

Appunti del corso di

Teoria delle Interazioni Fondamentali

**Anno accademico 2022/2023
tenuto dal Prof. Alfredo Urbano**

Luca Zappaterra*

12 luglio 2023

*

The kaobook class

Versione aggiornata

Puoi trovare la versione aggiornata di questo testo, insieme al suo codice L^AT_EX all'indirizzo:
<https://www.overleaf.com/1136142769jddtdbqnkth>

No copyright

©② This book is released into the public domain using the CC0 code. To the extent possible under law, I waive all copyright and related or neighbouring rights to this work.
Per vedere una copia del codice cc0 si può visitare il sito:
<http://creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0/>

Colophon

This document was typeset with the help of KOMA-Script and L^AT_EX using the kaobook class.

Il codice sorgente di questo libro è disponibile su:
<https://github.com/fmarotta/kaobook>
(Il tuo contributo è benvenuto!)

Publisher

First wrote in February 2023.

I think I can safely say that nobody understands Quantum Mechanics.

– R. P. Feynman

Penso di poter tranquillamente affermare che nessuno capisce la Meccanica Quantistica*

– R. P. Feynman

* men che meno la teoria dei campi, aggiungo io.

Indice

Indice	v
I TEORIA DELLA RINORMALIZZAZIONE	1
1 Il concetto di Divergenza in QFT	2
1.1 Introduzione	2
1.2 Grado di Divergenza	2
Formalizzazione di D in QED	3
Teorie rinormalizzabili	5
1.3 Classificazione delle ampiezze divergenti	5
1.4 Generalizzazione	10
QED in più dimensioni	10
Teorie differenti in $d = 4$	11
Osservazioni finali // Dimensioni	15
Osservazioni finali // Teorie	16
2 Regolarizzazione della QED	17
2.1 L'auto-energia del fotone	17
2.2 Calcolo esplicito ad 1 loop	18
Regole generali	19
Svolgimento del calcolo	20
2.3 L'auto-energia dell'elettrone	27
Struttura della soluzione	27
Calcolo esplicito ad 1 loop	28
2.4 La funzione vertice	31
I Fattori di Forma	32
Calcolo esplicito ad 1 loop	35
3 Intro alla Rinormalizzazione Perturbativa	38
3.1 Considerazioni preliminari	38
3.2 Il propagatore dressed	39
Caso fermionico	39
Caso fotonico	40
3.3 Discussione formale sui residui dei poli	43
3.4 La carica elettrica	46

4 Rinormalizzazione Perturbativa della QED	48
4.1 Lagrangiana e contro-termini	48
4.2 Regole di Feynman per i contro-termini	49
Regola per δ_3	50
Regola per δ_2 e δ_m	51
Regola per δ_1	52
4.3 Lo schema di rinormalizzazione On-Shell	52
4.4 L'auto-energia dell'elettrone	53
4.5 L'auto-energia del fotone	55
4.6 Il vertice di interazione	57
4.7 Le identità di Ward-Takahashi	58
Niente elettroni; N fotoni.	58
2 elettroni; N fotoni.	59
Implicazioni delle WTI	61
5 Conseguenze della Rinormalizzazione	65
5.1 Il potenziale Coulombiano	65
5.2 Potenziale Coulombiano oltre il tree-level	70
Correzioni al loop sul propagatore del fotone	71
5.3 Il running della carica elettrica	73
Scattering $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$	74
Generalità del running coupling	76
5.4 L'equazione del Gruppo di Rinormalizzazione	77
RGF alternativi	78
5.5 Il Teorema Ottico	80
5.6 Ulteriori Implicazioni del Teorema Ottico	86
5.7 Il Momento Magnetico Anomalo	88
Momento giromagnetico dell'elettrone	90
Predizione di g in QED	91
g oltre il tree level	93
5.8 Divergenze Infrarosse	95
Scattering Coulombiano al tree-level	95
Correzioni al vertice	96
Diagramma di emissione reale	99
II SIMMETRIE (E LORO ROTTURA) IN QFT	105
6 Simmetrie Spazio-Temporali	106
6.1 Introduzione	106
Raggi e teorema di Wigner	107
6.2 Il Gruppo di Poincaré	109
Struttura	109
Generatori ed Algebra	110
Operatori di Casimir	117
Rappresentazioni proiettive	117
6.3 Costruzione delle R.U.I. di \mathcal{P}	119
Step 1	119
Step 2	119
Step 3	120
Step 4	121

Step 5	125
Step 6	127
6.4 Un commento tecnico	130
6.5 R.U.I. di \mathcal{P} nel caso massless	131
Step 3	132
Step 4	132
Step 5	136
Step 6	137
Commento sulla parità	139
6.6 Stati multi-particellari e loro trasformazioni	140
7 Dalle Particelle ai Campi	142
7.1 Operatore di Scattering e Proprietà delle Interazioni	142
7.2 Campi Scalari	145
Il campo scalare neutro	145
Il campo scalare carico	146
7.3 Campi Quantistici di Spin Generico	147
7.4 Connessione Poincaré - Lorentz	148
Strategia della soluzione	149
7.5 Rappresentazioni Finito-Dim del Gruppo di Lorentz	150
7.6 Soluzione della Connessione $\mathcal{P} - \mathcal{L}$	153
Bosone vettore massless	153
8 Simmetrie Globali e Cariche Conservate	159
8.1 Invarianza di Gauge e Correnti Conservate	159
8.2 Simmetrie Globali in Generale	161
\hat{H} nella teoria SO(N)-simm	165
Commutazione \hat{Q}_{AB} - $\hat{\Phi}$ / $\hat{\Pi}$	166
Commutazione \hat{Q}_{AB} - \hat{H}	166
Algebra delle \hat{Q}_{AB}	167
Commutazione \hat{Q}_{AB} - \vec{P}	169
Azione delle \hat{Q}_{AB} sul vuoto	169
8.3 Azione delle Simmetrie sugli Stati Esterni	170
8.4 Teorie di Gauge non-Abeliane	171
Approccio geometrico al caso abeliano	171
Generalizzazione al caso non-abeliano	174
Costruzione delle teorie di gauge SU(N)	175
9 Rottura Spontanea di Simmetria	182
9.1 Introduzione	182
9.2 Parametri d'Ordine	183
9.3 Teorema di Goldstone	185
9.4 Proprietà dei Bosoni di Goldstone	191
SSB di una simmetria discreta	191
SSB della simmetria U(1)	195
9.5 Realizzazione non Lineare della SSB di U(1)	200
Rottura Parziale di Simmetria	203
9.6 Simmetria Chirale	206
I Proiettori Chirali	206
La Lagrangiana Chirale	207
Simmetria Vettoriale ed Assiale	208

SU(2) _L \otimes SU(2) _R Sigma Model	211
Rottura spontanea della simmetria chirale	216
10 Il Meccanismo di Higgs	223
10.1 Caso Abeliano	223
La gauge unitaria	224
10.2 Caso non-Abeliano	226
Il numero di bosoni di gauge massivi	230
10.3 Modello Standard: Settore Bosonico	230
SSB di SU(2) _L \times U(1) _Y	231
Gauge unitaria e bosoni di gauge massivi	233
Interazioni puramente di gauge	235
10.4 Modello Standard: Settore Fermionico	236
Termini cinetici	236
10.5 Correnti Elettrodeboli	236
10.6 Generazione di Massa	236
10.7 Il decadimento del muone	236
Notazione	237

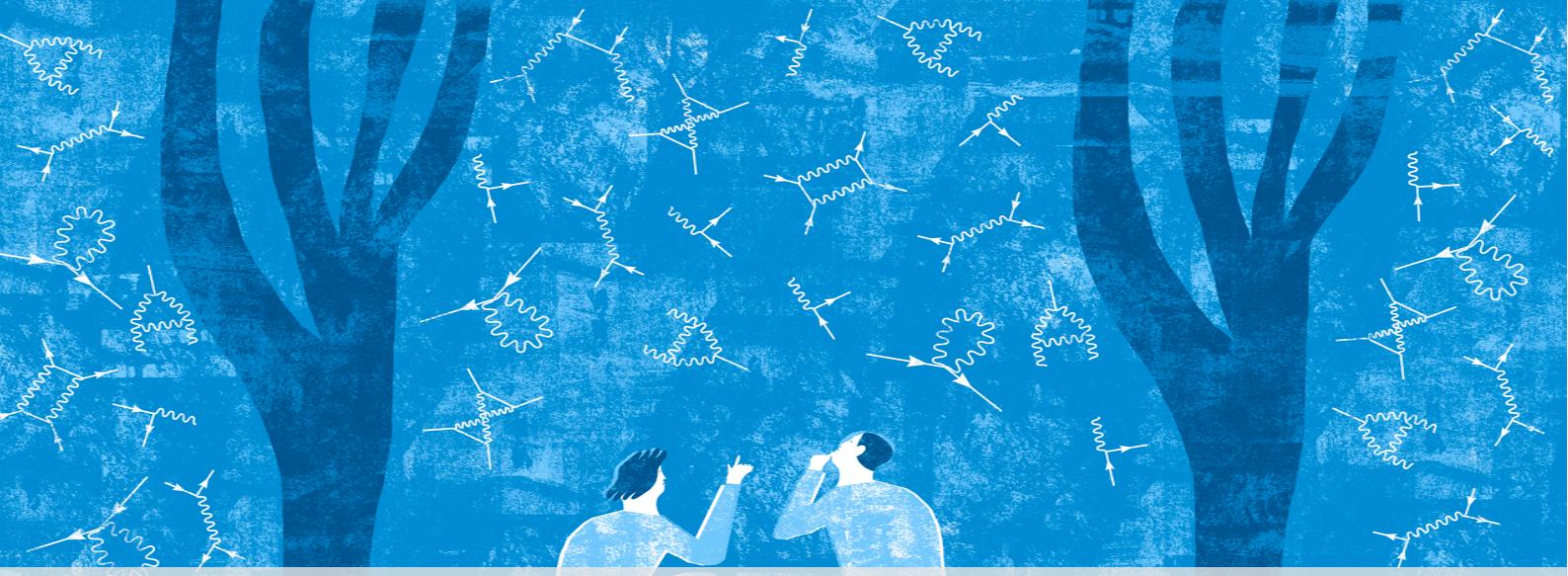
Elenco delle figure

Elenco delle tabelle

Parte I

TEORIA DELLA

RINORMALIZZAZIONE



1 Il concetto di Divergenza in QFT

1.1 Introduzione

Lo scopo di questa parte è quello di imparare a trattare gli *infiniti* che affliggono i calcoli delle osservabili in teoria dei campi.

Quando si prova a calcolare un particolare elemento di matrice, infatti, è possibile espandere il calcolo in serie rispetto alla costante di struttura fine α , i cui termini sono di fatto rappresentabili con dei diagrammi di Feynman.

In maniera ingenua, avvalendosi del fatto che α ha valore molto piccolo, ci si può accontentare del prim'ordine (o **Tree-Level**); tuttavia, se si procede con il calcolo degli ordini successivi (**Loops**), ci si accorge che i loro contributi presentano un fattore moltiplicativo che tende ad infinito, e questo è un bel problema.

1.1 Introduzione	2
1.2 Grado di Divergenza	2
Formalizzazione di D in QED	3
Teorie rinormalizzabili	5
1.3 Classificazione delle ampiezze divergenti	5
1.4 Generalizzazione	10
QED in più dimensioni	10
Teorie differenti in $d = 4$	11
Osservazioni finali // Dimensioni	15
Osservazioni finali // Teorie	16

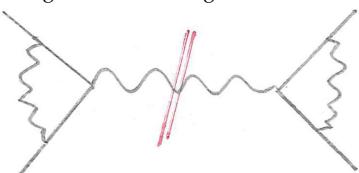
1.2 Grado di Divergenza

Partiamo innanzitutto con alcune utili nomenclature riguardo i diagrammi di Feynman (composti da linee esterne, vertici e propagatori):

Definizione 1.2.1 (Diagramma Connesso.)

Un diagramma si dice **Connesso** quando è possibile trovare un percorso da un elemento all'altro senza ricorrere a salti.

Nota: Un diagramma di questo tipo NON è 1PI, infatti separandolo tagliando il propagatore al centro si ottengono due diagrammi distinti.



Definizione 1.2.2 (Diagramma One-Particle Irreducible.)

Un diagramma si dice "one-Particle Irreducible" (1PI) quando non è possibile dividerlo in due tagliando un singolo propagatore.

Notiamo come non ci sia perdita di generalità nel limitarsi allo studio di diagrammi connessi e 1PI, in quanto diagrammi disconnessi sono composizione di diagrammi connessi e diagrammi non-1PI sono ottenuti

"incollando" insieme diagrammi 1PI.

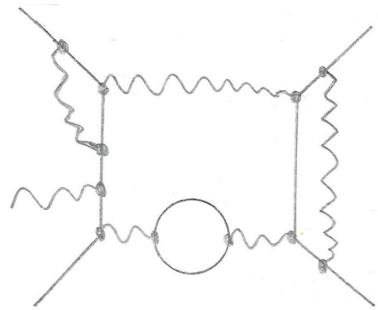
In sostanza questa tipologia di diagrammi sono i building blocks di tutti i diagrammi più complessi.

Consideriamo allora un diagramma di QED generico, **connesso** e **1PI**, come quello riportato a lato. Ci aspettiamo allora

$$\text{Diagramma} \sim \int \frac{d^4 k_1 \cdots d^4 k_L}{(k_i - m) \cdots k_j^2 k_m^2}$$

dove i k_i sono generici 4-impulsi di loop sui quali stiamo integrando, con $i \in [1, L]$ ed L numero di loop nel diagramma.

Contando le potenze dei 4-impulsi al numeratore e al denominatore, possiamo introdurre un concetto chiave, che guiderà il nostro studio della teoria della rinormalizzazione: il **Grado di Divergenza Superficiale**.



Definizione 1.2.3 (Grado di Divergenza Superficiale.)

$D \equiv$ potenza totale dei k nel numeratore – potenza totale dei k nel denominatore.

Questa quantità dovrebbe darci un'idea del grado di divergenza dell'integrale, in quanto da un diagramma con grado di divergenza D ci aspettiamo un integrale del tipo:

$$\int^\Lambda k^{D-1} d^4 k \Rightarrow \begin{cases} \text{power-divergent in } \Lambda \text{ se } D > 0 \\ \text{log-divergent in } \Lambda \text{ se } D = 0 \\ \text{convergente se } D < 0 \end{cases}$$

dove abbiamo introdotto un cutoff esplicito Λ nell'estremo superiore dell'integrazione.

Nota: In questo momento siamo interessati al caso in cui $k \rightarrow \infty$, a cui spesso ci si riferisce come "regione ultravioletta" (grande k implica piccole lunghezze d'onda) e di conseguenza, in caso di divergenza dell'integrale, si parla di **divergenza ultravioletta (UV)**¹.

Formalizzazione di D in QED

L'idea è quella di ridefinire il grado di divergenza sulla base delle caratteristiche del diagramma considerato. Per fare ciò definiamo le seguenti quantità:

N_e	numero di gambe esterne "elettroniche"
N_γ	numero di gambe esterne fotoniche
P_e	numero di propagatori "elettronici"
P_γ	numero di propagatori fotonici
V	numero di vertici
L	numero di loops

¹ esiste anche quella infrarossa (IR)

Notiamo ora come:

- il propagatore fermionico sia della forma $\frac{i(\not{k}_i - m)}{\not{k}_i^2 - m^2 + i\epsilon}$, quindi $D = -1$. Possiamo allora dire che il contributo di P_e contribuisce a D come $-P_e$;
- allo stesso modo il propagatore fotonico in gauge di Feynman si scrive $-\frac{ig^{\mu\nu}}{\not{k}^2 + i\epsilon}$, quindi $D = -2$ e P_γ contribuisce come $-2P_\gamma$;
- non c'è dipendenza dall'impulso nel vertice di QED;
- ogni loop porta 4 potenze di k .

In conclusione si può scrivere:

$$D = 4L - P_e - 2P_\gamma \quad (1.1)$$

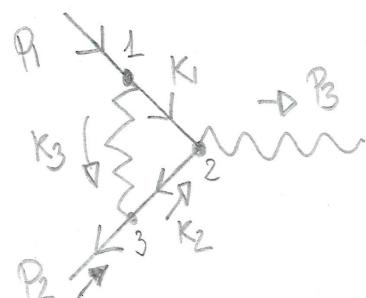
Questa espressione può essere migliorata ancora di più se si lavora sul numero dei loops, che può essere definito come il numero di impulsi interni che non sono fissati da leggi di conservazione ad ogni vertice di interazione.

Diagrammi come quello del Bhabha scattering hanno $L=0$, in quanto l'impulso del propagatore è determinato dagli impulsi esterni, quindi non serve integrare.

Esempio 1.2.1 Prendiamo un diagramma come quello a destra, siamo di fronte a 3 impulsi interni e 3 vertici, a cui corrispondono 3 leggi di conservazione.

Tuttavia, risolvendo il sistema ci accorgiamo che una delle 3 leggi non è altro se non la conservazione degli impulsi esterni e quindi non va a fissare alcun impulso interno.

Possiamo quindi esprimere due degli impulsi interni in funzione del terzo, quello su cui integriamo, quindi $L=1$ ed infatti abbiamo un loop!



Formalmente possiamo scrivere:

$$L = P_e + P_\gamma - (V - 1) \quad (1.2)$$

dove riconosciamo il numero di impulsi interni, uno per propagatore, ed il numero di vincoli dalle leggi di conservazione ($V-1$).

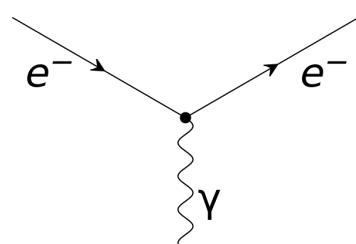
Andiamo ora ad esplicitare il numero dei vertici nel diagramma, considerando prima di tutto un semplice vertice di QED ($e\bar{e}\gamma$). È evidente il fatto che per $V=N$ avremo $2V$ linee elettroniche ed V linee fotoniche.

A questo punto abbiamo due casistiche:

1. per un diagramma con N_γ linee esterne fotoniche, le rimanenti linee fotoniche saranno chiuse in propagatori, ed ogni propagatore chiude due linee $V - N_\gamma = 2P_\gamma$;
2. per un diagramma con N_e linee esterne elettroniche, con lo stesso ragionamento otteniamo $2V - N_e = 2P_e$;

Ribaltando le equazioni troviamo quindi:

$$\begin{cases} P_\gamma = \frac{1}{2}(V - N_\gamma) \\ P_e = V - \frac{1}{2}N_e \end{cases} \quad (1.3)$$



Il gioco è fatto, combinando l'eq 1.3 e l'eq 1.2 possiamo riscrivere il numero dei loop in funzione di vertici e gambe esterne del diagramma:

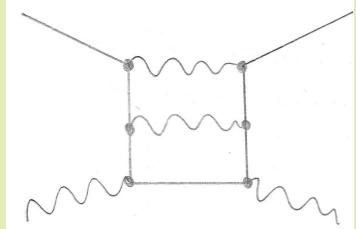
$$L = \frac{1}{2}(V - N_e - N_\gamma) + 1 \quad (1.4)$$

e sostituendo le equazioni 1.3, 1.4 nella 1.1 abbiamo l'espressione che cercavamo, dipendente solo dalle gambe esterne del diagramma:

Definizione 1.2.4 (Grado di divergenza superficiale in QED, dimensione dello spazio-tempo d=4.)

$$D = 4 - \frac{3}{2}N_e - N_\gamma \quad (1.5)$$

Esempio 1.2.2 Un esempio di applicazione delle 1.3 è il seguente:



$$\begin{aligned} V &= 6, N_e = 2, N_\gamma = 2 \\ \Rightarrow P_\gamma &= 2, P_e = 5 \end{aligned}$$

Teorie rinormalizzabili

Abbiamo visto che guardando solo le gambe esterne dei diagrammi è possibile determinare il loro grado di divergenza superficiale e quindi classificarli: a lato è riportato il grado di divergenza al variare del numero di linee esterne fermioniche/fotoniche. In rosso le combinazioni che portano alla divergenza, in blu quelle che portano alla convergenza.

$\frac{N_e \rightarrow}{N_\gamma \downarrow}$	0	2	4
0	4	1	-2
1	3	0	-3
2	2	-1	-4
3	1	-2	-5
4	0	-3	-6

È evidente come il numero di ampiezze superficialmente divergenti sia finito. Parliamo di ampiezze invece di diagrammi in quanto il grado di divergenza (e quindi il numero di gambe esterne) identifica "categorie" contenenti differenti tipologie di diagrammi (potenzialmente infiniti).

Definizione 1.2.5 (Power-Counting Renormalizable Theory.)

Una teoria si definisce rinormalizzabile per power-counting se il numero di ampiezze superficialmente divergenti è finito.

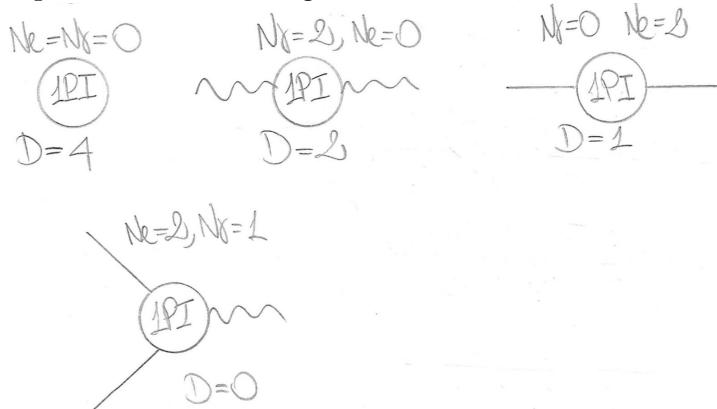
Secondo la definizione 1.2.5, la QED in d=4 dimensioni spazio temporali è rinormalizzabile per power-counting.

1.3 Classificazione delle ampiezze divergenti

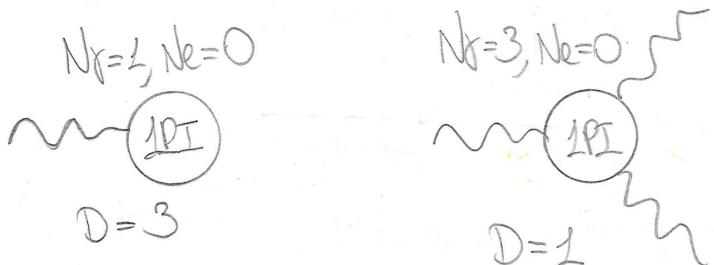
Nel momento in cui consideriamo una teoria rinormalizzabile, abbiamo un numero finito di ampiezze superficialmente² divergenti e la cosa interessante è che possiamo dividerle in tre gruppi, di cui si riportano alcuni esempi:

² a breve il termine "superficialmente" sarà abbandonato.

i. Ampiezzze realmente divergenti.



ii. Ampiezzze divergenti superficialmente che vanno a zero ad ogni ordine.



Esercizio 1.3.1 Verificare tramite calcolo esplicito che due diagrammi appartenenti a questa categoria sono effettivamente nulli.
[svolti Lezione 1 p.12-15]

Da questa categoria di ampiezze emerge un importante risultato, racchiuso nel teorema di Furry.

Teorema 1.3.1 (Teorema di Furry.)

La funzione di correlazione associata ad un diagramma di Feynman composto da loop chiusi di linee fermioniche e da un numero dispari di fotoni esterni è sempre nulla in QED.

Nota: Questo teorema è valido ad ogni ordine perturbativo, ed è una conseguenza dell'invarianza della QED sotto coniugazione di carica.

Dimostrazione. Lavoriamo sulla funzione di correlazione di un diagramma composto da n-fotoni:

$$\langle \Omega | T[A^{\mu_1}(X_1) \cdots A^{\mu_n}(X_n)] | \Omega \rangle$$

Sotto coniugazione di carica la corrente $\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi$ cambia segno, di conseguenza, per mantenere l'interazione $A_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi$ invariata, anche A^μ deve cambiare di segno sotto coniugazione di carica, in formule:

$$\mathbb{C}^{-1}(\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi)\mathbb{C} = -\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi$$

$$\mathbb{C}^{-1}A^\mu \mathbb{C} = -A^\mu$$

Combinando quanto appena detto con la funzione di correlazione, sfruttando il fatto che possiamo inserire $\mathbb{C}\mathbb{C}^{-1} = \mathbb{1}$ a piacimento, così come la possibilità di portare dentro e fuori dal T-ordering l'operatore \mathbb{C} ed il fatto che il vuoto $|\Omega\rangle$ è invariante sotto coniugazione di carica e può quindi assorbire gli operatori esterni in eccesso, alla fine si ottiene:

$$\langle\Omega|T[A^{\mu_1}(X_1)\cdots A^{\mu_n}(X_n)]|\Omega\rangle = (-1)^n \langle\Omega|T[A^{\mu_1}(X_1)\cdots A^{\mu_n}(X_n)]|\Omega\rangle$$

È quindi evidente che, per n dispari, tale funzione di correlazione vada necessariamente a zero. \square

Nota 1.3.1 Se consideriamo il diagramma con $N_\gamma = 1, N_e = 0$ (in gergo questa tipologia di diagrammi si chiama "girino"), anche se per assurdo non sussistesse la simmetria sotto coniugazione di carica in QED, questo diagramma andrebbe a zero ugualmente per via dell'invarianza sotto trasformazione di Lorentz.
L'elemento di matrice associato sarà infatti

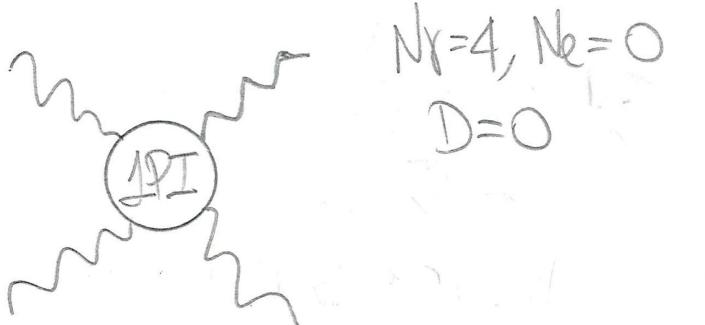
$$i\mathcal{M}^\mu \simeq p^\mu f(p^2)$$

ma la conservazione dell'impulso richiede che $p=0$, non essendo alcun impulso uscente.

Di conseguenza l'ampiezza del diagramma ad un fotone è nulla.

Questo esempio è istruttivo in quanto dimostra come il grado di divergenza superficiale non sia in grado di "vedere le simmetrie della teoria".

iii. Ampieze divergenti superficialmente che in realtà convergono.



Esercizio 1.3.2 Considerare l'ampiezza con $N_\gamma = 4, N_e = 0$ e scrivere tutti i diagrammi che vi contribuiscono. Mostrare che l'ampiezza risulta nulla. [contesi svolti Lezione 2 p.20-25]

Al di là dei conti, proviamo a trovare una spiegazione più "intuitiva", possibilmente valida a tutti gli ordini. Per far ciò ci viene in aiuto una particolare proprietà del grado di divergenza.

In generale l'ampiezza può dipendere anche dagli impulsi esterni, possibilmente fissati (ad esempio se si considera un particolare

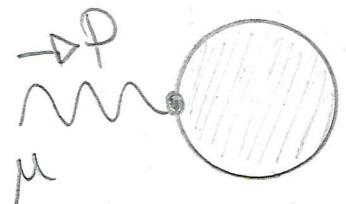


Diagramma girino discusso nella Nota 1.3.1

esperimento):

$$i\mathcal{M}(p_i) \sim \int \frac{d^4 k_1 \cdots d^4 k_L}{k_1^2 \cdots [(k_i - p_i)^2 - m^2] \cdots k_n^2}$$

a cui possiamo associare un grado di divergenza superficiale $D = 4L - 2n$.

Se allora deriviamo rispetto p_i :

$$i \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial p_i^\mu}(p_i) \sim \int \frac{d^4 k_1 \cdots d^4 k_L}{k_1^2 \cdots [(k_i - p_i)^2 - m^2]^2 \cdots k_n^2} (k_i - p_i)_\mu$$

è evidente come alla derivazione sia associata una riduzione del grado di divergenza superficiale: $D' = D - 1$.

Possiamo quindi pensare di espandere l'ampiezza in serie di potenze intorno a $p_i = 0$:

$$\mathcal{M}(p_i) \approx \mathcal{M}(p_i = 0) + \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial p_i^\mu} p_i^\mu + \dots \quad (1.6)$$

L'osservazione che si può fare è che il primo termine (l'ampiezza con gli impulsi esterni posti a zero) è in grado di "catturare" il grado di divergenza dell'intera ampiezza, mentre ogni ordine successivo riduce D di 1 ogni volta.

Se torniamo ora all'ampiezza a 4 fotoni e applichiamo quanto appena trovato:



che tradotto in equazioni ci dà la seguente struttura:

$$\mathcal{M}_{UV}^{\mu\nu\rho\sigma}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \mathcal{M}_{UV}^{\mu\nu\rho\sigma}(p = 0) + \mathcal{M}_{\text{FINITE}}^{\mu\nu\rho\sigma}(p_1, p_2, p_3, p_4)$$

abbiamo quindi isolato la componente divergente, che risulta essere un tensore. Tuttavia, dato che abbiamo posto $p_i = 0$, l'unico modo per parametrizzarlo è grazie al tensore metrico.

Scriviamo allora:

$$\mathcal{M}_{UV}^{\mu\nu\rho\sigma}(p = 0) = (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}) \times M_{UV} \quad (1.7)$$

dove M_{UV} è un invariante di Lorentz **divergente**. Notiamo come questa espressione sia invariante sotto una generica permutazione degli indici, per via della simmetria di Bose.

La cosa interessante a questo punto è che, invocando le **Identità di Ward-Takahashi**³, si può mostrare che questa espressione si

³ che verranno trattate più formalmente in seguito

annulla.

In particolare, nel caso puramente fotonico con n linee esterne , a cui corrisponde la generica ampiezza

$$i\mathcal{M}^{\mu_1, \dots, \mu_n}(p_1, \dots, p_n)$$

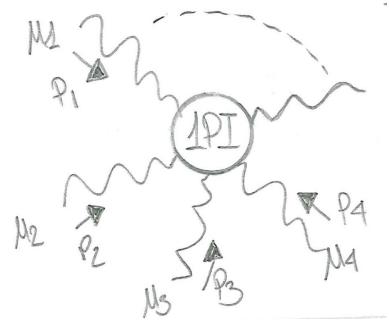
possiamo scrivere:

Teorema 1.3.2 (Identità di Ward-Takahashi, caso ad n fotoni esterni.)

Quando contraiamo l'indice di Lorentz μ_j di ogni fotone (nell'ampiezza) con il quadrimpulso $(p_j)_{\mu_j}$ dello stesso fotone dobbiamo ottenere come risultato zero.

In formule si traduce:

$$(p_j)_{\mu_j} \mathcal{M}^{\mu_1, \dots, \mu_j, \dots, \mu_n}(p_1, \dots, p_n) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$$



Nota 1.3.2 Dal punto di vista fisico, quanto enunciato nel teorema 1.3.2 è conseguenza dell'invarianza di gauge: il **fotone si accoppia con una corrente conservata**. Questo fatto genera una serie di relazioni di consistenza tra funzioni di correlazione che sono poi le identità di Ward-Takahashi, che volendo possono essere viste come l'analogo quantistico della corrente conservata classica associata ad una simmetria continua per conseguenza del teorema di Noether.

Tornando ora al nostro risultato, scriviamo:

$$p_{1\mu} \mathcal{M}^{\mu\nu\rho\sigma}(p_1, \dots, 4) = p_{1\mu} \mathcal{M}_{UV}^{\mu\nu\rho\sigma}(p_i = 0) + p_{1\mu} \mathcal{M}_{FINITE}^{\mu\nu\rho\sigma}(p_1, \dots, 4) \stackrel{!}{=} 0$$

Ma siccome il termine finito non può cancellare quello UV-divergente, allora entrambi i termini devono essere nulli!

Ricordando l'eq. (1.7):

$$\begin{aligned} p_{1\mu} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}) \times M_{UV} &= \\ &= (p_{1\nu} g^{\rho\sigma} + p_{1\sigma} g^{\nu\rho} + p_{1\rho} g^{\nu\sigma}) \times M_{UV} \quad (1.8) \\ &\Rightarrow \boxed{M_{UV} = 0} \end{aligned}$$

Quello che ci dice l'eq. (1.8) è che *l'identità di W-T non consente la divergenza UV per l'ampiezza a 4 fotoni*.

Notiamo inoltre che in generale M_{UV} è una somma cumulativa di diagrammi fino a un certo ordine in teoria delle perturbazioni, quindi le identità di W-T ci dicono solo che la somma cumulativa dei diagrammi è libera dalla divergenza ultravioletta, **i singoli diagrammi che contribuiscono a tale somma possono divergere!**⁴ Questa è una proprietà del tutto generale delle identità di W-T.

Attenzione: in questo caso non è necessario che i fotoni siano tutti on-shell, difatti le identità di W-T si applicano alle funzioni di correlazione nello spazio dell'impulso. la situazione è diversa nel caso dell'identità di Ward, in cui la richiesta di particelle on-shell è necessaria.

⁴ come si può vedere svolgendo l'esercizio 1.3.2

1.4 Generalizzazione

Abbiamo visto come il grado di divergenza superficiale D sia uno strumento molto utile nel momento in cui si vuole organizzare le ampiezze UV-divergenti, tuttavia ci sono casi in cui fallisce.

In particolare:

- ▶ per il caso dell'ampiezza a 3 fotoni $D = 1$, tuttavia per ragioni di simmetria l'ampiezza va identicamente a zero.
- ▶ per il caso dell'ampiezza a 4 fotoni $D = 0$, tuttavia a causa delle proprietà strutturali della teoria (ossia il fatto che gli infiniti si cancellano quando si considera la somma cumulativa dei diagrammi) anche qui l'ampiezza non diverge.

Un terzo caso che ancora non abbiamo trattato ci consente di fare un'ulteriore considerazione.

Consideriamo $N_e = 4, N_\gamma = 0$, allora $D = -2$ e il diagramma **dovrebbe** convergere.

A un loop abbiamo un diagramma che effettivamente non diverge nel range UV.

A due loop, però, ci ritroviamo con un **sotto-diagramma** che sappiamo essere divergente. Quindi, nonostante aggiungere vertici non modifichi D , il diagramma a due loop diverge lo stesso.

Ciò che è interessante notare è che **questo tipo di divergenza l'abbiamo già incontrata**, quindi se riusciamo a trovare il modo di eliminare la divergenza delle ampiezze "realmente divergenti", come quella nel sotto-diagramma, allora possiamo correggere anche il problema che sorge in questo caso!

Prima di lanciarci a capofitto nel calcolo di qualsivoglia diagramma, è opportuno discutere il modo in cui si arriva alla generalizzazione del grado di divergenza superficiale in più dimensioni dello spazio-tempo.

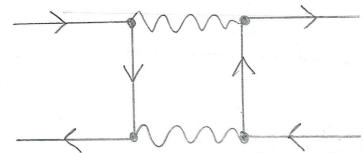
QED in più dimensioni

L'utilità di questa discussione è del tutto generale, lo faremo in termini di QED, ma risulta utile anche per la teoria della regolarizzazione (che vedremo in seguito), così come per altre teorie come quella della materia condensata o la teoria delle stringhe.

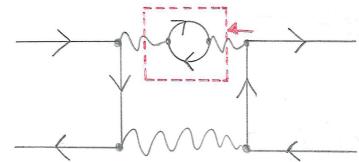
Considerando uno spazio-tempo di dimensione generica $\text{dim} = d$, abbiamo $\int d^4k \rightarrow \int d^d k$ e di conseguenza $D(\text{dim} = d) = d \cdot L - P_e - P_\gamma$, utilizzando la stessa notazione introdotta in precedenza.

Valgono ancora le relazioni:

$$\begin{cases} P_e = V - N_e \\ P_\gamma = \frac{1}{2}(V - N_\gamma) \\ L = \frac{1}{2}(V - N_e - N_\gamma) + 1 \end{cases}$$



il diagramma con 4 linee fermioniche esterne ad un loop.



il diagramma con 4 linee fermioniche esterne a due loop.

E con un esercizio di pura algebra si trova:

$$D = d + \left(\frac{d-4}{2}\right)V - \left(\frac{d-1}{2}\right)N_e - \left(\frac{d-2}{2}\right)N_\gamma \quad (1.9)$$

È evidente come ora D dipenda dal numero dei vertici!

Analizziamo i casi possibili:

► $d = 4$

È il caso trattato in precedenza, la dipendenza dai vertici scompare e abbiamo una teoria rinormalizzabile.

► $d < 4$

Il coefficiente $\left(\frac{d-4}{2}\right) < 0$; quindi, in meno di 4 dimensioni, aggiungere vertici riduce il grado di divergenza di una certa ampiezza!

In questo caso abbiamo un numero finito di diagrammi superficialmente divergenti, in quanto salendo di loop, e quindi aumentando i vertici, prima o poi i diagrammi cominceranno a convergere. La teoria è quindi super-rinormalizzabile.

► $d > 4$

Il coefficiente $\left(\frac{d-4}{2}\right) > 0$; quindi, in più di 4 dimensioni, aggiungere vertici aumenterà il grado di divergenza di una certa ampiezza!

Abbiamo allora un numero infinito di **ampiezze** superficialmente divergenti, e la teoria in questo caso è non-rinormalizzabile.

Teorie differenti in $d = 4$

Consideriamo in questo caso una teoria quantistica di campo (**QFT**) generica, con un numero arbitrario di scalari, fermioni e campi di gauge massless (come il fotone).

Adottiamo la seguente notazione:

Indichiamo le diverse tipologie di interazione nella densità di Lagrangiana con l'indice $i \in [1, \dots, n_l]$.

Indichiamo invece il numero di derivate spazio-temporali che caratterizzano l'interazione " i " con δ_i .

Esempio 1.4.1 Consideriamo la QED scalare, descritta dalla densità di Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^*(D^\mu \phi) - m^2 |\phi|^2 - \lambda |\phi|^4 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

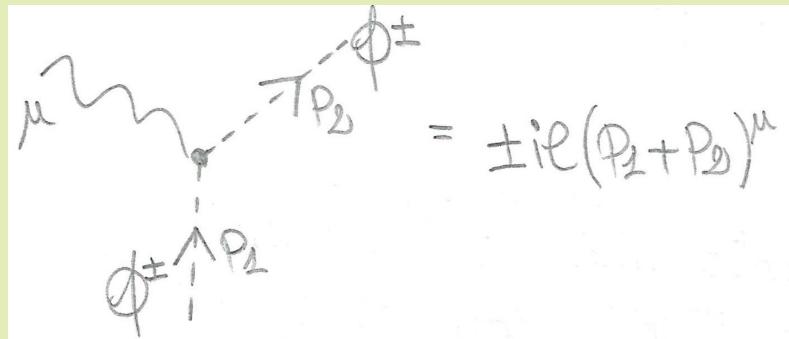
dove ϕ è un campo scalare carico (quindi complesso) e $D_\mu = (\partial_\mu + ieA_\mu)$ è la derivata covariante.

Espandendo la derivata covariante troviamo n_l interazioni:

1. $\lambda |\phi|^4$; nessuna derivata, $\delta_i = 0$

2. $e^2 A_\mu A^\mu |\phi|^2$; nessuna derivata, $\delta_i = 0$
3. $ieA_\mu[(\partial_\mu\phi^*)\phi - \phi^*(\partial^\mu\phi)]$; una derivata, $\delta_i = 1$

La presenza delle derivate è cruciale per le nostre argomentazioni, infatti derivando la regola di Feynman associata alla terza interazione troviamo:



In generale, se il vertice di interazione di tipo i ha δ_i derivate, allora questo contribuirà con δ_i potenze di impulso al power counting.

Indichiamo inoltre con:

P_f	Numero di propagatori di tipo "f"
N_f	Numero di linee esterne di tipo "f"
V_i	Numero di vertici di interazioni di tipo "i"

Indichiamo con la seguente notazione la dipendenza dall'impulso del propagatore di tipo "f" nello spazio dell'impulso:

$$\Delta_f(p) \propto p^{2S_f-2} \text{ con } \begin{cases} S_f = 0 & \text{per fotoni e scalari} \\ S_f = \frac{1}{2} & \text{per i fermioni} \end{cases}$$

Possiamo allora generalizzare l'equazione (1.1) per il grado di divergenza superficiale (in 4 dimensioni) come segue:

$$D = 4L + \sum_f (2S_f - 2)P_f + \sum_i \delta_i V_i \quad (1.10)$$

Il numero dei loop è dato dalla generalizzazione dell'equazione (1.2):

$$L = \sum_f P_f - \left(\sum_i V_i - 1 \right) \quad (1.11)$$

Sostituendo la (1.11) nella (1.10) possiamo eliminare la dipendenza dal numero dei loop in D , ottenendo:

$$D = \sum_f 2(S_f + 1)P_f + \sum_i (\delta_i - 4)V_i + 4 \quad (1.12)$$

Indichiamo con $n_{i,f}$ il numero di campi di tipo "f" nel vertice di interazione di tipo "i".

Possiamo generalizzare le espressioni per il numero dei vertici ottenibili dalle (1.3) considerando un diagramma con un numero totale di vertici $\sum_i V_i$:

- Il numero di campi di tipo "f" nel diagramma sarà $\sum_i V_i n_{i,f}$.
- Se consideriamo N_f linee esterne di tipo "f", le rimanenti linee $\sum_i V_i n_{i,f} - N_f$ saranno chiuse in propagatori, ognuno comprensivo di due linee.

Otteniamo quindi un numero di equazioni pari al numero di diverse tipologie di campi considerate:

$$\sum_i V_i n_{i,f} - N_f = 2P_f \quad (1.13)$$

È evidente come nel caso del vertice di QED, dove $n_e = 2$ ed $n_\gamma = 1$, ci si riconduca alle (1.3).

A questo punto basta risolvere per P_f e sostituire nella (1.12) e con un po' di algebra banale si trova:

$$D = 4 - \sum_f N_f (S_f + 1) - \sum_i V_i [4 - \delta_i - \sum_f n_{i,f} (S_f + 1)] \quad (1.14)$$

Nota 1.4.1 Nel caso del vertice di QED, tralasciando l'indice "i", abbiamo $\delta = 0$, $n_e = 2$, $n_\gamma = 1$, $S_e = \frac{1}{2}$, $S_\gamma = 0$. Dunque la dipendenza dal numero dei vertici scompare e ci si riconduce alla (1.5).

Nota 1.4.2 Come abbiamo visto durante la trattazione legata all'equazione (1.9), il coefficiente del numero dei vertici è fondamentale per determinare la rinormalizzabilità della teoria. Ciò che è interessante esplorare è il significato intrinseco dietro questa apparente sequenza di lettere e numeri.

Vedremo a breve che il termine tra parentesi quadre, infatti, non è altro se non (**ATTENZIONE, SPOILER**) la *dimensione di massa* del coupling legato all'interazione!

Parentesi: Dimensione di massa

Consideriamo un vertice di tipo "i": in termini di densità di Lagrangiana corrisponderà ad un operatore con una struttura del tipo:

$$\mathcal{L} \supset g_i \partial^{\delta_i} \prod_f \phi_f^{n_{i,f}} \quad (1.15)$$

dove g_i rappresenta il coupling dell'interazione e dettagli al momento irrilevanti come indici di Lorentz o come le derivate agiscono sui diversi campi sono omessi.

Nel caso della QED, considerato poco fa nella nota 1.4.1, in cui $g_{\text{QED}} = e$, abbiamo:

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} \supset ie A_\mu [(\partial_\mu \phi)^* \phi - \phi^* (\partial_\mu \phi)]$$

Siccome lavoriamo in unità naturali, è noto che a livello dimensionale $[L] = [T] = [M]^{-1}$, così come $[E] = [M]$.

Una conseguenza di ciò è il fatto che, siccome vogliamo che l'azione sia adimensionale, allora dalla sua espressione in termini della densità di Lagrangiana

$$S = \int d^4x \mathcal{L}$$

troviamo che, essendo $[d^4x] = [L]^4$, $[\mathcal{L}] = [L]^{-4} = [M]^4$.

Dalla dimensione di massa della Lagrangiana possiamo quindi determinare la dimensione di massa dei principali campi per mezzo dei termini cinetici:

► **Campo Fermionico**

$$\mathcal{L} \supset i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\psi) \Rightarrow [\psi] = [M]^{\frac{3}{2}}$$

essendo $[\partial_\mu] = [L]^{-1} = [M]$

► **Campo Fotonico**

$$\mathcal{L} \supset -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \supset (\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) \Rightarrow [A_\mu] = [M]$$

► **Campo Scalare**

$$\mathcal{L} \supset \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) \Rightarrow [\phi] = [M]$$

In sintesi, possiamo racchiudere questi risultati in una singola equazione per un generico campo di tipo "f":

$$[\phi_f] = [M]^{S_f+1} \text{ con } \begin{cases} S_f = 0 \text{ per fotoni e scalari} \\ S_f = \frac{1}{2} \text{ per i fermioni} \end{cases} \quad (1.16)$$

Esercizio 1.4.1 Dimostrare l'equazione (1.16) usando il fatto che il propagatore scala come $\Delta_f(p) \propto p^{2S_f-2}$. [svolto lezione 3 p.42]

Applicando quanto appena visto al caso generale in equazione (1.15) arriviamo finalmente alla dimensione di massa del coupling di interazione:

$$[g_i] = [M]^{\Delta_i}, \Delta_i = 4 - \delta_i - \sum_f n_{i,f}(S_f + 1) \quad (1.17)$$

Come preannunciato nella nota 1.4.2, la dimensione di massa del coupling è esattamente il coefficiente che moltiplica il numero dei vertici nell'espressione generalizzata del grado di divergenza superficiale!

Per coronare quanto appena appreso, riscriviamo l'equazione (1.14) in maniera più elegante:

$$D = 4 - \sum_f N_f(S_f - 1) - \sum_i V_i \Delta_i \quad (1.18)$$

È notevole (ed estremamente soddisfacente) come **dalla dimensione di massa della costante di accoppiamento dell'interazione si possa determinare la rinormalizzabilità della teoria:**

- Se $\Delta_i > 0 \forall i = 1, \dots, n_I$ abbiamo una teoria super-rinormalizzabile, in quanto solo un numero finito di diagrammi diverge.
- Se $\Delta_i \geq 0 \forall i$ e almeno un $\Delta_j = 0$, la teoria è rinormalizzabile, in quanto almeno un'ampiezza perderà la dipendenza dal numero dei vertici nel grado di divergenza e genererà un'infinità di diagrammi divergenti.
- Se almeno un $\Delta_i < 0$, la teoria non è rinormalizzabile, in quanto avremmo un numero infinito di ampiezze divergenti.

Esercizio 1.4.2 Generalizzare l'equazione (1.18) in un arbitrario numero "d" di dimensioni spazio-temporali. [svolto lezione 3 p.44]

Risultato:

$$\boxed{D = d - \sum_f N_f \left(S_f - 1 - \frac{d}{2} \right) - \sum_i V_i \Delta_i \\ \text{con } \Delta_i = d \left(1 - \frac{1}{2} \sum_f n_{i,f} \right) - \delta_i - \sum_f n_{i,f} (S_f - 1)} \quad (1.19)$$

Fatto Generico:

- Quando $d > 4$, la maggioranza delle teorie che sono rinormalizzabili in 4 dimensioni diventano non rinormalizzabili.
- Quando $d < 4$, teorie non rinormalizzabili in 4 dimensioni diventano rinormalizzabili.

Osservazioni finali // Dimensioni

In QFT, la QED in d-dimensioni è data dall'azione:

$$S = \int d^d x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i \not{A} - m) \psi + e \bar{\psi} \not{A} \psi \right]$$

dove si è adottata la slash-notation di Dirac: $\not{X} = \gamma^\mu X_\mu$.

Di conseguenza possiamo ricavare:

- **La dimensione di massa dei campi**

$$[\psi] = [M]^{\frac{d-1}{2}}, \quad [A^\mu] = [M]^{\frac{d}{2}-1}$$

- **La dimensione di massa del coupling**

$$[e] = [M]^{2-\frac{d}{2}} \Rightarrow \boxed{\Delta_e = 2 - \frac{d}{2}} \Rightarrow \begin{cases} d = 4 \Rightarrow \Delta_e = 0 \text{ (RIN)} \\ d < 4 \Rightarrow \Delta_e > 0 \text{ (SUPER-RIN)} \\ d > 4 \Rightarrow \Delta_e < 0 \text{ (NON-RIN)} \end{cases}$$

► L'integrale al loop nello spazio dell'impulso

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \rightarrow \int \frac{d^d k}{(2\pi)^4}$$

Nota 1.4.3 Si può mostrare come l'equazione di Dirac d-dimensionale mantenga la stessa struttura di quella in 4 dimensioni. Chiaramente la fisica è completamente differente! [Lezione 4, p.48÷53]

Osservazioni finali // Teorie

$$D = 4 - \sum_f N_f (S_f - 1) - \sum_i V_i \Delta_i \Rightarrow \begin{cases} \Delta_e > 0 \text{ (Super-Rinormalizzabile)} \\ \Delta_e = 0 \text{ (Rinormalizzabile)} \\ \Delta_e < 0 \text{ (Non-Rinormalizzabile)} \end{cases}$$

► Teorie Scalari

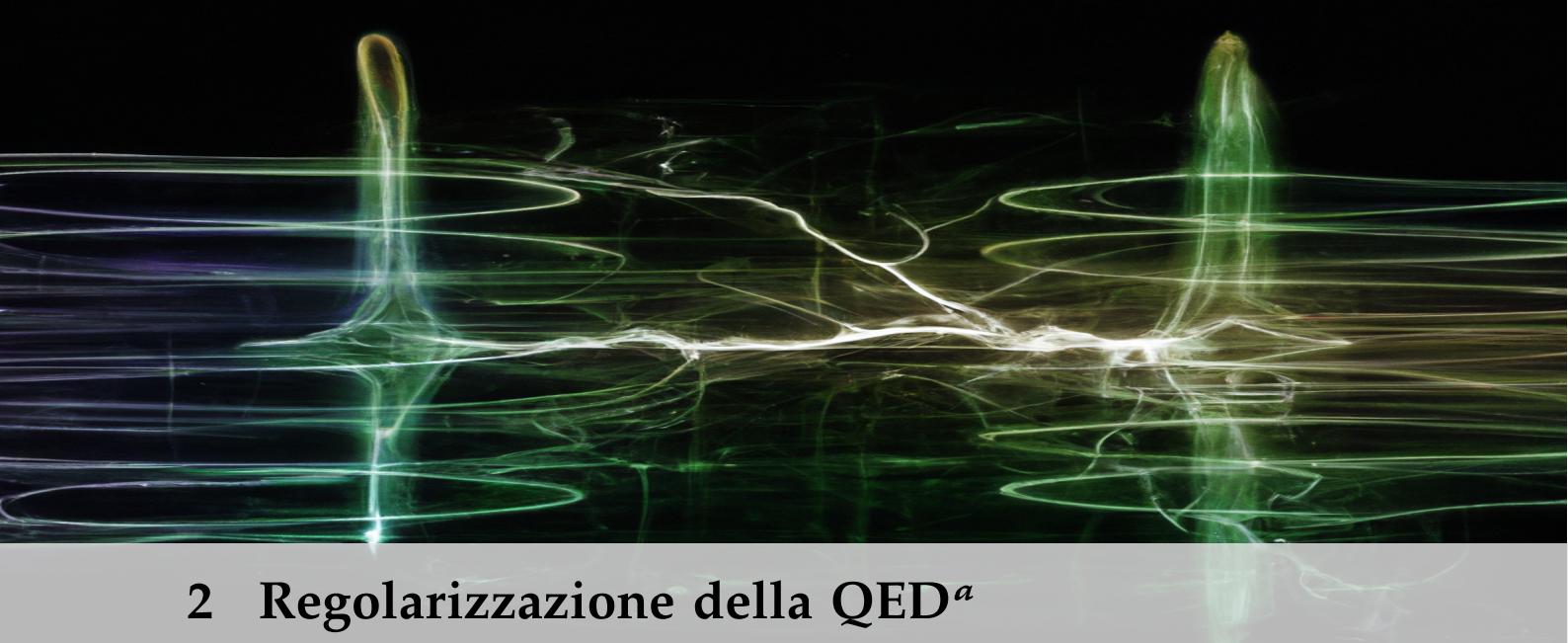
$\lambda \phi^3$	$\lambda \phi^4$	$\lambda \phi^5 \dots$
$\Delta_\lambda = 1$	$\Delta_\lambda = 0$	$\Delta_\lambda \leq -1$

► Scalari + Fermioni

$y \phi \bar{\psi} \psi$	$y \phi \bar{\psi} \gamma^5 \psi$	$y (\partial_\mu \phi) \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$
$\Delta_\lambda = 0$	$\Delta_\lambda = 0$	$\Delta_\lambda = -1$

► Scalari + Fermioni + Campi di Gauge

$g \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu$	$g \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi A_\mu$	$g (\phi^* \partial_\mu \phi - \phi \partial_\mu \phi^*) A_\mu$	$g \phi^2 A_\mu A^\mu$	$g F_{\mu\nu} \bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi$
$\Delta_g = 0$	$\Delta_g = 0$	$\Delta_g = 0$	$\Delta_g = 0$	$\Delta_g = -1$

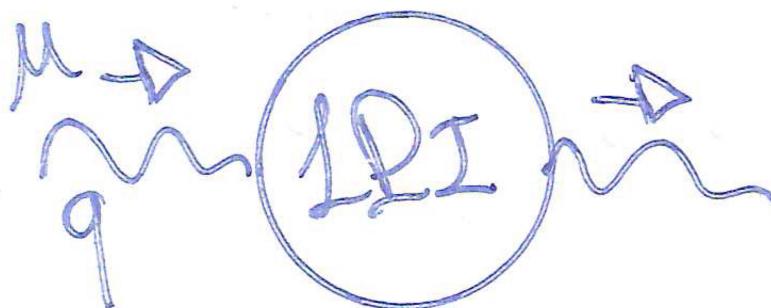


2 Regolarizzazione della QED^a

^a Immagine generata con DALL-E 2

2.1 L'auto-energia del fotone

Consideriamo l'ampiezza a due fotoni, anche nota come **auto-energia del fotone** (PSE):



Questo diagramma, per quanto visto nel capitolo 1, ha un grado di divergenza superficiale pari a $D = 4 - \cancel{3/2N_e} - N_\gamma = 2$ e nel seguito adotteremo la notazione $[PSE \equiv i\Pi^{\mu\nu}(q)]$.

Partiamo da alcune considerazioni:

1. Covarianza di Lorentz.

$\Pi^{\mu\nu}(q)$ è un tensore di Lorentz costruito con $g^{\mu\nu}$ e q^μ , quindi deve avere la struttura:

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = \Theta(q^2)g^{\mu\nu} - \Pi(q^2)q^\mu q^\nu \quad (2.1)$$

Dove $\Theta(q^2)$ e $\Pi(q^2)$ sono funzioni scalari di $q^2 = q^\mu q_\mu$.

2. Identità di Ward-Takahashi, $q_\mu \Pi^{\mu\nu}(q) = 0$.

Per quanto appena visto otteniamo:

$$q_\mu \Pi^{\mu\nu}(q) = \underbrace{\Theta(q^2) q_\mu g^{\mu\nu}}_{q_\nu} - \underbrace{\Pi(q^2) q^2 q^\nu}_{\Theta(q^2) = q^2 \Pi(q^2)} = [\Theta(q^2) - \Pi(q^2) q^2] q^\nu \stackrel{!}{=} 0$$

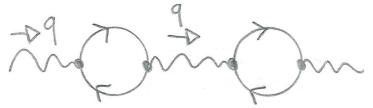
2.1 L'auto-energia del fotone	17
2.2 Calcolo esplicito ad 1 loop	18
Regole generali	19
Svolgimento del calcolo	20
2.3 L'auto-energia dell'elettrone	27
Struttura della soluzione	27
Calcolo esplicito ad 1 loop	28
2.4 La funzione vertice	31
I Fattori di Forma	32
Calcolo esplicito ad 1 loop	35

di conseguenza, sostituendo nell'equazione (2.1):

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \Pi(q^2) \quad (2.2)$$

3. **Regolarità:** $i\Pi^{\mu\nu}$ non può avere un polo in $q^2 = 0$.

Un polo potrebbe apparire in un diagramma del tipo a lato, dove il propagatore intermedio porterebbe alla formazione del polo quando $q^2 \rightarrow 0$, tuttavia questo diagramma non è 1PI¹ e non viene considerato nell'ampiezza da noi trattata.



Possiamo a questo punto riassumere quanto appena osservato:

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \Pi(q^2) \quad \Pi(q^2) \text{ "regolare" per } q^2 \rightarrow 0 \quad (2.3)$$

Consideriamo adesso un'espansione in serie di potenze di $\Pi^{\mu\nu}$ rispetto ad un 4-impulso esterno.

Nota 2.1.1 Di base il grado di divergenza della PSE è $D = 2$. Come già discusso in precedenza, nella discussione attorno all'equazione (1.6), derivare rispetto ad un impulso esterno corrisponde ad un decremento del grado di divergenza.

Scriviamo quindi:

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu}(q) &= \Pi^{\mu\nu}(q = 0) + && (D=2) \\ &+ \frac{\partial \Pi^{\mu\nu}}{\partial q^\rho} \Big|_{q=0} q^\rho + && (D=1) \\ &+ \frac{\partial^2 \Pi^{\mu\nu}}{\partial q^\rho \partial q^\sigma} \Big|_{q=0} q^\rho q^\sigma + \frac{\partial^2 \Pi^{\mu\nu}}{\partial q^\rho \partial q^\sigma} \Big|_{q=0} q^2 g^{\rho\sigma} + && (D=0) \\ &+ \Pi_{\text{FINITE}}^{\mu\nu}(q) && (D<0) \end{aligned}$$

Se compariamo l'espansione in serie con l'equazione (2.3) due cose risultano evidenti:

- i. I termini divergenti con grado di divergenza pari a $D = 2, 1$ sono assenti.
- ii. Il grado di divergenza maggiore di $\Pi^{\mu\nu}(q)$ è $D = 0$, una divergenza "log Λ ", se parliamo in termini di cutoff.

Quindi il grado di divergenza dell'ampiezza di autoenergia del fotone è pari a $D = 0$.

2.2 Calcolo esplicito ad 1 loop

È giunto il momento di lanciarci in uno di quei calcoli che *conviene fare almeno una volta nella vita*, ossia quello dell'auto-energia del fotone con un loop, anche detta **polarizzazione del vuoto**: una coppia e^+e^- virtuale viene prodotta da un campo elettromagnetico di fondo, modificando la distribuzione di carica che ha generato il campo elettromagnetico iniziale.

¹ One-Particle Irreducible, nel senso espresso nella definizione 1.2.2

Il diagramma, che indichiamo con $i\Pi_{\text{1-loop}}^{\mu\nu}(q)$ è quello riportato al lato.

Con la notazione adottata, l'ampiezza del diagramma può essere scritta sulla base delle regole di Feynman, partendo dal vertice μ e andando in verso opposto rispetto alle linee fermioniche, come segue:

$$i\Pi_{\text{1-loop}}^{\mu\nu}(q) = (-1)(ie)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\text{tr}\{\gamma^\mu i(\not{k} + m)\gamma^\nu i(\not{k} + \not{q} + m)\}}{(k^2 - m^2 + i\varepsilon)[(k + q)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \quad (2.4)$$

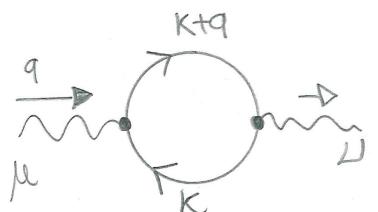


Diagramma di Feynman per la polarizzazione del vuoto.

Regole generali

Giustifichiamo l'equazione (2.4) in modo da dare una visione più concreta di quello che appare come un integrale mostruoso, questo ci consentirà anche di ricordare alcune regole utili ai fini della scrittura di integrali correlati a diagrammi di Feynman, oltre che introdurne di nuove nei casi che comprendono uno o più loop:

1. $(ie)^2$ arriva dai due vertici di QED presenti nel diagramma, ogni vertice corrisponde ad un fattore $ie\gamma^\mu$.
2. (-1) è associato al loop chiuso di fermioni, ogni loop chiuso di fermioni porta con se un fattore (-1) in un diagramma a più di un loop. Il motivo di questo segno meno apparirà chiaro tra poco, nella nota 2.2.1.
3. $\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}$ deriva dal fatto che integriamo su ogni 4-impulso non vincolato da leggi di conservazione di 4-impulsi al vertice.
4. Come già anticipato, la funzione integranda viene scritta partendo da un vertice generico, nel nostro caso dal vertice μ , poi si va in verso opposto rispetto alle linee fermioniche, quindi si scrive il propagatore associato al positrone con 4-impulso k , poi il vertice ν e infine il propagatore dell'elettrone con 4-impulso $(k + q)$.
5. La traccia al numeratore (che agisce sugli indici di Lorentz) deriva invece dalla somma sullo spin, necessaria in quanto le linee fermioniche sono chiuse.

Nota 2.2.1 (Origine del (-1) e di $\text{tr}\{\dots\}$)

Ricordiamo che il propagatore fermionario è dato dall'espressione:

$$\begin{aligned} i[S_F(x - y)]_{\alpha\beta} &= \overbrace{\langle 0|T[\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\alpha(y)]|0\rangle}^{\text{"Contrazione di Wick"}} \equiv \overbrace{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)} \\ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} \frac{i[\not{p} + m]_{\alpha\beta}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \end{aligned}$$

Il punto cruciale è che **l'ordine degli operatori è importante**. In altre parole:

$$\overbrace{\bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\beta(y)} = (-1)\overbrace{\bar{\psi}_\beta(y)\bar{\psi}_\alpha(x)} = (-1)i[S_F(y - x)]_{\beta\alpha}$$

Di conseguenza, se consideriamo le varie contrazioni nell'elemento di

matrice, siamo di fronte alla seguente situazione:

$$\langle A(q) | (ie) \bar{\psi}_\alpha(x) [\gamma^\mu]_{\alpha\beta} A_\mu(x) \bar{\psi}_\beta(x) (ie) \bar{\psi}_\rho(y) [\gamma^\nu]_{\rho\delta} A_\nu(y) \psi_\delta(y) | A(q) \rangle$$

Delle due contrazioni fermioniche, quella interna corrisponde al propagatore fermionario, quella esterna invece ha i campi invertiti, quindi porterà un fattore (-1) globale, quello che troviamo nella (2.4).

Esplcitando i propagatori troviamo:

$$(ie)^2 [\gamma^\mu]_{\alpha\beta} i [S_F(x-y)]_{\beta\rho} [\gamma^\nu]_{\rho\delta} (-1) i [S_F(y-x)]_{\delta\alpha}$$

e sommando sugli spin chiudiamo la traccia!

Nota 2.2.2 Va detto che di norma quando si trattano diagrammi come questi, assumendo impulso q per le gambe esterne, l'elemento di matrice associato è qualcosa del tipo:

$$i\mathcal{M} = \varepsilon_\mu(q) \varepsilon_\nu(q) i\Pi^{\mu\nu}(q)$$

Tuttavia ci concentriamo sulla parte tensoriale, in modo da poter utilizzare i risultati così ottenuti anche nel caso in cui si consideri un diagramma più grande contenente una parte simil-PSE, in cui i fotoni esterni agiscono da propagatore.

Svolgimento del calcolo

Cominciamo con il calcolo esplicito e partiamo con le dovute semplificazioni del caso, sfruttando le proprietà delle matrici γ :

$$\begin{aligned} i\Pi_{\text{1-loop}}^{\mu\nu}(q) &= (-1)(ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\text{tr}\{\gamma^\mu i(\not{k} + m)\gamma^\nu i(\not{k} + \not{q} + m)\}}{(k^2 - m^2 + i\varepsilon)[(k+q)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \\ &= -e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \underbrace{\frac{\text{tr}\{\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu (\not{k} + \not{q})\}}{(k^2 - m^2 + i\varepsilon)[(k+q)^2 - m^2 + i\varepsilon]} + m^2 \overbrace{\text{tr}\{\gamma^\mu \gamma^\nu\}}^{=4g^{\mu\nu}}} \\ &= -4e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\not{k}^\rho (\not{k} + \not{q})^\sigma (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + m^2 g^{\mu\nu}}{(k^2 - m^2 + i\varepsilon)[(k+q)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \\ &= -4e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu (k+q)^\nu - k \cdot (k+q) g^{\mu\nu} + k^\nu (k+q)^\mu + m^2 g^{\mu\nu}}{(k^2 - m^2 + i\varepsilon)[(k+q)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \end{aligned}$$

Ricordiamo che $\text{tr}(n\gamma) = 0$ quando n è dispari.

Il primo risultato che otteniamo è quindi:

$$i\Pi_{\text{1-loop}}^{\mu\nu}(q) = -4e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu (k+q)^\nu + k^\nu (k+q)^\mu - g^{\mu\nu} [k \cdot (k+q) - m^2]}{(k^2 - m^2 + i\varepsilon)[(k+q)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \quad (2.5)$$

Introduciamo il parametro di Feynman

L'idea è quella di utilizzare l'identità:

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[(1-x)A + xB]^2} \quad (2.6)$$

detta "formula di Feynman", dove x è detto *parametro di Feynman*, prendendo

$$\begin{aligned} A &\equiv (k^2 - m^2 + i\varepsilon) \\ B &\equiv (k + q)^2 - m^2 + i\varepsilon \end{aligned}$$

Esercizio 2.2.1 Dimostrare l'identità (2.6) [svolto lezione 4 p.8÷9]

Applichiamo la formula di Feynman

Lavoriamo sul denominatore dell'integrale (2.6), sostituendo A e B come detto sopra, con della banale algebra si trova:

$$\begin{aligned} \text{den} &= \left\{ (1-x)(k^2 - m^2 + i\varepsilon) + x[(k+q)^2 - m^2 + i\varepsilon] \right\}^2 \\ &= [(k+xq)^2 + xq^2(1-x) - m^2 + i\varepsilon]^2 \end{aligned}$$

Otteniamo quindi un secondo risultato:

$$\frac{1}{(k^2 - m^2 + i\varepsilon)[(k+q)^2 - m^2 + i\varepsilon]} = \int_0^1 dx \frac{1}{[(k+xq)^2 + xq^2(1-x) - m^2 + i\varepsilon]^2} \quad (2.7)$$

Torniamo all'integrale al loop

Combinando la (2.5) con la (2.7) otteniamo:

$$i\Pi_{\text{1-loop}}^{\mu\nu}(q) = -4e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{k^\mu(k+q)^\nu + k^\nu(k+q)^\mu - g^{\mu\nu}[k \cdot (k+q) - m^2]}{[(k+xq)^2 + xq^2(1-x) - m^2 + i\varepsilon]^2} \quad (2.8)$$

Saremmo adesso tentati dall'invertire gli integrali, cambiando anche la variabile di integrazione in $l \equiv k + xq$; tuttavia ciò sarebbe possibile solo nel caso in cui l'integrale in k converga, e non è questo il caso!

Regolarizzazione dimensionale

Prima di procedere con il calcolo dobbiamo quindi *regolarizzare la teoria*: dobbiamo "deformarla" in modo tale da rendere l'integrale in k convergente.

Per fare ciò **riduciamo il numero di dimensioni spazio-temporali** ($4 \rightarrow d < 4$), questo step è noto come *Regolarizzazione Dimensionale*, o **DIM-REG**.

Alla fine dei conti, torneremo in 4 dimensioni e apparirà nuovamente la divergenza che abbiamo nascosto sotto al tappeto, ma quello che la DIMREG ci permette di fare è isolare in modo chiaro la parte divergente dell'integrale.

Riscriviamo allora nuovamente la (2.8), cambiando la variabile di integrazione in $l^\mu \equiv k^\mu + xq^\mu$, definendo $\Delta \equiv m^2 - x(1-x)q^2$ ed applicando la DIMREG (che ci permette di invertire l'ordine di integrazione):

$$i\Pi_{\text{1-loop}}^{\mu\nu}(q) = -4e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{\mathcal{N}^{\mu\nu}}{(l^2 - \Delta + i\varepsilon)^2} \quad (2.9)$$

dove il numeratore, sostituendo $k^\mu \equiv l^\mu - xq^\mu$, assume la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^{\mu\nu} = & l^\mu l^\nu + l^\mu + (1-x)q^\nu - xq^\mu l^\nu - xq^\mu(1-x)q^\nu + \\ & + l^\nu l^\mu + l^\nu + (1-x)q^\mu - xq^\nu l^\mu - xq^\nu(1-x)q^\mu + \\ & - g^{\mu\nu}[l^2 + l \cdot q + (1-x) - xq \cdot l - x(1-x)q^2 - m^2] \end{aligned}$$

Tuttavia, per la struttura dell'integrale, c'è da considerare il fatto che gli integrali dei termini lineari in l^μ andranno a zero per ragioni di parità ($l^\mu \rightarrow -l^\mu$). Di conseguenza:

$$\mathcal{N}^{\mu\nu} \xrightarrow[\text{lineari in } l^\mu]{\text{senza termini}} 2l^\mu l^\nu - g^{\mu\nu}l^2 - 2x(1-x)q^\mu q^\nu + g^{\mu\nu}[m^2 + x(1-x)q^2] \quad (2.10)$$

Riduzione delle strutture tensoriali

Se scorporiamo l'integrale (2.9) in somme di più integrali (uno per ciascun termine del numeratore) e guardiamo il primo, tralasciando l'integrazione in dx , abbiamo a che fare con un integrale tensoriale. L'argomento di questo integrale è però solo funzione di Δ , che è una quantità scalare.

Ci aspettiamo allora come risultato:

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^\mu l^\nu}{(l^2 - \Delta + i\varepsilon)^2} = \mathcal{I}(\Delta) g^{\mu\nu}$$

con $g^{\mu\nu}$ a tener conto della struttura tensoriale.

Possiamo quindi risolvere per $\mathcal{I}(\Delta)$, moltiplicando ambo i lati per $g_{\mu\nu}$ e ricordando che $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = d$:

$$\mathcal{I}(\Delta) = \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^2/d}{(l^2 - \Delta + i\varepsilon)^2}$$

Sostituendo nell'espressione sopra troviamo quindi:

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^\mu l^\nu}{(l^2 - \Delta + i\varepsilon)^2} = \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{g^{\mu\nu} l^2/d}{(l^2 - \Delta + i\varepsilon)^2} \quad (2.11)$$

Quanto appena visto ci permette di accorpare i primi due termini della (2.10) che quindi diventa:

$$\mathcal{N}^{\mu\nu} = -(1 - 2/d)l^2 g^{\mu\nu} - 2x(1-x)q^\mu q^\nu + [m^2 + x(1-x)q^2]g^{\mu\nu} \quad (2.12)$$

Effettuiamo una rotazione di Wick

Tralasciando la descrizione nel dettaglio di cosa una rotazione di Wick sia [Lezione 5 p.13÷15], quello che ci interessa fare è semplificare il calcolo dell'integrale in (2.9), per farlo "ruotiamo una parte della funzione integranda di $\pi/2$ ", introducendo un tempo immaginario.

In termini matematici, ad una rotazione di Wick corrisponde la sostituzione $[l^0 \rightarrow i l_E^0]$, con $l_E^0 \in (-\infty, +\infty)$ e dove l^0 è la componente 0 ("temporale", se la pensiamo nella notazione dei 4-vettori) del d-vettore $l = (l^0, l^1, \dots, l^d) = (l^0, \vec{l}) \Rightarrow l^2 = (l^0)^2 - |\vec{l}|^2$.

Nota 2.2.3 (Condizioni necessarie all'applicazione della rotazione di Wick) È cruciale che l'integrale originale converga, in modo tale da poter trascurare l'integrale sugli archi nel cammino che si sceglie per evitare i poli della funzione. Di conseguenza è cruciale che venga effettuata prima la DIMREG, e poi la rotazione di Wick.

Inoltre, in questa discussione stiamo assumendo che Δ sia una quantità positiva. Vedremo invece che, studiando il teorema ottico in sezione 5.5, sarà cruciale considerare il caso in cui $\Delta < 0$.

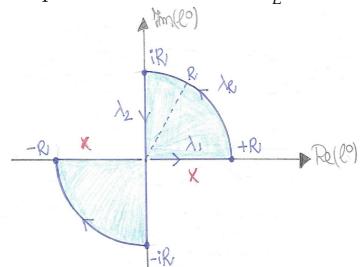
Introducendo quindi il vettore Euclideo d-dimensionale $\vec{l}_E = (l_E^0, \vec{l})$, tale per cui $|\vec{l}_E|^2 = (l_E^0)^2 + |\vec{l}|^2$ (con il +!), la rotazione di Wick si esprime nella sua forma generale come segue (notare il cambio di segno di Δ):

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^{2n}}{(l^2 - \Delta + i\varepsilon)^m} = (-1)^{n-m} i \int \frac{d^d \vec{l}_E}{(2\pi)^d} \frac{|\vec{l}_E|^{2n}}{[|\vec{l}_E|^2 + \Delta]^m} \quad (2.13)$$

Applichiamo ora la (2.13) alla (2.9), che corrisponde al caso con $n = 1$ ed $m = 2$, sostituendo anche il numeratore come scritto nella (2.12) e otteniamo:

$$\begin{aligned} i\Pi_{1\text{-loop}}^{\mu\nu}(q) &= -4ie^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^d \vec{l}_E}{(2\pi)^d} \frac{\mathcal{N}_E^{\mu\nu}}{[|\vec{l}_E|^2 + \Delta]^2} \\ \mathcal{N}_E^{\mu\nu} &= (1 - 2/d)|\vec{l}_E|^2 g^{\mu\nu} - 2x(1-x)q^\mu q^\nu + [m^2 + x(1-x)q^2]g^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.14)$$

È degno di nota il fatto che, spostando l'integrazione sull'asse immaginario evitando i poli, ci troviamo nella situazione in cui possiamo permetterci di trascurare il fattore $i\varepsilon$ al denominatore, questo è schematizzabile nello sketch qui sotto, in cui λ_2 è parametrizzato da $l^0 = i l_E^0$.



Inoltre notiamo, come riportato in equazione (2.14), solo il primo termine del numeratore cambia di segno, grazie al $(-1)^{n-m} = (-1)^{-1} = -1$.

Svolgiamo l'integrale Euclideo

Più facile a dirsi che a farsi, ci sono un bel po' di conti da fare [**Lez 5 p.17÷22**].

Quello che ci interessa portare a casa è che introducendo le coordinate polari d-dimensional, separando l'integrale nelle sue componenti radiali e angolari e sfruttando alcuni integrali notevoli, si può scrivere nel caso più generale:

$$\int \frac{d^d \vec{l}_E}{(2\pi)^d} \frac{(|\vec{l}_E|^2)^n}{[|\vec{l}_E|^2 + \Delta]^m} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{m-n-d/2} \frac{\Gamma(m-n-d/2)\Gamma(n+d/2)}{\Gamma(d/2)\Gamma(m)} \quad (2.15)$$

A noi interessano due casi specifici:

1. ($n = 0, m = 2$) Da cui si ottiene:

$$\int \frac{d^d \vec{l}_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{[|\vec{l}_E|^2 + \Delta]^2} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(2-d/2)}{\Gamma(2)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-d/2} \quad (2.16)$$

2. ($n = 1, m = 2$) Da cui otteniamo:

$$\int \frac{d^d \vec{l}_E}{(2\pi)^d} \frac{|\vec{l}_E|^2}{[|\vec{l}_E|^2 + \Delta]^2} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(2-d/2)}{\Gamma(2)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-d/2} \frac{d}{2} \frac{\Delta}{(1-d/2)} \quad (2.17)$$

usando in maniera opportuna alcune identità delle Γ di Eulero in modo ottenere una struttura simile a quella nel caso 1.

Applichiamo allora queste formule al nostro integrale, in cui abbiamo un integrale di tipo 2. e due integrali di tipo 1. (corrispondenti rispettivamente al primo e ai successivi termini presenti nel numeratore).

Ottieniamo, sfruttando il fatto che $\Gamma(2) = 1$:

$$i\Pi_{\text{1-loop}}^{\mu\nu}(q) = -4ie^2 \int_0^1 dx \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(2-d/2)}{\Gamma(2)} \times \left\{ (1-2/d)g^{\mu\nu} \frac{d}{2} \frac{\Delta}{(1-d/2)} + \right. \\ \left. + [-2x(1-x)q^\mu q^\nu + m^2 g^{\mu\nu} + x(1-x)q^2 g^{\mu\nu}] \right\} \stackrel{*}{=}$$

La cosa interessante, oserei dire fantastica, è che se operiamo le giuste sostituzioni nella parte tra le parentesi graffe avvengono delle magiche semplificazioni e alla fine dei conti:

$$\stackrel{*}{=} -4ie^2 \int_0^1 dx \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(2-d/2)}{\Gamma(2)} 2x(1-x)(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu)$$

Che al lettore più attento potrebbe sembrare familiare².

² se così non fosse, si confronti con la (2.2)

In sintesi:

$$\begin{aligned} i\Pi_{\text{1-loop}}^{\mu\nu}(q) &= (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) i\Pi_{\text{1-loop}}(q^2) \\ \Pi_{\text{1-loop}}(q^2) &= \frac{-8e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx x(1-x) \frac{\Gamma(2-d/2)}{\Delta^{2-d/2}} \\ \text{con } \Delta &\equiv m^2 - x(1-x)q^2 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Fermiamoci ora per commentare quanto riportato in (2.18):

- La struttura di $i\Pi_{\text{1-loop}}^{\mu\nu}(q)$ riflette quella che abbiamo tirato fuori dal cappello fin dall'inizio, riportata in (2.2): la struttura tensoriale viene fattorizzata. Questa è una caratteristica speciale della regolarizzazione dimensionale, per indicarla si dice che "**la DIMREG è compatibile con l'invarianza di gauge (nella forma delle identità di Ward-Takahashi)**".
- L'espressione di $i\Pi_{\text{1-loop}}^{\mu\nu}(q)$ è ancora valida nella teoria "deformata" in d -dimensioni. Ricordiamo poi che la funzione $\Gamma(z)$ ha poli semplici per $z = 0, -1, -2, \dots$, quindi nella nostra espressione, la divergenza (UV) si manifesta nel limite $d \rightarrow 4 \Rightarrow \Gamma(z=0)$
- D'altra parte, per $z > 0$ la funzione $\Gamma(z)$ è perfettamente regolare, il che si riflette nella regolarità di $i\Pi_{\text{1-loop}}^{\mu\nu}(q)$ per $2-d/2 > 0 \Rightarrow d < 4$, come atteso.
- Ricordiamo che la funzione $\Gamma(z)$:
 - Coincide con la funzione fattoriale quando trattata su \mathbb{N}^+ .
 - Può essere definita $\forall z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\{z\} > 0$ per mezzo della formula integrale $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$.
 - Ammette prolungamento analitico sull'insieme $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.

