso l'alto) in tutto il suo insieme di definizione. Osservato che F è positiva in $(-1, 0) \cup (\overline{x}, 1)$ (dove $\overline{x} > x_m$) e negativa in $(0, \overline{x})$, possiamo disegnarne il grafico, che è riportato nel Capitolo 11.

Completiamo lo studio, calcolando l'integrale:

$$\int_0^x \frac{2t}{1 - t^2}\, dt = -\log|1 - t^2|\Big|_0^x = -\log|1 - x^2| = -\log(1 - x^2)\,,$$

da cui

$$F(x) = -x - \log(1 - x^2) \qquad \text{e} \qquad F(x_m) = -\sqrt{2} + 1 - \log(2\sqrt{2} - 2) \simeq -0{,}6\,.$$

Svolgimento esercizio 6:

a) Per definizione di arcoseno, dobbiamo imporre

$$|xy| \leq 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -1 \leq xy \leq 1\,.$$

Se $x > 0$, si ottiene $-\frac{1}{x} \leq y \leq \frac{1}{x}$, mentre, se $x < 0$, si ottiene $\frac{1}{x} \leq y \leq -\frac{1}{x}$; gli assi $x = 0$ e $y = 0$ sono entrambi inclusi in E, da cui

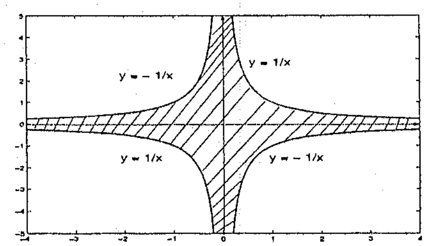


Figura 10.18b

Insieme E

E è un insieme illimitato, chiuso, connesso e semplicemente connesso.

b)

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{1 - (xy)^2}} \cdot y = 0 & \text{se e solo se } y = 0\,; \\ f_y(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{1 - (xy)^2}} \cdot x = 0 & \text{se e solo se } x = 0\,. \end{aligned}$$

L'origine è l'unico punto stazionario. Osservando che la funzione arcoseno è monotona crescente, otteniamo che essa è positiva se $xy > 0$ (cioè nel primo e nel terzo quadrante), negativa

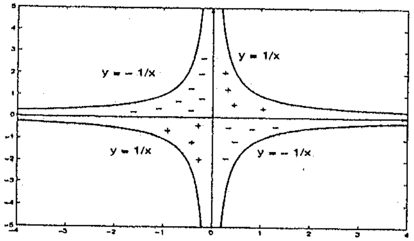


Figura 10.18c

Segno di $f(x,y) = \arcsin(xy)$

se $xy < 0$ (cioè nel secondo e nel quarto quadrante) e si annulla nell'origine e lungo gli assi coordinati. Pertanto, l'origine è un punto di sella.

Allo stesso risultato si può giungere, in modo più complicato, tramite lo studio delle derivate seconde. Facendo i conti, si ottiene

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che risulta essere una matrice indefinita e quindi ritroviamo che l'origine è punto di sella.

c) Poiché la funzione arcoseno ha come immagine l'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$ e solo per $xy = -1$ la funzione proposta assume il valore $\arcsin(-1) = -\pi/2$, mentre solo per $xy = 1$ la funzione proposta assume il valore $\arcsin(1) = \pi/2$, si ha che i punti di minimo assoluto sono tutti e soli i punti della curva $y = -\frac{1}{x}$, mentre i punti di massimo assoluto sono tutti e soli i punti della curva $y = \frac{1}{x}$. Essendo la funzione definita e continua in un dominio connesso, essa assume tutti i valori compresi tra il minimo ed il massimo assoluti; pertanto, l'immagine di f è l'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$.

Svolgimento esercizio 7: L'equazione proposta è definita per $x > 0$. Utilizzando la formula risolutiva, otteniamo

$$y(x) = e^{-\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx}\left[\int e^{\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx}\,dx + C\right] = e^{-2\sqrt{x}}\left[\int e^{2\sqrt{x}}\,dx + C\right].$$

Per risolvere l'ultimo integrale, operiamo la sostituzione $t = 2\sqrt{x}$, da cui $dt = \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$, ovvero $dx = \frac{t}{2}\,dt$. Pertanto,

$$\begin{aligned}\int e^{2\sqrt{x}}\,dx &= \frac{1}{2}\left(\int te^t\,dt\right)\Big|_{t=2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\left[te^t - \int e^t\,dt\right]\Big|_{t=2\sqrt{x}} \\ &= \left[\frac{1}{2}(t-1)e^t + C\right]\Big|_{t=2\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)e^{2\sqrt{x}} + C.\end{aligned}$$

Da ciò otteniamo

$$y(x) = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right) + Ce^{-2\sqrt{x}}.$$

Poiché, per ogni $C \in \mathbb{R}$, si ha $\lim_{x\to+\infty} Ce^{-\sqrt{x}} = 0$, ricaviamo che ogni soluzione soddisfa la condizione richiesta.

Svolgimento esercizio 8: Nell'intervallo $(-\pi, \pi]$, la funzione si può riscrivere nella forma

$$f(x) = 1 + \tilde{f}(x) \qquad \text{dove} \qquad \tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2\pi} - 1 & \text{se } x \in (-\pi, 0], \\ 1 + \dfrac{x}{2\pi} & \text{se } x \in (0, \pi], \end{cases}$$

è una funzione dispari, trascurando i punti di discontinuità. Pertanto, per le proprietà delle serie di Fourier, si avrà

$$\frac{a_0}{2} = 1; \qquad a_k = 0 \quad \forall k \geq 1;$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\sin(kx)\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{k}\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\cos(kx)\Big|_0^\pi + \frac{1}{2k\pi}\int_0^\pi \cos(kx)\,dx\right] \\ &= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{3}{2k}(-1)^k + \frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2\pi}\sin(kx)\Big|_0^\pi\right] = \frac{1}{k\pi}\left[2 - 3(-1)^k\right] \\ &= \begin{cases} -\dfrac{1}{2m\pi} & \text{se } k = 2m, \\ \dfrac{5}{\pi(2m-1)}, & \text{se } k = 2m-1. \end{cases} \end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} f(x) &\sim 1 + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}[2 - 3(-1)^k]\sin(kx) \\ &= 1 + \frac{5}{\pi}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{\sin[(2m-1)x]}{2m-1} - \frac{1}{2\pi}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{\sin(2mx)}{m} \\ &= 1 + \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{\sin[(2m-1)x]}{2m-1} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin(kx)}{k}. \end{aligned}$$

Poiché la funzione è regolare a tratti e

$$\lim_{x\to-\pi^+} f(x) = -1/2; \qquad \lim_{x\to\pi^-} f(x) = 5/2;$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2; \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0;$$

abbiamo che la serie converge in ogni punto alla funzione

$$S(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq k\pi, \\ 1 & \text{se } x = k\pi. \end{cases}$$

SVOLGIMENTO TEMA 10.19

Svolgimento esercizio 1: Riscrivendo l'equazione in forma algebrica, otteniamo

$$x^2 - y^2 + 2ixy - x + iy = 0 \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 - x = 0 \\ 2xy + y = 0 \end{cases}.$$

Risolvendo, si ricava

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 - x = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = -1/2 \\ y^2 = 3/4 \end{cases}$$

da cui abbiamo come soluzioni

$$z_1 = (0,0)\ ; \quad z_2 = (1,0)\ ; \quad z_3 = (-1/2, \sqrt{3}/2)\ ; \quad z_4 = (-1/2, -\sqrt{3}/2)\ .$$

Svolgimento esercizio 2:

a) Poiché

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x)\ ,$$

la funzione risulta essere continua in $x = 0$ e quindi in tutto $\mathbb{R}$. Inoltre,

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0\ , \\ \dfrac{2x-1}{1+x^2} & \text{se } x > 0\ , \end{cases}$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -1 \neq 1 = \lim_{x\to 0^-} f'(x)\ ;$$

quindi, la funzione proposta è derivabile per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, mentre in $x = 0$ ha un punto angoloso.

b) Per $x < 0$, il grafico è immediato. Studiamo, quindi, la funzione per $x \geq 0$. Otteniamo che, da quanto trovato in precedenza, $f'(x) > 0$ per $x \in (1/2, +\infty)$; pertanto, la funzione cresce in $(-\infty, 0)$ e $(1/2, +\infty)$, mentre decresce in $(0, 1/2)$. Il punto $x = 0$ è punto angoloso di massimo relativo, il punto $x = 1/2$ è punto di minimo relativo. Inoltre, per $x \to +\infty$, $f(x) \sim 2\log x$, quindi essa diverge a $+\infty$ e non ammette asintoto obliquo; l'immagine di f è illimitata e quindi non ammette né massimo né minimo assoluti. Poiché, per $x > 0$, si ha

$$f''(x) = -\frac{2(x^2 - x - 1)}{(x^2+1)^2}\ ; \qquad f''\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 0\ ;$$

$$f''(x) > 0 \quad \text{per} \quad 0 < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}\ ; \qquad f''(x) < 0 \quad \text{per} \quad x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}\ ;$$

la funzione sarà convessa in $\left(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ e concava in $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$. In $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ la funzione ha un flesso obliquo. Poiché $f(1/2) < 0$ e dai calcoli risulta $f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) > 0$, otteniamo che esiste un punto $x_0 \in \left(1/2, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ tale che $f(x_0) = 0$, inoltre la funzione sarà negativa per $x < x_0$ e positiva per $x > x_0$. Il grafico è riportato nel Capitolo 11.

Svolgimento esercizio 3: Risolviamo, integrando per parti:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 [\log(1+x^2) - \arctan x]\, dx \\
&= \{x[\log(1+x^2) - \arctan x]\}\Big|_0^1 - \int_0^1 x \left[\frac{2x}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right] dx \\
&= \{x[\log(1+x^2) - \arctan x]\}\Big|_0^1 - \int_0^1 \left[2 - \frac{2}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2}\right] dx \\
&= \left\{x[\log(1+x^2) - \arctan x] - \left[2x - 2\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]\right\}\Big|_0^1 \\
&= \left[\left(x + \frac{1}{2}\right)\log(1+x^2) + (2-x)\arctan x - 2x\right]\Big|_0^1 = \frac{3}{2}\log 2 + \frac{\pi}{4} - 2\ .
\end{aligned}$$

Svolgimento esercizio 4: Osserviamo che

$$\left|\frac{(\sin n)^n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}\ ;$$

pertanto, per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente $2 > 1$, si ottiene che la serie proposta converge assolutamente, e quindi anche semplicemente.

