$$\langle S, x : C, x : \neg C \mid U \rangle \quad \text{(Clash)}$$

$$\langle S, x : \neg\top \mid U \rangle \quad \text{(Clash)}_{\top}$$

$$\langle S, x : \bot \mid U \rangle \quad \text{(Clash)}_{\bot}$$

$$\frac{\langle S, x : C \sqcap D \mid U \rangle}{\langle S, x : C \sqcap D, x : C, x : D \mid U \rangle}\ (\sqcap^{+})$$

if $\{x : C, x : D\} \not\subseteq S$

$$\frac{\langle S, x : \neg(C \sqcap D) \mid U \rangle}{\langle S, x : \neg(C \sqcap D), x : \neg C \mid U \rangle \qquad \langle S, x : \neg(C \sqcap D), x : \neg D \mid U \rangle}\ (\sqcap^{-})$$

if $x : \neg C \notin S$ and $x : \neg D \notin S$

$$\frac{\langle S, x : C \sqcup D \mid U \rangle}{\langle S, x : C \sqcup D, x : C \mid U \rangle \qquad \langle S, x : C \sqcup D, x : D \mid U \rangle}\ (\sqcup^{+})$$

if $x : C \notin S$ and $x : D \notin S$

$$\frac{\langle S, x : \neg(C \sqcup D) \mid U \rangle}{\langle S, x : \neg(C \sqcup D), x : \neg C, x : \neg D \mid U \rangle}\ (\sqcup^{-})$$

if $\{x : \neg C, x : \neg D\} \not\subseteq S$

$$\frac{\langle S, x : \neg\neg C \mid U \rangle}{\langle S, x : \neg\neg C, x : C \mid U \rangle}\ (\neg)$$

if $x : C \notin S$

$$\frac{\langle S, x : \mathbf{T}(C) \mid U \rangle}{\langle S, x : \mathbf{T}(C), x : C, x : \Box\neg C \mid U \rangle}\ (\mathbf{T}^{+})$$

if $\{x : C, x : \Box\neg C\} \not\subseteq S$

$$\frac{\langle S, x : \neg\mathbf{T}(C) \mid U \rangle}{\langle S, x : \neg\mathbf{T}(C), x : \neg C \mid U \rangle \qquad \langle S, x : \neg\mathbf{T}(C), x : \neg\Box\neg C \mid U \rangle}\ (\mathbf{T}^{-})$$

if $x : \neg C \notin S$ and $x : \neg\Box\neg C \notin S$

$$\frac{\langle S \mid U \rangle}{\langle S, x : \Box\neg C \mid U \rangle \qquad \langle S, x : \neg\Box\neg C \mid U \rangle}\ (cut)$$

if $x : \neg\Box\neg C \notin S$ and $x : \Box\neg C \notin S$
$C \in \mathcal{L}_{\mathbf{T}}$
x occurs in S

$$\frac{\langle S \mid U, C \sqsubseteq D^{L} \rangle}{\langle S, x : \neg C \sqcup D \mid U, C \sqsubseteq D^{L,x} \rangle}\ (\sqsubseteq)$$

if x occurs in S and $x \notin L$

$$\frac{\langle S, x : \forall R.C, x \xrightarrow{R} y \mid U \rangle}{\langle S, x : \forall R.C, x \xrightarrow{R} y, y : C \mid U \rangle}\ (\forall^{+})$$

if $y : C \notin S$

$$\frac{\langle S, x : \exists R.C \mid U \rangle}{\langle S, x : \exists R.C, x \xrightarrow{R} y, y : C \mid U \rangle \quad \langle S, x : \exists R.C, x \xrightarrow{R} v_1, v_1 : C \mid U \rangle \quad \langle S, x : \exists R.C, x \xrightarrow{R} v_2, v_2 : C \mid U \rangle \ \cdots \ \langle S, x : \exists R.C, x \xrightarrow{R} v_n, v_n : C \mid U \rangle}\ (\exists^{+})$$

y new
if $\not\exists z \prec x$ s.t. $z \equiv_{S, x : \exists R.C} x$ and $\not\exists u$ s.t. $x \xrightarrow{R} u \in S$ and $u : C \in S$
$\forall v_i$ occurring in S

$$\frac{\langle S, x : \neg\Box\neg C \mid U \rangle}{\langle S, x : \neg\Box\neg C, y < x, y : C, y : \Box\neg C, S^{M}_{x \to y} \mid U \rangle \ \langle S, x : \neg\Box\neg C, v_1 < x, v_1 : C, v_1 : \Box\neg C, S^{M}_{x \to v_1} \mid U \rangle \ \cdots \ \langle S, x : \neg\Box\neg C, v_n < x, v_n : C, v_n : \Box\neg C, S^{M}_{x \to v_n} \mid U \rangle}\ (\Box^{-})$$

y new
if $\nexists z \prec x$ s.t. $z \equiv_{S, x : \neg\Box\neg C} x$ and $\nexists u$ s.t. $\{u < x, u : C, u : \Box\neg C, S^{M}_{x \to u}\} \subseteq S$
$\forall v_i$ occurring in $S, x \neq v_i$