Passaggio a dimensione continua

Nella nostra espressione finale (2.18), la dimensione d della teoria risulta essere argomento della funzione Γ , tuttavia nessuno ci obbliga a considerarla come una variabile discreta!

Considerando quindi d come continua, rimodelliamo il limite $d \rightarrow 4$ definendo:

$$d \equiv 4 - 2\epsilon \Rightarrow \epsilon \equiv 2 - \frac{d}{2}$$

Espandendo ora $\Gamma(z)$ in serie di Laurent intorno al suo polo in $z = 0$ otteniamo come risultato:

$$\Gamma(2 - \frac{d}{2}) = \Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (2.19)$$

dove $\gamma \approx 0.577$ è la costante di Eulero-Mascheroni.

Allo stesso tempo possiamo riscrivere:

$$\frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{2-\frac{d}{2}} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi}{\Delta} \right)^\epsilon$$

Utilizziamo a questo punto l'espansione $(a)^\epsilon = 1 + \epsilon \log a + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ la formula finale sarà:

$$\frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-\frac{d}{2}} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left[1 + \epsilon \log \frac{4\pi}{\Delta} + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right] \quad (2.20)$$

Non resta altro che applicare la (2.19) e la (2.20) alla (2.18); quello che otteniamo da queste sostituzioni, lasciando da parte i termini di $\mathcal{O}(\epsilon)$ e superiori, che vanno a zero quando $\epsilon \rightarrow 0$ è:

$$\Pi_{\text{1-loop}}(q^2) = \frac{-8e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx x(1-x) \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \log \frac{4\pi}{\Delta} \right] \quad (2.21)$$

Osserviamo come la divergenza UV si manifesta come un polo semplice quando $\epsilon \rightarrow 0$

Scala di rinormalizzazione

Attenzione: qualcuno a questo punto potrebbe tirare un sospiro di sollievo, pensando di aver finalmente raggiunto il risultato finale, tuttavia non è così.

Infatti, se osserviamo bene il termine logaritmico, ricordando che $\Delta = m^2 - x(1-x)q^2$ è una quantità non adimensionale (a.k.a. "dimensionful"³), ne deduciamo che debba esserci un fattore mancante per fare in modo che l'argomento del logaritmo sia adimensionale ("dimensionless").

La sottigliezza da adottare per risolvere questo problema risiede nella dimensione di massa del coupling di QED, che ricordiamo essere:

$$[e] = [M]^{2-d/2} \xrightarrow{\epsilon=2-d/2} [e] = [M]^{\epsilon}$$

Quello che notiamo è che il coupling è dimensionless per $d = 4$, ma dimensionful per $d \neq 4$.

Operiamo allora un *rescaling del coupling elettromagnetico* quando passiamo in dimensione generica, in modo da mantenere il coupling adimensionale qualunque sia la dimensione: $[e \rightarrow e\mu^\epsilon]$, dove μ è detto "**scala di rinormalizzazione**" ed è una scala di massa arbitraria.

Questo rescaling risolve il problema che abbiamo notato poco fa. Infatti nell'espressione di $\Pi_{\text{1-loop}}(q^2)$ figura un $e^2 \rightarrow e^2 \mu^{2\epsilon}$ e noi non facciamo altro se non prendere il fattore $\mu^{2\epsilon}$ e integrarlo nell'espansione (2.20), ottenendo:

$$\frac{\mu^{2\epsilon}}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-\frac{d}{2}} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{\Delta}\right)^\epsilon = \frac{1}{(4\pi)^2} \left[1 + \epsilon \log \frac{4\pi\mu^2}{\Delta} + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right] \quad (2.22)$$

L'argomento del logaritmo è ora dimensionless e possiamo (finalmente!) scrivere il tanto agognato **risultato finale per l'auto-energia del fotone regolarizzata ad 1 loop**:

³ ndr.: nel seguito adotterò questo termine nel caso sia necessario specificare la non-adimensionalità di una certa quantità, in quanto non ritengo esista una traduzione abbastanza fedele da adottare.

$$\boxed{i\Pi_{\text{1-loop}}^{\mu\nu}(q) = (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) i\Pi_{\text{1-loop}}(q^2)}$$

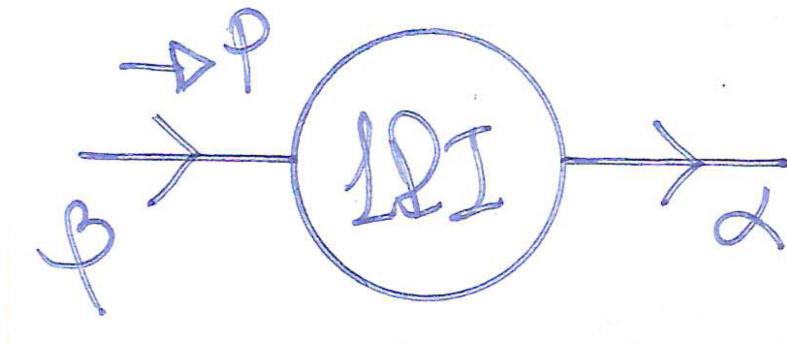
$$\Pi_{\text{1-loop}}(q^2) = \frac{-8e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx x(1-x) \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \log \frac{4\pi\mu^2}{\Delta} \right]$$

con $\Delta \equiv m^2 - x(1-x)q^2$

(2.23)

2.3 L'auto-energia dell'elettrone

Dopo aver visto il caso del fotone, passiamo ad analizzare un'altra ampiezza divergente: quella che rappresenta l'auto-energia dell'elettrone (**ESE**), con grado di divergenza $D = 1$ e che indichiamo con $i[\Sigma(p)]_{\alpha\beta}$.



Nota: Gli indici α e β si riferiscono alla natura matriciale di $[\Sigma(p)]_{\alpha\beta}$ (è in genere una matrice 4×4 , per la precisione). Nel seguito, tuttavia, questi indici saranno lasciati sottintesi ed eventualmente esplicitati solo quando il contesto dovesse richiederlo.

Un diagramma di questo tipo entra in gioco, ad esempio, come correzione al calcolo dell'ampiezza dello scattering Compton, in cui funge in sostanza da propagatore, quindi off-shell. Consideriamo quindi spinori non necessariamente on-shell, in modo tale da ottenere un risultato il più generale possibile, da specializzare poi per il caso di interesse.

Struttura della soluzione

La struttura che ci aspettiamo per l'auto-energia dell'elettrone è qualcosa del tipo:

$$\begin{aligned} i[\Sigma(p)]_{\alpha\beta} &\sim A(p^2)\delta_{\alpha\beta} + B(p^2)p_\mu [\gamma^\mu]_{\alpha\beta} \\ &= A(p^2)\delta_{\alpha\beta} + B(p^2)[\not{p}]_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Con $A(p^2)$ e $B(p^2)$ funzioni scalari.

Le motivazioni dietro tale struttura sono le seguenti:

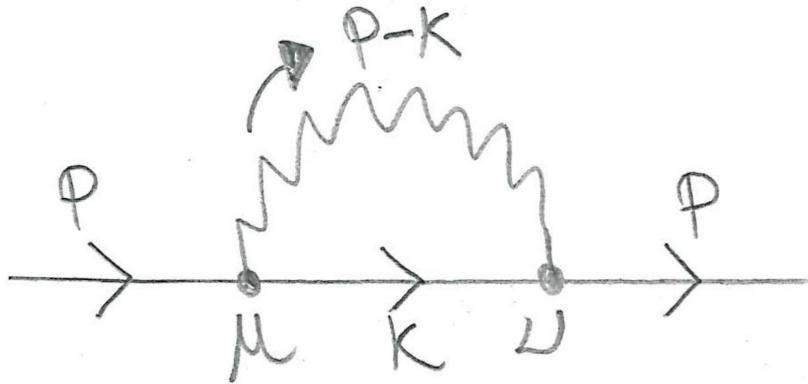
- Strutture con più matrici γ possono essere sempre riscritte nella forma sopra, se le γ sono in numero pari ci si riconduce al termine in $A(p^2)$, se sono in numero dispari al termine in $B(p^2)$, per esempio:

$$\begin{aligned} C(p^2)p_\mu p_\nu [\gamma^\mu \gamma^\nu]_{\alpha\beta} &= C(p^2)[\not{p} \not{p}]_{\alpha\beta} \\ &= C(p^2)p^2 \delta_{\alpha\beta} \\ &\sim A(p^2)\delta_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

- Il 4-impulso p^μ entra in gioco solo nella sua forma scalare p^2 o in combinazione con le matrici γ , in quanto Σ non ha indici di Lorentz [di conseguenza adotteremo la notazione $\Sigma(p)$ invece di $\Sigma(p)$].
- Non ci aspettiamo combinazioni con la matrice γ_5 , del tipo $a(p^2)[\gamma_5]_{\alpha\beta}$ o $b(p^2)[\gamma_5\gamma^\mu]_{\alpha\beta}$, per ragioni di parità.

Calcolo esplicito ad 1 loop

Abbiamo un solo diagramma da calcolare, lo chiamiamo $i\Sigma_{\text{1-loop}}(p)$



L'ampiezza che ne risulta, partendo dal vertice ν è:

$$i\Sigma_{\text{1-loop}}(p) = (ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[\gamma^\nu \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \gamma^\mu \frac{(-ig^{\mu\nu})}{(p - k)^2 + i\varepsilon} \right]$$

Questi integrali si fanno tutti allo stesso modo. Abbiamo visto i singoli passaggi più nel dettaglio nel caso dell'auto-energia del fotone, nella sezione precedente, quindi cerchiamo di ricavare da questo secondo calcolo una visione più schematica⁴.

- Semplifichiamo l'espressione

$$i\Sigma_{\text{1-loop}}(p) = (ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\mu (\not{k} + m) \gamma_\mu}{(k^2 - m^2 + i\varepsilon)[(p - k)^2 + i\varepsilon]} \stackrel{*}{=}$$

- Introduciamo il parametro di Feynman

$$\stackrel{*}{=} (ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{\gamma^\mu (\not{k} + m) \gamma_\mu}{[(1-x)(k^2 - m^2 + i\varepsilon) + x(p^2 + k^2 - 2p \cdot k + i\varepsilon)]^2} \stackrel{*}{=}$$

- Elaboriamo il denominatore senza il quadrato

$$\begin{aligned} \sqrt{den} &= k^2(1-x+x) - (1-x)m^2 + xp^2 - 2x \cdot k + i\varepsilon(1-x+x) \\ &\stackrel{\pm x^2 p^2}{=} (k - xp)^2 + x(1-x)p^2 - (1-x)m^2 + i\varepsilon \end{aligned}$$

- Applichiamo la DIMREG e passiamo in d-dimensioni

In questo modo possiamo invertire l'ordine di integrazione, in

⁴ a mio parere più utile sul lungo termine, considerato il fatto che difficilmente ci si trova a svolgere a mano questi integrali.

quanto considerando $d < 4$ l'integrale su k converge. Sostituendo anche il denominatore del passaggio precedente otteniamo:

$$\begin{aligned} &\stackrel{*}{=} (ie)^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \underbrace{\frac{\gamma^\mu (\not{k} + m) \gamma_\mu}{[(k - xp)^2 + x(1-x)p^2 - (1-x)m^2 + i\varepsilon]^2}}_{\stackrel{\equiv l}{\equiv -\Delta}} \\ &= (ie)^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{\gamma^\mu (\not{l} + x\not{p} + m) \gamma_\mu}{[l^2 - \Delta + i\varepsilon]^2} \stackrel{*}{=} \end{aligned}$$

► **Elaboriamo la funzione integranda**

Per farlo sfruttiamo l'algebra di Clifford in d -dimensioni e un paio di identità:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = d, \quad \gamma^\mu \gamma^\nu = d$$

In particolare è facile ricavare:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = (2-d)\gamma^\nu$$

che ci consente di riscrivere il numeratore dell'integrale, ottenendo:

$$\stackrel{*}{=} (ie)^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{(2-d)(\not{l} + x\not{p}) + md}{[l^2 - \Delta + i\varepsilon]^2} \stackrel{*}{=}$$

► **Introduciamo la scala di rinormalizzazione e semplifichiamo i termini che sia annullano per ragioni di parità**

$$\stackrel{*}{=} (ie)^2 \mu^{4-d} \int_0^1 dx \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{(2-d)x\not{p} + md}{[l^2 - \Delta + i\varepsilon]^2} \stackrel{*}{=}$$

► **Effettuiamo una rotazione di Wick: $l^0 \rightarrow i\vec{l}_E^0$**

ricordando che, usando la metrica euclidea e definendo $\vec{l}_E \equiv (l^0, \vec{l})$, possiamo scrivere $l_E^2 = |\vec{l}_E|^2 = (l^0)^2 + |\vec{l}|^2$. Otteniamo quindi, trascurando il termine $i\varepsilon$ in quanto lontani dai poli:

$$\begin{aligned} &\stackrel{*}{=} (ie)^2 \mu^{4-d} i \int_0^1 dx \int \frac{d^d \vec{l}_E}{(2\pi)^d} \frac{(2-d)x\not{p} + md}{[\vec{l}_E^2 + \Delta]^2} \\ &= (ie)^2 \mu^{4-d} i \int_0^1 dx [(2-d)x\not{p} + md] \underbrace{\int \frac{d^d \vec{l}_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{[\vec{l}_E^2 + \Delta]^2}}_{\frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(2-d/2)}{\Delta^{d/2}}} \\ &= (ie)^2 \mu^{4-d} i \int_0^1 dx [(2-d)x\not{p} + md] \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(2-d/2)}{\Delta^{d/2}} \stackrel{*}{=} \end{aligned}$$

Sfruttando i risultati notevoli degli integrali Euclidei in d -dimensioni

► **Consideriamo la dimensione come una variabile continua ($d = 4 - 2\epsilon$)**
il che implica

$$2-d = -2(1-\epsilon), \quad \frac{d}{2} = 2-\epsilon, \quad 4-d = 2\epsilon$$

L'integrale diventa quindi:

$$\begin{aligned} &\stackrel{*}{=} (ie)^2 \mu^{2\epsilon} i \int_0^1 dx [(-2(1-\epsilon))x p + m(4-2\epsilon)] \frac{(4\pi)^\epsilon}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(\epsilon)}{\Delta^\epsilon} \\ &= \frac{(ie)^2 i}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx [-2(1-\epsilon)x p + m(4-2\epsilon)] \underbrace{\left(\frac{4\pi\mu^2}{\Delta} \right)^\epsilon}_{\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \log \frac{4\pi\mu^2}{\Delta} + \mathcal{O}(\epsilon)} \Gamma(\epsilon) \stackrel{*}{=} \end{aligned}$$

► **Scriviamo l'espressione finale**

$$\boxed{\Sigma_{\text{1-loop}}(p) \stackrel{*}{=} \frac{(ie)^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \left\{ [-2(1-\epsilon)x p + m(4-2\epsilon)] \times \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \log \frac{4\pi\mu^2}{\Delta} + \mathcal{O}(\epsilon) \right] \right\}} \quad (2.25)$$

$$\Delta \equiv (1-x)(m^2 - xp^2)$$

Dal confronto (2.24)↔(2.25) notiamo subito la consistenza con la struttura che abbiamo "tirato a indovinare" all'inizio, basta prendere (trascurando i termini di ordine superiore ad $\mathcal{O}(\epsilon)$)

$$\begin{aligned} A(p^2) &= \frac{(ie)^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx 2(2-\epsilon)m \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \log \frac{4\pi\mu^2}{\Delta} \right] \\ B(p^2) &= \frac{(ie)^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx (-2)(1-\epsilon)x \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \log \frac{4\pi\mu^2}{\Delta} \right] \end{aligned}$$

Volendo possiamo sistemare meglio queste due funzioni, togliendo di mezzo i termini di $\mathcal{O}(\epsilon)$ che appaiono sviluppando le moltiplicazioni. Scriviamo in definitiva quindi (lasciando gli indici matriciali sottintesi):

$$\boxed{\begin{aligned} \Sigma_{\text{1-loop}}(p) &= A(p^2) + p B(p^2) \\ A(p^2) &= \frac{(ie)^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx 4m \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \log \frac{4\pi\mu^2}{\Delta} - \frac{1}{2} \right] \\ B(p^2) &= \frac{(ie)^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx (-2x) \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \log \frac{4\pi\mu^2}{\Delta} - 1 \right] \end{aligned}} \quad (2.26)$$

È evidente come entrambi i termini divergano nel limite $\epsilon \rightarrow 0$ ($d = 4$)!

Esercizio 2.3.1 Calcolare la seguente derivata:

$$\left. \frac{\partial \Sigma_{\text{1-loop}}(p)}{\partial p} \right|_{p=m} = ?$$

Il calcolo di questa derivata è piuttosto lungo e tedioso [lo svolgimento completo è riportato nella **Lezione 7, p.36÷41**], tuttavia risulterà importante conoscerne il risultato, nell'ottica di riutilizzarlo in seguito.

Spoiler: il risultato è:

$$\frac{\partial \Sigma_{\text{1-loop}}}{\partial p} \Big|_{p=m} = \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma + 4 + \log \frac{4\pi\mu^2}{m^2} + 2 \log \frac{m_\gamma^2}{m^2} \right] \quad (2.27)$$

Una cosa interessante da notare è che all'interno del calcolo appare un termine con divergenza logaritmica nel limite $k \rightarrow 1$. Questo termine è l'integrale:

$$4m^2 \int_0^1 dx \frac{x(2-x)}{(1-x)m^2} = 4m^2 \int_0^1 dx \frac{x(2-x)}{\Delta}$$

Questa divergenza è di tipo diverso rispetto a quella ultravioletta: è detta divergenza infrarossa (**IR**) ed emerge dalla parte dell'integrale al loop in cui $k \rightarrow 0$ (per l'UV $k \rightarrow \infty$).

In una teoria quantistica di campo generica, le divergenze infrarosse (anche note come *singolarità di massa*) sono associate alla presenza di particelle massless nello spettro. In QED, in particolare, la divergenza IR è associata alla non-massività del fotone.

Notiamo come, nel caso dell'auto-energia dell'elettrone, la divergenza IR appaia nel calcolo della derivata di $\Sigma(p)$, quindi se ne deduce che, in prima approssimazione, $\Sigma(p)$ non diverge in IR. La divergenza emerge solo considerando la correzione al prim'ordine.

La procedura di regolarizzazione della divergenza infrarossa consiste nell'introdurre a mano un termine al denominatore del propagatore del fotone nell'ampiezza iniziale: $-\bar{m}_\gamma^2$. Il nome non è scelto a caso: introdotto in questo modo, il termine m_γ assume a tutti gli effetti il ruolo di massa del fotone (una massa fittizia chiaramente, il fotone non ha massa.).

In formule, l'ampiezza diventa:

$$i\Sigma_{\text{1-loop}}(p) = (ie)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\nu i(\not{k} + m)\gamma^\mu(-ig^{\mu\nu})}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)[(p-k)^2 - \bar{m}_\gamma^2 + i\epsilon]}$$

E ripetendo le solite tecniche di calcolo degli integrali al loop, quello che cambia è la definizione di Δ al momento dell'introduzione del parametro di Feynman. Si trova:

$$\Delta = (1-x)(m^2 - xp^2) + xm_\gamma^2$$

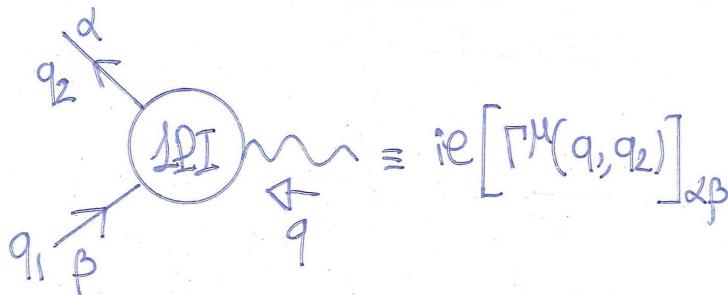
Il gioco è fatto! Ora la massa del fotone agisce come cutoff per l'integrale e quest'ultimo può essere calcolato senza alcuna difficoltà.

Inoltre la scomparsa della divergenza contestualmente all'inserimento di una massa $m_\gamma \neq 0$ è una conferma del fatto che la divergenza infrarossa sia originata dalla non-massività del fotone.

2.4 La funzione vertice

Consideriamo il vertice di QED generico, in cui espandiamo il punto di interazione in modo da tenere conto di possibili correzioni al loop. Chiamia-

mo questa ampiezza **Funzione Vertice**, la indichiamo con " $i\epsilon [\Gamma^\mu(q_1, q_2)]_{\alpha\beta}$ " e la rappresentiamo come segue:



Possiamo subito osservare come il grado di divergenza sia $D = 0$ e come la conservazione globale dell'impulso forzi la condizione:

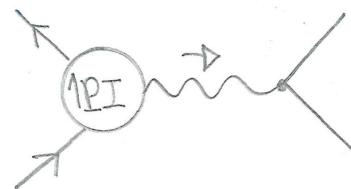
$$q_1 + q = q_2 \Rightarrow q = q_2 - q_1$$

Nota 2.4.1 Nel momento in cui volessimo includere spinori esterni e considerando il fotone come on-shell scriveremmo:

$$i\mathcal{M} = \bar{u}_\alpha(q_2) i\epsilon [\Gamma^\mu(q_1, q_2)]_{\alpha\beta} u_\beta(q_1) \epsilon_\mu(q)$$

Quindi Γ_μ è una matrice 4×4 con un indice da 4-vettore (μ).

Come al solito, non facciamo assunzioni sulla natura del fotone esterno, ci sono infatti casi in cui la funzione vertice appare come correzione in diagrammi che coinvolgono un fotone come propagatore dell'interazione (ne è un esempio il diagramma al lato), quindi cercheremo di tenerci il più generale possibile, concentrandoci solo su $i\Gamma^\mu$ e trascurando vettori di polarizzazione o spinori esterni.



I Fattori di Forma

Partiamo da alcune **considerazioni generiche** sulla struttura di $i\Gamma^\mu(q_1, q_2)$:

■ Covarianza di Lorentz

Considerato il fatto che Γ^μ ha un indice di Lorentz, la sua struttura dovrà necessariamente coinvolgere q_1^μ , q_2^μ e γ^μ ; inoltre, ci aspettiamo che la natura matriciale emerga dai coefficienti di questi tre componenti principali:

$$[\Gamma^\mu(q_1, q_2)]_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} q_1^\mu + B_{\alpha\beta} q_2^\mu + (C \gamma^\mu)_{\alpha\beta}$$

La struttura più generica che possiamo quindi scrivere è la seguente, dove omettiamo gli indici α e β per semplicità:

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu(q_1, q_2) = & (A_1 + A_2 q_1 + A_3 q_2 + A_4 q_1 q_2) q_1^\mu \\ & (B_1 + B_2 q_1 + B_3 q_2 + B_4 q_1 q_2) q_2^\mu \\ & (C_1 \gamma^\mu + C_2 \gamma^\mu q_1 + C_3 q_2 \gamma^\mu + C_4 q_2 \gamma^\mu q_1) \end{aligned} \quad (2.28)$$

con A_i, B_i, C_i funzioni scalari di q_1^2, q_2^2 e $q_1 \cdot q_2$. Ogni alta combinazione può essere riscritta nella forma sopra per mezzo di identità quali $q_1 q_1 = q_1^2$ o $q_1 q_2 = q_2 q_1 + 2q_1 \cdot q_2$.

■ Fermioni on-shell

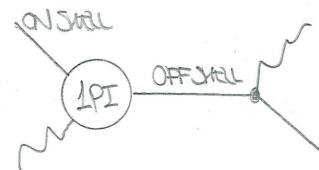
È fuori da ogni dubbio che la forma generica (2.28) per $\Gamma^\mu(q_1, q_2)$ sia piuttosto complicata. Per semplificare la trattazione, assumiamo che $\Gamma^\mu(q_1, q_2)$ appaia sempre in un sandwich tra due spinori on-shell, i.e.:

$$\bar{u}(q_2)ie\Gamma^\mu(q_1, q_2)u(q_1) \quad (2.29)$$

Nota 2.4.2 Potrebbe sembrare una limitazione, soprattutto rispetto a quanto detto poc' anzi in merito alla volontà di mantenere la discussione il più generica possibile, ed in effetti da un lato lo è: se dovessimo trovarci a trattare le correzioni allo scattering Compton, ci troveremmo con solo uno dei due spinori on-shell (quello esterno), mentre il secondo è chiuso in un propagatore off-shell. Questo ci impedirebbe di inserire tale oggetto nella nostra trattazione.

Tuttavia, finché la procedura di rinormalizzazione resta nell'equazione globale (i.e. finché la parte UV-divergenza del diagramma viene cancellata) non c'è alcuna perdita di generalità nel assumere che gli indici α e β siano connessi a spinori on-shell.^a

^a In seguito verrà fatta maggiore chiarezza al riguardo. Per ora basti sapere che si tratta di una semplificazione, anche se non del tutto evidente.



Due principali semplificazioni emergono da questa assunzione:

- Essendo i fermioni esterni on-shell, vale la legge secondo cui $q_1^2 = q_2^2 = m^2$. Segue immediatamente, tenendo conto della conservazione del 4-impulso:

$$q^2 = 2m^2 - 2q_1 \cdot q_2$$

Possiamo quindi dire che A_i, B_i e C_i sono funzioni solo di q^2 ed m^2

- Dall'equazione di Dirac possiamo ricavare:

$$\begin{aligned} (q_1 - m)u(q_1) &= 0 \Rightarrow q_1 u(q_1) = mu(q_1) \\ \bar{u}(q_2)(q_2 - m) &= 0 \Rightarrow \bar{u}(q_2)q_2 = \bar{u}(q_2)m \end{aligned}$$

A questo punto, se esplicitiamo la forma generale di Γ^μ nel sandwich, ci accorgiamo del fatto che, per mezzo dell'equazione di Dirac, tutti i vettori slashed possono essere sostituiti con m . Raccogliendo i termini in parentesi in singole funzioni più generiche otteniamo:

$$\Gamma^\mu(q_1, q_2) = A(q^2)q_1^\mu + B(q^2)q_2^\mu + C(q^2)\gamma^\mu \quad (2.30)$$

■ Identità di Ward

Consideriamo un ampiezza di scattering generica

$$i\mathcal{M} = [\bar{u}(q_2)ie\Gamma^\mu(q_1, q_2)u(q_1)]\varepsilon_\mu(q)$$

ed assumiamo il fotone come on-shell⁵ con 4-impulso q_μ .

Questo ci permette di effettuare la sostituzione $\varepsilon_\mu(q) \rightarrow \varepsilon_\mu(q) + C_\lambda q_\mu$ ⁶, ottenendo due termini, il primo identico ad $i\mathcal{M}$ e che cancella il LHS, mentre il secondo non è altro se non l'identità di Ward:

$$[\bar{u}(q_2)ie\Gamma^\mu(q_1, q_2)u(q_1)]q_\mu \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.31)$$

Esplicitando la struttura di Γ^μ secondo la (2.30) e sfruttando la condizione di fermioni on-shell, l'equazione di Dirac e la conservazione dell'impulso, si arriva facilmente al seguente risultato:

$$[\bar{u}(q_2)(q_1 \cdot q_2 - m^2)(A - B)u(q_1)]q_\mu \stackrel{!}{=} 0$$

da cui segue che

$$A(q^2) = B(q^2)$$

Di conseguenza la struttura della funzione vertice diventa:

$$\Gamma^\mu(q_1, q_2) = A(q^2)(q_1 + q_2)^\mu + C(q^2)\gamma^\mu \quad (2.32)$$

Dove $A(q^2)$ e $C(q^2)$ sono detti **Fattori di Forma**.

Nota: questa espressione è valida per fermioni on-shell e fotoni off-shell.

■ Identità di Gordon

Enunciamo innanzitutto suddetta identità:

$$2m \bar{u}(q_2)\gamma^\mu u(q_1) = (q_2 + q_1)^\mu \bar{u}(q_2)u(q_1) + i(q_2 - q_1)_\nu \bar{u}(q_2)\sigma^{\mu\nu}u(q_1) \quad (2.33)$$

con $\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$

Esercizio 2.4.1 Dimostrare l'identità di Gordon (2.33).
[svolto Lezione 8 p.48]

A questo punto l'idea è quella di sfruttare l'identità di Gordon per riscrivere in maniera diversa i termini di $\Gamma^\mu(q_1, q_2)$.

Partiamo dal sandwich (2.29) e inseriamo l'espressione (2.32), separiamo i termini in $A(q^2)$ e $C(q^2)$ e, riconoscendo nel coefficiente di $A(q^2)$ il primo termine dell'identità di Gordon, invertiamo quest'ultima ed effettuiamo la sostituzione. Un opportuno ri-arrangiamento dei termini ci porta alla forma:

$$\bar{u}(q_2)\Gamma^\mu(q_1, q_2)u(q_1) = \bar{u}(q_2)[F_1(q^2)\gamma^\mu + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}F_2(q^2)]u(q_1)$$

da cui segue

$$\Gamma^\mu(q_1, q_2) = \underbrace{F_1(q^2)}_{\text{Fattore di Forma Elettrico}} \gamma^\mu + \underbrace{\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} F_2(q^2)}_{\text{Fattore di Forma Magnetico}} \quad (2.34)$$

con

$$\begin{aligned} F_1(q^2) &= 2mA(q^2) + C(q^2) \\ F_2(q^2) &= -2mA(q^2) \end{aligned} \quad (2.35)$$

⁵ In realtà l'identità di Ward vale anche nel caso in cui i fotoni siano off-shell, come nel caso della correzione per lo scattering Compton. ⁶ C_λ è un fattore che non ci interessa ed il perché di questa sostituzione può essere compreso studiando la derivazione dell'equazione (7.24), ma la sostanza è che ciò è conseguenza dell'invarianza di gauge.

■ Considerazioni riguardo la divergenza UV

Ricordiamo che il grado di divergenza della funzione vertice è $D = 0$. Se espandiamo rispetto all'impulso esterno q possiamo scrivere:

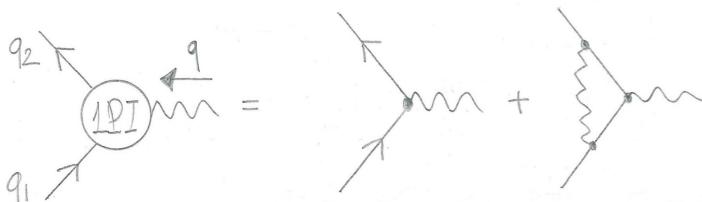
$$\Gamma^\mu(q_1, q_2) \approx \underbrace{F_1(q^2 = 0)\gamma^\mu}_{D=0} + \underbrace{\left[\frac{\partial F_1}{\partial q^\nu} \Big|_{q=0} \gamma^\mu + \frac{i\sigma_v^\mu}{2m} F_2(q^2 = 0) \right] q^\nu}_{D<0} + \dots$$

In sostanza ci aspettiamo che la divergenza arrivi solo dalla parte che concerne il fattore di forma elettrico!

Calcolo esplicito ad 1 loop

■ Considerazioni preliminari: il Tree-level

Tenendo conto al massimo delle correzioni ad un loop, possiamo decomporre la funzione vertice in una somma di due diagrammi:

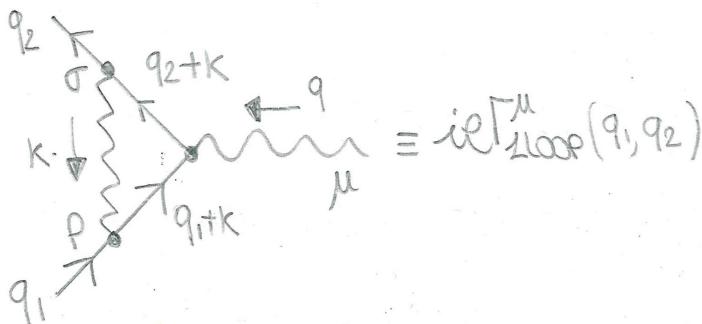


Se confrontiamo la struttura (2.34)⁷, che abbiamo appena derivato, con quella del termine al tree-level ($ie\gamma^\mu$) troviamo:

$$F_{1,\text{TREE}}(q^2) = 1; \quad F_{2,\text{TREE}}(q^2) = 0 \quad \forall q^2 \quad (2.36)$$

■ Il vertice a un loop

Concentriamoci ora sul termine a un loop, il diagramma da calcolare è il seguente:



e l'ampiezza che ne deriva può essere scritta come segue, partendo dal propagatore fotonico verticale a sinistra:

$$\begin{aligned} ie\Gamma_{1\text{-loop}}^\mu(q_1, q_2) &= (ie)^3 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{(-ig^{\rho\sigma})}{k^2 + i\varepsilon} \gamma^\sigma \cdot \right. \\ &\quad \cdot \frac{i(q_2 + k + m)}{[(q_2 + k)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \gamma^\mu \cdot \\ &\quad \left. \cdot \frac{i(q_1 + k + m)}{[(q_1 + k)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \gamma^\rho \right\} \end{aligned} \quad (2.37)$$

⁷ chiaramente, moltiplicata per ie

Anche in questo caso, come nei due precedenti, i passaggi da svolgere sono sempre gli stessi, con alcune complicazioni dovute alla presenza di 3 vertici di interazione, ma lo spirito è il medesimo. Lasciamo quindi al lettore volenteroso il divertimento dello svolgimento esplicito e delineiamo i **passaggi chiave**, senza formule:

- ▶ Sistemiamo la funzione integranda e introduciamo i parametri di Feynann (che questa volta sono 3);
- ▶ Applichiamo la regolarizzazione dimensionale e rielaboriamo il numeratore sfruttando alcune proprietà delle matrici gamma in d-dimensioni;
- ▶ Cambiamo variabile di integrazione;
- ▶ Utilizziamo la condizione on-shell (questo passaggio è nuovo, negli altri due casi non abbiamo sfruttato tale assunzione);
- ▶ Applichiamo la riduzione tensoriale al primo termine
- ▶ Arriviamo al risultato finale:

$$\boxed{ie\Gamma_{1\text{-loop}}^\mu(q_1, q_2) = (ie)^2 i \int dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \times \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{2\mathcal{N}^\mu}{(l^2 - \Delta + i\varepsilon)^3}} \quad (2.38)$$

dove

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^\mu &= \left\{ \frac{(d-2)^2}{d} l^2 \gamma^\mu + m^2 \gamma^\mu [4z - (d-2)(1-z)^2] \right. \\ &\quad - q^2 \gamma^\mu [2z + (d-2)xy] \\ &\quad \left. - im\sigma^{\mu\nu} q_\nu (1-z) [2z + (4-d)(1-z)] \right\} \\ \Delta &= (1-z)^2 m^2 - xy q^2 \end{aligned} \quad (2.39)$$

Osserviamo come questa risultato sia perfettamente compatibile con quello tirato ad indovinare passando per l'identità di Ward (2.32).

■ Risultato del calcolo in funzione dei fattori di forma

Possiamo riscrivere il risultato precedente in funzione dei Fattori di Forma (elettrico e magnetico) imponendo $(2.34) \stackrel{!}{=} (2.38)$, il che ci permette di trovare:

$$\boxed{\begin{aligned} F_{1,1\text{-loop}}(q^2) &= -2ie^2 \int_0^1 dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \\ &\quad \times \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{\mathcal{N}_1}{(l^2 - \Delta + i\varepsilon)^3} \\ \mathcal{N}_1 &= \left\{ \frac{(d-2)^2}{d} l^2 + m^2 [4z - (d-2)(1-z)^2] \right. \\ &\quad \left. - q^2 [2z + (d-2)xy] \right\} \end{aligned}} \quad (2.40)$$

$$\boxed{\begin{aligned} F_{2,1\text{-loop}}(q^2) &= +2ie^2 \int_0^1 dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \\ &\quad \times \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{\mathcal{N}_2}{(l^2 - \Delta + i\varepsilon)^3} \\ \mathcal{N}_2 &= 2m^2(1-z) [2z + (4-d)(1-z)] \end{aligned}} \quad (2.41)$$

Quindi, il risultato che abbiamo ottenuto è perfettamente compatibile con entrambe le strutture che abbiamo tirato ad indovinare in principio!

Inoltre, notiamo che l'unica parte divergente è $F_{1,1\text{-loop}}$ e che in particolare il termine divergente risulta essere:

$$F_{1,1\text{-loop}} \supset -2ie^2 \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{(d-2)^2}{d(l^2 - \Delta + i\varepsilon)^3} l^2$$

Esercizio 2.4.2 Calcolare $F_{1,1\text{-loop}}(q^2 = 0)$.

Soluzione (Sketch): Ancora una volta ci troviamo a voler calcolare un integrale al loop ed il procedimento è grossomodo lo stesso. Inoltre, come già visto nell'esercizio 2.3.1, anche in questo caso appare un termine divergente in infrarosso, per cui risulta necessario introdurre la massa fittizia del fotone per porre un cutoff a tale divergenza.

Al solito quindi:

- ▶ Effettuiamo una rotazione di Wick $l^0 \rightarrow i l_E^0$.
- ▶ Utilizziamo gli integrali Euclidei noti in d-dimensioni e riportiamo in $d = 4$ quelli che vediamo essere convergenti in tal limite.
- ▶ A questo punto ci troviamo a dover calcolare due integrali:
 1. Regolarizziamo l'integrale IR-divergente (che è quello in dz quando $z \rightarrow 1$) e poi integriamo sui tre parametri di Feynman grazie alla $\delta(x+y+z-1)$.
 2. Per il calcolo dell'integrale rimasto consideriamo la dimensione come variabile continua $d = 4 - 2\epsilon$, introduciamo al scala di rinormalizzazione e togliamo di mezzo la massa del fotone in quanto questo integrale non diverge nel limite $m_\gamma \rightarrow 0$.

Il risultato finale sarà quindi:

$$F_{1,1\text{-loop}}(q^2 = 0) = \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma + 4 + \log \frac{4\pi\mu^2}{m^2} + 2\log \frac{m_\gamma^2}{m^2} \right] \quad (2.42)$$

Ci accorgiamo senza troppe difficoltà di una identità piuttosto interessante confrontando la (2.27) con la (2.42):

$$F_{1,1\text{-loop}}(q^2 = 0) = \left. \frac{\partial \Sigma_{1\text{-loop}}(\not{p})}{\partial \not{p}} \right|_{\not{p}=m} \quad (2.43)$$

Chiaramente $F_{1,1\text{-loop}}$ e $\left. \frac{\partial \Sigma_{1\text{-loop}}(\not{p})}{\partial \not{p}} \right|_{\not{p}=m}$ ritorneranno.

la δ ci permette di togliere una delle variabili, ma dobbiamo ricordarci dei limiti di integrazione! Infatti

$$0 \leq y \stackrel{\delta}{=} 1 - x - z \leq 1$$

implica

$$\begin{cases} 1 - x - z \leq 1 \\ 1 - x - z \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z \geq 0 \\ x \leq 1 - z \end{cases}$$



3 Intro alla Rinormalizzazione Perturbativa^a

^a Immagine: Richard Feynman mentre tiene una lezione al CERN, 1970.

3.1 Considerazioni preliminari

Consideriamo la Lagrangiana di QED:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\cancel{D} - m)\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi \quad (3.1)$$

A primo impatto ci verrebbe da considerare “ m ” come la massa dell’elettrone ed “ e ” come la carica elettrica fondamentale. **Ma perché?**

- Per quanto riguarda la massa, abbiamo calcolato il propagatore del campo di Dirac libero e abbiamo trovato

$$\overset{\text{p}}{\bullet} \rightarrow \bullet = \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon}$$

Definizione 3.1.1 Massa di una particella stabile.

In QFT, definiamo la massa di una particella stabile come il polo del suo propagatore.

Nel caso fermionico, infatti, il polo del propagatore è proprio in $p^2 = m^2$, che sembra essere una buona definizione per la massa a riposo in relatività speciale.

- Per quanto riguarda la carica elettrica, se si calcola al tree-level l’ampiezza di scattering di un elettrone in presenza di un potenziale esterno (e.g. dovuto alla presenza di un nucleo pesante)¹, e ne si prende il limite non relativistico, ci si riconduce alla legge di Coulomb solo interpretando “ e ” come la carica elettrica.

Le considerazioni sopra sono vere per una teoria libera ed al tree-level, rispettivamente.

3.1 Considerazioni preliminari	38
3.2 Il propagatore dressed	39
Caso fermionico	39
Caso fotonico	40
3.3 Discussione formale sui residui dei poli	43
3.4 La carica elettrica	46

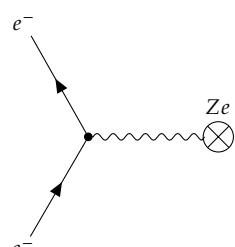


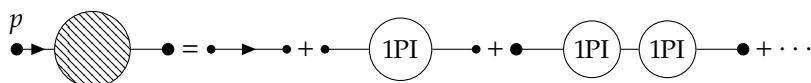
Diagramma di Feynman per lo scattering di un elettrone in presenza di un potenziale Coulombiano.

¹ si assume sia stato fatto in corsi precedenti, tuttavia questo conto verrà ripetuto nel prossimo capitolo.

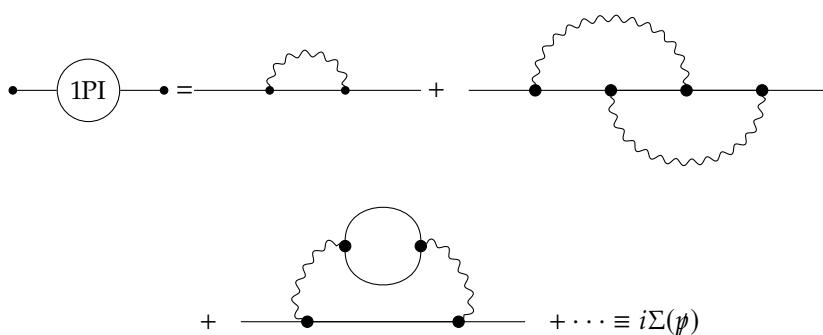
3.2 Il propagatore dressed

Caso fermionico

Partiamo considerando la massa dell'elettrone, calcolando invece del propagatore libero l'oggetto conosciuto come propagatore vestito (o "dressed"). Utilizzando un approccio diagrammatico, ci stiamo riferendo alla seguente figura:



con



Dal punto di vista matematico, sostituendo ai vari blocchi le espressioni sopra, possiamo ricondursi alla seguente forma:

$$p \bullet \xrightarrow{\text{shaded circle}} \bullet = \frac{i}{\mathfrak{p} - m + \Sigma(\mathfrak{p}) + i\varepsilon} \quad (3.2)$$

Nella teoria completamente interagente il parametro “ m ” nella Lagrangiana non è la massa fisica dell’elettrone: la presenza delle interazioni, nella forma di correzioni al loop virtuali dovute allo scambio di fotoni, sposta il polo del propagatore lontano da m .

Possiamo quindi traslare la definizione 3.1.1 in una equazione detta **Equazione del polo**, che identifica la massa dell'elettrone con la condizione che il denominatore del propagatore vestito sia pari a zero quando $\not{p} = m_{\text{phys}}$, ovvero:

$$m_{\text{phys}} - m + \Sigma(p = m_{\text{phys}}) = 0 \quad (3.3)$$

Ora possiamo provare a riscrivere il propagatore vestito alla luce di questo risultato, utilizzando l'espansione di $\Sigma(p)$ intorno a m_{phys} . Scriviamo quindi:

I passaggi sono omessi ma sono semplici, l'unica accortezza è quella di sfruttare l'identità tra operatori

$$\frac{1}{\hat{X} + \hat{Y}} = \frac{1}{\hat{X}} - \frac{1}{\hat{X}} \hat{Y} \frac{1}{\hat{X}} + \frac{1}{\hat{X}} \hat{Y} \frac{1}{\hat{X}} \hat{Y} \frac{1}{\hat{X}} - \dots$$

dove $\hat{X} = \not{p} - m + i\varepsilon$, $\hat{Y} = \Sigma(\not{p})$

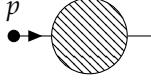
$$\begin{aligned}
\frac{i}{\not{p} - m + \Sigma(\not{p}) + i\varepsilon} &= \frac{i}{\underbrace{\not{p} - m + \Sigma(m_{\text{phys}}) + \left[\frac{d\Sigma}{d\not{p}} \Big|_{m_{\text{phys}}} (\not{p} - m_{\text{phys}}) + \dots \right]}_{\stackrel{(3.3)}{=} -m_{\text{phys}}} + i\varepsilon} \\
&= \frac{i}{(\not{p} - m_{\text{phys}}) \left[1 + \frac{d\Sigma}{d\not{p}} \Big|_{m_{\text{phys}}} + \mathcal{O}(\not{p} - m_{\text{phys}}) \right] + i\varepsilon} \\
&= \frac{iZ_2}{\not{p} - m_{\text{phys}} + i\varepsilon} + \text{Termini analitici in } \not{p} = m_{\text{phys}}
\end{aligned}$$

Dove nell'ultimo passaggio abbiamo effettuato un'espansione di Laurent introducendo il residuo

$$Z_2 = \frac{1}{1 + \frac{d\Sigma}{d\not{p}} \Big|_{m_{\text{phys}}}}$$

Ci accorgiamo quindi del fatto che la presenza delle interazioni non solo cambia la posizione del polo rispetto a quella della teoria libera, ma ne modifica anche il residuo nella posizione del polo fisico.

Riportiamo quindi una sintesi di quanto ottenuto:



$$\begin{aligned}
&\bullet \xrightarrow{p} \text{shaded circle} \bullet = \frac{iZ_2}{\not{p} - m_{\text{phys}} + i\varepsilon} + \text{Termini analitici in } \not{p} = m_{\text{phys}} \\
&\text{con } Z_2 = \frac{1}{1 + \frac{d\Sigma}{d\not{p}} \Big|_{m_{\text{phys}}}} \text{ ed } m_{\text{phys}} \text{ definita da} \\
&m_{\text{phys}} - m + \Sigma(\not{p} = m_{\text{phys}}) = 0
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Nota 3.2.1 Chiaramente, tutta questa discussione è valida solo nel momento in cui $\Sigma(\not{p})$ risulta essere una "buona funzione", ovvero una funzione che non diverge e le cui derivate non divergono.

Questo non è il nostro caso: sia $\Sigma(\not{p})$ che $d\Sigma/d\not{p}$ divergono, quindi non siamo ancora in grado di utilizzare i risultati trovati per $\Sigma(\not{p})$ nell'equazione che abbiamo appena trovato ma, d'altronde, lo scopo della discussione non è mai stato questo.

Quello che ci interessa portare a casa è che **il parametro "m" nella Lagrangiana non è la massa dell'elettrone** (nella teoria completamente interagente).

Caso fotonico

Possiamo ripetere gli stessi calcoli con il propagatore vestito del fotone:

$$\mu \xrightarrow{q} \text{shaded circle} \nu = \bullet \sim \bullet + \bullet \sim \text{1PI} \sim \bullet + \bullet \sim \text{1PI} \sim \text{1PI} \sim \bullet + \dots$$

con

$$\begin{aligned}
 \text{1PI} &= \text{loop} + \text{bubble} \\
 &= i\Pi^{\mu\nu}(q) = i(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \Pi(q^2)
 \end{aligned}$$

Riscriviamo il propagatore libero del fotone nella Gauge R_ξ :

$$\overset{\mathbf{q}}{\bullet} \sim \sim \bullet \equiv \frac{-i}{q^2 + i\varepsilon} \left[g^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{q^\mu q^\nu}{q^2 + i\varepsilon} \right] \quad (3.5)$$

Nel momento in cui si prende $\xi = 1$, si torna nella più familiare Gauge di Feynman.

Nota 3.2.2 Aggiungere termini $\propto q^\mu q^\nu$ non ha alcuna influenza sul calcolo finale delle ampiezze di scattering: Difatti questi termini porteranno sempre a contributi nulli come conseguenza dell'identità di Ward.

Nota 3.2.3 Formalmente, si può mostrare come il propagatore (3.5) si possa derivare dalla Lagrangiana di QED

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)$$

in cui ξ può essere interpretato come un moltiplicatore di Lagrange che forza la condizione $(\partial_\mu A^\mu) = 0$.

Nota 3.2.4 ■ Guardando all'ampiezza 1PI per l'auto-energia del fotone, possiamo definire il proiettore trasverso

Definizione 3.2.1 (Proiettore Trasverso)

$$P_T^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}$$

t.c. siano verificate le proprietà

- i. $q_\mu P_T^{\mu\nu} = q_\nu P_T^{\mu\nu} = 0$
- ii. $P_T^{\mu\nu} (P_T)_\nu^\rho = P_T^{\mu\rho}$

La ii., in particolare, giustifica il nome "proiettore".

in modo da riscrivere

$$i\Pi^{\mu\nu}(q^2) = iq^2 P_T^{\mu\nu} \Pi(q^2) \quad (3.6)$$

■ In luce di questo risultato, riscriviamo il propagatore del fotone libero partendo dalla (3.5), trascurando il termine $i\varepsilon$ a denominatore dentro la parentesi:

$$\overset{\mathbf{q}}{\bullet} \sim \sim \bullet \equiv \frac{-i}{q^2} \left[P_T^{\mu\nu} + \xi \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right] \quad (3.7)$$

Definizione 3.2.2 (Propagatore Longitudinale)

Definiamo propagatore longitudinale il termine:

$$P_L^{\mu\nu} \equiv \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}$$

t.c. siano verificate le proprietà:

- i. $P_L^{\mu\nu} (P_L)_\nu^\rho = P_L^{\mu\rho}$
- ii. $P_L^{\mu\nu} (P_T)_\nu^\rho = P_T^{\mu\nu} (P_L)_\nu^\rho = 0$
- iii. $P_L^{\mu\nu} + P_T^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$

Torniamo quindi al calcolo del propagatore vestito, e formalizziamone la forma diagrammatica in termini matematici, sfruttando quanto appreso dai precedenti commenti. Fermandoci al prim'ordine, troviamo:

$$\begin{aligned} \text{Diagram: } & \bullet \xrightarrow{\mu} \text{shaded circle} \xleftarrow{\nu} = \frac{(-i)}{q^2 + i \epsilon} \left[P_T^{\mu\nu} + \xi \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right] \\ & + \frac{(-i)}{q^2 + i \epsilon} \left[P_T^{\mu\rho} + \xi \frac{q^\mu q^\rho}{q^2} \right] i \cancel{q}^\sigma (P_T)_{\rho\sigma} \Pi(q^2) \frac{(-i)}{q^2 + i \epsilon} \left[P_T^{\sigma\nu} + \xi \frac{q^\sigma q^\nu}{q^2} \right] + \dots \stackrel{*}{=} \end{aligned}$$

Notiamo subito come i termini in $q^\mu q^\nu$ possano essere trascurati per via della proprietà ii. del propagatore longitudinale. Inoltre possiamo trascurare il termine $i \epsilon$ al denominatore (ad eccezione del primo denominatore incontrato), in modo da togliere di mezzo i q^2 a numeratore che appaiono dal secondo ordine in poi.

Procedendo quindi con la sostituzione dei diagrammi con i loro corrispettivi elementi matematici ed adoperando le semplificazioni evidenziate, ci ritroviamo nella condizione di poter raccogliere a fattor comune $\frac{(-i)}{q^2 + i \epsilon} P_T^{\mu\nu}$, ottenendo

$$\stackrel{*}{=} \frac{(-i)}{q^2 + i \epsilon} P_T^{\mu\nu} \underbrace{\left[1 + \Pi(q^2) + \Pi(q^2)^2 + \dots \right]}_{\text{Serie geometrica}} - \frac{i \xi q^\mu q^\nu}{q^4}$$

A questo punto, raccogliendo la serie geometrica, arriviamo alla forma finale del propagatore fotonico vestito:

$$\bullet \xrightarrow{\mu} \text{shaded circle} \xleftarrow{\nu} = \frac{(-i) P_T^{\mu\nu}}{(q^2 + i \epsilon)[1 - \Pi(q^2)]} - \frac{i \xi q^\mu q^\nu}{q^4} \quad (3.8)$$

Nota 3.2.5 Qui siamo di fronte ad una differenza concettuale importante rispetto al caso precedente visto con la (3.2): il polo della (3.8) permane nel limite $q^2 \rightarrow 0$. In altri termini **il fotone rimane massless anche nella teoria completamente interagente!**

Inoltre, è interessante notare che le correzioni al loop influiscono solo sulla parte trasversa del propagatore e non sulla parte longitudinale.

I libri in questo caso tendono a dire la magica frase "il fotone resta massless in quanto protetto dall'invarianza di Gauge". Tuttavia il professore ci tiene a sottolineare che l'invarianza di Gauge esiste in quanto il fotone è massless, e non viceversa.

Quindi anche se le correzioni al loop non modificano il polo massless del fotone, ne modificano il propagatore!

Se effettuiamo, come per l'elettrone, un'espansione di Laurent, arriviamo in definitiva alla forma:

$$\begin{aligned} \text{Diagram: } & \text{A circular loop with a diagonal hatching pattern, labeled } q^{\mu} \text{ above and } q^{\nu} \text{ below the top edge.} \\ & = \frac{(-i)g^{\mu\nu}Z_3}{(q^2 + i\varepsilon)} + \underset{\text{in } q^2=0}{\text{termini analitici}} + \underset{\propto q^{\mu}q^{\nu}}{\text{termini}} \\ Z_3 & = [1 - \Pi(q^2 = 0)]^{-1} \end{aligned} \quad (3.9)$$

3.3 Discussione formale sui residui dei poli

I residui che abbiamo introdotto, Z_1 e Z_2 ² sono piuttosto rilevanti. Risulta quindi opportuno dedicar loro del tempo, soffermandoci su alcuni commenti interessanti:

Se $Z_1, Z_2 \neq 1$, dovremmo introdurli nei diagrammi di Feynman per i campi esterni! Formalmente dovremmo quindi scrivere:

$$\begin{array}{ccc} \text{Diagram: } & = u_s(p) & = \sqrt{Z_2}u_s(p) \\ \text{Left: } & \xrightarrow[Z_2 \neq 1]{} & \\ \text{Right: } & = \bar{u}_s(p) & = \sqrt{Z_2}\bar{u}_s(p) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Diagram: } & = \epsilon_{\mu}(p) & = \sqrt{Z_3}\epsilon_{\mu}(p) \\ \text{Left: } & \xrightarrow[Z_3 \neq 1]{} & \\ \text{Right: } & = \epsilon_{\mu}^{*}(p) & = \sqrt{Z_3}\epsilon_{\mu}^{*}(p) \end{array}$$

Le motivazioni di questa modifica sono legate alla formula di riduzione LSZ.

Consideriamo il processo

$$e^-(p_1, \sigma_1)e^-(p_2, \sigma_2) \rightarrow e^-(p'_1, \sigma'_1)e^-(p'_2, \sigma'_2)$$

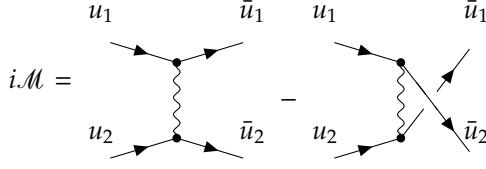
Quello a cui siamo interessati è il calcolo della parte connessa dell'ampiezza di scattering:

$$S_{fi} = \langle e^-(p'_1, \sigma'_1)e^-(p'_2, \sigma'_2) | i\mathcal{M} | e^-(p_1, \sigma_1)e^-(p_2, \sigma_2) \rangle$$

Come reminder: la formula di riduzione LSZ è un metodo per scrivere la matrice di scattering in termini di funzioni di correlazione tempo-ordinate.

² il perché di questa numerazione diventerà chiaro durante la discussione in merito ai contro-termimi.

Nel linguaggio dei diagrammi di Feynman, al tree-level:



Dove le gambe esterne sono "amputate", ossia non abbiamo propagatori ma spinori esterni. Anche questa convenzione deriva dalla formula LSZ, che per questo specifico esempio si scrive:

$$\langle e_1^- e_{2'}^- | i\mathcal{M} | e_1^- e_2^- \rangle = \lim_{\text{on-shell}} \left(\frac{-i}{\sqrt{Z}_2} \right)^4 \int d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 x'_1 d^4 x'_2 e^{i(p'_1 \cdot x'_1 + p'_2 \cdot x'_2 - p_1 \cdot x_1 - p_2 \cdot x_2)}.$$

$$\cdot \bar{u}_1 (i\vec{\partial}_{x'_1} - m_{\text{phys}}) \bar{u}_{2'} (i\vec{\partial}_{x'_2} - m_{\text{phys}}) \cdot$$

$$\cdot \langle \Omega | T [\psi(x'_1) \psi(x'_2) \bar{\psi}(x_1) \bar{\psi}(x_2)] | \Omega \rangle \cdot$$

$$\cdot (-i\vec{\partial}_{x_1} - m_{\text{phys}}) u_1 (-i\vec{\partial}_{x_2} - m_{\text{phys}}) u_2 \quad (3.10)$$

Il limite on-shell è inteso nel senso che prendiamo i quadrati dei 4-impulsi uguali a m_{phys}^2 . Inoltre, la formula è valida non perturbativamente, i.e. è esatta. In particolare, $\langle \Omega | T [\psi(x'_1) \psi(x'_2) \bar{\psi}(x_1) \bar{\psi}(x_2)] | \Omega \rangle$ è la funzione di correlazione della teoria completamente interagente, ψ e $\bar{\psi}$ non sono campi liberi.

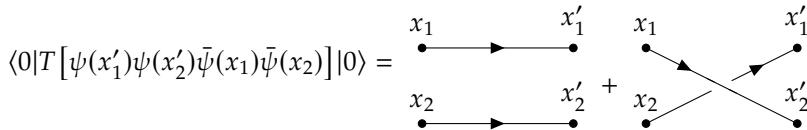
Per calcolare questo oggetto sfruttiamo quindi la teoria delle perturbazioni, riscrivendolo in termini dei campi liberi:

$$\langle \Omega | T [\psi(x'_1) \psi(x'_2) \bar{\psi}(x_1) \bar{\psi}(x_2)] | \Omega \rangle =$$

$$= \underbrace{\langle 0 | T [\psi(x'_1) \psi(x'_2) \bar{\psi}(x_1) \bar{\psi}(x_2) e^{i \int d^4 x e \bar{\psi}(x) \gamma^\mu A_\mu(x) \psi(x)}] | 0 \rangle}_{\text{Questi sono ora campi liberi.}}$$

Utilizzando il teorema di Wick, abbiamo un metodo sistematico per calcolare questo correlatore di campi liberi, espandendo l'esponenziale fino ad un certo ordine:

- All'ordine più basso abbiamo semplicemente:

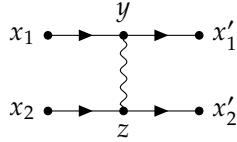


Questi sono termini disconnessi e non partecipano alla definizione di $i\mathcal{M}$.

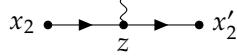
- Al prim'ordine abbiamo un numero totale di campi dispari, quindi il valore atteso sul vuoto va a zero.
- Al secondo ordine abbiamo due possibili contrazioni connesse

distinte:

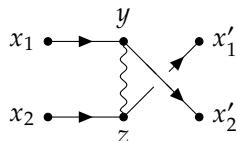
$$\frac{(ie)^2}{2} \int d^4y d^4z \langle 0 | T \left[\psi(x'_1) \psi(x'_2) \bar{\psi}(x_1) \bar{\psi}(x_2) \bar{\psi}(y) \gamma^\mu A_\mu(y) \psi(y) \bar{\psi}(z) \gamma^\mu A_\mu(z) \psi(z) \right] | 0 \rangle_{conn}$$



a cui corrisponde il diagramma



$$\frac{(ie)^2}{2} \int d^4y d^4z \langle 0 | T \left[\psi(x'_1) \psi(x'_2) \bar{\psi}(x_1) \bar{\psi}(x_2) \bar{\psi}(y) \gamma^\mu A_\mu(y) \psi(y) \bar{\psi}(z) \gamma^\mu A_\mu(z) \psi(z) \right] | 0 \rangle_{conn}$$



a cui corrisponde il diagramma



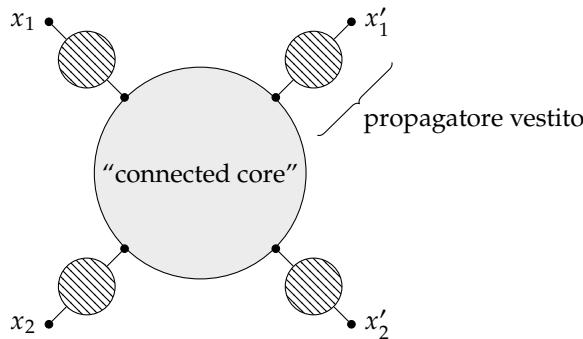
Notiamo inoltre che ci sono i propagatori sulle gambe esterne dei diagrammi.

Se adesso utilizziamo questo risultato nella formula LSZ, lavorando nello spazio dell'impulso, troviamo quanto segue:

- consideriamo il tree-level ($Z_2 = 1$, $m_{\text{phys}} = m$) e concentriamoci su una sola gamba:

$$\bullet \xrightarrow[p_1]{\quad} = \underbrace{\frac{i}{\not{p}_1 - m}}_{\text{da Wick}} \underbrace{(\not{p}_1 - m)(-i)u(p_1, \sigma_1)}_{\text{dalla gamba esterna nella LSZ}} = u(p_1, \sigma_1)$$

- consideriamo adesso la situazione oltre il tree-level. Il diagramma al tree-level sarà sostituito dalla struttura più generica:



e concentrando nuovamente su una sola gamba otteniamo:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{i}{\not{p}_1 - m + \Sigma(\not{p}_1) + i\varepsilon} \right] \frac{(-i)}{\sqrt{Z_2}} (\not{p}_1 - m_{\text{phys}}) u(p_1, \sigma_1) = \\ & = \left[\frac{iZ_2}{\not{p}_1 - m + i\varepsilon} + \underset{\not{p}_1 = m_{\text{phys}}}{\text{termini analitici}} \right] \frac{(-i)}{\sqrt{Z_2}} (\not{p}_1 - m_{\text{phys}}) u(p_1, \sigma_1) = \\ & = \sqrt{Z_2} u(p_1, \sigma_1) \end{aligned}$$

nel limite on-shell sopravvive solo il primo termine del propagatore vestito

Abbiamo quindi ritrovato il fattore $\sqrt{Z_2}$ da cui siamo partiti all'inizio e con considerazioni simili si trova il fattore $\sqrt{Z_3}$ per un fotone esterno.

Nota 3.3.1 Possiamo imparare un'altra lezione importante dalla formula LSZ supponendo di voler riscalare $\psi \rightarrow a\psi$ per un determinato numero a . Allora la funzione di correlazione verrà modificata:

$$\langle \Omega | T[\psi(x'_1)\psi(x'_2)\bar{\psi}(x_1)\bar{\psi}(x_2)] | \Omega \rangle \rightarrow \\ a^4 \langle \Omega | T[\psi(x'_1)\psi(x'_2)\bar{\psi}(x_1)\bar{\psi}(x_2)] | \Omega \rangle$$

ma anche il propagatore viene modificato:

$$\langle \Omega | T[\psi(x)\bar{\psi}(y)] | \Omega \rangle \rightarrow a^2 \langle \Omega | T[\psi(x)\bar{\psi}(y)] | \Omega \rangle$$

e in particolare da questo deduciamo che $Z_2 \rightarrow a^2 Z_2$ (i.e. $\sqrt{Z_2} \rightarrow a\sqrt{Z_2}$), in modo tale da lasciare S_{fi} invariata.

È facile accorgersene guardando la (3.10): il fattore $(1/\sqrt{Z_2})^4$ produrrà un fattore a^{-4} , che andrà a cancellare precisamente il fattore a^4 generato dalla funzione di correlazione.

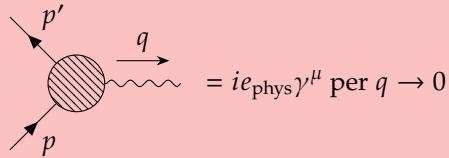
Quindi il rescaling dei campi non modifica la fisica.

3.4 La carica elettrica

Supponiamo che il parametro “ e ” della Lagrangiana di QED (3.1) non sia la carica elettrica fondamentale.

In QED definiamo la carica elettrica come segue:

Definizione 3.4.1 (Carica elettrica fondamentale in QED.)

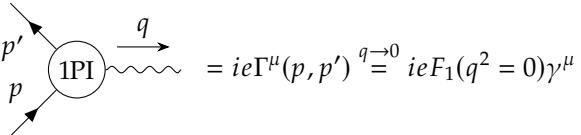


Questa definizione arriva da un'evidenza sperimentale: dal calcolo dell'ampiezza di scattering di un elettrone in presenza di un nucleo pesante a riposo, nel limite $q \rightarrow 0$ per il trasferimento di impulso, troviamo un risultato compatibile con la legge di Coulomb solo considerando il precedente vertice di interazione dove e_{phys} è identificata con la carica elettrica.

In particolare:

- ▶ Al tree-level otteniamo precisamente $e = e_{\text{phys}}$.
- ▶ Introducendo le correzioni quantistiche al loop, questo non è più vero! Abbiamo infatti visto esplicitamente nel capitolo precedente

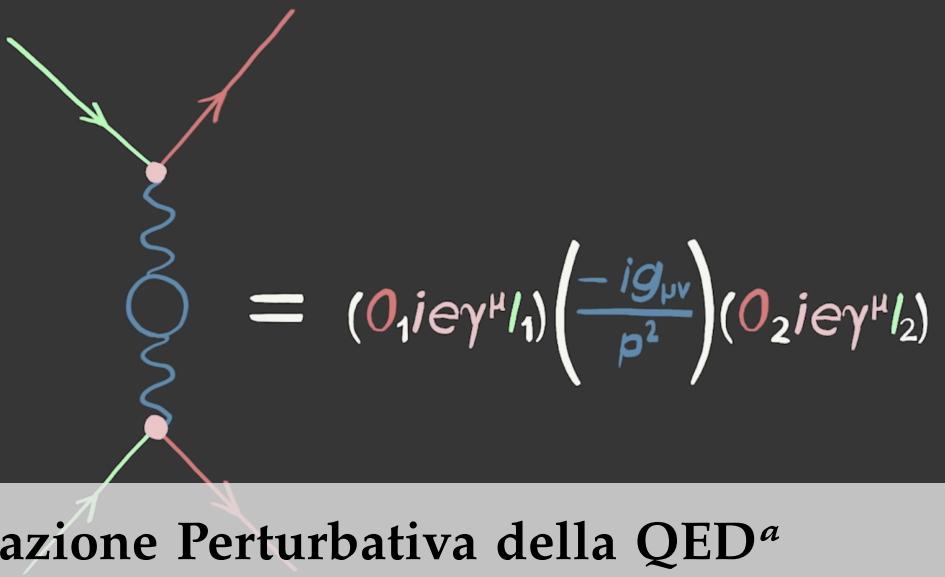
come il vertice di interazione subisca una correzione e diventi:



A Feynman diagram showing a circular loop labeled "1PI". Two external lines enter the loop from the left, one labeled p' and one labeled p . A wavy line exits the loop to the right, labeled q .

$$= ie\Gamma^\mu(p, p') \stackrel{q \rightarrow 0}{=} ieF_1(q^2 = 0)\gamma^\mu$$

Quindi, in generale, $e \neq e_{\text{phys}}$.



4 Rinormalizzazione Perturbativa della QED^a

^a Freedman Dyson e la rinormalizzazione, rappresentazione artistica da Quanta Magazine.

4.1 Lagrangiana e contro-termini

In luce di quanto discusso nel capitolo precedente riscriviamo la Lagrangiana di QED nella seguente forma:

$$\mathcal{L}_B = -\frac{1}{4}(\partial^\mu A_B^\nu - \partial^\nu A_B^\mu)^2 + \bar{\psi}_B(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_B + e_B A_B)\psi_B \quad (4.1)$$

nota come **Lagrangiana nuda** (dall'inglese "bare").

Questa non è altro che la Lagrangiana originale (3.1), l'unica differenza risiede nell'indicare esplicitamente la natura non fisica dei parametri " e " ed " m ", che prendono quindi il pedice " B " e sono detti **parametri nudi**. Inoltre abbiamo introdotto lo stesso pedice anche per i campi, d'altronde abbiamo visto nella nota 3.3.1 come il rescaling dei campi non modifichi la fisica della teoria. Adesso modifichiamo nuovamente questa scrittura passando per i seguenti step:

- 1) **Introduciamo i campi rinormalizzati**, indicati dal pedice " R ", definendo:

$$\psi_B \equiv \sqrt{Z_2} \psi_R, \quad A_B^\mu \equiv \sqrt{Z_3} A_R^\mu$$

dove $Z_{2,3}$ sono gli stessi residui dei propagatori vestiti che abbiamo già incontrato.

Come conseguenza di questa definizione, otteniamo la seguente relazione:

$$\overbrace{\bullet \rightarrow \text{shaded circle} \rightarrow \bullet}^p = \langle \Omega | T[\psi_B(x_1) \bar{\psi}_B(x_2)] | \Omega \rangle \equiv Z_2 \langle \Omega | T[\psi_R(x_1) \bar{\psi}_R(x_2)] | \Omega \rangle$$

è lo stesso oggetto che abbiamo già calcolato,
abbiamo solo rinominato la Lagrangiana

Invertendo in funzione del propagatore "rinormalizzato" otteniamo:

$$\langle \Omega | T[\psi_R(x_1) \bar{\psi}_R(x_2)] | \Omega \rangle = \frac{1}{Z_2} \langle \Omega | T[\psi_B(x_1) \bar{\psi}_B(x_2)] | \Omega \rangle$$

4.1 Lagrangiana e contro-termini	48
4.2 Regole di Feynman per i contro-termini	49
Regola per δ_3	50
Regola per δ_2 e δ_m	51
Regola per δ_1	52
4.3 Lo schema di rinormalizzazione On-Shell	52
4.4 L'auto-energia dell'elettrone	53
4.5 L'auto-energia del fotone	55
4.6 Il vertice di interazione	57
4.7 Le identità di Ward-Takahashi	58
Niente elettroni; N fotoni.	58
2 elettroni; N fotoni.	59
Implicazioni delle WTI	61

A livello concettuale, questo è un grande passo avanti. Stiamo praticamente dicendo che i parametri ed i campi nella Lagrangiana sono parametri liberi e non fissati!

Il rescaling, quindi, forza il residuo del propagatore del campo rinormalizzato ψ_R ad essere i .

La Lagrangiana diventa:

$$\mathcal{L}_B = -\frac{Z_3}{4}(\partial^\mu A_R^\nu - \partial^\nu A_R^\mu)^2 + Z_2 \bar{\psi}_R (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_B) \psi_R + e_B Z_2 \sqrt{Z_3} \bar{\psi}_R \not{A}_R \psi_R \quad (4.2)$$

- 2) **Introduciamo la rinormalizzazione di massa Z_m e di carica Z_e**
definendo:

$$m_B \equiv Z_m m_R, \quad e_B \equiv Z_e e_R$$

La Lagrangiana a questo punto diviene (tralasciando per facilità di notazione il pedice "R" nel caso dei campi):

$$\mathcal{L}_B = -\frac{Z_3}{4}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)^2 + iZ_2 \bar{\psi} \not{d} \psi - Z_2 Z_m m_R \bar{\psi} \psi + Z_1 e_R \bar{\psi} \not{A} \psi$$

dove abbiamo anche definito $Z_1 = Z_2 \sqrt{Z_3} Z_e$

- 3) **Ridefiniamo le costanti di rinormalizzazione**, ovvero Z_1, Z_2, Z_3 e Z_m nel seguente modo:

$$\begin{aligned} Z_1 &\equiv (1 + \delta_1) & Z_2 Z_m m_R &\equiv m_R + \delta_m \\ Z_2 &\equiv (1 + \delta_2) \\ Z_3 &\equiv (1 + \delta_3) \end{aligned}$$

Attenzione: non stiamo aggiungendo nuovi parametri! Stiamo ridefinendo quelli già introdotti in maniera da rendere l'approccio perturbativo più facile da sviluppare.

Sostituiamo il tutto nella Lagrangiana, e senza troppa difficoltà otteniamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_B = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i\bar{\psi} \not{d} \psi - m_R \bar{\psi} \psi + e_R \bar{\psi} \not{A} \psi \\ & - \frac{\delta_3}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i\delta_2 \bar{\psi} \not{d} \psi - \delta_m \bar{\psi} \psi + \delta_1 e_R \bar{\psi} \not{A} \psi \end{aligned}$$

In sintesi possiamo scrivere la nostra Lagrangiana nuda come somma di due Lagrangiane distinte, una detta "rinormalizzata" e una detta "dei contro-termini" (dove i **contro-termini** sono i parametri δ_i):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_B &= \mathcal{L}_R + \mathcal{L}_{ct} \\ \mathcal{L}_R &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i\bar{\psi} \not{d} \psi - m_R \bar{\psi} \psi + e_R \bar{\psi} \not{A} \psi \\ \mathcal{L}_{ct} &= -\frac{\delta_3}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i\delta_2 \bar{\psi} \not{d} \psi - \delta_m \bar{\psi} \psi + \delta_1 e_R \bar{\psi} \not{A} \psi \end{aligned} \quad (4.3)$$

Nota 4.1.1 Ancora una volta, ripetiamo che $\mathcal{L}_R + \mathcal{L}_{ct}$ è uguale alla Lagrangiana da cui siamo partiti, abbiamo solo "scritto meglio per il seguito" alcuni termini.

4.2 Regole di Feynman per i contro-termini

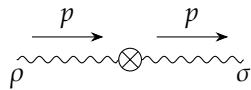
\mathcal{L}_R ha formalmente la stessa struttura di \mathcal{L}_B . L'unica differenza risiede nella presenza di campi e parametri rinormalizzati, invece dei campi e dei parametri nudi.

Come interpretiamo \mathcal{L}_{ct} ? Il modo più conveniente quello è di interpretarla come una nuova Lagrangiana di interazione. Di conseguenza, associamo ad \mathcal{L}_{ct} nuove regole di Feynman.

Regola per δ_3

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{ct} &\supset -\frac{\delta_3}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \\ &= -\frac{\delta_3}{2} (\partial_\mu A_\nu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \\ \text{integrando} &= +\frac{\delta_3}{2} A^\nu (g_{\mu\nu} \partial_\rho \partial^\rho - \partial_\mu \partial_\nu) A^\mu \\ \text{per parti} &\end{aligned}$$

Questo operatore corrisponde allo scattering “one-to-one”



quando il diagramma è relativo alla “interazione dei contro-termini”, utilizziamo il cerchio con la croce come vertice di interazione.

e la regola di Feynman corrispondente può essere calcolata come al solito dall’elemento di matrice corrispondente.

Ci sono due possibili contrazioni:

Nota: qui λ rappresenta l’elicità del fotone.

$$\begin{aligned}i\mathcal{M} &= \frac{i\delta_3}{2} \langle p, \lambda | \overline{A^\rho} (g_{\rho\sigma} \partial_\alpha \partial^\alpha - \partial_\rho \partial_\sigma) A^\sigma | p, \lambda \rangle \\ &+ \frac{i\delta_3}{2} \langle p, \lambda | \overline{A^\rho} \underbrace{(g_{\rho\sigma} \partial_\alpha \partial^\alpha - \partial_\rho \partial_\sigma)}_{A^\sigma} | p, \lambda \rangle \stackrel{*}{=} \end{aligned}$$

La contrazione $A^\sigma | p, \lambda \rangle = \sim\sim\sim\bullet = \varepsilon^\sigma(p, \lambda)$ tira fuori il tensore di polarizzazione dal campo fotonico, con il c.c. se trattiamo la contrazione con lo stato iniziale.

Il risultato dei due termini è lo stesso, l’unica parte “tricky” del calcolo è dovuta alla presenza dell’operatore di derivata agente sul campo A^σ .

Adottando la notazione

$$A^\sigma(x) = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_\lambda [a(\vec{p}, \lambda) \varepsilon^\sigma(p, \lambda) e^{-ip \cdot x} + c.c.]$$

per calcolo bruto si dimostra che

$$\begin{aligned}(g_{\rho\sigma} \partial_\alpha \partial^\alpha - \partial_\rho \partial_\sigma) A^\sigma | p, \lambda \rangle &= (-g_{\rho\sigma} p^2 + p_\rho p_\sigma) \varepsilon^\sigma(p, \lambda) \\ \langle p, \lambda | \underbrace{(g_{\rho\sigma} \partial_\alpha \partial^\alpha - \partial_\rho \partial_\sigma)}_{A^\sigma} | p, \lambda \rangle &= (-g_{\rho\sigma} p^2 + p_\rho p_\sigma) \varepsilon^{\sigma*}(p, \lambda)\end{aligned}$$

Di conseguenza, proseguendo il calcolo dell’elemento di matrice:

$$\stackrel{*}{=} \frac{i\delta_3}{2} \varepsilon^{\rho*} (-g_{\rho\sigma} p^2 + p_\rho p_\sigma) \varepsilon^\sigma + \frac{i\delta_3}{2} (-g_{\rho\sigma} p^2 + p_\rho p_\sigma) \varepsilon^{\sigma*} \varepsilon^\rho$$

Ricordando che $\varepsilon^{\rho*} \varepsilon^\sigma = \frac{1}{2} (\varepsilon^{\rho*} \varepsilon^\sigma + \varepsilon^{\sigma*} \varepsilon^\rho)$ troviamo in definitiva:

$$i\mathcal{M} = -i\delta_3 (g_{\rho\sigma} p^2 - p_\rho p_\sigma) \varepsilon^{\rho*}(p, \lambda) \varepsilon^\sigma(p, \lambda)$$

La regola che stiamo cercando sarà allora:

$$\boxed{\begin{array}{c} p \\ \mu \sim \sim \sim \otimes \sim \sim \sim \\ p \\ \nu \end{array} \equiv -i\delta_3(g_{\mu\nu}p^2 - p_\mu p_\nu)} \quad (4.4)$$

Regola per δ_2 e δ_m

$$\mathcal{L}_{ct} \supset i\delta_2 \bar{\psi} \not{d} \psi - \delta_m \bar{\psi} \psi$$

Estraiamo la regola di Feynman con lo stesso trucco di prima, considerando l'ampiezza del processo one-to-one mediato esattamente da quel termine:

$$\begin{array}{c} p \\ \longrightarrow \otimes \longrightarrow \end{array}$$

Tale ampiezza risulta essere:

$$i\mathcal{M} = \underbrace{\langle e^-(p, \sigma) |}_{\text{stato finale}} i\bar{\psi} (i\delta_2 \gamma^\mu \partial_\mu - \delta_m) \psi \underbrace{| e^-(p, \sigma) \rangle}_{\text{stato iniziale}}$$

Ricordiamo ora l'espansione del campo di Dirac libero:

$$\begin{aligned} \psi &= \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} \sum_s \left[\overbrace{a(\vec{k}, s) u(k, s) e^{-ik \cdot x}}^{\text{distrugge la particella}} + \overbrace{b^\dagger(\vec{k}, s) v(k, s) e^{ik \cdot x}}^{\text{crea l'anti-particella}} \right] \\ \bar{\psi} &= \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} \sum_s \left[\overbrace{b(\vec{k}, s) \bar{v}(k, s) e^{-ik \cdot x}}^{\text{distrugge l'anti-particella}} + \overbrace{a^\dagger(\vec{k}, s) \bar{u}(k, s) e^{ik \cdot x}}^{\text{crea la particella}} \right] \end{aligned}$$

Ne deduciamo che solo una contrazione è possibile, ovvero:

$$\langle e^-(p, \sigma) | i\bar{\psi} (i\delta_2 \gamma^\mu \partial_\mu - \delta_m) \psi | e^-(p, \sigma) \rangle$$

Tipicamente, queste contrazioni forniscono i seguenti risultati:

$$\begin{aligned} \psi | e^-(p, \sigma) \rangle &= \longrightarrow \bullet = u(p, \sigma) \\ \langle e^-(p, \sigma) | \bar{\psi} &= \bullet \longrightarrow = \bar{u}(p, \sigma) \end{aligned}$$

tuttavia noi abbiamo una derivata ∂_μ che agisce su ψ nel termine proporzionale a δ_2 .