Svolgimento esercizio 5: L'equazione caratteristica associata è

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

da cui $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -3$. La soluzione dell'equazione omogenea è, quindi,

$$y_o(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}\ .$$

Poiché $f(x) = 5e^{2x}$ e $\lambda = 2$ è soluzione dell'equazione caratteristica con molteplicità algebrica 1, il metodo di somiglianza fornisce, come soluzione particolare, una funzione della forma $y_p(x) = pxe^{2x}$. Derivando e sostituendo nell'equazione assegnata, si ottiene

$$p(4x + 4 + 2x + 1 - 6x)e^{2x} = 5e^{2x}$$

da cui $p = 1$ e

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} + xe^{2x}\ .$$

Per risolvere l'altra equazione proposta, si può utilizzare il metodo di sovrapposizione, determinando una soluzione particolare dell'equazione non omogenea $y''(x) + y'(x) - 6 = -e^{3x}$. Poiché $\lambda = 3$ non è soluzione dell'equazione caratteristica, il metodo di somiglianza fornisce, come soluzione particolare, una funzione della forma $y_p(x) = pe^{3x}$. Derivando e sostituendo nell'equazione assegnata, si ottiene

$$p(9 + 3 - 6)e^{3x} = -e^{3x}$$

da cui $p = -1/6$. L'integrale generale è, quindi, dato da

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} + xe^{2x} - \frac{1}{6}e^{3x}\ .$$

Svolgimento esercizio 6:

a) Poiché la funzione $g(xy) = \log(xy)$ è definita per $xy > 0$, l'insieme E è dato dall'unione del primo e del terzo quadrante, assi cartesiani inclusi. Pertanto, esso è chiuso, illimitato e connesso.

b) Posto $t = xy$, si ha

$$\lim_{t \to 0^+} t \log t = 0 \,,$$

quindi la funzione risulterà essere continua nell'origine se e solo se $a = 0$. Inoltre, poiché $f(x,y) = xy[\log|x| + \log|y|]$, quando $x \to 0$ oppure $y \to 0$, abbiamo che $f(x,y) \to 0$. La funzione è, dunque, continua anche lungo gli assi cartesiani, se $a = 0$.

Svolgimento esercizio 7: Osserviamo che, per $x \geq 0$, la funzione integranda coincide con la funzione studiata nell'esercizio 2). Pertanto, utilizzeremo lo studio del segno di f e di f', fatto in precedenza, per determinare il segno di F' ed F'', rispettivamente. Poiché $f(t) = \log(1+t^2) - \arctan t$ è definita e continua per ogni $x \in \mathbb{R}$, $F \in C^1(\mathbb{R})$. Inoltre $F'(x) = \log(1+x^2) - \arctan x$. Poiché, per $x < 0$, $\log(1+x^2) > 0$ e $\arctan x < 0$, $F'(x) > 0$ in $(-\infty, 0)$. Utilizzando i risultati dell'esercizio 2), si ricava che la funzione cresce in $(-\infty, 0)$; ha un punto di massimo relativo nell'origine; decresce in $(0, x_0)$; ha un punto di minimo relativo in x_0; cresce di nuovo in $(x_0, +\infty)$. Poiché

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{x \to \pm\infty} F(x) = \pm\infty \,.$$

Dunque, non ci sono punti di massimo e minimo assoluto. Dato che $\lim\limits_{x \to \pm\infty} F'(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$, non ci sono asintoti obliqui. Sempre dall'esercizio 2) ricaviamo che

$$F''(x) = f'(x) = \frac{2x-1}{1+x^2} > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x > \frac{1}{2} \,.$$

La funzione sarà, quindi, concava in $(-\infty, 1/2)$ e convessa in $(1/2, +\infty)$. Il punto $x = 1/2$ è punto di flesso. Il grafico è riportato nel Capitolo 11.

Per il calcolo dell'integrale, ricordiamo l'esercizio 3), da cui ricaviamo

$$\begin{aligned} F(x) &= \left[\left(t + \frac{1}{2}\right) \log(1+t^2) + (2-t)\arctan t - 2t \right]\Bigg|_0^x \\ &= \left(x + \frac{1}{2}\right) \log(1+x^2) + (2-x)\arctan x - 2x \,. \end{aligned}$$

Non conoscendo il valore di x_0, non possiamo calcolare $F(x_0)$. Inoltre, F è negativa in $(-\infty, 0)$; si annulla in $x = 0$; è di nuovo negativa in $(0, x^*)$, dove $x^* > x_0$; si annulla in x^* ed è positiva in $(x^*, +\infty)$.

Svolgimento esercizio 8: Abbiamo

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 2\,dx + \int_0^{\pi} \frac{2x}{\pi}\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[2x\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{x^2}{\pi}\Big|_0^{\pi}\right] = 3 \,,$$

$$\begin{aligned} k \geq 1 \quad a_k &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 2\cos(kx)\,dx + \int_0^{\pi} \frac{2x}{\pi}\cos(kx)\,dx\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{k}\sin(kx)\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{k}x\sin(kx)\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\sin(kx)\,dx\right)\right] \\ &= \frac{2}{\pi^2 k^2}\cos(kx)\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi^2 k^2}[(-1)^k - 1] = \begin{cases} -\dfrac{4}{\pi^2(2m-1)^2} & \text{se } k = 2m-1 \,, \\ 0 & \text{se } k = 2m \,. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k \geq 1 \quad b_k &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 2\sin(kx)\,dx + \int_0^{\pi} \frac{2x}{\pi}\sin(kx)\,dx\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{2}{k}\cos(kx)\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{k}x\cos(kx)\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\cos(kx)\,dx\right)\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{2}{k}(1-(-1)^k) + \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{k}(-1)^k + \frac{1}{k^2}\sin(kx)\Big|_0^{\pi}\right)\right] = -\frac{2}{k\pi} \,. \end{aligned}$$

Quindi

$$f(x) \sim \frac{3}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\cos[(2m-1)x]}{(2m-1)^2} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\sin(kx) \,.$$

La funzione assegnata è regolare a tratti e

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 \,, \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = 2 \,;$$

pertanto, la serie converge puntualmente in tutto $\mathbb{R}$ ed ha come somma

$$S(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq 2k\pi \,, \\ 1 & \text{se } x = 2k\pi \,. \end{cases}$$

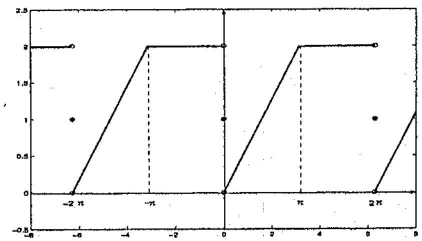


Figura 10.19

Grafico di S

Svolgimento esercizio 9: Nell'intervallo $[0, \pi/4]$, il coseno non si annulla mai e la tangente non ha singolarità. Pertanto, il valore di β è ininfluente per l'integrabilità. Relativamente all'altro parametro, abbiamo che, per $\alpha \geq 0$, la funzione è continua e quindi integrabile nell'intervallo $[0, \pi/4]$ e, conseguentemente, anche nell'intervallo considerato; per $\alpha < 0$,

$$f(x) \sim x^\alpha = \frac{1}{x^{-\alpha}} \qquad \text{per } x \to 0^+ .$$

Quindi, la funzione proposta sarà integrabile in senso improprio nell'intervallo considerato per $-\alpha < 1$, cioè per ogni $\alpha > -1$ (e per ogni $\beta \in \mathbb{R}$). Infine, per $\alpha > -1$ e $\beta = 2$, otteniamo

$$\int_0^{\pi/4} \frac{(\tan x)^\alpha}{\cos^2 x}\, dx = \frac{1}{\alpha+1}(\tan x)^{\alpha+1}\Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{\alpha+1} .$$

SVOLGIMENTO TEMA 10.20

Svolgimento esercizio 1: La serie proposta è a segno alterno e $|a_k| = \frac{\sqrt{k}}{k-1}$. Poiché

$$\frac{\sqrt{k}}{k-1} > \frac{\sqrt{k}}{k} = \frac{1}{\sqrt{k}} ,$$

per confronto con la serie armonica generalizzata di esponente $1/2 < 1$, otteniamo che la serie non converge assolutamente. D'altra parte

$$a) \quad \lim_{k \to +\infty} \frac{\sqrt{k}}{k-1} = 0 ,$$

$$b) \quad |a_k| > |a_{k+1}| \qquad \text{infatti} \quad \begin{cases} \dfrac{\sqrt{k}}{k-1} > \dfrac{\sqrt{k+1}}{k} & \Longleftrightarrow \quad k\sqrt{k} > (k-1)\sqrt{k+1} \\ \Longleftrightarrow \quad k^3 > (k-1)^2(k+1) & \Longleftrightarrow \quad k^2 + k - 1 > 0 \\ \Longleftrightarrow \quad k > \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} , & \end{cases}$$

e l'ultima disuguaglianza è sempre verificata, dato che $k \geq 1 > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Quindi, per il criterio di Leibniz, la serie proposta converge semplicemente.

Svolgimento esercizio 2: Disegnando il grafico elementare della funzione proposta

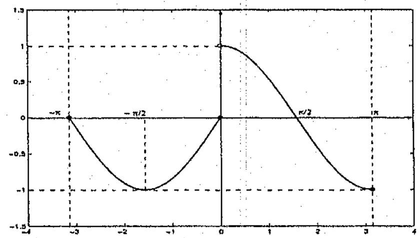


Figura 10.20a

$$\text{Grafico di } f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{se } x \in [-\pi, 0] \\ \cos x & \text{se } x \in (0, \pi] \end{cases}$$

otteniamo che $x = -\pi$ è punto di massimo relativo; $x = -\pi/2$ e $x = \pi$ sono punti di minimo relativo e assoluto. La funzione non è continua in $[-\pi, \pi]$, pertanto non è possibile applicare il Teorema di Weierstrass; in effetti, mentre il minimo assoluto, come abbiamo già visto, è assunto nei punti $x = -\pi/2$ e $x = \pi$, la funzione non ammette massimo assoluto, anche se essa è limitata superiormente e $\sup f = 1$. Osserviamo ancora che l'immagine di f è costituita dall'intervallo $[-1, 1)$ e che

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \qquad \text{mentre} \qquad f(0) = 0 \neq 1 .$$

Lo studente cerchi di ottenere gli stessi risultati tramite lo studio delle derivate, ricordando che in $x = 0$ la funzione presenta un punto di discontinuità di salto.

Svolgimento esercizio 3: Ricordando che $e^x - 1 \sim x$, per $x \to 0$, otteniamo

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \left(-\frac{x}{e^x - 1}\right) \left[e^x(x^2-1)\right] \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty .$$

Pertanto, la funzione ha un asintoto verticale in $x = 0$ ed ha ordine di infinito pari a 2, in quanto $g(x) \sim \frac{1}{x^2}$.