Siccome $\partial_\mu \psi = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} \sum_s [a(\vec{k}, s) u(k, s) (-ik_\mu) e^{-ik \cdot x} + b^\dagger(\vec{k}, s) v(k, s) (ik_\mu) e^{ik \cdot x}]$
allora

$$\partial_\mu \psi | e^-(p, \sigma) \rangle = -ip_\mu u(p, \sigma)$$

In definitiva, l'ampiezza si scrive

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= i\bar{u}(p, \sigma)[i\delta_2\gamma^\mu(-ip_\mu) - \delta_m]u(p, \sigma) = \\ &= \bar{u}(p, \sigma)i(\delta_2\gamma^\mu p_\mu - \delta_m)u(p, \sigma) \end{aligned}$$

Da cui segue immediatamente la regola

$$\boxed{\overrightarrow{p} \rightarrow \otimes \rightarrow = i(\delta_2\cancel{p} - \delta_m)}$$

Regola per δ_1

δ_1 è detto contro-termine di vertice. Infatti il termine della Lagrangiana che lo contiene

$$\mathcal{L}_{ct} \supset \delta_1 e_R \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi$$

ha la stessa struttura del vertice di QED.

La regola di Feynman associata risulta quindi triviale ed è:

$$\boxed{\overrightarrow{\cancel{p}} \otimes \overleftarrow{p} = i\delta_1 e_R \gamma^\mu}$$

Nota 4.2.1 Commentiamo quanto visto fino ad ora

- 1) Non abbiamo aggiunto alcun nuovo termine alla Lagrangiana.
- 2) Abbiamo riorganizzato la Lagrangiana originale avvalendoci della libertà di riscalare i campi e del fatto che i parametri nudi non sono i parametri fisici.
- 3) La Lagrangiana rinormalizzata ha precisamente la stessa struttura di quella nuda, questo significa che se calcolassimo i loop usando \mathcal{L}_R troveremmo le stesse divergenze che abbiamo trovato utilizzando \mathcal{L}_B . La differenza chiave sta nei contributi aggiuntivi provenienti da \mathcal{L}_{ct} , che con le dovute accortezze saremo in grado di sfruttare questi contributi per eliminare le divergenze.

4.3 Lo schema di rinormalizzazione On-Shell

Consideriamo l'auto-energia dell'elettrone che abbiamo già incontrato in passato, possiamo separare quello che abbiamo già visto in due parti, la prima calcolata tramite \mathcal{L}_R , la seconda calcolata con \mathcal{L}_{ct} .

$$\begin{aligned} i\bar{\Sigma}_{1\text{-loop}}(\cancel{p}) &= \overrightarrow{\cancel{p}} \cdot \text{loop} \cdot \overrightarrow{p} + \overrightarrow{\cancel{p}} \otimes \overrightarrow{p} \\ &= i\Sigma_{1\text{-loop}}^{(R)}(\cancel{p}) + i\Sigma_{1\text{-loop}}^{(ct)}(\cancel{p}) \\ &= \left\{ \frac{(-ie_R)^2 i}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx [-2(1-\epsilon)\cancel{p}x + 2(2-\epsilon)m_R] \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \log \frac{4\pi\mu^2}{\Delta} \right] \right\} + i(\delta_2\cancel{p} - \delta_m) \\ &= \frac{ie_R^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{1}{\epsilon}\cancel{p} - \frac{4}{\epsilon} + \text{termini finiti} \right) + i(\delta_2\cancel{p} - \delta_m) \end{aligned}$$

Sebbene sia lo stesso oggetto trattato in precedenza, modifichiamo leggermente la notazione, introducendo una barra al di sopra dell'ampiezza, per rendere esplicita la procedura che stiamo attuando.

dove nell'ultimo passaggio ci stiamo concentrando solo sulla parte divergente nel limite $\epsilon \rightarrow 0$ che ricordiamo essere equivalente alla scelta $d = 4$.

Notiamo come la struttura generata dai contro-termini rispecchi quella delle divergenze. **Ci viene quindi naturale scegliere i contro termini in modo tale da eliminare i termini divergenti!** Tuttavia ci sono alcuni appunti da fare, in quanto potrebbe sorgere una certa ambiguità nella loro definizione.

Infatti, se prendiamo

$$\delta_2 = -\frac{e_R^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} + C_2 , \quad \delta_m = -\frac{4e_R^2}{(4\pi)^2} \frac{m_R}{\epsilon} + C_m$$

ci accorgiamo che C_2 e C_m sono arbitrari, se ci interessa cancellare solo le divergenze UV la scelta dei contro-termini non è unica.

In altre parole, per fissare le parti finite dei contro-termini dobbiamo impostare delle condizioni.

Definizione 4.3.1 (Schema di Sottrazione e Condizioni di Rinormalizzazione.)

Si definisce schema di sottrazione ogni procedimento effettuato per scegliere le parti finite dei contro-termini.

Uno schema di sottrazione è specificato da un set di condizioni note come condizioni di rinormalizzazione.

Ci sono diversi schemi di sottrazione, una scelta particolarmente comoda dal punto di vista fisico risulta essere il cosiddetto schema di rinormalizzazione On-Shell (**OS**).

Nello schema OS le condizioni di rinormalizzazione sono scelte in modo tale che i parametri rinormalizzati siano uguali ai corrispondenti parametri fisici ovvero, nel caso della QED, in modo tale che:

$$m_R = m_{\text{phys}} , \quad e_R = e_{\text{phys}} \quad (4.5)$$

4.4 L'auto-energia dell'elettrone

- Richiamiamo l'equazione del polo (3.3):

$$m_{\text{phys}} - m_R + \Sigma(\not{p} = m_{\text{phys}}) = 0$$

Se imponiamo $m_R = m_{\text{phys}}$, otteniamo la prima condizione di rinormalizzazione:

$$\Sigma(\not{p} = m_{\text{phys}}) = 0 \quad (4.6)$$

- Ricordando il residuo del propagatore vestito fermionico in posizione del polo

$$Z_2 = \left[1 + \frac{d\Sigma(\not{p})}{d\not{p}} \Big|_{m_{\text{phys}}} \right]^{-1}$$

Siccome abbiamo definito il campo rinormalizzato in modo tale che il residuo del suo propagatore sia i , per consistenza troviamo

la seconda condizione di rinormalizzazione:

$$\boxed{\left. \frac{d\Sigma(\not{p})}{d\not{p}} \right|_{m_{\text{phys}}} = 0} \quad (4.7)$$

Possiamo quindi imporre le due condizioni di rinormalizzazione dello schema on-shell nel calcolo esplicito di $\Sigma_{\text{1-loop}}$ che abbiamo iniziato nella sezione precedente. Partiamo scrivendo il punto in cui eravamo arrivati:

$$\bar{\Sigma}_{\text{1-loop}}(\not{p}) = \Sigma_{\text{1-loop}}^{(R)}(\not{p}) + \delta_2 \not{p} - \delta_m \quad (4.8)$$

Derivando rispetto a \not{p} ed imponendo la (4.7) troviamo:

$$\boxed{\delta_2 = -\left. \frac{d\Sigma_{\text{1-loop}}^{(R)}}{d\not{p}} \right|_{m_{\text{phys}}}} \quad (4.9)$$

Imponendo invece la (4.6) otteniamo $\Sigma_{\text{1-loop}}^{(R)}(m_{\text{phys}}) + \delta_2 m_{\text{phys}} = \delta_m$ e sfruttando la (4.9):

$$\boxed{\delta_m = \Sigma_{\text{1-loop}}^{(R)}(m_{\text{phys}}) - \left. \frac{d\Sigma_{\text{1-loop}}^{(R)}}{d\not{p}} \right|_{m_{\text{phys}}} m_{\text{phys}}} \quad (4.10)$$

Possiamo andare anche oltre, in quanto conosciamo l'espressione di $\left. \frac{d\Sigma_{\text{1-loop}}^{(R)}}{d\not{p}} \right|_m$, risultato dell'esercizio 2.3.1, scrivendo:

$$\delta_2 = -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma + 4 + \log \frac{4\pi\mu^2}{m_R^2} + 2\log \frac{m_\gamma}{m_R^2} \right] \quad (4.11)$$

E qui viene il bello: come conseguenza delle condizioni di rinormalizzazione di cui sopra, **le divergenze ultraviolette in $\Sigma(\not{p})$ si cancellano!**

Verifica della cancellazione delle divergenze UV. Partiamo dalla (4.8) e sostituiamo la (4.9) e la (4.10), imponendo la scelta alla base dello schema on-shell, $m_R = m_{\text{phys}}$:

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma}_{\text{1-loop}}(\not{p}) &= \Sigma_{\text{1-loop}}^{(R)}(\not{p}) - \left. \frac{d\Sigma_{\text{1-loop}}^{(R)}}{d\not{p}} \right|_{m_R} \not{p} + \left. \frac{d\Sigma_{\text{1-loop}}^{(R)}}{d\not{p}} \right|_{m_R} m_R - \Sigma_{\text{1-loop}}^{(R)}(m_R) \\ &= \Sigma_{\text{1-loop}}^{(R)}(\not{p}) - \left[\Sigma_{\text{1-loop}}^{(R)}(m_R) + \left. \frac{d\Sigma_{\text{1-loop}}^{(R)}}{d\not{p}} \right|_{m_R} (\not{p} - m_R) \right] \end{aligned}$$

È piuttosto evidente il fatto che i termini tra parentesi quadri non siano altro se non l'espansione in serie di $\Sigma_{\text{1-loop}}^{(R)}(\not{p})$, intorno a $\not{p} = m_R$, fino al primo ordine.

Se quindi espandiamo $\Sigma_{\text{1-loop}}^{(R)}(\not{p})$ intorno ad m_R , i primi due termini dell'espansione saranno perfettamente cancellati dai contro-termini, e sappiamo bene che solo i primi due termini sono realmente divergenti, mentre

dal secondo ordine in poi l'auto-energia dell'elettrone comincia a convergere¹. Di conseguenza restano solo i termini finiti dell'espansione a contribuire a $\bar{\Sigma}_{\text{1-loop}}(\not{p})$ e tale ampiezza risulta *UV-finite*.

Inoltre è anche scritta in termini di m_R ed e_R , che adesso sono parametri fisici!

□

Nota 4.4.1 Questo verifica può essere fatta anche in maniera esplicita ma, anche intuitivamente, si può osservare il fatto che i termini che vengono cancellati sono quelli che coinvolgono il fattore $[1/\epsilon - \gamma + \log 4\pi\mu^2]$. Quello che si deduce è che $\bar{\Sigma}_{\text{1-loop}}(\not{p})$, oltre ad essere *UV-finite*, è anche indipendente dalla scala rinormalizzazione μ , che è un'ottima notizia!

Un oggetto che abbia un senso fisico, come $\bar{\Sigma}$, non può dipendere da un qualcosa che è totalmente arbitrario, i.e. la scala di rinormalizzazione.

Nota 4.4.2 Il punto focale di quanto appena visto è il seguente: le divergenze ultraviolette che emergono durante il calcolo delle osservabili appaiono per colpa di un errore concettuale, ovvero l'insistenza del voler continuare a considerare m ed e come parametri fisici anche oltre il tree-level (ordine al quale tale considerazione è accettabile).

Assumendo invece tali parametri come parametri liberi avviene la magia: abbiamo la libertà di riparametrizzare la Lagrangiana introducendo i contro-termini, i quali con le opportune condizioni sono in grado di togliere di mezzo i contributi divergenti, permettendoci di ottenere oggetti espressi in termini dei parametri rinormalizzati, che possono ora essere considerati coincidenti con quelli fisici^a.

Questa procedura va tuttavia fatta ordine per ordine in teoria delle perturbazioni, i.e. se si va oltre un loop bisogna riparametrizzare i contro-termini per cancellare le nuove divergenze.

^a almeno per quanto riguarda lo schema on-shell

4.5 L'auto-energia del fotone

Consideriamo ora l'auto-energia del fotone.

Abbiamo precedentemente osservato che il residuo in posizione del polo sia dato da

$$Z_3 = \left[1 - \Pi(q^2 = 0) \right]^{-1}$$

Tuttavia, ora stiamo utilizzando campi rinormalizzati che, per costruzione, richiedono che tale residuo sia pari ad 1 ("in unità di $-i$ " nel caso del fotone).

Per consistenza, otteniamo quindi la seguente condizione, che rappresenta la terza condizione di rinormalizzazione per lo schema on-shell:

$$\boxed{\Pi(q^2 = 0) = 0} \quad (4.12)$$

¹ per le ragioni trattate quando abbiamo visto il grado di divergenza superficiale

Come abbiamo fatto per l'auto-energia dell'elettrone, riscriviamo adesso l'ampiezza dell'auto-energia del fotone, separandola in due parti: una derivante dalla Lagrangiana rinormalizzata e una dalla Lagrangiana dei contro-termini. Otteniamo:

$$\begin{aligned} i\Pi_{\text{1-loop}}^{\mu\nu}(q) &= \underbrace{(g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu)}_{\text{da } \mathcal{L}_R} i\Pi_{\text{1-loop}}^{(R)}(q^2) \underbrace{-i\delta_3(g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu)}_{\text{da } \mathcal{L}_{ct}} \\ &= i(g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu) \left[\Pi_{\text{1-loop}}^{(R)}(q^2) - \delta_3 \right] \end{aligned} \quad (4.13)$$

Da cui, per confronto con la (2.23):

$$\Pi_{\text{1-loop}}(q^2) = \Pi_{\text{1-loop}}^{(R)}(q^2) - \delta_3 \quad (4.14)$$

Siccome per la condizione (4.12) questa espressione deve essere nulla in $q^2 = 0$, possiamo fissare δ_3 !

$$\boxed{\delta_3 = \Pi_{\text{1-loop}}^{(R)}(q^2 = 0)} \quad (4.15)$$

Anche in questo caso possiamo scrivere l'espressione esplicita di δ_3 , in quanto conosciamo la forma di $\Pi_{\text{1-loop}}(q^2)$, riportata nella (2.23). Nel caso rinormalizzato si tratta di sostituire $e = e_R$ ed $m = m_R$, e imponendo $q^2 = 0$ il denominatore del logaritmo diviene $\Delta = m_R^2$, perdendo la dipendenza da x (il parametro di Feynman). Ciò ci consente quindi di integrare in dx , sfruttando il fatto che $\int_0^1 dx x(1-x) = \frac{1}{6}$ ed il gioco è fatto!

Alla fine dei conti si ottiene quindi:

$$\delta_3 = \frac{-4e_R^2}{3(4\pi)^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \log \frac{4\pi\mu^2}{m_R^2} \right) \quad (4.16)$$

Verifica della cancellazione delle divergenze UV. Ridefiniamo la parte scalare dell'ampiezza dell'auto-energia del fotone adottando la notazione con la barra sovrapposta, nuovamente ad identificare la cancellazione della divergenza ultravioletta:

$$\overline{\Pi}_{\text{1-loop}}(q^2) = \Pi_{\text{1-loop}}^{(R)}(q^2) - \underbrace{\Pi_{\text{1-loop}}^{(R)}(q^2 = 0)}_{\delta_3}$$

Sappiamo infatti che l'unica parte divergente di $\Pi_{\text{1-loop}}^{(R)}(q^2)$ è $\Pi_{\text{1-loop}}^{(R)}(q^2 = 0)$, che viene perfettamente cancellata.

Effettuiamo il calcolo esplicito, riscrivendo $\Pi_{\text{1-loop}}^{(R)}(q^2)$ come segue:

$$\begin{aligned}\Pi_{\text{1-loop}}^{(R)}(q^2) &= \frac{-8e_R^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx x(1-x) \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi\mu^2 - \log(m_R^2 - x(1-x)q^2) \right] \\ &= \underbrace{\frac{-8e_R^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{6} \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi\mu^2 \right]}_{\delta_3} + \frac{8e_R^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx x(1-x) \log(m_R^2 - x(1-x)q^2)\end{aligned}$$

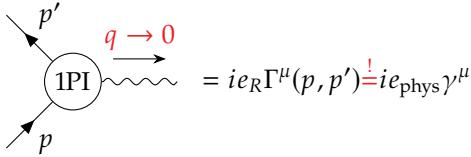
$\delta_3 - \frac{-8e_R^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{6} \log m_R^2$

di conseguenza, troviamo piuttosto facilmente

$$\overline{\Pi}_{\text{1-loop}}(q^2) = \frac{8e_R^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx x(1-x) \log \frac{m_R^2 - x(1-x)q^2}{m_R^2} \quad (4.17)$$

Che è chiaramente *UV-finite* ed indipendente dalla scala di rinormalizzazione μ , il che è un bene per quanto detto nella nota 4.4.1. \square

4.6 Il vertice di interazione



Identificando $e_R = e_{\text{phys}}$, stiamo imponendo la condizione

$$\Gamma^\mu(p, p') = \gamma^\mu$$

Ricordando poi la scrittura di Γ^μ in termini dei fattori di forma, che nel limite $q \rightarrow 0$ si scrive $\Gamma^\mu(q_1, q_2) \rightarrow F_1(q^2 = 0) \gamma^\mu$, troviamo la quarta condizione di rinormalizzazione per lo schema on-shell:

$$\boxed{F_1(q^2 = 0) = 1} \quad (4.18)$$

Andando nuovamente di calcolo esplicito, possiamo separare i contributi delle Lagrangiane, come al solito, ottenendo:

$$\Gamma^\mu(p, p') = \left[F_1(q^2) \gamma^\mu + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m_R} F_2(q^2) \right] + \delta_1 \gamma^\mu$$

con $F_1(q^2) = 1 + F_{1,1\text{-loop}}^{(R)}(q^2)$.

Di conseguenza nel limite $q \rightarrow 0$:

$$\Gamma^\mu(p, p') \stackrel{q \rightarrow 0}{=} \cancel{\gamma^\mu} + F_{1,1\text{-loop}}^{(R)}(q^2 = 0) \gamma^\mu + \delta_1 \gamma^\mu \stackrel{!}{=} \cancel{\gamma^\mu}$$

Possiamo quindi fissare anche l'ultimo contro-termine:

$$\boxed{\delta_1 = -F_{1,1\text{-loop}}^{(R)}(q^2 = 0)} \quad (4.19)$$

Ancora una volta possiamo scrivere in maniera esplicita il contro-termine, ricordando il risultato dell'esercizio 2.4.2:

$$\delta_1 = \frac{-e_R^2}{(4\pi)^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma + 4 - \log \frac{4\pi\mu^2}{m_R^2} + 2 \log \frac{m_\gamma^2}{m_R^2} \right] \quad (4.20)$$

che per inciso ci dice anche che

$$F_{1,1\text{-loop}}(q^2 = 0) = \frac{\partial \Sigma}{\partial p} \Big|_{p=m}$$

Se confrontiamo questo risultato con l'espressione esplicita di δ_2 (4.11) ci accorgiamo immediatamente di una cosa sorprendente:

$$\boxed{\delta_1 = \delta_2 \Rightarrow Z_1 = Z_2}$$

Verifica della cancellazione delle divergenze UV. Definiamo

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}^\mu(q_1, q_2) &\equiv \left\{ \left[1 + F_{1,1\text{-loop}}^{(R)}(q^2) \right] \gamma^\mu + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m_R} F_2(q^2) \right\} \underbrace{- F_{1,1\text{-loop}}^{(R)}(q^2 = 0) \gamma^\mu}_{\delta_1} \\ &= \left\{ 1 + \left[F_{1,1\text{-loop}}^{(R)}(q^2) - F_{1,1\text{-loop}}^{(R)}(q^2 = 0) \right] \right\} \gamma^\mu + \underbrace{\frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m_R} F_2(q^2)}_{UV\text{-finite}} \end{aligned}$$

Se espandiamo attorno a $q^2 = 0$ il primo termine fra parentesi quadre, otteniamo:

$$\cancel{F_{1,1\text{-loop}}^{(R)}(q^2 = 0)} + \frac{\partial F_{1,1\text{-loop}}^{(R)}}{\partial q^2} \Big|_{q^2=0} q^2 + \dots - \cancel{F_{1,1\text{-loop}}^{(R)}(q^2 = 0)}$$

i.e. l'unica parte divergente viene cancellata.

In definitiva anche $\bar{\Gamma}^\mu(q_1, q_2)$ è *UV-finite* e non dipende dalla scala di rinormalizzazione μ ! \square

4.7 Le identità di Ward-Takahashi

Dal punto di vista fisico, le identità di Ward-Takahashi sono diretta conseguenza dal fatto che i fotoni si accoppiano ad una corrente conservata.

Niente elettroni; N fotoni.

Teorema 4.7.1 Consideriamo un diagramma del tipo a margine e denominiamolo $iV_N^{\mu_1, \dots, \mu_N}(k_1, \dots, k_N)$. Allora

$$\boxed{(k_i)_{\mu_i} V_N^{\mu_1, \dots, \mu_i, \dots, \mu_N}(k_1, \dots, k_N) = 0} \quad (4.21)$$

I fotoni possono essere anche off-shell, i.e. non è necessario che valga $k_i^2 = 0$.

Inoltre la (4.21) vale ad ogni ordine in teoria delle perturbazioni.



Diagramma ad N fotoni a cui fa riferimento la (4.21).

2 elettroni; N fotoni.

Teorema 4.7.2 Consideriamo un diagramma come quello a lato e denominiamolo

$$S_N^{\mu_1, \dots, \mu_N}(p_2, p_1 : k_1, \dots, k_N) \equiv S_N^{1, \dots, N}(p_2, p_1)$$

Allora $\forall i$

$$(k_i)_{\mu_i} S_N^{1, \dots, N}(p_2, p_1) = e S_{N-1}^{1, \dots, \cancel{1}, \dots, N}(p_2, p_1 + k_i) - e S_{N-1}^{1, \dots, \cancel{1}, \dots, N}(p_2 - k_i, p_1) \quad (4.22)$$

Includiamo i propagatori sulle linee fermioniche, mentre non lo facciamo su quelle fotoniche, che di fatto sono amputate.

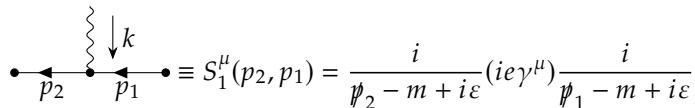
Gli impulsi dei fotoni sono entranti, ergo abbiamo

$$p_1 + k_1 + \dots + k_n = p_2 \Rightarrow [p_2 - p_1 = k_1 + \dots + k_n]$$

Dimostrazione diagrammatica della (4.22). Lavoriamo all'ordine più basso in teoria delle perturbazioni.

- Dimostriamo che la (4.22) è vera al tree-level.

Consideriamo il caso con $N=1$



$$\bullet \xleftarrow[p_2]{} \bullet \xleftarrow[p_1]{} \bullet \equiv S_1^\mu(p_2, p_1) = \frac{i}{\not{p}_2 - m + i\varepsilon} (ie\gamma^\mu) \frac{i}{\not{p}_1 - m + i\varepsilon}$$

Adesso contraiamo l'indice μ con l'impulso dell'unico fotone esterno, per cui ricordiamo valere la relazione $k = p_2 - p_1$

$$\begin{aligned} k_\mu S_1^\mu(p_2, p_1) &= (-ie) \frac{1}{\not{p}_2 - m + i\varepsilon} \not{k} \frac{1}{\not{p}_1 - m + i\varepsilon} \\ &= (-ie) \frac{1}{\not{p}_2 - m + i\varepsilon} (\not{p}_2 - \not{p}_1 + m - m) \frac{1}{\not{p}_1 - m + i\varepsilon} \\ &= (-ie) \frac{1}{\not{p}_2 - m + i\varepsilon} [(\not{p}_2 - m) - (\not{p}_1 - m)] \frac{1}{\not{p}_1 - m + i\varepsilon} \stackrel{*}{=} \end{aligned}$$

A questo punto svolgiamo i prodotti, trascurando quando necessario il fattore $i\varepsilon$ a denominatore per semplificare il numeratore.

$$\begin{aligned} &\stackrel{*}{=} -e \frac{i}{\not{p}_1 - m + i\varepsilon} + e \frac{i}{\not{p}_2 - m + i\varepsilon} \\ &= -e S_0(p_1, p_1) + e S_0(p_2, p_2) \end{aligned}$$

In definitiva:

$$[k_\mu S_1^\mu(p_2, p_1) = e S_0(p_2, p_1 + k) - e S_0(p_2 - k, p_1)]$$

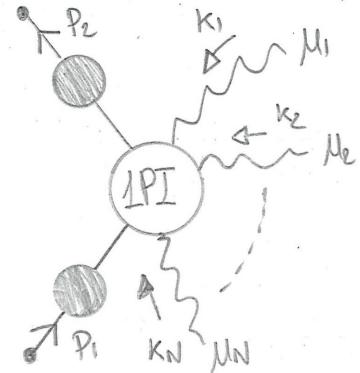
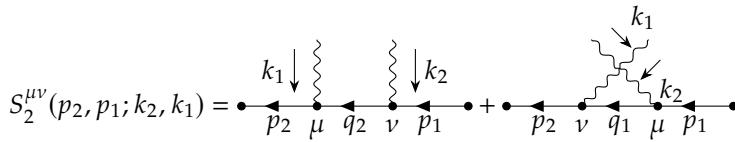


Diagramma con 2 elettroni ed N fotoni a cui fa riferimento la (4.22).

- Ragionando allo stesso modo per il caso con $N=2$, che coinvolge i diagrammi seguenti (con $q_2 = p_2 - k_1$ e $q_1 = p_1 + k_1$)



da cui segue

$$\begin{aligned} S_2^{\mu\nu}(p_2, p_1; k_2, k_1) &= \frac{i}{p_2 - m}(ie\gamma^\mu) \frac{i}{p_2 - k_1 - m}(ie\gamma^\nu) \frac{i}{p_1 - m} \\ &+ \frac{i}{p_2 - m}(ie\gamma^\nu) \frac{i}{p_1 + k_1 - m}(ie\gamma^\mu) \frac{i}{p_1 - m} \end{aligned}$$

e calcolando la contrazione $(k_1)_\mu S_2^{\mu\nu}(p_2, p_1; k_2, k_1)$ con più o meno le stesse tecniche di prima [conti svolti lezione 12, pag.44÷45], si arriva al risultato:

$$(k_1)_\mu S_2^{\mu\nu}(p_2, p_1; k_2, k_1) = eS_1^\nu(p_2, p_1 + k_1; k_2) - eS_1^\nu(p_2 - k_1, p_1; k_2)$$

Per induzione matematica segue il risultato generale. \square

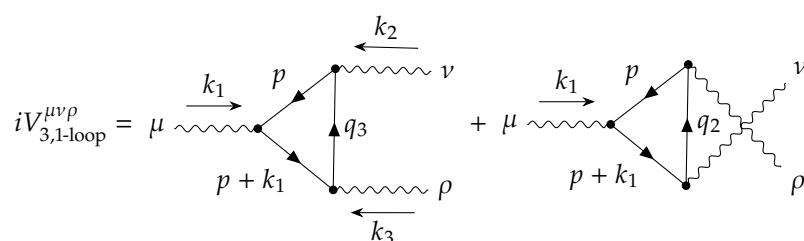
Torniamo adesso al caso precedente.

Dimostrazione diagrammatica della (4.21). Lavoriamo ad un loop e consideriamo il diagramma con N fotoni a lato e tutte le sue permutazioni e chiamiamolo $iV_{N,1\text{-loop}}^{1,\dots,N}$.

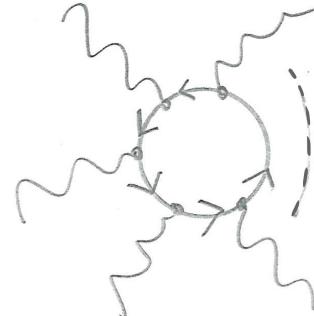
Il calcolo di questo loop coinvolge una traccia e dobbiamo sommare su tutte le permutazioni. Inoltre si dimostra che con N fotoni, il numero di contrazioni non equivalenti è pari a $(N - 1)!$

Va notato come ogni contributo proveniente da una permutazione coinvolge una traccia, quindi usando la ciclicità sarà sempre possibile tenere un determinato fotone (e quindici il suo relativo contributo al vertice) all'inizio.

Consideriamo il caso specifico con $N = 3$. Dobbiamo considerare i seguenti diagrammi, dove utilizziamo $q_3 = p + k_1 + k_3$ e $q_2 = p + k_1 + k_2$:



A questo punto non è difficile accorgersi del fatto che il calcolo di questi diagrammi riproduce all'interno della traccia la stessa struttura di $S_2^{\nu\rho}(p, p + k_1)$, moltiplicata a sinistra per $ie\gamma^\mu$.

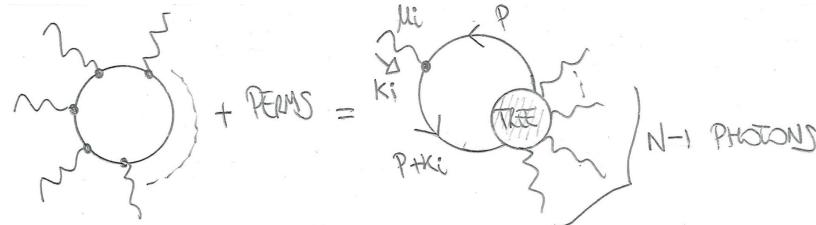


Osserviamo che il diagramma con i fotoni scambiati è equivalente a quello con i fermioni che vanno in direzione opposta nel loop

In sostanza stiamo dicendo che

$$iV_{3,1\text{-loop}}^{\mu\nu\rho} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (-1) \text{Tr}\{(ie\gamma^\mu)S_2^{\nu\rho}(p, p+k_1)\}$$

Quanto appena visto è vero in generale e possiamo scrivere diagrammaticamente:



che corrisponde all'equazione:

$$iV_{N,1\text{-loop}}^{1,\dots,N} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (-1) \text{Tr}\{(ie\gamma^{\mu_i})(k_j)_{\mu_j} S_{N-1}^{1,\dots,\cancel{i},\dots,N}(p, p+k_i)\} \quad (4.23)$$

Contraiamo ora con un certo k_j e troviamo:

$$(k_j)_{\mu_j} iV_{N,1\text{-loop}}^{1,\dots,N} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (-1) \text{Tr}\{(ie\gamma^{\mu_i})(k_j)_{\mu_j} S_{N-1}^{1,\dots,\cancel{i},\dots,N}(p, p+k_i)\}$$

A questo punto utilizziamo l'identità (4.22)

$$\begin{aligned} (k_j)_{\mu_j} iV_{N,1\text{-loop}}^{1,\dots,N} &= - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr}\{(ie\gamma^{\mu_i})(k_j)_{\mu_j} e S_{N-2}^{1,\dots,\cancel{i},\dots,\cancel{i},\dots,N}(p, p+k_i+k_j)\} \\ &\quad + \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr}\{(ie\gamma^{\mu_i})(k_j)_{\mu_j} e S_{N-2}^{1,\dots,\cancel{i},\dots,\cancel{i},\dots,N}(p-k_j, p+k_i)\} \end{aligned}$$

Cambiamo variabile di integrazione prendendo $p = p + k_j$ (e quindi $p + k_i = p + k_j + k_i$) ed il gioco è fatto: i due termini sono uguali a meno del segno ed abbiamo verificato che

$$(k_j)_{\mu_j} iV_{N,1\text{-loop}}^{1,\dots,N} = 0$$

□

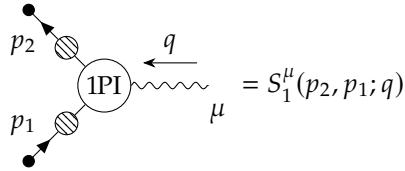
Nota 4.7.1 Queste identità, giustificate diagrammaticamente all'ordine minore, sono valide in maniera non perturbativa, i.e. sono esatte.

Implicazioni delle WTI

$$Z_1 = Z_2$$

Consideriamo il vertice di interazione in cui includiamo i propagatori vestiti fermionici e lavoriamo con la Lagrangiana nuda. Con la notazione che abbiamo introdotto prima possiamo denominarlo nel modo

segue:



Allo stesso tempo possiamo rinominare anche il propagatore vestito fermionario, uniformandoci alla notazione, che quindi diventa:

$$\bullet \xrightarrow{p} \text{shaded circle} \xleftarrow{\mu} \bullet = \frac{i}{\not{p} - m_B + \Sigma(\not{p}) + i\epsilon} \equiv S_0(p)$$

Di conseguenza il diagramma del vertice di interazione può essere scritto come segue:

$$S_1^\mu(p_2, p_1; q) = S_0(p_2) [ie_B \Gamma^\mu(p_1, p_2)] S_0(p_1) \quad (4.24)$$

A questo punto contraiamo con q_μ applicando la (4.22) al LHS della (4.24):

$$\begin{aligned} q_\mu S_1^\mu(p_2, p_1; q) &= ie_B S_0(p_2) q_\mu \Gamma^\mu(p_1, p_2) S_0(p_1) \\ &= e_B S_0(p_2) - e_B S_0(p_1) \end{aligned}$$

Adesso lavoriamo sulla seconda uguaglianza, possiamo semplificare la carica e risolvere per $i q_\mu \Gamma^\mu$, per poi sostituire l'espressione esplicita del propagatore vestito (inverso), trovando:

$$\begin{aligned} iq_\mu \Gamma^\mu(p_2, p_1) &= S_0(p_1)^{-1} - S_0(p_2)^{-1} \\ &= (-i)[\not{p}_1 - m_B + \Sigma(\not{p}_1)] + i[\not{p}_2 - m_B + \Sigma(\not{p}_2)] \\ &= i[\not{p}_2 - \cancel{m_B} + \Sigma(\not{p}_2) - \not{p}_1 + \cancel{m_B} - \Sigma(\not{p}_1)] \end{aligned}$$

Otteniamo quindi quello che rappresenta l'identità di Ward-Takahashi per il fotone entrante:

$$q_\mu \Gamma^\mu(p_2, p_1) = \overbrace{\not{p}_2 - \not{p}_1}^q + \Sigma(\not{p}_2) - \Sigma(\not{p}_1) \quad (4.25)$$

ora prendiamone il limite per $q \rightarrow 0 \Rightarrow p_2 = p_1$ ed espandiamo $\Sigma(\not{p}_2)$ nell'intorno $\not{p}_2 = \not{p}_1$, considerando inoltre i fermioni on-shell ($p_2^2 = p_1^2 = m_{\text{phys}}^2$):

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow 0} q_\mu \Gamma^\mu(p_2, p_1) &= q + \cancel{\Sigma(\not{p}_1)} + \frac{d\Sigma(\not{p})}{d\not{p}} \Big|_{\not{p}_1} (\not{p}_2 - \not{p}_1) - \cancel{\Sigma(\not{p}_1)} \\ &= \underbrace{\left[1 + \frac{d\Sigma(\not{p})}{d\not{p}} \Big|_{m_{\text{phys}}} \right]}_{=Z_2^{-1}} q = \frac{\gamma^\mu q_\mu}{Z_2} \end{aligned}$$

Applicando l'identità di W-T, scompare la dipendenza da p_1 e p_2 , rispettivamente, nei due termini in cui separiamo S_1^μ .

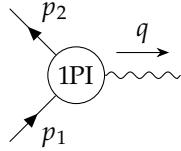
Questo è conseguenza della conservazione dell'impulso: infatti che $q = p_2 - p_1$ per costruzione, e per la (4.22) ad RHS abbiamo le dipendenze $p_1 + q = p_2$ e $p_2 - q = p_1$, rispettivamente, nei due termini, che quindi sono ripetute.

In definitiva troviamo:

$$\boxed{\Gamma^\mu(\text{on-shell } p_1 = p_2) = \frac{\gamma^\mu}{Z_2}} \quad (4.26)$$

Consideriamo ora la definizione di carica elettrica (3.4.1), lavorando sempre nella teoria nuda.

Vogliamo quindi valutare l'ampiezza del processo:



che può essere scritta, utilizzando i formalismi introdotti in sezione 3.3:

$$i\mathcal{M} = \bar{u}(p_2) Z_2 i e_B \Gamma^\mu(p_1, p_2) u(p_1) \sqrt{Z_3} \varepsilon_\mu^*(q)$$

Nel limite di $q \rightarrow 0$ possiamo applicare la definizione di carica elettrica al diagramma, ottenendo la seguente uguaglianza

$$\bar{u}(p_2) Z_2 i e_B \Gamma^\mu(p_1, p_2) u(p_1) \sqrt{Z_3} \varepsilon_\mu^*(q) \xrightarrow{q \rightarrow 0} \bar{u}(p_2) i e_{\text{phys}} \gamma^\mu u(p_1) \varepsilon_\mu^*(q)$$

da cui segue che

$$e_{\text{phys}} \gamma^\mu = \underbrace{e_B \Gamma^\mu(p_1, p_2) Z_2 \sqrt{Z_3}}_{\stackrel{4.26}{=} \gamma^\mu}$$

Abbiamo quindi trovato quella che viene definita (**Universalità del coupling rinormalizzato di QED**):

$$\boxed{e_{\text{phys}} = \sqrt{Z_3} e_B} \quad (4.27)$$

Ora ricordiamo la relazione tra carica nuda e rinormalizzata:

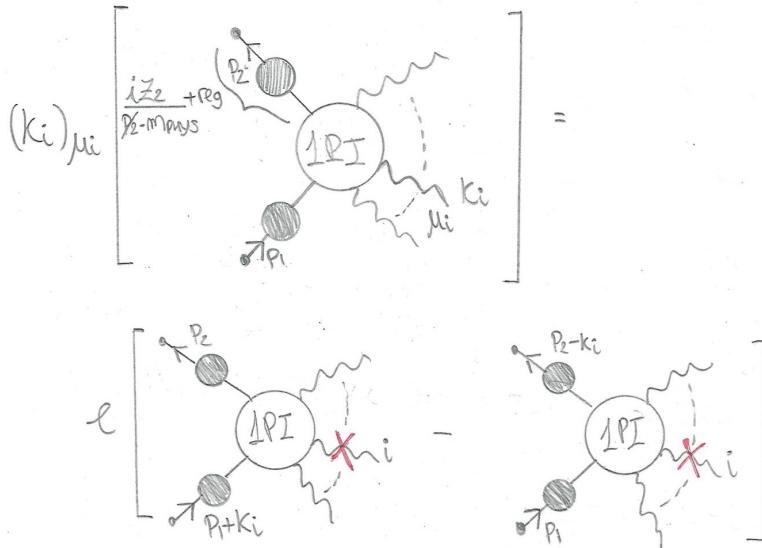
$$e_B = Z_e e_R = \frac{Z_1}{Z_2 \sqrt{Z_3}} e_R$$

Siccome nello schema On-Shell $e_R = e_{\text{phys}}$, troviamo ciò che avevamo già trovato trattando esplicitamente la rinormalizzazione del vertice di interazione, passando per i controtermini, in sezione 4.6:

$$e_B = \frac{Z_1}{Z_2 \sqrt{Z_3}} (\sqrt{Z_3} e_B) \Rightarrow \boxed{Z_1 = Z_2}$$

L'identità di Ward

Consideriamo l'identità di Ward-Takahashi (4.22), che equivale, dal punto di vista diagrammatico, a:



Vorremmo convertire questa identità in un'identità per le ampiezze di scattering. A tal scopo amputiamo le linee fermioniche esterne per mezzo del procedimento di riduzione LSZ.

In altre parole moltiplichiamo per $(p_1 - m_{\text{phys}})(p_2 - m_{\text{phys}})$ e prendiamo il limite on-shell $p_1^2 = p_2^2 = m_{\text{phys}}^2$.

Al LHS dell'identità questo step riproduce l'ampiezza di scattering con due fermioni on-shell, siccome i propagatori esterni hanno poli semplici precisamente in $p_{1,2} = m_{\text{phys}}$.

Tuttavia, al RHS gli impulsi sulle gambe esterne non coincidono, ed entrambi i termini andranno a zero nel limite $p_{1,2} = m_{\text{phys}}$.

Arriviamo quindi al seguente teorema

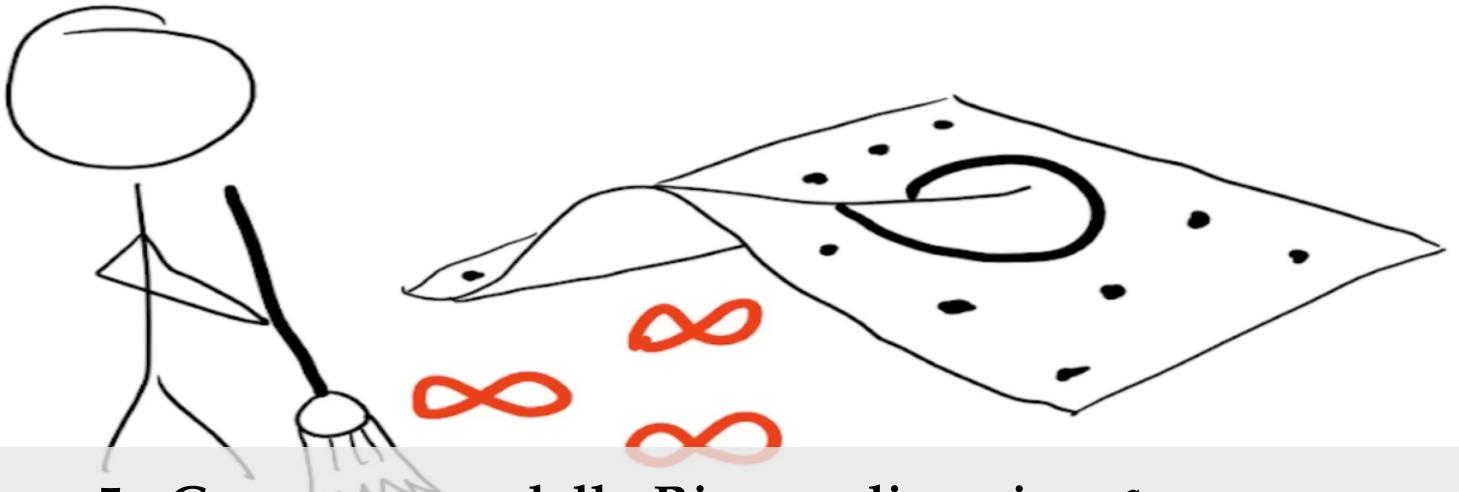
Teorema 4.7.3 (Identità di Ward.)

Considerato un diagramma ad N fotoni (non necessariamente on-shell) ed arbitrario numero di fermioni (necessariamente on shell ed amputati) come quello a margine, che identifichiamo con l'ampiezza $i\mathcal{M}^{\mu_1, \dots, \mu_N}$.

Contraendo tale ampiezza con un impulso k_{μ_i} di uno dei fotoni partecipanti al diagramma, tale contrazione risulta nulla, ovvero:

$$k_{\mu_i} \mathcal{M}^{\mu_1, \dots, \mu_i, \dots, \mu_N} = 0 \quad (4.28)$$



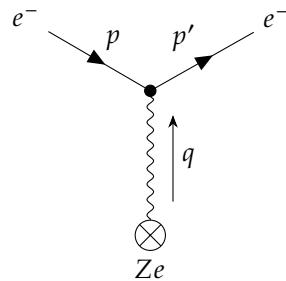


5 Conseguenze della Rinormalizzazione^a

^a Immagine da Renormalization: The Art of Erasing Infinity.

5.1 Il potenziale Coulombiano

Consideriamo lo scattering di un elettrone in presenza di un potenziale elettromagnetico esterno, per esempio generato da un nucleo pesante, all'ordine minore in teoria delle perturbazioni.



La transizione considerata può essere formalizzata come una transizione $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$ dove:

$$|i\rangle = |e^-(p, r)\rangle, \quad |f\rangle = |e^-(p', s)\rangle$$

con r ed s stati di polarizzazione.

L'idea del procedimento che adotteremo è la seguente:

1. Calcoliamo l'ampiezza in QED;
2. Ragioniamo sulla struttura del potenziale esterno utilizzando la teoria classica dei campi;
3. Prendiamo il limite non relativistico dell'ampiezza in QED;
4. Considerando lo scattering di un autostato di impulso in presenza di un potenziale $V(\vec{x})$, i.e. il processo $|\vec{p}\rangle \rightarrow |\vec{p}'\rangle$, lo valutiamo con un calcolo di meccanica quantistica e compariamo con il risultato del punto 3.

5.1 Il potenziale Coulombiano	65
5.2 Potenziale Coulombiano oltre il tree-level	70
Correzioni al loop sul propagatore del fotone	71
5.3 Il running della carica elettrica	73
Scattering $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$	74
Generalità del running coupling	76
5.4 L'equazione del Gruppo di Rinormalizzazione	77
RGF alternativi	78
5.5 Il Teorema Ottico	80
5.6 Ulteriori Implicazioni del Teorema Ottico	86
5.7 Il Momento Magnetico Anomalo	88
Momento giromagnetico dell'elettrone	90
Predizione di g in QED	91
g oltre il tree level	93
5.8 Divergenze Infrarosse	95
Scattering Coulombiano al tree-level	95
Correzioni al vertice	96
Diagramma di emissione reale	99

1) Ampiezza in QED

Nel termine di interazione $\mathcal{L}_{int} = e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu \psi$ consideriamo il campo $A_\mu(x)$ come un campo classico, ossia esterno. Inoltre lo consideriamo statico, i.e. indipendente dal tempo: $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu^{\text{ext}}(\vec{x})$.

Al tree-level il calcolo dell'ampiezza di scattering consiste nel calcolo di

$$S_{fi} = (ie) \int d^4x \langle e^-(p', s) | \bar{\psi} \gamma^\mu \psi | e^-(p, r) \rangle A_\mu^{\text{ext}}(\vec{x}) \quad (5.1)$$

Nota 5.1.1 Stiamo considerando un campo di Dirac con la normalizzazione non relativistica:

$$\begin{aligned} \psi &= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{m}{E_k}} \sum_\alpha \left[a(\vec{k}, \alpha) u(k, \alpha) e^{-ik \cdot x} + b^\dagger(\vec{k}, \alpha) v(k, \alpha) e^{ik \cdot x} \right] \\ \bar{\psi} &= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{m}{E_k}} \sum_\alpha \left[a^\dagger(\vec{k}, \alpha) \bar{u}(k, \alpha) e^{ik \cdot x} + b(\vec{k}, \alpha) \bar{v}(k, \alpha) e^{-ik \cdot x} \right] \end{aligned}$$

da cui definiamo:

$$\begin{aligned} |e^-(\vec{p}, s)\rangle &= \sqrt{\frac{E_p}{m}} a^\dagger(\vec{p}, s) |0\rangle \\ [a(\vec{p}, r), a^\dagger(\vec{q}, s)]_+ &= (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{q}) \delta_{rs} \\ \langle e^-(q, s) | e^-(\vec{p}, r) \rangle &= \sqrt{\frac{E_q}{m}} \sqrt{\frac{E_p}{m}} (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{q}) \delta_{rs} \end{aligned}$$

Qui bisogna scegliere una convenzione da seguire per dare un senso coerente ai campi ψ e $\bar{\psi}$. In sostanza va scelto se procedere con l'obiettivo di arrivare a $\langle 0|0 \rangle = 1$, lavorando solamente sul bra o solamente sul ket (creando e successivamente distruggendo distruggendo), oppure con l'obiettivo di arrivare a $\langle e^- | e^- \rangle = 1$, lavorando simultaneamente su bra e ket.

Personalmente, sono un fan della prima, quindi al campo ψ associamo l'operazione di distruzione di particella e creazione di antiparticella quando agente **sul ket**, mentre al campo $\bar{\psi}$ associamo l'opposto: creazione di particella e distruzione di antiparticella quando agente **sul ket**. Ovviamente vale l'opposto se si agisce **sul bra**.

Scriviamo allora:

$$\begin{aligned} S_{fi} &= (ie) \int d^4x \langle 0 | \sqrt{\frac{E'_p}{m}} a(\vec{p}', s) \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \sqrt{\frac{E_p}{m}} a^\dagger(\vec{p}, r) | 0 \rangle A_\mu^{\text{ext}}(\vec{x}) \\ &= (ie) \sqrt{\frac{E'_p}{m}} \sqrt{\frac{E_p}{m}} \int d^4x \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{m}{E_k}} \sqrt{\frac{m}{E_{k'}}} \sum_\alpha \sum_\beta \\ &\times \langle 0 | a(\vec{p}', s) a^\dagger(\vec{k}, \alpha) \bar{u}(k, \alpha) e^{ik \cdot x} \gamma^\mu a(\vec{k}', \beta) u(k', \beta) e^{-ik' \cdot x} a^\dagger(\vec{p}, r) | 0 \rangle A_\mu^{\text{ext}}(\vec{x}) \stackrel{*}{=} \end{aligned}$$

Ora concentriamoci sul sandwich ed applichiamo le relazioni di anti-commutazione agli operatori a , ricordando che $a|0\rangle = 0$, $\langle 0|a^\dagger = 0$ e $\langle 0|0\rangle = 1$ abbiamo:

$$(2\pi)^3 \delta(\vec{p}' - \vec{k}) \delta_{s\alpha} (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{k}') \delta_{\beta r} \bar{u}(k, \alpha) \gamma^\mu u(k', \beta) e^{ik \cdot x - ik' \cdot x}$$

Possiamo quindi sfruttare le δ per svolgere i due integrali 3D e togliere di mezzo le $\sqrt{\frac{E}{m}}\sqrt{\frac{m}{E}}$ forzando $k = p'$ e $k' = p$. Otteniamo quindi:

$$\begin{aligned} &\stackrel{*}{=} (ie) \int d^4x \bar{u}(p', \alpha) \gamma^\mu u(p, \beta) e^{ip' \cdot x - ip \cdot x} A_\mu^{\text{ext}}(\vec{x}) \\ &= (ie) \underbrace{\int dt [e^{i(E_{p'} - E_p)t}] \bar{u}(p', \alpha) \gamma^\mu u(p, \beta)}_{=2\pi\delta(E_{p'} - E_p)} \underbrace{\int d^3\vec{x} [e^{-i(\vec{p}' - \vec{p}) \cdot \vec{x}} A_\mu^{\text{ext}}(\vec{x})]}_{=\tilde{A}_\mu^{\text{ext}}(\vec{q} = \vec{p}' - \vec{p})} \end{aligned}$$

Siamo quindi pronti a scrivere il risultato finale, sfruttando la riscrittura di $A_\mu^{\text{ext}}(\vec{x})$ dello spazio dell'impulso tramite la sua trasformata di Fourier:

$$S_{fi} = (2\pi)\delta(E_{p'} - E_p)(ie)\bar{u}(p', \alpha)\gamma^\mu u(p, \beta)\tilde{A}_\mu^{\text{ext}}(\vec{q}) \quad (5.2)$$

Commento: abbiamo solo la conservazione dell'energia, mentre l'impulso spaziale non si conserva: infatti avviene un trasferimento di impulso $\vec{q} = \vec{p}' - \vec{p}$ dall'elettrone al nucleo.

2) Il campo classico esterno

Concentriamoci su $A_\mu^{\text{ext}}(\vec{x})$ ed utilizziamo la teoria dei campi classiche. La Lagrangiana è:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - A_\mu j^\mu$$

con j^μ sorgente esterna associata al nucleo pesante.

Da questa Lagrangiana si derivano le equazioni del moto di Eulero-Lagrange:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$$

identificate con le equazioni di Maxwell in presenza di una sorgente.

In termini di A_μ possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) &= \square A^\nu - \underbrace{\partial^\nu (\partial_\mu A^\mu)}_{\substack{\text{Gauge di Lorentz} \\ \partial_\mu A^\mu = 0}} = j^\nu \\ &\Rightarrow \square A^\mu = j^\mu \end{aligned}$$

Ricordando l'assunzione di staticità del potenziale, che si traduce in $\partial_t A^\mu = 0$ riduce il D'Alembertiano al solo Laplaciano

$$\square = \partial_t^2 - \nabla^2 \rightarrow -\nabla^2 = -\Delta$$

Le equazioni del moto in assunzione di campo statico diventano quindi:

$$\Delta A^\mu(\vec{x}) = -j^\mu(\vec{x}) \quad (5.3)$$

Possiamo parametrizzare j^μ pensandola come una corrente generata da una carica Ze posta a riposo nell'origine:

$$j^\mu(\vec{x}) = \begin{cases} j^0(\vec{x}) = Ze\delta(\vec{x}) \\ j^i(\vec{x}) = 0 \end{cases}$$

Essendo la carica a riposo, la 3-corrente sarà nulla.

Le nostre equazioni del moto si riducono quindi all'equazione:

$$\Delta A^0(\vec{x}) = -Ze\delta(\vec{x})$$

In quanto le tre componenti spaziali del potenziale, data la struttura della corrente, possono essere messe a zero senza alcuna perdita di generalità.

Per trovare la soluzione per la componente temporale, lavoriamo nello spazio di Fourier, adoperando le seguenti sostituzioni:

$$A^\mu(\vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \tilde{A}^\mu(\vec{q}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}, \quad \delta(\vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}$$

L'azione del Laplaciano sul potenziale "tira giù" un fattore $-|\vec{q}|^2$ dall'esponenziale e risolvendo per $\tilde{A}^0(\vec{q})$ troviamo:

$$\tilde{A}^0(\vec{q}) = \frac{Ze}{|\vec{q}|^2}$$

Riscriviamo allora l'ampiezza:

$$S_{fi} = (2\pi)\delta(E_{p'} - E_p)(ie)\bar{u}(p', \alpha)\gamma^\mu u(p, \beta)\tilde{A}_\mu^{\text{ext}}(\vec{q})$$

$$\boxed{\tilde{A}^0(\vec{q}) = \frac{Ze}{|\vec{q}|^2}, \quad A^i = 0} \quad (5.4)$$

3) Limite non relativistico dell'ampiezza in QED

Adottando la rappresentazione di Dirac per le matrici γ

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

scriviamo esplicitamente gli spinori di Dirac, ovvero le soluzioni dell'equazione di Dirac libera in questa rappresentazione:

$$u(p, s) = N \begin{pmatrix} \chi(s) \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi(s) \end{pmatrix}$$

con $\chi(s)$ autostato di spin bi-dimensionale (i.e. la polarizzazione).

Nota 5.1.2 Nella convenzione che stiamo utilizzando in questa sezione, gli spinori sono normalizzati secondo la seguente relazione:

$$u^\dagger(p, s)u(p, r) = \delta_{sr} \frac{E_p}{m} \quad (5.5)$$

Di conseguenza possiamo definire la soluzione in onde piane e il prodotto scalare tra due soluzioni di questo tipo, rispettivamente:

$$\psi_{\vec{p}}^{(s)} = \sqrt{\frac{m}{E_p}} u(p, s) e^{-ip \cdot x}$$

$$\int d^3x \psi_{\vec{p}}^{(s)\dagger}(x) \psi_{\vec{p}'}^{(r)}(x) = (2\pi)^3 \delta_{sr} \delta(\vec{p} - \vec{p}')$$

Allo stesso tempo, considerando

$$\hat{\psi}(x) = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{m}{E_k}} \sum_{\alpha} a(\vec{k}, \alpha) u(k, \alpha) e^{-ik \cdot x}$$

possiamo esprimere gli operatori di creazione e distruzione come segue:

$$\begin{aligned} a(\vec{p}, s) &= \int d^3 \vec{x} \psi_{\vec{p}}^{(s)\dagger}(x) \hat{\psi}(x) \\ a^{\dagger}(\vec{p}, s) &= \int d^3 \vec{x} \psi_{\vec{p}}^{(s)}(x) \hat{\psi}^{\dagger}(x) \end{aligned}$$

tra cui vale la relazione di anti-commutazione:

$$[a(\vec{p}, s), a^{\dagger}(\vec{p}', r)]_+ = (2\pi)^3 \delta_{sr} \delta(\vec{p} - \vec{p}')$$

Partendo dalla (5.5), sostituendo l'espressione degli spinori e svolgendo i calcoli, è possibile trovare la struttura esplicita di N . Si trova infatti:

$$N = \left(\frac{E + m}{2m} \right)^{1/2}$$

Per cui sostituendo nell'espressione generica per gli spinori di Dirac:

$$u(p, s) = \left(\frac{E + m}{2m} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \chi(s) \\ \bar{\sigma} \cdot \vec{p} \overline{\chi(s)} \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

Consideriamo ora il limite non relativistico $|\vec{p}| \ll m \Rightarrow |\vec{p}|/m \ll 1$ e diciamo che vogliamo tenere fino all'ordine $\mathcal{O}(|\vec{p}|/m)$. Di conseguenza espandendo l'energia otteniamo:

$$E = (p^2 + m^2)^{1/2} = m \left(1 + \frac{p^2}{m^2} \right)^{1/2} \approx m \left[1 + \frac{1}{2} \frac{p^2}{m^2} + \mathcal{O} \left(\frac{p^4}{m^4} \right) \right]$$

Quindi, nel limite non relativistico all'ordine inferiore:

$$p^{\mu} = (m, \vec{p}) \quad , \quad p'^{\mu} = (m, \vec{p}')$$

Ma allora, se torniamo alla (5.4) e tralasciamo la parte spaziale possiamo calcolare esplicitamente:

$$\begin{aligned} \bar{u}(p', \alpha) \gamma^0 u(p, \beta) &= u^{\dagger}(p', \alpha) (\gamma^0)^2 u(p, \beta) = \\ &= \chi^{\dagger}(\alpha) \chi(\beta) + \frac{1}{4m^2} \chi^{\dagger}(\alpha) \bar{\sigma} \cdot \vec{p}' \bar{\sigma} \cdot \vec{p} \chi(\beta) \\ &= \delta_{\alpha\beta} + \mathcal{O} \left(\frac{p^2}{m^2} \right) = \delta_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

Arriviamo quindi a

$$S_{fi} \stackrel{\text{NR}}{=} (2\pi) \delta(E_{p'} - E_p) (ie) \delta_{\alpha\beta} \frac{Ze}{|\vec{q}|^2} \quad (5.7)$$

4) Comparazione con il calcolo in meccanica quantistica

Calcoliamo l'ampiezza di scattering per un autostato di impulso \vec{p} in presenza di un potenziale statico, utilizzando lo schema di

interazione in meccanica quantistica.

$$\begin{aligned} A(|\vec{p}\rangle \rightarrow |\vec{p}'\rangle) &= \langle \vec{p}' | U_I(+\infty, -\infty) |\vec{p}\rangle \\ &= \langle \vec{p}' | \left[\mathbb{1} - i \int_{-\infty}^{+\infty} dt \hat{V}_{int}^{(I)}(t) \right] |\vec{p}\rangle \end{aligned}$$

con $\hat{V}_{int}^{(I)}(t) = e^{iH_0 t} \hat{V}_{int} e^{-iH_0 t}$.

La parte connessa dell'ampiezza è

$$\begin{aligned} A(|\vec{p}\rangle \rightarrow |\vec{p}'\rangle) &= -i \langle \vec{p}' | \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{iH_0 t} \hat{V}_{int} e^{-iH_0 t} |\vec{p}\rangle \\ &= -i \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{iE_p t} e^{-iE_p t} \underbrace{\langle \vec{p}' | \hat{V}_{int} |\vec{p}\rangle}_{\text{non dipende da } t} \\ &= -i(2\pi)\delta(\vec{p}' - \vec{p}) \langle \vec{p}' | \hat{V}_{int} |\vec{p}\rangle \end{aligned}$$

qui utilizziamo il fatto che $|\vec{p}\rangle$ è autostato di impulso, il che si traduce nell'equazione agli autovalori $e^{-iH_0 t} |\vec{p}\rangle = e^{-iE_p t} |\vec{p}\rangle$.

comparando con la (5.7) troviamo immediatamente il **potenziale nello spazio dell'impulso**:

$$\boxed{\langle \vec{p}' | \hat{V}_{int} |\vec{p}\rangle = -\frac{Ze^2}{|\vec{q}|^2}} , \quad \text{con } \vec{q} = \vec{p}' - \vec{p} \quad (5.8)$$

L'equazione (5.8) ci dice che il limite non relativistico dello scattering Coulombiano in QED fornisce esattamente (e com'è giusto che sia) il potenziale di Coulomb attrattivo. Volendo, questo risultato può essere riportato nello spazio delle posizioni, ma tale operazione è lasciata come esercizio.

Esercizio 5.1.1 Calcolare il potenziale nello spazio delle posizioni partendo dalla (5.8), per mezzo delle trasformate di Fourier.

Soluzione. [Conti svolti Lezione 14 pag.10]

$$V(\vec{x}) = \frac{-Ze^2}{4\pi|\vec{x}|} \quad (5.9)$$

5.2 Potenziale Coulombiano oltre il tree-level

Andiamo oltre il calcolo al tree-level, mantenendo l'assunzione di potenziale statico, ma restando generici in merito alla struttura della corrente.

Nello spazio di Fourier abbiamo

$$A^\mu(\vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \tilde{A}^\mu(\vec{q}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} , \quad j^\mu(\vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \tilde{j}^\mu(\vec{q}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}$$

Sostituendo nelle equazioni del moto (5.3) troviamo:

$$\int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \left[-|\vec{q}|^2 \tilde{A}^\mu(\vec{q}) + \tilde{j}^\mu(\vec{q}) \right] e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} = 0 \Rightarrow \boxed{\tilde{j}^\mu(\vec{q}) = |\vec{q}|^2 \tilde{A}^\mu(\vec{q})}$$

Possiamo sostituire $\tilde{A}^\mu(\vec{q})$ nell'ampiezza (5.2) ottenendo:

$$S_{fi} = (2\pi)\delta(E_{p'} - E_p)(ie)\bar{u}(p', \alpha)\gamma^\mu u(p, \beta) \frac{1}{|\vec{q}|^2} \tilde{j}_\mu(\vec{q})$$

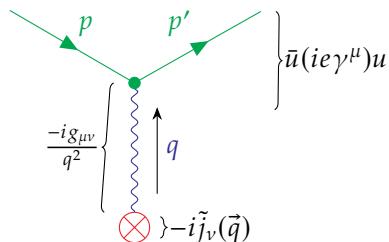
Abbiamo già notato come sia conservata l'energia, ma non l'impulso. Volendo riscrivere il trasferimento di impulso per mezzo del suo quadri-vettore, ricordiamo che $q = p' - p$, da cui segue

$$q^2 = (E_{p'} - E_p)^2 - |\vec{p}' - \vec{p}|^2 = -|\vec{q}|^2 \Rightarrow |\vec{q}|^2 = -q^2$$

In definitiva scriviamo allora nuovamente la nostra ampiezza, inserendo un $i \cdot (-i) = 1$ e portando l'indice della corrente in alto per mezzo di un tensore metrico, così da dare un senso fisico alla struttura ottenuta:

$$S_{fi} = (2\pi)\delta(E_{p'} - E_p) \underbrace{[\bar{u}(p', \alpha)(ie\gamma^\mu)u(p, \beta)]}_{\text{corrente elettronica}} \underbrace{\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}}_{\substack{\text{propagatore} \\ \text{fotonico}}} \underbrace{(-i\tilde{j}_\nu(\vec{q}))}_{\substack{\text{corrente} \\ \text{elettromagnetica} \\ \text{del secondo} \\ \text{vertice}}} \quad (5.10)$$

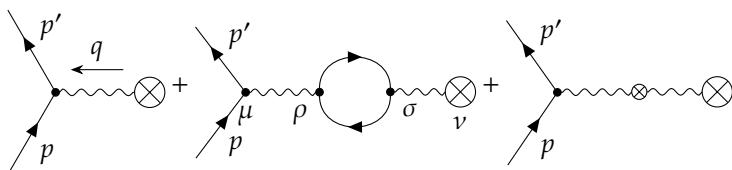
dal punto di vista diagrammatico:



Comparando con il precedente risultato, arriviamo alla conclusione che il propagatore del fotone sia il responsabile per la presenza del potenziale di Coulomb (in quanto è da lui che arriva la dipendenza da q^{-2}).

Correzioni al loop sul propagatore del fotone

Consideriamo i seguenti diagrammi utilizzando il formalismo introdotto nel capitolo precedente, ovvero separando la Lagrangiana in $\mathcal{L}_R + \mathcal{L}_{ct}$:



Ricordando l'equazione (4.13), possiamo scrivere l'ampiezza "corretta"¹, sommando all'ampiezza riportata in equazione (5.10), che corrisponde al diagramma al tree-level, i contributi del diagramma al loop e relativo controtermine.

Ricordiamo che possiamo trascurare i termini in $q^\mu q^\nu$ per ragioni connesse all'identità di Ward.

$$S_{fi} = (2\pi)\delta(E_{p'} - E_p) \left[\bar{u}(p', \alpha)(ie\gamma^\mu)u(p, \beta) \right] \left[\frac{(-ig_{\mu\nu})}{q^2} + \frac{(-ig_{\mu\rho})}{q^2} i(q^\rho g^{\sigma\rho} - q^\rho q^\sigma) \bar{\Pi}_{\text{1-loop}}(q^2) \frac{(-ig_{\sigma\nu})}{q^2} \right] (-i\tilde{j}_\nu(\vec{q}))$$

Arriviamo quindi al seguente risultato:

$$S_{fi} = (2\pi)\delta(E_{p'} - E_p) \left[\bar{u}(p', \alpha)(ie\gamma^\mu)u(p, \beta) \right] \frac{(-ig_{\mu\nu})}{q^2} \left[1 + \bar{\Pi}_{\text{1-loop}}(q^2) \right] (-i\tilde{j}_\nu(\vec{q})) \quad (5.11)$$

Dal **propagatore del fotone corretto**, otteniamo immediatamente una correzione sul potenziale:

$$\langle \vec{p}' | \hat{V}_{int} | \vec{p} \rangle \equiv V(\vec{q}) = -\frac{Ze_R^2}{|\vec{q}|^2} \left[1 + \bar{\Pi}_{\text{1-loop}}(-|\vec{q}|^2) \right]$$

Volendo si può calcolare esplicitamente $\bar{\Pi}_{\text{1-loop}}(q^2)$, risolvendo la (4.17) nel limite non relativistico $|\vec{q}|^2 \ll m_R^2$. Questa procedura ci porta al potenziale corretto nello spazio dell'impulso:

$$V(\vec{q}) = -\frac{Ze_R^2}{|\vec{q}|^2} \left(1 + \underbrace{\frac{e_R^2}{60\pi^2} \frac{|\vec{q}|^2}{m_R^2}}_{\text{termine di Uehling}} \right) \quad (5.12)$$

Nota 5.2.1 (Termine di Uehling e Lamb Shift.)

Possiamo spostarci nello spazio delle posizioni per mezzo dell'anti-trasformata. Questo ci permette di determinare come il potenziale di Coulomb viene modificato a piccole distanze:

$$V(\vec{x}) = -\frac{Ze_R^2}{4\pi|\vec{x}|} - \underbrace{\frac{Ze_R^4}{60\pi^2 m_R^2} \delta(\vec{x})}_{\text{termine di Uehling}} \quad (5.13)$$

Verrebbe ora da chiedersi se questa correzione sia osservabile e quale sia la sua spiegazione fisica.

- Per via della delta di Dirac, l'effetto ha una rilevanza significativa solo a piccole distanze dal nucleo.
Consideriamo a titolo di esempio l'atomo di idrogeno ed in particolare i livelli energetici $2s$ ($n = 2, l = 0$) e $2p$ ($n = 2, l = 1$). Nonostante E_n dipenda solo dal numero quantico principale, e quindi i due livelli abbiano di fatto la stessa energia, le loro funzioni d'onda radiali differiscono.



¹ Nel senso di "rinormalizzata", se vogliamo.

In particolare, l'orbitale con $l = 0$ ha supporto^a quando $r \rightarrow 0$ ed è quindi sensibile ad eventuali correzioni a corto raggio applicate al potenziale di Coulomb.

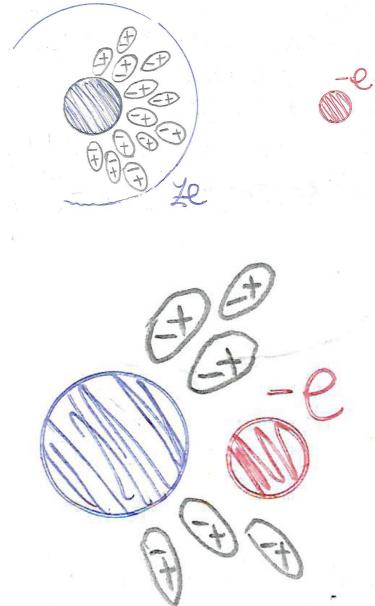
Questo effetto, i.e. la differenza energetica tra i livelli $^2S_{1/2}$ e $^2P_{1/2}$, è stato misurato ed è detto *Lamb Shift*.

- ▶ L'interpretazione fisica è la presenza di un *effetto di polarizzazione del vuoto*. Infatti il termine di Uehling, quando l'elettrone si avvicina al nucleo, provoca una maggiore attrazione verso il nucleo stesso.

In sostanza il vuoto risulta polarizzato e agisce come uno schermo per il potenziale, quando l'elettrone lontano dal nucleo.

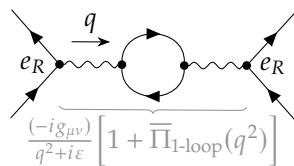
Quando l'elettrone è sufficientemente vicino, invece, lo schermo viene penetrato e l'attrazione aumenta.

^a Nel senso che ha valore diverso da 0.



5.3 Il running della carica elettrica

Consideriamo un processo in cui un fotone viene scambiato tra due correnti elettromagnetiche e studiamolo includendo la correzione ad un loop utilizzando la teoria rinormalizzata.



Indipendentemente dai dettagli riguardo le due correnti, sarà sempre presente la correzione agente sul propagatore del fotone che abbiamo visto nel paragrafo precedente, insieme alle due cariche fondamentali ai vertici.

Verrebbe allora da provare ad incorporare la correzione dell'auto-energia del fotone nella definizione di carica elettrica, definendola come "*carica elettrica effettiva*:

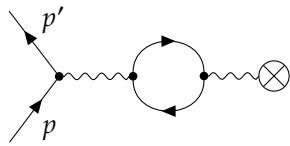
Definizione 5.3.1 (Carica elettrica effettiva - 1 loop.)

$$e_{\text{eff}}(q^2) = e_R \left[1 + \overline{\Pi}_{\text{1-loop}}(q^2) \right]^{1/2} \quad (5.14)$$

con $\overline{\Pi}_{\text{1-loop}}(0) = 0$
ed $e_R = e_{\text{phys}}$ nello schema OS

La carica elettrica dipende quindi dalla scala di energia tipica del processo considerato. In altre parole: la costante di accoppiamento non è costante, ma dipende dall'energia!

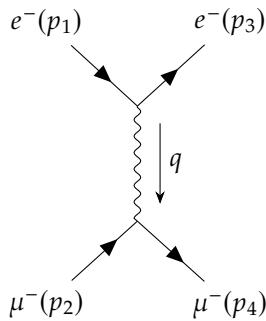
Prima abbiamo studiato il diagramma



in cui la scala era determinata dal trasferimento di impulso, e abbiamo visto che $\bar{\Pi}_{\text{1-loop}}(-|\vec{q}|^2) \approx \frac{e_R^2}{60\pi^2} \frac{|\vec{q}|^2}{m_R^2}$.

Scattering $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$

Consideriamo ora lo scattering $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$, che al tree-level si rappresenta:



con $p_1 = q + p_3$, $p_2 + q = p_4$.

Nota 5.3.1 Sviluppando la cinematica nel centro di massa, si arriva senza troppe difficoltà alle seguenti relazioni:

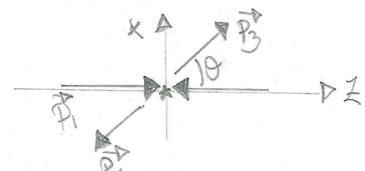
$$\begin{aligned} p_1 &= (E_e, 0, 0, |\vec{p}|) & p_3 &= (E_e, |\vec{p}| \sin \vartheta, 0, |\vec{p}| \cos \vartheta) \\ p_2 &= (E_\mu, 0, 0, -|\vec{p}|) & p_4 &= (E_\mu, -|\vec{p}| \sin \vartheta, 0, -|\vec{p}| \cos \vartheta) \\ E_e &= \frac{\sqrt{s}}{2} \left(1 + \frac{m_e^2 - m_\mu^2}{s} \right) & E_\mu &= \frac{\sqrt{s}}{2} \left(1 + \frac{m_\mu^2 - m_e^2}{s} \right) \\ |\vec{p}|^2 &= \frac{1}{4s} \lambda(s, m_e^2, m_\mu^2) \end{aligned}$$

Essendo per costruzione $q = p_1 - p_3$, sostituendo e svolgendo pochi conti si arriva a trovare:

$$q^2 = -|\vec{q}|^2 = -2|\vec{p}|^2(1 - \cos \vartheta)$$

Ma $2|\vec{p}|^2(1 - \cos \vartheta) > 0$ sempre, quindi il quadrato del 4-impulso trasferito è sempre negativo. q è un quadrivettore di tipo spazio.

dove utilizziamo la funzione triangolo
 $\lambda(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2cb$

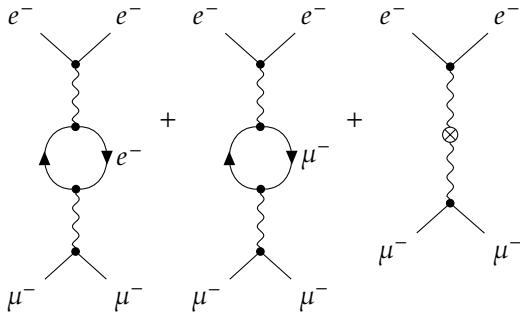


Ragioniamo ora come prima, con l'obiettivo di introdurre anche in questo caso una carica elettrica effettiva.

In questo caso, al contrario dello scattering Coulombiano, assumiamo di essere in regime ultra-relativistico, i.e. $|\vec{q}|^2 \gg m_e^2, m_\mu^2$.

Un importante aspetto di cui va tenuto conto è il fatto che, considerando il loop che fornisce la carica effettiva, possiamo avere sia un elettrone che

un muone. Questo si riflette in una somma di due diagrammi, invece di uno, più il controtermine.



Segue quindi che, in questo caso:

$$\bar{\Pi}_{\text{1-loop}} = \frac{8e_R^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \left\{ \log \left[\frac{m_e^2 - x(1-x)q^2}{m_e^2} \right] + \log \left[\frac{m_\mu^2 - x(1-x)q^2}{m_\mu^2} \right] \right\}$$

dove $m_{e,\mu}$ sono le masse rinormalizzate per l'elettrone ed il muone.

Ora, ricordando l'approssimazione ultra-relativistica, possiamo dire che per m_R generica

$$\log \left[\frac{m_R^2 - x(1-x)q^2}{m_R^2} \right] \approx \log \left[\frac{-x(1-x)q^2}{m_R^2} \right] = \log \left(\frac{-q^2}{m_R^2} \right) + \log x(1-x)$$

Siccome $\log x(1-x)$, una volta integrato, porta un contributo costante (ed anche piuttosto piccolo), possiamo trascurarlo. Il che significa che:

$$\boxed{\int_0^1 dx x(1-x) \log \left[\frac{m_R^2 - x(1-x)q^2}{m_R^2} \right] \approx \frac{1}{6} \log \left(\frac{-q^2}{m_R^2} \right)}$$

Perciò, sulla base della sua definizione (5.14), la carica effettiva (al quadrato in questo caso) sarà:

$$\boxed{e_{\text{eff}}^2 = e_R^2 \left[1 + \frac{e_R^2}{12\pi^2} \log \left(\frac{-q^2}{m_e^2} \right) + \frac{e_R^2}{12\pi^2} \log \left(\frac{-q^2}{m_\mu^2} \right) \right]} \quad (5.15)$$

con $-q^2 = |\vec{q}|^2 \gg m_e^2, m_\mu^2$.

Troviamo quindi che la forza dell'interazione cresce ad alte energie (ovvero a piccole distanze). Il coupling, infatti, cresce in maniera logaritmica con l'aumentare della scala di energia alla quale viene svolto l'esperimento, i.e. il valore tipico di q^2 .

Questo effetto è noto come **running coupling**.

Generalità del running coupling

Abbiamo derivato questo risultato considerando esplicitamente lo scambio di impulso tramite t-channel, ma il risultato è più generale:

Ogni ampiezza che coinvolge un trasferimento di energia (o impulso) $Q \gg m_e$ in QED è caratterizzata da un coupling effettivo dipendente da tale trasferimento di energia $e_{\text{eff}}(Q)$ che ad un loop si scrive:

$$e_{\text{eff}}^2(Q^2) = e_R^2 \underbrace{\left[1 + \frac{e_R^2}{12\pi^2} \log \left(\frac{Q^2}{m_R^2} \right) \right]}_{\substack{\text{correzione dovuta} \\ \text{al solo loop} \\ \text{con l'elettrone}}} \quad (5.16)$$

Commenti

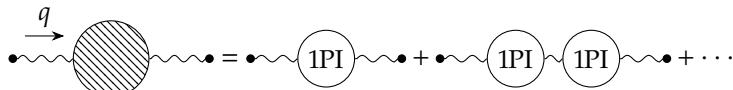
- 1) L'equazione (5.16) si applica alla QED più semplice possibile, composta solo da fotoni ed elettroni e da nessun altro campo. Nella realtà il fotone si accoppia anche con i quark, i muoni o i tau. Limitando la trattazione ad un loop, l'apporto di queste particelle al running del coupling è simile a quello dell'elettrone, eccetto per la massa e la carica.
- 2) Volendo possiamo spingerci oltre con il calcolo inserendo nel propagatore ordini superiori ad un loop. Ci riferiremo a tale propagatore come "propagatore resummatto"². Con riferimento all'equazione (3.9), è chiaro che il fattore che vogliamo introdurre nella definizione di carica efficace è il residuo \sqrt{Z}_3 , implementando la notazione di rinormalizzazione per mezzo dei contro-termini al denominatore. Scriviamo quindi:

$$e_{\text{eff}}^2(Q^2) = \frac{e_R^2}{1 - \bar{\Pi}(Q^2)} \xrightarrow{Q^2 \gg m_R^2} \frac{e_R^2}{1 - \frac{e_R^2}{12\pi^2} \log \left(\frac{Q^2}{m_R^2} \right)} \quad (5.17)$$

Ci accorgiamo immediatamente della presenza di una singolarità nel punto noto come **polo di Landau**:

$$Q_\star^2 = m_R \exp \left\{ \frac{12\pi^2}{e_R^2} \right\} \quad (5.18)$$

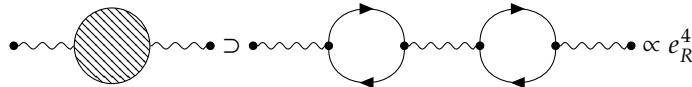
- 3) Abbiamo introdotto il propagatore vestito fotonico, definito dia grammaticamente come in sezione 3.2:



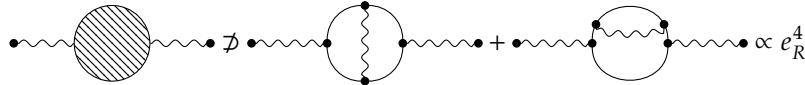
fermandoci alla trattazione ad 1 loop per quanto riguarda i diagrammi 1PI. Questa procedura è consistente dal punto di vista perturbativo? Per capirlo utilizziamo i seguenti argomenti:

² dall'inglese *resummed*, in pratica è come se fosse il propagatore vestito

- ▶ Stiamo includendo, nella somma sopra, diagrammi a due loop di ordine $\mathcal{O}(e_R^4)$ nell'espansione perturbativa.



- ▶ Non abbiamo invece incluso diagrammi del tipo seguente



anch'essi di ordine $\mathcal{O}(e_R^4)$

La logica con cui lo facciamo è la seguente:

- Diagrammi ad **un loop** producono termini $\sim e_R^2 \log Q^2 \approx \alpha \log Q^2$, lo abbiamo visto esplicitamente.
- Di conseguenza diagrammi a **due loop** produrranno termini $\sim \alpha^2 \log^2 Q^2$, come fossero il quadrato dei diagrammi ad un loop.
- Al contrario, diagrammi come quelli che non stiamo considerando, daranno correzioni $\sim \alpha^2 \log Q^2$, che sono di ordine α^2 , ma hanno solo un logaritmo. Questi termini sono detti *sotto-dominanti*³ nel limite di alto Q^2 .

In conclusione, diciamo che la serie considerata fornisce una **re-summazione**⁴ dei cosiddetti logaritmi dominanti $\alpha^n \log^n Q^2$

5.4 L'equazione del Gruppo di Rinormalizzazione

Partiamo dall'equazione (5.17) ed invertiamola, moltiplichiamo e dividiamo per μ^2 nel logaritmo e separiamolo, ottenendo la seguente espressione:

$$\frac{1}{e_{\text{eff}}^2(Q^2)} = \underbrace{\frac{1}{e_R^2} - \frac{1}{12\pi^2} \log \frac{\mu^2}{m_R^2} - \frac{1}{12\pi^2} \log \frac{Q^2}{\mu^2}}_{=1/e_{\text{eff}}^2(\mu^2)}$$

Se ora deriviamo in $d\mu$, otteniamo:

$$0 = \frac{(-2)}{e_{\text{eff}}^3(\mu^2)} \frac{de_{\text{eff}}(\mu^2)}{d\mu} - \frac{1}{12\pi^2} \cdot \frac{\mu^2}{Q^2} \cdot \frac{(-2)Q^2}{\mu^3}$$

In definitiva, possiamo scrivere quella che viene definita come equazione del gruppo di rinormalizzazione (**RGE**) per il coupling elettrico ad un loop:

$$\boxed{\mu \frac{de_{\text{eff}}}{d\mu} = \frac{e_{\text{eff}}^3}{12\pi^2}} \quad (5.19)$$

³ Dall'inglese *subleading*, in pratica sono trascurabili rispetto al contributo dei termini dominanti. ⁴ dall'inglese *resummation*, è una procedura utilizzata per fornire un'approssimazione più precisa possibile sfruttando calcoli ad ordini sempre maggiori combinati in un'unica somma.

La RGE è un'equazione differenziale a variabili separabili che controlla il running del coupling effettivo. Inoltre il RHS è noto come funzione beta per la QED ad un loop⁵, ma su questo torneremo in seguito, nella sezione 26.

Il variare di $e_{\text{eff}}(\mu)$ al variare di μ è detto *flusso del gruppo di rinormalizzazione (RGF)*.

Nota 5.4.1 Check di consistenza.

Integriamo la (5.19) e verifichiamo che effettivamente si ritrova la (5.17). In particolare, dato che $d(\mu^2) = 2\mu d\mu$, sostituiamo $d\mu = \frac{1}{2\mu} d\mu^2$ e integriamo nel seguente modo separando le variabili:

$$\int_{e_{\text{eff}}(m^2)=e_R}^{e_{\text{eff}}(Q^2)} \frac{de_{\text{eff}}}{e_{\text{eff}}^3} = \frac{1}{24\pi^2} \int_{\mu_{\text{ref}}^2=m^2}^{\mu^2=Q^2} \frac{d\mu^2}{\mu^2}$$

Notiamo come nell'approssimazione in cui stiamo lavorando, il limite di bassa energia che definisce il valore osservato della carica elettrica (e rappresenta una condizione al contorno necessaria per risolvere l'equazione) è $\mu_{\text{ref}}^2 = m^2$ e non $\mu_{\text{ref}}^2 = 0$.

Procedendo con l'integrazione otteniamo:

$$-\frac{1}{2} \left[\frac{1}{e_{\text{eff}}^2(Q^2)} - \frac{1}{e_R^2(Q^2)} \right] = \frac{1}{24\pi^2} (\log Q^2 - \log m^2)$$

E da qui non è difficile ricavare l'equazione di partenza:

$$\frac{1}{e_{\text{eff}}^2(Q^2)} = \frac{1}{e_R^2} - \frac{1}{12\pi^2} \log \frac{Q^2}{m^2}$$

□

RGF alternativi

Quanto discusso nel caso della QED è valido per una generica QFT: le costanti di accoppiamento $\lambda(\mu)$ dipendono dall'energia ed il loro "running" è descritto dalla corrispondente RGE, la cui struttura schematica, comprensiva di condizione al contorno, è:

$$\mu \frac{d\lambda(\mu)}{d\mu} = \beta(\lambda) , \quad \lambda(\mu_{\text{ref}}) = \lambda_0 \quad (5.20)$$

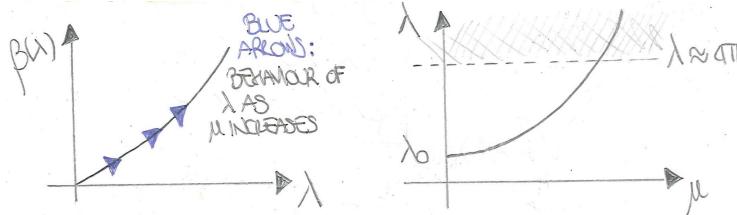
La funzione beta è specifica per il singolo coupling. Per esempio, in QED, $\lambda = e$ e $\beta(\lambda) = \frac{e^3}{12\pi^2}$.

Dipendentemente dal segno della funzione beta, si hanno 3 comportamenti differenti per il flusso del gruppo di rinormalizzazione:

- 1) Se $\beta(\lambda) > 0$, $\lambda(\mu)$ incrementa (decrementa) con l'aumentare (decremente) di μ .

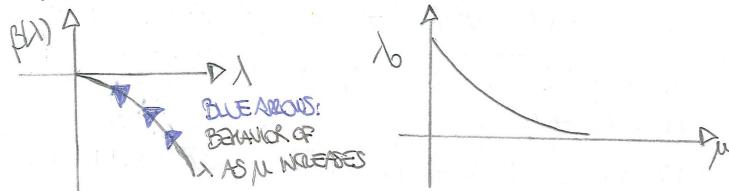
⁵ Quando diciamo "ad un loop", intendiamo che nei diagrammi 1PI stiamo tenendo conto al massimo dei diagrammi con 1 loop. Aumentando i loop considerati, si aggiungono termini alla funzione beta.

Questo è il caso della QED. Quando $\lambda(\mu) \approx 4\pi$ la teoria diventa non perturbativa.



- 2) Se $\beta(\lambda) < 0$, $\lambda(\mu)$ decremente (incrementa) con l'aumentare (decrementare) di μ .

Questo caso è detto di "libertà asintotica": la teoria diventa non perturbativa nel regime delle alte energie. Un esempio può essere la QCD.



- 3) Se $\beta(\lambda) = 0$, $\lambda(\mu)$ non dipende da μ .

In questo caso la teoria è detta "scale-independent" o conforme.

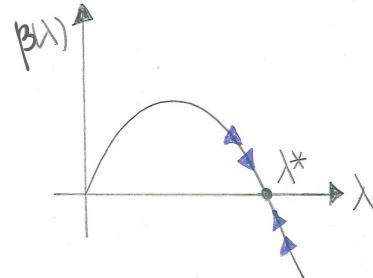
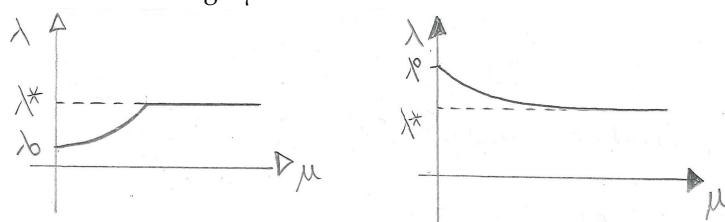
Tuttavia quelli appena elencati sono casi estremi, può accadere che $\beta(\lambda)$ sia una mistura dei tre, ad esempio:

- **Punto fisso ultravioletto non banale** Consideriamo il caso seguente, rappresentato schematicamente a lato:

$$\begin{aligned}\beta(\lambda^*) &= 0, \quad \beta'(\lambda^*) < 0 \\ \beta(\lambda) &> 0, \quad \lambda < \lambda^* \\ \beta(\lambda) &< 0, \quad \lambda > \lambda^*\end{aligned}$$

Questo accade se abbiamo $\beta(\lambda) > 0$ all'ordine inferiore in λ ma poi, per via di termine di ordine superiore che assumono rilevanza con l'aumentare di λ , $\beta(\lambda)$ decresce e cambia di segno.

λ^* è detto punto fisso ultravioletto, in quanto λ è sempre attratto da λ^* ad alta energia μ .



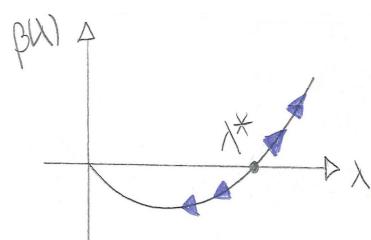
Plot schematico di una funzione beta con punto fisso ultravioletto. Le frecce blu indicano l'andamento di λ con l'aumentare di μ .

- **Punto fisso infrarosso non banale**

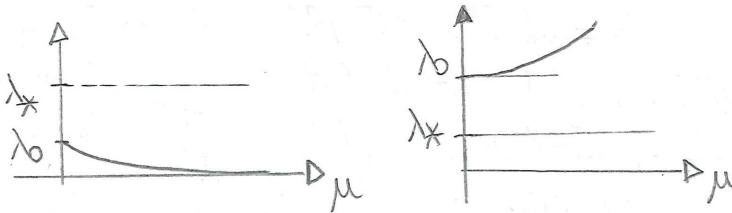
Mettiamoci ora nella situazione opposta, anch'essa schematizzata a lato, in cui:

$$\begin{aligned}\beta(\lambda_*) &= 0, \quad \beta'(\lambda_*) > 0 \\ \beta(\lambda) &< 0, \quad \lambda < \lambda_* \\ \beta(\lambda) &> 0, \quad \lambda > \lambda_*$$

In questo caso, partendo da un certo valore λ_0 nel regime IR di μ , λ tenderà ad allontanarsi da λ_* con l'aumentare di μ .

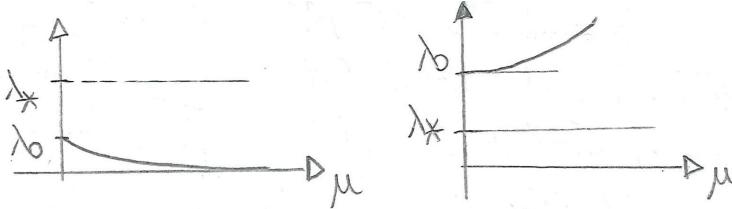


Plot schematico di una funzione beta con punto fisso infrarosso. Le frecce blu indicano l'andamento di λ con l'aumentare di μ .

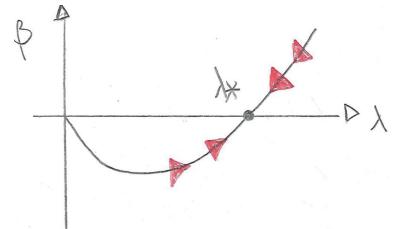


È inoltre interessante analizzare l'andamento di λ al decrescere di μ , che è esattamente il contrario rispetto a quello visto poco fa, lo schematizziamo nuovamente a lato, utilizzano frecce di un colore diverso nel grafico β vs. λ .

Ovviamente, se partiamo da un valore limite λ_{UV} e riduciamo l'energia μ , il flusso del gruppo di rinormalizzazione sarà "diretto" verso λ_* .



Qui λ_* (con l'asterisco basso) è detto punto fisso infrarosso o punto fisso di **Wilson-Fisher**.



Plot schematico di una funzione beta con punto fisso infrarosso. Le frecce rosse indicano l'andamento di λ con il decrescere di μ .

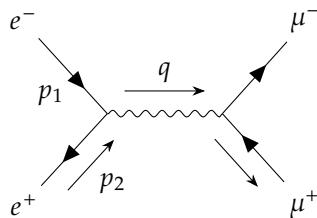
5.5 Il Teorema Ottico

Prendiamo nuovamente in considerazione l'equazione l'auto-energia del fotone, ed in particolare la sua parte scalare riportata in equazione (4.17):

$$\bar{\Pi}_{\text{1-loop}}(q^2) = \frac{e_R^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \log \frac{m^2 - x(1-x)q^2}{m^2}$$

Precedentemente, trattando lo scattering $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ nel canale t in sezione 5.3, abbiamo studiato il caso in cui $q^2 = -2|\vec{p}|^2(1 - \cos \vartheta) < 0$, che rendeva l'argomento del logaritmo sempre positivo.

Studiamo adesso un processo diverso, l'annichilazione $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$



In questo caso l'impulso trasferito tramite il propagatore del fotone è legato all'energia totale nel centro di massa ed è sempre positivo: $q^2 = (p_1 + p_2)^2 = s = 4E^2 > 0$. Ciò implica lo sviluppo di una parte immaginaria per il logaritmo presente in $\bar{\Pi}_{\text{1-loop}}(q^2)$.

Calcolo della parte immaginaria di $\bar{\Pi}(q^2)$. Quando abbiamo definito $\Delta \equiv m^2 - x(1-x)q^2$ durante il calcolo degli integrali al loop, abbiamo svolto i calcoli assumendo $\Delta > 0$. Questo ci ha permesso di effettuare una rotazione di Wick senza alcun impedimento.

Volendo tenere conto della possibilità che $\Delta < 0$, è ugualmente possibile applicare la rotazione di Wick, e la ragione è la seguente: ricordiamo che l'integrale da calcolare è

$$\int \frac{d^{d-1}\vec{l}}{(2\pi)^d} \int_{-\infty}^{+\infty} dl^0 \frac{l^{2n}}{\left[(l^0)^2 - |\vec{l}|^2 - \Delta + i\varepsilon\right]^m}$$

e questo integrale ha chiaramente poli in $l^0 = \pm \left[|\vec{l}|^2 + \Delta - i\varepsilon \right]^{1/2}$.

La situazione si fa scomoda nel momento in cui Δ è talmente negativa da rendere $|\vec{l}|^2 + \Delta < 0$.

Mettiamoci allora in tale caso estremo ed analizziamo come evolve la struttura dei poli. Possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} l^0 &= \pm \left[-|\vec{l}|^2 + \Delta - i\varepsilon \right]^{1/2} = \pm i|\vec{l}|^2 + \Delta \left[1 + \frac{i\varepsilon}{|\vec{l}|^2 + \Delta} \right]^{1/2} \\ &\approx \pm \left[i|\vec{l}|^2 + \Delta \right]^{1/2} - \varepsilon \end{aligned}$$

Dove nell'ultimo passaggio abbiamo effettuato un'espansione di Taylor sulla radice, riassorbendo il denominatore di ε in ε stesso.

In questo caso, i poli sono vicini all'asse immaginario: possiamo ancora ruotare il cammino di integrazione, ma ci conviene mantenere la notazione comprensiva di $i\varepsilon$, i.e. $\Delta \rightarrow \Delta - i\varepsilon$. Scriviamo allora:

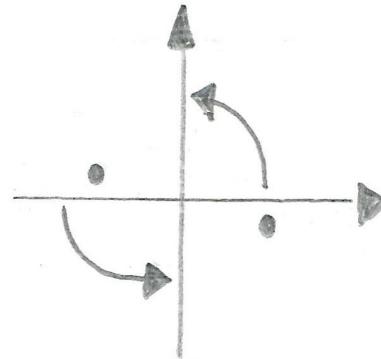
$$\bar{\Pi}_{\text{1-loop}}(q^2) = \frac{e_R^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \log \left[\frac{\Delta - i\varepsilon}{m^2} \right]$$

Sia adesso $z = \Delta - i\varepsilon$, sappiamo che $\log z = \log |z| + i \arg z$. Abbiamo quindi ancora il logaritmo con argomento positivo, che fornisce la stessa fenomenologia già discussa precedentemente (e.g. le correzioni alla carica elettrica), ma abbiamo anche una parte immaginaria, quella che vogliamo calcolare.

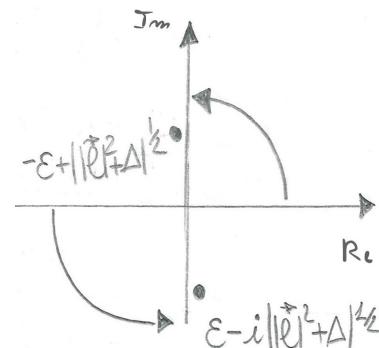
Dobbiamo tagliare lungo l'asse reale negativo, dove il logaritmo non è definito, ed essendo $z < 0$ ma leggermente shiftato verso il basso per via del $-i\varepsilon$, perciò dobbiamo valutare il suo argomento "da sotto", come schematizzato a lato.

Di conseguenza, ci accorgiamo che $\boxed{\arg z = -\pi}$.

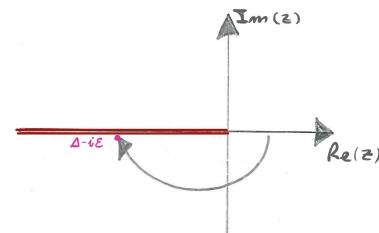
Vogliamo adesso studiare sotto quale condizione z , che dipende da x , sia negativo. Stiamo considerando il caso $\Delta = m^2 - x(1-x)q^2 \leq 0$, e risolvendo l'equazione $\Delta = 0$ troviamo gli estremi dell'intervallo di x per cui vale la nostra condizione iniziale. In sintesi:



Schematizzazione della rotazione di Wick effettuata nel caso con $\Delta > 0$. Sono rappresentati anche i poli della funzione integranda.



Schematizzazione della rotazione di Wick effettuata nel caso con $\Delta < 0$. Sono rappresentati anche i poli della funzione integranda.



$$m^2 - x(1-x)q^2 \leq 0 \quad \forall x \in [x_-, x_+],$$

$$\text{con } x_{\pm} \equiv \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4m^2/q^2}}{2}$$

Ci accorgiamo, inoltre, del fatto che $x(1-x)$ nell'intervallo $x \in [0, 1]$ si annulla agli estremi ed ha massimo $1/4$ per $x = 1/2$. Abbiamo quindi

$$m^2 - \frac{q^2}{4} \leq m^2 - x(1-x)q^2 \leq 0 \Rightarrow q^2 \geq 4m^2$$

La parte immaginaria che stiamo cercando è quindi:

$$i \operatorname{Im} \bar{\Pi}(q^2) = i \overbrace{(-\pi)}^{i \arg z} \frac{e^2}{2\pi^2} \int_{x_-}^{x_+} dx x(1-x)$$

Prendendo per buono che $\int_{x_-}^{x_+} dx x(1-x) = \frac{1}{6q^2}(2m^2 + q^2)\sqrt{1 - 4m^2/q^2}$, arriviamo al risultato finale:

$$\operatorname{Im} \bar{\Pi}(q^2) = -\frac{e^2}{12\pi} \left(1 + \frac{2m^2}{q^2}\right) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \quad (5.21)$$

generata quando $q^2 \geq m^2$. □

A questo punto è facile notare una certa familiarità in questa espressione, in particolare nel fattore $\sqrt{1 - 4m^2/q^2}$. Questo infatti è identico al fattore di spazio delle fasi⁶ per lo stato finale a due particelle di massa m ed energia del centro di massa $\sqrt{q^2}$. Non può essere una coincidenza, ed infatti non lo è: è una conseguenza dell'unitarietà della matrice S , e si rispecchia nel teorema ottico.

Per muoverci verso l'enunciato del teorema ottico, consideriamo l'operatore di scattering, i.e. la matrice S , che generalmente useremo dentro il sandwich $\langle f | \dots | i \rangle$. In particolare siamo interessati all'elemento di matrice generato dall'espansione al prim'ordine:

$$S = \mathbb{1} + iT, \quad \langle f | T | i \rangle = (2\pi)^4 \delta(p_f - p_i) \mathcal{M}_{fi}$$

Dall'unitarietà $S^\dagger S = \mathbb{1}$ si trova, sostituendo l'espansione della matrice S :

$$T - T^\dagger = iT^\dagger T$$

Adesso prendiamo il sandwich di quest'ultima equazione, ricordando che $\langle f | T^\dagger | i \rangle = (\langle i | T | f \rangle)^*$. Quello che troviamo è:

$$\langle f | T | i \rangle - (\langle i | T | f \rangle)^* = i \langle f | T^\dagger T | i \rangle$$

Nota 5.5.1 (Relazione di Completezza.)

Richiamiamo la relazione di completezza nello spazio di Hilbert multi-

⁶ Anche detto *two-particle LIPS* (= Lorentz Invariant Phase-Space).

particellare della teoria considerata, in questo caso la QED con solo elettroni e fotoni, per semplicità:

$$\mathbb{1} = \sum_X \not{\int} d\Pi_X |X\rangle\langle X| \quad (5.22)$$

dove $|X\rangle$ rappresenta un qualsiasi stato multi-particellare.

Prendiamo ad esempio lo stato con un singolo elettrone con impulso \vec{p} e polarizzazione s , i.e. $|e^-(\vec{p}, s)\rangle$. Questo stato contribuisce alla relazione di completezza nel modo seguente:

$$\mathbb{1} = \cdots + \underbrace{\sum_s \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2E_p} |e^-(\vec{p}, s)\rangle\langle e^-(\vec{p}, s)|}_{\not{\int} d\Pi_X} + \cdots$$

da cui si definisce l'integrale sommato per uno stato di singola particella, che corrisponde alla somma sui possibili gradi di libertà dello stato $|X\rangle$ considerato, siano essi discreti (come lo spin) o continui (come l'impulso).

Ovviamente alla somma contribuiranno anche stati con più di una particella, e.g. $|e^-(\vec{p}, s)\gamma(\vec{k}, \lambda)\rangle$, ed in tal caso in $\not{\int} d\Pi_X$ vengono inclusi tutti gli integrali (su \vec{p} e \vec{k}) e le somme (su s e λ).

A questo punto inseriamo la relazione di completezza (5.22) nell'equazione a cui eravamo arrivati, per mezzo di una identità tra $T^\dagger T$ nel membro a destra, ottenendo:

$$\begin{aligned} \langle f|T|i\rangle - (\langle i|T|f\rangle)^* &= i \sum_X \not{\int} d\Pi_X \langle f|T^\dagger|X\rangle\langle X|T|i\rangle \\ &= i \sum_X \not{\int} d\Pi_X (\langle X|T|f\rangle)^* \langle X|T|i\rangle \end{aligned}$$

In termini di ampiezze di scattering:

$$\begin{aligned} (2\pi)^4 \delta(p_f - p_i) \mathcal{M}_{fi} - (2\pi)^4 \delta(p_i - p_f) \mathcal{M}_{if}^* &= \\ &= i \sum_X \not{\int} d\Pi_X (2\pi)^4 \delta(p_X - p_f) \mathcal{M}_{Xf}^* (2\pi)^4 \delta(p_X - p_i) \mathcal{M}_{Xi} \end{aligned}$$

Possiamo riscrivere il prodotto delle δ nel RHS avvalendoci del fatto che la seconda delta forza $p_X = p_i$ nella prima, i.e.

$$\delta(p_X - p_f) \delta(p_X - p_i) = \delta(p_i - p_f) \delta(p_X - p_i)$$

Questo ci permette di raccogliere le δ a sinistra, che di fatto sono uguali, e semplificarle con quella a destra.

Siamo ora pronti ad enunciare il teorema ottico generalizzato, e lo facciamo adottando la notazione $\mathcal{M}_{fi} \equiv \mathcal{M}(i \rightarrow f)$, esplicitando gli stati iniziali e finali.

Inoltre ricordiamo che p_i e p_X rappresentano rispettivamente i 4-impulsi totali degli stati $|i\rangle$ ed $|X\rangle$.

Teorema 5.5.1 (Teorema Ottico Generalizzato.)

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(i \rightarrow f) - \mathcal{M}(f \rightarrow i)^* &= \\ &= i \sum_X \oint d\Pi_X (2\pi)^4 \delta(p_X - p_i) \mathcal{M}(f \rightarrow X)^* \mathcal{M}(i \rightarrow X) \end{aligned} \quad (5.23)$$

Se ora consideriamo $|i\rangle = |f\rangle = |\alpha\rangle$, ricordando che $\mathcal{M}_{\alpha\alpha} - \mathcal{M}_{\alpha\alpha}^* = 2i \operatorname{Im} \mathcal{M}_{\alpha\alpha}$, possiamo riscrivere nel seguente modo:

Teorema 5.5.2 (Teorema Ottico.)

$$2 \operatorname{Im} \mathcal{M}(\alpha \rightarrow \alpha) = \sum_X \oint d\Pi_X (2\pi)^4 \delta(p_X - p_\alpha) |\mathcal{M}(\alpha \rightarrow X)|^2 \quad (5.24)$$

Il teorema ottico vale in maniera non perturbativa ed inoltre è valido ad ogni ordine in teoria delle perturbazioni.

Questa affermazione ha un significato ben preciso. Notiamo infatti come a destra abbiamo un'ampiezza al quadrato, mentre a sinistra abbiamo semplicemente un'ampiezza.

Esempio 5.5.1 A titolo di esempio, consideriamo la teoria scalare

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4$$

con interazione:



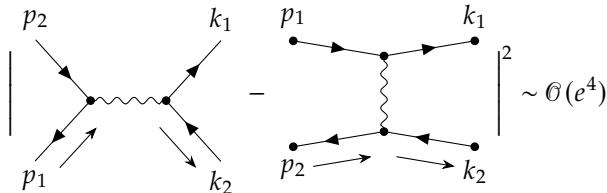
Prendiamo un semplice stato con due particelle scalari, i.e. senza spin, $|\alpha\rangle = |\vec{p}_1, \vec{p}_2\rangle$.

Concentriamoci sul RHS del teorema ottico: in linea di principio dovremmo sommare su tutti i possibili stati multi-particellari, ma possiamo troncare la serie all'ordine $\mathcal{O}(\lambda^2)$, includendo quindi a sinistra solo diagrammi del tipo sopra, interpretando le 4 linee come due particelle per lo stato iniziale e due per il finale. Se andiamo a scrivere il teorema ottico, al LHS dovremmo matchare l'ordine di interazione prodotto dal modulo quadro al RHS, ad esempio:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Im} \left[\text{Diagrammato} \right] &= \\ &= \int \frac{d^3 \vec{k}_1}{(2\pi)^3 2E_{k_1}} \int \frac{d^3 \vec{k}_2}{(2\pi)^3 2E_{k_2}} (2\pi)^4 \delta(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) \left| \text{Diagrammato} \right|^2 \end{aligned}$$

Apprendiamo quindi che l'**unitarietà connette in maniera inestribile il tree-level ed i loop!** In particolare, la parte immaginaria di un'ampiezza ad un loop è determinata da un processo al tree-level.

In luce di quanto appena visto, torniamo al nostro problema principale e consideriamo il teorema ottico in QED con soli fotoni ed elettroni. Prendiamo uno stato iniziale $|\alpha\rangle \equiv |e^-(\vec{p}_1, s_1)e^+(\vec{p}_2, s_2)\rangle$ e applichiamo il teorema ottico all'ordine minore in teoria delle perturbazioni, i.e. consideriamo solo gli stati finali a due particelle, in altre parole lo scattering BhaBha.



A questo punto, ragionando sul LHS del teorema ottico, abbiamo bisogno di ampiezze $|\alpha\rangle \rightarrow |\alpha\rangle$ dello stesso ordine, i.e. $\mathcal{O}(e^4)$, quindi abbiamo bisogno di loop nei diagrammi.

Ci aspettiamo inoltre che questi loop abbiano una parte immaginaria diversa da zero, in modo da matchare il corrispondente contributo al tree-level dovuto al BhaBha scattering.

Volendo scrivere il teorema ottico in maniera diagrammatica (e schematica), sviluppiamo il modulo quadro a destra, ottenendo:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Im} \left[\begin{array}{c} \text{Diagram with loop} \\ + \text{Diagram with loop} \\ + \text{Diagram with loop} \end{array} \right] &= \\ = \oint \left[\left| \text{Diagram with loop} \right|^2 + \left| \text{Diagram with loop} \right|^2 - \left(\text{Diagram with loop} \right) \times \left(\text{Diagram with loop} \right)^* - \right. \\ &\quad \left. - \left(\text{Diagram with loop} \right) \times \left(\text{Diagram with loop} \right)^* \right] \end{aligned}$$

La cosa interessante è che c'è una corrispondenza 1:1 per i 4 contributi!

Esercizio 5.5.1 Verificare esplicitamente che

$$2 \operatorname{Im} \left[\text{Diagram with loop} \right] = \oint (2\pi)^4 \delta(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) \left| \text{Diagram with loop} \right|^2$$

[Conti svolti Lezione 16 pag. 45÷47]

Dal risultato di questo esercizio si può notare come la condizione $q^2 > 4m^2$ sia una soglia cinematica per gli stati finali a due particelle.

Esercizio 5.5.2 Mostrare che

$$\iint \frac{d^3 \vec{k}_1}{(2\pi)^3 2E_{k_1}} \frac{d^3 \vec{k}_2}{(2\pi)^3 2E_{k_2}} (2\pi)^4 \delta(k_1 + k_2 - q) = \frac{\sqrt{\lambda(q^2, m_1^2, m_2^2)}}{32\pi^2 q^2} \int d\Omega$$

con, in generale, $m_1 \neq m_2$.

[Conti svolti Lezione 16 pag. 48÷50]

5.6 Ulteriori Implicazioni del Teorema Ottico

Consideriamo per il campo di Dirac il propagatore libero

$$\bullet \longrightarrow \bullet = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

e l'identità $\sum_s \bar{u}(s, p)u(s, p) = \not{p} + m$.

Appare evidente l'esistenza di una relazione tra l'identità appena enunciata ed il numeratore del propagatore. Tale relazione è imposta dall'universalità, sotto forma del teorema ottico.

Riprendiamo il caso trattato nell'esercizio 5.5.1: dal loop presente a sinistra otteniamo la traccia:

$$\text{Tr}\{(\not{k}_1 + m)\gamma^\mu(\not{k}_2 - m)\gamma^\nu\}$$

la cui struttura è dettata dal numeratore del propagatore.

Dal modulo quadro a destra, integrato sullo spazio delle fasi, ed in particolare dal contributo del vertice dello stato finale (che è quello che ci interessa), otteniamo una somma sulle polarizzazioni che restituisce la stessa traccia:

$$\sum_{r_1, r_2} \bar{u}(k_1, r_1)v(k_2, r_2)\gamma^\mu\bar{v}(k_2, r_2)u(k_1, r_1)\gamma^\nu = \text{Tr}\{(\not{k}_1 + m)\gamma^\mu(\not{k}_2 - m)\gamma^\nu\}$$

Di conseguenza possiamo affermare quanto segue: *affinché il teorema ottico sia valido, il numeratore di un propagatore deve essere uguale alla somma sugli stati di spin fisici.*

Qui stiamo dando un'idea generale di come vanno le cose, ovviamente ci sono fattori moltiplicativi e segni vari che sono omessi. In particolare abbiamo effettuato il cambio di variabile $k_2 \rightarrow -k_2$ in modo da rispecchiare la notazione che si ottiene al RHS dalla somma sulle polarizzazioni. Lo facciamo inoltre perché l'impulso nel loop fluisce in direzione opposta rispetto alla linea fermionica corrispondente a k_2 .

Somma sugli stati di spin nel caso del fotone. Diciamo di voler calcolare la somma sugli stati di polarizzazione per un fotone on-shell con 4-impulso k^μ , da cui $k^0 = |\vec{k}|$, $k^2 = 0$. Tale somma coinvolgerà semplicemente due polarizzazioni per l'elicità. In formule vogliamo calcolare:

$$\sum_{\lambda=\pm 1} \varepsilon^\mu(\vec{k}, \lambda)\varepsilon^\nu(\vec{k}, \lambda)^*$$

È importante notare come non sia fattibile scrivere la somma sui modi trasversi in una forma che sia covariante. Difatti gli unici tensori Lorentz-invarianti che possiamo usare sono $g^{\mu\nu}$ e $p^\mu p^\nu/p^2$, ma per un fotone on-shell il secondo non è ben definito! Ciò è conseguenza del fatto che in realtà i

vettori di polarizzazione ε^μ non sono dei 4-vettori, nonostante abbiano un indice di Lorentz, ma su questo torneremo in seguito.

Consideriamo il sistema di riferimento in cui $k^\mu = (E, 0, 0, E)$; i due stati fisici di polarizzazione in questo caso possono essere scritti come segue:

$$\begin{cases} \varepsilon^\mu(\vec{k}, \lambda = +1) = \frac{-1}{\sqrt{2}}(0, 1, +i, 0) \\ \varepsilon^\mu(\vec{k}, \lambda = -1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -i, 0) \end{cases}$$

Questi stati sono detti di polarizzazione circolare, e verranno derivati nella seconda parte di questi appunti.

Se svolgiamo il calcolo esplicitamente troviamo

$$\sum_{\lambda=\pm 1} \varepsilon^\mu(\vec{k}, \lambda) \varepsilon^\nu(\vec{k}, \lambda)^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Questo risultato può essere riscritto in una forma più utile sfruttando il tensore metrico: Se partiamo da $g^{\mu\nu}$ con segnatura $(+ - - -)$, allora notiamo come $-g^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ riproduca il nostro risultato a meno degli estremi della diagonale.

Se introduciamo il vettore $\bar{k}^\mu = (-E, 0, 0, E)$, è facile ricavare il fatto che $k \cdot \bar{k} = -2E^2 = \bar{k} \cdot k$. Inoltre

$$k^\mu \bar{k}^\nu + \bar{k}^\mu k^\nu = \text{diag}(-2E^2, 0, 0, 2E^2) \Rightarrow \frac{k^\mu \bar{k}^\nu + \bar{k}^\mu k^\nu}{k \cdot \bar{k}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Di conseguenza possiamo scrivere:

$$\sum_{\lambda=\pm 1} \varepsilon^\mu(\vec{k}, \lambda) \varepsilon^\nu(\vec{k}, \lambda)^* = -g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu \bar{k}^\nu + \bar{k}^\mu k^\nu}{k \cdot \bar{k}} \quad (5.25)$$

□

Ricordiamo ora che il propagatore del fotone, nella gauge R_ξ (che per $\xi = 1$ riproduce le gauge di Feynman), si scrive:

$$\overrightarrow{k}^{\mu \nu} = \frac{i}{k^2 + i\varepsilon} \left[-g^{\mu\nu} + (1 - \xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right]$$

ed è evidente che il numeratore del propagatore NON è uguale alla somma sulle polarizzazioni fisiche (5.25)! Dobbiamo interpretarla come una **violazione dell'unitarietà**.

Consideriamo il processo $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$. In maniera schematica, il teorema ottico in questo caso ci dice:

$$2 \operatorname{Im} \left[\text{Diagrammato} \right] = \sum d\Pi \left| \text{Diagrammato} \right|^2$$

Questa uguaglianza è garantita dalle **identità di Ward** e di conseguenza l'unitarietà non è violata.

Per intenderci:

- Nel LHS, i termini proporzionali a k^μ nei propagatori si annullano quando contratti con il resto dell'ampiezza.
- Nel RHS, uno shift del vettore di polarizzazione per mezzo di un termine proporzionale a k^μ non ha alcun effetto in quanto porta un contributo nullo sotto identità di Ward.

Insomma, alla fine dei conti solo i termini proporzionali a $g^{\mu\nu}$ sono importanti, sia nel propagatore del fotone che nella somma sugli stati di polarizzazione, ergo l'unitarietà è preservata.

Inoltre, possiamo affermare che le identità di Ward sono conseguenza del fatto che il fotone si accoppia con una corrente conservata⁷; questo, a sua volta è conseguenza dell'invarianza di gauge. Arriviamo quindi alla conclusione che la **conservazione dell'unitarietà per particelle massless con spin 1 richiede l'invarianza di gauge**.

5.7 Il Momento Magnetico Anomalo

Riprendiamo l'espressione trovata per il fattore di forma magnetico⁸ dall'equazione (2.41), ora reinterpretata in termine dei parametri rinormalizzati:

$$F_{2,1\text{-loop}}(q^2) = 2ie^2 \int dx dy dz \delta(x+y+z-1) \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{\mathcal{N}_2}{(l^2 - \Delta + i\varepsilon)^3}$$

con $\mathcal{N}_2 = 2m^2(1-z)[2z + (4-d)(1-z)]$
e $\Delta = (1-z)^2 m^2 - xy q^2$

Quello che ci interessa fare a questo punto è calcolare il valore di integrale quando $q^2 = 0$; le ragioni fisiche di questa scelta saranno chiare a breve.

Inoltre, per i motivi discussi durante il calcolo del vertice di interazione ad un loop, questo integrale non è divergente nel regime UV⁹, ergo possiamo porre fin da subito $d = 4$, il che implica $\boxed{\mathcal{N}_2 = 4m^2 z(1-z)}$.

Attacchiamo allora l'integrale più interno:

$$\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{4m^2 z(1-z)}{(l^2 - \Delta + i\varepsilon)^3} \stackrel{*}{=}$$

⁷ come già osservato nella nota 1.3.2 ⁸ Ricordiamo che, per quanto riportato in equazione (2.36), $F_{2,\text{TREE}}(q^2) = 0$, quindi siamo interessati direttamente al termine ad un loop.

⁹ Difatti la divergenza ultravioletta del vertice di interazione di QED deriva unicamente dal fattore di forma elettrico.

Essendo $\Delta = (1-z)^2 m^2 - \cancel{xyq^2} > 0$, per via dell'imposizione di $q^2 = 0$, non abbiamo problemi di sorta nell'applicare la nostra cara rotazione di Wick, ottenendo quindi:

$$\stackrel{*}{=} i \int \frac{d^4 l_E}{(2\pi)^4} \frac{4m^2 z(1-z)}{(-1)(l_E^2 + \Delta)^3} \stackrel{*}{=}$$

Abbiamo nuovamente a che fare con un integrale euclideo, che ormai mangiamo a colazione grazie all'equazione (2.15), in questo caso applicata con $n = 0, m = 3$ e $d = 4$. Di conseguenza:

$$\stackrel{*}{=} (-i)4m^2 z(1-z) \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{\Delta} \frac{\Gamma(1)\Gamma(2)}{\Gamma(2)\Gamma(3)} = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{(-i)4m^2 z(1-z)}{(1-z)^2 m^2} \frac{1}{2}$$

In conclusione abbiamo il nostro risultato:

$$\boxed{\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{4m^2 z(1-z)}{(l^2 - \Delta + i\varepsilon)^3} = \frac{(-i)z}{8\pi^2(1-z)}}$$

A questo punto possiamo procedere con l'integrale principale. Scriviamo:

$$\begin{aligned} F_{2,1\text{-loop}}(q^2 = 0) &= 2|e^2 \int dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{(-i)z}{8\pi^2(1-z)} \\ &= \frac{e^2}{4\pi^2} \int dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{z}{(1-z)} \stackrel{\spadesuit}{=} \end{aligned}$$

Ora integriamo su x e y usando la δ , i.e.:

$$\int_0^1 dx dy \delta(x+y+z-1) = \int_0^{1-z} dx = (1-z)$$

Possiamo quindi semplificare il denominatore nell'integrale precedente, ottenendo

$$\stackrel{\spadesuit}{=} \frac{e^2}{4\pi^2} \int_0^1 dz z$$

A questo punto il gioco è fatto, integriamo su z e, ricordando la definizione della costante di struttura fine $\alpha = e^2/4\pi$, arriviamo al risultato finale:

$$\boxed{F_{2,1\text{-loop}}(q^2 = 0) = \frac{\alpha}{2\pi}} \quad (5.26)$$

Un risultato che sembra forse troppo perfetto e semplice, se consideriamo che per ricavare il fattore di forma magnetico servono circa 10 pagine di conti e la sua struttura lunghi dall'essere semplice ed elegante.

Un risultato talmente bello che qualcuno se l'è perfino fatto incidere sulla tomba, vedere per credere.

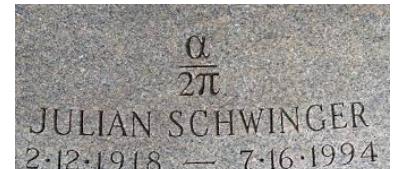
Un risultato che, per essere compreso appieno, necessita di una piccola introduzione.

Dall'esercizio 2.4.2: la δ ci permette di togliere una delle variabili, ma dobbiamo ricordarci dei limiti di integrazione! Infatti

$$0 \leq y \stackrel{\delta}{=} 1 - x - z \leq 1$$

implica

$$\begin{cases} 1 - x - z \leq 1 \\ 1 - x - z \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z \geq 0 \\ x \leq 1 - z \end{cases}$$



Boston, lapide della tomba di Julian Schwinger, premio Nobel insieme a Feynman e Tomonaga per gli studi sulla QED, uno fra tanti la sua rinormalizzazione al prim'ordine.

Momento giromagnetico dell'elettrone

Definizione 5.7.1 (Momento Magnetico.)

Consideriamo una corrente planare di modulo I , che racchiude una superficie di area S tale che $\vec{S} = S\hat{n}$, come in figura a lato.

Si definisce momento magnetico il vettore

$$\vec{\mu} = I\vec{S} \quad (5.27)$$

Perpendicolare rispetto alla spira percorsa dalla corrente, secondo la regola della mano destra.

In presenza di un campo magnetico \vec{B} , una spira subisce una coppia data da $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$, e si sviluppa un'energia potenziale associata alla direzione della spira rispetto al campo magnetico, i.e.:

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad (5.28)$$

La configurazione con $\vec{\mu} \parallel \vec{B}$ coincide con la configurazione ad energia potenziale minore.

Consideriamo ora il caso in cui la corrente I è generata da una carica q che si muove nella spira con velocità angolare ω . Tale corrente è esprimibile come segue:

$$I = \frac{q}{T} = \frac{q\omega}{2\pi}$$

Di conseguenza, assumendo la spira come circolare, con raggio a , abbiamo dalla sua definizione:

$$\vec{\mu} = \frac{q\omega}{2\pi} \pi a^2 \hat{n} = \frac{q}{2m} (\omega m a^2) \hat{n} = \frac{q}{2m} \vec{L}$$

dove abbiamo introdotto il momento angolare $\vec{L} = (\omega m a^2) \hat{n}$.

Quindi abbiamo:

$$\vec{\mu} = \frac{q}{2m} \vec{L} ; \quad U = -\frac{q}{2m} \vec{L} \cdot \vec{B}$$

Classicamente, il momento magnetico è proporzionale al momento angolare delle particelle cariche. In meccanica quantistica, questa relazione si generalizza con la presenza dello spin.

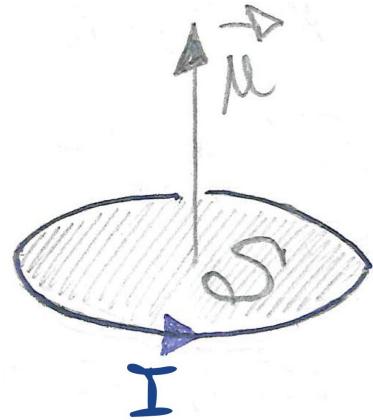
Prendendo ad esempio un elettrone a riposo, il momento di dipolo magnetico è fornito dalla relazione:

$$\vec{\mu}_e = \frac{-g_e}{2m} \vec{S} \quad (5.29)$$

dove \vec{S} è l'operatore di spin, mentre g è detto **momento giromagnetico dell'elettrone**.

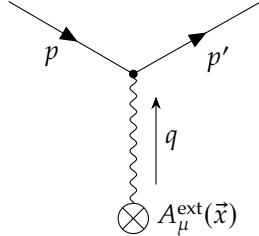
Inoltre, l'Hamiltoniana di interazione in presenza di un campo magnetico esterno è

$$H_{\text{int}} = +\frac{g_e}{2m} \vec{S} \cdot \vec{B} \quad (5.30)$$



Predizione di g in QED

Vogliamo calcolare il valore del momento giromagnetico dell'elettrone in QED al tree-level. per farlo partiamo nuovamente dallo scattering Coulombiano in presenza di un potenziale esterno statico



$$\text{con } q = p' - p.$$

Come già argomentato all'inizio di questo capitolo, si trova:

$$S_{fi} = (2\pi)\delta(E_{p'} - E_p)(ie)\bar{u}(p', s)\gamma^\mu u(p, r)A_\mu^{\text{ext}}(\vec{q})$$

La differenza rispetto a quanto già visto sta nel fatto che ora associamo ad A^μ il 4-potenziale elettromagnetico dovuto ad un campo magnetico, i.e.

$$\begin{cases} A^0 = 0 \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{cases}$$

In questo caso, la parte dell'ampiezza che sopravvive è quella che concerne la corrente spaziale, ovvero:

$$[S_{fi} = (2\pi)\delta(E_{p'} - E_p)(ie)\bar{u}(p', s)\gamma^i u(p, r)A_i^{\text{ext}}(\vec{q})]$$

Ora valutiamone il limite non relativistico, lavorando al primo ordine in \vec{q} e imponendo $\vec{p} = 0$ in modo da poterci concentrare sullo spin.

La cinematica è quindi descritta da:

$$p^\mu = (m, -\vec{q}/2) \quad p'^\mu = (m, \vec{q}/2)$$

mentre possiamo esprimere gli spinori come segue:

$$u(p, s) = \left(\frac{E + m}{2m} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \chi(s) \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi(s) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \chi(s) \\ -\vec{\sigma} \cdot \vec{q} \chi(s) \end{pmatrix}$$

Adesso dobbiamo calcolare esplicitamente la corrente $u^\dagger(p', s)\gamma^0\gamma^i u(p, r)$.

Con la notazione di Dirac, abbiamo innanzitutto:

$$\gamma^0\gamma^i = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

Di conseguenza:

$$\begin{aligned} u^\dagger(p', s) \gamma^0 \gamma^i u(p, r) &= \begin{pmatrix} \chi^\dagger(s) & \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{q}}{4m} \chi^\dagger(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sigma^i \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{q}}{4m} \chi(r) \\ \sigma^i \chi(r) \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{4m} \chi^\dagger(s) [\sigma^i (\vec{\sigma} \cdot \vec{q})] \chi(r) + \frac{1}{4m} \chi^\dagger(s) [(\vec{\sigma} \cdot \vec{q}) \sigma^i] \chi(r) \\ &= \frac{1}{4m} \chi^\dagger(s) [\sigma^j \sigma^i - \sigma^i \sigma^j] q^j \chi(r) \end{aligned}$$

Ricordiamo a questo punto le relazioni di commutazione tra le matrici di Pauli: $[\sigma^j, \sigma^i] = 2i\epsilon^{ijk}\sigma^k$ e con un paio di ulteriori manipolazioni (tra cui in particolare $\epsilon^{jik} = -\epsilon^{ijk}$) arriviamo al risultato finale:

$$\bar{u}(p', s) \gamma^i u(p, r) = \underbrace{\frac{-i}{m} \epsilon^{ijk} q^j \chi^\dagger(s) \frac{\sigma^k}{2} \chi(r)}_{\equiv \langle s | S^k | r \rangle} \quad (5.31)$$

Ora possiamo sostituire la corrente nell'espressione per l'ampiezza, riscrivendola come segue:

$$\begin{aligned} S_{fi} &\stackrel{\text{NR}}{=} (2\pi)\delta(E_{p'} - E_p)(ie) \left[\frac{-i}{m} \epsilon^{ijk} q^j \langle s | S^k | r \rangle \right] A_i^{\text{ext}}(\vec{q}) \\ &= (2\pi)\delta(E_{p'} - E_p) \left[\frac{e}{m} \epsilon^{kji} q^j \langle s | S^k | r \rangle \right] \mathcal{A}^{\text{ext}, i}(\vec{q}) \end{aligned}$$

Ricordiamo che la relazione $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ si traduce in $B^k = \epsilon^{kji} \partial_j A^i$, che nello spazio di Fourier diventa $B^k = \epsilon^{kji} i q^j A^i$, da cui

$$-iB^k = \epsilon^{kji} q^j \mathcal{A}^i$$

Abbiamo quindi finalmente l'ampiezza in QED che cercavamo:

$$S_{fi} \stackrel{\text{NR}}{=} (2\pi)\delta(E_{p'} - E_p) \left[\frac{(-ie)}{m} B^k \langle s | S^k | r \rangle \right] \quad (5.32)$$

A questo punto compariamo quanto appena trovato con l'ampiezza calcolata in meccanica quantistica, utilizzando l'operatore (5.30)

$$H_{\text{int}} = \frac{ge}{2m} \vec{S} \cdot \vec{B} = \frac{ge}{2m} S^k B^k$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} A(|s\rangle \rightarrow |r\rangle) &= (2\pi)\delta(E_{p'} - E_p)(-i)\langle s | H_{\text{int}} | r \rangle \\ &= (2\pi)\delta(E_{p'} - E_p) \frac{g(-ie)}{2m} \langle s | S^k | r \rangle B^k \end{aligned} \quad (5.33)$$

È evidente che il momento giromagnetico dell'elettrone, al tree-level, debba essere

$$[g = 2] \quad (5.34)$$

Ricordiamo che S^k è l'operatore di spin per il campo di Dirac.

Risulta utile riscrivere la parte spaziale del 4-potenziale in forma controvariante $A_i \rightarrow A^i$, il che comporta un cambio di segno cancellato dalla permutazione del simbolo di Levi-Civita $\epsilon^{ijk} \rightarrow -\epsilon^{kji}$, in modo da poter inserire nell'equazione il campo magnetico.

È interessante notare come l'equazione (5.32) ci stia dicendo che per mezzo dell'interazione con il campo magnetico si possono avere transizioni di spin!

g oltre il tree level

Includiamo le correzioni al loop nel calcolo fatto in sezione precedente, in particolare le correzioni al vertice, i.e.:

$$\bar{u}(p', s)(ie\gamma^\mu)u(p, r) \rightarrow \bar{u}(p', s)ie\Gamma^\mu(p', p)u(p, r)$$

con, dalla (2.34): $\Gamma^\mu(p', p) = F_1(q^2)\gamma^\mu + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}F_2(q^2)$.

Dopo il processo di rinormalizzazione (in cui viene cancellato il termine UV-divergente $F_{1,1\text{-loop}}(0)$ per mezzo del contro-termine δ_1) il fattore di forma elettrico ha la seguente struttura:

$$F_1(q^2) \approx 1 + \left. \frac{dF_{1,1\text{-loop}}(q^2)}{dq^2} \right|_{q^2=0} q^2 + \dots$$

Nel paragrafo precedente ci siamo limitati al tree-level, $F_1(q^2) = 1$, e abbiamo detto di voler lavorare al prim'ordine in q . Di conseguenza, introducendo correzioni al loop non abbiamo bisogno di aggiungere termini dipendenti da F_1 e possiamo concentrarci su F_2 :

$$\boxed{\Gamma^\mu \rightarrow \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}F_2(q^2 = 0) \quad , \quad q_\mu = (0, \vec{q})}$$

In termini di ampiezza di scattering, la correzione da calcolare è, trascurando il fattore $2\pi\delta(E_{p'} - E_p)$:

$$\Delta S_{fi} = (ie)\bar{u}(p', s)\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}F_2(q^2 = 0)u(p, r)A_\mu^{\text{ext}}(\vec{q}) \quad , \quad A_\mu = (0, \vec{A})$$

di cui sopravvive solo la parte spaziale, che riportiamo utilizzando la notazione controvariante sia per l'impulso che per il potenziale (abbiamo due segni “–” che si elidono a vicenda):

$$\boxed{\Delta S_{fi} = \frac{(ie)}{2m}\bar{u}(p', s)i\sigma^{ij}q^jF_2(q^2 = 0)u(p, r)A^i} \quad (5.35)$$

Calcoliamo esplicitamente il prodotto spinoriale, utilizzando per prima cosa il commutatore tra le gamma di Dirac, con cui si identificano le matrici di Pauli in forma relativistica, $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ e sostituendo le gamma stese in notazione di Dirac:

$$\begin{aligned} \bar{u}(p', s)\sigma^{ij}u(p, r) &= \bar{u}(p', s)\frac{i}{2}(\gamma^i\gamma^j - \gamma^j\gamma^i)u(p, r) \\ &= \frac{i}{2}\bar{u}(p', s)\left[\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}\right]u(p, r) \\ &= \frac{i}{2}\bar{u}(p', s)\begin{pmatrix} -\sigma^i\sigma^j + \sigma^j\sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i\sigma^j + \sigma^j\sigma^i \end{pmatrix}u(p, r) \stackrel{*}{=} \end{aligned}$$

Sulla diagonale riconosciamo il commutatore tra matrici di Pauli: $[\sigma^j, \sigma^i] = 2i\epsilon^{ijk}\sigma^k$.

Inoltre, come già ribadito, vogliamo mantenere il calcolo al prim'ordine in q , quindi, data la presenza di q^j in ΔS_{fi} , possiamo trascurare la parte

proporzionale a q nell'espressione dello spinore, i.e. prendiamo:

$$u(p, s) = \begin{pmatrix} \chi(s) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Questo significa che possiamo trascurare la seconda riga della matrice al centro, in quanto il suo contributo verrà annullato dal prodotto con gli spinori.

In sostanza, otteniamo:

$$\stackrel{*}{=} \frac{i}{2} \chi^\dagger(s) (2i\epsilon^{jik} \sigma^k) \chi(r) = -2\epsilon^{jik} \chi^\dagger(s) \frac{\sigma^k}{2} \chi(r) = -2\epsilon^{jik} \langle s | S^k | r \rangle$$

Riassumendo:

$$\bar{u}(p', s) \sigma^{ij} u(p, r) = -2\epsilon^{jik} \langle s | S^k | r \rangle \quad (5.36)$$

Sostituiamo quindi la (5.36) nella (5.35) e troviamo:

$$\Delta S_{fi} = -\frac{e}{2m} q^j F_2(q^2 = 0) A^i [(-2)\epsilon^{jik} \langle s | S^k | r \rangle]$$

Permutiamo gli indici del simbolo di Levi-Civita $\epsilon^{jik} \rightarrow \epsilon^{kji}$ (questa volta la permutazione è pari, quindi non produce nessun “-”) e ritroviamo l'espressione del campo magnetico $-iB^k = \epsilon^{kji} q^j A^i$. Quindi troviamo:

$$\boxed{\Delta S_{fi} = \frac{-ie}{m} F_2(q^2 = 0) B^k \langle s | S^k | r \rangle} \quad (5.37)$$

Possiamo allora scrivere l'**ampiezza totale**:

$$\boxed{S_{fi} + \Delta S_{fi} = (2\pi) \delta(E_{p'} - E_p) \frac{-ie}{2m} [2 + 2F_2(q^2 = 0)] B^k \langle s | S^k | r \rangle} \quad (5.38)$$

Non ci resta che comparare la (5.38) con la (5.33). Imponendo il loro rapporto = 1, troviamo la predizione per il **fattore giromagnetico dell'elettrone ad un loop**, i.e.”

$$\boxed{g = 2 [1 + F_{2,1\text{-loop}}(q^2 = 0)]}, \text{ con } F_{2,1\text{-loop}}(q^2 = 0) \stackrel{5.26}{=} \frac{\alpha}{2\pi} \quad (5.39)$$

Possiamo andare oltre: esplicitando il valore del fattore di forma magnetico troviamo $g = 2 + \alpha/\pi$; inoltre possiamo dare la seguente definizione:

Definizione 5.7.2 (Momento di dipolo magnetico anomalo dell'elettrone.)

Sia g il fattore giromagnetico dell'elettrone a qualunque ordine, si definisce momento magnetico anomalo (di dipolo) il fattore:

$$\boxed{a_e \equiv \frac{g - 2}{2} \xrightarrow[\text{in QED}]{\text{@ 1-loop}} a_e = \frac{\alpha}{2\pi}} \quad (5.40)$$

Nota 5.7.1 Abbiamo incluso solo un loop nel nostro calcolo. Tenere conto di correzioni con un numero di loop maggiore è piuttosto complesso se si vuole procedere analiticamente, in quanto il numero di diagrammi cresce esponenzialmente all'aumentare del numero di loop considerati.

Inoltre, quando il numero di loop diventa sufficientemente elevato, andrebbe tenuto conto anche delle interazioni forti e deboli, dato che i fotoni possono interagire sia con gli adroni che con i W^\pm .

Ciò nonostante, persone con molta pazienza, tanto tempo libero, poca sanità mentale o, forse, computer sufficientemente potenti hanno calcolato il momento magnetico anomalo per l'elettrone ed il muone fino all'ordine α^5 .

D'altro canto, sperimentalmente conosciamo queste grandezze fisiche con un'enorme precisione:

$$\begin{cases} a_e^{\text{exp}} = 0.00115965218073(28) \\ a_\mu^{\text{exp}} = 0.00116592091(63) \end{cases}$$

e c'è una piccola discrepanza nel caso del muone:

$$a_\mu^{\text{exp}} - a_\mu^{\text{th}} \approx (23 \pm 6) \times 10^{-10}$$

Questa discrepanza potrebbe dipendere da fisica oltre il modello standard, ma potrebbe anche dipendere da un piccolo errore teorico nella modellizzazione delle interazioni tra fotoni ed adroni.

5.8 Divergenze Infrarosse

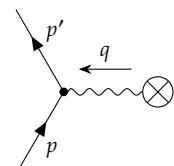
Lo studio delle divergenze infrarosse richiederebbe un corso a parte, in questa sezione vogliamo dare semplicemente alcune utili nozioni basilari.

Abbiamo già incontrato questo tipo di divergenze nel calcolo della deriva-ta dell'auto-energia dell'elettrone nell'esercizio 2.3.1, così come anche nel calcolo del fattore di forma elettrico al loop in $q^2 = 0$, nell'esercizio 2.4.2, e abbiamo visto che possono essere regolarizzate a patto dell'inserimento di una massa del fotone fittizia.

Scattering Coulombiano al tree-level

Studiamo nuovamente lo scattering Coulombiano, di cui riportiamo la cinematica:

$$\begin{aligned} p + q &= p' \\ E_p &= E_{p'} \\ q^2 &= -|\vec{q}|^2 = -2|\vec{p}|^2(1 - \cos \vartheta) \end{aligned} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} q &= p' - p \\ |\vec{p}| &= |\vec{p}'| \\ q^2 &= -4|\vec{p}|^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \end{aligned}}$$



Mentre per quanto riguarda l'ampiezza del processo al tree-level, abbiamo:

$$i\mathcal{M}_0 = (ie)\bar{u}(p', s)\gamma^0 u(p, r) \frac{Ze}{|\vec{q}|^2}$$

Ne consegue che, ricordando quanto detto nella nota 2.2.1 in merito all'origine delle tracce e sfruttando le proprietà delle matrici γ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{s,r} |\mathcal{M}_0|^2 &= \frac{Z^2 e^4}{2|\vec{q}|^4} \text{Tr}\{(\not{p}' + m)\gamma^0(\not{p} + m)\gamma^0\} \\ &= \frac{Z^2 e^4}{2|\vec{q}|^4} 4[2p^0 p'^0 + m^2 - p \cdot p'] \stackrel{\spadesuit}{=} \end{aligned}$$

Adesso sostituiamo le condizioni cinematiche e semplifichiamo il semplificabile:

$$\stackrel{\spadesuit}{=} \frac{Z^2 e^4}{8|\vec{p}|^4 \sin^4 \frac{\vartheta}{2}} [E^2 + m^2 + |\vec{p}|^2 \cos \vartheta]$$

Si verifica che $E^2 + m^2 + |\vec{p}|^2 \cos \vartheta = 2E^2 [1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}]$ con $\beta \equiv \frac{|\vec{p}|}{E}$, quindi in definitiva:

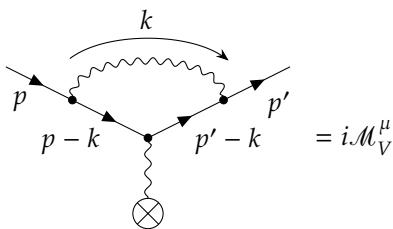
$$\frac{1}{2} \sum_{s,r} |\mathcal{M}_0|^2 = \frac{Z^2 e^4}{4|\vec{p}|^2 \beta^2 \sin^4 \frac{\vartheta}{2}} \left[1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right]$$

Preso per nota la sezione d'urto differenziale $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(4\pi)^2} \times \frac{1}{2} \sum_{s,r} |\mathcal{M}_0|^2$, abbiamo in questo caso:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \sum_{s,r} |\mathcal{M}_0|^2 = \frac{Z^2 \alpha^2}{4|\vec{p}|^2 \beta^2 \sin^4 \frac{\vartheta}{2}} \left[1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right]$$

Correzioni al vertice

Includiamo adesso le correzioni al vertice, studiando nuovamente il diagramma:



V sta ad identificare la presenza di un fotone Virtuale, e l'indice μ sarà contratto con la carica esterna che, come specificato nel seguito, al momento non abbiamo interesse a considerare.

Abbiamo già studiato questo diagramma in precedenza, e abbiamo anche visto quanto fosse complesso il calcolo della sua ampiezza, da cui emergeva una divergenza infrarossa.

L'idea è quella di svolgere nuovamente il calcolo di tale ampiezza, **tralasciando il potenziale generato dal nucleo**, utilizzando una serie di approssimazioni ad-hoc, utili ad isolare fin dal principio il termine divergente nel regime infrarosso.

In maniera preliminare scriviamo:

$$i\mathcal{M}_V^\mu = i(i\epsilon)^3 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \frac{\bar{u}(p')\gamma^\rho(p' - k + m)\gamma^\mu(p - k + m)\gamma_\rho u(p)}{[(p' - k)^2 - m^2 + i\epsilon][(p - k)^2 - m^2 + i\epsilon]}$$

► Siccome le divergenze IR appaiono nel limite $\boxed{k \rightarrow 0}$, questa sarà la nostra prima semplificazione: trascuriamo k al numeratore e k^2 al denominatore; inoltre prendiamo i fermioni sulla shell di massa.

$$i\mathcal{M}_V^\mu \stackrel{\text{IR}}{=} i(i\epsilon)^3 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \frac{\bar{u}(p')\gamma^\rho(p' + m)\gamma^\mu(p + m)\gamma_\rho u(p)}{[-2k \cdot p' + i\epsilon][-2k \cdot p + i\epsilon]}$$

► Ora semplifichiamo il numeratore per mezzo dell'equazione di Dirac:

$$\begin{aligned} \bar{u}(p')(p' - m) &= 0 \\ (\not{p} - m)u(p) &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \bar{u}(p')\not{p}' = \bar{u}(p')m \\ \not{p}u(p) = mu(p) \end{cases}$$

Ma per farlo dobbiamo "girare" i prodotti $\gamma^\rho\not{p}'$ e $\not{p}\gamma_\rho$ sfruttando le relazioni di anticommutazione tra le gamma di Dirac $[\gamma^\rho, \gamma^\mu]_+ = 2g^{\rho\mu}$.

Applicando questa operazione ed utilizzando successivamente l'[equazione di Dirac](#) otteniamo:

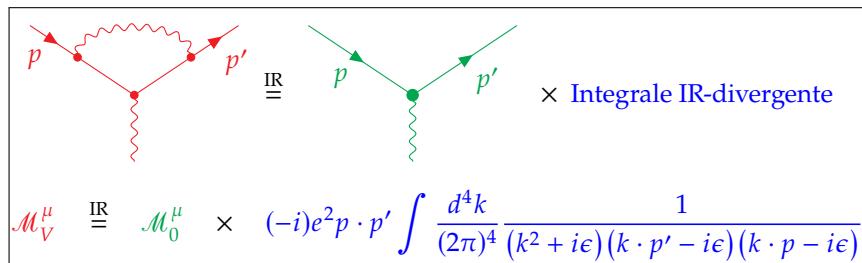
$$\begin{aligned} \mathcal{N}^\mu &= \bar{u}(p')(-\cancel{p'}\cancel{\gamma^\rho} + 2p'^\rho + m\cancel{\gamma^\rho})\gamma^\mu(-\cancel{\gamma_\rho}\cancel{p} + 2p_\rho + \cancel{\gamma_\rho}\cancel{m})u(p) \\ &= 4p' \cdot p \bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) \end{aligned}$$

Arriviamo quindi al seguente risultato

$$\boxed{i\mathcal{M}_V^\mu \stackrel{\text{IR}}{=} \bar{u}(p')(ie\gamma^\mu)u(p)(ie)^2 4ip' \cdot p \times \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + i\epsilon)(2k \cdot p' - i\epsilon)(2k \cdot p - i\epsilon)}} \quad (5.41)$$

Ci accorgiamo quindi del fatto che, nel limite infrarosso $k \rightarrow 0$, la **correzione virtuale** (dovuta allo scambio di un fotone virtuale tra le gambe esterne) **fattorizza nell'ampiezza al tree-level per un integrale IR-divergente**.

Diagrammaticamente:



A titolo di esempio riportiamo l'operazione citata nel caso di p' :

$$\begin{aligned} \gamma^\rho \not{p}' &= \gamma^\rho \gamma^\mu p'_\mu = (-\gamma^\mu \gamma^\rho + 2g^{\rho\mu})p'_\mu = \\ &= -\not{p}' \gamma^\rho + 2p'^\rho \end{aligned}$$

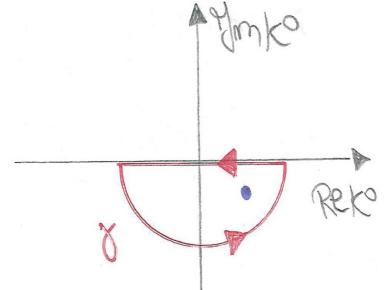
Notiamo come in questo passaggio il fattore 4 venga semplificato raccogliendo un 2 in ciascuna delle due parentesi a denominatore.

Concentriamoci a questo punto sull'integrale su k e separiamo l'integrazione spaziale da quella temporale:

$$\int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk^0}{(2\pi)} \frac{1}{[(k^0)^2 - |\vec{k}|^2 + i\epsilon]} \frac{1}{(k^0 p'^0 - \vec{k} \cdot \vec{p}' - i\epsilon)(k^0 p^0 - \vec{k} \cdot \vec{p} - i\epsilon)} \stackrel{*}{=}$$

Consideriamo quindi i poli nel piano complesso di k^0 , e ci accorgiamo che tre dei poli si trovano sopra l'asse reale:

$$k^0 = \begin{cases} |\vec{k}| - i\epsilon \\ -|\vec{k}| + i\epsilon \end{cases}, \quad \begin{cases} k^0 = \frac{\vec{k} \cdot \vec{p}'}{p'^0} + i\epsilon \\ k^0 = \frac{\vec{k} \cdot \vec{p}}{p^0} + i\epsilon \end{cases}$$



Per comodità integriamo su una circonferenza nella parte inferiore del piano complesso come mostrato a lato, in modo da includere solo il polo $k_*^0 = |\vec{k}| - i\epsilon$.

Svolgendo il calcolo applicando il teorema dei residui e successivamente passando in coordinate polari modificando la misura di integrazione $d^3 \vec{k} \rightarrow |\vec{k}|^2 d|\vec{k}| d\Omega$, otteniamo:

$$\begin{aligned} &\stackrel{*}{=} -i \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2|\vec{k}|} \frac{1}{|\vec{k}|^2 (p'^0 - |\vec{p}'| \cos \vartheta_{kp'}) (p^0 - |\vec{p}| \cos \vartheta_{kp})} \\ &= -i \int \frac{|\vec{k}|^2 d|\vec{k}| d\Omega}{(2\pi)^3 2|\vec{k}|} \frac{1}{|\vec{k}|^2 (p'^0 - |\vec{p}'| \cos \vartheta_{kp'}) (p^0 - |\vec{p}| \cos \vartheta_{kp})} \end{aligned}$$

In definitiva abbiamo l'espressione finale per la correzione virtuale:

$$\mathcal{M}_V^\mu \stackrel{\text{IR}}{=} \mathcal{M}_0^\mu \frac{(-e^2) p \cdot p'}{16\pi^3} \int \frac{d|\vec{k}|}{|\vec{k}|} \frac{d\Omega}{(p'^0 - |\vec{p}'| \cos \vartheta_{kp'}) (p^0 - |\vec{p}| \cos \vartheta_{kp})} \quad (5.42)$$

Questa ampiezza è, parlando in termini di power-counting, logarithmicamente divergente nel limite $|\vec{k}| \rightarrow 0$ (che corrisponde al limite $\lambda \rightarrow \infty$). Divergenze di questo tipo sono note come **divergenze infrarosse soft** o singolarità di massa (in quanto connesse alla presenza di particelle massless nello spettro).

Nota 5.8.1 Consideriamo la parte angolare dell'integrale: i fattori $(p'^0 - |\vec{p}'| \cos \vartheta_{kp'})$ e $(p^0 - |\vec{p}| \cos \vartheta_{kp})$ non si annullano mai finché si considera l'elettrone come massivo.

In realtà, se ci pensiamo su, in QED sono anche sempre strettamente positivi! Infatti la richiesta $p^0 - |\vec{p}| \cos \vartheta_{kp} < 0$ richiederebbe

$$\cos \vartheta_{kp} > \frac{p^0}{|\vec{p}|}$$

ma l'energia dell'elettrone, a causa della sua massa, è sempre maggiore

Ricordiamo che dal teorema dei residui, γ come in figura, abbiamo (con il $-$ per via del verso di integrazione):

$$\int_\gamma f(k^0) = -2\pi i \text{Res}(f, k_*^0)$$

dove, per poli semplici come quello considerato:

$$\text{Res}(f, k_*^0) = \lim_{k^0 \rightarrow k_*^0} (k^0 - k_*^0) f(k^0)$$

del modulo del suo impulso, seppure di poco, i.e.: $\frac{p^0}{|\vec{p}|} > 1$.

Di conseguenza la condizione richiesta non può essere soddisfatta in alcun caso, e diciamo che in QED con elettroni massivi sono presenti solo divergenze infrarosse soft legate al fotone massless.

Nota 5.8.2 Supponiamo per un attimo gli elettroni come particelle massless, i.e. $p^0 = |\vec{p}|$, $p'^0 = |\vec{p}'|$.

In questo caso la funzione nell'integrale angolare diventa

$$\frac{1}{|\vec{p}'|(1 - \cos \vartheta_{kp'})|\vec{p}|(1 - \cos \vartheta_{kp})}$$

È evidente che questa funzione presenta divergenze nel limite $\vartheta_{kp} \rightarrow 0$ oppure $\vartheta_{kp'} \rightarrow 0$.

Anche queste sono divergenze infrarosse, questa volta associate alla non-massività dell'elettrone, e sono dette **divergenze infrarosse collineari**. Ovviamente in massive-QED non avremo mai a che fare con questo tipo di divergenze, ma la situazione è diversa se si considerano altre teorie, come ad esempio la QCD.

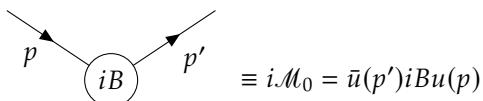
Diagramma di emissione reale

Fino ad ora abbiamo ragionato in termini di scattering Coulombiano, tuttavia il risultato che abbiamo ottenuto è piuttosto generale.

Consideriamo infatti il processo:

$$e^-(p) + X \rightarrow e^-(p') + X$$

che schematizziamo al tree-level (al solito indicato con il pedice "0") come segue:



dove iB rappresenta una generica interazione, ad esempio quella con una carica esterna nel caso dello scattering Coulombiano.

La sezione d'urto per questo processo sarà:

$$\sigma_0(e^- X \rightarrow e^- X) = \frac{1}{2\mathcal{J}} \int \sum_{s,r} |\mathcal{M}_0|^2 d\Phi_{e^- X}$$

dove indichiamo con \mathcal{J} il flusso iniziale di elettroni e con $d\Phi_{e^- X}$ l'elemento di spazio delle fasi su cui stiamo integrando per quanto riguarda lo stato finale.

Se adesso includiamo le correzioni al loop nella nostra trattazione e ripetiamo il calcolo fatto nel caso dello scattering Coulombiano, trascurando i termini di ordine k^2 che emergono nei denominatori dei propagatori interni e semplificando il numeratore sfruttando l'equazione di Dirac,

arriviamo anche in questo caso ad una fattorizzazione del tipo “ampiezza al tree-level \times integrale IR-divergente”:

$$= i\mathcal{M}_V \stackrel{\text{IR}}{=} i\mathcal{M}_0 \times \underset{\text{IR-divergente}}{\text{integrale}}$$

Il che ha senso se pensiamo al fatto che fotoni con lunghezze d’onda molto grandi sicuramente non saranno sensibili a processi di scattering che si svolgono a piccole scale, come il processo al tree-level.

Ora portiamo la discussione su questioni pratiche: il fatto che quest’ampiezza sia divergente è un bel problema. Infatti non c’è contro-termine che regga per regolarizzare questa divergenza, tutta la libertà che avevamo nel giocare con i parametri della teoria si è esaurita quando abbiamo rimosso le divergenze ultraviolette.

Nel momento in cui andiamo a calcolare la sezione d’urto ad un loop, fermandoci al prim’ordine in teoria delle perturbazioni (i.e. trascurando termini di ordine pari o superiore a $|\mathcal{M}|^2$), troviamo:

$$\begin{aligned} \sigma_1(e^- X \rightarrow e^- X) &= \frac{1}{2\mathcal{J}} \int \sum_{s,r} |\mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_V|^2 d\Phi_{e^- X} \\ &= \frac{1}{2\mathcal{J}} \int \sum_{s,r} [|\mathcal{M}_0|^2 + \mathcal{M}_0^* \mathcal{M}_V + \mathcal{M}_V^* \mathcal{M}_0] \\ &= \frac{1}{2\mathcal{J}} \int \sum_{s,r} |\mathcal{M}_0|^2 d\Phi_{e^- X} + \frac{1}{2\mathcal{J}} \int \sum_{s,r} [\mathcal{M}_0^* \mathcal{M}_V + \mathcal{M}_V^* \mathcal{M}_0] d\Phi_{e^- X} \end{aligned}$$

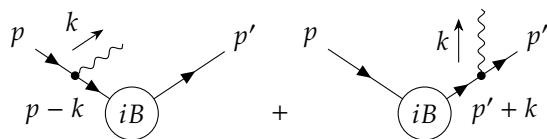
Nel primo integrale riconosciamo la sezione d’urto al tree-level e se semplifichiamo il secondo a dovere il risultato finale sarà:

$$\sigma_1(e^- X \rightarrow e^- X) = \sigma_0(e^- X \rightarrow e^- X) \times \left[1 - \frac{e^2 p \cdot p'}{8\pi^3} \int \frac{d|\vec{k}|}{|\vec{k}|} \frac{d\Omega}{(p'^0 - |\vec{p}'| \cos \vartheta_{kp'}) (p^0 - |\vec{p}| \cos \vartheta_{kp})} \right]$$

(5.43)

Anche la sezione d’urto diverge nel limite infrarosso! Come facciamo ad eliminare queste divergenze senza usare i contro-termini?

L’idea è quella di considerare lo stesso processo includendo un fotone extra nello stato finale. Al tree-level questo significa considerare i diagrammi:



Il ragionamento per cui introduciamo questi diagrammi nel nostro calcolo regge anche dal punto di vista fisico: essendo l’elettrone una particella carica accelerata, deve perdere energia per irraggiamento!