Per $x \to +\infty$, si ha, invece,

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x}{1-e^x}\right) \cdot \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2-1}{x}\right) = -\lim_{x\to+\infty} x = -\infty .$$

La funzione ha, quindi, ordine di infinito pari a 1. Per quanto riguarda il calcolo dell'eventuale asintoto obliquo, poiché $g(x) \sim -x$, per $x \to +\infty$, si ottiene subito che $m = -1$, in quanto

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{x} = -1 .$$

A sua volta, utilizzando gli ordini di infinito, si ha

$$\begin{aligned} q &= \lim_{x\to+\infty} [g(x) - mx] = \lim_{x\to+\infty} [g(x) + x] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2e^x - e^x + x^2 - x^2e^x}{(1-e^x)x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - e^x}{(1-e^x)x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{xe^x} = 0 ; \end{aligned}$$

quindi la funzione g ammette asintoto obliquo per $x \to +\infty$ dato dalla retta di equazione $y = -x$.

Per $x \to -\infty$, abbiamo che $g(x) \sim xe^x \to 0$, in quanto l'esponenziale tende a zero più rapidamente di quanto qualunque polinomio tenda all'infinito. Quindi la funzione ha asintoto orizzontale di equazione $y = 0$, per $x \to -\infty$, e non esiste ordine di infinitesimo, a causa della presenza dell'esponenziale.

Svolgimento esercizio 4: Operando la sostituzione $t = \cos x$, da cui $dt = -\sin x\, dx$, $t(0) = 1$ e $t(\pi) = -1$, si ricava

$$\begin{aligned} \int_0^\pi e^{\cos x} \sin^3 x\, dx &= \int_0^\pi e^{\cos x}(1-\cos^2 x)\sin x\, dx = -\int_1^{-1} e^t(1-t^2)\, dt \\ &= \int_{-1}^1 e^t(1-t^2)\, dt = e^t\Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 t^2e^t\, dt = e^t\Big|_{-1}^1 - \left[t^2e^t\Big|_{-1}^1 - 2\int_{-1}^1 te^t\, dt\right] \\ &= (1-t^2)e^t\Big|_{-1}^1 + 2\left[te^t\Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 e^t\, dt\right] = (1-t^2+2t-2)e^t\Big|_{-1}^1 \\ &= -(t-1)^2e^t\Big|_{-1}^1 = \frac{4}{e} , \end{aligned}$$

dove l'integrale rispetto a t è stato calcolato integrando più volte per parti.

Svolgimento esercizio 5: La funzione può essere riscritta nella forma

$$f(x) = 1 + \tilde{f}(x)$$

dove

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [-\pi, -\pi/2) , \\ 0 & \text{se } x \in [-\pi/2, \pi/2) , \\ -1 & \text{se } x \in [\pi/2, \pi) , \end{cases}$$

che, senza considerare i punti $x = k\frac{\pi}{2}$, è una funzione dispari. Pertanto,

$$\frac{a_0}{2} = 1 ; \qquad a_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} ;$$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \tilde{f}(x)\sin(kx)\, dx = -\frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^\pi \sin(kx)\, dx = \frac{2}{k\pi}\left[(-1)^k - \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right] ,$$

da cui

$$f(x) \sim 1 + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{[(-1)^k - \cos(k\pi/2)]}{k} \sin(kx) .$$

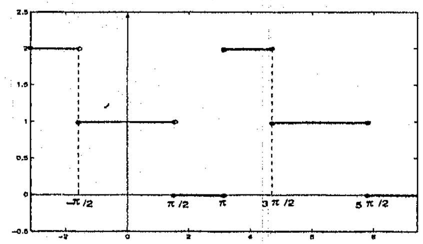


Figura 10.20b

Grafico di f

La funzione è regolare a tratti e

$$\lim_{x\to-\pi/2^+} f(x) = 1 , \qquad \lim_{x\to-\pi/2^-} f(x) = 2 ,$$
$$\lim_{x\to\pi/2^+} f(x) = 0 , \qquad \lim_{x\to\pi/2^-} f(x) = 1 ,$$
$$\lim_{x\to-\pi^+} f(x) = 2 , \qquad \lim_{x\to\pi^-} f(x) = 0 ;$$

pertanto, la serie converge puntualmente su tutta la retta reale alla funzione

$$S(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq \pi/2 + k\pi \; ; x \neq (2k+1)\pi , \\ 1/2 & \text{se } x = \pi/2 + 2k\pi , \\ 3/2 & \text{se } x = -\pi/2 + 2k\pi , \\ 1 & \text{se } x = (2k+1)\pi . \end{cases}$$

La serie non converge totalmente, poiché, in tal caso, essendo una serie di funzioni continue, la sua somma S dovrebbe essere anch'essa una funzione continua in tutto $\mathbb{R}$, mentre, da quanto appena visto, S ha un'infinità numerabile di punti di salto.

Svolgimento esercizio 6: L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del primo ordine a coefficienti continui, definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Utilizzando la formula risolutiva si ottiene

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\int \sin x\, dx}\left[\int \exp\left(\int \sin x\, dx\right)\sin^3 x\, dx + C\right] = e^{\cos x}\left[\int e^{-\cos x}\sin^3 x\, dx + C\right] \\ &= e^{\cos x}\left[\int e^t(1-t^2)\, dt\right]\Big|_{t=-\cos x} = e^{\cos x}\left[-(t-1)^2 e^t + C\right]\Big|_{t=-\cos x} \\ &= e^{\cos x}\left[-(\cos x+1)^2 e^{-\cos x} + C\right] = -(\cos x + 1)^2 + Ce^{\cos x}, \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato il risultato dell'integrazione dell'esercizio 4). Poiché $|\cos x| \le 1$, si ha che $|\cos x + 1| \le 2$ e $\exp(\cos x) \le e$, quindi

$$|y(x)| \le |(\cos x + 1)^2| + |C|e^{\cos x} \le 4 + |C|e\,,$$

ovvero tutte le soluzioni sono limitate.

Svolgimento esercizio 7:

a) La funzione integranda f è definita per $t \ne 0$ ed è continua in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Pertanto, l'intervallo massimale di continuità di f, contenente il punto iniziale $x = 1$, è $(0, +\infty)$. Inoltre, poiché, per $t \to 0^+$, $e^t - 1 \sim t$, si ha che $f(t) \sim -1/t$ in un intorno destro di $x = 0$ e quindi non ammette integrale improprio; in particolare,

$$\lim_{x\to 0^+} F(x) = +\infty\,,$$

da cui: $C.E. = (0, +\infty)$ e $x = 0$ è asintoto verticale. Passando allo studio delle derivate, si ha

$$\begin{aligned} &F'(x) = 2 + \frac{e^x}{1-e^x} = \frac{2-e^x}{1-e^x} = 1 + \frac{1}{1-e^x}\,; \\ &F'(x) > 0 \quad \text{per} \quad x > \log 2\,; \qquad F'(x) < 0 \quad \text{per} \quad 0 < x < \log 2\,; \\ &F''(x) = \frac{e^x}{(1-e^x)^2} > 0 \qquad \forall x \in C.E.\,. \end{aligned}$$

La funzione, quindi, decresce in $(0, \log 2)$, cresce in $(\log 2, +\infty)$ ed ha un punto di minimo relativo ed assoluto in $x = \log 2$; inoltre essa è sempre convessa.

b) Per studiare il segno di F ed eventuali asintoti obliqui a $+\infty$, calcoliamo esplicitamente l'integrale:

$$\begin{aligned} F(x) &= 2x + \int_1^x \frac{e^t}{1-e^t}\, dt = 2x - \left[\log|1-e^t|\right]\Big|_1^x \\ &= 2x - \log(e^x - 1) + \log(e-1)\,. \end{aligned}$$

Da ciò ricaviamo

$$F(\log 2) = 2\log 2 + \log(e-1) = \log[4(e-1)] > 0\,,$$

quindi la funzione sarà sempre positiva. Infine

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} F(x) &= \lim_{x\to+\infty}\{2x - \log[e^x(1-e^{-x})] + \log(e-1)\} \\ &= \lim_{x\to+\infty}[2x - x - \log(1-e^{-x}) + \log(e-1)] \\ &= \lim_{x\to+\infty}[x - \log(1-e^{-x}) + \log(e-1)] = +\infty\,; \\ m = \lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} F'(x) = \lim_{x\to+\infty}[1 + \frac{1}{1-e^x}] = 1\,; \\ q = \lim_{x\to+\infty}[F(x) - mx] &= \lim_{x\to+\infty}\{2x - x - \log(1-e^{-x}) + \log(e-1) - x\} \\ &= \lim_{x\to+\infty}\{-\log(1-e^{-x}) + \log(e-1)\} = \log(e-1)\,. \end{aligned}$$

Dunque, la funzione ha asintoto obliquo, per $x \to +\infty$, di equazione $y = x + \log(e-1)$. Il grafico è riportato nel Capitolo 11.

Svolgimento esercizio 8: Ricordando che, per $x \to 0^+$, $\frac{e^x-1}{x} \to 1$, si ricava che $z(x) \to 1$; cioè, la funzione è prolungabile con continuità in $x = 0$ e quindi è integrabile in un intorno dell'origine. Per $x \to 1^-$, invece, si ha

$$z(x) \sim \frac{e}{e-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}}\,.$$

Ricordando che la funzione $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ è impropriamente integrabile in un intorno sinistro di $x = 1$, si ottiene che anche la funzione proposta è integrabile in senso improprio in un intorno sinistro di $x = 1$ e quindi in tutto l'intervallo $(0, 1)$.

Svolgimento esercizio 9: Calcoliamo le derivate parziali della funzione G:

$$\begin{aligned} G_x(x,y) &= e^x[(x-y)^2 + 2(x-y)] = e^x(x-y)(x-y+2)\,, \\ G_y(x,y) &= -2e^x(x-y)\,. \end{aligned}$$

Le derivate parziali sono contemporaneamente nulle se e solo se $y = x$, cioè lungo la bisettrice del primo e terzo quadrante. Poiché $G(x,y) \ge 0$, per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, e $G(x,x) = 0$, possiamo concludere che i punti della bisettrice $y = x$ sono tutti punti di minimo relativo e assoluto. Non ci sono, invece, punti di massimo relativo o assoluto. Infine, poiché, ad esempio,

$$\lim_{x\to+\infty} G(x,0) = \lim_{x\to+\infty} x^2 e^x = +\infty\,,$$

otteniamo che $\sup G = +\infty$, cioè la funzione è superiormente illimitata.

Lo studente verifichi che la matrice Hessiana di G, nei punti della bisettrice $y = x$, è solo semidefinita positiva (più precisamente, $H_G(x,x)$ ha un autovalore positivo ed un autovalore nullo) e che, quindi, tale informazione non può garantire che i punti della bisettrice siano dei punti di minimo.

CAPITOLO 11

GRAFICI

In questo capitolo abbiamo raccolto tutti i grafici relativi agli esercizi proposti nei capitoli precedenti. Per comodità del lettore, in didascalia è riportato il numero dell'esercizio a cui il grafico si riferisce.