Consideriamo il primo diagramma, la sua ampiezza (con il pedice R ad indicare l'emissione di un fotone "Reale" e non virtuale) sarà:

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}_R^{(1)} &= \bar{u}(p')iB \frac{i(\not{p} - \not{k} + m)}{(p - k)^2 - m^2 + i\epsilon} [ie\gamma^\mu \varepsilon_\mu^*(k)] u(p) \\
 &\stackrel{\text{IR}}{=} \bar{u}(p')iB \frac{i(\not{p} + m)}{-2p \cdot k + i\epsilon} (ie\gamma^\mu) u(p) \varepsilon_\mu^*(k) \\
 &= \bar{u}(p')iB \frac{(-e)2p^\mu \varepsilon_\mu^*(k)}{-2p \cdot k + i\epsilon} u(p) \\
 &= [\bar{u}(p')iBu(p)] \frac{(-e)2p^\mu \varepsilon_\mu^*(k)}{-2p \cdot k + i\epsilon}
 \end{aligned}$$

eq. di Dirac

E con le stesse modalità si trova l'espressione per il secondo diagramma.

In sintesi abbiamo:

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}_R^{(1)} &\stackrel{\text{IR}}{=} i\mathcal{M}_0 \left[\frac{(-e)2p^\mu \varepsilon_\mu^*(k)}{-2p \cdot k + i\epsilon} \right] \\
 i\mathcal{M}_R^{(2)} &\stackrel{\text{IR}}{=} i\mathcal{M}_0 \left[\frac{(-e)2p'^\mu \varepsilon_\mu^*(k)}{2p' \cdot k + i\epsilon} \right]
 \end{aligned}$$

Di conseguenza possiamo scrivere l'ampiezza totale al tree-level:

$$i\mathcal{M}_R \stackrel{\text{IR}}{=} i\mathcal{M}_0 \left[-e \underbrace{\left(\frac{2p'^\mu}{2p' \cdot k + i\epsilon} - \frac{2p^\mu}{2p \cdot k - i\epsilon} \right)}_{\text{fattori di emissione per un fotone soft}} \varepsilon_\mu^*(k) \right] \quad (5.44)$$

Non ci resta che calcolare la sezione d'urto, sommando su spin e polarizzazione dei fotoni nello stato finale e integrando sullo spazio delle fasi a tre corpi, ovvero:

$$\sigma(e^- X \rightarrow e^- X + \gamma) = \frac{1}{2\mathcal{J}} \int \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}_R|^2 d\Phi_{e^- X \gamma}$$

Il risultato che otteniamo è il seguente:

$$\boxed{\sigma(e^- X \rightarrow e^- X \gamma) \stackrel{\text{IR}}{=} \sigma_0(e^- X \rightarrow e^- X) \sum_{\text{elicità}} \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k} e^2 \left\{ \left(\frac{p'^\mu}{p' \cdot k} - \frac{p^\mu}{p \cdot k} \right) \varepsilon_\mu^*(k) \varepsilon_\nu(k) \left(\frac{p'^\nu}{p' \cdot k} - \frac{p^\nu}{p \cdot k} \right) \right\}} \quad (5.45)$$

Notiamo quindi due cose:

- i) Nel limite infrarosso lo spazio delle fasi fattorizza; infatti la parte che si riferisce allo stato finale $e^- X$ insieme al flusso iniziale e al modulo quadro dell'ampiezza al tree-level ricostruiscono $\sigma_0(e^- X \rightarrow e^- X)$.
- ii) La parte che descrive l'emissione del fotone genera invece un integrale su \vec{k} , sommato sulle polarizzazioni fisiche del fotone stesso.

Concentriamoci sull'integrale di emissione: ricordando l'equazione (5.25) possiamo sostituire la somma sulle elicità dei vettori di polarizzazione con un tensore metrico con segno negativo, i.e. $-g_{\mu\nu}$ (i termini aggiuntivi, come ampiamente discusso, sono irrilevanti). Gli indici degli impulsi sono quindi tutti uguali e possiamo svolgere i prodotti, ottenendo:

$$-e^2 \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 2|\vec{k}|} \left[\frac{p'^2}{(p' \cdot k)^2} + \frac{p^2}{(p \cdot k)^2} - \frac{2p' \cdot p}{(p \cdot k)(p' \cdot k)} \right]$$

Concentriamoci sul terzo termine, in quanto gli altri due vengono magicamente cancellati dal contro-termine δ_2 .

Svolgiamo quindi il prodotto al denominatore e passiamo in coordinate polari:

$$\frac{e^2(p \cdot p')}{8\pi^3} \int \frac{d|\vec{k}|}{|\vec{k}|} |\vec{k}|^2 d\Omega \frac{1}{|\vec{k}|^2(p'^0 - |\vec{p}| \cos \vartheta_{kp'})(p^0 - |\vec{p}'| \cos \vartheta_{kp})}$$

Questo integrale ci risulta piuttosto familiare. In effetti è esattamente identico a quello che appare nella sezione d'urto che abbiamo trovato studiando il diagramma con il fotone virtuale tra le gambe esterne, i.e. quella in equazione (5.43)!

Ciò significa che, fidandoci del fatto che gli altri due termini si cancellino per i motivi di cui sopra, **la somma delle due sezioni d'urto**

$$[\sigma_1(e^- X \rightarrow e^- X) + \sigma(e^- X \rightarrow e^- X \gamma)]$$

non diverge nel limite infrarosso, i.e. è *IR-finite*.

Nota 5.8.3 Rimarchiamo i due concetti chiave appena appresi in termini leggermente diversi:

- 1) Le sezioni d'urto **esclusive**, i.e. del tipo $\sigma(e^- X \rightarrow e^- X)$, soffrono delle divergenze infrarosse e non sono quantità osservabili.
- 2) Le sezioni d'urto **inclusive**, i.e. del tipo $\sigma(e^- X \rightarrow e^- X + \gamma's)$, sono libere dalle divergenze infrarosse.

Ragioniamo ora dal punto di vista sperimentale: in quale senso $\sigma(e^- X \rightarrow e^- X)$, come rimarcato nella nota 5.8.3, non è una quantità fisicamente osservabile? E perché dovremmo includere fotoni extra?

In un esperimento realistico, non avremo mai a disposizione un detector talmente sensibile da rivelare un fotone con energia E_γ piccola a piacere; difatti, dobbiamo sempre tener conto di una soglia $\omega_{\text{thr}} \leftrightarrow E_{\text{thr}}$ sotto la quale questo detector non vede nulla.

Seguendo questa logica, appare evidente come lo stato finale $|e^- X \gamma\rangle$, nel momento in cui $E_\gamma < E_{\text{thr}}$, venga "visto" dal detector semplicemente come lo stato $|e^- X\rangle$.

In altre parole, **le sezioni d'urto fisicamente misurabili devono includere ogni possibile numero di fotoni di bassa energia non rivelabili**. Riassumendo in formule:

$$[\sigma(e^- X \rightarrow e^- X)_{\text{obs}} = \sigma(e^- X \rightarrow e^- X) + \sigma(e^- X \rightarrow e^- X + \gamma_{E_\gamma < E_{\text{thr}}})]$$

Illustriamo a questo punto come avviene il processo di cancellazione delle divergenze. Partiamo dalla sezione d'urto esclusiva, i.e. l'equazione (5.43), che può essere approssimata con le modalità che abbiamo già incontrato, introducendo la massa fittizia del fotone come regolatore per la divergenza infrarossa:

$$\sigma_1(e^- X \rightarrow e^- X) \approx \sigma_0(e^- X \rightarrow e^- X) \times \left[1 - \frac{\alpha}{\pi} f_{IR} \log \frac{E_e}{m_\gamma} \right]$$

D'altro canto possiamo fare la stessa cosa anche per la sezione d'urto inclusiva, i.e. l'equazione (5.45), con una piccola differenza. Abbiamo infatti:

$$\sigma(e^- X \rightarrow e^- X \gamma) \approx \sigma_0(e^- X \rightarrow e^- X) \times \frac{\alpha}{\pi} f_{IR} \log \frac{\omega_{thr}}{m_\gamma}$$

Il gioco è fatto! Se consideriamo la somma tra la sezione d'urto inclusiva ed esclusiva, cioè quella osservabile, separando i logaritmi vediamo che il termine con la "massa" del fotone si cancella!

$$\boxed{\sigma(e^- X \rightarrow e^- X)_{obs} = \sigma_0(e^- X \rightarrow e^- X) \times \left[1 - \frac{\alpha}{\pi} f_{IR} \log \frac{E_e}{\omega_{thr}} \right]} \quad (5.46)$$

L'equazione (5.46) è *IR-finite* nel limite $m_\gamma \rightarrow 0$ e dipende dalla soglia $\omega_{thr} > 0$ in un esperimento reale.

Nota 5.8.4 Un piccolo recap sulla cancellazione delle divergenze.

UV: Emergono perché integriamo su un loop ad energie molto elevate [i.e., distanze estremamente corte], il che presumibilmente ci porta ben oltre la validità di qualsivoglia teoria quantistica di campo.

Il problema viene risolto reinterpretando la teoria e sfruttando i parametri liberi per cancellare i termini divergenti, connettendo questi parametri con le quantità osservabili.

IR: Qui siamo nel caso opposto. Queste divergenze, infatti, appaiono quando si considera il limite di energia estremamente piccola [i.e., distanza estremamente grande].

Per correggere questo problema ridefiniamo le osservabili stesse, in quanto divergenze di questo tipo sono connesse a qualcosa che un esperimento realistico non sarà mai in grado di osservare.

Esercizio 5.8.1 Nello studiare l'integrale di emissione abbiamo trascurato due dei tre termini che emergono nello sviluppo dell'espressione esplicita, i.e.:

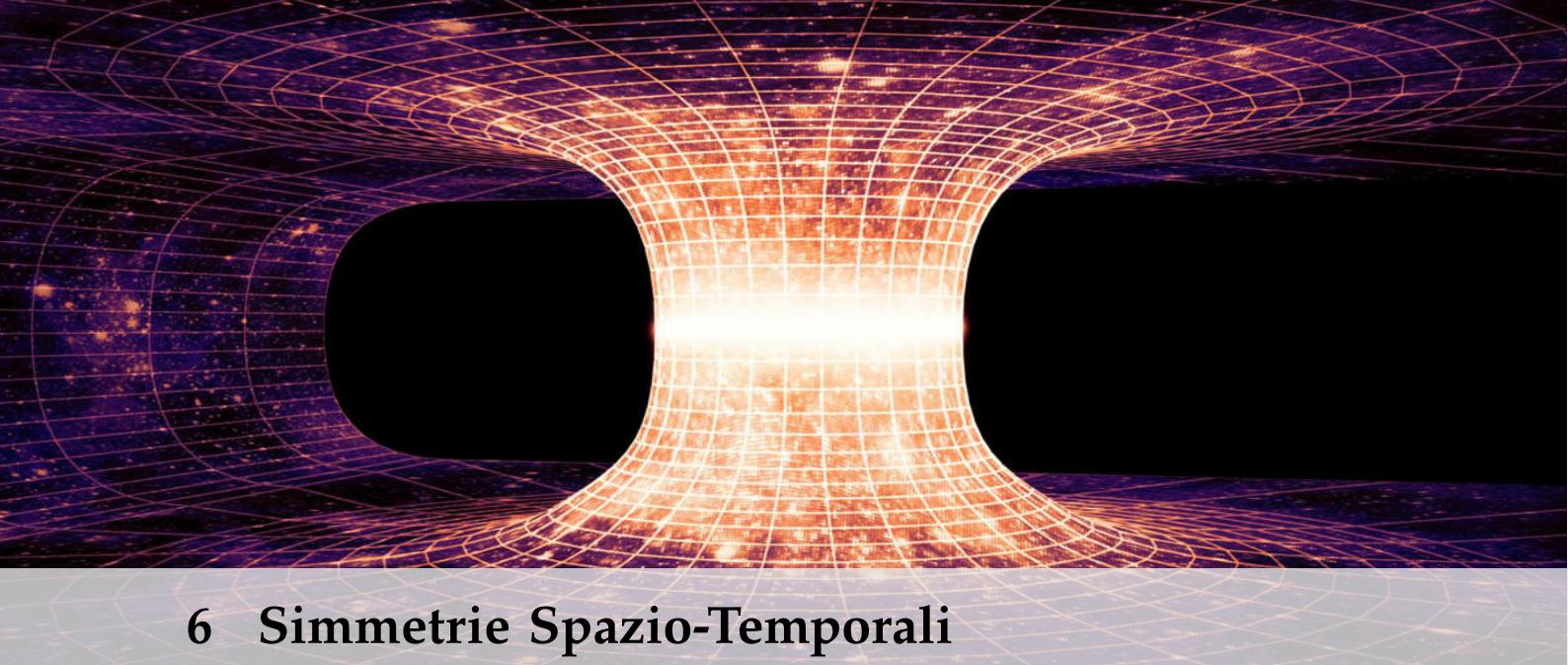
$$-e^2 \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 2|\vec{k}|} \underbrace{\left[\frac{p'^2}{(p' \cdot k)^2} + \frac{p^2}{(p \cdot k)^2} - \frac{2p' \cdot p}{(p \cdot k)(p' \cdot k)} \right]}_{(\star)}$$

Calcolare i contributi dei termini (\star) . Divergono nel limite infrarosso?

[conti svolti Lezione 18 pag. 80÷82]

Parte II

SIMMETRIE (E LORO ROTTURA) IN QFT



6 Simmetrie Spazio-Temporali

6.1 Introduzione

Consideriamo una prospettiva differente dal solito, ponendo in primo piano il ruolo delle particelle.

La situazione si presenta in questo modo: supponiamo di avere a che fare con uno stato iniziale multi-particellare $|\psi\rangle$, vogliamo calcolare la probabilità di transizione $P(|\psi\rangle \rightarrow |\varphi\rangle)$ in presenza di una Hamiltoniana di interazione H_{int} .

$$|\psi\rangle \xrightarrow{H_{\text{int}}} |\varphi\rangle \Rightarrow P(|\psi\rangle \rightarrow |\varphi\rangle) = |\langle\psi|\varphi\rangle|^2$$

Il problema che ci si pone davanti è duplice:

- 1) Vorremmo costruire in maniera esplicita lo stato $|\psi\rangle$ ed il suo spazio di Hilbert.
- 2) Ci piacerebbe rendere il calcolo delle probabilità di transizione compatibile con il principio della relatività, i.e. “*due osservatori inerziali che svolgono lo stesso esperimento quanto-meccanico devono ottenere lo stesso risultato.*”

In un linguaggio più matematico, quello che vogliamo fare è **pro-muovere le trasformazioni del gruppo di Poincaré** (che in sostanza connettono diversi sistemi di riferimento inerziali per mezzo dei principi della relatività speciale) a **trasformazioni di simmetria per la meccanica quantistica**.

Definizione 6.1.1 (Trasformazione di Simmetria - v1.)

Si definisce TdS una trasformazione di stati sotto la quale le proprietà fisiche di un sistema quantistico non cambiano.

In particolare, siamo interessati alle trasformazioni di simmetria che lascino invariate le probabilità di transizione, ovvero tutte le possibili misure che possono essere fatte sul sistema quantistico in esame.

6.1 Introduzione	106
Raggi e teorema di Wigner .	107
6.2 Il Gruppo di Poincaré	109
Struttura	109
Generatori ed Algebra	110
Operatori di Casimir	117
Rappresentazioni proiettive	117
6.3 Costruzione delle R.U.I. di \mathcal{P}	119
Step 1	119
Step 2	119
Step 3	120
Step 4	121
Step 5	125
Step 6	127
6.4 Un commento tecnico	130
6.5 R.U.I. di \mathcal{P} nel caso massless .	131
Step 3	132
Step 4	132
Step 5	136
Step 6	137
Commento sulla parità	139
6.6 Stati multi-particellari e loro trasformazioni	140

Raggi e teorema di Wigner

In meccanica quantistica, due vettori $|\psi\rangle$ e $\xi|\psi\rangle$ (con $\xi \in \mathbb{C}$, $\xi \neq 0$) hanno esattamente lo stesso significato fisico.

Per questo motivo diciamo spesso che uno stato fisico non corrisponde ad un vettore nello spazio di Hilbert, bensì ad un raggio, i.e. un sottospazio 1-dimensionale definito da tutti i multipli complessi di un certo vettore.

Inoltre possiamo sempre scegliere c in modo tale normalizzare $|\psi\rangle$, i.e. $\langle\psi|\psi\rangle = 1$.

Con le premesse fatte, definiamo:

Definizione 6.1.2 (Raggio nello spazio di Hilbert.)

Si definisce raggio l'insieme degli stati normalizzati ad 1 uguali a meno di una fase complessa, i.e.:

$$\mathcal{R} = \left\{ |\psi'\rangle = \xi|\psi\rangle \mid \langle\psi'|\psi'\rangle = 1 \forall \xi \in U(1) \right\}$$

Ha senso a questo punto modificare la definizione 6.1.1 per renderla consistente in termini degli appena definiti raggi (questa sarà la definizione non è ancora quella definitiva):

Definizione 6.1.3 (Trasformazione di Simmetria - v2.)

Una trasformazione di simmetria in meccanica quantistica è una trasformazione di raggi:

$$\mathcal{R}_i \rightarrow \mathcal{R}'_i, \quad \mathcal{R}_f \rightarrow \mathcal{R}'_f$$

tale che:

$$P(\mathcal{R}_i \rightarrow \mathcal{R}_f) = |\langle\psi|\varphi\rangle|^2 = P(\mathcal{R}'_i \rightarrow \mathcal{R}'_f) = |\langle\psi'|\varphi'\rangle|^2$$

per ogni

$$|\psi\rangle \in \mathcal{R}_i, \quad |\varphi\rangle \in \mathcal{R}_f, \quad |\psi'\rangle \in \mathcal{R}'_i, \quad |\varphi'\rangle \in \mathcal{R}'_f$$

Enunciamo ora un teorema cardine per la caratterizzazione delle trasformazioni di simmetria:

Teorema 6.1.1 (Teorema di Wigner.)

Per una qualunque trasformazione di simmetria $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$ esiste un operatore U , agente sullo spazio di Hilbert, tale che

$$\text{sia } |\psi\rangle \in \mathcal{R} \Rightarrow U|\psi\rangle \in \mathcal{R}'$$

Questo operatore, inoltre, deve essere **unitario** (e lineare) o **anti-unitario** (e anti-lineare).

In sintesi:

- Il nostro obiettivo è quello di promuovere le trasformazioni del gruppo di Poincaré a trasformazioni di simmetria per la meccanica quantistica.
- Le trasformazioni di simmetria in MQ corrispondono a trasformazioni di raggi ed il teorema di Wigner ci dice che queste trasformazioni agiscono sullo spazio di Hilbert che contiene questi raggi sotto le vesti di operatori (anti-)unitari.

Di conseguenza, **dobbiamo costruire le rappresentazioni unitarie del gruppo di Poincaré!**

Nota 6.1.1 Siamo interessati alle trasformazioni di simmetria connesse all'identità (come le rotazioni o i boost) per mezzo di una variazione continua di determinati parametri (e.g. gli angoli di rotazione o le rapidità).

Siccome $\mathbb{1}$ è un operatore unitario, per continuità tutte le trasformazioni a cui siamo interessati sono unitarie.

Introduciamo inoltre un'importante definizione, dato che le abbiamo citate:

Definizione 6.1.4 (Rappresentazione di un Gruppo.)

Sia G un gruppo e V uno spazio vettoriale su un certo campo \mathbb{K} .

Sia inoltre $GL(V)$ il gruppo Generale Lineare su V , i.e. lo spazio di tutti gli operatori lineari invertibili agenti su V .

Una rappresentazione di G è un omomorfismo di gruppi

$$D : G \rightarrow GL(V)$$

che associa a $g \in G$ un operatore lineare invertibile $D(g)$, agente sui vettori di V , t.c.:

- (i) $D(g_1)D(g_2) = D(g_1g_2)$ (*è un omomorfismo*)
- (ii) $D(g_3)[D(g_1)D(g_2)] = [D(g_3)D(g_1)]D(g_2)$ (*associatività*)
- (iii) $D(g^{-1}) = D(g)^{-1}$ (*∃ elemento inverso*)
- (iv) $D(e) = \mathbb{1}$ (*∃ elemento neutro*)

In coda alla definizione aggiungiamo che:

- La dimensione di una rappresentazione è la dimensione dello spazio vettoriale V .
- Se la mappa D è anche un isomorfismo di gruppi, i.e. è biettiva, allora la rappresentazione si dice **fedele** (altrimenti è degenere).
- Siamo interessati al caso in cui V è uno spazio di Hilbert e D è unitaria, mentre G è il gruppo di Poincaré.

Nota 6.1.2 La definizione 6.1.4 è strettamente legata allo spazio vettoriale su cui gli operatori $D(g)$ agiscono.

È quindi plausibile pensare che riuscendo nella costruzione delle trasformazioni unitarie del gruppo di Poincaré, dovremmo essere in grado di rispondere ad entrambe le domande da cui siamo partiti, difatti:

- 1) Possiamo provare ad interpretare gli stati nello spazio di Hilbert sui quali gli operatori $D(g) = U(g)$ agiscono come stati multi-particellari.
- 2) Siccome la rappresentazione è unitaria, dal teorema di Wigner le probabilità di transizione sono preservate.

6.2 Il Gruppo di Poincaré

Struttura

La componente connessa del gruppo di Poincaré¹ è generata dal prodotto semi-diretto tra le traslazioni spazio-temporali, $T_{1,3}$, ed il gruppo delle trasformazioni di Lorentz proprie e ortocrone $\mathcal{L}^+ \equiv \text{SO}^+(1, 3)$, i.e.:

$$\mathcal{P} \equiv \text{ISO}^+(1, 3) = T_{1,3} \rtimes \text{SO}^+(1, 3)$$

Il gruppo di Poincaré è il gruppo delle isometrie dello spazio-tempo di Minkowski, ovvero le trasformazioni connesse all'identità. Ne riportiamo di seguito alcune proprietà fondamentali:

- Un elemento generico del gruppo di Poincaré è definito da 10 parametri, 4 dei quali descrivono le traslazioni spazio-temporali a^μ , mentre gli altri 6 descrivono una generica trasformazione di Lorentz Λ^μ_ν (3 parametri per le rotazioni, 3 per i boost):

$$g \equiv P(\Lambda, a) : \begin{cases} a \equiv a^\mu \\ \Lambda \equiv \Lambda^\mu_\nu : \Lambda^T \eta \Lambda = \eta, \quad \det \Lambda = +1, \quad \Lambda^0_0 \geq +1 \end{cases}$$

- L'operazione binaria del gruppo è definita da

$$P(\Lambda_2, a_2) \cdot P(\Lambda_1, a_1) = P(\Lambda_2 \Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2) \quad (6.1)$$

- Di conseguenza possiamo definire, rispetto all'operazione (6.1), l'**elemento neutro**, $P(\mathbb{1}, 0) = \mathbb{1}$, e l'**elemento inverso**, $P(\Lambda, a)^{-1} = P(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$.
- $T_{1,3}$ è un **sottogruppo invariante** (o normale) **abeliano** (o commutativo).

È abeliano in quanto le traslazioni godono della proprietà commutativa. Difatti, preso $P(\mathbb{1}, a_i) \in T_{1,3}$, abbiamo:

$$P(\mathbb{1}, a_1)P(\mathbb{1}, a_2) = P(\mathbb{1}, a_1 + a_2) = P(\mathbb{1}, a_2)P(\mathbb{1}, a_1)$$

È sottogruppo invariante perché un elemento $h = P(\mathbb{1}, a_i) \in T_{1,3}$, sotto coniugazione per mezzo di un generico elemento $g = P(\Lambda, a) \in \text{ISO}^+(1, 3)$, è ancora una traslazione, i.e.:

$$ghg^{-1} \stackrel{[...]}{=} P(\mathbb{1}, \Lambda a)$$

- Per ogni elemento del gruppo di Poincaré vale la fattorizzazione

$$P(\Lambda, a) = P(\mathbb{1}, a)P(\Lambda, 0)$$

In questo caso, per il tensore metrico adottiamo la notazione $\eta = \eta_{\mu\nu}$, per evitare confusione con l'elemento del gruppo di Poincaré g

¹ È il gruppo delle ISOmetrie dello spazio di Minkowski.

e ciò segue direttamente dalla (6.1). Questa fattorizzazione ci sta dicendo che una trasformazione di Poincaré può essere scritta come una trasformazione di Lorentz seguita da una traslazione spazio-temporale. **Attenzione:** è importante notare che

$$P(\Lambda, 0)P(\mathbb{1}, a) = P(\Lambda, \Lambda a) \neq P(\mathbb{1}, a)P(\Lambda, 0) = P(\Lambda, a)$$

Aggiorniamo quindi nuovamente la definizione di trasformazione di simmetria (6.1.3):

Definizione 6.2.1 (Trasformazione di Simmetria - v3.)

Sia $|\psi\rangle$ lo stato di un determinato sistema di riferimento, che visto da un osservatore inerziale O può essere rappresentato in uno spazio di Hilbert da un raggio \mathcal{R} .

Sia O' un altro osservatore inerziale, legato ad O da una trasformazione di Poincaré $P(\Lambda, a)$ che trasforma le coordinate spazio-temporali come segue:

$$x^\mu \xrightarrow{P(\Lambda, a)} x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$$

Allora lo stesso stato visto da un osservatore inerziale O' sarà rappresentato da un raggio \mathcal{R}' tale che:

$$|\psi'\rangle = U(\Lambda, a)|\psi\rangle$$

per ogni $|\psi\rangle \in \mathcal{R}$ e $|\psi'\rangle \in \mathcal{R}'$, con $U(\Lambda, a)$ operatore unitario e lineare.

Gli operatori $U(\Lambda, a)$ forniscono una rappresentazione unitaria del gruppo di Poincaré e preservano la sua legge di composizione (6.1), i.e.:

$$\boxed{\begin{aligned} U(\Lambda_2, a_2) \cdot U(\Lambda_1, a_1) &= U(\Lambda_2 \Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2) \\ U(\Lambda, a)^{-1} &= U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1} a) \end{aligned}}$$

Generatori ed Algebra

Il gruppo di Poincaré è un gruppo di Lie 10-dimensionale non abeliano e non è né compatto (per via di boost e traslazioni) né semi-semplice (in quanto contiene un sottogruppo normale non banale: $T_{1,3}$).

Consideriamo innanzitutto le **trasformazioni infinitesime vicino all'identità**, ovvero:

$$\boxed{P(\Lambda, a) \simeq P(\mathbb{1} + \omega, \varepsilon)}$$

Nello spazio di Minkowski scriveremo $\Lambda^\mu_\nu \simeq \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu$. Sappiamo che per essere una trasformazione di Lorentz, Λ deve rispettare la condizione

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \xrightarrow{\mathbb{M}^4} \boxed{\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma = \eta_{\rho\sigma}}$$

Sostituendo la forma infinitesima di Λ e trascurando l'ordine $\mathcal{O}(\omega^2)$ si trova facilmente che $\omega_{\mu\nu}$ deve essere una matrice 4×4 , con 6 gradi di

libertà indipendenti ed antisimmetrica, i.e.:

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$$

A questo punto possiamo sfruttare il fatto che il gruppo di Poincaré, essendo un gruppo di Lie, è anche una varietà differenziabile, ergo possiamo effettuare un espansione di Taylor e scrivere la generica trasformazione infinitesima come segue:

$$U(\mathbb{1} + \omega, \varepsilon) \approx \mathbb{1} - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} + i\varepsilon_\mu P^\mu \quad (6.2)$$

$J^{\mu\nu}$ e P^μ sono i generatori dell'algebra di Lie associata al gruppo di Poincaré: $\text{iso}(1, 3)$.

In particolare:

- $J^{\mu\nu}$ è antisimmetrico e le sue 6 componenti indipendenti generano i boost di Lorentz e le rotazioni.
- P^μ ha 4 componenti indipendenti e genera le traslazioni nello spazio di Minkowski.

Attenzione! Anche se stiamo enunciando questa proprietà nel caso di un operatore che per noi sarà unitario, questa vale in generale.

Esercizio 6.2.1 Ricavare le regole di trasformazione dei generatori dell'algebra del gruppo di Poincaré. [Conti svolti Lez. 20 p. 11÷14]

Soluzione. I conti non sono difficili, ma sono piuttosto tediosi. L'idea è quella di partire dalla coniugazione di una trasformazione infinitesima per mezzo di una trasformazione di Poincaré, i.e.:

$$U(\Lambda, a)U(\mathbb{1} + \omega, \varepsilon)U(\Lambda, a)^{-1}$$

Questa operazione può essere scritta in due modi:

1. Espandendo la trasformazione infinitesima secondo la (6.2).
2. Applicando la legge di composizione del gruppo di Poincaré (6.1).

In definitiva otteniamo:

$$\begin{aligned} & \mathbb{1} - \frac{i}{2}(\Lambda\omega\Lambda^{-1})_{\mu\nu}J^{\mu\nu} + i(\Lambda\omega\Lambda^{-1}a + \Lambda\varepsilon)_\mu P^\mu = \\ & = \mathbb{1} - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}U(\Lambda, a)J^{\mu\nu}U(\Lambda, a)^{-1} + i\varepsilon_\mu U(\Lambda, a)P^\mu U(\Lambda, a)^{-1} \end{aligned}$$

Da qui si procede comparando i coefficienti di $\omega_{\mu\nu}$ ed ε_μ ottenendo i seguenti risultati:

- Dai coefficienti di ε_μ troviamo che P^μ trasforma come un 4-vettore sotto trasformazioni di Poincaré, i.e.:

$$\begin{aligned} & U(\Lambda, a)P^\mu U(\Lambda, a)^{-1} = (\Lambda^{-1})^\mu_\nu P^\nu \\ & U(\Lambda, a)^{-1}P^\mu U(\Lambda, a) = \Lambda^\mu_\nu P^\nu \end{aligned} \quad (6.3)$$

- Dai coefficienti di $\omega_{\mu\nu}$ troviamo invece che $J^{\mu\nu}$ trasforma come un tensore sotto trasformazioni di Lorentz (ovvero quando $a^\mu = 0$).

Attenzione: si può dimostrare, per mezzo della condizione da rispettare per una trasformazione di Lorentz, che $(\Lambda^{-1})^\mu_\nu = \Lambda^\mu_\nu$ (la distanza degli indici dal tensore è opposta).

Questa notazione sarà utilizzata anche in seguito e, per mezzo della stessa, nella prima delle (6.3) si può sostituire

$$(\Lambda^{-1})^\mu_\nu P^\nu = \Lambda^\mu_\nu P^\nu$$

Notiamo inoltre il fatto che, sotto una generica trasformazione di Poincaré, $J^{\mu\nu}$ non trasforma indipendentemente da P^μ , i.e.:

$$\begin{aligned} U(\Lambda, a) J^{\mu\nu} U(\Lambda, a)^{-1} &= (\Lambda^{-1})_\rho^\mu (\Lambda^{-1})_\sigma^\nu (J^{\rho\sigma} + a^\sigma P^\rho - a^\rho P^\sigma) \\ &= \Lambda_\rho^\mu \Lambda_\sigma^\nu (J^{\rho\sigma} + a^\sigma P^\rho - a^\rho P^\sigma) \end{aligned} \quad (6.4)$$

Esercizio 6.2.2 Derivare l'algebra di Lie del gruppo di Poincaré. [Conti svolti Lez. 20 p. 14÷17]

Soluzione. Anche qui delineiamo la strategia di risoluzione e riportiamo i risultati finali.

L'idea di base è quella di partire dalla prima delle regole di trasformazione di P^μ , considerando il caso in cui $U(\Lambda, a)$ è una trasformazione infinitesima e trascurando ordini pari o superiori a $\mathcal{O}(\omega)$ nel caso di $U(\Lambda, a)^{-1} = U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$.

Con le dovute semplificazioni arriviamo all'equazione:

$$P^\mu - \frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} [J^{\rho\sigma}, P^\mu] + i \varepsilon_\rho [P^\mu, P^\nu] \stackrel{!}{=} \delta_\nu^\mu P_\nu - \omega_\nu^\mu P_\nu$$

Anche in questo caso compariamo i coefficienti di $\omega_{\mu\nu}$ ed ε_μ per ottenere i seguenti risultati:

- Dai coefficienti di ε_μ scopriamo che le traslazioni nello spazio-tempo di Minkowski commutano:

$$[P^\mu, P^\nu] = 0 \quad (6.5)$$

- Dai coefficienti di $\omega_{\mu\nu}$ troviamo invece le trasformazioni di Lorentz e le traslazioni non commutano, i.e.:

$$[J^{\rho\sigma}, P^\mu] = i(P^\rho \eta^{\sigma\mu} - P^\sigma \eta^{\rho\mu}) \quad (6.6)$$

D'altro canto, considerando la regola di trasformazione di $J^{\mu\nu}$ (6.4), nel caso in cui $\varepsilon = 0$ visto che abbiamo già trovato il commutatore tra J e P , scopriamo che le trasformazioni di Lorentz non commutano neanche tra loro, infatti:

$$[J^{\rho\sigma}, J^{\mu\nu}] = i(J^{\rho\nu} \eta^{\sigma\mu} + J^{\mu\rho} \eta^{\sigma\nu} - J^{\mu\sigma} \eta^{\rho\nu} - J^{\sigma\nu} \eta^{\rho\mu}) \quad (6.7)$$

Nota 6.2.1 L'algebra del gruppo di Poincaré può essere scritta in notazione 3-dimensionale:

- **Traslazioni spazio temporali:**

$$H \equiv P^0, \quad \vec{p} \equiv \begin{pmatrix} P^1 \\ P^2 \\ P^3 \end{pmatrix}, \quad [H, \vec{p}] = 0$$

Attenzione: $\Lambda_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu + \omega_\nu^\mu$, ma la sua inversa è $(\Lambda^{-1})_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu + \tilde{\omega}_\nu^\mu$. Utilizzando la relazione:

$$\Lambda_\rho^\mu (\Lambda^{-1})_\nu^\rho \stackrel{!}{=} \delta_\nu^\mu$$

si trova che $\tilde{\omega}_\nu^\mu = -\omega_\nu^\mu$.

Di conseguenza: $(\Lambda^{-1})_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu - \omega_\nu^\mu$

► Rotazioni:

$$\vec{J} \equiv \begin{pmatrix} J^1 \\ J^2 \\ J^3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} J^{23} \\ J^{31} \\ J^{12} \end{pmatrix}, \quad J^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} J^{jk}, \quad J^{ij} = \epsilon^{ijk} J^k$$

$$[H, \vec{J}] = 0, \quad [J^i, J^j] = i \epsilon^{ijk} J^k, \quad [J^i, P^j] = i \epsilon^{ijk} P^k$$

► Boost:

$$\vec{K} \equiv \begin{pmatrix} K^1 \\ K^2 \\ K^3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} J^{01} \\ J^{02} \\ J^{03} \end{pmatrix}, \quad [K^i, H] = -i P^i, \quad [K^i, P^j] = -i \delta^{ij} H$$

$$[K^i, K^j] = -i \epsilon^{ijk} J^k, \quad [J^i, K^j] = i \epsilon^{ijk} K^k$$

Esercizio 6.2.3 Costruire la forma esplicita dei generatori $J^{\mu\nu}$, nella rappresentazione agente sui 4-vettori in \mathbb{M}^4 . [Conti svolti Lez. 21 p. 18÷19]

Soluzione. Questa rappresentazione è anche nota come rappresentazione “defining”, e indichiamo i generatori in questa rappresentazione con $J_{\text{vec}}^{\mu\nu}$.

Limitandoci alle trasformazioni di Lorentz infinitesime, possiamo scrivere queste trasformazioni in due modi: uno concerne l’espansione in serie per mezzo dei generatori, l’altro si basa sulla generica trasformazione di Lorentz infinitesima, rispettivamente:

$$x'^\mu = \left(\mathbb{1} - \frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} J_{\text{vec}}^{\rho\sigma} \right)_v^\mu x^\nu = x^\mu - \frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} (J_{\text{vec}}^{\rho\sigma})_v^\mu x^\nu$$

$$x'^\mu = (\delta_v^\mu x^\nu + \omega_v^\mu x^\nu) = x^\mu + \omega_v^\mu x^\nu$$

Uguagliando gli ultimi due membri, riscrivendo $\omega_v^\mu = \omega_{\rho\sigma} \eta^{\mu\rho} \delta_\nu^\sigma$ ed anti-simmetrizzando il prodotto $\eta^{\mu\rho} \delta_\nu^\sigma$, arriviamo all’equazione:

$$-\frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} (J_{\text{vec}}^{\rho\sigma})_v^\mu x^\nu = -\frac{1}{2} \omega_{\rho\sigma} (\eta^{\mu\rho} \delta_\nu^\sigma - \eta^{\mu\sigma} \delta_\nu^\rho) x^\nu$$

Di conseguenza i generatori delle trasformazioni di Lorentz nella rappresentazione defining si scrivono:

$$(J_{\text{vec}}^{\rho\sigma})_v^\mu = i(\eta^{\mu\rho} \delta_\nu^\sigma - \eta^{\mu\sigma} \delta_\nu^\rho) \quad (6.8)$$

Scriviamo allora esplicitamente le 6 matrici 4×4 :

- I generatori delle rotazioni sono:

$$\begin{aligned}(J_{\text{vec}}^{12})^{\mu}_{\nu} &= (J^3)^{\mu}_{\nu} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ (J_{\text{vec}}^{31})^{\mu}_{\nu} &= (J^2)^{\mu}_{\nu} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{array} \right) \\ (J_{\text{vec}}^{23})^{\mu}_{\nu} &= (J^1)^{\mu}_{\nu} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{array} \right)\end{aligned}$$

ed è interessante notare che sono hermitiani!

- D'altro canto, i generatori dei boost sono anti-hermitiani e si scrivono:

$$\begin{aligned}(J_{\text{vec}}^{01})^{\mu}_{\nu} &= (K^1)^{\mu}_{\nu} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ (J_{\text{vec}}^{02})^{\mu}_{\nu} &= (K^2)^{\mu}_{\nu} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ (J_{\text{vec}}^{03})^{\mu}_{\nu} &= (K^3)^{\mu}_{\nu} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)\end{aligned}$$

^a Non so come tradurre questo termine, forse con definita, ma nel dubbio userò il termine inglese per evitare confusione, ndr.

Commento sull'algebra di Lie del gruppo di Poincaré

Nell'esercizio 6.2.2 abbiamo ricavato i commutatori

$$[P^\mu, P^\nu], \quad [J^{\rho\sigma}, P^\mu], \quad [J^{\rho\sigma}, J^{\mu\nu}]$$

che chiudono la cosiddetta algebra di Lie del gruppo di Poincaré.

La conoscenza dell'algebra di Lie di un gruppo di Lie è estremamente importante. Prendiamo a titolo di esempio un elemento generico di un gruppo di Lie $U(\vec{\theta})$. In generale possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}U(\vec{\theta}) &= U(\vec{\theta} = \vec{0}) + i\theta^a t_a + \frac{i}{2}\theta^a\theta^b t_{ab} + \dots \\ &= \mathbb{1} + i\theta^a t_a + \underbrace{\frac{i}{2}\theta^a\theta^b t_{ab} + \dots}_{\substack{\text{questi termini possono} \\ \text{essere ricostruiti a partire} \\ \text{dall'algebra}}}\end{aligned}$$

con t_a generatori dell'algebra t.c. $[t_a, t_b] = if_{ab}^c t_c$.

Come evidenziato, la serie di potenze completa di $U(\vec{\theta})$ può essere completamente ricostruita a patto di conoscere il termine al prim'ordine, i generatori e la loro algebra!

In altre parole, conoscendo l'algebra del gruppo è possibile ricostruire un elemento generico del gruppo in un intorno finito dell'identità. La somma della serie di potenze definisce la cosiddetta **Mappa Esponenziale**.

Il caso delle trasformazioni di Lorentz

Se ci limitiamo allo studio delle trasformazioni di Lorentz, partendo dalla trasformazione infinitesima possiamo ricostruire la trasformazione finita per mezzo della mappa esponenziale:

$$\begin{aligned} U(1 + \omega, 0) &= 1 - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} \\ \Rightarrow U(\Lambda, 0) &= \exp\left\{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right\} = \exp\left\{-i\vec{\theta} \cdot \vec{J} - i\vec{\eta} \cdot \vec{K}\right\} \end{aligned}$$

La struttura della mappa esponenziale vale in ogni rappresentazione, e la relazione sopra evidenzia un'altra importante conseguenza dell'algebra di Lie: per una data rappresentazione, è possibile ricostruire un qualunque elemento $U(\Lambda)$ del gruppo conoscendo la forma dei generatori in quella rappresentazione.

Esercizio 6.2.4 Considerando la rappresentazione defining del gruppo di Lorentz, scrivere esplicitamente:

- La trasformazione di Lorentz Λ che descrive una rotazione nel piano xy attorno \hat{z} ;
- La trasformazione che descrive un boost in direzione \hat{z} .

Soluzione. Nella rappresentazione defining abbiamo:

$$U(\Lambda) = \exp\left\{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right\} \rightarrow \Lambda = \exp\left\{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}_{\text{vec}}\right\}$$

Essendo sia $\omega_{\mu\nu}$ che $J^{\mu\nu}$ anti-simmetrici, possiamo riscrivere

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} &= \omega_{12}J^{12} + \omega_{13}J^{13} + \omega_{23}J^{23} + \sum_{i=1}^3 \omega_{0i}J^{0i} \\ &= \vec{\theta} \cdot \vec{J} + \vec{\eta} \cdot \vec{K} \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo definito:

$\vec{\theta} \equiv (\omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{23}) \equiv (\varphi, \vartheta, \phi)$	angoli di rotazione
$\vec{\eta} \equiv (\omega_{01}, \omega_{02}, \omega_{03})$	rapidità

A questo punto consideriamo una rotazione di angolo ϕ attorno a \hat{z}

nel piano xy , che possiamo scrivere semplicemente come segue:

$$x'^\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x \cos \phi - y \sin \phi \\ x \sin \phi + y \cos \phi \\ z \end{pmatrix}$$

□i.

In maniera simile possiamo scrivere la trasformazione per un boost in direzione \hat{z} , prendendo l'esponenziale di $-i\eta K_{\text{vec}}^3$. Il risultato è il seguente:

$$x'^\mu = \begin{pmatrix} \cosh \eta & 0 & 0 & \sinh \eta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh \eta & 0 & 0 & \cosh \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \cosh \eta + z \sinh \eta \\ x \\ y \\ x^0 \sinh \eta + z \cosh \eta \end{pmatrix}$$

□ii.

Esempio 6.2.1 Sulla base dei risultati ottenuti nell'esercizio 6.2.4, consideriamo una particella inizialmente a riposo ed applichiamo un boost al suo 4-impulso, i.e. esplicitiamo $p'^\mu = [\exp\{-i\eta K_{\text{vec}}^3\}]^\mu_\nu p^\nu$:

$$p'^\mu = \begin{pmatrix} \cosh \eta & 0 & 0 & \sinh \eta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh \eta & 0 & 0 & \cosh \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M \cosh \eta \\ 0 \\ 0 \\ M \sinh \eta \end{pmatrix}$$

Dopo il boost, la particella si muove con impulso $\vec{p} = M \sinh \eta \hat{z}$.

Ricordiamo a questo punto che in relatività speciale:

$$p^\mu = (p^0, \vec{p}), \quad p^0 = M\gamma, \quad |\vec{p}| = M\gamma\beta, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

Di conseguenza troviamo:

$$\sinh \eta = \gamma\beta = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \cosh \eta = \sqrt{1+\sinh^2 \eta} = \gamma$$

Possiamo notare che la rapidità $\eta \in \mathbb{R}$ non è limitata in relatività speciale!

Infatti, mentre la velocità ha un limite superiore pari a c , la rapidità nel limite $v \rightarrow c$ diverge: $\eta \xrightarrow{v \rightarrow c} \infty$.

Possiamo quindi affermare, sulla base di quanto visto nell'esempio 6.2.1, che il gruppo di Lorentz non è compatto per via dei boost. Inoltre, si verifica che non ammette alcuna rappresentazione unitaria finito-dimensionale, ergo ogni rappresentazione unitaria del gruppo di Lorentz² è infinito-dimensionale³.

Per la cronaca, la matrice di rotazione può essere ottenuta dall'esponenziale

$$\exp\{-i\phi J_{\text{vec}}^3\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-i\phi J_{\text{vec}}^3)^k$$

e separando la somma in tre parti: quella con $k = 0$ e quelle con k pari o dispari, notando che $(J^3)^2 = \text{diag}(0, 1, 1, 0)$.

La somma con k pari restituirà la parte con il coseno, mentre quella con k dispari la parte con il seno. [conti svolti Lez. 21 p.23]

² In alcuni casi questo fatto viene esteso a tutti i gruppi non compatti, ma sinceramente non riesco a trovare una referenza che renda affidabile questa informazione, ndr. ³ Una "dimostrazione" di ciò viene fornita nello Schwartz, sezione 10.2.1.

Consistentemente con questa affermazione, abbiamo visto che nella rappresentazione 4-dimensionale (quindi finita) i generatori dei boost sono anti-Hermitiani, ma affinché una trasformazione di Lorentz, $\exp\left\{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right\}$, sia unitaria, i generatori devono essere Hermitiani. Di conseguenza è chiaro che le rappresentazioni finito-dimensionali del gruppo di Lorentz non possono essere unitarie.

Il caso delle trasformazioni di Poincaré

Come conseguenza della fattorizzazione $P(\Lambda, a) = P(\mathbb{1}, a)P(\Lambda, 0)$, per il gruppo di Poincaré abbiamo la mappa esponenziale:

$$U(\Lambda, a) = \exp\left\{+ia_\mu P^\mu\right\} \exp\left\{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right\}$$

Siccome anche le traslazioni in \mathbb{M}^4 sono trasformazioni non compatte, i.e. sono definite da parametri con range non limitato⁴, appare evidente il fatto che **le rappresentazioni unitarie del gruppo di Poincaré** (che sono quelle che stiamo cercando) **sono infinito-dimensional**i.

Operatori di Casimir

Nella costruzione delle rappresentazioni, un particolare tipo di operatori giocherà un ruolo speciale, ed è quindi opportuno introdurli.

Definizione 6.2.2 (Operatori di Casimir.)

Si definiscono operatori di Casimir per un gruppo (di Lie) G quegli operatori che commutano con tutti i generatori dell'algebra di G .

Il gruppo di Poincaré, in particolare, presenta due Casimir:

$$\begin{aligned} P^2 &= P_\mu P^\mu \\ W^2 &= W_\mu W^\mu, \quad \text{con } W^\mu \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}J_{\nu\rho}P_\sigma \end{aligned}$$

dove W^μ è detto **pseudovettore di Pauli-Lubanski**.

Esercizio 6.2.5 Dimostrare che P^2 e W^2 sono operatori di Casimir per il gruppo di Poincaré. [Conti svolti Lez. 21 p. 27]

Rappresentazioni proiettive

C'è una sottigliezza di cui va tenuto conto. Consideriamo la relazione di composizione per due trasformazioni di Poincaré vista dalla rappresentazione U :

$$U(\Lambda_2, a_2) \cdot U(\Lambda_1, a_1) = U(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2)$$

⁴ A voler essere pedante, è il gruppo che queste trasformazioni formano ad essere non compatto.

In meccanica quantistica c'è di più:

- Consideriamo una trasformazione di simmetria che sia implementata dall'operatore lineare ed unitario $U(\Lambda_1, a_1)$, tale da portare il raggio \mathcal{R} nel raggio \mathcal{R}' , ed utilizziamo la notazione

$$\mathcal{R} \xrightarrow{U(\Lambda_1, a_1)} \mathcal{R}'$$

per indicare che, dato uno stato $|\psi\rangle \in \mathcal{R}$, lo stato trasformato $|\psi'\rangle = U(\Lambda_1, a_1)|\psi\rangle \in \mathcal{R}'$.

- Prendiamo ora una seconda trasformazione $U(\Lambda_2, a_2)$ t.c.

$$\mathcal{R}' \xrightarrow{U(\Lambda_2, a_2)} \mathcal{R}''$$

da cui segue che

$$U(\Lambda_2, a_2)[U(\Lambda_1, a_1)|\psi\rangle] \in \mathcal{R}''$$

- Se ora applichiamo la regola di composizione, troviamo che anche

$$U(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2a_1 + a_2)|\psi\rangle \in \mathcal{R}''$$

- Concludiamo che entrambi i vettori appartengono allo stesso raggio, ergo sono uguali a meno di una fase, i.e.:

$$U(\Lambda_2, a_2)U(\Lambda_1, a_1)|\psi\rangle = e^{i\phi_\psi(P_2, P_1)}U(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2a_1 + a_2)|\psi\rangle$$

In realtà, si dimostra che la fase non dipende dallo stato $|\psi\rangle$, ma solo da P_1 e P_2 , ragionando come prima ma con $|\psi\rangle = |\psi_A\rangle + |\psi_B\rangle$ (i.e.: somma di stati linearmente indipendenti).

Abbiamo quindi imparato qualcosa di interessante, sintetizziamolo:

- i) Il prodotto i due trasformazioni di Poincaré è ancora una trasformazione di Poincaré e vale, l'equazione (6.1):

$$P(\Lambda_2, a_2) \cdot P(\Lambda_1, a_1) = P(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2a_1 + a_2)$$

- ii) Consideriamo una rappresentazione U . Essendo questa un omomorfismo, vale la seguente proprietà, che rispecchia la struttura del gruppo:

$$U(\Lambda_2, a_2)U(\Lambda_1, a_1) = U(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2a_1 + a_2)$$

- iii) Le rappresentazioni per cui la legge di composizione è verificata a meno di una fase sono dette **Rappresentazioni Proiettive**.

La discussione precedente implica che, in un contesto quanto-meccanico, le rappresentazioni proiettive devono essere incluse nella trattazione, in quanto hanno lo stesso significato fisico delle rappresentazioni ordinarie.

6.3 Costruzione delle R.U.I. di \mathcal{P}

Per quanto visto fino ad ora: le rappresentazioni unitarie (irriducibili)⁵ del Gruppo di Poincaré devono essere infinito-dimensionali, in quanto il gruppo non è compatto.

A questo punto è arrivato il momento di costruirle e, lavorando a livello dell'algebra di Poincaré \mathcal{P} , la strategia è simile a quella che si usa in meccanica quantistica per costruire le cosiddette "CSCO"⁶. Prima di dilungarci sui dettagli, delineiamola nel complesso in modo da avere un quadro d'insieme. Il metodo che utilizzeremo prende il nome di "*Metodo delle Rappresentazioni Indotte*" e si compone dei seguenti passaggi:

- STEP 1.** Definizione degli autostati di impulso.
- STEP 2.** Introduzione del Casimir P^2 e classificazione.
- STEP 3.** Identificazione di un vettore di riferimento.
- STEP 4.** Identificazione del Gruppo Piccolo⁷ di Wigner.
- STEP 5.** Costruzione degli stati con impulso generico.
- STEP 6.** Step finale.

È quindi giunto il momento di lanciarci a capofitto in questo fantastico viaggio:

Step 1

Vogliamo **definire gli autostati di impulso** e per farlo partiamo dai generatori del sottogruppo normale abeliano $T_{1,3}$, ovvero P^μ .

Conosciamo il modo in cui commutano tra loro, i.e.: $[P^\mu, P^\nu] = 0$, ergo possono essere diagonalizzati insieme.

Di conseguenza possiamo definire gli autostati $|p^\mu\rangle$ per P^μ , con autovettore p^μ , ovvero:

$$[P^\mu |p^\mu\rangle = p^\mu |p^\mu\rangle]$$

Chiaramente questo è solo l'inizio, abbiamo bisogno di altre "etichette" da attaccare allo stato $|p^\mu\rangle$, in quanto il suo comportamento sotto l'azione del gruppo $\text{SO}^+(1, 3)$ non è ancora ben specificato.

Step 2

Introduciamo nel nostro gioco il **primo operatore di Casimir** P^2 . Possiamo farlo senza problemi, visto che in quanto Casimir commuta con P^μ .

Di conseguenza aggiorniamo il nostro set di relazioni:

$$\begin{aligned} P^\mu |p^2, p^\mu\rangle &= p^\mu |p^2, p^\mu\rangle \\ P^2 |p^2, p^\mu\rangle &= p^2 |p^2, p^\mu\rangle \end{aligned}, \quad p^2 = (p^0)^2 - |\vec{p}|^2$$

⁵ R.U.I. ⁶ Complete Set of Commuting Observables, ovvero l'insieme di quegli operatori che commutano tra loro e i cui autovettori comuni possono essere usati come base per esprimere un qualunque stato quantistico. ⁷ Eventualmente chiamato Little Group

Vogliamo a questo punto **classificare gli stati** e ci accorgiamo subito di due cose:

1. p^2 non è definito positivo, i.e: $p^2 \geq 0$.
2. essendo P^2 un Casimir, il suo autovalore non può essere alterato da una trasformazione di Lorentz, questo significa che, ad esempio, $J^{\mu\nu}|p^2, p^\mu\rangle$ è ancora autostato di P^2 con autovalore p^2 . Volendo questo è un altro modo di far emergere l'invarianza di Lorentz del quadrato del 4-impulso.

In realtà c'è di più: è possibile dimostrare che, nel caso in cui $p^2 \geq 0$, **sign(p^0) è un invariante di Lorentz!**

Esercizio 6.3.1 Mostare che, posto $p^2 \geq 0$, $\text{sign}(p^0)$ è un invariante di Lorentz.

Ha quindi senso introdurre la seguente classificazione, basata sul valore di p^2 combinato con il segno di p^0 . Nel seguito discuteremo solo alcuni di questi casi, evidenziati in verde nella tabella seguente:

NULL	$p^2 = 0$ con $p^0 = \vec{p} = 0$	stato di vuoto
TIME-LIKE	$p^2 = M^2 > 0$ con $p^0 > 0$	particella massiva
TIME-LIKE	$p^2 = M^2 > 0$ con $p^0 < 0$	energia negativa
LIGHT-LIKE	$p^2 = 0$ con $p^0 > 0$ e $ \vec{p} \neq 0$	particella massless
LIGHT-LIKE	$p^2 = 0$ con $p^0 < 0$	energia negativa
SPACE-LIKE	$p^2 = -M^2 < 0$	tachioni

In particolare, per ora **limitiamoci a considerare il caso di particelle massive con spin qualunque**.

Possiamo riscrivere le equazioni agli autovalori aggiornate, sostituendo p^2 con M^2 e riscrivendo l'autostato con le sole componenti essenziali:

$$\boxed{P^\mu|M, \vec{p}\rangle = p^\mu|M, \vec{p}\rangle \quad P^2|M, \vec{p}\rangle = M^2|M, \vec{p}\rangle}, \quad \text{con } M > 0$$

Conoscendo M , \vec{p} ed il segno di p^0 abbiamo tutti gli elementi per ricavare questa componente e ricostruire l'intero 4-impulso.

Step 3

Torniamo al problema originale: non sappiamo ancora come il nostro autostato $|M, \vec{p}\rangle$ trasformi sotto trasformazione di Lorentz. L'idea per risolvere questo problema è innanzitutto quella di non considerare uno stato generico, ma di **fissare un 4-vettore di riferimento**.

Scegliamo p^μ nel sistema di riferimento a riposo, ovvero:

$$p_{\text{ref}}^\mu = (M, 0, 0, 0), \quad p_{\text{ref}}^2 = M^2, \quad M > 0$$

Possiamo quindi aggiornare nuovamente le equazioni agli autovalori:

$$\boxed{P^\mu|M, \vec{0}\rangle = p_{\text{ref}}^\mu|M, \vec{0}\rangle \quad P^2|M, \vec{0}\rangle = M^2|M, \vec{0}\rangle}, \quad \text{con } M > 0$$

Step 4

Ora che abbiamo il nostro vettore di riferimento, è il momento di cercare le trasformazioni di Lorentz sotto le quali tale vettore risulta invariante. Per farlo introduciamo la nozione di Gruppo Piccolo (o Little Group):

Definizione 6.3.1 (Gruppo Piccolo.)

Sia p_*^μ uno specifico 4-impulso, definiamo il Gruppo Piccolo di tale 4-impulso, $\mathcal{G}(p_*)$, come il sottogruppo del gruppo di Lorentz le cui trasformazioni lasciano p_*^μ invariato, i.e.:

$$\mathcal{G}(p_*) = \left\{ \Lambda \in \mathrm{SO}^+(1, 3) : \Lambda_\nu^\mu p_*^\nu = p_*^\mu \right\}$$

Nel nostro caso, è ovvio che $\mathcal{G}(p_{\text{ref}}) = \mathrm{SO}(3)$

Nota 6.3.1 La scelta di p_{ref} è arbitraria. Tuttavia, anche se all'apparenza scegliere come vettore di riferimento un certo \tilde{p}_{ref} sembrerebbe portare a due gruppi piccoli differenti, si può mostrare che $\mathcal{G}(p_{\text{ref}}) \cong \mathcal{G}(\tilde{p}_{\text{ref}})$, i.e. esiste un isomorfismo tra i due gruppi.

Ci siamo quasi, consideriamo i generatori di $\mathcal{G}(p_{\text{ref}}) = \mathrm{SO}(3)$: \vec{J} . Sappiamo che in generale \vec{J} e P^μ non commutano, infatti abbiamo evidenziato nella nota 6.2.1 che:

$$[H, \vec{J}] = 0, \quad [J^i, P^k] = i \epsilon^{ik} P^j$$

Di conseguenza, in generale, \vec{J} e P^μ non possono essere diagonalizzati contemporaneamente. Tuttavia noi non stiamo lavorando in generale. Ci siamo infatti ristretti al sottospazio corrispondente al vettore di riferimento e abbiamo considerato $\vec{P} = \vec{0}$.

Sotto queste condizioni possiamo quindi diagonalizzare \vec{J} e P^μ in contemporanea!

Ovviamente, siccome \vec{J} chiude l'algebra del momento angolare, utilizziamo la diagonalizzazione di $|\vec{J}|^2$ e $J_z = J^3$, ottenendo il seguente set di relazioni aggiornate:

$$\boxed{\begin{aligned} P^\mu |M, \vec{0}, j, \sigma\rangle &= p_{\text{ref}}^\mu |M, \vec{0}, j, \sigma\rangle \\ P^2 |M, \vec{0}, j, \sigma\rangle &= M^2 |M, \vec{0}, j, \sigma\rangle \\ |\vec{J}|^2 |M, \vec{0}, j, \sigma\rangle &= j(j+1) |M, \vec{0}, j, \sigma\rangle \\ J^3 |M, \vec{0}, j, \sigma\rangle &= \sigma |M, \vec{0}, j, \sigma\rangle \end{aligned}}, \text{ con } \begin{aligned} j &= 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \\ -j < \sigma < j &\quad (2j+1 \text{ valori}) \end{aligned}$$

A questo punto è opportuno mettere in pausa la discussione per alcuni importanti commenti in merito a quanto appreso finora:

- i) Il nostro obiettivo era di aggiungere indici rilevanti agli stati da cui siamo partiti, i.e. $|M, \vec{0}\rangle$, in modo da caratterizzare l'azione che le trasformazioni di Lorentz sugli stessi. Siamo arrivati alle relazioni:

$$\begin{aligned} |\vec{J}|^2 |M, \vec{0}, j, \sigma\rangle &= j(j+1) |M, \vec{0}, j, \sigma\rangle \\ J^3 |M, \vec{0}, j, \sigma\rangle &= \sigma |M, \vec{0}, j, \sigma\rangle \end{aligned}$$

che ci forniscono automaticamente le modalità di trasformazione degli stati $|M, \vec{0}, j, \sigma\rangle$ sotto rotazione.

Andiamo un po' più a fondo riguardo questo punto, considerando una trasformazione di Lorentz che non comprenda alcuna traslazione, ovvero una rotazione pura, descritta da una certa matrice Λ_R , agente su \mathbb{M}^4 , parametrizzabile nel modo seguente:

$$\Lambda_R \equiv \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & R & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}, \quad \text{con } R \in \text{SO}(3).$$

La matrice R è descritta da tre parametri, ed una sua possibile parametrizzazione è data dalla scelta di una direzione spaziale, che chiameremo \hat{n} (che essendo un versore, ergo normalizzato ad 1, è identificato da 2 parametri) ed un angolo di rotazione ϑ ; definiamo quindi tale parametrizzazione come $R_{\hat{n}}(\vartheta)$, a cui corrisponde la trasformazione di Lorentz $\Lambda_{R_{\hat{n}}(\vartheta)}$.

Per quanto discusso in precedenza, possiamo definire un operatore unitario $U(\Lambda_{R_{\hat{n}}(\vartheta)})$ associato alla trasformazione $\Lambda_{R_{\hat{n}}(\vartheta)}$, esprimibile in forma generica tramite mappa esponenziale, i.e.:

$$U(\Lambda_{R_{\hat{n}}(\vartheta)}) = \exp\{-i\vartheta \hat{n} \cdot \vec{J}\}$$

Il che ci consente di scrivere l'azione della rotazione sugli stati $|M, \vec{0}, j, \sigma\rangle$, ovvero:

$$\begin{aligned} e^{-i\vartheta \hat{n} \cdot \vec{J}} |M, \vec{0}, j, \sigma\rangle &= \overbrace{\sum_{\sigma'} |M, \vec{0}, j, \sigma'\rangle \langle M, \vec{0}, j, \sigma'| e^{-i\vartheta \hat{n} \cdot \vec{J}}}^{=\mathbb{1} \text{ per la relazione di completezza}} |M, \vec{0}, j, \sigma\rangle \\ &= \sum_{\sigma'} |M, \vec{0}, j, \sigma'\rangle \underbrace{\langle j, \sigma' | e^{-i\vartheta \hat{n} \cdot \vec{J}}}_{\star} |j, \sigma\rangle \end{aligned}$$

Il punto che qui vogliamo enfatizzare è il fatto che **possiamo calcolare esplicitamente il sandwich \star** , che non è altro se non la rappresentazione dell'elemento del gruppo, **se conosciamo la rappresentazione dell'algebra** e se specifichiamo l'angolo e la direzione della rotazione. Ma noi conosciamo la rappresentazione dell'algebra!

$\hat{n} \cdot \vec{J}$ è combinazione lineare di J^1, J^2 e J^3 e grazie alle equazioni agli autovalori che abbiamo costruito sappiamo come J^3 agisce sugli stati $|j, \sigma\rangle$. D'altro canto, per J^1 e J^2 possiamo appoggiarci all'azione di J^\pm , anch'essa ben nota⁸, di cui i primi due sono combinazione. Di conseguenza possiamo calcolare tutti i termini in $\langle j, \sigma' | \mathbb{1} - i\vartheta \hat{n} \cdot \vec{J} + \dots | j, \sigma\rangle$, ricostruendo completamente quella che è sostanzialmente una matrice $(2j+1) \times (2j+1)$.

Definiamo quindi:

$$\left[D_j(R_{\hat{n}}(\vartheta)) \right]_{\sigma' \sigma} := \langle j, \sigma' | e^{-i\vartheta \hat{n} \cdot \vec{J}} | j, \sigma \rangle \quad (6.9)$$

Di conseguenza abbiamo l'espressione dell'azione di $U(\Lambda_{R_{\hat{n}}(\vartheta)})$

Formalmente, qui stiamo utilizzando le scomposizioni in prodotti tensoriali:

$$\begin{aligned} |M, \vec{0}, j, \sigma\rangle &= |M, \vec{0}\rangle \otimes |j, \sigma\rangle \\ e^{-i\vartheta \hat{n} \cdot \vec{J}} &= \mathbb{1} \otimes e^{-i\vartheta \hat{n} \cdot \vec{J}} \end{aligned}$$

per cui svolgendo il sandwich sopravvive solo il termine con $\langle j, \sigma' | \dots | j, \sigma\rangle$, in quanto $\langle M, \vec{0} | M, \vec{0}\rangle = 1$.

⁸ i.e. aumentano o diminuiscono il valore di σ senza toccare j

sugli stati $|M, \vec{0}, j, \sigma\rangle$:

$$U(\Lambda_{R_{\hat{n}}(\vartheta)})|M, \vec{0}, j, \sigma\rangle = \sum_{\sigma'} \left[D_j(R_{\hat{n}}(\vartheta)) \right]_{\sigma' \sigma} |M, \vec{0}, j, \sigma'\rangle \quad (6.10)$$

- ii) In generale, j e σ sono rispettivamente gli autovalori di $|\vec{J}|^2$ e J^3 , con $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ momento angolare totale, somma del momento angolare orbitale e dello spin totale.

Siccome abbiamo scelto di lavorare nel sistema di riferimento in cui la particella è a riposo e quindi abbiamo $\vec{p} = 0$, segue che anche il momento angolare orbitale $\vec{L} = 0$. Di conseguenza, l'autovalore j può essere identificato con lo spin, per cui nel seguito utilizzeremo la notazione $j = s$.

- iii) Nel caso di SO(3) è possibile mostrare che le rappresentazioni con spin intero sono rappresentazioni ordinarie, mentre le rappresentazioni con spin semi-intero sono proiettive, ed è istruttivo farlo con un semplice esempio:

Esempio 6.3.1 (Le rappresentazioni a spin semintero di SO(3) sono proiettive.)

Consideriamo la rappresentazione con $j = 1/2$, $\sigma = \pm 1/2$, i cui vettori di base sono $|1/2, \pm 1/2\rangle$.

La costruzione di $J^3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ è immediata, ed allo stesso modo si costruiscono gli altri generatori $J^1 = (J_+ + J_-)/2$ e $J^2 = -i(J_+ - J_-)/2$.

In sintesi i generatori possono essere scritti in funzione delle matrici di Pauli come $J^k = \frac{\sigma^k}{2}$ con $k = 1, 2, 3$.

Consideriamo a questo punto una rotazione attorno all'asse \hat{z} , per semplicità. Nella rappresentazione da noi scelta, a tale rotazione è associato il seguente operatore:

$$U_{1/2}(\vartheta) \equiv e^{-i\vartheta J^3} = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\vartheta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\vartheta}{2}} \end{pmatrix}$$

Ora prendiamo due rotazioni di questo tipo con angoli $\vartheta_{1,2}$ tali che la loro somma sia $\vartheta_1 + \vartheta_2 = 2\pi$. La struttura del gruppo ci suggerisce che:

$$R(\vartheta_1)R(\vartheta_2) = R(\vartheta_1 + \vartheta_2) = R(2\pi) = \mathbb{1}$$

Tuttavia, nella rappresentazione $1/2$, per conto bruto si verifica che:

$$U_{1/2}(\vartheta_1)U_{1/2}(\vartheta_2) = \begin{pmatrix} e^{-i\pi} & 0 \\ 0 & e^{i\pi} \end{pmatrix} = -\mathbb{1}$$

In altre parole, otteniamo un risultato uguale a meno di una fase (i.e. $e^{i\pi} = -1$), quindi siamo di fronte ad una rappresentazione proiettiva.

Come già discusso precedentemente in questo capitolo, non abbiamo alcun motivo di scartare le rappresentazioni proiettive dalla nostra trattazione in contesto quanto-meccanico, ma l'inclusione di queste rappresentazioni a spin semi-intero ci dicono qualcosa

di estremamente importante: **dalla procedura di unificazione tra meccanica quantistica e relatività speciale, emerge naturalmente la presenza di fermioni nella teoria!**

- iv) È possibile notare come valga un'interessante relazione tra $|\vec{J}|^2$ e l'operatore di Casimir W^2 , partendo da:

$$\begin{aligned} W^0 &= \vec{J} \cdot \vec{P} \\ \vec{W} &= P^0 \vec{J} + \vec{K} \times \vec{P} \end{aligned} \quad (6.11)$$

Se ci restringiamo al sottospazio generato dai vettori $|M, \vec{0}, s, \sigma\rangle$, ci accorgiamo che, essendo $\vec{P} = 0$ e $P^0 = M$:

$$\begin{cases} W^0 \rightarrow 0 \\ \vec{W} \rightarrow M\vec{J} \end{cases} \Rightarrow \boxed{W^2 = -M^2 |\vec{J}|^2}$$

Questa relazione ci permette di riscrivere l'equazione agli autovalori per $|\vec{J}|^2$ in modo completamente equivalente, finché ristretti al sottospazio $\{|M, \vec{0}, s, \sigma\rangle\}$, ma con il vantaggio di essere scritta in termini del Casimir W^2 :

$$\boxed{W^2|M, \vec{0}, j, \sigma\rangle = -M^2 j(j+1)|M, \vec{0}, j, \sigma\rangle}$$

Esercizio 6.3.2 Verificare le equazioni (6.11) [Conti svolti Lezione 22 p.41]

- v) Sulla base delle relazioni (6.11) nel sottospazio $\{|M, \vec{0}, s, \sigma\rangle\}$, riscriviamo J^3 in termini di W^μ :

$$W^3 = MJ^3 \rightarrow J^3 = \frac{W^3}{M}$$

Introducendo il vettore $S_{\text{rest}}^\mu = (0, 0, 0, 1)$, tale che $S_{\text{rest}}^\mu W_\mu = -W^3$, possiamo scrivere:

$$\boxed{J^3 = -\frac{S_{\text{rest}}^\mu W_\mu}{M}}$$

Sulla base dei commenti precedenti, possiamo concludere lo Step 4 aggiornando nuovamente il nostro "auto-sistema", che ora presenta le ultime due equazioni espresse in termini dell'operatore di Casimir W^2 e dell'operatore W^μ :

$$\left. \begin{aligned} P^\mu|M, \vec{0}, s, \sigma\rangle &= p_{\text{ref}}^\mu|M, \vec{0}, s, \sigma\rangle \\ P^2|M, \vec{0}, s, \sigma\rangle &= M^2|M, \vec{0}, s, \sigma\rangle \\ W^2|M, \vec{0}, s, \sigma\rangle &= -M^2 s(s+1)|M, \vec{0}, s, \sigma\rangle \\ -\frac{S_{\text{rest}}^\mu W_\mu}{M}|M, \vec{0}, s, \sigma\rangle &= \sigma|M, \vec{0}, s, \sigma\rangle \end{aligned} \right\}, \text{ con } \begin{array}{l} s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \\ -s < \sigma < s \end{array}$$

Prima di procedere, organizziamo gli stati secondo lo schema seguente:

$(M, s = 0)$	$(M, s = \frac{1}{2})$	$(M, s = 1)$	\dots
$ M, \vec{0}, 0, 0\rangle$	$ M, \vec{0}, \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle$	$ M, \vec{0}, 1, 1\rangle$	
	$ M, \vec{0}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$	$ M, \vec{0}, 1, 0\rangle$	

Step 5

Ora che abbiamo un auto-sistema composto di soli operatori "commutanti" (come si può vedere in maniera comprensiva svolgendo l'esercizio 6.2.5), **possiamo costruire degli stati con impulso generico p .**

Questo passaggio può essere implementato in vari modi, tutti connessi da un cambiamento di base. Consideriamo una particella con 3-impulso che inizialmente valga $\vec{p}_{\text{ref}} = 0$ ed applichiamo un boost lungo l'asse \hat{z} , che sappiamo (dall'esercizio 6.2.4) essere esprimibile tramite una matrice:

$$B_z(\xi) = \begin{pmatrix} \cosh \xi & 0 & 0 & \sinh \xi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh \xi & 0 & 0 & \cosh \xi \end{pmatrix}$$

Di conseguenza, considerando $p_{\text{ref}}^\mu = (M, \vec{p}_{\text{ref}})$, abbiamo:

$$B_z(\xi)p_{\text{ref}}^\mu = \begin{pmatrix} M \cosh \xi \\ 0 \\ 0 \\ M \sinh \xi \end{pmatrix}$$

Ovvero, dopo il boost la particella sviluppa un impulso $\vec{p} = M \sinh \xi \hat{z}$.

Adesso introduciamo la matrice di rotazione $R_{\hat{n}}$, che trasforma il versore \hat{z} nel generico versore $\hat{n} = (n_1, n_2, n_3)$ con $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$:

$$R_{\hat{n}} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{n_1^2}{1+n_3} & \frac{-n_1 n_2}{1+n_3} & n_1 \\ \frac{-n_1 n_2}{1+n_3} & 1 - \frac{n_1^2}{1+n_3} & n_2 \\ -n_1 & -n_2 & n_3 \end{pmatrix}$$

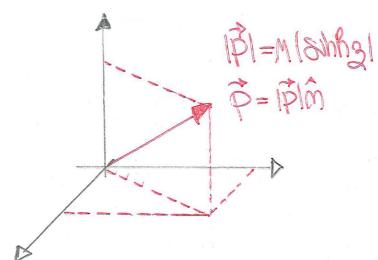
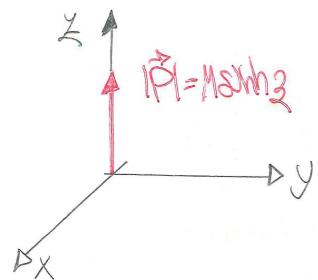
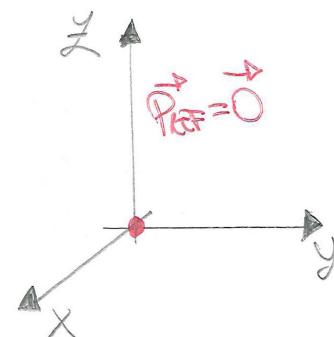
a cui anche in questo caso associamo la trasformazione di Lorentz:

$$\Lambda_{R_{\hat{n}}} \equiv \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & R_{\hat{n}} \end{array} \right)$$

A questo punto ci interessa considerare il caso in cui $\hat{n} \equiv \hat{p} := \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} = (\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z)$, in modo da ottenere una rotazione che porti il versore \hat{z} nel generico versore \hat{p} .

Per calcolo diretto troviamo:

$$\Lambda_{R_{\hat{p}}} B_z(\xi)p_{\text{ref}}^\mu = \Lambda_{R_{\hat{p}}} \begin{pmatrix} M \cosh \xi \\ 0 \\ 0 \\ M \sinh \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M \cosh \xi \\ |\vec{p}| \hat{p} \\ |\vec{p}| \hat{p} \\ M \sinh \xi \end{pmatrix}$$



Definiamo allora:

$$\boxed{H\left(\hat{p}, \frac{|\vec{p}|}{M}\right) := \Lambda_{R_{\hat{p}}} B_z\left(\frac{|\vec{p}|}{M}\right)} \Rightarrow \boxed{p^{\mu} = H_{\nu}^{\mu} p_{\text{ref}}^{\nu}}$$

Introduciamo anche l'operatore

$$\boxed{U_H\left(\hat{p}, \frac{|\vec{p}|}{M}\right) \equiv U_H}$$

che rappresenta l'azione di H sugli stati $|M, \vec{0}, s, \sigma\rangle$, definita da

$$\boxed{U_H\left(\hat{p}, \frac{|\vec{p}|}{M}\right)|M, \vec{0}, s, \sigma\rangle \equiv U_H|\vec{0}, \sigma\rangle}$$

Vogliamo capire come si comportano questi stati e quali sono le loro proprietà. Per farlo applichiamo P^{μ} a sinistra e sfruttiamo il fatto che questo trasforma come un 4-vettore sotto trasformazione di Lorentz [eq. (6.3)]:

$$\begin{aligned} P^{\mu} U_H |\vec{0}, \sigma\rangle &= U_H \overbrace{U_H^{-1} P^{\mu} U_H}^{H_{\nu}^{\mu} P^{\nu}} |\vec{0}, \sigma\rangle \\ &= U_H H_{\nu}^{\mu} P^{\nu} |\vec{0}, \sigma\rangle = U_H H_{\nu}^{\mu} p_{\text{ref}}^{\nu} |\vec{0}, \sigma\rangle \\ &= p^{\mu} U_H |\vec{0}, \sigma\rangle \end{aligned}$$

Ci accorgiamo quindi che $U_H\left(\hat{p}, \frac{|\vec{p}|}{M}\right)|M, \vec{0}, s, \sigma\rangle$ è autostato di P^{μ} con autovalore $p^{\mu} = H_{\nu}^{\mu} p_{\text{ref}}^{\nu}$. In particolare, U_H agisce sullo stato $|M, \vec{0}, s, \sigma\rangle$ in modo tale da trasformare $p_{\text{ref}} \rightarrow H p_{\text{ref}}$, senza toccare σ .

Possiamo quindi definire il nostro stato con impulso generico:

$$\boxed{|M, \vec{p}, s, \sigma\rangle := U_H\left(\hat{p}, \frac{|\vec{p}|}{M}\right)|M, \vec{0}, s, \sigma\rangle} \quad (6.12)$$

A questo punto riscriviamo le equazioni agli autovalori, questa volta per gli stati appena costruiti. Le prime tre sono semplici, la prima la abbiamo appena dimostrata, le altre due seguono immediatamente dal fatto che P^2 e W^2 sono Casimir:

$$\begin{aligned} P^{\mu} |M, \vec{p}, s, \sigma\rangle &= p^{\mu} |M, \vec{p}, s, \sigma\rangle \\ P^2 |M, \vec{p}, s, \sigma\rangle &= M^2 |M, \vec{p}, s, \sigma\rangle \\ W^2 |M, \vec{p}, s, \sigma\rangle &= -M^2 s(s+1) |M, \vec{p}, s, \sigma\rangle \end{aligned}$$

Per quanto riguarda l'ultima c'è bisogno di una discussione apposita, che parte dalla definizione di:

$$S_p^{\mu} \equiv H_{\nu}^{\mu} S_{\text{rest}}^{\nu} \xrightarrow{(H^{-1})^{\nu}_{\mu}} (H^{-1})^{\nu}_{\mu} S_p^{\mu} = S_{\text{rest}}^{\nu}$$

che rende l'operatore $\frac{S_{\text{rest}}^{\mu} W_{\mu}}{M} \rightarrow \frac{S_p^{\mu} W_{\mu}}{M}$.