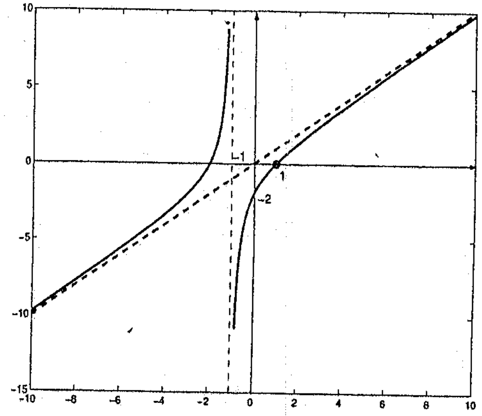


Figura 4.93

Grafico di $f(x) = \frac{x^3-3x+2}{x^2-1}$

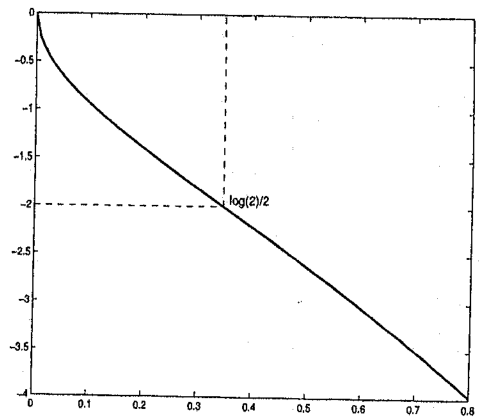


Figura 4.94

Grafico di $f(x) = -\sqrt{4e^{2x}-4}$

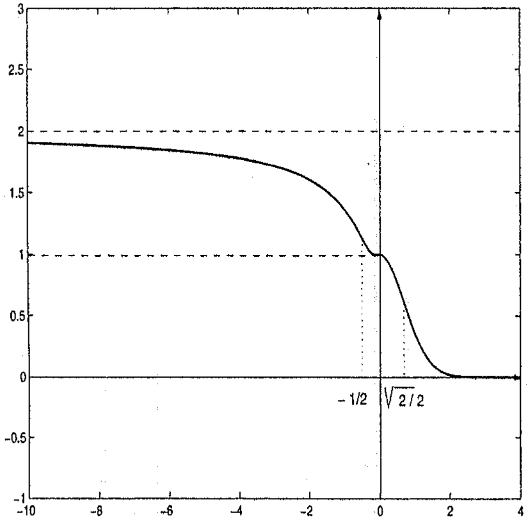


Figura 4.95

Grafico di $f(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & \text{se } x \geq 0 \\ 1 + e^{1/x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$

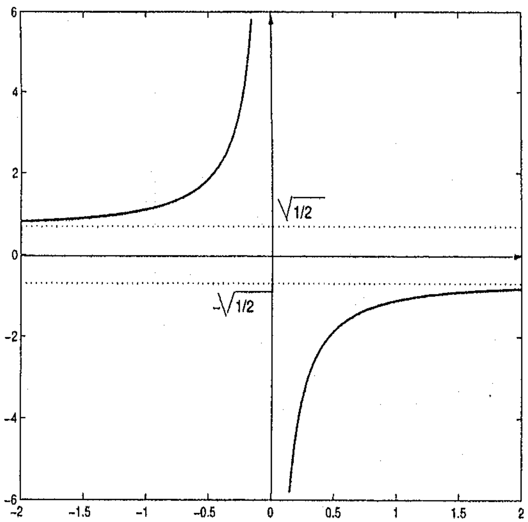


Figura 4.96

Grafico di $f(x) = \frac{\sqrt{2x^2+3}}{2x}\,\text{sign}[\arctan(-|x|/2-1)]$

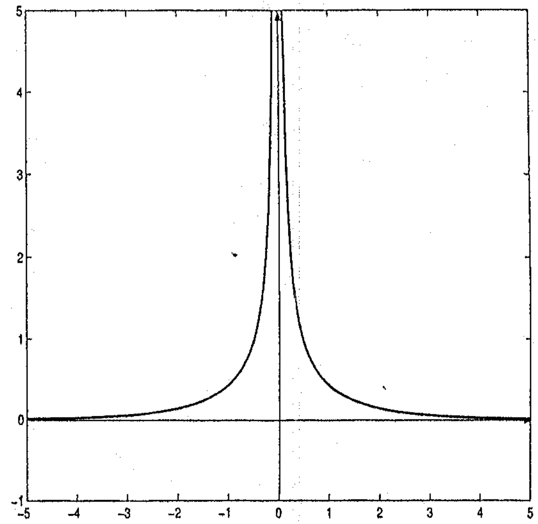


Figura 4.97

Grafico di $f(x) = \frac{e^x}{|e^{2x}-1|}$

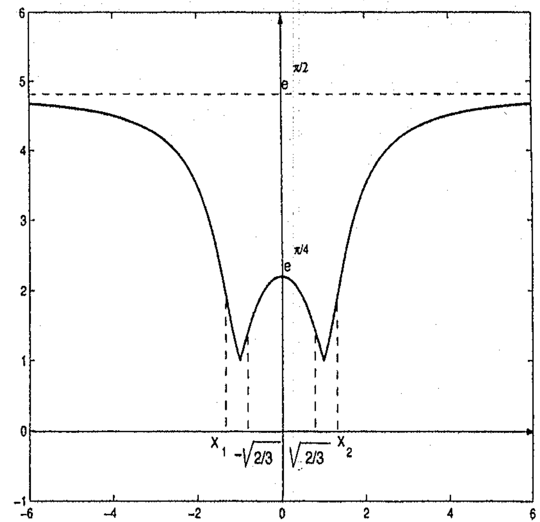


Figura 4.98

Grafico di $f(x) = e^{\arctan|x^2-1|}$

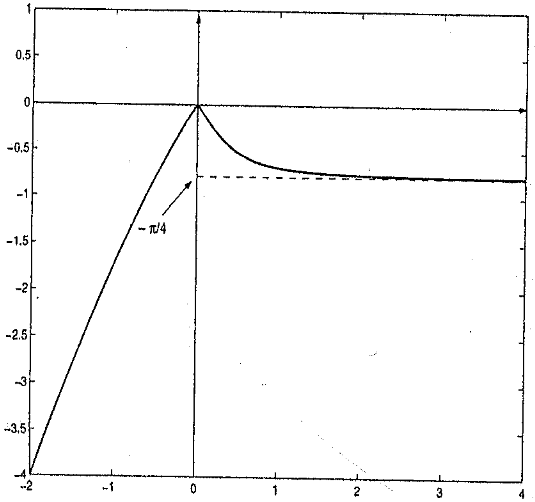


Figura 4.99

Grafico di $f(x) = \begin{cases} \arctan\left(-\frac{2x}{\sqrt{x^2+2}}\right) & \text{se } x \geq 0 \\ x\sqrt{|x-5|-3} & \text{se } x < 0 \end{cases}$

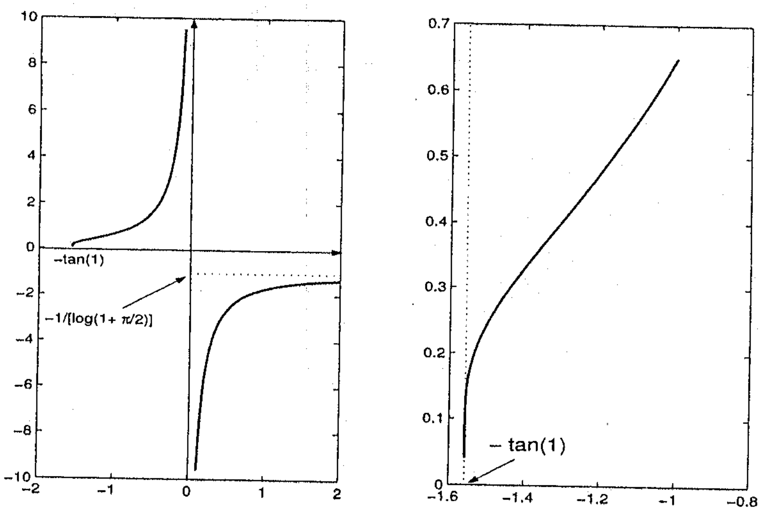


Figura 4.100

A sinistra: grafico di $f(x) = -\frac{1}{\log(\arctan x+1)}$

A destra: zoom della funzione in $x = -\tan 1$

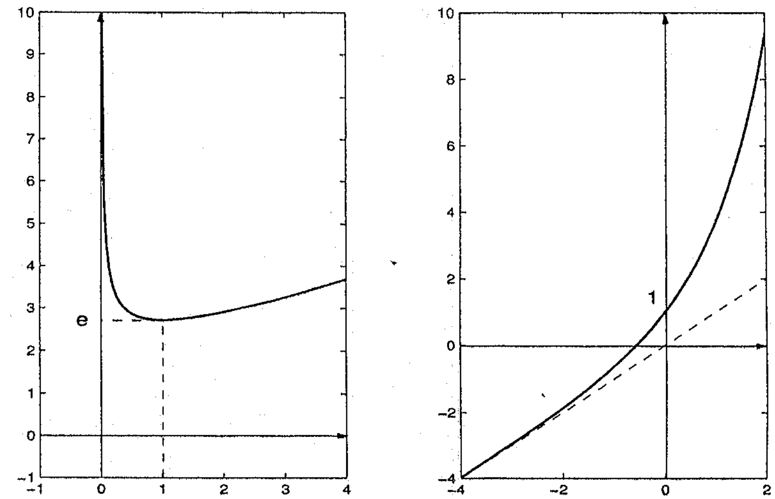


Figura 4.121 (1;2)

A sinistra: grafico di $f(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$

A destra: grafico di $f(x) = x + \mathrm{e}^x$

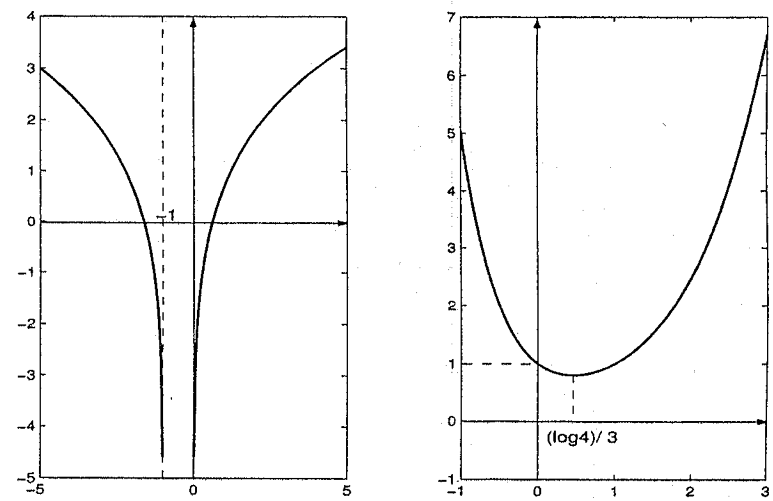


Figura 4.121 (3;4)