Qui stiamo utilizzando una proprietà delle trasformazioni di Lorentz, riportata ad esempio in equazione (5.9) delle [Lectures di David Tong](#) ovvero:

$$(\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu} \Lambda^{\mu}_{\nu} = \delta^{\nu}_{\mu}$$

Di conseguenza possiamo elaborare l'equazione che ci interessa come segue:

$$\begin{aligned} -\frac{S_p^\mu W_\mu}{M} U_H |\vec{0}, \sigma\rangle &= -\frac{S_p^\mu}{M} U_H \overbrace{U_H^{-1} W_\mu U_H}^{H_\mu^\nu W_\nu} |\vec{0}, \sigma\rangle \\ &= -U_H \frac{(H^{-1})_\mu^\nu S_p^\mu W_\nu}{M} |\vec{0}, \sigma\rangle = U_H \left(\frac{-S_{\text{rest}}^\nu W_\nu}{M} \right) |\vec{0}, \sigma\rangle \\ &= \sigma U_H |\vec{0}, \sigma\rangle \end{aligned}$$

Si può verificare con un calcolo esplicito che l'azione di $-S_{\text{rest}}^\nu W_\nu/M$ su $|M, \vec{p}, s, \sigma\rangle$ è equivalente a quella dell'operatore $\vec{J} \cdot \vec{P}/|\vec{p}|$. Questa equivalenza ci permette di riscrivere le equazioni agli autovalori nel modo seguente:

$$\boxed{\begin{aligned} P^\mu |M, \vec{p}, s, \lambda\rangle &= p^\mu |M, \vec{p}, s, \lambda\rangle \\ P^2 |M, \vec{p}, s, \lambda\rangle &= M^2 |M, \vec{p}, s, \lambda\rangle \\ W^2 |M, \vec{p}, s, \lambda\rangle &= -M^2 s(s+1) |M, \vec{p}, s, \lambda\rangle \\ \vec{J} \cdot \vec{P} |M, \vec{p}, s, \lambda\rangle &= \lambda |\vec{p}| |M, \vec{p}, s, \lambda\rangle \end{aligned}}, \text{ con } \begin{array}{l} s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \\ -s < \lambda < s \end{array} \quad (6.13)$$

Notiamo la sostituzione $\sigma \leftrightarrow \lambda$ interpretata come elicità, in quanto stiamo estraendo la componente dello spin totale \vec{J} parallela alla direzione del moto, i.e. l'elicità. In particolare se scriviamo $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, allora lungo la direzione del moto, che è planare in quanto diretto come \hat{z} , sopravvive solo lo spin e l'elicità $\lambda = \vec{J} \cdot \vec{p}/|\vec{p}|$ rappresenta la proiezione dello spin lungo la direzione del moto.

Esercizio 6.3.3 Calcolare esplicitamente $-S_p^\mu W_\mu/M |M, \vec{0}, s, \sigma\rangle$. [Conti svolti Lez. 23 p. 47÷49]

Step 6

Vogliamo dimostrare la seguente affermazione:

Il sottospazio $\{|M, \vec{p}, s, \lambda\rangle\}$, con massa M e spin s fissati, fornisce una rappresentazione unitaria e irriducibile (R.U.I.) del gruppo di Poincaré.

Dimostrazione. Per dimostare la nostra tesi, sfruttiamo l'azione di un generico elemento del gruppo⁹ di Poincaré: $U(\Lambda, a) = U(\mathbb{1}, a)U(\Lambda, 0)$.

- Consideriamo prima le traslazioni. Per mezzo della mappa esponenziale dei generatori abbiamo

$$U(\mathbb{1}, a) = e^{ia_\mu P^\mu} \Rightarrow \boxed{U(\mathbb{1}, a)|M, \vec{p}, s, \lambda\rangle = e^{ia_\mu p^\mu} |M, \vec{p}, s, \lambda\rangle}$$

⁹ Qui c'è ovviamente un abuso di notazione, parliamo di elemento del gruppo ma ci stiamo riferendo alla rappresentazione dello stesso.

- Consideriamo ora le trasformazioni di Lorentz e per amor di notazione chiamiamo $U_\Lambda \equiv U(\Lambda, 0)$.
Il nostro obiettivo è calcolare $U_\Lambda|M, \vec{p}, s, \lambda\rangle$, ma prima di tutto ci accorgiamo di quanto segue:

$$\begin{aligned} P_\mu U_\Lambda|M, \vec{p}, s, \lambda\rangle &= U_\Lambda U_\Lambda^{-1} P^\mu U_\Lambda|M, \vec{p}, s, \lambda\rangle \\ &= U_\Lambda \Lambda^\mu_\nu P^\nu|M, \vec{p}, s, \lambda\rangle \\ &= U_\Lambda \Lambda^\mu_\nu p^\nu|M, \vec{p}, s, \lambda\rangle \\ &= p^\mu_\Lambda U_\Lambda|M, \vec{p}, s, \lambda\rangle \end{aligned}$$

In altre parole $U_\Lambda|M, \vec{p}, s, \lambda\rangle$ è ancora autostato di P^μ con autovettore $p^\mu_\Lambda \equiv \Lambda^\mu_\nu p^\nu$.

Ha quindi senso definire:

$$|M, \vec{p}_\Lambda, s, \lambda\rangle = U_H\left(\hat{p}_\Lambda, \frac{|\vec{p}_\Lambda|}{M}\right)|M, \vec{0}, s, \lambda\rangle$$

dove ad U_H è associata una trasformazione $H\left(\hat{p}_\Lambda, \frac{|\vec{p}_\Lambda|}{M}\right)$ che trasforma il vettore di riferimento nel 4-vettore p^μ_Λ con componente spaziale \vec{p}_Λ .

Torniamo ora al nostro obiettivo iniziale ed operiamo nel modo seguente:

$$\begin{aligned} U_\Lambda|M, \vec{p}, s, \lambda\rangle &= U_\Lambda U_H\left(\hat{p}, \frac{|\vec{p}|}{M}\right)|M, \vec{0}, s, \lambda\rangle \\ &= U_H\left(\hat{p}_\Lambda, \frac{|\vec{p}_\Lambda|}{M}\right) U_H\left(\hat{p}_\Lambda, \frac{|\vec{p}_\Lambda|}{M}\right)^{-1} U_\Lambda U_H\left(\hat{p}, \frac{|\vec{p}|}{M}\right)|M, \vec{0}, s, \lambda\rangle \end{aligned}$$

Nello spazio dell'impulso, abbiamo:

$$p^\mu_{\text{ref}} \xrightarrow{H(\hat{p}, |\vec{p}|/M)} p^\mu = H^\mu_\nu p^\nu_{\text{ref}} \xrightarrow{\Lambda} p^\mu_\Lambda = \Lambda^\mu_\nu p^\nu \xrightarrow{H(\hat{p}_\Lambda, |\vec{p}_\Lambda|/M)^{-1}} p^\mu_{\text{ref}}$$

quindi p^μ_{ref} è invariante sotto azione dell'operatore $H(\hat{p}_\Lambda, |\vec{p}_\Lambda|/M)^{-1} \Lambda H(\hat{p}, |\vec{p}|/M)$, il che rende tale operatore un elemento del piccolo gruppo, i.e. una rotazione. Nello specifico è una **rotazione di Wigner**:

$$\boxed{\omega(\Lambda, p) = H(\hat{p}_\Lambda, |\vec{p}_\Lambda|/M)^{-1} \Lambda H(\hat{p}, |\vec{p}|/M)} \quad (6.14)$$

Di conseguenza, abbiamo l'operatore che descrive l'azione della rotazione di Wigner sugli stati $|M, \vec{0}, s, \lambda\rangle$:

$$\boxed{U_\omega(\Lambda, p) = U_H(\hat{p}_\Lambda, |\vec{p}_\Lambda|/M)^{-1} U_\Lambda U_H(\hat{p}, |\vec{p}|/M)} \quad (6.15)$$

Ma per quanto visto in precedenza, sappiamo come agiscono le rotazioni su questi stati: lo fanno secondo l'equazione (6.10). Possiamo quindi applicarla al nostro caso:

$$\begin{aligned} U_\Lambda|M, \vec{p}, s, \lambda\rangle &= U_H\left(\hat{p}_\Lambda, \frac{|\vec{p}_\Lambda|}{M}\right) \overbrace{\left[D_s(\omega(\Lambda, p))\right]_{\lambda' \lambda} |M, \vec{0}, s, \lambda'\rangle}^{U_\omega(\Lambda, p)|M, \vec{0}, s, \lambda\rangle} \\ &= \left[D_s(\omega(\Lambda, p))\right]_{\lambda' \lambda} |M, \vec{p}_\Lambda, s, \lambda'\rangle \end{aligned}$$

In conclusione, sotto una generica trasformazione di Poincaré:

$$\boxed{U(\Lambda, a)|M, \vec{p}, s, \lambda\rangle = U(1, a)U(\Lambda, 0)|M, \vec{p}, s, \lambda\rangle = e^{ia_\mu p^\mu_\Lambda} \left[D_s(\omega(\Lambda, p)) \right]_{\lambda' \lambda} |M, \vec{p}_\Lambda, s, \lambda'\rangle} \quad (6.16)$$

E fondamentalmente abbiamo finito, infatti:

- L'equazione (6.16) definisce completamente l'azione di una qualunque trasformazione di Poincaré generica sugli stati $|M, \vec{p}, s, \lambda\rangle$ nel sottospazio da essi generato quando M ed s sono fissati.
- La mappa $P(\Lambda, a) \rightarrow U(\Lambda, a)$ così definita è un omomorfismo su $\{|M, \vec{p}, s, \lambda\rangle\}$.
- La rappresentazione fornita da $U(\Lambda, a)$ è unitaria ed è immediato verificarlo, in quanto nella (6.16) abbiamo un esponenziale complesso, che è unitario, e le matrici $\left[D_s(\omega(\Lambda, p)) \right]_{\lambda' \lambda}$, anch'esse unitarie in quanto rappresentano rotazioni ordinarie.
- Le rappresentazioni fornite da $U(\Lambda, a)$ nei sottospazi $\{|M, \vec{p}, s, \lambda\rangle\}_{M,s}$ sono anche irriducibili, secondo la seguente definizione:

Definizione 6.3.2 (Rappresentazione Irriducibile.)

Una rappresentazione $D : G \rightarrow GL(V)$ si dice irriducibile se non c'è alcun sottospazio non-banale di V che sia invariante sotto l'azione di G per mezzo di D per ogni $g \in G$ (i.e. è irriducibile se al più ammette i sottospazi invarianti banali, $\{\emptyset\}$ e V stesso).

Nel nostro caso infatti, non è possibile definire alcun sottospazio invariante, in quanto tutti i vettori in $\{|M, \vec{p}, s, \lambda\rangle\}_{M,s}$ sono connessi da una trasformazione di Poincaré.

□

Abbiamo quindi le seguenti rappresentazioni irriducibili (abbreviato **irreps**), suddivise nello stesso modo che abbiamo visto alla fine dello step 4, ad ogni colonna corrisponde una irrep:

Scalare Massivo	Fermione Massivo	Vettore Massivo	...
$M, s = 0$	$M, s = 1/2$	$M, s = 1$...
$ M, \vec{0}, 0, 0\rangle$	$ M, \vec{0}, \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle$ $ M, \vec{0}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$	$ M, \vec{0}, 1, 1\rangle$ $ M, \vec{0}, 1, 0\rangle$ $ M, \vec{0}, 1, -1\rangle$	

Ogni rappresentazione irriducibile è uno stato di singola particella, e.g. la prima colonna corrisponde allo stato di singola particella di impulso \vec{p} , massa M e spin 0, i.e. uno stato *scalare massivo*. Questo significa che siamo molto vicini a ciò che, in apertura del capitolo, abbiamo definito come il nostro scopo principale: caratterizzare gli stati multi-particellari $|\psi\rangle$ ed implementare le trasformazioni di Poincaré rappresentandole con operatori unitari, in modo tale da rendere le probabilità di transizione invarianti sotto il cambio di sistema di riferimento.

È interessante notare che:

- Una particella massiva di spin “s” ha **$2s + 1$ gradi di libertà**, ovvero gli stati di elicità nella base che abbiamo costruito. Questo è vero in $d = 4$ dimensioni e per i fermioni massivi notiamo che ogni stato ha 2 gradi di libertà. Di norma si pensa ai fermioni come stati con 4 gradi di libertà, e questi sono rispettati quando si considerano entrambi gli stati nella rappresentazione.
- Per una particella massiva, l'**elicità è un invariante di Lorentz**.

6.4 Un commento tecnico

Nota: Questa sezione non ha lo scopo di essere esaustiva, per i dettagli ci si può riferire alla Lezione 24 pag. 57÷62.

Lo step 5 non è unico. È infatti possibile generare un impulso \vec{p} partendo da \vec{p}_{ref} in svariati modi ed ognuno produce di conseguenza una base differente. Noi abbiamo scelto quello che alla fine dei conti ci ha permesso di identificare σ nello stato in moto con l'elicità, la cosiddetta “base di elicità” ma è possibile ricavare, in modo simile rispetto a quello che abbiamo sviluppato nel dettaglio, un'altra base con un significato fisico rilevante: la “base di polarizzazione di spin”, in cui σ nello stato in moto è identificata come la terza componente dello spin (o in altri termini la proiezione dello spin lungo la direzione \hat{z}).

Questa è la base che adotta ad esempio il libro di Weinberg ed in sostanza basa la sua derivazione sulla scelta di un particolare boost nella direzione specificata da $\vec{p}/|\vec{p}|$, $L(\vec{p}, M)$, diverso dalla trasformazione $H(\hat{p}, |\vec{p}|/M)$ che abbiamo scelto noi e definito come segue:

$$L(\vec{p}, M) = \begin{pmatrix} p^0/M & -p_j/M \\ p^i/M & \delta_j^i - \frac{p^i p_j}{M(p^0 + M)} \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

Da qui in poi bisogna semplicemente svolgere gli stessi passaggi che abbiamo effettuato nello step 5 definendo l'operatore associato al boost, che in questo caso comprende già una rotazione隐式的 al suo interno, e ridefinendo l'operatore $-S_{\text{rest}}^\mu W_\mu/M$ per mezzo di $S_L^\mu = L_\nu^\mu S_{\text{rest}}^\nu$.

Il punto chiave che permette l'identificazione di σ nello stato in moto con la terza componente dello spin è lo stesso in cui abbiamo scoperto che $S_L^\mu W_\mu$ corrispondeva (a meno di fattori qui non riportati) all'operatore di elicità. Sviluppando il prodotto si trova che in questo caso:

$$-\frac{S_{\text{rest}}^\mu W_\mu}{M} = +\frac{1}{M} (L^{-1})_\mu^\nu W^\mu$$

e posto $J_s^k = \frac{1}{M} [L(\vec{p}, M)^{-1}]_\mu^k W^\mu$ si arriva all'ultima equazione dell'autosistema scritta nel modo seguente:

$$J_s^3 |M, \vec{p}, s, \sigma\rangle = \sigma |M, \vec{p}, s, \sigma\rangle$$

Il punto un po' contorto e che quindi rende più “fisicamente chiaro” il nostro approccio è il fatto che, per accorgersi dell'identificazione $\sigma \leftrightarrow$ spin lungo \hat{z} , bisogna tirare in causa l'algebra di $SU(2)$, che è la stessa sia

per il momento angolare orbitale che per lo spin, in quanto \vec{J}_s chiude tale algebra.

Tuttavia si verifica che $[J_s^i, P^k] = 0$, il che identifica \vec{J}_s con il vettore di spin, dato che il momento angolare orbitale non commuta con la quantità di moto.

Il completo auto-sistema, nella base di polarizzazione di spin, si scrive:

$$\boxed{\begin{aligned} P^\mu |M, \vec{p}, s, \sigma\rangle &= p_{\text{ref}}^\mu |M, \vec{p}, s, \sigma\rangle \\ P^2 |M, \vec{p}, s, \sigma\rangle &= M^2 |M, \vec{p}, s, \sigma\rangle \\ W^2 |M, \vec{p}, s, \sigma\rangle &= -M^2 s(s+1) |M, \vec{p}, s, \sigma\rangle \\ J_s^3 |M, \vec{p}, s, \sigma\rangle &= \sigma |M, \vec{p}, s, \sigma\rangle \end{aligned}}, \text{ con } \begin{array}{l} s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \\ -s < \sigma < s \end{array} \quad (6.18)$$

Dal resto del procedimento emerge invece una semplificazione, collegata alla rotazione di Wigner, in questo caso definita da:

$$\omega_L(\Lambda, p) = L(\vec{p}_\Lambda, M)^{-1} \Lambda L(\vec{p}, M) \in \text{SO}(3)$$

Tale rotazione comporta la seguente azione del generico elemento del gruppo di Poincaré per mezzo della rappresentazione U sugli stati $|M, \vec{p}, s, \sigma\rangle$:

$$U(\Lambda, a)|M, \vec{p}, s, \sigma\rangle = e^{ia \cdot p_\Lambda} \left[D_s(\omega_L(\Lambda, p)) \right]_{\sigma' \sigma} |M, \vec{p}_\Lambda, s, \sigma'\rangle$$

Tuttavia, c'è un teorema (che non dimostreremo) valido in questo caso¹⁰, che dice quanto segue e che semplifica notevolmente la rotazione di Wigner:

Teorema 6.4.1 *Sia $\Lambda = \Lambda_R \in \mathcal{L} = SO^+(1, 3)$ una rotazione pura, allora una rotazione di Wigner ad essa associata costruita per mezzo di soli boost è Λ_R stessa, i.e.:*

$$\omega_L(\Lambda_R, p) = \Lambda_R$$

6.5 R.U.I. di \mathcal{P} nel caso massless

Nel processo di costruzione delle rappresentazioni unitarie irriducibili del gruppo di Poincaré, in particolare alla fine dello step 2, abbiamo scelto di trattare il caso di particella massiva. Discutiamo invece adesso il caso di particella non massiva (o massless), i.e. consideriamo il caso in cui $p^2 = 0$ con $p^0 = |\vec{p}| > 0$.

Sulla base di tale assunzione, rivisitiamo alcuni dei passaggi che abbiamo già svolto.

¹⁰ Dalla dimostrazione si capisce perché questo teorema sia valido solo per rotazioni di Wigner costruite per mezzo di soli boost

Step 3

Chiaramente avremo bisogno di un **vettore di riferimento differente**, in quanto per una particella non massiva, come ad esempio un fotone, non esiste alcuno stato a riposo. Ovviamente la scelta è del tutto arbitraria, ma la nostra scelta sarà la seguente:

$$p_{\text{ref}}^\mu = (k, 0, 0, k), \quad k > 0$$

Di conseguenza, le equazioni agli autovalori in questo caso saranno:

$$\begin{aligned} P^\mu |0, k\hat{z}\rangle &= p_{\text{ref}}^\mu |0, k\hat{z}\rangle \\ P^2 |0, k\hat{z}\rangle &= 0 \end{aligned}$$

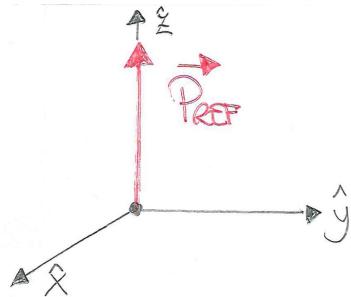
dove manteniamo l'autovalore¹¹ di P^2 , $M = 0$, come "etichetta" nello stato per evidenziare che siamo nel caso massless.

Step 4

Rivisitiamo a questo punto il **gruppo piccolo** per p_{ref}^μ . Se nel caso massivo la scelta del gruppo delle rotazioni, SO(3), era quasi telegrafata, in questo caso la situazione è un po' differente.

Questa volta abbiamo a che fare con un vettore di riferimento che presenta un impulso iniziale diretto come \hat{z} ed intuitivamente, ruotando nel piano (x, y) attorno \hat{z} , allora p_{ref}^μ resta invariato. Tuttavia, nel gruppo piccolo di questo p_{ref}^μ esistono trasformazioni più generali delle semplici rotazioni attorno l'asse z , identificabili con SO(2).

Per determinare quale sia il gruppo piccolo che stiamo cercando, ci avvaliamo del seguente teorema:



Teorema 6.5.1 (Generatori del gruppo piccolo.)

Sia $\mathcal{G}(p_{\text{ref}}^\mu)$ il gruppo delle trasformazioni di Lorentz sotto cui p_{ref}^μ è invariante, i.e. il suo gruppo piccolo.

Allora $\mathcal{G}(p_{\text{ref}}^\mu)$ è generato dalle tre componenti del seguente vettore:

$$\vec{T} = \vec{J}_{\text{vec}} + \frac{\vec{K}_{\text{vec}} \times \vec{p}_{\text{ref}}}{p_{\text{ref}}^0} \quad (6.19)$$

dove \vec{J}_{vec} e \vec{K}_{vec} sono, rispettivamente, i generatori di rotazioni e boost nella notazione vettoriale ricavata nell'esercizio 6.2.3.

Esercizio 6.5.1 Dimostrare il Teorema 6.5.1. [Conti svolti Lezione 24 pag. 64÷67]

Nota 6.5.1 Il Teorema 6.5.1 vale in generale! Nel caso massivo, in cui $p_{\text{ref}}^\mu = (M, 0)$, i generatori $\vec{T} \equiv \vec{J}_{\text{vec}}$, il che significa che il gruppo piccolo

¹¹ A meno del quadrato, ovviamente

è $\text{SO}(3)$, come trovato in precedenza.

Essendo $\vec{p}_{\text{ref}}/p_{\text{ref}}^0 = \hat{z}$, possiamo scrivere le componenti dei generatori del gruppo piccolo come segue:

$$\begin{aligned} T_x &\equiv J_{\text{vec}}^1 + K_{\text{vec}}^2 \\ T_y &\equiv J_{\text{vec}}^2 - K_{\text{vec}}^1 \\ T_z &\equiv J_{\text{vec}}^3 \end{aligned} \quad (6.20)$$

In J_{vec}^3 riconosciamo il generatore delle rotazioni attorno all'asse \hat{z} , ovvero del gruppo $\text{SO}(2)$, e questo ci dice quello che abbiamo già anticipato: $\mathcal{G}(p_{\text{ref}})$ è necessariamente più grande di $\text{SO}(2)$.

In particolare, si può dimostrare che tra i generatori, espressi come in equazione (6.20), valgono le seguenti relazioni di commutazione:

$$[T_x, T_y] = 0 \quad [T_z, T_x] = iT_y \quad [T_z, T_y] = -iT_x \quad (6.21)$$

E questa non è nient'altro se non l'algebra del gruppo euclideo in due dimensioni, i.e. $E(2)$. Ovvero il gruppo delle trasformazioni sotto cui è invariante la metrica euclidea.

Esercizio 6.5.2 Dimostare che i generatori del gruppo piccolo (6.20) chiudono l'algebra di $E(2)$ (6.21). [Conti svolti Lezione 24 pag. 68]

Di conseguenza **il gruppo piccolo nel caso massless è $E(2)$** ed è giunto il momento di ripetere le operazioni svolte nel caso massivo, ovvero aggiungere etichette agli stati $|0, k\hat{z}\rangle$ per descrivere come questi trasformano sotto gli elementi del gruppo piccolo.

Siccome nel caso massivo abbiamo usato il Casimir di $SO(3)^{12}$, $|\vec{J}|^2$, e l'operatore J^3 . Con lo stesso spirito proviamo innanzitutto ad utilizzare **il Casimir di E(2)**, fornito dall'operatore $T_x^2 + T_y^2$ (analogo di P^2 ma per le rotazioni bi-dimensionali sul piano euclideo).

Nota 6.5.2 L'unica relazione di commutazione non banale da dimostrare per verificare che $T_x^2 + T_y^2$ sia un Casimir è quella con T_z :

$$\begin{aligned} [T_z, T_x^2 + T_y^2] &= T_x [T_z, T_x] + [T_z, T_x] T_x + T_y [T_z, T_y] + [T_z, T_y] T_y = \\ &= iT_x T_y + iT_y T_x - iT_y T_x - iT_x T_y = \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Siamo a questo punto tentati dallo scrivere le equazioni agli autovalori nel modo seguente:

$$\begin{aligned} P^\mu |0, k\hat{z}, w\rangle &= p_{\text{ref}}^\mu |0, k\hat{z}, w\rangle \\ P^2 |0, k\hat{z}, w\rangle &= 0 \\ (T_x^2 + T_y^2) |0, k\hat{z}, w\rangle &= w |0, k\hat{z}, w\rangle \end{aligned}$$

¹² **Attenzione:** gli operatori di Casimir sono elementi dell'algebra di $SO(3)$, in notazione matematica indicata con $\mathfrak{so}(3)$, che in notazione fisica si confonde con il gruppo.

Per farlo dobbiamo prima verificare che $(T_x^2 + T_y^2)$ e P^μ commutino tra loro, il che permette di diagonalizzarli insieme.

Se ci restringiamo al sottospazio di p_{ref} , ossia quello generato dai vettori $|0, k\hat{z}, w\rangle$ facciamo una scoperta interessante. Riprendiamo lo pseudo-vettore di Pauli-Lubanski, le cui componenti nel sottospazio considerato diventano:

$$\begin{cases} W^0 = \vec{J} \cdot \vec{P} \\ \vec{W} = P^0 \vec{J} + \vec{K} \times \vec{P} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} W^0 = J^3 k \\ \vec{W} = k(\vec{J} + \vec{K} \times \hat{z}) \stackrel{6.19}{=} k \vec{T} \end{cases}$$

La componente spaziale del vettore di Pauli-Lubanski, ristretta al sottospazio di p_{ref}^μ , è un multiplo dei generatori dell'algebra di E(2).

Ne consegue che:

$$W^2 = (W^0)^2 - |\vec{W}|^2 = -k^2(T_x^2 + T_y^2)$$

Ma allora, sempre nel sottospazio del vettore di riferimento, possiamo scrivere l'ultima equazione nel modo seguente:

$$\boxed{-\frac{W_\mu W^\mu}{k^2} |0, k\hat{z}, w\rangle = w |0, k\hat{z}, w\rangle}$$

Che ci facilita anche la generalizzazione ad impulso qualunque in quanto presenta il Casimir di \mathcal{P} , W^2 , che abbiamo già incontrato.

Dobbiamo ora specificare come gli stati trasformino sotto gli elementi di $\text{SO}(2)$, i.e. quelli generati da J^3 . Nel sottospazio del vettore di riferimento P^μ e J^3 commutano, in quanto in generale tra i due vale la relazione $[J^3, P^k] = i\varepsilon^{3ik}P^k$, ma P^3 è l'unica componente diversa da zero in tale sottospazio e $\varepsilon^{3i3} = 0$.

Possiamo diagonalizzare anche J^3 insieme agli altri tre operatori, non resta che trovare l'equazione agli autovalori anche per quest'ultimo.

Nota 6.5.3 L'operatore J^3 genera rotazioni 1-dimensional attorno a \hat{z} , le quali compongono il gruppo $\text{SO}(2) < \text{SO}(3)$. Un elemento $R(\phi) \in \text{SO}(2)$ è specificato da un singolo parametro $\text{phi} \in [0, 2\pi]$, l'angolo della rotazione.

- ▶ Il gruppo è abeliano.
- ▶ La regola di composizione è $R(\phi_1)R(\phi_2) = R(\phi_1 + \phi_2)$, corredata dalla condizione $R(\phi) = R(\phi \pm 2\pi)$ se ϕ è fuori dall'intervallo $[0, 2\pi]$.
- ▶ L'elemento neutro è $R(0) = \mathbb{1}$.
- ▶ L'elemento inverso è $R(\phi)^{-1} = R(-\phi)$

Essendo $\text{SO}(2)$ abeliano, per il lemma di Schur le sue rappresentazioni irriducibili complesse sono 1-dimensional. Per cercare tali rappresentazioni partiamo dall'algebra e consideriamo l'equazione agli autovalori per J^3 :

$$J^3|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$$

dove $\lambda \in \mathbb{R}$ in quanto, visto che stiamo cercando rappresentazioni unitarie, J^3 deve essere Hermitiana.

A questo punto, sappiamo di poter ottenere gli elementi del gruppo per mezzo della mappa esponenziale $U(\phi) = \exp(-i\phi J^3)$. Di conseguenza avremo:

$$U(\phi)|\lambda\rangle = e^{-i\phi J^3}|\lambda\rangle = e^{-i\phi\lambda}|\lambda\rangle$$

Imponendo ora la condizione supplementare della legge di composizione di $\text{SO}(2)$, citata nella nota 6.5.3, arriviamo al seguente risultato:

$$e^{-i\phi\lambda}|\lambda\rangle = e^{-i\phi\lambda}e^{\mp i2\pi\lambda}|\lambda\rangle$$

Ma allora, siccome primo ed ultimo membro devono essere uguali, $e^{\mp i2\pi\lambda} \stackrel{!}{=} 1$, da cui segue che necessariamente $\lambda \in \mathbb{Z} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Le rappresentazioni irriducibili *ordinarie* di $\text{SO}(2)$ sono quindi definite da

$$J^3|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle, \quad \lambda \in \mathbb{Z}$$

Ma non abbiamo ancora finito: tutto questo discorso ha lo scopo di essere applicato in un contesto quanto-meccanico, quindi **dobbiamo considerare anche le rappresentazioni proiettive di $\text{SO}(2)$, in cui λ è semintero.**

Nota 6.5.4 Come dimostrazione che le rappresentazioni con λ semintero sono proiettive, consideriamo $\lambda = (2n+1)/2$ e l'operatore $U(\phi) = \exp(-i\phi(2n+1)/2)$.

Presi due angoli $\phi_{1,2}$ la cui somma sia pari a 2π , troviamo che

$$U(\phi_1)U(\phi_2) = U(\phi_1 + \phi_2) = U(2\pi) = U(2\pi - 2\pi) = \mathbb{1}$$

D'altro canto, nella nostra rappresentazione:

$$U(2\pi) = e^{-i2\pi\frac{(2n+1)}{2}} = e^{-i(2n+1)\pi} = -\mathbb{1} = e^{i\pi}\mathbb{1}$$

I risultati sono uguali a meno di una fase, quindi la rappresentazione è proiettiva. \square

Arriviamo quindi al sistema di equazioni seguente:

$$\begin{aligned} P^\mu|0, k\hat{z}, w, \lambda\rangle &= p_{\text{ref}}^\mu|0, k\hat{z}, w, \lambda\rangle \\ P^2|0, k\hat{z}, w, \lambda\rangle &= 0 \\ -\frac{W_\mu W^\mu}{k^2}|0, k\hat{z}, w, \lambda\rangle &= w|0, k\hat{z}, w, \lambda\rangle, \text{ con } \begin{cases} w \geq 0 \\ \lambda = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \dots \end{cases} \\ \frac{W^3}{k}|0, k\hat{z}, w, \lambda\rangle &= \lambda|0, k\hat{z}, w, \lambda\rangle \end{aligned}$$

C'è tuttavia un commento **cruciale** da fare, che nasce dall'interpretazione fisica degli stati che abbiamo costruito. In $|0, k\hat{z}, w, \lambda\rangle$, 0 e $k\hat{z}$ corrispondono agli autostati di massa ed impulso, rispettivamente, mentre λ è la proiezione dello spin lungo la direzione del moto \hat{z} . Ma w ?

Considerare $w > 0$ significa considerare un grado di libertà continuo aggiuntivo, che tuttavia non ha alcun riscontro sperimentale nel caso delle particelle massless! Di conseguenza scartiamo le cosiddette "rappresentazioni di spin continuo" (quelle con $w > 0$), che dal punto di vista mate-

matico sono perfettamente consistenti ma *sembrano*¹³ non corrispondere a nulla di realmente esistente, e ci concentriamo sulle rappresentazioni con $w = 0$.

D'ora in poi, il sistema definitivo a cui faremo riferimento sarà:

$$\boxed{\begin{aligned} P^\mu |0, k\hat{z}, \lambda\rangle &= p_{\text{ref}}^\mu |0, k\hat{z}, \lambda\rangle \\ P^2 |0, k\hat{z}, \lambda\rangle &= 0 \\ -\frac{S_{\text{ref}}^\mu W_\mu}{k} |0, k\hat{z}, \lambda\rangle &= \lambda |0, k\hat{z}, \lambda\rangle \end{aligned}}, \text{ con } \begin{cases} \lambda = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \dots \\ S_{\text{ref}}^\mu = (0, 0, 0, 1) \end{cases}$$

sottintendendo

$$T_x |0, k\hat{z}, w, \lambda\rangle = T_y |0, k\hat{z}, w, \lambda\rangle = 0$$

ed eventualmente eliminando anche la seconda equazione.

Step 5

Vogliamo generalizzare gli stati che abbiamo costruito al caso di impulso generico, e lo facciamo praticamente con lo stesso metodo utilizzato nel caso massivo: applichiamo un boost $B_z(\xi)$ in direzione \hat{z} al vettore di riferimento e successivamente ruotiamo il vettore ottenuto portandolo nella direzione generica \hat{p} per mezzo di $\Lambda_{R_{\hat{p}}}$.

Gli operatori che applichiamo hanno esattamente la stessa struttura di quelli già definiti nel caso massivo, la differenza peculiare sta nel fatto che, in questo caso, l'applicazione del boost non produce un impulso, ma modifica il modulo di quello già esistente.

In particolare, se si svolgono i conti riscrivendo le somme di seni e coseni iperbolicci, si trova facilmente che:

$$B_z(\xi) p_{\text{ref}}^\mu = \begin{pmatrix} ke^\xi \\ 0 \\ 0 \\ ke^\xi \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{p}| \equiv ke^\xi$$

D'ora in poi sostituiremo quindi la rapidità ξ con $\frac{|\vec{p}|}{k}$.

Per quanto riguarda la rotazione la situazione è del tutto analoga al caso massivo, il modulo dell'impulso non viene toccato, ma la sua direzione passa da \hat{z} alla generica direzione \hat{p} .

Definiamo quindi la trasformazione

$$\boxed{H(\hat{p}, |\vec{p}|/k) = \Lambda_{R_{\hat{p}}} B_z(|\vec{p}|/k)}$$

t.c. $p^\mu = H_\nu^\mu p^\nu$

a cui chiaramente corrisponde l'operatore $U_H(\hat{p}, |\vec{p}|/k)$ definito in modo tale da modificare l'impulso $\vec{p}_{\text{ref}} \rightarrow \vec{p}$, quando agente sullo stato $|0, k\hat{z}, \lambda\rangle$, i.e.:

$$\boxed{|0, \vec{p}, \lambda\rangle \equiv U_H(\hat{p}, |\vec{p}|/k) |0, k\hat{z}, \lambda\rangle}$$

¹³ Non ci sono risposte certe a riguardo, solo ipotesi.

N.B.: per definizione, U_H non modifica λ , la proiezione dello spin lungo l'asse \hat{z} .

Applicando P^μ allo stato di generico impulso si verifica facilmente (con le stesse tecniche già viste, che non ripeteremo e che si avvalgono della relazione $U_H^{-1}P^\mu U_H = H_v^\mu P^v$) che questo stato è ancora autostato di P^μ con autovalore $p^\mu = H_v^\mu p^v$. Quindi le prime due equazioni del nostro autosistema sono rispettate, i.e.:

$$\begin{aligned} P^\mu |0, \vec{p}, \lambda\rangle &= p^\mu |0, \vec{p}, \lambda\rangle \\ P^2 |0, \vec{p}, \lambda\rangle &= 0 \end{aligned}$$

Ancora una volta dobbiamo lavorare solo sull'ultima equazione, nello stesso modo già visto due volte. Non ci stupisce scoprire che l'azione di $-S_p^\mu W_\mu/k$ sia analoga a quella di $\vec{J} \cdot \vec{P}/|\vec{p}|$, d'altronde è quello che succede anche nel caso massivo.

Possiamo quindi scrivere il sistema agli autovalori nel caso di impulso generico nel caso non massivo:

$$\boxed{\begin{aligned} P^\mu |0, \vec{p}, \lambda\rangle &= p^\mu |0, \vec{p}, \lambda\rangle \\ \vec{J} \cdot \vec{P} |0, \vec{p}, \lambda\rangle &= \lambda |\vec{p}| |0, \vec{p}, \lambda\rangle \end{aligned}}, \text{ con } \begin{cases} p^\mu \equiv (|\vec{p}|, \vec{p}) \\ \lambda = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \dots \end{cases}$$

omettendo le altre due equazioni che sono banalmente $P^2 |0, \vec{p}, \lambda\rangle = 0$ e $-\frac{W^2}{k^2} |0, \vec{p}, \lambda\rangle = 0$ per $w = 0$.

Step 6

Siamo arrivati allo step finale, quello in cui dimostriamo che:

Per ogni valore di λ fissato abbiamo una rappresentazione unitaria irriducibile del gruppo di Poincaré, definita dal sottospazio $\{|0, \vec{p}, \lambda\rangle\}_\lambda$.

Dimostrazione. Dobbiamo considerare l'azione di un generico elemento del gruppo di Poincaré $U(\Lambda, a) = U(1, a)U(\Lambda, 0)$ sugli stati $|0, \vec{p}, \lambda\rangle$.

- L'azione delle traslazioni è banale:

$$U(1, a)|0, \vec{p}, \lambda\rangle = e^{ia_\mu P^\mu} |0, \vec{p}, \lambda\rangle = e^{ia \cdot \vec{p}} |0, \vec{p}, \lambda\rangle$$

- per l'azione di una generica trasformazione di Lorentz dobbiamo lavorare un po' di più, ma la logica è la stessa del caso massivo, idem i conti.

In primis si osserva che lo stato $U_\Lambda |0, \vec{p}, \lambda\rangle$, con $U_\Lambda \equiv U(\Lambda, 0)$, è ancora autostato di P^μ con autovalore $p_\Lambda^\mu = \Lambda^\mu_\nu p^\nu$, i.e.:

$$P^\mu U_\Lambda |0, \vec{p}, \lambda\rangle = p_\Lambda^\mu U_\Lambda |0, \vec{p}, \lambda\rangle$$

Definiamo quindi

$$|0, \vec{p}_\Lambda, \lambda\rangle \stackrel{\text{def}}{=} U_{H_\Lambda} |0, \hat{z}, \lambda\rangle, \quad U_{H_\Lambda} \equiv U_H(\hat{p}_\Lambda, |\vec{p}_\Lambda|/k)$$

e calcoliamo

$$U_\Lambda |0, \vec{p}, \lambda\rangle = U_{H_\Lambda} \underbrace{U_{H_\Lambda}^{-1} U_\Lambda U_H}_{\in E(2)} |0, \hat{z}, \lambda\rangle \stackrel{*}{=}$$

Come nel caso massivo, ci accorgiamo che la trasformazione $H_\Lambda^{-1} \Lambda H$ porta p_{ref} in sé stesso, ergo appartiene al gruppo piccolo $\mathcal{G}(p_{\text{ref}}) \equiv E(2)$ e lo stesso vale per l'operatore ad essa associato.

Scriviamo di conseguenza:

$$U_{H_\Lambda}^{-1} U_\Lambda U_H \stackrel{\in E(2)}{=} \exp(-i\theta_x T_x - i\theta_y T_y - i\theta J^3)$$

Il punto chiave è il seguente: noi sappiamo che lo stato $|0, \hat{z}, \lambda\rangle$ è autostato di $T_{x,y}$ con autovalore nullo, quindi l'azione dell'operatore di cui sopra si riduce all'azione della componente funzione di J^3 , il cui autovalore sappiamo essere λ ! Di conseguenza abbiamo:

$$U_{H_\Lambda}^{-1} U_\Lambda U_H |0, \hat{z}, \lambda\rangle = e^{-i\theta(\Lambda, p)\lambda} |0, \hat{z}, \lambda\rangle$$

Ma allora:

$$|U_\Lambda |0, \vec{p}, \lambda\rangle \stackrel{*}{=} e^{-i\theta(\Lambda, p)\lambda} |0, \vec{p}_\Lambda, \lambda\rangle$$

Questa equazione ci dice che sotto elementi del gruppo di Lorentz non viene modificata la proiezione di spin lungo \hat{z} , ma viene estratta una fase dipendente dal parametro $\theta(\Lambda, p)$. **Si dimostra che tale parametro**, nel caso in cui Λ sia una rotazione pura intorno all'asse \hat{z} di un certo angolo ϕ , **corrisponde esattamente all'angolo di rotazione**.

In definitiva, per una trasformazione di Poincaré generica, abbiamo:

$$U(\Lambda, a) |0, \vec{p}, \lambda\rangle = e^{ia \cdot p_\Lambda} e^{-i\theta(\Lambda, p)\lambda} |0, \vec{p}_\Lambda, \lambda\rangle \quad (6.22)$$

Commentiamo quanto appena trovato:

- La relazione (6.22) definisce l'azione di una qualunque trasformazione di Poincaré sugli stati $|0, \vec{p}, \lambda\rangle$ nel sottospazio definito da $M = 0$ e λ fissata.
- Applicando una trasformazione di Poincaré generica l'elicità λ non viene modificata, mentre l'impulso $\vec{p} \rightarrow \vec{p}_\Lambda$. Questo significa che l'elicità, per particelle massless, è un buon numero quantico.
- La mappa così definita è un omomorfismo, quindi interpretabile come una rappresentazione ed è unitaria ed irriducibile, secondo la stessa logica vista nel caso massivo [**dimostrazione svolta lezione 25 pag. 82**].

□

Abbiamo quindi le seguenti rappresentazioni unitarie irriducibili del gruppo di Poincaré, che descrivono particelle massless:

$$|0, \vec{p}, 0\rangle \quad |0, \vec{p}, +\frac{1}{2}\rangle \quad |0, \vec{p}, -\frac{1}{2}\rangle \quad |0, \vec{p}, 1\rangle \quad \dots$$

Esercizio 6.5.3 Mostrare che, quando Λ è una rotazione pura attorno all'asse \hat{z} di un certo angolo ϕ , il parametro $\theta(\Lambda, p)$ equivale all'angolo di rotazione stesso, i.e.:

$$\theta(\Lambda_{R_z(\phi)}, p) = \phi , \quad \text{con } \Lambda_{R_z(\phi)} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & R_{\hat{n}} \end{array} \right) \quad (6.23)$$

Commento sulla parità

Se restringiamo la nostra analisi alla parte connessa del gruppo di Poincaré, viene naturale identificare una particella elementare massless con un solo grado di libertà, ovvero la sua elicità λ che è fissata: e.g. un fotone con elicità $\lambda = +1$ sarà distinto da un fotone con elicità $\lambda = -1$.

Tuttavia in QED siamo abituati a pensare i fotoni come particelle con due gradi di libertà, questo perché in QED abbiamo una simmetria spazio-temporale aggiuntiva, nota come parità, la cui azione inverte il segno (“flippa”) delle componenti spaziali lasciando inalterata la componente temporale: $\mathbb{P} : (t, \vec{x}) \rightarrow (t, -\vec{x})$.

La parità può essere vista come una trasformazione di Lorentz, rappresentandola con la matrice:

$$\Lambda_{\mathbb{P}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

che infatti rispetta la relazione $\Lambda_{\mathbb{P}}^T \eta \Lambda_{\mathbb{P}} = \eta$, ma non è connessa all'identità in quanto $\det(\Lambda_{\mathbb{P}}) = -1$.

Ciò significa che l'effetto delle trasformazioni di parità non può essere catturato dall'azione della trasformazione U_{Λ} , che abbiamo costruito restringendoci alle trasformazioni che appartengono ad $\text{SO}^+(1, 3)$.

Ma allora qual è l'azione della parità sui nostri stati massless? Siccome la parità flippa l'impulso \vec{p} ma non lo spin \vec{J} , l'effetto netto è quello del flip dell'elicità:

$$\lambda = \frac{\vec{J} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \xrightarrow{\mathbb{P}} -\lambda$$

Questo significa che aggiungere la simmetria di parità alla simmetria sotto trasformazioni di Lorentz produce un accoppiamento dei singoletti $|0, \vec{p}, \lambda\rangle$ e $|0, \vec{p}, -\lambda\rangle$ o, in termini più tecnici, che i sottospazi $\{|0, \vec{p}, \lambda\rangle\}_{\lambda}$ non sono R.U.I. di “ $\text{SO}^+(1, 3) + \mathbb{P}$ ”, mentre i sottospazi $\{|0, \vec{p}, \pm\lambda\rangle\}_{\lambda}$ lo sono.

Quindi in QED i fotoni hanno due gradi di libertà, dettati dall'elicità $\lambda = \pm 1$, e lo stesso vale per i gravitoni, $\lambda = \pm 2$.

Chiaramente, teorie che non presentano la simmetria di parità, o che la presentano solo in maniera approssimata, non necessitano della formazione di multipletti di elicità. In tali casi, potremmo quindi avere a che

fare particelle massless con un solo valore di elicità possibile e che non esistono con l'elicità opposta.

Un esempio di teoria in cui si verifica ciò è quello della versione embrionale del modello standard, in cui i neutrini erano considerati esattamente massless e con elicità negativa, mentre gli anti-neutrini erano rappresentanti dello stato con elicità positiva. Questo perché l'interazione debole, l'unica a cui i neutrini sono sensibili, non conservano la parità.

Va tuttavia precisato che, seppur piccola, i neutrini posseggono una massa (oscillazioni dei neutrini, 2001), indi per cui non possiamo utilizzare stati massless per descriverli.

Identificare i neutrini con stati massivi richiederebbe l'esistenza di (anti-)neutrini con entrambe le elicità, ma non è ciò che si osserva: la verifica dell'unicità del valore di elicità per i neutrini è arrivata con [l'esperimento di Goldhaber nel 1957](#) ed apre quindi ad un'altra possibilità, ovvero che il neutrino sia una particella di Majorana, anti-particella di sé stessa.

6.6 Stati multi-particellari e loro trasformazioni

Adottiamo la notazione $|\vec{p}, \lambda, n\rangle$ per indicare stati di singola particella con impulso \vec{p} , elicità λ e con tutti gli altri numeri quantici come spin o massa per il caso massivo raccolti in n .

Definiamo quindi l'**operatore di creazione** a^\dagger tale che:

$$|\vec{p}, \lambda, n\rangle = \sqrt{2E_p} a^\dagger(\vec{p}, \lambda, n)|0\rangle \quad (6.24)$$

dove $|0\rangle$ è lo stato di vuoto, definito come lo stato preservato da qualunque trasformazione di Poincaré, i.e. $U(\Lambda, a)|0\rangle = |0\rangle \forall U(\Lambda, a) \in \mathcal{P}$.

Inoltre notiamo che, essendo $U(\Lambda, a) = U(1, a)U(\Lambda, 0) = e^{ia_\mu P^\mu} e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu}}$, lo stato di vuoto è annichilito da tutti i generatori della simmetria, i.e.: $P^\mu|0\rangle = J^{\mu\nu}|0\rangle = |0\rangle$.

Possiamo quindi determinare le proprietà di trasformazione sotto Poincaré dell'operatore di creazione, agendo con $U(\Lambda, a)$ su $|\vec{p}, \lambda, n\rangle$. Ma tale azione è stata oggetto dei nostri studi nello step 6 della costruzione delle R.U.I. del gruppo di Poincaré, sia nel caso massivo che nel caso non massivo.

Facendo riferimento al caso massivo, ovvero all'equazione (6.16), possiamo scrivere:

$$\sqrt{2p^0} U(\Lambda, a) a^\dagger(\vec{p}, \lambda, n)|0\rangle = e^{ia \cdot p_\Lambda} \left[D_s(\omega(\Lambda, p)) \right]_{\lambda' \lambda} |\vec{p}_\Lambda, \lambda', n\rangle$$

Riscriviamo l'equazione nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \sqrt{2p^0} U(\Lambda, a) a^\dagger(\vec{p}, \lambda, n) U(\Lambda, a)^{-1} \overbrace{U(\Lambda, a)|0\rangle}^{=|0\rangle} &= \\ &= e^{ia \cdot p_\Lambda} \left[D_s(\omega(\Lambda, p)) \right]_{\lambda' \lambda} \sqrt{2p^0} a^\dagger(\vec{p}_\Lambda, \lambda', n)|0\rangle \end{aligned}$$

Nel caso massless la situazione è analoga. L'unica differenza è, con riferimento all'equazione (6.22), nell'elemento di matrice che diventa $[D_s(\omega(\Lambda, p))]_{\lambda' \lambda} \rightarrow e^{-i\theta(\Lambda, p)\lambda} \delta_{\lambda' \lambda}$.

Da cui segue la **legge di trasformazione degli operatori di creazione sotto trasformazioni di Poincaré**:

$$U(\Lambda, a)a^\dagger(\vec{p}, \lambda, n)U(\Lambda, a)^{-1} = \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} e^{ia \cdot p_\Lambda} \left[D_s(\omega(\Lambda, p)) \right]_{\lambda' \lambda} a^\dagger(\vec{p}_\Lambda, \lambda', n) \quad (6.25)$$

Siccome non vogliamo che si offendano, riportiamo anche la legge di trasformazione analoga per gli operatori di annichilazione, che non è altro se non l'aggiunta (o Hermitiana coniugata che dir si voglia) dell'equazione (6.25):

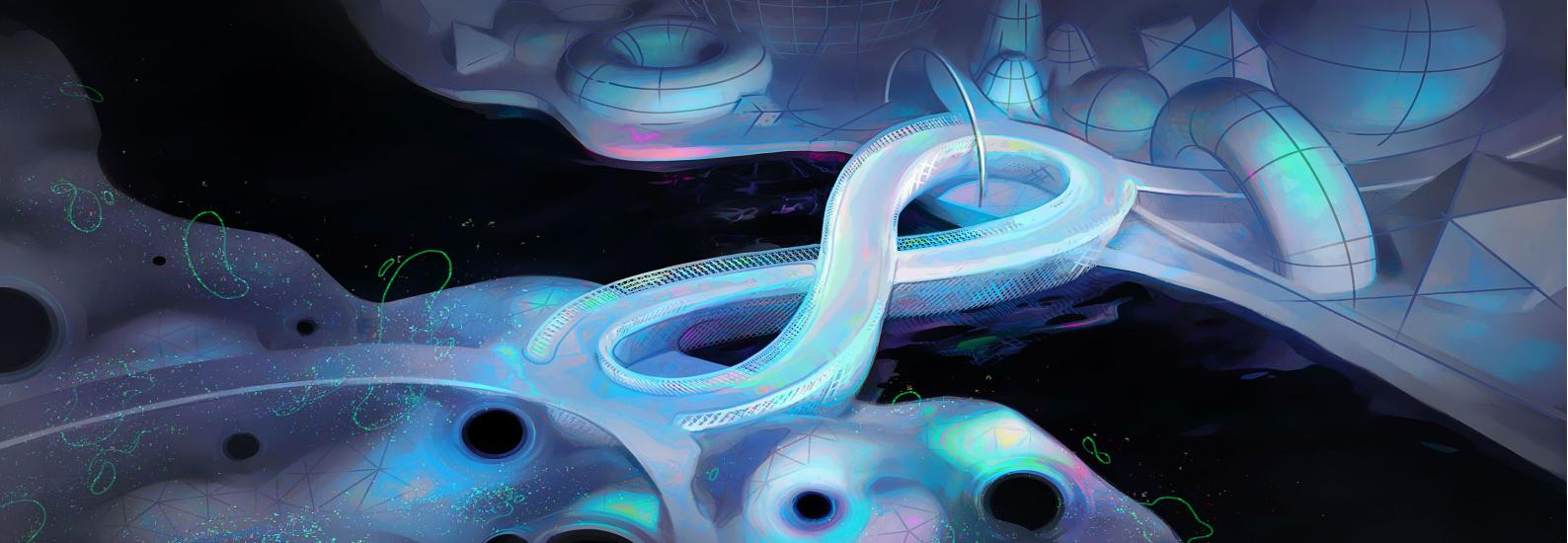
$$U(\Lambda, a)a(\vec{p}, \lambda, n)U(\Lambda, a)^{-1} = \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} e^{-ia \cdot p_\Lambda} \left[D_s(\omega(\Lambda, p)) \right]_{\lambda' \lambda}^* a(\vec{p}_\Lambda, \lambda', n) \quad (6.26)$$

Sulla base di questi ragionamenti possiamo definire **gli stati multi-particellari** con N particelle:

$$\begin{aligned} |\vec{p}_1, \lambda_1, n_1; \dots; \vec{p}_N, \lambda_N, n_N\rangle &= \\ &= \sqrt{2p_1^0} a^\dagger(\vec{p}_1, \lambda_1, n_1) \cdots \sqrt{2p_N^0} a^\dagger(\vec{p}_N, \lambda_N, n_N) |0\rangle \end{aligned} \quad (6.27)$$

Da cui si ricava con qualche conto l'azione delle trasformazioni di Poincaré:

$$\begin{aligned} U(\Lambda, a)|\vec{p}_1, \lambda_1, n_1; \dots; \vec{p}_N, \lambda_N, n_N\rangle &= e^{ia \cdot (\Lambda p_1 + \dots + \Lambda p_N)} \left\{ \left[D_{s_1}(\omega(\Lambda, p_1)) \right]_{\lambda_1 \lambda'_1} \right. \\ &\quad \left. \cdots \left[D_{s_N}(\omega(\Lambda, p_N)) \right]_{\lambda_1 \lambda'_N} \right\} |\vec{p}_{1,\Lambda}, \lambda'_1, n_1; \dots; \vec{p}_{N,\Lambda}, \lambda'_N, n_N\rangle \end{aligned} \quad (6.28)$$



7 Dalle Particelle ai Campi^a

^a Immagine da The Mystery at the Heart of Physics That Only Math Can Solve .

7.1 Operatore di Scattering e Proprietà delle Interazioni

Torniamo alla situazione che abbiamo delineato all'inizio del capitolo 6:

$$|\psi\rangle \xrightarrow{H_{\text{int}}} |\varphi\rangle$$

Ora sappiamo come caratterizzare gli stati multi-particellari $|\psi\rangle$ e sappiamo anche che tali stati trasformano secondo rappresentazioni unitarie irriducibili del gruppo di Poincaré, in accordo con il teorema di Wigner.

Tuttavia, supponendo di voler studiare un esperimento di scattering, siamo interessati alla situazione in cui pacchetti di particelle si avvicinano tra loro partendo da una distanza macroscopicamente grande, che successivamente interagiscono in una regione microscopicamente piccola e che si allontanano fino a trovarsi nuovamente ad una distanza macroscopicamente grande.

Gli stati prima e dopo l'interazione sono assimilabili a stati di particella libera, precisamente i nostri stati multi-particellari $|\psi\rangle$.

In questo caso, il prodotto scalare a cui siamo interessati non è della forma $\langle\varphi|\psi\rangle$, ma piuttosto del tipo:

$$S_{fi} = \langle f | U(+\infty, -\infty) | i \rangle$$

L'interpretazione di questo bra-ket è la seguente:

- Prendiamo uno stato multi-particellare $|i\rangle$ ad un certo tempo $t \rightarrow -\infty$.
- Lo evolviamo per mezzo dell'operatore $U(+\infty, -\infty)$ fino allo stato finale al tempo $t \rightarrow +\infty$.
- Calcoliamo l'overlap tra lo stato evoluto e lo stato finale di interesse $|f\rangle$.

7.1 Operatore di Scattering e Proprietà delle Interazioni	142
7.2 Campi Scalari	145
Il campo scalare neutro	145
Il campo scalare carico	146
7.3 Campi Quantistici di Spin Generico	147
7.4 Connessione Poincaré - Lorentz	148
Strategia della soluzione	149
7.5 Rappresentazioni Finito-Dim del Gruppo di Lorentz	150
7.6 Soluzione della Connessione $\mathcal{P}-\mathcal{L}$	153
Bosone vettore massless	153

Consideriamo i casi in cui l'Hamiltoniana è separata in una parte "libera" ed una di "interazione". Sostanzialmente stiamo considerando la Rappresentazione di Interazione di Dirac, in cui l'evoluzione temporale è dettata dall'Hamiltoniana $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{int}}$ e secondo cui gli operatori evolvono con l'Hamiltoniana libera \hat{H}_0 , mentre gli stati evolvono con l'Hamiltoniana di interazione \hat{H}_{int} .

In questa rappresentazione, l'operatore di evoluzione è il ben noto operatore di scattering (o matrice \mathcal{S}), espressa per mezzo della serie di Dyson:

$$U_I(\infty, -\infty) \equiv \mathcal{S} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n T[\hat{H}_{\text{int}}^I(x_1) \cdots \hat{H}_{\text{int}}^I(x_n)]$$

Siccome vogliamo che S_{fi} sia invariante sotto trasformazioni di Poincaré, per $U(\Lambda, a) \in \mathcal{P} \equiv ISO^+(1, 3)$, troviamo:

$$\langle f | \mathcal{S} | i \rangle \stackrel{!}{=} \langle f | U(\Lambda, a)^\dagger \mathcal{S} U(\Lambda, a) | i \rangle$$

Ma questo implica $U(\Lambda, a)^\dagger \mathcal{S} U(\Lambda, a) = \mathcal{S}$, ovvero:

$$SU(\Lambda, a) = U(\Lambda, a) \mathcal{S} \Rightarrow [S, U(\Lambda, a)] = 0$$

Quindi, per ottenere l'invarianza relativistica nella nostra teoria, la matrice \mathcal{S} deve commutare con l'operatore $U(\Lambda, a)$ che adopera le trasformazioni di Poincaré sugli stati di particella libera. Questa condizione produce interessanti vincoli sull'Hamiltoniana di interazione, in quanto l'invarianza di \mathcal{S} segue direttamente se si considera $\hat{H}_{\text{int}}^I(x)$ t.c.:

$$\begin{aligned} U(\Lambda, a) \hat{H}_{\text{int}}^I(x) U(\Lambda, a)^{-1} &= \hat{H}_{\text{int}}^I(\Lambda x + a) \\ [\hat{H}_{\text{int}}^I(x), \hat{H}_{\text{int}}^I(y)] &= 0 \quad \text{se } (x - y)^2 < 0 \end{aligned} \tag{7.1}$$

Se ignoriamo l'ordinamento temporale $T[\cdots]$, la tesi è dimostrata in un passaggio:

$$U(\Lambda, a) \mathcal{S} U(\Lambda, a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n [\hat{H}_{\text{int}}^I(\Lambda x_1 + a) \cdots \hat{H}_{\text{int}}^I(\Lambda x_n + a)]$$

Da qui con un cambio di variabile $\Lambda x_i + a \equiv y_i$ abbiamo finito, la misura di integrazione d^4x è invariante (essendo il Jacobiano che figura nel cambio di variabile il determinante di Λ , che è 1) ergo abbiamo $U(\Lambda, a) \mathcal{S} U(\Lambda, a)^{-1} = \mathcal{S}$.

Chiaramente, trascurare il time-ordering è un'approssimazione bella grossa. La logica di fondo è la stessa, ma tenendone conto emerge una situazione interessante, che giustifica la richiesta di commutazione tra gli operatori Hamiltoniani quando calcolati in punti separati da un intervallo di tipo spazio (fuori dal cono di luce).

Nel caso di $n = 2$, $U(\Lambda, a) \mathcal{S} U(\Lambda, a)^{-1}$ assume la seguente struttura:

$$\begin{aligned} \int d^4x_1 d^4x_2 &[\Theta(x_1^0 - x_2^0) \hat{H}_{\text{int}}^I(\Lambda x_1 + a) \hat{H}_{\text{int}}^I(\Lambda x_2 + a) \\ &+ \Theta(x_2^0 - x_1^0) \hat{H}_{\text{int}}^I(\Lambda x_2 + a) \hat{H}_{\text{int}}^I(\Lambda x_1 + a)] \end{aligned}$$

Se ora cambiamo variabile prendendo $\Lambda x_i + a \equiv y_i$ ovvero $x_i \equiv \Lambda^{-1}y_i - \Lambda^{-1}a$, ci troviamo circa nella situazione precedente. Il punto delicato si trova nel fatto che la **trasformazione di Lorentz implicata dal cambio di variabile potrebbe modificare il segno dell'intervallo temporale** presente nella Θ di Heaviside.

Quando abbiamo classificato le orbite del gruppo di Poincaré, abbiamo evidenziato e giustificato (in maniera intuitiva) il fatto che ciò non sia possibile nel caso in cui due punti x_i ed x_j siano all'interno del cono di luce, i.e. quando $(x_i - x_j)^2 \geq 0$. Il problema evidenziato si verifica dunque solo quando $(x_i - x_j)^2 < 0$ ed in tal caso imponiamo che la relazione di commutazione anticipata poc'anzi, $[\hat{H}_{\text{int}}^I(x), \hat{H}_{\text{int}}^I(y)] = 0$.

Inoltre, siccome vogliamo che l'evoluzione temporale goda della proprietà di unitarietà, $\hat{H}_{\text{int}}^I(x)$ deve essere anche Hermitiana.

Come facciamo a costruire delle Hamiltoniane che abbiano esattamente queste caratteristiche? Supponiamo di avere due operatori $\hat{O}_{1,2}(x)$ che verifichino individualmente le condizioni (7.1), i.e.:

$$\begin{aligned} U(\Lambda, a)\hat{O}_i(x)U(\Lambda, a)^{-1} &= \hat{O}_i(\Lambda x + a), \quad i = 1, 2 \\ [\hat{O}_i(x), \hat{O}_j(y)] &= 0, \quad \forall i, j \quad \text{se } (x - y)^2 < 0 \end{aligned}$$

- La prima condizione ci dice che gli $\hat{O}_i(x)$ sono operatori scalari, ovvero trasformano in maniera banale sotto trasformazioni di Lorentz¹.
- La seconda condizione è detta di micro-causalità.

Teorema 7.1.1 (Condizione di Micro-causalità.)

Due osservabili misurati in due punti spazio-temporali connessi da un intervallo di tipo spazio devono commutare tra loro.

Due osservabili mutualmente commutanti possono essere misurati in contemporanea senza che le due misure interferiscano tra loro, i.e. non sono in contatto causale.

A questo punto ci sono due fatti notevoli, e facili da dimostrare:

- (i.) Il prodotto $\hat{O}(x) = \hat{O}_1(x)\hat{O}_2(x)$ è ancora un operatore scalare.
- (ii.) Considerando $\hat{O}(\cdot)$ in due punti separati da un intervallo di tipo spazio la condizione di micro-causalità è ancora valida.

Appare quindi chiaro quale sia l'opzione più semplice per costruire gli operatori Hamiltoniani che ci interessano: sfruttare il prodotto di **operatori di campo scalari**, tutti valutati nello stesso punto $x \in \mathbb{M}^4$.

Per quanto il termine sia nuovo, abbiamo già incontrato degli oggetti che si identificano con gli operatori di campo scalari: **gli operatori di creazione e distruzione!**

Indichiamo con operatore di campo scalare un operatore agente su uno stato multi-particellare

¹ Nel senso che la trasformazione modifica solo la dipendenza spazio-temporiale e non la struttura dell'operatore stesso.

7.2 Campi Scalari

Il campo scalare neutro

La combinazione più semplice che possiamo costruire a partire dagli operatori di creazione e distruzione è il cosiddetto campo scalare neutro:

$$\boxed{\hat{\Phi}(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2p^0}} [a(\vec{p})e^{-ip \cdot x} + a^\dagger(\vec{p})e^{ip \cdot x}]} \quad (7.2)$$

$$\hat{\Phi}(x)^\dagger = \hat{\Phi}(x); \quad p^0 = +E_{\vec{p}}$$

Riguardo l'equazione (7.2) possiamo fare i seguenti commenti:

- 1) La presenza dei fattori $e^{\pm ip \cdot x}$ rende il campo automaticamente compatibile con la proprietà di trasformazione sotto traslazioni in \mathbb{M}^4 . Si verifica infatti, senza troppa difficoltà, per mezzo delle proprietà di trasformazione di $a(\vec{p})$ e $a^\dagger(\vec{p})$, rispettivamente eq. (6.25) e (6.26) considerate nel caso in cui $\Lambda = \mathbb{1}$, che:

$$U(\mathbb{1}, a)\hat{\Phi}(x)U(\mathbb{1}, a)^{-1} \stackrel{!}{=} \hat{\Phi}(x + a)$$

- 2) Gli operatori $a(\vec{p})$ e $a^\dagger(\vec{p})$ creano ed annichiliscono stati scalari (ovvero senza spin) e sotto trasformazione di Lorentz si può verificare che:

$$U(\Lambda, 0)\hat{\Phi}(x)U(\Lambda, 0)^{-1} \stackrel{!}{=} \hat{\Phi}(\Lambda x)$$

Dimostrazione. Siccome qui la situazione è un po' più subdola, è opportuno svolgere questo conto nel dettaglio. Innanzitutto possiamo riscrivere, preso $U(\Lambda, 0) \equiv U(\Lambda)$ ed applicando le regole di trasformazione di $a^{(\dagger)}(\vec{p})$ nel caso di stati spinless:

$$U(\Lambda)\hat{\Phi}(x)U(\Lambda)^{-1} = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2p^0}} \sqrt{\frac{(\Lambda p^0)}{p^0}} [a(\vec{p})e^{-ip \cdot \Lambda x} + a^\dagger(\vec{p})e^{ip \cdot \Lambda x}]$$

$$\hat{\Phi}(\Lambda x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2p^0}} [a(\vec{p})e^{-ip \cdot \Lambda x} + a^\dagger(\vec{p})e^{ip \cdot \Lambda x}]$$

Ora arriva il trucco che verifica l'uguaglianza tra le due espressioni: lavoriamo su $\hat{\Phi}(\Lambda x)$ e moltiplichiamo e dividiamo per $\sqrt{p^0}$, accorpando le due $\sqrt{p^0}$ a denominatore, così da ottenere un fattore $d^3\vec{p}/p^0$, che è invariante sotto trasformazione di Lorentz. Se successivamente **adottiamo il cambio di variabile** $p^\mu \rightarrow \Lambda p^\mu$ (che implica $\vec{p} \rightarrow \vec{p}_\Lambda$ e $p^0 \rightarrow (\Lambda p)^0$) arriviamo alla seguente espressione:

$$\hat{\Phi}(\Lambda x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2p^0}} \sqrt{(\Lambda p)^0} [a(\vec{p})e^{-i\Lambda p \cdot \Lambda x} + a^\dagger(\vec{p})e^{i\Lambda p \cdot \Lambda x}]$$

Il gioco è dunque fatto, possiamo separare $p^0 = \sqrt{p^0}\sqrt{p^0}$ e sfruttare l'invarianza del prodotto scalare sotto trasformazione di Lorentz e l'uguaglianza è verificata. \square

Gli operatori di creazione e distruzione nascondono al loro interno anche la massa del campo, nel caso in cui questo ne sia dotato.

- 3) Gli operatori $a(\vec{p})$ e $a^\dagger(\vec{p})$ appaiono con gli stessi fattori di proporzionalità, e questo porta alla verifica della condizione di micro-causalità.

Attenzione: Qui stiamo introducendo una procedura che utilizzeremo più volte nel seguito, ed a cui, per comodità di notazione, ci riferiremo sempre come "cambio di variabile ...", sottintendendo gli altri passaggi elencati prima e dopo.

La verifica è banale se si ricorda che tra gli operatori di creazione e distruzione vigono le seguenti relazioni di commutazione:

$$\boxed{\begin{aligned} [a(\vec{p}), a(\vec{k})] &= [a^\dagger(\vec{p}), a^\dagger(\vec{k})] = 0 \\ [a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{k})] &= (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{k}) \end{aligned}} \quad (7.3)$$

Se ad esempio ci fosse stato un fattore $\frac{1}{2}$ di fronte a solo uno dei due la condizione sarebbe invalidata.

Il campo scalare carico

Discutiamo ora una possibile generalizzazione del campo scalare neutro, introducendo il campo scalare carico, per cui non vale la condizione di Hermitianità, i.e. $\hat{\Phi}(x)^\dagger \neq \hat{\Phi}(x)$.

Tale operatore ha la seguente forma:

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{\Phi}(x) &= \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2p^0}} [a(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} + b^\dagger(\vec{p}) e^{ip \cdot x}] \\ \hat{\Phi}^\dagger(x) &= \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2p^0}} [b(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} + a^\dagger(\vec{p}) e^{ip \cdot x}] \end{aligned}} \quad (7.4)$$

Il metodo più semplice per costruire un campo di questo tipo è considerare due campi scalari indipendenti di pari massa $\hat{\Phi}_1(x)$ e $\hat{\Phi}_2(x)$ t.c.:

$$\hat{\Phi}_i(x) = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2p^0}} [a_i(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} + a_i^\dagger(\vec{p}) e^{ip \cdot x}]$$

e tra i cui operatori di creazione e distruzione valgono le seguenti relazioni di commutazione:

$$\begin{aligned} [a_i(\vec{p}), a_j(\vec{k})] &= [a_i^\dagger(\vec{p}), a_j^\dagger(\vec{k})] = 0, \quad \forall i, j \in [1, 2] \\ [a_i(\vec{p}), a_j^\dagger(\vec{k})] &= \delta_{ij} (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{k}), \quad i \neq j \end{aligned}$$

Possiamo quindi combinare questi due campi definendo:

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\hat{\Phi}_1(x) + i\hat{\Phi}_2(x)] \\ \hat{\Phi}^\dagger(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\hat{\Phi}_1(x) - i\hat{\Phi}_2(x)] \end{aligned}$$

Tale definizione genera due tipi di operatori di creazione e distruzione definiti in maniera naturale come segue:

PARTICELLE

$$\text{Distruzione: } a(\vec{p}) \equiv \frac{a_1(\vec{p}) + ia_2(\vec{p})}{\sqrt{2}}; \quad \text{Creazione: } a^\dagger(\vec{p}) \equiv \frac{a_1^\dagger(\vec{p}) - ia_2^\dagger(\vec{p})}{\sqrt{2}}$$

ANTI-PARTICELLE

$$\text{Distruzione: } b(\vec{p}) \equiv \frac{a_1(\vec{p}) - ia_2(\vec{p})}{\sqrt{2}} ; \quad \text{Creazione: } b^\dagger(\vec{p}) \equiv \frac{a_1^\dagger(\vec{p}) + ia_2^\dagger(\vec{p})}{\sqrt{2}}$$

Per i quali valgono le seguenti relazioni di commutazione

$$\begin{aligned} [a \circ b, a \circ b] &= 0 \\ [a^\dagger \circ b^\dagger, a^\dagger \circ b^\dagger] &= 0 \\ [a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{k})] &= [b(\vec{p}), b^\dagger(\vec{k})] = (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{k}) \end{aligned}$$

Il campo $\hat{\Phi}(x)$ crea una anti-particella tramite $b^\dagger(\vec{p})$ o annichilisce una particella tramite $a(\vec{p})$ nella posizione x , viceversa per $\hat{\Phi}^\dagger(x)$. La presenza di entrambi i tipi di operatori di creazione e distruzione nei campi è cruciale per garantire la proprietà di micro-causalità.

Dal punto di vista tecnico, essendo $\hat{\Phi}(x)$ anti-Hermitiano, l'Hamiltoniana (che deve essere Hermitiana) deve contenere sia $\hat{\Phi}$ che $\hat{\Phi}^\dagger$. Questo significa che la micro-causalità è verificata di conseguenza per ogni combinazione possibile. Combinando questa informazione con le relazioni di commutazione degli operatori a e b troviamo:

$$\begin{aligned} [\hat{\Phi}(x), \hat{\Phi}(y)] &= [\hat{\Phi}^\dagger(x), \hat{\Phi}^\dagger(y)] = 0 \quad \forall x, y \\ [\hat{\Phi}(x), \hat{\Phi}^\dagger(y)] &= [\hat{\Phi}^\dagger(x), \hat{\Phi}(y)] = 0 \quad \text{per } (x - y)^2 < 0 \end{aligned}$$

Esercizio 7.2.1 Calcolare esplicitamente $[\hat{\Phi}(x), \hat{\Phi}(y)]$ nel caso di un campo scalare reale. [Conti svolti Lezione 26p2 pag. 13÷16]

7.3 Campi Quantistici di Spin Generico

Siamo partiti considerando la possibilità più semplice: costruire interazioni tali da rispettare le proprietà (7.1) per mezzo di prodotti (globalmente Hermitiani) di operatori scalari che rispettino tali proprietà individualmente.

Chiaramente è possibile, seppur più complesso, costruire interazioni tali che $\hat{H}_{\text{int}}(x)$ sia un oggetto scalare, ma composto da operatori con trasformazioni non banali sotto Lorentz. Ad esempio possiamo considerare il caso in cui l'interazione sia prodotto di un campo 4-vettoriale ed un bilineare di Dirac, i.e.:

$$\hat{H}_{\text{int}}(x) = V^\mu(x) [\bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x)]$$

in cui la trasformazione del campo quantistico generico $\psi(x)$ è definita secondo [uno degli assiomi di Wightman](#):

$$U(\Lambda, a)\psi^a(x)U(\Lambda, a)^{-1} = \sum_b [\mathcal{D}(\Lambda^{-1})]^a_b \psi^b(\Lambda x + a) \quad (7.5)$$

dove essenzialmente stiamo dicendo che il campo $\psi^a(x)$ trasforma secondo \mathcal{D} , che è una qualche rappresentazione finito-dimensionale del gruppo di Lorentz, tra l'altro non unitaria (in quanto, come già sottolineato dopo l'esempio 6.2.1, essendo \mathcal{L} non compatto, non ammette rappresentazioni unitarie finito-dimensionali).

Inoltre il campo $\psi^a(x)$ è definito come segue:

$$\boxed{\psi^a(x) = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2p^0}} [u^a(\vec{p}, \lambda) a(\vec{p}, \lambda, n) e^{-ip \cdot x} + v^a(\vec{p}, \lambda) b^\dagger(\vec{p}, \lambda, n) e^{ip \cdot x}]} \quad (7.6)$$

dove stiamo espandendo l'operatore di campo in funzione degli operatori di creazione e distruzione di tipo “n” e per n fissato integriamo e sommiamo sugli stati del multipletto.

7.4 Connessione Poincaré - Lorentz

La domanda cruciale è la seguente:

Supponiamo di voler descrivere particelle di tipo “n” fissato (diciamo con massa M e spin s), secondo quale rappresentazione di Lorentz dovrebbe trasformare $\psi^a(x)$? Questa trasformazione è unica?

^a Spoiler: no, non lo è.

Per rispondere a questa domanda innanzitutto la formalizziamo dal punto di vista matematico, combinando le equazioni (7.5) e (7.6), in modo da avere un'equazione da risolvere. Per farlo, utilizzeremo le trasformazioni degli operatori $a(\vec{p}, \lambda, n)$ e $b^\dagger(\vec{p}, \lambda, n)$ sotto Lorentz, che qui riportiamo per comodità:

$$\begin{aligned} U(\Lambda) b^\dagger(\vec{p}, \lambda, n) U(\Lambda)^{-1} &= \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \left[D_s(\omega(\Lambda, p)) \right]_{\lambda' \lambda} b^\dagger(\vec{p}_\Lambda, \lambda', n) \\ U(\Lambda) a(\vec{p}, \lambda, n) U(\Lambda)^{-1} &= \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \left[D_s(\omega(\Lambda, p)) \right]_{\lambda' \lambda}^* a(\vec{p}_\Lambda, \lambda', n) \end{aligned}$$

Essendo $D_s(\omega)$ unitaria, $D_s(\omega)^\dagger = D_s(\omega)^{-1}$. Possiamo quindi trasporre l'equazione trovando:

$$D_s(\omega)^* = \left[D_s(\omega)^{-1} \right]^T \Rightarrow \left[D_s(\omega) \right]_{\lambda' \lambda}^* = \left[D_s(\omega)^{-1} \right]_{\lambda \lambda'} \stackrel{D_s \text{ è rappr.}}{=} \left[D_s(\omega^{-1}) \right]_{\lambda \lambda'}$$

Possiamo riscrivere l'equazione per $a(\vec{p}, \lambda, n)$ utilizzando l'uguaglianza che abbiamo appena ricavato:

$$\boxed{U(\Lambda) a(\vec{p}, \lambda, n) U(\Lambda)^{-1} = \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \left[D_s(\omega(\Lambda, p)^{-1}) \right]_{\lambda \lambda'} a(\vec{p}_\Lambda, \lambda', n)}$$

Sostituiamo quindi la (7.6) nella (7.5) trascurando la traslazione e applichiamo le regole che abbiamo appena visto. Il LHS si riscrive:

$$\begin{aligned} U(\Lambda)\psi^a(x)U(\Lambda)^{-1} = & \sum_{\lambda} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2p^0}} \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \times \\ & \times \left\{ u^a(\vec{p}, \lambda) e^{-ip \cdot x} \left[D_s(\omega^{-1}) \right]_{\lambda\lambda'} a(\vec{p}_\Lambda, \lambda', n) + \right. \\ & \left. + v^a(\vec{p}, \lambda) e^{ip \cdot x} \left[D_s(\omega) \right]_{\lambda'\lambda} b^\dagger(\vec{p}_\Lambda, \lambda', n) \right\} \end{aligned}$$

mentre per quanto riguarda il RHS abbiamo:

$$\begin{aligned} [\mathcal{D}(\Lambda^{-1})]^a_b \psi^b(\Lambda x) = & [\mathcal{D}(\Lambda^{-1})]^a_b \sum_{\lambda} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2p^0}} [u^b(\vec{p}, \lambda) e^{-ip \cdot \Lambda x} a(\vec{p}, \lambda, n) + \\ & + v^b(\vec{p}, \lambda) e^{ip \cdot \Lambda x} b^\dagger(\vec{p}, \lambda, n)] \stackrel{*}{=} \end{aligned}$$

Adesso adoperiamo il cambio di variabile $p \rightarrow \Lambda p$, come nel caso del campo scalare neutro, e rinominiamo $\lambda \rightarrow \lambda'$, in modo da ottenere:

$$\stackrel{*}{=} [\mathcal{D}(\Lambda^{-1})]^a_b \sum_{\lambda'} \int \frac{d^3\vec{p}_\Lambda}{(2\pi)^3 \sqrt{2p^0}} \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} [u^b(\vec{p}_\Lambda, \lambda') e^{-ip \cdot x} a(\vec{p}_\Lambda, \lambda', n) + \\ + v^b(\vec{p}_\Lambda, \lambda') e^{ip \cdot x} b^\dagger(\vec{p}_\Lambda, \lambda', n)]$$

Se compariamo LHS ed RHS otteniamo due equazioni, che rappresentano la **connessione particella-campo** (o Poincaré-Lorentz):

$$\begin{cases} \sum_{\lambda} [D_s(\omega^{-1})]_{\lambda\lambda'} u^a(\vec{p}, \lambda) = [\mathcal{D}(\Lambda^{-1})]^a_b u^b(\vec{p}_\Lambda, \lambda') \\ \sum_{\lambda} [D_s(\omega)]_{\lambda'\lambda} v^a(\vec{p}, \lambda) = [\mathcal{D}(\Lambda^{-1})]^a_b v^b(\vec{p}_\Lambda, \lambda') \end{cases} \quad (7.7)$$

Al LHS, con la notazione $\sum_{\lambda} [D_s(\omega)]_{\lambda'\lambda'}$, stiamo sottintendendo una somma su λ' , che nel confronto cancella quella del RHS

Nota 7.4.1 Nel caso massivo, risulta particolarmente utile considerare il problema nella base di polarizzazione di spin, che permette di riscrivere le equazioni come segue [conti svolti Lez. 27 pag. 21÷21]:

$$\begin{cases} [\mathcal{D}(\Lambda)]_n^k u^n(\vec{p}, \sigma) = u^k(\vec{p}_\Lambda, \sigma') [D_s(\omega_L)]_{\sigma'\sigma} \\ [\mathcal{D}(\Lambda)]_n^k v^n(\vec{p}, \sigma) = v^k(\vec{p}_\Lambda, \sigma') [D_s(\omega_L)]_{\sigma'\sigma}^* \end{cases} \quad (7.8)$$

Strategia della soluzione

Delineiamo come al solito in maniera schematica le tecniche che useremo in seguito per risolvere questa equazione. La strategia si compone di due step:

- 1) Consideriamo la prima equazione (riscritta in base di polarizzazione di spin) in $\vec{p} = 0$ e nel caso di $\Lambda = \Lambda_R$ rotazione pura.