A sinistra: grafico di $f(x) = \log(x^2 + x)$

A destra: grafico di $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^{-2x}}{3}$

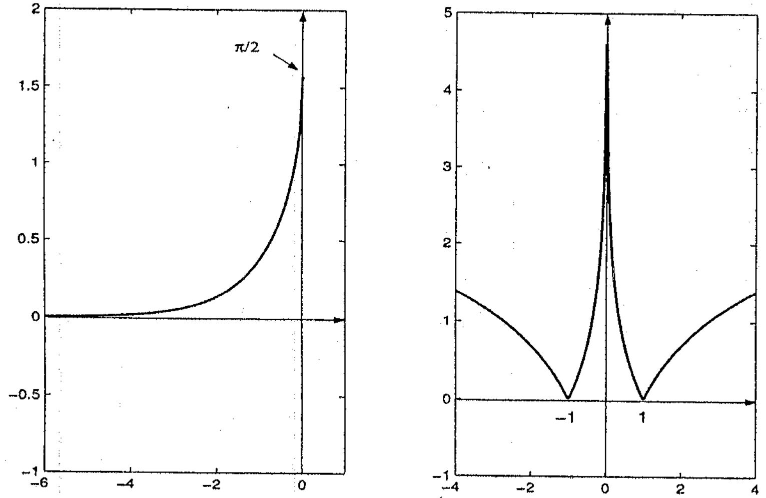


Figura 4.121 (5;6)

A sinistra: grafico di $f(x) = \arcsin e^x$

A destra: grafico di $f(x) = \left|\log|x|\right|$

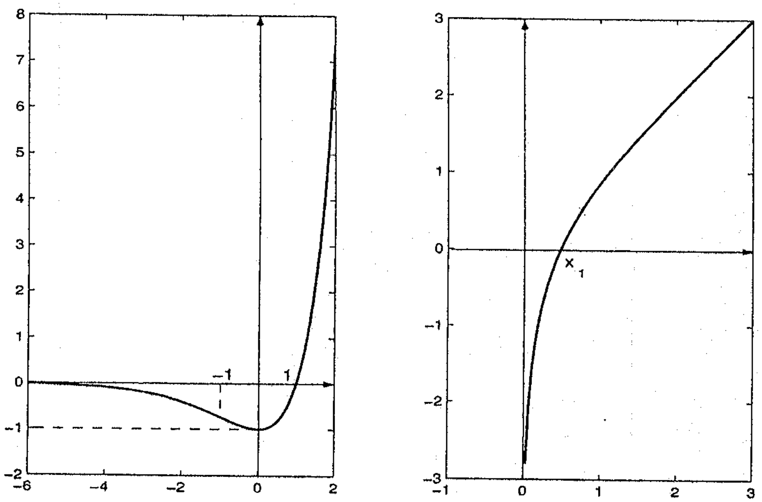


Figura 4.121 (7;8)

A sinistra: grafico di $f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right) e^{x\log x}$

A destra: grafico di $f(x) = \log(e^x - e^{-x})$

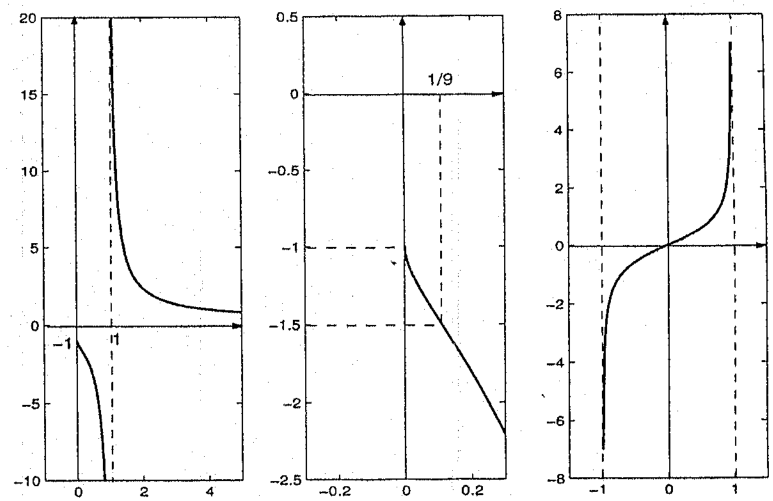


Figura 4.121 (9;10)

A sinistra: grafico di $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$

Al centro: zoom della funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$ in $x = 0$

A destra: grafico di $f(x) = \tan(\arcsin x)$

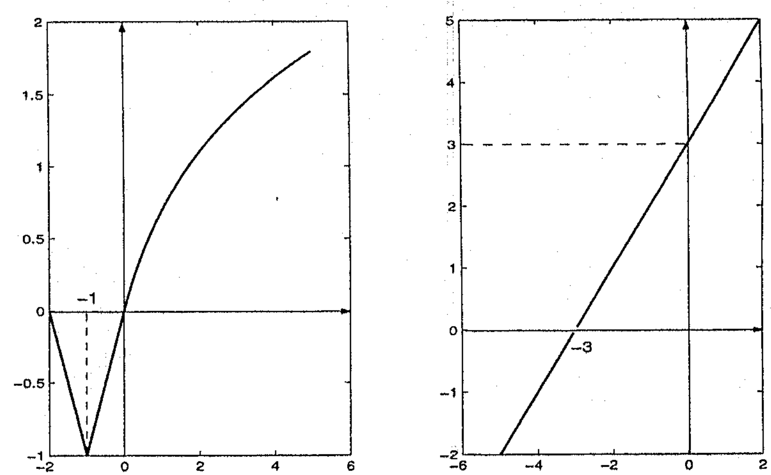


Figura 4.121 (11;12)

A sinistra: grafico di $f(x) = \begin{cases} \log(1+x) & \text{se } x \geq 0 \\ |1+x| - 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

A destra: grafico di $f(x) = \frac{x^3+9x^2+27x+27}{x^2+6x+9}$

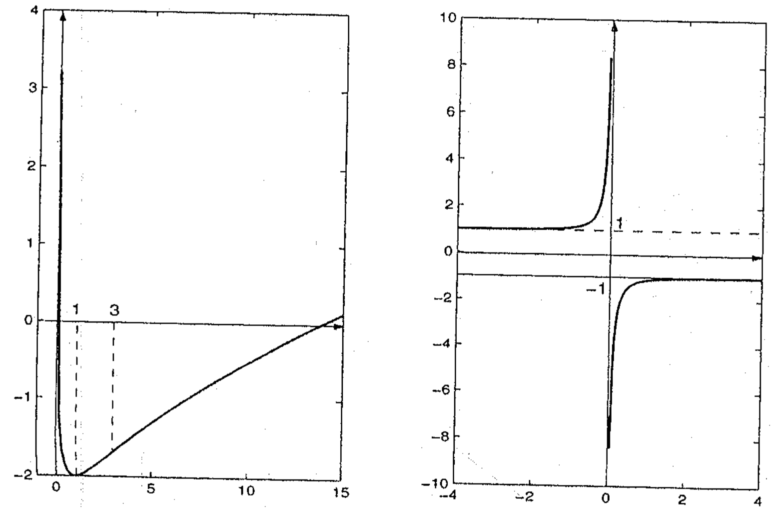


Figura 4.121 (13;14)

A sinistra: grafico di $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 4$

A destra: grafico di $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x}\, \mathrm{sign}[\arctan(-|x| - \pi)]$

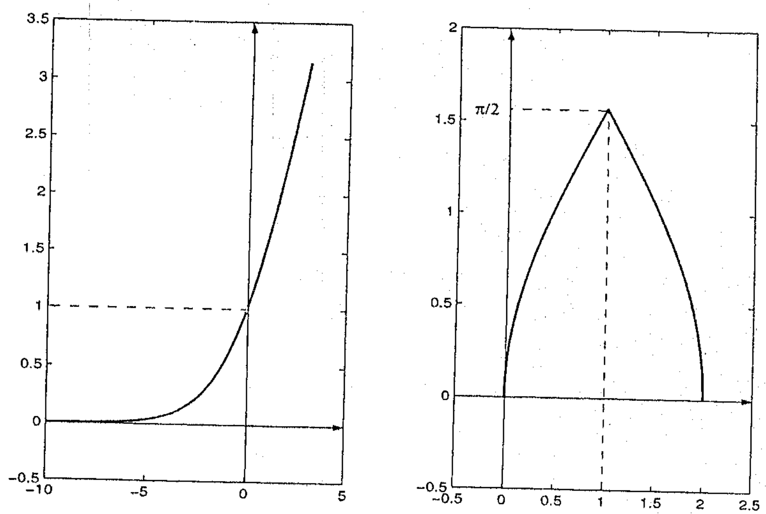


Figura 4.121 (15;16)

A sinistra: grafico di $f(x) = \frac{xe^x}{e^x - 1}$

A destra: grafico di $f(x) = \arccos|x - 1|$

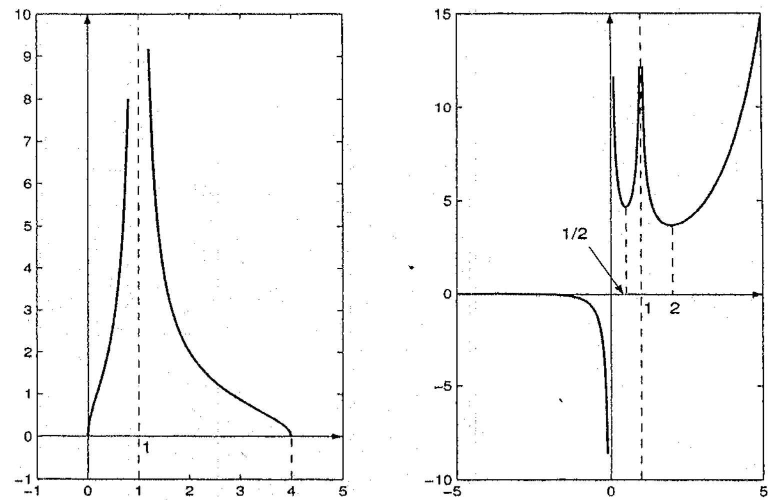


Figura 4.121 (17;18)

A sinistra: grafico di $f(x) = \frac{\sqrt{4x - x^2}}{|x-1|}$

A destra: grafico di $f(x) = \frac{e^x}{x\sqrt{|x-1|}}$

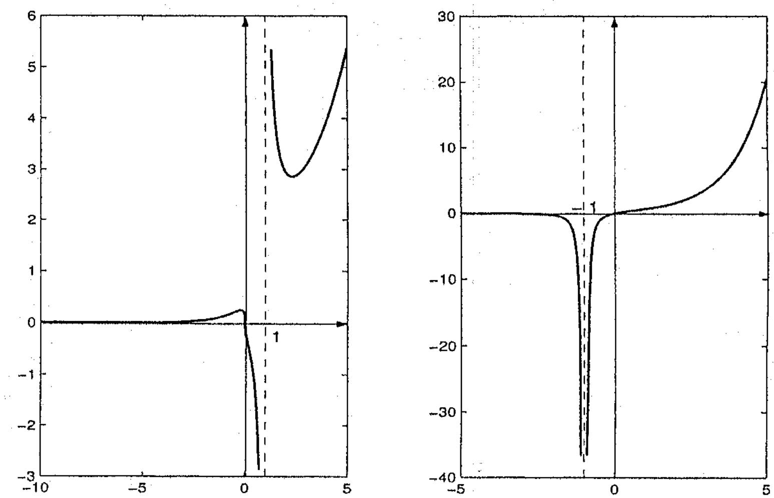


Figura 4.121 (19;20)

A sinistra: grafico di $f(x) = \frac{e^x \sqrt[3]{e^x - 1}}{e^x - e}$

A destra: grafico di $f(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$

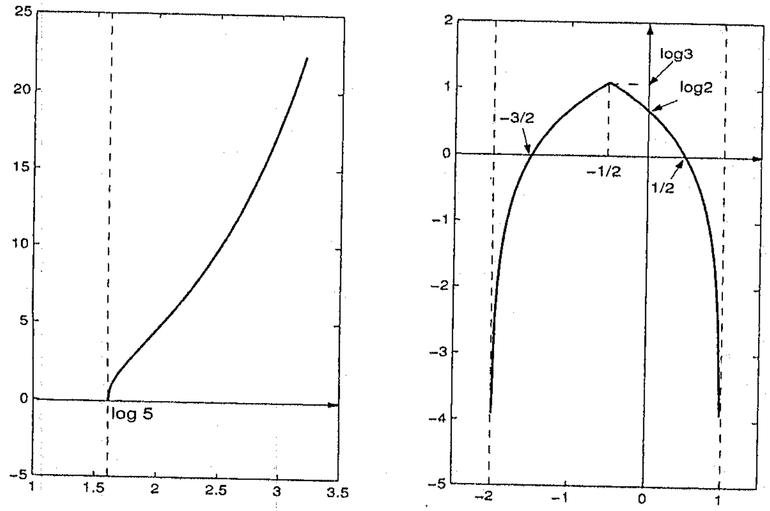


Figura 4.121 (21;22)

A sinistra: grafico di $f(x) = -\mathrm{sign}(-x)\sqrt{e^{2x} - 4e^x - 5}$
A destra: grafico di $f(x) = \log(3 - |2x + 1|)$

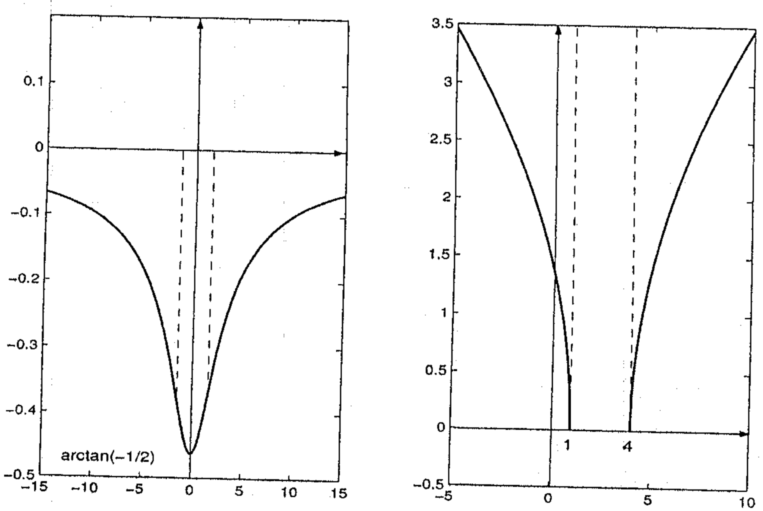


Figura 4.121 (23;24)

A sinistra: grafico di $f(x) = \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\right)$
A destra: grafico di $f(x) = \sqrt{|2x - 5| - 3}$

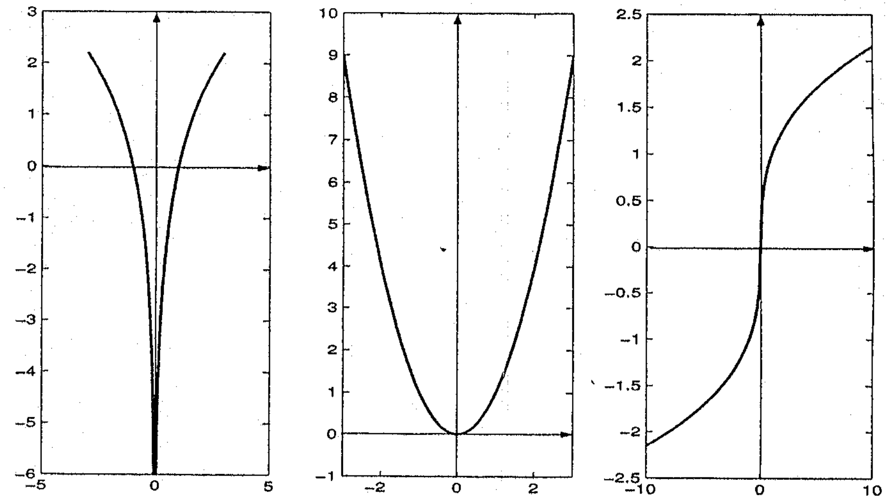


Figura 4.125

A sinistra: grafico di $f(x) = \log(x^2)$
Al centro: grafico di $g(x) = |x^2|$
A destra: grafico di $h(x) = \sqrt[3]{x}$

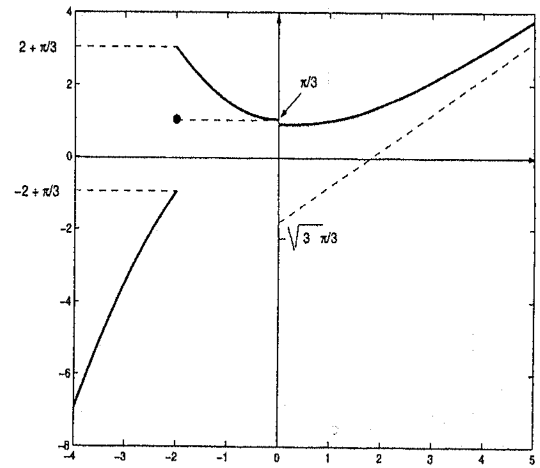


Figura 5.108

$$\text{Grafico di } F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}\,\mathrm{sign}(x+2) + \pi/3 & \text{se } x \le 0 \\ 1 + \int_1^x \frac{1}{t^3+3t}\, e^{3\log t}\, dt & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

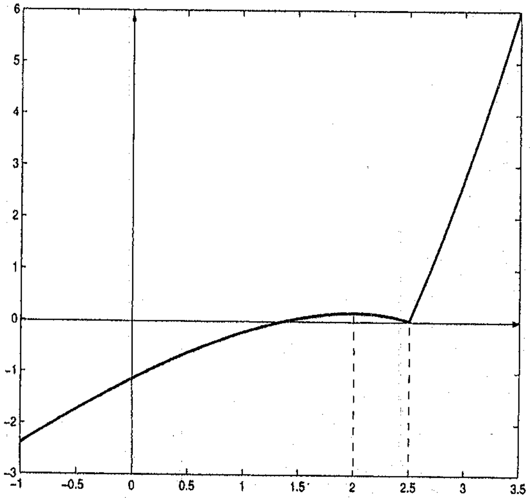


Figura 5.109

Grafico di $F(x) = \begin{cases} \int_{5/2}^{x} \log(3-t)\, dt & \text{se } x \leq 5/2 \\ x^2 - 25/4 & \text{se } x > 5/2 \end{cases}$

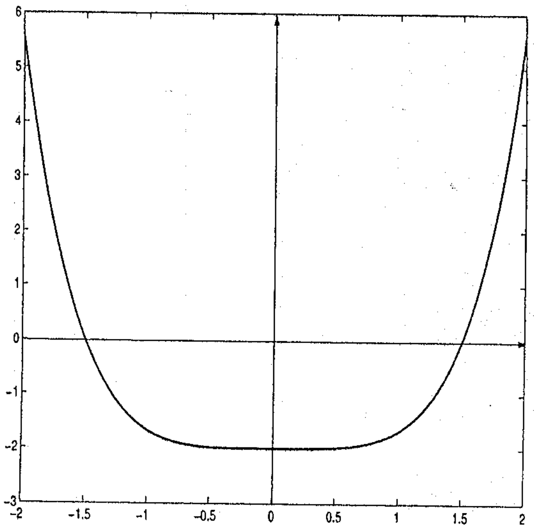


Figura 5.110

Grafico di $F(x) = \int_0^x t^3(1+t^2)^{1/2}\, dt - 2$

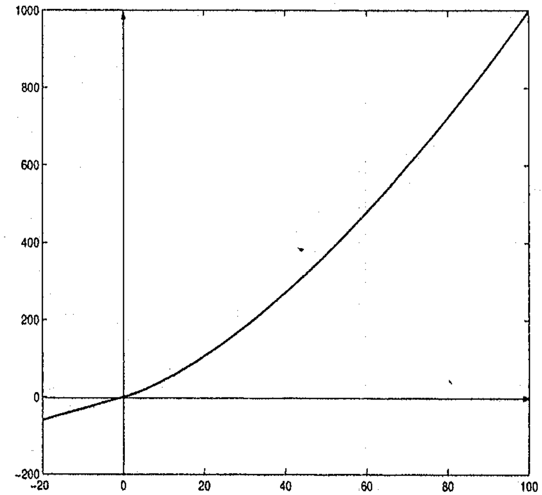


Figura 5.111

Grafico di $F(x) = \int_0^x \sqrt{t + |t| + 9}\, dt$

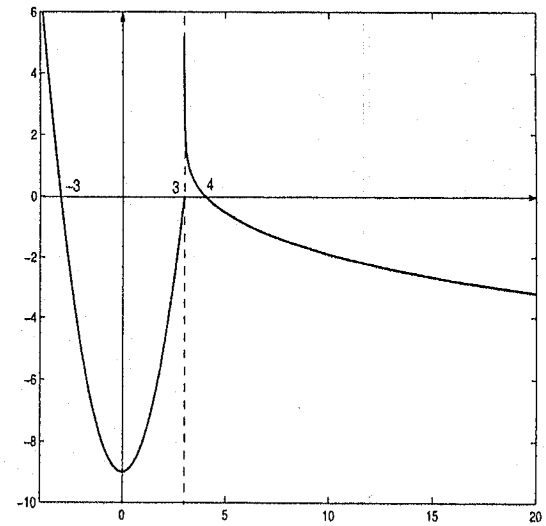


Figura 5.112

Grafico di $F(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & \text{se } x \leq 3 \\ \int_4^x \frac{2t-3}{9-t^2}\, dt & \text{se } x > 3 \end{cases}$