In questo modo possiamo usare il fatto che $\omega_L(\Lambda_R, 0) = \Lambda_R$, come enunciato nel teorema 6.4.1, il che semplifica l'equazione in:

$$\left[\mathcal{D}(\Lambda_R) \right]_n^k u^n(\vec{0}, \sigma) = u^k(\vec{0}, \sigma') \left[D_s(\Lambda_R) \right]_{\sigma' \sigma} \quad (7.9)$$

che risolta fornisce $u^k(\vec{0}, \sigma)$.

- 2) Generalizziamo il risultato del punto 1) ad impulso \vec{p} generico.

In particolare prendiamo una trasformazione di Lorentz precisamente uguale all'inversa del boost che genera \vec{p} quando applicata a \vec{p}_{ref} , i.e. $\Lambda = L(\vec{p}, M)^{-1}$.

La rotazione di Wigner, che ricordiamo essere definita da $\omega_L(\Lambda, p) = L(\vec{p}_\Lambda, M)^{-1} \Lambda L(\vec{p}, M)$, nel nostro caso corrisponde a:

$$\omega_L(L^{-1}, p) = L(\vec{p}_\Lambda, M)^{-1}$$

Ma c'è di più, poiché in questo caso specifico Λ riporta \vec{p} nel vettore di riferimento $\vec{p}_{\text{ref}} = 0$, ergo $p_\Lambda = \vec{0}$! Di conseguenza, dalla definizione di $L(\vec{p}, M)$ (6.17):

$$\omega_L(L^{-1}, p) = L(\vec{0}, M)^{-1} = \mathbb{1}$$

Questo significa che, ripartendo dalla prima equazione delle (7.8) l'equazione diventa:

$$\begin{aligned} \left[\mathcal{D}(L(\vec{p}, M)^{-1}) \right]_n^k u^n(\vec{p}, \sigma) &= u^k(\vec{0}, \sigma') \delta_{\sigma' \sigma} \\ \delta_n^m u^m(\vec{p}, \sigma) &= \left[\mathcal{D}(L(\vec{p}, M)) \right]_k^m u^k(\vec{0}, \sigma) \end{aligned}$$

Ovvero:

$$\left[\mathcal{D}(L(\vec{p}, M)) \right]_k^m u^k(\vec{0}, \sigma) = u^m(\vec{p}, \sigma) \quad (7.10)$$

Quindi dobbiamo semplicemente boostare la soluzione del punto 1) per ottenere la soluzione generalizzata!

7.5 Rappresentazioni Finito-Dim del Gruppo di Lorentz

Abbiamo già evidenziato il fatto che, al contrario degli stati multi-particellari che formano rappresentazioni irriducibili infinite (ma unitarie) del gruppo di Poincaré, i campi formano multipletti² di Lorentz finiti ma non unitari.

Vogliamo ora esplicitare quale sia la forma della rappresentazione $\left[\mathcal{D}(\Lambda) \right]_b^a$, che sostanzialmente è una matrice.

Partiamo quindi con il considerare l'algebra di $SO^+(1, 3)$ (che indichiamo con $\mathfrak{so}^+(1, 3)$), i cui generatori sappiamo essere \vec{J} e \vec{K} . Tali generatori non commutano tra loro, infatti l'algebra dei boost coinvolge i generatori delle rotazioni.

² Stiamo utilizzando equivalentemente multipletti e rappresentazioni irriducibili

Possiamo tuttavia definire le seguenti combinazioni:

$$\boxed{\begin{aligned} M^i &= \frac{1}{2}(J^i + iK^i) \\ N^i &= \frac{1}{2}(J^i - iK^i) \end{aligned}} \Rightarrow \begin{aligned} J^i &= M^i + N^i \\ K^i &= i(N^i - M^i) \end{aligned} \quad (7.11)$$

da cui troviamo immediatamente:

$$\boxed{\begin{aligned} [M^i, M^j] &= i\epsilon^{ijk}M^k \\ [N^i, N^j] &= i\epsilon^{ijk}N^k \end{aligned}} \quad [M^i, N^j] = 0 \quad (7.12)$$

Abbiamo quindi scoperto che l'algebra di Lie $\mathfrak{so}^+(1, 3)$ è formata da due copie dell'algebra di Lie $\mathfrak{su}(2)$, ovvero l'algebra del momento angolare.

Trovare una rappresentazione di $\mathfrak{so}^+(1, 3)$ in termini di \vec{M} ed \vec{N} ³ è facile, **dobbiamo semplicemente cercare delle matrici che rappresentino il momento angolare di particelle disaccoppiate**.

- gli operatori $\{|M|^2, M^3, |N|^2, N^3\}$ commutano tra loro e devono quindi possedere una "auto-base" comune.

Lo spazio vettoriale con dimensione $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ e con base

$$\{|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle\}_{-j_2 \leq m_2 \leq j_2}^{-j_1 \leq m_1 \leq j_1}$$

Forma una rappresentazione irriducibile di $\mathfrak{so}^+(1, 3)$ identificata da due indici (j_1, j_2) .

- È possibile riorganizzare gli stati in maniera differente, esattamente come nel caso della somma dei momenti angolari, notando che $\vec{J} = \vec{M} + \vec{N}$ è il momento angolare totale. Possiamo infatti utilizzare l'auto-base del set di operatori $\{|J|^2, J^z, |\vec{M}|^2, |\vec{N}|^2\}$, i.e. $\{|s, \sigma, j_1, j_2\rangle\}$. Tale base è legata alla precedente tramite un cambio di base dettato dai coefficienti di Clebsh-Gordan, ovvero la relazione seguente:

$$\boxed{|s, \sigma, j_1, j_2\rangle = \sum_{m_1, m_2} \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | s, \sigma, j_1, j_2 \rangle |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle}$$

$$\boxed{|j_1 - j_2| \leq s \leq |j_1 + j_2|, \quad -s \leq \sigma \leq s}$$

con

$$\boxed{\begin{aligned} |\vec{J}|^2 |s, \sigma, j_1, j_2\rangle &= s(s+1) |s, \sigma, j_1, j_2\rangle \\ J^z |s, \sigma, j_1, j_2\rangle &= \sigma |s, \sigma, j_1, j_2\rangle \end{aligned}}$$

Il punto è che $\vec{J} = \vec{M} + \vec{N}$ è precisamente il generatore della parte rotazionale del gruppo di Lorentz, mentre s è il numero quantico di spin!

Nel linguaggio della teoria dei gruppi:

Sia

$$\mathcal{D}(j_1, j_2) = \{|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle\}$$

la nostra rappresentazione irriducibile $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ -dimensionale identificata da (j_1, j_2) . Questa diventa riducibile quando la guardiamo

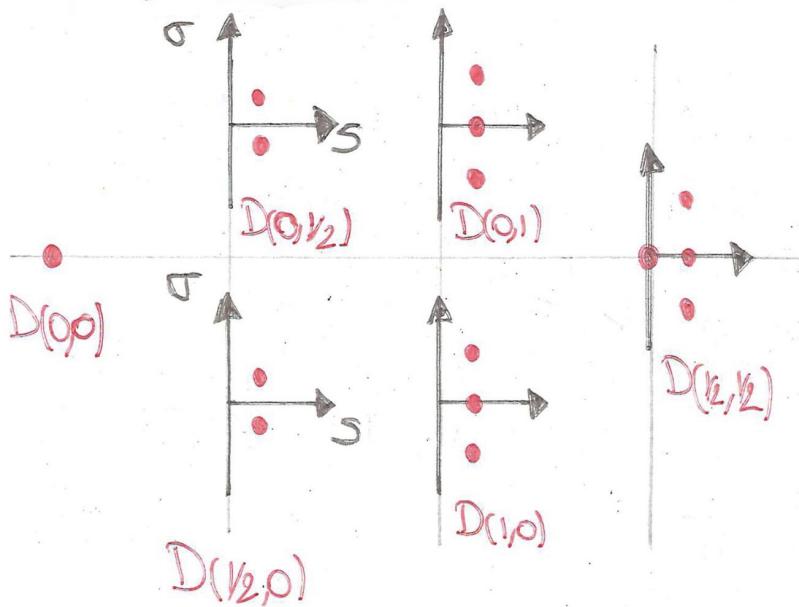
³ Ossia uno spazio vettoriale in cui \vec{M} ed \vec{N} sono rappresentati da matrici che verifichino le relazioni di commutazione (7.12).

dal punto di vista della sottoalgebra di \vec{J} , i.e. si decomponne in $\mathfrak{so}(3)$ nel seguente modo:

$$\mathcal{D}(j_1, j_2) \xrightarrow{\mathfrak{so}(3)} \mathcal{D}_{j_1+j_2} \oplus \mathcal{D}_{j_1+j_2-1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{D}_{|j_1-j_2|}$$

Il punto interessante è che se vogliamo descrivere una particella di spin “ s ” con un campo quantistico, quest’ultimo dovrebbe trasformare secondo una rappresentazione del gruppo di Lorentz che contenga il multipletto di spin “ s ” nella sua decomposizione in $\mathfrak{so}(3)$.

Tuttavia, il seguente schema mostra come non ci sia una corrispondenza 1:1 tra campi e particelle:



Esempio 7.5.1 (Il campo di spin 1.)

Consideriamo il caso di un campo massivo con spin $s = 1$.

Con riferimento al precedente schema, potremmo considerare la rappresentazione $(1, 0)$ così come la $(0, 1)$, in quanto entrambi contengono il multipletto con $s = 1$. Tuttavia queste due rappresentazioni non sono invarianti sotto parità, per via del fatto che \vec{J} non cambia segno sotto parità, mentre \vec{K} si (intuitivamente perché la velocità cambia di segno sotto \mathbb{P}). Di conseguenza:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \frac{1}{2}(\vec{J} + i\vec{K}) & \xrightarrow{\mathbb{P}} & \frac{1}{2}(\vec{J} - i\vec{K}) = \vec{N} \\ \vec{N} &= \frac{1}{2}(\vec{J} - i\vec{K}) & & \frac{1}{2}(\vec{J} + i\vec{K}) = \vec{M} \end{aligned}$$

Ovvero, in generale: $(j_1, j_2) \xrightarrow{\mathbb{P}} (j_2, j_1)$.

Quello che stiamo dicendo è che in presenza della simmetria di parità, sia (j_1, j_2) che (j_2, j_1) dovrebbero essere presenti.

Nel caso di nostro interesse, la corretta identificazione è con la rappresentazione $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, invariante sotto parità e contenente un solo

multipletto con $s = 1$ e si può dimostrare che la rappresentazione $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ è equivalente alla rappresentazione 4-vettoriale del gruppo di Lorentz.

Intuitivamente questo si può capire considerando un 4-vettore $V^\mu = (V^0, \vec{V})$ e notando che questo corrisponde ad una rappresentazione irriducibile del gruppo di Lorentz, in quanto una generica trasformazione di Lorentz mixa in generale tutte le componenti.

Se ci si restringe ad una trasformazione che sia una rotazione pura Λ_R , tuttavia, si trova che la componente temporale, non trasformando sotto rotazioni, ha spin $s = 0$, mentre quella vettoriale trasforma, chiaramente, come un vettore ed hanno spin $s = 1$.

Abbiamo quindi $V^\mu \xrightarrow{SO(3)} 0 \oplus 1$, i.e. la rappresentazione 4-vettoriale si decompone in singoletto più tripletto di spin sotto $SO(3)$.

7.6 Soluzione della Connessione $\mathcal{P} - \mathcal{L}$

L'idea è quella di risolvere le equazioni (7.7) nel caso massless, che quindi ci permette di restare nella base di elicità. Lo faremo nel caso di un bosone vettore, come il fotone, ad esemplificare il caso dell'elettromagnetismo, ma la matematica che c'è dietro si può applicare anche al caso della gravità, in cui lo spin dell'ipotetico gravitone è 2.

Bosone vettore massless

Nel caso massless, le (7.7) si semplificano in accordo con la (6.22) e ci troviamo a dover risolvere il sistema:

$$\begin{aligned} e^{i\theta(\Lambda, p)\lambda} u^a(\vec{p}, \lambda) &= [\mathcal{D}(\Lambda^{-1})]_b^a u^b(\vec{p}_\Lambda, \lambda) \\ e^{-i\theta(\Lambda, p)\lambda} v^a(\vec{p}, \lambda) &= [\mathcal{D}(\Lambda^{-1})]_b^a v^b(\vec{p}_\Lambda, \lambda) \end{aligned} \quad (7.13)$$

Ora invertiamo queste equazioni sfruttando il fatto che, in quanto rappresentazione, $\mathcal{D}(\Lambda^{-1}) = \mathcal{D}(\Lambda)^{-1}$ e che $[\mathcal{D}(\Lambda)]_a^c [\mathcal{D}(\Lambda)^{-1}]_b^a = \delta_b^c$. Con un paio di passaggi banali si arriva al sistema:

$$\begin{aligned} [\mathcal{D}(\Lambda)]_a^c u^a(\vec{p}, \lambda) &= e^{-i\theta(\Lambda, p)\lambda} u^c(\vec{p}_\Lambda, \lambda) \\ [\mathcal{D}(\Lambda)]_a^c v^a(\vec{p}, \lambda) &= e^{i\theta(\Lambda, p)\lambda} v^c(\vec{p}_\Lambda, \lambda) \end{aligned} \quad (7.14)$$

Inoltre, stiamo considerando un campo 4-vettoriale massless, in cui gli spinori sono i vettori di polarizzazione, ovvero il campo:

$$A^\mu(x) \equiv \sum_\lambda \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2p^0}} [\varepsilon^\mu(\vec{p}, \lambda) a(\vec{p}, \lambda) e^{-ip \cdot x} + \varepsilon^\mu(\vec{p}, \lambda)^* a^\dagger(\vec{p}, \lambda) e^{ip \cdot x}] \quad (7.15)$$

le cui le due componenti sono legate dalla sola coniugazione di carica ed il sistema si riduce dunque ad una singola equazione da risolvere, valida $\forall \vec{p}$ e $\forall \Lambda$. Se consideriamo la rappresentazione defining del gruppo di Lorentz, i.e. $\mathcal{D}(\Lambda) \equiv \Lambda$, abbiamo:

$$e^{-i\theta(\Lambda, p)\lambda} \varepsilon^\mu(\vec{p}_\Lambda, \lambda) = \Lambda_\nu^\mu \varepsilon^\nu(\vec{p}, \lambda) \quad (7.16)$$

La strategia di risoluzione è sostanzialmente la stessa che abbiamo delineato qualche pagina fa nel caso massivo, va solo riadattata con le giuste accortezze:

- 1) Consideriamo il vettore di riferimento $p_{\text{ref}}^\mu = k(1, 0, 0, 1)$, che implica $\vec{p}_{\text{ref}} = k\hat{z}$, e consideriamo $\Lambda \rightarrow W \in \mathcal{G}(\vec{p}_{\text{ref}}) = E(2)$, trasformazione che lascia il vettore di riferimento invariato e che quindi implica $p_\Lambda = \Lambda p_{\text{ref}} = p_{\text{ref}}$. Di conseguenza riscriviamo l'equazione:

$$e^{-i\theta(W, p_{\text{ref}})\lambda} \varepsilon^\mu(\vec{p}_{\text{ref}}, \lambda) = W_\nu^\mu \varepsilon^\nu(\vec{p}_{\text{ref}}, \lambda) \quad (7.17)$$

Risolvendo questa equazione otteniamo $\varepsilon^\mu(\vec{p}_{\text{ref}}, \lambda)$.

- 2) Noto $\varepsilon^\mu(\vec{p}_{\text{ref}}, \lambda)$, dobbiamo generalizzarlo al caso di impulso \vec{p} qualunque.

Per farlo partiamo dalla (7.16) e scegliamo $\Lambda = H(\hat{p}, \frac{|\vec{p}|}{k})^{-1}$ e seguendo la stessa logica del caso massivo, ma applicata alla fase invece che alla rotazione di Wigner, troviamo che:

$$\theta(\Lambda = H^{-1}, p_{\text{ref}}) = H\left(\hat{p}_\Lambda, \frac{|\vec{p}_\Lambda|}{k}\right)^{-1} \underbrace{\Lambda H\left(\hat{p}, \frac{|\vec{p}|}{k}\right)}_{=1} = H\left(\hat{p}_\Lambda, \frac{|\vec{p}_\Lambda|}{k}\right)^{-1}$$

che riporta il vettore \vec{p}_Λ in \vec{p}_{ref} . Ma da quanto appena visto $\vec{p}_\Lambda = \vec{p}_{\text{ref}}$, quindi $\theta(H^{-1}, p_{\text{ref}}) = \mathbb{1}_{E(2)} = 0$.

Ma allora possiamo beneficiare di una drastica semplificazione della (7.16), che difatti si riscrive:

$$\varepsilon^\mu(\vec{p}, \lambda) = H\left(\hat{p}, \frac{|\vec{p}|}{k}\right)_\nu^\mu \varepsilon^\nu(\vec{p}_{\text{ref}}, \lambda) \quad (7.18)$$

Tutto sembra filare liscio fin qui, eppure c'è un piccolo problema (in realtà tutt'altro che piccolo), ma arriviamoci per gradi. **Partendo dallo step 1)**, l'equazione (7.17) vale per ogni elemento W del gruppo piccolo di \vec{p}_{ref} , ovvero $E(2)$ in cui abbiamo due scelte naturali per W : una rotazione attorno a \hat{z} o una traslazione nello spazio Euclideo.

a) W è una rotazione attorno \hat{z} .

In questo caso, come già fatto più volte, possiamo sfruttare la proprietà della fase di Wigner che ci garantisce la sua uguaglianza con l'angolo di rotazione ϕ attorno a \hat{z} . Abbiamo quindi, esplcitando l'elicità, che nel caso di un bosone vettore massless assume i valori $\lambda = \pm 1$:

$$e^{\mp i\phi} \varepsilon^\mu(k\hat{z}, \pm 1) = W(\phi)_\nu^\mu \varepsilon^\nu(k\hat{z}, \pm 1)$$

$$\text{con } W(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Svolgendo esplicitamente i conti, troviamo senza troppa difficoltà che per $\mu = 0$ e $\mu = 3$, essendo ϕ generico, deve valere:

$$\varepsilon^0(k\hat{z}, \pm 1) = \varepsilon^3(k\hat{z}, \pm 1) \stackrel{!}{=} 0$$

Questa equazione ci sta dicendo che dei quattro gradi di libertà equivalenti alle quattro equazioni del sistema, due sono automaticamente soppressi, il che è totalmente consistente con il fatto che dal punto di vista del gruppo di Poincaré un bosone vettore massless (come il fotone) ha due soli gradi di libertà (i suoi stati di elicità).

Dalle altre due componenti ($\mu = 1$ e $\mu = 2$) otteniamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} e^{\mp i\phi} \varepsilon^1(k\hat{z}, \pm 1) = \cos \phi \varepsilon^1(k\hat{z}, \pm 1) - \sin \phi \varepsilon^2(k\hat{z}, \pm 1) \\ e^{\mp i\phi} \varepsilon^2(k\hat{z}, \pm 1) = \sin \phi \varepsilon^1(k\hat{z}, \pm 1) + \cos \phi \varepsilon^2(k\hat{z}, \pm 1) \end{cases}$$

ed esplicitando, per mezzo della formula di Eulero, $e^{\mp i\phi} = \cos \phi \mp i \sin \phi$ questo si riduce ad una singola equazione:

$$\boxed{\mp i \varepsilon^1(k\hat{z}, \pm 1) = -\varepsilon^2(k\hat{z}, \pm 1)}$$

Se prendiamo la cosiddetta convenzione di "polarizzazione circolare", i.e. scegliamo $\varepsilon^1(k\hat{z}, \pm 1) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}$ troviamo che:

$$\boxed{\varepsilon^\mu(k\hat{z}, +1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \quad \varepsilon^\mu(k\hat{z}, -1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}} \quad (7.19)$$

Attenzione: il segno \mp davanti ad ε^1 corrisponde al caso in cui $\lambda = \pm 1$ rispettivamente, come conseguenza del fatto che l'esponenziale ha il segno $"-"$ all'esponente.

b) W è una traslazione nello spazio Euclideo.

Un elemento del gruppo piccolo di questo tipo può essere scritto genericamente come:

$$W = \exp(-i\alpha T_x - i\beta T_y), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

con $T_x \equiv J_{\text{vec}}^1 + K_{\text{vec}}^2$ e $T_y \equiv J_{\text{vec}}^2 - K_{\text{vec}}^1$.

In questo caso la fase di Wigner è $\theta(W, p_{\text{ref}}) = 0$, intuitivamente poiché essa "misura" la componente J^3 che in questo caso non figura, non essendo W una rotazione attorno a \hat{z} .

Troviamo quindi l'equazione:

$$\underbrace{e^{-i\theta(W, p_{\text{ref}})\lambda}}_{=1} \varepsilon^\mu(k\hat{z}, \lambda) = [\exp(-i\alpha T_x - i\beta T_y)]^\mu_\nu \varepsilon^\nu(k\hat{z}, \lambda) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} & -\beta & \alpha & -\frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) \\ -\beta & 1 & 0 & \beta \\ \alpha & 0 & 1 & -\alpha \\ \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) & -\beta & \alpha & 1 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \lambda i \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove il calcolo dell'esponenziale di matrice è stato fatto con **Mathematica** e si è sostituita l'espressione dei vettori di polarizzazione nel caso della polarizzazione circolare.

Se ora svolgiamo il prodotto, troviamo il seguente risultato:

$$\boxed{\varepsilon^\mu(k\hat{z}, \pm 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\beta \pm i\alpha \\ 1 \\ \pm i \\ -\beta \pm i\alpha \end{pmatrix} = \varepsilon^\mu(k\hat{z}, \pm 1) + \frac{-\beta \pm i\alpha}{\sqrt{2}k} p_{\text{ref}}^\mu} \quad (7.20)$$

Ma se guardiamo bene, ci accorgiamo della presenza di un'inconsistenza, quella che abbiamo annunciato poco sopra. Infatti, questa equazione richiede che $-\beta \pm i\alpha = 0$, ovvero $\beta = \pm i\alpha$, ma α e β sono reali, ergo **questa condizione non può essere verificata in nessun caso!**

Il problema che abbiamo incontrato risiede nel fatto che, in termini tecnici, i vettori di polarizzazione appartengono ad una rappresentazione di $\mathcal{G}(\vec{p}_{\text{ref}})$ differente da quella a cui invece appartengono gli stati particellari che dovrebbero descrivere! Infatti, mentre gli stati particellari sono invarianti sotto traslazioni Euclidee, i.e.:

$$\begin{aligned} T_x |0, k\hat{z}, \lambda\rangle &= T_y |0, k\hat{z}, \lambda\rangle = 0 \\ \Rightarrow e^{-i\alpha T_x - i\beta T_y} |0, k\hat{z}, \lambda\rangle &= |0, k\hat{z}, \lambda\rangle \end{aligned}$$

troviamo che l'azione di W_ν^μ (traslazione Euclidea) sui vettori dei polarizzazioni è assimilabile ad una sorta di trasformazione di Gauge, che produce uno shift dal vettore di partenza di un termine proporzionale a p^μ .

In altre parole quello che abbiamo sbagliato è stato assumere che il campo A^μ (e di conseguenza i vettori di polarizzazione) trasformasse come un 4-vettore sotto trasformazioni di Lorentz, in quanto questo non è vero!

Esercizio 7.6.1 Calcolare esplicitamente la struttura della legge di trasformazione di $\varepsilon^\mu(\vec{p}, \lambda)$ sotto una generica trasformazione di Lorentz.
[Conti svolti Lezione 28 pag.39÷40]

Soluzione.

$$\boxed{\Lambda_\nu^\mu \varepsilon^\nu(\vec{p}, \lambda) = e^{-i\theta\lambda} \varepsilon^\mu(\vec{p}, \lambda) + e^{-i\theta\lambda} \frac{(-\beta + i\alpha\lambda)}{\sqrt{2}k} (\Lambda p)^\mu} \quad (7.21)$$

L'equazione (7.21) può essere riscritta come segue, evidenziando la similitudine con le trasformazioni di gauge:

$$\boxed{e^{i\theta\lambda} \varepsilon^\mu(\vec{p}, \lambda) = (\Lambda^{-1})_\nu^\mu \varepsilon^\nu(\vec{p}, \lambda) + \frac{(-\beta + i\alpha\lambda)}{\sqrt{2}k} p^\mu} \quad (7.22)$$

Interpretazione e Conseguenze

Abbiamo scoperto che la connessione particella-campo non ha soluzione nel caso di una particella massless di spin 1 e che, in particolare, questo è dovuto all'errata assunzione che $A^\mu(x)$ trasformi come un 4-vettore sotto trasformazioni di Lorentz.

Esercizio 7.6.2 Calcolare esplicitamente la struttura della legge di trasformazione di $A^\mu(x)$ (7.15) sotto una generica trasformazione di Lorentz, i.e. $U(\Lambda)A^\mu(x)U(\Lambda)^{-1}$. [Conti svolti Lezione 28 pag. 40÷42]

Soluzione. I passaggi sono piuttosto banali, si tratta di utilizzare le proprietà di trasformazione degli operatori di creazione e distruzione (6.25) e (6.26), la proprietà di trasformazione del vettore di polarizzazione scritta nella forma (7.22) e di ridefinire il termine proporzionale a p^μ con la derivata rispetto ad x_μ di una generica funzione $\Omega_\Lambda(x)$ in cui $x_\mu p^\mu$ figura come argomento di un esponenziale (in modo che la derivata riproduca la proporzionalità corretta).

In definitiva si trova

$$U(\Lambda)A^\mu(x)U(\Lambda)^{-1} = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(\Lambda x) + \partial^\mu \Omega_\Lambda(x) \quad (7.23)$$

Come anticipato, il campo quantistico che dovrebbe descrivere il fotone non trasforma in maniera covariante sotto Lorentz, i.e. non è un 4-vettore.

Possiamo quindi affermare quanto segue:

- i) Siccome l'operatore di campo associato al fotone non trasforma in maniera covariante sotto trasformazioni di Lorentz, non possiamo inserirlo in una densità di Lagrangiana e sperare di ottenere una teoria realmente invariante sotto Lorentz. La teoria in questo caso sarebbe solo apparentemente invariante!
- ii) Se la teoria fosse invariante sotto la sostituzione formale (trasformazione di gauge) $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda(x)$ per una generica funzione $\lambda(x)$, allora il pezzo extra che emerge dalla trasformazione di Lorentz sarebbe innocuo. L'invarianza sotto tale sostituzione formale è detta **invarianza di gauge**.

Ci sono due possibili implementazioni dell'idea al punto ii):

- Consideriamo il *tensore di Faraday*: $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. Questo tensore è invariante sotto trasformazioni di gauge, i.e. è un *invariante di gauge* e ciò significa che $F^{\mu\nu}$ è un vero tensore e trasforma come un tensore:

$$U(\Lambda)F^{\mu\nu}(x)U(\Lambda)^{-1} = (\Lambda^{-1})^\mu_\rho (\Lambda^{-1})^\nu_\sigma F^{\rho\sigma}(\Lambda x)$$

possiamo quindi utilizzare $F_{\mu\nu}$ per costruire quantità che siano invarianti di Lorentz, e.g. $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, F_{\mu\nu}\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi, \dots$

Tuttavia **non è così che funziona la natura** e c'è un motivo se continuiamo ad utilizzare A^μ nella Lagrangiana. Inoltre la legge di Coulomb si può derivare solo dall'interazione $A_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ e non da $F_{\mu\nu}\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$, e questo è dovuto al fatto che in quest'ultima appare un impulso dalle regole di Feynman e ciò non ci consente di generare un'interazione a lungo raggio. Inoltre $F_{\mu\nu}\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$ è anche non rinormalizzabile, in quanto il coupling avrebbe una dimensione di massa negativa!

- Accoppiamo A_μ ad una corrente conservata j^μ (t.c. $\partial_\mu j^\mu = 0$ e tale da essere un vero 4-vettore, ossia da trasformare come 4-vettore).

Possiamo farlo in quanto considerando l'accoppiamento $A_\mu j^\mu$, questo è invariante a vista, ma è anche invariante sotto trasfor-

mazioni di gauge! Infatti:

$$A_\mu j^\mu \rightarrow A_\mu j^\mu + (\partial_\mu \lambda) j^\mu \stackrel{[...]}{=} A_\mu j^\mu - \lambda \cancel{(\partial_\mu j^\mu)} = A_\mu j^\mu$$

Va tuttavia sottolineato il fatto che questa procedura sia un po' tricky da implementare in una teoria di campo generica, in quanto dal teorema di Noether sappiamo che le correnti si conservano solo sulla shell di massa, ma **questa è la strada che la natura ha scelto di seguire.**

- iii) L'origine dell'invarianza di gauge è la seguente: se vogliamo descrivere una particella massless di spin 1 con un campo quantistico $A^\mu(x)$, allora la teoria risultante è invariante sotto trasformazioni di Lorentz **SOLO** se imponiamo l'invarianza di gauge!
- iv) **L'invarianza di gauge non è un simmetria** dal punto di vista fisico, in quanto non è associata a nessuna trasformazione nello spazio di Hilbert della particella.

Anzi, a dirla tutta è **proprio l'opposto**: l'invarianza di gauge è conseguenza della nostra ostinazione nel voler descrivere un bosone vettore massless con un campo quantistico, è una ridondanza che emerge dal fatto che abbiamo una classe di trasformazioni sotto le quali gli operatori di campo trasformano, ma non gli stati, i.e. le traslazioni Euclidee! Abbiamo infatti:

$$\begin{aligned} |0, k\hat{z}, \lambda\rangle & \quad \varepsilon^\mu(k\hat{z}, \lambda) \\ T_x |0, k\hat{z}, \lambda\rangle = 0 & \leftrightarrow W_v^\mu \varepsilon^\mu(k\hat{z}, \lambda) \stackrel{(7.20)}{=} \varepsilon^\mu(k\hat{z}, \lambda) + \frac{(-\beta + i\alpha\lambda)}{\sqrt{2k}} p_{\text{ref}}^\mu \\ T_y |0, k\hat{z}, \lambda\rangle = 0 & \end{aligned}$$

A questo punto possiamo finalmente generalizzare la (7.20) ad impulso generico, svolgendo sostanzialmente lo step 2, tramite la (7.18):

$$\begin{aligned} \varepsilon^\mu(\vec{p}, \lambda) &= H\left(\hat{p}, \frac{|\vec{p}|}{k}\right)_v^\mu \varepsilon^v(k\hat{z}, \lambda) + \frac{(-\beta + i\alpha\lambda)}{\sqrt{2k}} H\left(\hat{p}, \frac{|\vec{p}|}{k}\right)_v^\mu p_{\text{ref}}^v \\ &= \varepsilon^\mu(\vec{p}, \lambda) + \underbrace{\frac{(-\beta + i\alpha\lambda)}{\sqrt{2k}} p^\mu}_{\equiv C_\lambda} \end{aligned}$$

Ottendendo in definitiva⁴:

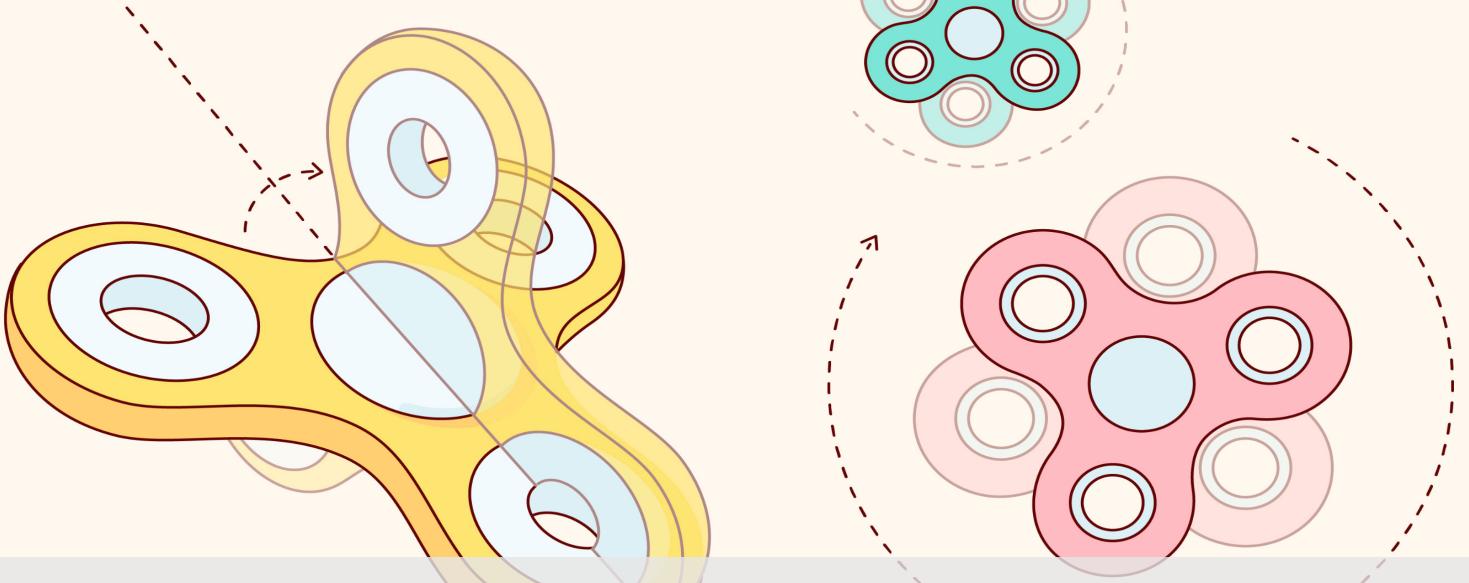
$$\boxed{\varepsilon^\mu(\vec{p}, \lambda) = \varepsilon^\mu(\vec{p}, \lambda) + C_\lambda p^\mu} \quad (7.24)$$

Entrambi i membri dell'equazione devono descrivere lo stesso fotone fisico, ma abbiamo ancora un pezzo in più nel RHS. Tuttavia, al momento del calcolo di una generica ampiezza \mathcal{M}_μ , avremo sempre:

$$\varepsilon^\mu(\vec{p}, \lambda) \mathcal{M}_\mu = (\varepsilon^\mu(\vec{p}, \lambda) + C_\lambda p^\mu) \mathcal{M}_\mu$$

ma sappiamo benissimo che $\boxed{p^\mu \mathcal{M}_\mu = 0}$, ce lo garantisce l'identità di Ward (4.21), che segue direttamente dall'accoppiamento di A^μ con una corrente conservata!

⁴ Notare come questa equazione giustifichi la sostituzione fatta per ottenere la (2.31)



8 Simmetrie Globali e Cariche Conservate^a

^a Immagine da Quanta Magazine, Symmetry, Algebra and the Monster

8.1 Invarianza di Gauge e Correnti Conservate

Consideriamo l'accoppiamento di $A_\mu(x)$ con una corrente conservata come una regola alla base della costruzione di teorie che possano descrivere particelle di spin 1 interagenti.

La richiesta di una corrente conservata corrisponde alla richiesta di una **simmetria globale continua nella Lagrangiana**. Prendiamo i due esempi più semplici, la Lagrangiana di Dirac e quella di Klein-Gordon, invarianti sotto trasformazioni di $U(1)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Dirac}} &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi & \psi' &= e^{-i\alpha}\psi \\ \mathcal{L}_{\text{KG}} &= (\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi & \phi' &= e^{-i\alpha}\phi \end{aligned}$$

Le corrispondenti correnti conservate possono essere ricavate considerando la simmetria al livello infinitesimo (e possiamo farlo in quanto questa è continua):

$$\begin{aligned} \psi' &= (1 - i\alpha)\psi = \psi + \delta\psi \quad \Rightarrow \quad \delta\psi = -i\alpha\psi \\ \phi' &= (1 - i\alpha)\phi = \phi + \delta\phi \quad \Rightarrow \quad \delta\phi = -i\alpha\phi \end{aligned}$$

Di conseguenza le correnti di Noether saranno:

$$j_{\text{Dirac}}^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad \text{e} \quad j_{\text{KG}}^\mu = i[\phi^*(\partial^\mu\phi) - \phi(\partial^\mu\phi^*)] \quad (8.1)$$

Se ora proviamo a costruire l'accoppiamento, i.e.:

$$A_\mu j^\mu \rightarrow \begin{cases} A_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \\ iA_\mu [\phi^*(\partial^\mu\phi) - \phi(\partial^\mu\phi^*)] \end{cases}$$

ci accorgiamo che, mentre il primo caso ricostruisce la QED, il secondo non ricostruisce la QED scalare! Questo accade perché in questa operazione siamo stati troppo ingenui: nel secondo caso *abbiamo provato a costruire l'accoppiamento tra A_μ e la corrente conservata nella teoria non interagente!*

8.1 Invarianza di Gauge e Correnti Conservate	159
8.2 Simmetrie Globali in Generale	161
\hat{H} nella teoria $SO(N)$ -simm	165
Commutazione \hat{Q}_{AB} - $\hat{\Phi}/\hat{\Pi}$	166
Commutazione \hat{Q}_{AB} - \hat{H}	166
Algebra delle \hat{Q}_{AB}	167
Commutazione \hat{Q}_{AB} - \tilde{P}	169
Azione delle \hat{Q}_{AB} sul vuoto	169
8.3 Azione delle Simmetrie sugli Stati Esterni	170
8.4 Teorie di Gauge non-Abeliane	171
Approccio geometrico al caso abeliano	171
Generalizzazione al caso non-abeliano	174
Costruzione delle teorie di gauge $SU(N)$	175

Tuttavia, aggiungere il termine di interazione non necessariamente risolve il problema, in quanto farlo modificherebbe le equazioni del moto e non c'è nulla che ci garantisce che la corrente della teoria libera sia ancora conservata.

Esercizio 8.1.1 Considerando la Lagrangiana della QED

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$$

verificare che la corrente $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ sia conservata sulle equazioni del moto nella teoria interagente. [Conti svolti Lezione 29p1 pag. 2÷3]

Esercizio 8.1.2 Considerando la Lagrangiana

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu\phi^*)(\partial^\mu\phi) - m^2\phi^*\phi - iA_\mu[\phi^*(\partial^\mu\phi) - \phi(\partial^\mu\phi^*)]$$

verificare che la corrente $j^\mu = i[\phi^*(\partial^\mu\phi) - \phi(\partial^\mu\phi^*)]$ NON sia conservata sulle equazioni del moto. [Conti svolti Lezione 29p1 pag. 3÷4]

Proviamo allora a seguire una strategia differente:

- Consideriamo una densità di Lagrangiana, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi, A_\mu)$, e supponiamola invariante sotto una simmetria globale continua che, nella sua forma infinitesima, sia descritta dalla trasformazione $\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) - i\alpha\phi(x)$, con $\delta\mathcal{L} = 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ costante
- Ragioniamo ora su cosa potrebbe succedere nel momento in cui α non sia più una costante, ma anzi dipenda dalla posizione nello spazio-tempo "x". Di conseguenza avremo $\delta\mathcal{L} \neq 0$ e, in particolare, dovremmo avere qualcosa del tipo

$$\delta\mathcal{L} = [\partial_\mu\alpha(x)]h^\mu(x)$$

per un qualche 4-vettore $h^\mu(x)$, in quanto nel momento in cui $\alpha(x)$ sia costante la sua derivata annulla $\delta\mathcal{L}$.

- Per quanto concerne la variazione dell'azione, possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x \delta\mathcal{L} = \int d^4x (+1)[\partial_\mu\alpha(x)]h^\mu(x) = \\ &= - \int d^4x \alpha(x)[\partial_\mu h^\mu(x)]\end{aligned}$$

- Dall'equazione che abbiamo trovato per δS possiamo ottenere un'interpretazione per $h^\mu(x)$. Quando le equazioni del moto per ϕ sono soddisfatte, abbiamo $\delta S = 0$ per ogni variazione del campo, inclusa quella della forma $\delta\phi = -i\alpha\phi$. Di conseguenza, sulle equazioni del moto, abbiamo:

$$\delta S \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \int d^4x \alpha(x)[\partial_\mu h^\mu(x)] \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow [\partial_\mu h^\mu(x) = 0]$$

Questo significa che $h^\mu(x)$ è esattamente la corrente conservata $j^\mu(x)$, in quanto essa ha precisamente la proprietà di essere conservata sulle equazioni del moto.

qui stiamo integrando per parti sfruttando il fatto che

$$\partial_\mu(\alpha h^\mu) = (\partial_\mu\alpha)h^\mu + \alpha(\partial_\mu h^\mu)$$

e utilizzando il teorema della divergenza in 4D

$$\int d^4x \partial_\mu(\alpha h^\mu) = 0$$

per scartare il termine di contorno.

- Combiniamo a questo punto la trasformazione $\phi \rightarrow \phi - i\alpha(x)\phi$ con la trasformazione di gauge, ovvero la trasformazione combinata:

$$\boxed{\begin{aligned} A_\mu(x) &\rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \lambda(x) \\ \phi(x) &\rightarrow \phi(x) - i\lambda(x)\phi(x) \end{aligned}} \quad (8.2)$$

Sotto tale trasformazione combinata la variazione dell'azione è la seguente:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \left\{ [\partial_\mu \lambda(x)] j^\mu(x) + \frac{\delta S}{\delta A_\mu(x)} [\partial_\mu \lambda(x)] \right\} = \\ &= \int d^4x [\partial_\mu \lambda(x)] \left[j^\mu(x) + \frac{\delta S}{\delta A_\mu(x)} \right] \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Quindi per far sì che la Lagrangiana sia invariante sotto la trasformazione (8.2) la parte proporzionale ad A_μ nella Lagrangiana deve essere

$$\boxed{\frac{\delta S}{\delta A_\mu(x)} = -j^\mu(x)}$$

Che è esattamente il nostro punto di partenza, derivato in maniera più formale e con una prospettiva differente:

La richiesta $\delta S/\delta A_\mu(x) = -j^\mu(x)$ può essere riformulata come un principio di invarianza sotto le trasformazioni congiunte:

$$\boxed{\begin{aligned} A_\mu(x) &\rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \lambda(x) \\ \phi(x) &\rightarrow \phi(x) - i\lambda(x)\phi(x) \end{aligned}}$$

Esercizio 8.1.3 Considerando nuovamente la densità di Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi - iA_\mu [\phi^*(\partial^\mu \phi) - \phi(\partial^\mu \phi^*)]$$

- i) Mostrare che questa Lagrangiana **NON** è invariante sotto le trasformazioni combinate (8.2) ad ordine $\mathcal{O}(\lambda)$.
- ii) Mostrare che l'aggiunta del termine $A_\mu^2 \phi^* \phi$ rende \mathcal{L} invariante sotto le (8.2).
- iii) La Lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) - iA_\mu [\phi^*(\partial^\mu \phi) - \phi(\partial^\mu \phi^*)] + \\ & + A_\mu A^\mu \phi^* \phi - m^2 \phi^* \phi \end{aligned}$$

beneficia ancora della simmetria globale $\phi \rightarrow e^{-i\alpha} \phi$. Calcolare la corrispondente corrente conservata e mostrare che è conservata sulle equazioni del moto.

[Conti svolti Lezione 29p1 pag. 8÷11]

Il termine in $\frac{\delta S}{\delta A_\mu}$ riproduce la parte proporzionale ad A_μ all'interno della Lagrangiana (in questo caso la δ è da intendersi come operatore di derivata funzionale!). Per esempio in QED abbiamo che $S \supset \int d^4x A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ e

$$\frac{\delta S}{\delta A_\mu} = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$$

che moltiplicato alla variazione di A_μ , $\partial_\mu \lambda(x)$, riproduce la variazione dell'azione che ci aspettiamo dalla trasformazione di gauge.

8.2 Simmetrie Globali in Generale

Prendiamo come esempio per la nostra discussione una teoria di campo classica con "N" campi scalari reali $\Phi_a(x)$, con $a = 1, \dots, N$, la cui densità

di Lagrangiana si può scrivere:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_a (\partial_\mu \Phi_a)(\partial^\mu \Phi_a) - \frac{m^2}{2} \sum_a (\Phi_a)^2 - \frac{\lambda}{4} \left(\sum_a (\Phi_a)^2 \right)^2 \quad (8.3)$$

Allora possiamo osservare quanto segue:

- Questa densità di Lagrangiana è invariante sotto le trasformazioni ortogonali di $O(N)$, ovvero che trasformano un campo in un altro:

$$\Phi'(x) = \sum_b R_{ab} \Phi_b(x), \quad R \in O(N) \quad (8.4)$$

Questo è un esempio di **Simmetria Globale Interna**.

Dimostrazione. Dall'ortogonalità di R , i.e. $R^T R = \mathbb{1} \Rightarrow (R^T)_{ab} R_{bc} = R_{ba} R_{bc} = \delta_{ac}$ abbiamo che

$$\sum_a (\Phi_a)^2 = \sum_{a,b,c} R_{ab} \Phi_b R_{ac} \Phi_c = \sum_a (\Phi_a)^2$$

ergo il secondo e terzo termine della (8.3) sono invarianti.

Per quanto riguarda il termine cinetico, sfruttiamo il fatto che, per una simmetria globale, R_{ab} è la stessa per ogni " x ", i.e. è costante, da cui:

$$\partial_\mu \Phi'_a = R_{ab} (\partial_\mu \Phi_b)$$

Segue quindi, con ragionamenti simili a quelli sopra, che anche il termine cinetico è invariante. \square

- Come già detto, in $O(N)$ abbiamo $R^T R = \mathbb{1}$, ovvero $(\det R)^2 = 1 \Rightarrow \det R = \pm 1$.

Il sottogruppo continuo di $O(N)$ è $SO(N)$, il gruppo speciale ortogonale (delle rotazioni) in N dimensioni. Siccome per applicare il teorema di Noether abbiamo bisogno di una simmetria globale **continua**, ha senso restringersi ad $SO(N)$.

Inoltre, ora che siamo connessi all'identità con una mappa continua, possiamo utilizzare le tecniche della teoria dei gruppi.

- **Trasformazioni dei campi, generatori ed algebra.**

Se consideriamo $R = 1 + \epsilon$, con ϵ quantità infinitesima, dalla relazione di ortogonalità (tralasciando l'ordine $\mathcal{O}(\epsilon^2)$) troviamo che ϵ è una matrice anti-simmetrica

$$\epsilon^T = -\epsilon \Rightarrow [\epsilon_{ab} = -\epsilon_{ba}]$$

Possiamo quindi riscrivere la trasformazione infinitesima nello spazio del campo:

$$\Phi'_a(x) = \Phi_a(x) + \delta\Phi_a(x), \quad \delta\Phi_a(x) = \epsilon_{ab} \Phi_b(x)$$

Ma c'è di più, possiamo infatti riscrivere la variazione del campo introducendo i generatori di $SO(N)$ nella rappresentazione fondamentale, che indichiamo con T_{AB} , In definitiva si ottiene:

$$\begin{aligned} \delta\Phi_a(x) &= -\frac{i}{2} \epsilon_{AB} (T_{AB})_{ab} \Phi_b(x) \\ (T_{AB})_{ab} &\equiv i(\delta_{Aa}\delta_{Bb} - \delta_{Ab}\delta_{Ba}) \end{aligned}$$

Esercizio 8.2.1 Calcolare il numero di generatori per il gruppo $\text{SO}(N)$ (ossia la dimensione del gruppo). [Conti svolti Lezione 29p2 pag. 16÷17]

Soluzione.

$$\dim [\text{SO}(N)] = \frac{N(N-1)}{2}$$

Esercizio 8.2.2 Ricavare l'algebra dei generatori di $\text{SO}(N)$ considerando la rappresentazione fondamentale. [Conti svolti Lezione 29p2 pag. 18]

Soluzione.

$$[T_{AB}, T_{CD}] = -i\delta_{AC}T_{BD} + i\delta_{AD}T_{BC} - i\delta_{BD}T_{AC} + i\delta_{CB}T_{AD} \quad (8.5)$$

► **Correnti e Cariche di Noether.**

Dal teorema di Noether sappiamo che *ad ogni generatore della simmetria globale corrisponde una corrente conservata*.

Prendendo in considerazione $\delta\Phi_a(x) = -\frac{i}{2}\epsilon_{AB}(T_{AB})_{ab}\Phi_b(x)$, in cui stiamo sottintendendo una somma su A, B da 1 a $N(N-1)/2$, questa espressione ci dice che abbiamo $N(N-1)/2$ "direzioni" (i parametri necessari a descrivere il singolo elemento di $\text{SO}(N)$) lungo le quali possiamo trasformare il campo senza modificare la struttura della Lagrangiana. Consideriamo ognuna di queste direzioni separatamente.

Innanzituttoabbiamo

$$\frac{\delta\Phi_a}{\delta\epsilon_{AB}} = -i(T_{AB})_{ab}\Phi_b$$

e di conseguenza

$$\begin{aligned} j_{AB}^\mu &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_a)} \frac{\delta\Phi_a}{\delta\epsilon_{AB}} = (\partial^\mu\Phi_a)(-i)(T_{AB})_{ab}\Phi_b = \\ &= (\partial^\mu\Phi_a)(-i)i(\delta_{Aa}\delta_{Bb} - \delta_{Ab}\delta_{Ba})\Phi_b \end{aligned}$$

Troviamo quindi che la corrente di Noether è:

$$j_{AB}^\mu = (\partial^\mu\Phi_A)\Phi_B - (\partial^\mu\Phi_B)\Phi_A \quad (8.6)$$

È importante tenere a mente che:

- i) La Lagrangiana è invariante sotto le trasformazioni di $\text{SO}(N)$ indipendentemente dal fatto che il campo obbedisca o non obbedisca ad una qualsivoglia equazione del moto.
- ii) Le correnti di Noether, d'altra parte, sono conservative solo quando i campi rispettano le proprie equazioni del moto.

Esercizio 8.2.3 Mostrare che $\partial_\mu j_{AB}^\mu = 0$ sulle equazioni del moto. [Conti svolti Lezione 29p2 pag. 20]

Le cariche conservative saranno quindi:

$$Q_{AB}(t) = \int d^3\vec{x} j_{AB}^0(\vec{x}, t), \quad \dot{Q}_{AB}(t) = 0 \quad (8.7)$$

► **Dai campi classici ai campi quantistici.**

Nella teoria quantistica dei campi, sia le cariche che le correnti diventano operatori, quindi sono costruite sulla base di altri operatori associati ai campi. Abbiamo dunque per le correnti:

$$\hat{j}_{AB}^\mu = (\partial^\mu \hat{\Phi}_A) \hat{\Phi}_B - (\partial^\mu \hat{\Phi}_B) \hat{\Phi}_A \quad (8.8)$$

Mentre, definendo il *campo coniugato canonico*¹ come $\hat{\Pi}_A(x) = \partial_t \hat{\Phi}_A(x)$, avremo:

$$\begin{aligned} \hat{Q}_{AB}(t) &= \int d^3\vec{x} \hat{j}_{AB}^0(\vec{x}, t) \\ \hat{j}_{AB}^0 &= \hat{\Pi}_A(x) \hat{\Phi}_B(x) - \hat{\Pi}_B(x) \hat{\Phi}_A(x) \end{aligned} \quad (8.9)$$

I campi $\hat{\Phi}_A(x)$ non sono campi liberi, ma evolvono nel tempo in maniera non banale come conseguenza delle interazioni. Su di loro possiamo dire due cose:

1. Verificano relazioni di commutazione a tempi uguali, che generalizzano quelle tra posizione e momento canonico incontrate in meccanica quantistica:

$$\begin{aligned} [\hat{\Phi}_A(\vec{x}, t), \hat{\Phi}_B(\vec{y}, t)] &= 0 \\ [\hat{\Pi}_A(\vec{x}, t), \hat{\Pi}_B(\vec{y}, t)] &= 0 \\ [\hat{\Phi}_A(\vec{x}, t), \hat{\Pi}_B(\vec{y}, t)] &= i\delta_{AB}\delta(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \quad (8.10)$$

2. Evolvono nel tempo secondo le equazioni di Heisenberg, che assumono la forma:

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t} \hat{\Phi}_A(\vec{x}, t) &= [\hat{\Phi}_A(\vec{x}, t), \hat{H}] \\ i\frac{\partial}{\partial t} \hat{\Pi}_A(\vec{x}, t) &= [\hat{\Pi}_A(\vec{x}, t), \hat{H}] \end{aligned} \quad (8.11)$$

La dinamica nascosta dietro queste equazioni è analoga a quella che, classicamente, è descritta dalle equazioni del moto.

Esercizio 8.2.4 Considerando la densità di Lagrangiana con interazione quartica (8.3) nel caso di un singolo campo scalare, vale a dire:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^4 \quad (8.12)$$

Verificare che delle equazioni di Heisenberg (8.11) nascondano la dinamica le equazioni del moto passando per i seguenti step:

1. Costruire l'operatore Hamiltoniano \hat{H} .
2. Calcolare i commutatori ai RHS delle (8.11).
3. Combinare le due equazioni trovate dal punto precedente.

¹ $\hat{\Pi}$ e $\hat{\Phi}$ sono detti coniugati in quanto non commutano tra loro.

[Conti svolti Lezione 29p2 pag. 23÷28]

Soluzione. Il risultato finale è l'equazione seguente:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \phi(\vec{x}, t) = -m^2 \phi(\vec{x}, t) - \lambda \phi(\vec{x}, t)^3 \quad (8.13)$$

ed è equivalente a quanto si può trovare nello svolgimento dell'esercizio 8.2.3.

A questo punto abbiamo tutti gli ingredienti per tradurre tutto ciò che è possibile vedere dal punto di vista classico nell'esercizio 8.2.4 in termini di operatori. In altre parole vogliamo studiare quale ruolo giochino correnti e cariche conservative nella teoria quantistica.

Per fare ciò seguiremo il seguente percorso, evidenziando in particolare le proprietà delle cariche di Noether:

- 1) Calcoliamo l'operatore Hamiltoniano \hat{H} per la nostra teoria simmetrica sotto $SO(N)$.
- 2) Studiamo le relazioni di commutazione tra cariche e campi/ momenti coniugati.
- 3) Studiamo la relazione di commutazione tra le cariche e l'operatore Hamiltoniano.
- 4) Studiamo l'algebra delle cariche di Noether.
- 5) Studiamo la relazione di commutazione tra le cariche e l'impulso \vec{P} definito sulla base del tensore energia-impulso.
- 6) Studiamo l'azione delle cariche sullo stato di vuoto.

1) \hat{H} nella teoria $SO(N)$ - simmetrica

Questa è una generalizzazione del caso scalare dell'esercizio 8.2.4. Abbiamo

$$\hat{H} = \int d^3x \hat{\mathcal{H}}(\vec{x}, t)$$

dove $\hat{\mathcal{H}}$ è la densità di Hamiltoniana scritta in termini di operatori di campo quantistici, ottenibile dalla trasformata di Legendre della Lagrangiana (somme sottintese):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \hat{\Phi}_A) (\partial^\mu \hat{\Phi}_A) - \frac{m^2}{2} \hat{\Phi}_A^2 - \frac{\lambda}{4} (\hat{\Phi}_A^2)^2$$

Ricordando quindi il campo coniugato $\hat{\Pi}_A(\vec{x}, t) = \partial_t \hat{\Phi}_A(\vec{x}, t)$, la densità di Hamiltoniana si ricava da $\hat{\mathcal{H}} = \hat{\Pi}_A (\partial_t \hat{\Phi}_A) - \mathcal{L}$.

In definitiva abbiamo quindi (sottintendendo somme e dipendenze):

$$\hat{H} = \int d^3x \hat{\mathcal{H}}(\vec{x}, t)$$

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \hat{\Pi}_A^2 + \frac{1}{2} |\vec{\nabla} \hat{\Phi}_A|^2 + \frac{m^2}{2} \hat{\Phi}_A^2 + \frac{\lambda}{4} (\hat{\Phi}_A^2)^2$$

(8.14)

2) Commutazione tra \hat{Q}_{AB} e $\hat{\Phi} / \hat{\Pi}$

Le relazioni di commutazione sono le seguenti:

$$\begin{aligned} [\hat{Q}_{AB}(t), \hat{\Phi}_C(\vec{x}, t)] &= +i\delta_{BC}\hat{\Phi}_A(\vec{x}, t) - i\delta_{AC}\hat{\Phi}_B(\vec{x}, t) \\ [\hat{Q}_{AB}(t), \hat{\Pi}_C(\vec{x}, t)] &= +i\delta_{BC}\hat{\Pi}_A(\vec{x}, t) - i\delta_{AC}\hat{\Pi}_B(\vec{x}, t) \end{aligned} \quad (8.15)$$

Dimostrazione. La dimostrazione è pressoché banale, basta passare per la definizione delle cariche di Noether (8.9).

Partiamo dalla componente temporale della corrente di Noether $\hat{j}_{AB}^0(\vec{y}, t) = \hat{\Phi}_B(\vec{y}, t)\hat{\Pi}_A(\vec{y}, t) - \hat{\Phi}_A(\vec{y}, t)\hat{\Pi}_B(\vec{y}, t)$ e sfruttando l'algebra dei commutatori, con riferimento alle (8.10), si trova:

$$\begin{aligned} [\hat{\Phi}_B(\vec{y}, t)\hat{\Pi}_A(\vec{y}, t), \hat{\Phi}_C(\vec{x}, t)] &= -i\delta_{AC}\delta(\vec{x} - \vec{y})\hat{\Phi}_B(\vec{x}, t) \\ [\hat{\Phi}_A(\vec{y}, t)\hat{\Pi}_B(\vec{y}, t), \hat{\Phi}_C(\vec{x}, t)] &= -i\delta_{BC}\delta(\vec{x} - \vec{y})\hat{\Phi}_A(\vec{x}, t) \end{aligned}$$

Di conseguenza la prima delle (8.15) sarà data dall'integrale in $d^3\vec{y}$ della differenza tra i due commutatori appena trovati.

La seconda equazione si trova con considerazioni analoghe. \square

3) Commutazione tra \hat{Q}_{AB} e \hat{H}

Tutte le cariche \hat{Q}_{AB} commutano con \hat{H} , i.e.:

$$[\hat{Q}_{AB}, \hat{H}] = 0 \quad (8.16)$$

Questa relazione è l'analogo quantistico della conservazione della carica elettrica.

Dimostrazione. Anche questo non è difficile da verificare, in quanto essendo \mathcal{H} composta da operatori del tipo $\sum_A \hat{\Pi}_A^2$, $\sum_A \hat{\Phi}_A^2$ e $\sum_A |\vec{\nabla}\hat{\Phi}_A|^2$, se consideriamo l'operatore

$$\hat{V}_C(\vec{x}, t) \in \{\hat{\Pi}_C, \hat{\Phi}_C, \vec{\nabla}\hat{\Phi}_C\}$$

ci accorgiamo che in ogni caso vale la (8.15):

$$[\hat{Q}_{AB}(t), \hat{V}_C(\vec{x}, t)] = i\delta_{BC}\hat{V}_A(\vec{x}, t) - i\delta_{AC}\hat{V}_B(\vec{x}, t)$$

vale anche nel caso di $\vec{\nabla}\hat{\Phi}_C(\vec{x}, t)$ poiché, intuitivamente, sopravvive solo $\frac{\partial}{\partial \vec{x}}$ che può essere portata fuori dal commutatore.

A questo punto è immediato verificare che:

$$\begin{aligned} [\hat{Q}_{AB}(t), \sum_C \hat{V}_C(\vec{x}, t)^2] &= \sum_C [\hat{Q}_{AB}(t), \hat{V}_C(\vec{x}, t)^2] = \\ &= \sum_C (\hat{V}_C(x)[\hat{Q}_{AB}, \hat{V}_C(x)] + [\hat{Q}_{AB}, \hat{V}_C(x)]\hat{V}_C(x)) \\ &= \sum_C [\hat{V}_C(\vec{x}, t), [\hat{Q}_{AB}(t), \hat{V}_C(\vec{x}, t)]]_+ \\ &= \sum_C [\hat{V}_C(\vec{x}, t), i\delta_{BC}\hat{V}_A(\vec{x}, t) - i\delta_{AC}\hat{V}_B(\vec{x}, t)]_+ \\ &= [\hat{V}_B(\vec{x}, t), i\hat{V}_A(\vec{x}, t)]_+ - [\hat{V}_A(\vec{x}, t), i\hat{V}_B(\vec{x}, t)]_+ = 0 \end{aligned}$$

Quindi \hat{Q}_{AB} commuta con ogni termine di $\hat{\mathcal{H}}$ e di conseguenza commuta con \hat{H} . \square

4) Algebra delle cariche di Noether

Le cariche di Noether rispettano l'algebra dei generatori di $\text{SO}(N)$ (8.5), i.e.:

$$[\hat{Q}_{AB}, \hat{Q}_{CD}] = i\delta_{BC}\hat{Q}_{AD} - i\delta_{AC}\hat{Q}_{BD} - i\delta_{BD}\hat{Q}_{AC} + i\delta_{AD}\hat{Q}_{BC} \quad (8.17)$$

Dimostrazione. La strategia della dimostrazione è piuttosto semplice, basta calcolare esplicitamente il commutatore

$$\begin{aligned} [\hat{Q}_{AB}, \hat{Q}_{CD}] &= [\hat{Q}_{AB}, \int d^3 \vec{x} \hat{j}_{CD}^0] = \\ &= \int d^3 \vec{x} [\hat{Q}_{AB}, \hat{\Phi}_D \hat{\Pi}_C - \hat{\Phi}_C \hat{\Pi}_D] \end{aligned}$$

avvalendosi delle (8.15). Il conto esplicito è lasciato come esercizio. \square

Concettualmente, abbiamo scoperto che le cariche di Noether \hat{Q}_{AB} rappresentano i generatori della simmetria T_{AB} . È quindi naturale chiedersi **quale sia la rappresentazione in cui i generatori si presentano nella forma delle cariche conservative!**

Per rispondere a questa domanda, notiamo innanzitutto che le \hat{Q}_{AB} sono anti-simmetriche ed hermitiane.

Dimostrazione. Di questa ultima proprietà ce ne accorgiamo dal fatto che essendo i campi reali, le loro controparti quantistiche devono essere hermitiane e di conseguenza partendo da

$$\hat{j}_{AB}^0 = \hat{\Phi}_B \hat{\Pi}_A - \hat{\Phi}_A \hat{\Pi}_B$$

avremo:

$$(\hat{j}_{AB}^0)^\dagger = \hat{\Pi}_A^\dagger \hat{\Phi}_B^\dagger - \hat{\Pi}_B^\dagger \hat{\Phi}_A^\dagger = \hat{\Pi}_A \hat{\Phi}_B - \hat{\Pi}_B \hat{\Phi}_A$$

Siccome le correnti non nulle sono generate sono nel caso di $A \neq B$ e per tempi uguali e $A \neq B$ i campi commutano (nelle (8.15) $\delta_{AB} \neq 0$ per $A \neq B$), troviamo che $(\hat{j}_{AB}^0)^\dagger = \hat{j}_{AB}^0$ da cui segue la tesi. \square

Se prendiamo una combinazione lineare del tipo $\hat{V} \equiv \frac{1}{2} \sum_{A,B} \mathcal{A}_{AB} \hat{Q}_{AB}$, con $C_{AB} \in \mathbb{R}$ e dove la somma restituisce $N(N-1)/2$ termini, chiaramente questo deve essere un operatore hermitiano e se ne prendiamo l'esponenziale, otteniamo un operatore unitario, ovvero:

$$\hat{U} \equiv \exp \left(-\frac{i}{2} \sum_{A,B} \mathcal{A}_{AB} \hat{Q}_{AB} \right)$$

Questo implica che **la rappresentazione ottenuta esponenziando le cariche di Noether è unitaria!**

Possiamo a questo punto calcolare la legge di trasformazione del campo sotto questa rappresentazione, vale a dire $\hat{U}\hat{\Phi}_A(\vec{x}, t)\hat{U}^\dagger$, sfruttando il Lemma di Hadamard:

$$e^{-i\hat{V}}\hat{\Phi}_Ae^{i\hat{V}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} [\hat{V}, [\dots, [\hat{V}, \hat{\Phi}_A]]]_n \text{ volte}$$

In generale, si dimostra per induzione che

$$[\hat{V}, [\dots, [\hat{V}, \hat{\Phi}_A]]]_n \text{ volte} = (+i)^n \sum_C (\mathcal{A}^n)_{CA} \hat{\Phi}_C$$

quindi:

$$\begin{aligned} e^{-i\hat{V}}\hat{\Phi}_Ae^{i\hat{V}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} (+i)^n \sum_C (\mathcal{A}^n)_{CA} \hat{\Phi}_C \\ &= \sum_C \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\mathcal{A}^n) \right]_{CA} \hat{\Phi}_C \\ &= \sum_C \left[\exp(\mathcal{A}) \right]_{CA} \hat{\Phi}_C \end{aligned}$$

In definitiva abbiamo (somme sottintese):

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{U} &\equiv \exp \left(-\frac{i}{2} \mathcal{A}_{AB} \hat{Q}_{AB} \right) \\ \hat{U}\hat{\Phi}_A\hat{U}^\dagger &= \left[\exp(\mathcal{A})^T \right]_{AC} \hat{\Phi}_C \end{aligned}} \quad (8.18)$$

È quindi giunto il momento di interpretare il risultato e per farlo utilizziamo la seguente proprietà: *ogni matrice $R \in SO(N)$ può essere scritta come l'esponenziale di una qualunque matrice anti-simmetrica " \mathcal{A} " reale ed $N \times N$,* i.e.:

$$\boxed{R = e^{\mathcal{A}}}$$

Notiamo che una matrice reale anti-simmetrica ed $N \times N$ ha precisamente $\frac{N \times N - N}{2} = \frac{N(N-1)}{2}$ elementi indipendenti.

Se ora riprendiamo le (8.18) e consideriamo l'operatore \hat{U} costruito precisamente sulla matrice antisimmetrica \mathcal{A}_{AB} che definisce la rotazione R , allora la legge di trasformazione di $\hat{\Phi}_A$ si scrive come segue:

$$\boxed{\hat{U}(\mathcal{A})\hat{\Phi}_A(x)\hat{U}(\mathcal{A})^\dagger = \sum_C \left[R(\mathcal{A})^{-1} \right]_{AC} \hat{\Phi}_C} \quad (8.19)$$

Le cariche di Noether forniscono al rappresentazione di $SO(N)$ agente sui campi quantistici. Tra l'altro questa equazione è analoga a quella che abbiamo "trovato"² per il gruppo di Poincaré, i.e. la (7.5), ma agente sullo spazio del campo.

Quindi gli $U(\mathcal{A})$ sono operatori unitari agenti su uno spazio di Hilbert!.

² In realtà l'abbiamo assunto, essendo uno degli assiomi di Wightman.

5) Commutazione tra \hat{Q}_{AB} e \vec{P}

Così come per l'operatore Hamiltoniano, anche in questo caso abbiamo:

$$[\hat{Q}_{AB}, \vec{P}] = 0 \quad (8.20)$$

Dimostrazione. La dimostrazione è facile e lasciata per esercizio, si passa per la definizione di \vec{P} in funzione del tensore energia-impulso $T^{\mu\nu}$, i.e.:

$$P^i = \int d^3\vec{x} T^{0i}(\vec{x}, t)$$

dove $T^{\mu\nu} = (\partial^\mu \Phi_a)(\partial^\nu \Phi_a) - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}$

□

6) Azione delle cariche sul vuoto

Come ultima importante proprietà, consideriamo lo stato $\hat{Q}_{AB}|0\rangle$ e proviamo a calcolarne la norma. Essendo le \hat{Q}_{AB} hermitiane, abbiamo:

$$\begin{aligned} ||\hat{Q}_{AB}|0\rangle||^2 &= \langle 0|\hat{Q}_{AB}\hat{Q}_{AB}|0\rangle \\ &\stackrel{(8.9)}{=} \int d^3\vec{x} \langle 0|\hat{Q}_{AB}\hat{j}^0(x)|0\rangle \stackrel{*}{=} \end{aligned}$$

Ora, j^μ è un 4-vettore, ergo trasforma sotto Poincaré secondo la legge (6.3):

$$U(\Lambda, a)j^\mu(x)U(\Lambda, a)^\dagger = (\Lambda^{-1})_\nu^\mu j^\nu(\Lambda x + a)$$

che ristretta alle traslazioni spazio-temporali diventa:

$$U(1, a)j^\mu(x)U(1, a)^\dagger = \delta_\nu^\mu j^\nu(x + a) = j^\mu(x + a)$$

Di conseguenza, essendo $U(1, a) = \exp(i a_\mu P^\mu)$ e considerando $a = -x$, troviamo:

$$j^\mu(x) = \exp(-ix_\mu P^\mu)j^\mu(0)\exp(ix_\mu P^\mu)$$

Sostituendo ora nell'equazione per la norma dello stato che abbiamo considerato inizialmente otteniamo:

$$\begin{aligned} ||\hat{Q}_{AB}|0\rangle||^2 &\stackrel{*}{=} \int d^3\vec{x} \underbrace{\langle 0|\hat{Q}_{AB}\exp(-ix_\mu P^\mu)\hat{j}^0(0)\exp(ix_\mu P^\mu)|0\rangle}_{=|0\rangle} = \\ &= \int d^3\vec{x} \langle 0|\hat{Q}_{AB}\hat{j}^0(0)|0\rangle \end{aligned}$$

Abbiamo raggiunto un risultato interessante: essendo l'integrandi indipendente da x , formalmente abbiamo:

$$||\hat{Q}_{AB}|0\rangle||^2 = \infty$$

e di conseguenza dobbiamo concludere che:

$$\hat{Q}_{AB}|0\rangle = 0 \quad (8.21)$$

e lo stesso ragionamento deve valere per tutti i generatori.

Questa condizione implica che lo stato di vuoto sia invariante sotto l'azione delle trasformazioni del gruppo, ovvero:

$$\boxed{\exp\left(-\frac{i}{2}\mathcal{A}_{AB}\hat{Q}_{AB}\right)|0\rangle = |0\rangle}$$

Le simmetrie tali per cui la (8.21) sia rispettata sono dette “realizzate à la Wigner-Weyl”.

8.3 Azione delle Simmetrie sugli Stati Esterni

Al fine di studiare l'azione delle trasformazioni di simmetria sugli stati esterni, “spegniamo” le interazioni ed espandiamo il campo in funzione degli operatori di creazione e distruzione:

$$\hat{\Phi}_A(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2p^0}} [a(\vec{p}, A)e^{-ip \cdot x} + a^\dagger(\vec{p}, A)e^{ip \cdot x}]$$

Applichiamo (8.19) ed isoliamo le trasformazioni di a ed a^\dagger :

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{U}(\mathcal{A})a(\vec{p}, A)\hat{U}(\mathcal{A})^\dagger &= \left[R(\mathcal{A})^{-1}\right]_{AC} a(\vec{p}, C) \\ \hat{U}(\mathcal{A})a^\dagger(\vec{p}, A)\hat{U}(\mathcal{A})^\dagger &= \left[R(\mathcal{A})^{-1}\right]_{AC} a^\dagger(\vec{p}, C) \end{aligned}} \quad (8.22)$$

Considerando quindi gli stati di singola particella, $a^\dagger(\vec{p}, A)|0\rangle = |\vec{p}, m, A\rangle$, ed applicando $U(\mathcal{A})$ non è difficile arrivare a:

$$\boxed{U(\mathcal{A})|\vec{p}, m, A\rangle = \left[R(\mathcal{A})\right]_{CA} |\vec{p}, m, C\rangle} \quad (8.23)$$

In sostanza significa che le trasformazioni di $\text{SO}(N)$ ruotano l'indice di “specie”, senza toccare impulso e massa. Questo è un risultato generico: **le simmetrie globali implicano la degenerazione**.

In altre parole, organizziamo adesso i nostri stati secondo $\mathcal{P} \otimes \text{SO}(N)$. Gli stati di singola particella sono ora rappresentazioni unitarie irriducibili di questo nuovo gruppo e la “vecchia” rappresentazione per particelle massive di spin 0 $\{|m, \vec{p}, 0, 0\rangle\}$ viene sostituita dagli stati

$$\left\{ |m, \vec{p}, 0, 0; A\rangle \text{ con } A = 1, \dots, N \right\}$$

che sono degeneri sia in massa che in impulso.

Dobbiamo quindi includere l'intero multipletto per far sì che questa rappresentazione sia irriducibile sotto l'azione di $\text{SO}(N)$.

8.4 Teorie di Gauge non-Abeliane

Abbiamo approcciato la teoria di gauge U(1) della QED (una teoria abeliana) da una prospettiva più fisica, quella di un campo massless di spin 1. Questo ci ha portato a due considerazioni:

- ▶ Una teoria quantistica di campo in grado di descrivere in maniera consistente (dal punto di vista dell'invarianza di Lorentz) un campo libero di spin 1, i.e. $A_\mu(x)$, deve essere una teoria di gauge. Siamo in altre parole forzati ad imporre l'invarianza di gauge.
 - ▶ A livello dell'interazione, per raggiungere la consistenza della teoria è necessario che il campo $A_\mu(x)$ sia accoppiato ad una corrente conservata, e ciò è equivalente all'imposizione di un'invarianza di gauge nella Lagrangiana.
- Nota:** Questo processo è noto come *gauging di una simmetria globale nel settore di massa*, in cui si richiede che i parametri della simmetria siano funzioni della posizione nello spazio-tempo.

Un approccio più geometrico nel caso abeliano

Vorremmo adesso generalizzare la nostra trattazione, e per farlo introduciamo un approccio più geometrico, sempre nel caso di teorie di gauge abeliane, ma che ci consentirà di passare più facilmente al caso non-abeliano.

1. Partiamo da una teoria di massa con una simmetria globale che sceglieremo essere U(1). Per esempio consideriamo la Lagrangiana di Dirac che descrive un campo massivo di spin 1/2:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) \\ \psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = e^{-i\alpha Q}\psi(x), \quad \alpha \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

dove Q è il generatore della simmetria U(1).

2. Promuoviamo la simmetria a simmetria locale, che richiede che il parametro da cui dipende sia funzione dello spazio-tempo, i.e. $\alpha = \alpha(x)$:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-i\alpha(x)Q}\psi(x) \equiv U(x)\psi(x)$$

Nel seguito adotteremo la notazione con il più generico operatore $U(x)$, anche se nel caso della simmetria U(1) si tratta di una semplice fase.

3. Ci accorgiamo immediatamente che una simmetria locale non è più compatibile con la precedente Lagrangiana, per colpa della presenza della derivata.

Infatti, essendo la derivata ordinaria definita da

$$n^\mu\partial_\mu\psi(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\psi(x^\mu + n^\mu\epsilon) - \psi(x)}{\epsilon}$$

appare chiaro il problema che questa presenta: abbiamo una differenza di campi calcolati in punti diversi dello spazio tempo, che quindi trasformeranno in maniera differente, ovvero $\psi(x) \rightarrow U(x)\psi(x)$, mentre $\psi(x + n\epsilon) \rightarrow U(x + n\epsilon)\psi(x + n\epsilon)$.

Abbiamo bisogno di una migliore nozione di derivata.

nel caso della QED, Q rappresenta precisamente la carica elettrica. In sostanza, dal punto di vista della teoria dei gruppi, stiamo aggiungendo una simmetria globale U(1) alla Lagrangiana, e questo equivale all'aggiunta dell'autovalore di Q nella descrizione del sistema, al momento della diagonalizzazione congiunta della simmetria spazio-temporale e della nuova simmetria globale.

4. Introduciamo un oggetto chiamato **Linea di Wilson**, $W(x, y)$, tale che sotto la trasformazione $\psi(x) \rightarrow U(x)\psi(x)$ si abbia:

$$\begin{aligned} W(y, x) &\rightarrow U(y)W(y, x)U(x)^{-1} \\ \Rightarrow W(y, x)\psi(x) &\rightarrow U(y)W(y, x)\psi(x) \end{aligned} \quad (8.24)$$

Di conseguenza, definiamo la **derivata covariante** D_μ t.c.:

$$n^\mu D_\mu \psi(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\psi(x + n\epsilon) - W(x + n\epsilon, x)\psi(x)}{\epsilon} \quad (8.25)$$

che trasforma in maniera corretta, infatti:

$$\begin{aligned} n^\mu D_\mu \psi(x) &\rightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{U(x + n\epsilon)\psi(x + n\epsilon) - U(x + n\epsilon)W(x + n\epsilon, x)\psi(x)}{\epsilon} = \\ &= U(x) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\psi(x + n\epsilon) - W(x + n\epsilon, x)\psi(x)}{\epsilon} = \\ &= U(x)n^\mu D_\mu \psi(x) \end{aligned}$$

vale a dire

$$D_\mu \psi(x) \rightarrow U(x)D_\mu \psi(x) \quad (8.26)$$

5. Ora formalizziamo la linea di Wilson, partendo da $W(x + n\epsilon, x)$ ed imponendo la condizione $W(x, x) = 1$. In altre parole vogliamo che la linea di Wilson agisca in maniera non banale solo quando lo fa tra due punti diversi dello spazio-tempo.

Utilizzando l'espansione di Taylor, possiamo scrivere, per un qualsiasi campo vettoriale $A_\mu(x)$:

$$W(x + n\epsilon, x) = \underbrace{W(x, x)}_{=1} - iQA_\mu(x)n^\mu\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (8.27)$$

Di conseguenza:

$$\begin{aligned} n^\mu D_\mu \psi(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\psi(x + n\epsilon) - [1 - iQA_\mu(x)n^\mu\epsilon]\psi(x)}{\epsilon} = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\psi(x + n\epsilon) - \psi(x)}{\epsilon} + iQA_\mu(x)n^\mu\psi(x) = \\ &= n^\mu \partial_\mu \psi(x) + n^\mu iQA_\mu(x)\psi(x) \end{aligned}$$

Ergo, abbiamo trovato la forma esplicita della derivata covariante:

$$D_\mu = \partial_\mu + iQA_\mu(x) \quad (8.28)$$

Inoltre, dalla proprietà di trasformazione della linea di Wilson (8.24) ad ordine $\mathcal{O}(\epsilon)$:

$$\begin{aligned} 1 - iQA_\mu(x)n^\mu\epsilon &\rightarrow U(x + n\epsilon)[1 - iQA_\mu(x)n^\mu\epsilon]U(x)^{-1} = \\ &= [U(x) + \epsilon n^\mu \partial_\mu U(x)][1 - iQA_\mu(x)n^\mu\epsilon]U(x)^{-1} = \\ &= 1 + n^\mu \epsilon (\partial_\mu U)U^{-1} - iQn^\mu \epsilon UA_\mu U^{-1} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned}$$

Che in definitiva ci fornisce la legge di trasformazione del campo

$A_\mu(x)$:

$$A_\mu(x) \rightarrow U(x)A_\mu(x)U(x)^{-1} + \frac{i}{Q}(\partial_\mu U(x))U(x)^{-1} \quad (8.29)$$

Ovviamente, nel caso della simmetria sotto $U(1)$, essendo $U(x)$ una semplice fase, la (8.29) riproduce perfettamente la struttura di una trasformazione di gauge.