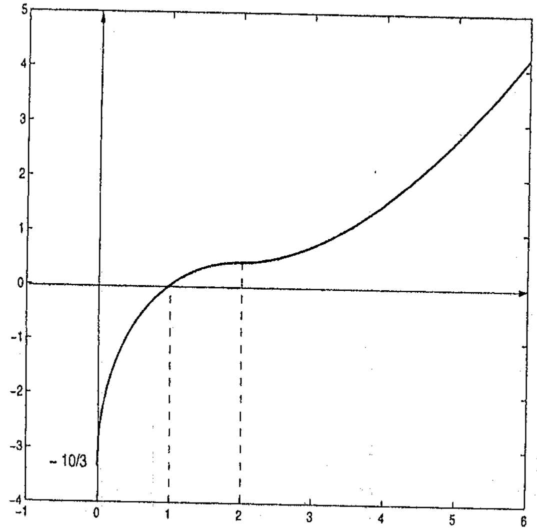


Figura 5.113

Grafico di $F(x) = \int_1^x \frac{|t-2|}{\sqrt{t}}\, dt$

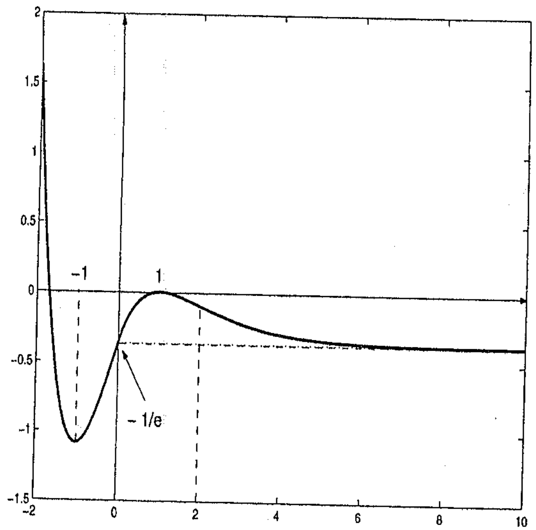


Figura 5.114

Grafico di $F(x) = \int_1^x (1 - |t|)\, e^{-t}\, dt$

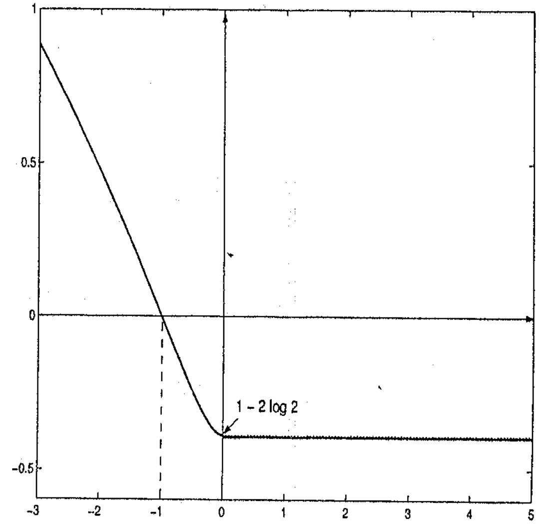


Figura 5.115

Grafico di $F(x) = \int_{-1}^x \frac{t-|t|}{t^2-2t+1}\, dt$

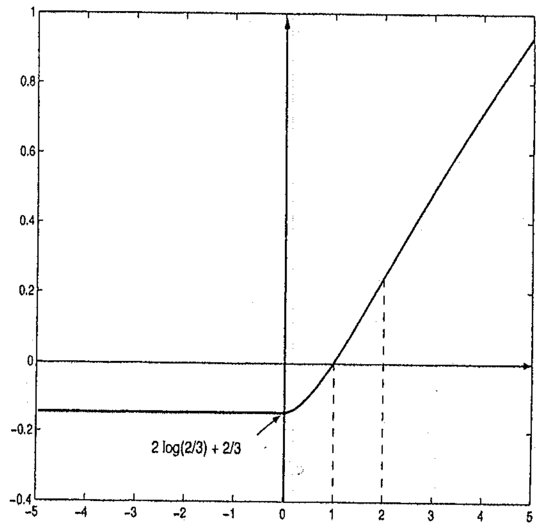


Figura 5.116

Grafico di $F(x) = \int_1^x \frac{t+|t|}{t^2+4t+4}\, dt$

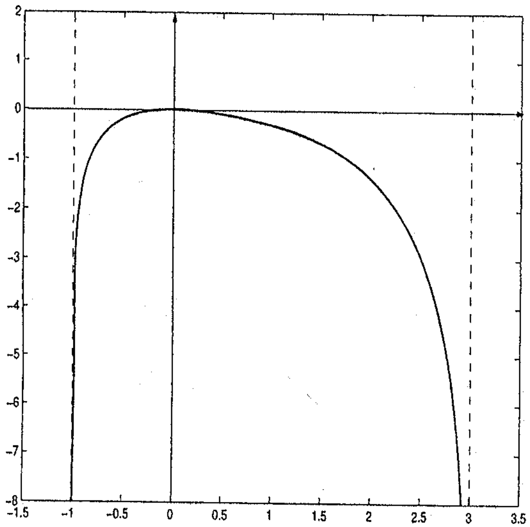


Figura 5.117

Grafico di $F(x) = \int_0^x \frac{t}{|t-1|-2}\, dt$

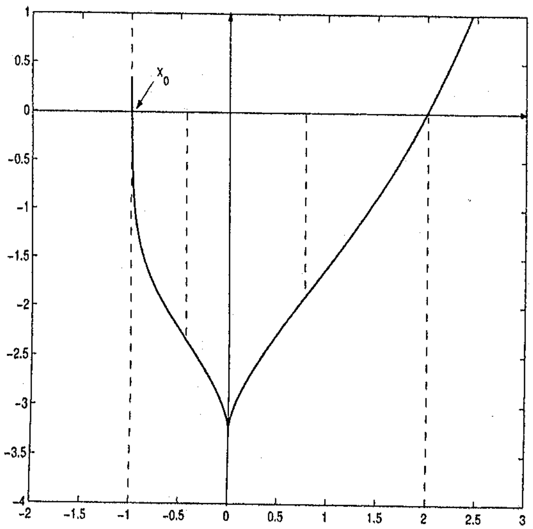


Figura 5.118

Grafico di $F(x) = \int_2^x \frac{e^t}{t^{1/3}(t+1)}\, dt$

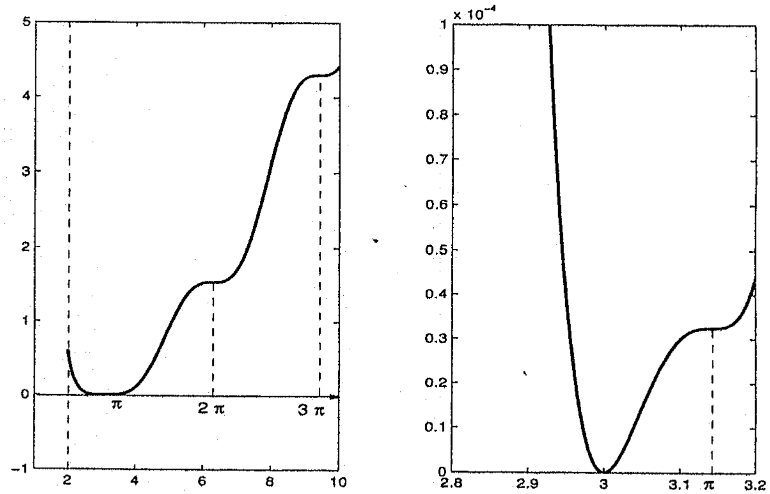


Figura 5.119

A sinistra: grafico di $F(x) = \int_3^x (\sin^2 t) \log(t-2)\, dt$

A destra: zoom della funzione tra $x = 3$ e $x = \pi$

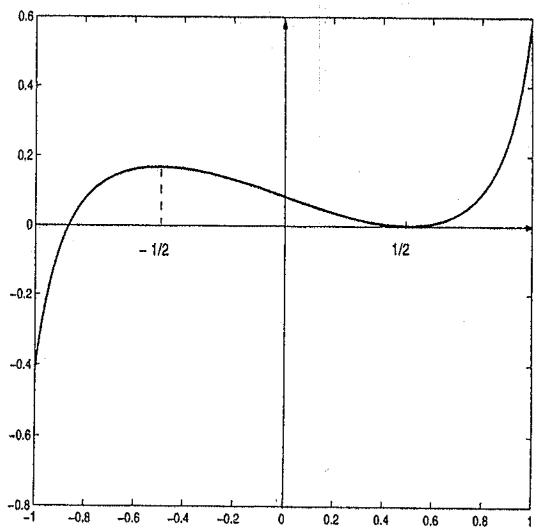


Figura 5.121

Grafico di $F(x) = \int_{1/2}^x \left(t^2 - 1/4\right)\ e^{2t^4}\, dt$

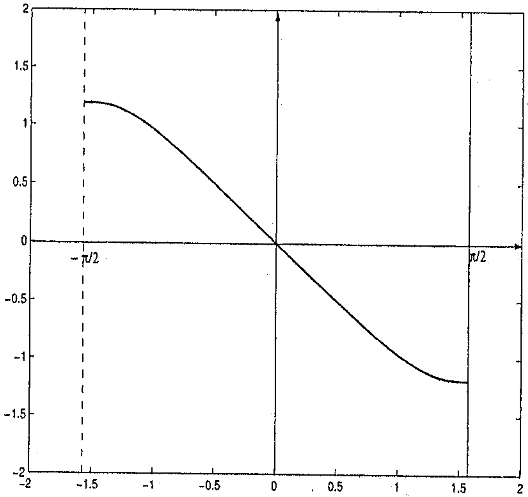


Figura 5.122

Grafico di $F(x) = \int_0^x e^{t^2}(\sin^2 t - 1)\, dt$, $x \in [-\pi/2, \pi/2]$

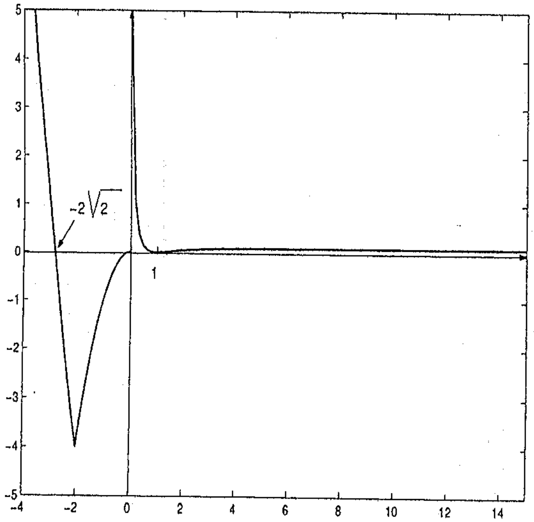


Figura 5.124

Grafico di $F(x) = \begin{cases} \int_1^x \frac{\log t}{t\, e^t}\, dt & \text{se } x > 0 \\ |x^2 - 4| - 4 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

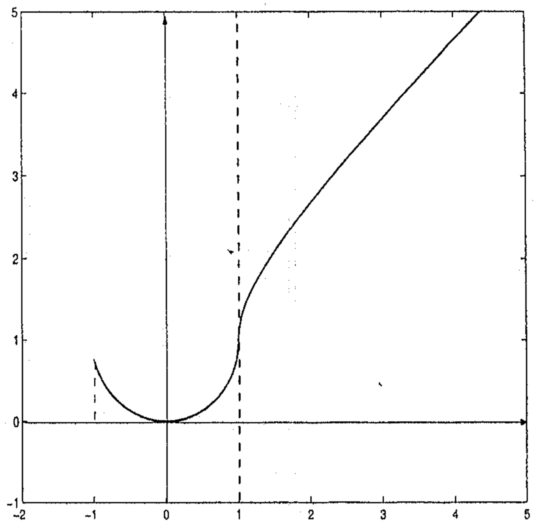


Figura 5.125

Grafico di $F(x) = \int_0^x \frac{\log(1+t)}{\sqrt{|t-1|}}\, dt$

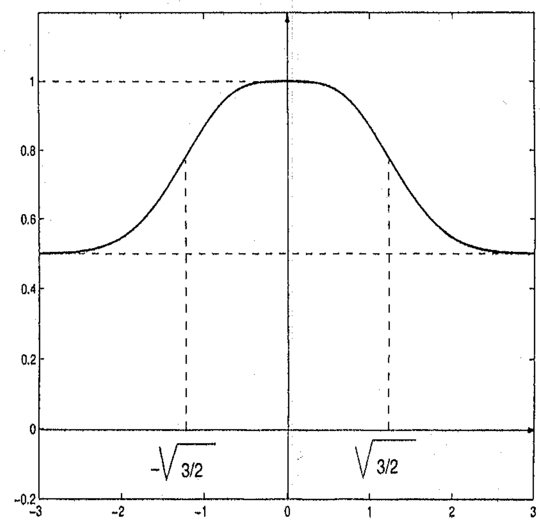


Figura 10.1

Grafico di $F(x) = 1 - \int_0^x t^3\, e^{-t^2}\, dt$

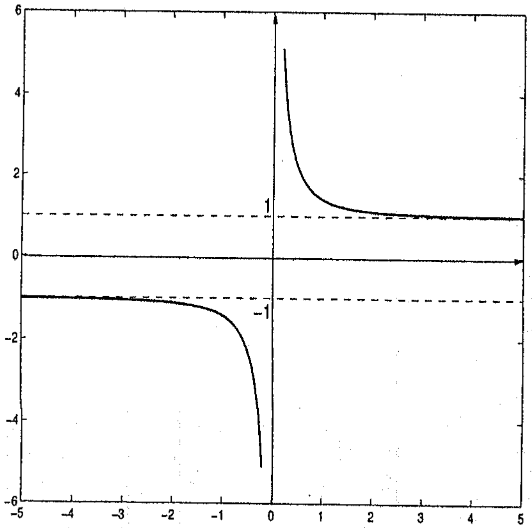


Figura 10.4

Grafico di $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,\mathrm{sign}[\arctan(|x|+1)]$

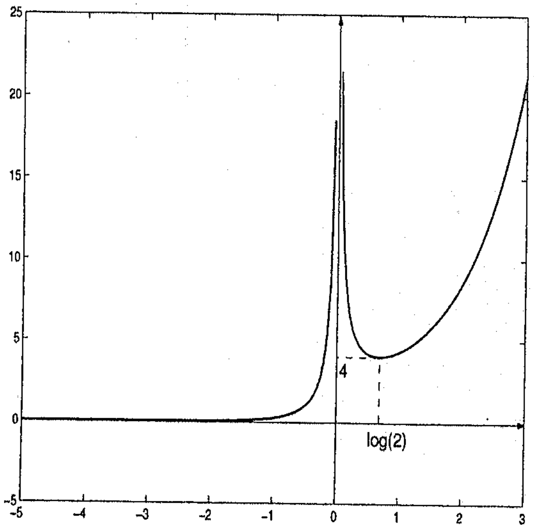


Figura 10.6

Grafico di $f(x) = \frac{e^{2x}}{|e^x-1|}$

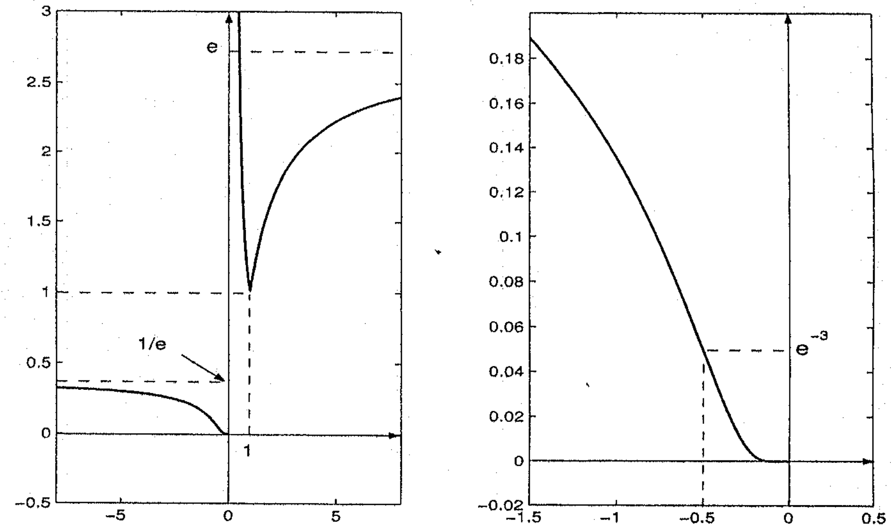


Figura 10.7

A sinistra: grafico di $f(x) = \frac{e^{|x-1|}}{x}$

A destra: zoom della funzione per $x \to 0^-$

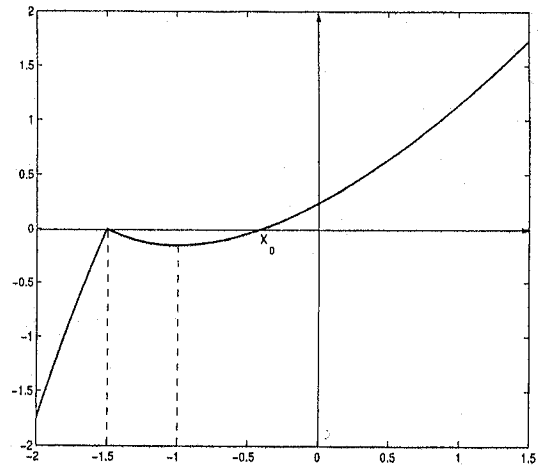


Figura 10.12

Grafico di $F(x) = \begin{cases} 9/4 - x^2 & \text{se } x < -3/2 \\ \int_{-3/2}^{x} \log(2+t)\, dt & \text{se } x \geq -3/2 \end{cases}$

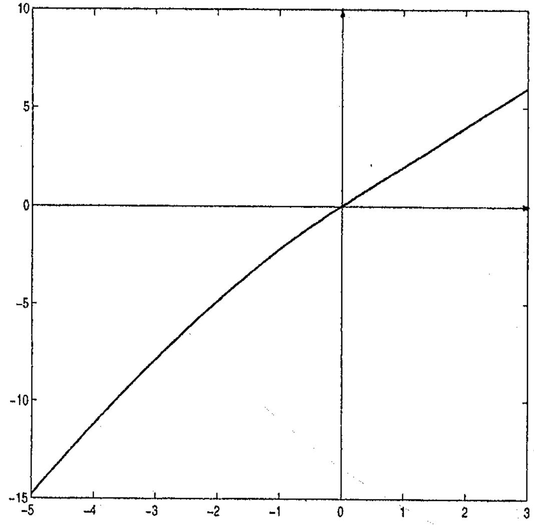


Figura 10.15

Grafico di $F(x) = \int_0^x \sqrt{4 - t + |t|}\ dt$

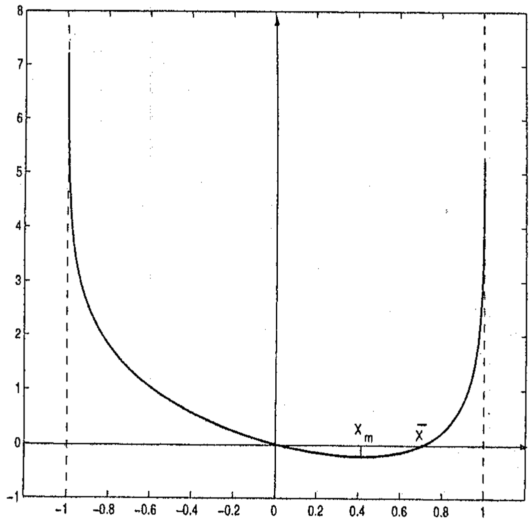


Figura 10.18

Grafico di $F(x) = -x + \int_0^x \frac{2t}{1-t^2}\ dt$

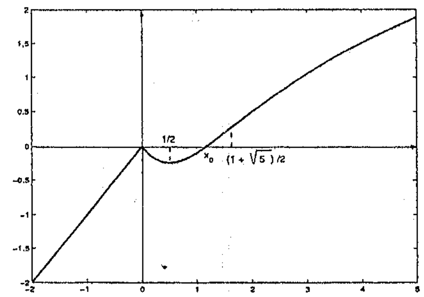


Figura 10.19 (2)

$$\text{Grafico di } f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 0 \\ \log(1+x^2) - \arctan x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

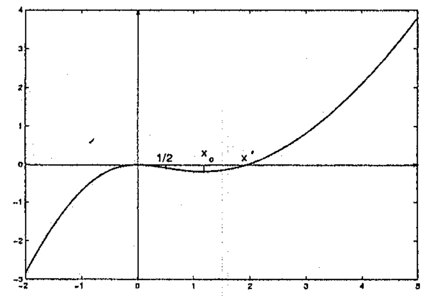


Figura 10.19 (7)

Grafico di $F(x) = \int_0^x \left[\log(1+t^2) - \arctan t\right]\ dt$

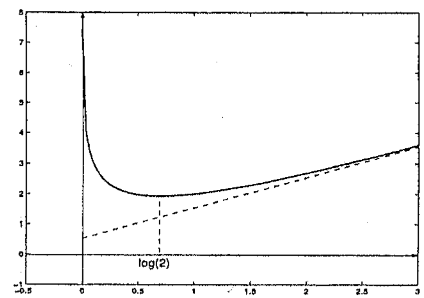


Figura 10.20

Grafico di $F(x) = 2x + \int_1^x \frac{e^t}{1-e^t}\ dt$