Da questo punto di vista geometrico, il campo $A_\mu(x)$ è chiamato "connessione".

6. Esplicitiamo ora la regola di trasformazione del commutatore $[D_\mu, D_\nu]$ pensando alla sua azione su campo $\psi(x)$ e sfruttando la proprietà (8.26). È piuttosto evidente il fatto che:

$$D_\mu(D_\nu\psi(x)) \rightarrow U(x)D_\mu(D_\nu\psi(x))$$

il che significa che:

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu]\psi(x) &\rightarrow U(x)[D_\mu, D_\nu]\psi(x) = \\ &= U(x)[D_\mu, D_\nu]U(x)^{-1}U(x)\psi(x) \end{aligned}$$

e possiamo quindi isolare la proprietà di trasformazione del commutatore:

$$[D_\mu, D_\nu] \rightarrow U(x)[D_\mu, D_\nu]U(x)^{-1} \quad (8.30)$$

Ma c'è di più: siccome conosciamo la forma esplicita della derivata covariante (8.28), possiamo calcolare esplicitamente il commutatore. Per farlo applichiamolo nuovamente al campo ψ :

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu]\psi(x) &= [\partial_\mu + iQA_\mu(x), \partial_\nu + iQA_\nu(x)]\psi(x) \\ &= \left\{ iQ(\partial_\mu A_\nu) - iQ(\partial_\nu A_\mu) + (iQ)^2[A_\mu, A_\nu] \right\}\psi(x) \end{aligned}$$

Dove i termini simmetrici sotto scambio $\mu \leftrightarrow \nu$ si elidono a vicenda. Questa espressione ci suggerisce la seguente definizione per il tensore di sforzo del campo:

$$F_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{iQ}[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + iQ[A_\mu, A_\nu] \quad (8.31)$$

che rispetta la legge di trasformazione

$$F_{\mu\nu} \rightarrow U(x)F_{\mu\nu}U(x)^{-1} \quad (8.32)$$

Nel caso di $U(1)$, $F_{\mu\nu}$ è invariante!

7. In definitiva arriviamo alla Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \quad (8.33)$$

Generalizzazione al caso non-abeliano

Consideriamo un gruppo di Lie G di dimensione $\dim(G)$ e scriviamo un elemento di tale gruppo nel modo seguente:

$$h = \exp \left(-ig \sum_{A=1}^{\dim G} \alpha_A T^A \right), \quad h \in G \quad (8.34)$$

dove $g \in \mathbb{R}$ è detto coupling di gauge, gli $\alpha_A \in \mathbb{R}$ sono parametri reali ed i T^A formano una base dell'algebra di Lie \mathfrak{g} del gruppo G (i.e. sono i generatori di \mathfrak{g}).

I generatori chiudono la seguente algebra di Lie:

$$[T^A, T^B] = if^{ABC}T^C \quad (8.35)$$

dove le f^{abc} sono note come costanti di struttura e, nel caso di un gruppo di Lie compatto, queste sono totalmente anti-simmetriche.

Il commutatore (8.35) rispetta l'identità di Jacobi, i.e. ciclando verso destra:

$$[T^A, [T^B, T^C]] + [T^C, [T^A, T^B]] + [T^B, [T^C, T^A]] = 0 \quad (8.36)$$

che di conseguenza produce un vincolo sulle costanti di struttura:

$$\begin{aligned} & [T^A, if^{BCD}T^D] + [T^C, if^{ABD}T^D] + [T^B, if^{CAD}T^D] = \\ & = -f^{ADE}f^{BCD}T^E - f^{CDE}f^{ABD}T^E - f^{BDE}f^{CAD}T^E = 0 \end{aligned}$$

ergo:

$$f^{ADE}f^{BCD} + f^{CDE}f^{ABD} + f^{BDE}f^{CAD} = 0 \quad (8.37)$$

Ci concentriamo ora sul caso $G = \text{SU}(N)$, il gruppo Speciale Unitario i.e.:

$$\text{SU}(N) = \left\{ U \in \text{GL}(N, \mathbb{C}) : U^\dagger U = \mathbb{1}, \det U = +1 \right\}$$

Si dimostra che $\dim[\text{SU}(N)] = N^2 - 1$.

Esercizio 8.4.1 Dimostrare che $\dim[\text{SU}(N)] = N^2 - 1$. **[Conti svolti Lezione 31p1 pag. 8÷9]**

Lavorando al livello dell'algebra di $\text{SU}(N)$, vale a dire $\mathfrak{su}(N)$, possiamo scrivere schematicamente la mappa esponenziale dei generatori $U = \exp(iT) \in \text{SU}(N)$ e da qui seguono le seguenti considerazioni:

- i) dalla condizione $U^\dagger = U^{-1}$, sappiamo che i generatori devono essere hermitiani;
- ii) dalla proprietà $\det e^{iT} = e^{\text{Tr } iT}$ della mappa esponenziale e dalla condizione che $\det e^{iT} = +1$, in quanto e^{iT} è elemento di $\text{SU}(N)$, si deduce che i generatori devono essere a traccia nulla ("traceless").

riassumendo:

$$(T^A)^\dagger = T^A; \quad \text{Tr}(T^A) = 0$$

Nota 8.4.1 Abbiamo un minimo di libertà in merito alla normalizzazione dei generatori, che si identifica con la possibilità di modificare le costanti di struttura.

Nel seguito adotteremo la convenzione fisica, secondo cui, per $SU(N)$:

$$\sum_{CD=1}^{\dim SU(N)} f^{ACD} f^{BCD} = N \delta^{AB}$$

Esempio 8.4.1 Per $N = 2$, abbiamo $\dim[SU(2)] = 3$, ergo

$$\sum_{CD=1}^3 f^{ACD} f^{BCD} = 2 \delta^{AB}$$

che ci permette di identificare le costanti di struttura con il simbolo di Levi-Civita in 3 dimensioni. Quindi, nel caso di $SU(2)$:

$$f^{ABC} = \epsilon^{ABC}$$

Costruzione delle teorie di gauge $SU(N)$

Vogliamo costruire una teoria che sia invariante sotto trasformazioni globali di $SU(N)$ e l'opzione più semplice da prendere in considerazione è quella di una "collezione" di N campi di Dirac e formare da questi un vettore N -dimensionale, i.e.:

$$\Psi(x) \equiv \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \vdots \\ \psi_N(x) \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi}(x) \equiv (\bar{\psi}_1(x), \dots, \bar{\psi}_N(x))$$

con $\bar{\psi}_A(x) = \psi_A^\dagger(x) \gamma^0$.

Assumiamo che $\Psi(x)$ trasformi sotto $SU(N)$ secondo la rappresentazione fondamentale di quest'ultimo; di conseguenza avremo:

$$\begin{aligned} \Psi(x) &\rightarrow \Psi'(x) = U\Psi(x) \\ \bar{\Psi}(x) &\rightarrow \bar{\Psi}'(x) = \bar{\Psi}(x)U^\dagger, \quad U \in SU(N) \end{aligned} \quad (8.38)$$

Eventualmente in componenti: $\Psi'_A = U_{AB}\Psi_B$.

Questa scelta è particolarmente conveniente, in quanto la densità di Lagrangiana è invariante sotto tale simmetria globale e si può scrivere semplicemente come segue:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(x)(i\cancel{\partial} - m)\Psi(x) = \sum_{A=1}^N \bar{\Psi}_A(x)(i\cancel{\partial} - m)\Psi_A(x) \quad (8.39)$$

E dal momento che la trasformazione è globale, l'operatore U può "passare attraverso" la derivata, i.e.:

$$\bar{\Psi}(i\cancel{\partial} - m)\Psi \rightarrow \bar{\Psi}U^\dagger(i\cancel{\partial} - m)U\Psi = \bar{\Psi}(i\cancel{\partial} - m)\Psi$$

Ricordiamo che $SU(N)$, così come anche $SO(N)$, sono gruppi di Lie definiti come insiemi di operatori lineari che agiscono su uno spazio vettoriale. La loro rappresentazione fondamentale (talvolta detta "defining") in questi casi è semplicemente la rappresentazione $D(U)$, $U \in SU(N)$, in cui gli elementi del gruppo sono precisamente le matrici U stesse.

Esercizio 8.4.2 Trovare l'espressione degli elementi di $SU(2)$ nella rappresentazione fondamentale.

Soluzione. Dobbiamo prendere la mappa esponenziale di $\mathfrak{su}(2)$. Ci servono 3 generatori, matrici nella rappresentazione fondamentale, che siano hermitiani e traceless e che verifichino l'algebra (8.35) con le costanti di struttura equivalenti al simbolo di Levi-Civita.

Siccome si dà il caso che le matrici di Pauli $\sigma^{k=1,2,3}$ rispettino l'algebra

$$[\sigma^A, \sigma^B] = 2i\epsilon^{ABC} \sigma^C$$

non ci resta che prendere come generatori $T^A = \sigma^A/2$, questa è la rappresentazione fondamentale che cercavamo per $\mathfrak{su}(N)$.

Inoltre dalla relazione sulla traccia $\text{Tr } \sigma^A \sigma^B = 2\delta^{AB}$ ci accorgiamo del fatto che^a:

$$\text{Tr} [T^A T^B] = \frac{1}{2} \delta^{AB} \quad (8.40)$$

Segue quindi dalla (8.34) il risultato cercato, gli elementi di $SU(2)$ nella rappresentazione fondamentale:

$$U = \exp \left(-ig \sum_{A=1}^3 \alpha_A \frac{\sigma^A}{2} \right) \quad (8.41)$$

Nota: nel caso di $SU(3)$, la cui dimensione è pari ad 8, i generatori dell'algebra sono le 8 matrici di Gell-Mann.

^a Anche se qui siamo nel caso di $SU(2)$, la relazione (8.40) vale in generale per i generatori di $SU(N)$ nella rappresentazione defining.

Attenzione: la (8.40) è una conseguenza della compattezza del gruppo, alla fine del capitolo è possibile trovare un commento sui casi in cui le teorie di gauge siano basate su gruppi non compatti.

A questo punto promuoviamo la simmetria a simmetria locale, i.e.:

$$\boxed{U(x) = \exp \left(-ig \sum_{A=1}^{\dim G} \alpha_A(x) T^A \right)}$$

$$\Psi(x) \rightarrow U(x)\Psi(x)$$

con i generatori T^A presi nella rappresentazione fondamentale.

Utilizziamo nuovamente il trucco della linea di Wilson, scrivendo formalmente, sulla base della (8.24):

$$W(y, x)\Psi(x) \rightarrow U(y)W(y, x)\Psi(x)$$

o, equivalentemente:

$$W(y, x) \rightarrow U(y)W(y, x)U(x)^{-1}$$

Quindi la linea di Wilson è una matrice $N \times N$ che trasforma a destra e a sinistra per mezzo dell'operatore $U(x)$.

Espandiamola nuovamente tramite Taylor, prendendo $y = x + n\epsilon$:

$$W(x + n\epsilon, x) = \mathbb{1} - ig\epsilon n^\mu A_\mu(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

Abbiamo ottenuto un'espressione analoga a quella vista in precedenza, ma con la differenza che ora $A_\mu(x)$ è una matrice $N \times N$.

È chiaro che, sulla base degli stessi ragionamenti già visti, possiamo definire la derivata covariante come:

$$D_\mu \Psi(x) = \partial_\mu \Psi(x) + ig A_\mu(x) \Psi(x)$$

e dalla proprietà di trasformazione della linea di Wilson troviamo nuovamente la trasformazione di gauge (8.29), questa volta nel caso di $SU(N)$:

$$A_\mu(x) \rightarrow U(x) A_\mu(x) U(x)^{-1} + \frac{i}{g} (\partial_\mu U(x)) U(x)^{-1} \quad (8.42)$$

che è ancora scritta in forma matriciale.

Nota 8.4.2 A priori, $A_\mu(x)$ è una matrice $N \times N$ complessa, tuttavia possiamo notare due cose:

- i. $A'_\mu(x) = U(x) A_\mu(x) U(x)^{-1} + \frac{i}{g} (\partial_\mu U(x)) U(x)^{-1}$ ed il secondo termine è sempre hermitiano.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \left[\frac{i}{g} (\partial_\mu U(x)) U(x)^{-1} \right]^\dagger &= \frac{-i}{g} (U(x)^{-1})^\dagger (\partial_\mu U(x))^\dagger = \\ &= \frac{-i}{g} U(x) (\partial_\mu U(x)^{-1})^\dagger \stackrel{*}{=} \\ &\stackrel{*}{=} \frac{i}{g} (\partial_\mu U(x)) U(x)^{-1} \end{aligned}$$

Dal fatto che $UU^{-1} = \mathbb{1}$ e derivando, arriviamo alla relazione:

$$(\star) \quad \partial_\mu U^{-1} = -U^{-1} (\partial_\mu U) U^{-1}$$

□

Di conseguenza:

$$(A'_\mu)^\dagger = U (A_\mu)^\dagger U^{-1} + \frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^{-1}$$

Questo significa che, se ci restringiamo ad una matrice hermitiana per descrivere A_μ , allora la proprietà di trasformazione che la definisce è rispettata.

- ii. Se ora consideriamo la traccia di A'_μ e sfruttiamo la ciclicità sul primo termine, troviamo:

$$\text{Tr}(A'_\mu) = \text{Tr}(A_\mu) + \frac{i}{g} \text{Tr}[(\partial_\mu U) U^{-1}]$$

Ora sfruttiamo il fatto che la derivata può essere tirata fuori dal logaritmo e ci avvaliamo di una famosa identità secondo cui

$$\text{Tr}(\log U) = \log(\det U)$$

tuttavia se $U \in SU(N)$ il suo determinante è unitario ed il logaritmo in 1 è nullo. Questo significa che se A_μ fosse una matrice traceless, anche la traccia di A'_μ sarebbe nulla.

Una dimostrazione della famosa identità può essere fornita passando per una regola magica dell'esponenziale di matrice, $\det(\exp U) = \exp(\text{Tr } U)$, da cui:

$$\det(U) = \det(e^{\log U}) = e^{\text{Tr}(\log U)}$$

Ora prendiamo il log del primo e dell'ultimo termine e abbiamo finito.

Sulla base della nota 8.4.2, possiamo quindi dire che la connessione di $SU(N)$ è una matrice $N \times N$, hermitiana e con traccia nulla, quindi possiamo usare i generatori della rappresentazione fondamentale di

$\mathfrak{su}(N)$ per scrivere:

$$A_\mu(x) = \sum_{a=1}^{N^2-1} A_\mu^a(x) T^a \quad (8.43)$$

e di conseguenza la derivata covariante assume la forma:

$$D_\mu \Psi(x) = \partial_\mu \Psi(x) + ig A_\mu^a T^a \Psi(x) \quad (8.44)$$

Esercizio 8.4.3 È istruttivo riscrivere la trasformazione di gauge (8.42) in termini del campo $A_\mu^a(x)$. Per farlo consideriamo trasformazioni locali e infinitesime:

$$U = 1 - ig\alpha_a T^a, \quad U^\dagger = 1 + ig\alpha_a T^a$$

che di conseguenza comportano la seguente riscrittura del RHS della (8.42) ad ordine $\mathcal{O}(\alpha)$:

$$\begin{aligned} (1 - ig\alpha_a T^a) A_\mu^b T^b (1 + ig\alpha_c T^c) + \frac{i}{g} \overbrace{[-ig(\partial_\mu \alpha_a) T^a]}^{\partial_\mu U} (1 + ig\alpha_a T^a) &= \\ = A_\mu^a T^a - ig\alpha_b T^b A_\mu^c T^c + A_\mu^c T^c ig\alpha_b T^b + (\partial_\mu \alpha_a) T^a &= \\ = A_\mu^a T^a + (\partial_\mu \alpha_a) T^a - ig\alpha_b A_\mu^c [T^b, T^c] &= \\ = A_\mu^a T^a + (\partial_\mu \alpha_a) T^a - ig\alpha_b A_\mu^c (if^{bca} T^a) & \end{aligned}$$

per cui otteniamo in definitiva la trasformazione di gauge infinitesima per $A_\mu^a(x)$ nel caso di $SU(N)$:

$$A_\mu^a(x) \rightarrow A_\mu^a(x) + \partial_\mu \alpha_a(x) + g f^{abc} \alpha_b(x) A_\mu^c(x) \quad (8.45)$$

dove figura un termine con la funzione di struttura che non era presente nel caso di $U(1)$.

Consideriamo ora il tensore di sforzo, che dalla (8.31) possiamo generalizzare in maniera naturale ad $SU(N)$:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &\equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig [A_\mu, A_\nu] \\ F_{\mu\nu} &\rightarrow U(x) F_{\mu\nu} U(x)^\dagger \end{aligned} \quad (8.46)$$

Anche in questo caso abbiamo a che fare con una matrice $N \times N$ ed è cruciale elaborare in maniera esplicita la sua struttura.

Per farlo sfruttiamo la riscrittura $A_\mu = A_\mu^a T^a$, così da avere:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= (\partial_\mu A_\nu^a) T^a - (\partial_\nu A_\mu^a) T^a + ig A_\mu^b A_\nu^c [T^b, T^c] \\ &= (\partial_\mu A_\nu^a) T^a - (\partial_\nu A_\mu^a) T^a - g A_\mu^b A_\nu^c f^{bca} T^a \\ &= (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c) T^a \end{aligned}$$

possiamo quindi riscrivere il tensore di sforzo in funzione dei generatori

di $\text{su}(N)$, in cui appare esplicita la sua natura non abeliana:

$$\boxed{\begin{aligned} F_{\mu\nu} &\equiv F_{\mu\nu}^a T^a \\ F_{\mu\nu}^a &\equiv \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \end{aligned}} \quad (8.47)$$

Per via della legge di trasformazione di $F_{\mu\nu}$, il prodotto $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ **non** è una quantità invariante; tuttavia, la traccia di questo prodotto è invariante! Infatti, grazie alla proprietà di ciclicità della traccia:

$$\text{Tr}[F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}] \rightarrow \text{Tr}[U F_{\mu\nu} U^\dagger U F^{\mu\nu} U^\dagger] = \text{Tr}[F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}]$$

Se a questo punto sfruttiamo la riscrittura in termini dei generatori (8.47) e svolgiamo qualche conto ci accorgiamo di un'altra cosa interessante:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) &= \text{Tr}\left(F_{\mu\nu}^a T^a F^{b,\mu\nu} T^b\right) = F_{\mu\nu}^a F^{b,\mu\nu} \text{Tr}\left(T^a T^b\right) \stackrel{(8.40)}{=} F_{\mu\nu}^a F^{b,\mu\nu} \frac{1}{2} \delta^{ab} \\ &= \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu} \end{aligned}$$

Sostituendo a questo punto l'espressione secondo cui è definito $F_{\mu\nu}^a$ e svolgendo i prodotti otteniamo:

$$\text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)(\partial^\mu A^{a,\nu} - \partial^\nu A^{a,\mu}) + \underset{\substack{\text{interazioni tra i} \\ \text{campi di gauge}}}{}$$

La cosa interessante è che il primo termine è analogo, a meno di fattori moltiplicativi, al termine cinetico per i fotoni nella Lagrangiana di QED, ma scritto per ogni campo di gauge A_μ^a . Possiamo quindi normalizzare il tutto in modo tale da ottenere anche il fattore $-1/4$ a moltiplicare, i.e.:

$$\boxed{\begin{aligned} -\frac{1}{2} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) &= -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)(\partial^\mu A^{a,\nu} - \partial^\nu A^{a,\mu}) + \text{interazioni} \\ &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu} \end{aligned}}$$

Arriviamo quindi alla cosiddetta **Lagrangiana di Yang-Mills**, che descrive la teoria di gauge $\text{SU}(N)$ nella rappresentazione fondamentale:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{L}_{YM} &= -\frac{1}{2} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) + \bar{\Psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi \\ &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu} + \bar{\Psi}_a(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi_a - g \bar{\Psi}_A \gamma^\mu A_\mu^a (T^a)_{AB} \Psi_B \end{aligned}} \quad (8.48)$$

Nota 8.4.3 Alcune osservazioni:

- i) La proprietà di trasformazione del tensore di sforzo, $F_{\mu\nu} \rightarrow U(x)F_{\mu\nu}U(x)^{-1}$, implica che i campi del tensore di sforzo $F_{\mu\nu}^a(x)$ formino un multipletto aggiunto del gruppo G e che trasformino secondo:

$$F_{\mu\nu}^a(x) \rightarrow F'_{\mu\nu}^a(x) = (U_{\text{adj}}(x))^{ab} F_{\mu\nu}^b(x)$$

Infatti ogni gruppo di Lie semplice possiede una rappresenta-

zione aggiunta, i cui generatori sono rappresentati da:

$$(T_{\text{adj}}^a)^{bc} = (-i)f^{abc}$$

dove le T_{adj}^a sono matrici $N \times N$ costruite sulla base delle costanti di struttura.

Per mezzo del vincolo sulle costanti di struttura dovuto all'identità di Jacobi (8.37), si verifica che anche i generatori della rappresentazione aggiunta chiudono l'algebra della rappresentazione fondamentale, i.e.:

$$[T_{\text{adj}}^a, T_{\text{adj}}^b] = if^{abc}T_{\text{adj}}^c$$

Supponendo ora di avere una quantità X^a che, per definizione, trasforma secondo la rappresentazione aggiunta. Questo significa che:

$$\begin{aligned} X^a &\rightarrow X'^a = \left[\exp(-ig\alpha_c T_{\text{adj}}^c) \right]^{ab} X^b \\ &= X^a - g\alpha_c f^{cab} X^b + (\alpha^2) \end{aligned}$$

Se adesso consideriamo la quantità $X = X^a T^a$ dove X^a trasforma sotto la rappresentazione aggiunta mentre i T^a sono i generatori di una qualunque rappresentazione di $SU(N)$, chiaramente avremo:

$$X^a T^a \rightarrow X'^a T^a = \left[\exp(-ig\alpha_c T_{\text{adj}}^c) B_i g \right]^{ab} X^b T^a$$

Si dimostra che X trasforma secondo la seguente legge:

$$X \rightarrow UXU^{-1}, \quad U = \exp(-ig\alpha_a T_{\text{adj}}^a)$$

ii) Interazioni pure di gauge.

Dal termine cinetico

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu} &= \\ &= -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c)(\partial^\mu A^{a,\nu} - \partial^\nu A^{a,\mu} - g f^{ade} A^{d,\mu} A^{e,\nu}) \end{aligned}$$

possiamo estrarre due tipologie di interazione:

- **Interazioni tri-lineari** (o cubiche):

$$\mathcal{L}_{3A} = +\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) g f^{ade} A^{d,\mu} A^{e,\nu} \Rightarrow$$

► **Interazioni quartiche:**

$$\mathcal{L}_{4A} = -\frac{1}{4}g^2 f^{abc} f^{ade} A^{b,\mu} A^{c,\nu} A^{d,\mu} A^{e,\nu} \Rightarrow$$



Conseguenze: La funzione beta, ossia quella che determina in che modo procede il running del coupling g , di una teoria di gauge $SU(N)$ con N_f multipletti fondamentali^a è esprimibile ad 1 loop nella seguente forma:

$$\beta_{\text{1-loop}}(g) = \frac{g^3}{16\pi^2} \left(-\frac{11}{3}N + \frac{2}{3}N_f \right)$$

dove notiamo che il primo termine, contributo determinato dalle interazioni pure di gauge, è negativo. Questo ci sta sostanzialmente dicendo che, ad 1 loop, ci saranno auto-interazioni tra i campi di gauge in grado di smorzare il running del coupling fino al limite di *libertà asintotica*, in cui questo termine è maggiore del termine di materia, vale a dire nel caso in cui $N_f < \frac{11}{2}N$. Un esempio di teoria che rispecchia questo fatto è la CromoDinamica Quantistica (QCD), una teoria di Yang-Mills basata sul gruppo $SU(3)$.

È anche possibile regolare a piacere N ed N_f in modo da ottenere una funzione beta nulla, il che porta alle cosiddette teorie conformi.

^a N_f è il numero dei sapori (*flavor*) e dipende da quanti campi fermionici inseriamo nella teoria; nel caso da noi trattato $N_f = 1$

Nota 8.4.4 (Sulla compattezza e semplicità delle teorie di gauge.)

Nel riscrivere la $\text{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$, abbiamo sfruttato l'equazione (8.40) che, come già sottolineato, è conseguenza della compattezza del gruppo su cui stiamo basando la nostra teoria di gauge.

Nel caso in cui si scelga di basare la teoria su un gruppo non compatto, e ciò è perfettamente possibile, insorgono problemi dovuti al fatto che la δ^{AB} non ha più la diagonale con tutti segni positivi, ma ammette anche elementi di segno opposto. Questo implica che i termini cinetici estratti da $\text{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$, saranno sia positivi che negativi, e questo alla fine dei conti porta ad una violazione dell'unitarietà.

Inoltre, noi stiamo considerando un gruppo, $SU(N)$, che è anche semplice (non ha sottogruppi invarianti), ma questo non è un requisito fondamentale da rispettare. Tuttavia un teorema dice che ogni gruppo non semplice può essere decomposto in somma di gruppi semplici. Un caso eclatante di teoria di gauge basata su un gruppo non semplice è il Modello Standard, gruppo che, per l'appunto, si decompone in $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ (QCD \otimes EW).



9 Rottura Spontanea di Simmetria^a

^a Immagine da Quanta Magazine, “Quantum Atmospheres’ May Reveal Secrets of Matter”

9.1 Introduzione

Consideriamo una teoria di campo quantistica con una simmetria globale continua associata ad un gruppo G , un esempio di setup di questo tipo potrebbe essere quello che abbiamo discusso nel capitolo precedente, con $G = \text{SO}(N)$.

Assumiamo come generatori della simmetria le cariche di Noether Q_A , tali per cui $[Q_A, H] = 0$, ed indichiamo lo stato di vuoto come lo stato di minima energia dell'operatore Hamiltoniano H , i.e.:

$$H|0\rangle = E_0|0\rangle$$

dove E_0 è tipicamente normalizzata a 0.

Ci sono due vie possibili per realizzare simmetrie di questo tipo:

1) Realizzazione à la Wigner-Weyl

Questo è precisamente il caso che abbiamo già discusso, in cui il vuoto è un invariante sotto l'azione del gruppo di simmetria G , i.e.

$$U(g)|0\rangle = |0\rangle \quad \forall g \in G$$

ovvero $Q_A|0\rangle = 0 \forall A$.

Lo stato di vuoto è quindi unico e la simmetria viene realizzata in maniera lineare, ossia i campi trasformano con leggi del tipo $\phi_A \rightarrow U_{AB}\phi_B$.

2) Realizzazione à la Nambu-Goldstone

In questo caso la differenza risiede nel fatto che, per alcuni dei generatori, si può avere “ $Q_A|0\rangle \neq 0$ ”; questi generatori sono detti “generatori rotti”.

Come già evidenziato durante la trattazione dell'azione delle cariche di Noether sul vuoto, nel momento in cui non si verifica $Q_A|0\rangle = 0$ per ogni A , la norma $\|Q_A|0\rangle\|^2$ diverge, ergo la scrittura $Q_A|0\rangle \neq 0$ non è matematicamente appropriata. Tuttavia, ci riserviamo il diritto di formalizzarla nel seguito, assumendo per

9.1 Introduzione	182
9.2 Parametri d'Ordine	183
9.3 Teorema di Goldstone	185
9.4 Proprietà dei Bosoni di Goldstone	191
SSB di una simmetria discreta	191
SSB della simmetria $U(1)$	195
9.5 Realizzazione non Lineare della SSB di $U(1)$	200
Rottura Parziale di Simmetria	203
9.6 Simmetria Chirale	206
I Proiettori Chirali	206
La Lagrangiana Chirale	207
Simmetria Vettoriale ed Assiale	208
$SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ Sigma Model	211
Rottura spontanea della simmetria chirale	216

il momento che lo stato $Q_A|0\rangle$ non sia proporzionale allo stato di vuoto stesso.

Di conseguenza, dal fatto che le cariche commutano con l'operatore Hamiltoniano, ci accorgiamo che lo **stato di vuoto è degenero**:

$$HQ_A|0\rangle = Q_AH|0\rangle = E_0(Q_A|0\rangle)$$

In questo caso, invece di avere un unico stato di vuoto che rispetta l'intera simmetria del sistema, **abbiamo una famiglia di vuoti degeneri** connessi tra loro per mezzo delle trasformazioni del gruppo di simmetria.

Inoltre il sistema sceglie *spontaneamente* uno degli stati di vuoto all'interno di questa famiglia come stato di vuoto effettivo e, una volta che questa scelta è avvenuta, il sistema risulterà invariante sotto le simmetrie "non rotte" di G .

Esempio 9.1.1 L'esempio più semplice in cui si verifica quanto appena delineato è il ferromagnetismo, dove inizialmente il sistema presenta vari vettori di spin orientati in maniera casuale e risulta invariante sotto le rotazioni di $SO(3)$.

C'è quindi un'intera famiglia di stati di vuoto, tra loro connessi da rotazioni e tra questi il sistema ne sceglie uno spontaneamente. In questo stato la simmetria rotazionale completa è rotta ed il sistema è invariante sotto le sole trasformazioni di $SO(2)$ attorno all'asse di magnetizzazione! Diciamo in questo caso che *la simmetria $SO(3)$ si rompe spontaneamente nella simmetria residua $SO(2)$* .

Tecnicamente parlando, la situazione delle simmetrie realizzate à la Nambu-Goldstone non è affatto semplice da descrivere in quanto prima di tutto, come già detto, abbiamo che se $Q_A|0\rangle \neq 0$ la sua norma diverge, il che significa che Q_A non è definita sul vuoto o, in altri termini, che Q_A non si realizza come un operatore agente sullo spazio di Hilbert.

Ciò detto, è tempo di iniziare una descrizione consistente della rottura spontanea di simmetria (**SSB** da *Spontaneous Symmetry Breaking*) in QFT, partendo da un approccio prettamente tecnico e formale.

9.2 Parametri d'Ordine

Come abbiamo già osservato nel procedimento per ricavare l'azione delle cariche sul vuoto (8.21), una norma del tipo

$$\|Q_A|0\rangle\|^2 = \int d^3\vec{x} \langle 0 | Q_A j_A^0(x) | 0 \rangle$$

non è ben definita a meno che $Q_A|0\rangle = 0$ (i.e. simmetria realizzata à la Wigner-Weyl), in quanto integrando sull'intero volume spaziale si arriva ad una divergenza.

Per tirarci fuori da questa spinosa situazione possiamo quindi considerare oggetti come il commutatore $[j_A^0(x), O(y)]$, con la condizione che si annulli quando x ed y siano separati da un intervallo di tipo spazio,

i.e. $(x - y)^2 < 0$, per via della micro-causalità e dove $O(x) = O_m(x)$ è un generico operatore.

Chiaramente, in termini di cariche conservate considereremo il commutatore:

$$[Q_A, O(y)] = \int d^3\vec{x} [j_A^0(x), O(y)] \quad (9.1)$$

che è un oggetto ben definito, in quanto riceve contributi solo dal volume finito $|\vec{x} - \vec{y}|^2 < (x^0 - y^0)^2$.

Ora discutiamo dell'operatore $O_m(x)$, che per fissare le idee può essere pensato come il campo scalare $\phi_m(x)$ che abbiamo utilizzato durante la descrizione della simmetria globale $SO(N)$. Questo operatore trasformerà chiaramente secondo una qualche rappresentazione del gruppo di simmetria G considerato (e.g. nel caso di $SO(N)$, ϕ trasformava secondo la rappresentazione fondamentale), i.e.:

$$O_m(x) \xrightarrow{g \in G} [D(g)]_{mn} O_n(x)$$

che più nel dettaglio si traduce nella legge di trasformazione

$$U(g)O_m(x)U(g)^\dagger = [D(g)^{-1}]_{mn} O_n(x), \quad U(g) = \exp(-i\alpha_A Q_A)$$

che volendo è equivalente a

$$U(g)^\dagger O_m(x)U(g) = [D(g)]_{mn} O_n(x) \quad (9.2)$$

Se ora consideriamo $D(g) = \exp(-i\alpha_A T^A)$, dove T^A sono i generatori dell'algebra di G nella rappresentazione D , possiamo riscrivere la legge di trasformazione (9.2) nel caso infinitesimo, ottenendo:

$$\begin{aligned} O_m + i\alpha_A Q_A O_m - i\alpha_A Q_A O_m + \mathcal{O}(\alpha^2) = \\ = \cancel{O_m} + i\alpha_A [Q_A, O_m] + \mathcal{O}(\alpha^2) = \cancel{O_m} - i\alpha_A (T^A)_{mn} O_n + \mathcal{O}(\alpha^2) \end{aligned}$$

Quindi, dall'assunzione che l'operatore da noi considerato trasformi in maniera non banale sotto l'azione del gruppo di simmetria, troviamo che:

$$[Q_A, O_m] = -(T^A)_{mn} O_n(x) \quad (9.3)$$

con $[T^A, T^B] = if^{ABC}T^C$.

- Se la simmetria è realizzata à la Wigner-Weyl, i.e. $Q_A|0\rangle = 0$, considerando il valore di aspettazione nel vuoto (**VEV** da *Vacuum Expectation Value*) di O_m e lo trasformiamo sotto G , troviamo:

$$\begin{aligned} \langle 0 | O_m(x) | 0 \rangle \rightarrow \langle 0 | e^{i\alpha_A Q_A} O_m(x) e^{-i\alpha_A Q_A} | 0 \rangle = \\ = \stackrel{(9.2)}{=} [e^{-i\alpha_A T^A}]_{mn} \langle 0 | O_n(x) | 0 \rangle \end{aligned}$$

Ma nel LHS l'azione degli esponenziali, in quanto dipendenti da Q_A , per via della condizione di Wigner-Weyl, restituirà il vuoto stesso.

Questa considerazione ci porta alla seguente equazione:

$$\langle 0 | O_m(x) | 0 \rangle = [e^{-i\alpha_A T^A}]_{mn} \langle 0 | O_n(x) | 0 \rangle \quad (9.4)$$

che non ci dice altro se non che **solo gli operatori invarianti sotto l'azione del gruppo G assumono un valore di aspettazione sul vuoto**, se la simmetria è realizzata à la Wigner-Weyl.

Nota 9.2.1 Ricordando l'assunzione che il vuoto sia invariante sotto l'azione del gruppo di Poincaré, i.e. $U(\Lambda, a)|0\rangle = |0\rangle$, possiamo applicare la precedente osservazione e concludere che solo gli operatori invarianti di Lorentz possono acquisire un VEV. Tra l'altro, questa assunzione non è sempre valida, ad esempio va bene nel caso della fisica delle alte energie, ma non nel caso della fisica della materia condensata, dove è possibile che la simmetria spazio-temporale sia rotta.

- Consideriamo ora il caso di una simmetria realizzata à la Nambu-Goldstone. In questo caso il calcolo che abbiamo appena svolto non funziona!

In effetti, nel caso di SSB (simmetria à la Nambu-Goldstone), anche operatori $O_m(x)$ che trasformano in maniera non banale sotto G possono assumere un valore di aspettazione sul vuoto.

Definizione 9.2.1 (Parametri di Ordine.)

Si definisce parametro di ordine il VEV di un operatore $O_m(x)$ che gode di una qualunque legge trasformazione non banale sotto l'azione del gruppo di simmetria G , i.e.:

$$v_m \equiv \langle 0 | O_m(x) | 0 \rangle \quad (9.5)$$

I parametri d'ordine sono una misura quantitativa della rottura spontanea di simmetria e se il vuoto è invariante sotto G sono nulli, ad indicare che la simmetria non è rotta. Volendo riprendere l'esempio del ferromagnetismo, possiamo identificare tale parametro d'ordine con il vettore di magnetizzazione $\vec{M} = \frac{1}{N} \sum_i \langle 0 | \vec{S}_i | 0 \rangle$, che fornisce una misura dell' "ordine magnetico" del sistema.

9.3 Teorema di Goldstone

Prima di introdurre il teorema, partiamo dalla seguente proposizione

Proposizione 9.3.1 *La presenza di parametri d'ordine non nulli implica che*

$$\langle 0 | [Q_A, O_m(x)] | 0 \rangle \neq 0 \quad (9.6)$$

per almeno una carica Q_A ed un operatore O_m .

Dimostrazione. Consideriamo per ipotesi l'esistenza di un operatore $O_m(x)$ che trasformi in maniera non banale sotto una qualche rappresentazione irriducibile del gruppo di simmetria G , il cui VEV è definito come:

$$v_m \equiv \langle 0 | O_m(x) | 0 \rangle \neq 0$$

Di conseguenza:

$$\langle 0 | e^{i\alpha_A Q_A} O_m(x) e^{-i\alpha_A Q_A} | 0 \rangle = \overbrace{(e^{-i\alpha_A T^A})_{mn}}^{\text{irrep di } G} v_n$$

Essendo la rappresentazione irriducibile, non tutti i $T^A \vec{v}$ sono nulli, o meglio esiste almeno un indice A per cui $T^A \vec{v} \neq 0$. Se così non fosse, \vec{v} non trasformerebbe sotto il gruppo di simmetria e potremmo identificare un sottospazio invariante a partire da qui.

Se consideriamo la trasformazione infinitesima, troviamo:

$$\cancel{v_m} + i\alpha_A \langle 0 | [Q_A, O_m(x)] | 0 \rangle + \mathcal{O}(\alpha^2) = \cancel{v_m} - i\alpha_A (T^A)_{mn} v_n + \mathcal{O}(\alpha^2)$$

Quindi abbiamo scoperto che

$$\langle 0 | [Q_A, O_m(x)] | 0 \rangle = -(T^A)_{mn} v_n$$

ma allora possiamo concludere, in quanto $v_n \neq 0$ e trasforma in maniera non banale sotto una rappresentazione irriducibile di G , ergo deve esistere almeno una “ A ” ed una “ m ” tale che $(T^A)_{mn} v_n \neq 0$, i.e.:

$$\langle 0 | [Q_A, O_m(x)] | 0 \rangle \neq 0, \quad \begin{matrix} \text{per almeno una "A"} \\ \text{ed almeno una "m"} \end{matrix}$$

□

Abbiamo ora tutte le basi per enunciare il teorema di Goldstone.

Teorema 9.3.2 (Teorema di Goldstone.)

Supponiamo di essere in presenza di SSB di una simmetria globale continua, i.e. nel caso in cui le correnti sono conservative, ma le cariche (i generatori della simmetria) associate a tali correnti non preservano il ground state. Queste cariche sono dette generatori rotti.

Allora per ogni generatore rotto della simmetria si generano nuove particelle scalari massless nello spettro delle possibili eccitazioni e vengono chiamate “Bosoni di Goldstone”.

Per dimostrarlo, tuttavia, ci basta dimostrare quanto segue:

Teorema 9.3.3 *Se i parametri d'ordine (che quantificano la rottura spontanea di simmetria) assumono valori non nulli, allora lo spettro della teoria contiene particelle massless.*

Dimostrazione. Consideriamo la quantità $\langle 0 | [j_A^\mu(y), O_n(x)] | 0 \rangle$, dove $j_A^\mu(y)$ è la corrente di Noether associata alla carica Q_A ed $O_n(x)$ è il solito operatore scalare che trasforma in maniera non banale sotto una qualche irrep di G , etichettata con “ n ”.

Possiamo sviluppare il commutatore, in modo da ottenere la sottrazione tra due VEV, per poi inserire all'interno del prodotto tra j_A^μ ed O_n la relazione di completezza su stati di singola particella e multi-particellari

$|N\rangle$, che diciamo essere $\sum_N |N\rangle\langle N|$ e che è parte degli assiomi della nostra teoria di campo quantistica. In formule otteniamo:

$$\begin{aligned}\langle 0 | [j_A^\mu(y), O_n(x)] | 0 \rangle &= \sum_N \langle 0 | j_A^\mu(y) | N \rangle \langle N | O_n(x) | 0 \rangle - \\ &\quad - \sum_N \langle 0 | O_n(x) | N \rangle \langle N | j_A^\mu(y) | 0 \rangle\end{aligned}$$

In merito agli stati $|N\rangle$, è opportuno osservare che questi sono autostati del 4-impulso, con autovalore $p_N = (p_N^0 = E_N, \vec{p}_N)$.

Come abbiamo visto studiando l'azione delle cariche sul vuoto nel capitolo precedente, possiamo sfruttare le proprietà di trasformazione delle traslazioni spazio-temporali per scrivere:

$$\begin{aligned}j_A^\mu(y) &= e^{iy \cdot P} j_A^\mu(0) e^{-iy \cdot P} \\ O_n(x) &= e^{ix \cdot P} O_n(0) e^{-ix \cdot P}\end{aligned}$$

Se sostituiamo queste espressioni nell'equazione precedente e sfruttiamo l'invarianza del vuoto sotto Poincaré (e quindi sotto traslazione) quando consideriamo l'azione degli operatori esterni, combinandola con l'equazione agli autovalori per P sugli stati $|N\rangle$, possiamo riscrivere:

$$\begin{aligned}\langle 0 | [j_A^\mu(y), O_n(x)] | 0 \rangle &= \sum_N \langle 0 | j_A^\mu(0) | N \rangle \langle N | O_n(0) | 0 \rangle e^{-i(y-x) \cdot p_N} - \\ &\quad - \sum_N \langle 0 | O_n(0) | N \rangle \langle N | j_A^\mu(0) | 0 \rangle e^{i(y-x) \cdot p_N}\end{aligned}$$

A questo punto ci riportiamo ad un'espressione con 4-impulso generico, introducendo un integrale 4D sull'impulso e una delta di Dirac 4D:

$$\begin{aligned}\langle 0 | [j_A^\mu(y), O_n(x)] | 0 \rangle &= \int d^4 p \left[\sum_N \langle 0 | j_A^\mu(0) | N \rangle \langle N | O_n(0) | 0 \rangle e^{-i(y-x) \cdot p} \delta^{(4)}(p - p_N) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_N \langle 0 | O_n(0) | N \rangle \langle N | j_A^\mu(0) | 0 \rangle e^{i(y-x) \cdot p} \delta^{(4)}(p - p_N) \right]\end{aligned}$$

Per semplificarci la vita, definiamo i parametri tra parentesi quadra nell'integrale nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2\pi)^3} \rho_{A,n}^\mu(p) &\equiv \sum_N \langle 0 | j_A^\mu(0) | N \rangle \langle N | O_n(0) | 0 \rangle \delta^{(4)}(p - p_N) \\ \frac{1}{(2\pi)^3} \tilde{\rho}_{A,n}^\mu(p) &\equiv \sum_N \langle 0 | O_n(0) | N \rangle \langle N | j_A^\mu(0) | 0 \rangle \delta^{(4)}(p - p_N)\end{aligned}$$

Così che il nostro VEV iniziale si possa scrivere in maniera compatta:

$$\langle 0 | [j_A^\mu(y), O_n(x)] | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4 p \left[\rho_{A,n}^\mu(p) e^{-i(y-x) \cdot p} - \tilde{\rho}_{A,n}^\mu(p) e^{i(y-x) \cdot p} \right] \quad (9.7)$$

Concentriamoci adesso sulle funzioni ρ e $\tilde{\rho}$, in quanto è possibile inferire la loro struttura sfruttando l'invarianza di Lorentz, i.e. possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}\rho_{A,n}^\mu(p) &= p^\mu \rho_{A,n}(p^2) \Theta(p^0) \\ \tilde{\rho}_{A,n}^\mu(p) &= p^\mu \tilde{\rho}_{A,n}(p^2) \Theta(p^0)\end{aligned}$$

dove la $\Theta(p^0)$ serve sostanzialmente a rendere più evidente il fatto che p^0 , che dopo l'applicazione della $\delta(p - p_N)$ è p_N^0 , sia strettamente positiva.

Se ora inseriamo queste due espressioni nella (9.7), riconosciamo subito le due derivate $\frac{\partial}{\partial y_\mu} e^{\mp i(y-x)\cdot p} = \mp i p^\mu e^{\mp i(y-x)\cdot p}$, a meno della i . Possiamo quindi sfruttare questa uguaglianza per semplificare ulteriormente la nostra equazione e, siccome vogliamo essere il più generali possibili, sostituiamo la dipendenza da p^2 con un integrale in $d\mu^2$ per mezzo di una $\delta(p^2 - \mu^2)$.

Quello che otteniamo dopo queste sostituzioni è:

$$\langle 0 | [j_A^\mu(y), O_n(x)] | 0 \rangle = \frac{i}{(2\pi)^3} \frac{\partial}{\partial y_\mu} \int d\mu^2 \left[\rho_{A,n}(\mu^2) \int d^4 p \Theta(p^0) \delta(p^2 - \mu^2) e^{-i(y-x)\cdot p} + \tilde{\rho}_{A,n}(\mu^2) \int d^4 p \Theta(p^0) \delta(p^2 - \mu^2) e^{i(y-x)\cdot p} \right]$$

In questa espressione riconosciamo una vecchia amica, strettamente legata all'espressione del propagatore di una particella scalare con massa μ , ovvero la funzione $\Delta_+(x - y, \mu^2)$, che ci permette di arrivare al seguente risultato:

$$\boxed{\langle 0 | [j_A^\mu(y), O_n(x)] | 0 \rangle = \frac{\partial}{\partial y_\mu} \int d\mu^2 [\rho_{A,n}(\mu^2) \Delta_+(y - x, \mu^2) + \tilde{\rho}_{A,n}(\mu^2) \Delta_+(x - y, \mu^2)]} \quad (9.8)$$

con

$$\boxed{\Delta_+(x - y, \mu^2) \equiv \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4 p \Theta(p^0) \delta(p^2 - \mu^2) e^{-i(x-y)\cdot p}} \quad (9.9)$$

Nota 9.3.1 Sfruttando l'identità $\int d^4 p \Theta(p^0) \delta(p^2 - \mu^2) = \int \frac{d^3 \vec{p}}{2p^0}$, possiamo riscrivere la (9.9):

$$\Delta_+(x - y, \mu^2) \equiv \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \vec{p}}{2p^0} e^{-i(x-y)\cdot p}$$

Da qui possiamo osservare due cose:

- (i) Questa funzione è invariante sotto trasformazioni di Lorentz ortocrone, i.e.:

$$\forall \Lambda^\mu_\nu \in O^+(1, 3) \Rightarrow \Delta_+(\Lambda^\mu_\nu z^\nu, \mu^2) = \Delta_+(z, \mu^2)$$

- (ii) Invocando la proprietà del gruppo di Lorentz secondo cui se un vettore è di tipo spazio deve esistere una trasformazione di Lorentz che lo manda in sé stesso cambiato di segno (i.e. $\exists \Lambda^\mu_\nu : \Lambda^\mu_\nu z^\nu = -z^\mu$ se $z^2 < 0$) e combinandola con il punto (i), ci accorgiamo del fatto che:

$$\Delta_+(z, \mu^2) = \Delta_+(-z, \mu^2), \quad z^2 < 0$$

Sulla base delle considerazioni nella nota 9.3.1, possiamo avviarcia alla conclusione di questa estenuante dimostrazione:

1. Consideriamo il caso in cui tra x ed y ci sia un intervallo di tipo spazio, ovvero $(x - y)^2 < 0$.

In questo caso la Δ_+ si comporta come una funzione pari, quindi possiamo tirarla fuori dalla parentesi nella (9.8) e, sfruttando il fatto che per la micro-causalità il commutatore deve annullarsi nel caso di intervalli di tipo spazio, concludiamo che tra le ρ vige in generale la seguente relazione:

$$\tilde{\rho}_{A,n}(\mu^2) = -\rho_{A,n}(\mu^2) \quad (9.10)$$

Quindi la (9.8) si riscrive, mantenendo l'intervallo tra x e y generale:

$$\begin{aligned} \langle 0 | [j_A^\mu(y), O_n(x)] | 0 \rangle &= \\ &= \frac{\partial}{\partial y_\mu} \int d\mu^2 \rho_{A,n}(\mu^2) [\Delta_+(y - x, \mu^2) - \Delta_+(x - y, \mu^2)] \end{aligned} \quad (9.11)$$

2. Utilizziamo la conservazione delle correnti.

Sostanzialmente dobbiamo derivare a destra e sinistra in $\frac{\partial}{\partial y^\mu}$ per poi imporre la derivata del LHS = 0. Non è difficile convincersi del fatto che, posto $\square_y = \frac{\partial}{\partial y^\mu} \frac{\partial}{\partial y_\mu}$, dal RHS si trovano due equazioni di Klein-Gordon, una per ogni Δ_+ , ovvero:

$$\begin{aligned} \square_y \Delta_+(y - x, \mu^2) &= -\mu^2 \Delta_+(y - x, \mu^2) \\ \square_y \Delta_+(x - y, \mu^2) &= -\mu^2 \Delta_+(x - y, \mu^2) \end{aligned}$$

Imponendo ora la conservazione della corrente troviamo che:

$$\int d\mu^2 \mu^2 \rho_{A,n}(\mu^2) [\Delta_+(y - x, \mu^2) - \Delta_+(x - y, \mu^2)] \stackrel{!}{=} 0$$

da cui concludiamo che, essendo la Δ_+ generalmente non pari:

$$\mu^2 \rho_{A,n}(\mu^2) = 0$$

(9.12)

Ci verrebbe da dire che $\rho_{A,n}(\mu^2) = 0$, ma ciò non è possibile nel caso della SSB! Per comprenderne le motivazioni passiamo al punto seguente.

3. Fissiamo l'indice di Lorentz $\mu = 0$ e calcoliamo esplicitamente il commutatore.

In questo caso utilizziamo per la Δ_+ l'espressione (9.9), da cui è evidente che la sua derivata rispetto ad y^μ consiste in sé stessa per un fattore $\pm i p^0$ a seconda del segno dell'argomento dell'esponenziale considerato.

Posti quindi $x^0 = y^0 = t$ senza alcuna perdita di generalità, possiamo togliere di mezzo l'esponenziale dipendente dalle componenti temporali di x , y e p in quanto ce ne sono due con segno opposto. Arriviamo quindi alla seguente situazione:

$$\begin{aligned} \langle 0 | [j_A^0(\vec{y}, t), O_n(\vec{x}, t)] | 0 \rangle &= \\ &= \int d\mu^2 \rho_{A,n}(\mu^2) \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4 p \Theta(p^0) \delta(p^2 - \mu^2) p^0 [e^{i(\vec{y}-\vec{x}) \cdot \vec{p}} + e^{-i(\vec{y}-\vec{x}) \cdot \vec{p}}] \stackrel{*}{=} \end{aligned}$$

Ora possiamo integrare su $p^0 = (|\vec{p}|^2 + \mu^2)^{1/2}$ usando la δ :

$$\begin{aligned}\delta(p^2 - \mu^2) &= \delta((p^0)^2 - |\vec{p}|^2 - \mu^2) = \\ &= \frac{1}{2p^0} \left[\delta\left((p^0)^2 - \sqrt{|\vec{p}|^2 - \mu^2}\right) + \delta\left((p^0)^2 + \sqrt{|\vec{p}|^2 - \mu^2}\right) \right]\end{aligned}$$

dove viene automaticamente selezionato il primo termine grazie alla $\Theta(p^0)$. Troviamo quindi che:

$$\begin{aligned}&\stackrel{*}{=} \int d\mu^2 \rho_{A,n}(\mu^2) \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{p} \frac{1}{2p^0} p^0 [e^{i(\vec{y}-\vec{x}) \cdot \vec{p}} + e^{-i(\vec{y}-\vec{x}) \cdot \vec{p}}] = \\ &= \int d\mu^2 \rho_{A,n}(\mu^2) \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} 2(2\pi)^3 \delta(x - y)\end{aligned}$$

ovvero:

$$\langle 0 | [j_A^0(\vec{y}, t), O_n(\vec{x}, t)] | 0 \rangle = \int d\mu^2 \rho_{A,n}(\mu^2) \delta(x - y)$$

Se ora integriamo su \vec{y} otteniamo il risultato "finale":

$$\boxed{\langle 0 | [Q_A, O_n(\vec{x}, t)] | 0 \rangle = \int d\mu^2 \rho_{A,n}(\mu^2)} \quad (9.13)$$

Ci siamo, la questione è la seguente: per ipotesi sappiamo di avere un qualche parametro d'ordine non nullo, ma questo per la proposizione 9.3.1 significa che anche il LHS della (9.13) deve essere diverso da zero e in particolare, come ricavato nella dimostrazione della stessa proposizione:

$$\langle 0 | [Q_A, O_m(x)] | 0 \rangle = -(T^A)_{nm} v_m \neq 0$$

Abbiamo quindi due equazioni chiave, la (9.12) e la (9.13), che sono compatibili solo se $\rho_{A,n} \propto \delta(\mu^2)$ per mezzo di un qualche fattore \mathcal{A} . Di conseguenza, dalla (9.13) avremo:

$$\int d\mu^2 \mathcal{A} \delta(\mu^2) = \mathcal{A} \stackrel{!}{=} -(T^A)_{mn} v_n$$

Quindi arriviamo alla forma esplicita di ρ :

$$\boxed{\rho_{A,n}(\mu^2) = -\delta(\mu^2)(T^A)_{nm} \langle 0 | O_m(x) | 0 \rangle} \quad (9.14)$$

Questa equazione ci dice esattamente che, in presenza di SSB, $\rho_{A,n}(\mu^2)$ non si annulla, ma consiste interamente di un termine proporzionale ad una $\delta(\mu^2)$, quindi necessariamente $\mu^2 = 0$.

Se ora torniamo indietro alla definizione delle ρ :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2\pi)^5} \rho_{A,n}^\mu(p) &= \frac{1}{(2\pi)^5} p^\mu \rho_{A,n}(p^2) \Theta(p^0) = \\ &= \sum_N \langle 0 | j_A^\mu(0) | N \rangle \langle N | O_n(0) | 0 \rangle \delta^{(4)}(p - p_N)\end{aligned} \quad (9.15)$$

possiamo osservare una cosa interessante: dal punto di vista della somma al RHS, $p = p_N$ è il 4-impulso totale dello stato $|N\rangle$, e un contributo di

pura delta di Dirac $\delta(p_N^2 = \mu^2 = 0)$ è possibile solo se $|N\rangle$ è uno stato di singola particella massless, quindi abbiamo concluso.

Volendo, si può anche dimostrare che queste particelle sono scalari e lo faremo nella prossima sezione, per ora limitiamoci a dire che questi stati massless scalari sono detti **bosoni di Goldstone**. \square

Nota 9.3.2 Il perché lo stato $|N\rangle$ sia di singola particella si può capire considerando uno stato con due particelle massless, quindi con $p_N = p_1 + p_2$.

È chiaro che in questo caso $p_N^2 = 2p_1^0 p_2^0 (1 - \cos \vartheta)$, espressione nulla quando $\vartheta = 0$. Tuttavia non dobbiamo farci trarre in inganno, in quanto questa non è una delta di Dirac isolata, bensì un continuo che si estende fino a $p_N^2 = 0$!

9.4 Proprietà dei Bosoni di Goldstone

Abbiamo visto che, per il teorema di Goldstone, in presenza di SSB vengono generati uno o più stati massless scalari detti bosoni di Goldstone. Ora ci piacerebbe caratterizzare le loro proprietà

Partiamo proprio dal loro essere scalari.

Dimostrazione. Mostrarlo è tutt'altro che difficile, basta partire dalla definizione di ρ^μ introdotta nella dimostrazione del teorema di Goldstone:

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \rho_{A,n}^\mu = \sum_N \langle 0 | j_A^\mu(0) | N \rangle \langle N | O_n(0) | 0 \rangle \delta^{(4)}(p - p_N)$$

Considerando nel RHS il contributo di uno stati $|N\rangle$ massless di cui il teorema garantisce l'esistenza, per avere un contributo totale non nullo (in quanto $\rho_{A,n}^\mu \neq 0$) dobbiamo avere contemporaneamente:

$$\langle 0 | j_A^\mu(0) | N \rangle \neq 0, \quad \langle N | O_n(0) | 0 \rangle \neq 0$$

Essendo O_n definito come un operatore scalare, la sua azione sul vuoto non potrà mai generare stati con elicità diversa da zero. Tuttavia affinché il bra-ket sia non nullo, O_n deve generare dal vuoto uno stato con gli stessi numeri quantici di $|N\rangle$, quindi anche $|N\rangle$ deve essere uno stato scalare. \square

Per dimostrare le altre proprietà, ci forniremo di un paio di modelli esplicativi.

SSB di una simmetria discreta

Consideriamo la seguente Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi) (\partial^\mu \varphi) - \frac{m^2}{2} \varphi^2 - \frac{\lambda}{4} \varphi^4 \quad (9.16)$$

Questa Lagrangiana risulta invariante sotto la trasformazione che manda $\varphi(x) \rightarrow -\varphi(x)$, una simmetria globale **discreta** chiamata "simmetria \mathbb{Z}_2 ", dove $\mathbb{Z}_2 = \{+1, -1\}$.

A questo punto possiamo già osservare una cosa: in questo caso il teorema di Goldstone non può essere applicato, in quanto la simmetria globale non è continua!

Procediamo comunque con la nostra trattazione e scriviamo l'Hamiltoniana:

$$H = \underbrace{\int d^3x \left[\frac{1}{2}(\partial_t \varphi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_i \varphi)(\partial^i \varphi) + \frac{m^2}{2}\varphi^2 + \frac{\lambda}{4}\varphi^4 \right]}_{\mathcal{H} = \Pi \partial_t \varphi - \mathcal{L}}$$

L'idea è ora quella di cercare lo stato fondamentale (il ground state) del modello, ovvero quella configurazione di campo tale da minimizzare l'energia, che in particolare consiste nella condizione che il campo sia indipendente dal tempo ed omogeneo nello spazio, ergo $\varphi = \text{costante}$.

Per trovare il valore esplicito di questa costante, minimizziamo il termine di potenziale

$$V(\varphi) \equiv \frac{m^2}{2}\varphi^2 + \frac{\lambda}{4}\varphi^4$$

e lo facciamo in due casi specifici (escludiamo il caso in cui $\lambda < 0$ perché in tal caso l'energia non sarebbe limitata da sotto):

1. $m^2 \geq 0$ e $\lambda > 0$
2. $m^2 < 0$ e $\lambda > 0$

Caso 1.

Questa situazione è decisamente poco interessante, infatti dalla derivata prima:

$$\frac{dV}{d\varphi} = \varphi(m^2 + \lambda\varphi) = 0 \Rightarrow [\varphi = 0]$$

Mentre la derivata seconda:

$$\left. \frac{d^2V}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=0} = m^2 \geq 0$$

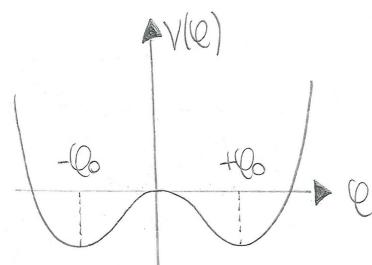
Quindi il minimo in questo caso è banalmente $\varphi = 0$ ed è poco interessante in quanto ancora invariante sotto \mathbb{Z}_2 . In sostanza quello che stiamo dicendo è che **il ground state non rompe la simmetria del modello** e la teoria si può quantizzare come al solito.

Caso 2.

Qui la situazione si fa interessante. Prendiamo $m^2 = -\mu^2$ con $\mu^2 > 0$ e ci accorgiamo che in questo caso l'estremo in $\varphi = 0$ ha derivata seconda negativa ($= -\mu^2$), ergo è un massimo!

Ci sono invece due altre soluzioni, non banali, che annullano la derivata del potenziale, i.e.:

$$\varphi = \pm\varphi_0 = \pm\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}$$



Non è difficile convincersi del fatto che queste due soluzioni siano dei minimi e possiamo di conseguenza rappresentare schematicamente il potenziale con cui abbiamo a che fare come fatto a lato.

Abbiamo quindi due stati di vuoto, $\pm\varphi_0$, connessi tra loro per mezzo di una trasformazione di simmetria del tipo $\varphi \rightarrow -\varphi$. Il sistema sceglierà una delle due configurazioni di campo come vero stato di vuoto e **la simmetria subirà una rottura spontanea**.

È possibile fare, tuttavia, un'intelligente obiezione: *perché mai il sistema sarebbe forzato a compiere una scelta? In fondo siamo interessati ad una situazione di meccanica quantistica in cui potremmo tranquillamente immaginare di avere una sovrapposizione dei due stati degeneri*. Per rispondere al meglio a questa obiezione, consideriamo un esempio in meccanica quantistica.

Esempio 9.4.1 Consideriamo una particella descritta dalla coordinata $q(t)$ con potenziale a doppia buca, con minimi in $\pm\eta$:

$$V(q) = \frac{\lambda^2}{2} (q(t)^2 - \eta^2)^2$$

e la cui Lagrangiana è:

$$\mathcal{L} \frac{1}{2} m \dot{q}(t)^2 - V(q)$$

simmetrica sotto la trasformazione $q(t) \rightarrow -q(t)$.

Possiamo risolvere l'equazione di Schrödinger, espandendo il potenziale intorno al minimo in $q = +\eta$ mantenendo solo i termini quadratici nell'espansione, trattando invece come perturbazioni tutti gli ordini superiori, i.e.:

$$V(q) \rightarrow V_{(2)}(q) = 2\eta^2 \lambda^2 (q - \eta)^2$$

Abbiamo quindi, all'ordine quadratico, un oscillatore armonico con stato di vuoto " $|+\rangle$ ".

Similarmente espandendo attorno a $q = -\eta$ troveremo uno stato di vuoto " $|-\rangle$ ".

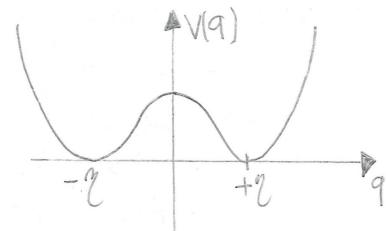
Il vero vuoto non è tuttavia nessuno dei due stati, in quanto **esiste una probabilità di tunneling attraverso la barriera diversa da zero!** In altre parole l'Hamiltoniana non è diagonale nella base $|\pm\rangle$ e si verifica che, alla fine dei conti:

$$\begin{cases} \langle +|H|+ \rangle = \langle -|H|- \rangle = a \\ \langle +|H|- \rangle = \langle -|H|+ \rangle = b \end{cases}, \quad b \ll a$$

b è quindi in generale molto piccolo ma non zero, in quanto esponenzialmente soppresso.

Dopo la diagonalizzazione, gli autostati saranno $|+\rangle \pm |-\rangle$ con autovalori $a \pm b$ e, dipendentemente dal segno di b , il vero stato di vuoto sarà

$$|S\rangle \equiv |+\rangle + |-\rangle \text{ o } |A\rangle \equiv |+\rangle - |-\rangle$$



rispettivamente Simmetrico o Anti-simmetrico sotto la trasformazione $q(t) \rightarrow -q(t)$, che trasforma $|+\rangle$ in $|-\rangle$ e viceversa. Ma d'altronde gli stati fisici sono definiti a meno di una fase, quindi alla fine dei conti il vuoto andrà sempre in sé stesso, senza alcun segno di rottura spontanea di simmetria.

In QFT, la differenza cruciale sta nel fatto che la probabilità di tunneling è zero (**precisamente zero**, nel limite di volume infinito).

Per realizzare questo fatto, è utile discretizzare lo spazio e pensare ad un campo quantistico come una collezione di variabili quanto-meccaniche, una per ogni punto nel reticolo. Per far sì che il tunneling si verifichi, ognuna di queste particelle deve effettuare il tunneling e per ognuna la probabilità sarà fornita da un esponenziale del tipo e^{-C} .

L'ampiezza totale di tunneling sarà perciò la produttoria delle probabilità individuali in ogni punto del reticolo, che quindi produce un fattore e^{-CN} e, nel limite di spazio continuo, questa ampiezza andrà a zero.

Tipicamente diciamo che **una QFT corrisponde alla QM nel limite di infiniti gradi di libertà**.

Detta in termini diversi: se proviamo a realizzare la transizione $+q_0 \rightarrow -q_0$, la configurazione di campo deve cambiare in ciascun punto dello spazio, ma nel limite di volume infinito ciò è impossibile: in QFT i vuoti degeneri sono equivalenti e completamente disconnessi tra loro, quindi può avvenire la rottura spontanea di simmetria.

Ora che abbiamo capito che la SSB è una peculiarità delle teorie quantistiche di campo nel limite di volume infinito, e che ci siamo convinti del fatto che gli stati fondamentali $\pm q_0$ sono completamente disconnessi tra loro, possiamo sceglierne uno come vero stato di vuoto e procedere con la definizione di una nuova teoria sviluppata rispetto ad esso.

In particolare espandiamo il campo attorno allo stato fondamentale $\varphi(x) = q_0 + \chi(x)$ e scriviamo la densità di energia della configurazione di vuoto ricordando che, essendo il campo costante nel tempo ed omogeneo nello spazio, il termine cinetico è nullo:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0 &= -\frac{\mu^2}{2} \varphi_0^2 + \frac{\lambda}{4} \varphi_0^4 = -\frac{\mu^4}{2\lambda} + \frac{\mu^4}{4\lambda} \\ &= -\frac{\mu^4}{4\lambda}\end{aligned}$$

Possiamo quindi rinormalizzare il punto zero dell'energia a zero, sostanzialmente shiftando il potenziale verso l'alto, ovvero aggiungendo un termine extra alla Lagrangiana pari a $-\mathcal{H}_0$ che non contribuirà alla derivata. Abbiamo quindi, dalla (9.16):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) + \frac{\mu^2}{2} \varphi^2 - \frac{\lambda}{4} \varphi^4 + \frac{\mu^4}{4\lambda} \quad (9.17)$$

che con dell'algebra banale si semplifica nella seguente forma:

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) - \frac{\lambda}{4}(\varphi^2 - \varphi_0^2)^2} \quad (9.18)$$

Procediamo ora con l'espansione $\varphi(x) = \varphi_0 + \chi(x)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)(\partial^\mu \chi) - \frac{\lambda}{4}(\varphi_0^2 + \chi^2 + 2\varphi_0 \chi - \varphi_0^2)^2 = \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)(\partial^\mu \chi) - \frac{\lambda}{4}(\chi^4 + 4\varphi_0^2 \chi^2 + 4\varphi_0 \chi^3) = \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)(\partial^\mu \chi) - \lambda \varphi_0^2 \chi^2 - \lambda \varphi_0 \chi^3 - \frac{\lambda}{4} \chi^4\end{aligned}$$

Otteniamo quindi, sostituendo la forma esplicita di φ_0 , la Lagrangiana scalare nella cosiddetta "broken phase":

$$\boxed{\mathcal{L}_\chi \equiv \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)(\partial^\mu \chi) - \mu^2 \chi^2 - \sqrt{\lambda} \mu \chi^3 - \frac{\lambda}{4} \chi^4} \quad (9.19)$$

Notiamo quindi due cose:

- \mathcal{L}_χ descrive una teoria di campo per un campo massivo scalare χ , in cui sono presenti anche le auto-interazioni di terzo e quart'ordine.
Tutte le possibili eccitazioni sono massive e questo non va in contraddizione con il teorema di Goldstone, in quanto la simmetria globale da cui siamo partiti non è continua!
 χ può essere quantizzato canonicamente introducendo operatori di creazione e distruzione. E di conseguenza non contribuirà al calcolo del VEV del campo φ , che quindi sarà semplicemente φ_0 , i.e.:

$$\langle 0 | \varphi(x) | 0 \rangle = \varphi_0$$

φ_0 rappresenta quindi il parametro d'ordine che "misura" la rottura spontanea della simmetria.

- \mathcal{L}_χ non è invariante sotto \mathbb{Z}_2 , in quanto presenta un termine cubico in χ , ma ce lo aspettavamo essendo lo stesso vuoto a non essere invariante sotto tale simmetria.
Il residuo della simmetria $\varphi \rightarrow -\varphi$ nella Lagrangiana \mathcal{L}_χ risiede nella relazione tra la massa di χ ed i coefficienti dei termini di interazione, detti couplings. Questo avviene in generale, come nel caso del modello standard con il bosone di Higgs ed i suoi coupling (spoiler).

Siccome una qualunque Lagrangiana con termini di interazione fino al quartico si può scrivere come:

$$\mathcal{L}_\chi \equiv \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)(\partial^\mu \chi) - \frac{m_\chi^2}{2} \chi^2 - \alpha \chi^3 - \frac{\beta}{4} \chi^4 \quad (9.20)$$

con m_χ , α e β arbitrari.

In presenza di SSB troviamo quindi la seguente relazione tra la massa di χ ed i coupling di interazione:

$$m_\chi^2 = 2\mu^2, \quad \alpha = \sqrt{\lambda} \mu, \quad \beta = \lambda \quad (9.21)$$

SSB della simmetria U(1)

Consideriamo ora il caso di un campo scalare complesso $\varphi \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2)$ descritto dalla Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \varphi^*)(\partial^\mu \varphi) - m^2 \varphi^* \varphi - \lambda(\varphi^* \varphi)^2 - C \quad (9.22)$$

dove C è una costante arbitraria che serve a dare un offset al potenziale, allo scopo di rinormalizzare il punto zero dell'energia.

Eventualmente, possiamo riscrivere questa Lagrangiana esplicitando le componenti reali del campo φ , i.e.:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (\partial_\mu \varphi_i)(\partial^\mu \varphi_i) - \frac{m^2}{2} \sum_{i=1}^2 \varphi_i^2 - \frac{\lambda}{4} \left(\sum_{i=1}^2 \varphi_i^2 \right)^2$$

È evidente il fatto che la (9.22) possiede una simmetria globale $U(1)$, i.e. $\varphi'(x) = e^{i\alpha} \varphi(x)$, mentre in termini delle componenti $\varphi_{1,2}$ la simmetria è di tipo $SO(2)$, i.e. una rotazione 2D nello spazio reale dei campi.

Come nel caso precedente, consideriamo l'energia del campo :

$$H = \int d^3 \vec{x} \left[(\partial_t \varphi^*)(\partial_t \varphi) + (\partial_i \varphi^*)(\partial^i \varphi) + V(\varphi, \varphi^*) \right]$$

$$V(\varphi, \varphi^*) = m^2 \varphi^* \varphi + \lambda(\varphi^* \varphi)^2 + C$$

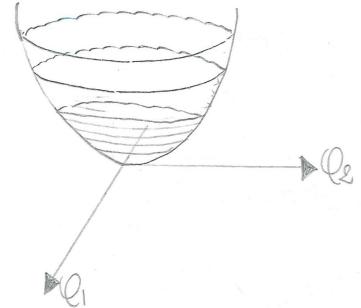
- Quando $m^2 \geq 0$ la situazione è noiosa, il potenziale ha la struttura riportata a lato, con minimo in $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ e la simmetria non è rottta.
- Il caso interessante è nuovamente quello in cui $m^2 = -\mu^2 < 0$, con $\mu^2 > 0$. Se andiamo a minimizzare il potenziale, innanzitutto notiamo che questo dipende dal solo modulo $|\varphi|$, i.e.:

$$V(|\varphi|) = -\mu^2 |\varphi| + \lambda(|\varphi|)^2 + C$$

Non è a questo punto difficile convincersi del fatto che:

$$\frac{\partial V}{\partial |\varphi|} = 0 \Rightarrow |\bar{\varphi}|^2 = \frac{\mu^2}{2\lambda}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial |\varphi|^2} \Big|_{|\bar{\varphi}|^2} = 4\mu^2 > 0 \Rightarrow \bar{\varphi} \text{ è minimo}$$



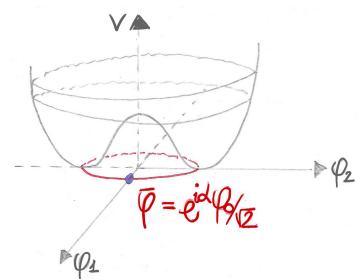
Abbiamo quindi un insieme di minimi degeneri, tutti legati tra loro da una trasformazione di $U(1)$, i.e.

$$\bar{\varphi} = e^{i\alpha} \frac{\varphi_0}{\sqrt{2}}, \quad \varphi_0 = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}$$

Sceglio quindi C in modo tale che il potenziale si azzeri nel minimo, e per determinare il valore necessario prendiamo:

$$V(|\bar{\varphi}| = \mu/\sqrt{\lambda}) = 0 \Rightarrow C = \frac{\mu^4}{4\lambda}$$

La situazione schematica nello spazio dei campi reali è quindi quella riportata al lato: un insieme di minimi degeneri identificati dal cerchio rosso. Il sistema sceglie spontaneamente uno di questi minimi come stato di vuoto: abbiamo una rottura spontanea di simmetria!



Mettiamoci quindi nella situazione di SSB e facciamo noi la scelta al posto del sistema. Consideriamo per esempio

$$\bar{\varphi}_1 \equiv \varphi_0, \bar{\varphi}_2 = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{\varphi} = \frac{\varphi_0}{\sqrt{2}}}$$

Espandiamo a questo punto intorno a questo vuoto, definendo i **campi shiftati**:

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi_1(x) &\equiv \varphi_0 + \chi(x) \\ \varphi_2(x) &\equiv \theta(x)\end{aligned}} \quad (9.23)$$

Da cui ricaviamo il **parametro d'ordine** $\langle 0 | \varphi_1 | 0 \rangle = \varphi_0 \neq 0$.

Andiamo quindi a riscrivere la Lagrangiana in termini di $\chi(x)$ e $\theta(x)$:

■ Termini cinetici

Questa è la parte facile, φ_0 è costante, quindi si tratta semplicemente di sostituire (partendo dalla Lagrangiana espressa nelle componenti reali) φ_1 e φ_2 con χ e θ rispettivamente. Otteniamo quindi:

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)(\partial^\mu \chi) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \theta)(\partial^\mu \theta) \quad (9.24)$$

■ Potenziale

Qui la questione è un po' più noiosa, bisogna farsi i conti [Lez. 35 pag 37], ma la sostanza è che gli ordini 0 e 1 (lineare) in entrambi campi si annullano, così come l'ordine 2 (quadratico) nel campo θ .

Sopravvivono quindi solo l'ordine quadratico in χ e le interazioni cubiche e quartiche:

$$V(\chi, \theta) = \mu^2 \chi^2 + \frac{\lambda}{4} (\chi^4 + \theta^4 + 4\chi^3 \varphi_0 + 2\chi^2 \theta^2) \quad (9.25)$$

Troviamo quindi in definitiva la densità di Lagrangiana nella broken phase ($\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{kin}} - V$) che cercavamo, composta da una parte quadratica (i primi tre termini) e dalle interazioni (la parte proporzionale a $\lambda/4$), i.e.:

$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{L}_{BP} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)(\partial^\mu \chi) - \mu^2 \chi^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \theta)(\partial^\mu \theta) \\ &\quad - \frac{\lambda}{4} (\chi^4 + \theta^4 + 4\chi^3 \varphi_0 + 2\chi^2 \theta^2)\end{aligned}} \quad (9.26)$$

Ci accorgiamo immediatamente del fatto che **il campo χ è un campo massivo**, con massa $m_\chi = \sqrt{2}\mu^1$, mentre il campo θ è massless, i.e.: $\theta(x)$ è **il campo di Goldstone!**

Esercizio 9.4.1 Proviamo a connettere quanto appena visto con la dimostrazione formale del teorema di Goldstone. Innanzitutto discutiamo la proposizione 9.3.1, che ci dice che per almeno una “A” ed una “m”, deve valere:

$$\langle 0 | [Q_A, O_m(x)] | 0 \rangle \neq 0 = -(T^A)_{mn} \langle 0 | O_n(x) | 0 \rangle \quad (9.27)$$

dove l'espressione esplicita in termini di T^A è stata ricavata nella rispettiva dimostrazione.

¹ Per quanto segue dalla (9.20).

- Consideriamo la Lagrangiana nella base dei campi reali $\varphi_{1,2}$, i.e.:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (\partial_\mu \varphi_i)(\partial^\mu \varphi_i) - \frac{m^2}{2} \sum_{i=1}^2 \varphi_i^2 - \frac{\lambda}{2} \left(\sum_{i=1}^2 \varphi_i^2 \right)^2$$

Abbiamo già sottolineato che in questo caso la simmetria globale è realizzata dalle rotazioni di SO(2), con il vettore $\vec{\varphi} \equiv \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$ che trasforma secondo la rappresentazione fondamentale, vale a dire:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{SO}(2)} R(\phi) \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = e^{-i\phi T} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \simeq (\mathbb{1} - i\phi T) \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

Essendo il generatore della simmetria esprimibile con la matrice $T \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, la trasformazione esplicita assume la forma:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{SO}(2)} \begin{pmatrix} \varphi_1 - \phi \varphi_2 \\ \varphi_2 + \phi \varphi_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \delta \varphi_1 \equiv -\phi \varphi_2 \\ \delta \varphi_2 \equiv \phi \varphi_1 \end{cases}$$

- Possiamo quindi ricavare la corrente di Noether j^μ :

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_1)} \frac{\delta \varphi_1}{\delta \phi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_2)} \frac{\delta \varphi_2}{\delta \phi} = (\partial^\mu \varphi_1)(-\varphi_2) + (\partial^\mu \varphi_2)\varphi_1$$

A questa corrente corrisponde una carica conservata, l'integrale spaziale della componente temporale di j^μ . Le riportiamo insieme:

$$\begin{aligned} j^\mu(x) &\equiv (\partial^\mu \varphi_2(x))\varphi_1(x) - (\partial^\mu \varphi_1(x))\varphi_2(x) \\ Q &\equiv \int d^3 \vec{x} [(\partial_t \varphi_2)\varphi_1 - (\partial_t \varphi_1)\varphi_2] \end{aligned} \tag{9.28}$$

- Calcoliamo ora esplicitamente il commutatore $[Q_A, O_m]$, nel caso di una singola carica conservata e con $O_m = \vec{\varphi}$. Con riferimento alla (9.27), e conoscendo la struttura del generatore T , troviamo:

$$[Q, \vec{\varphi}] = - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -i\varphi_2 \\ i\varphi_1 \end{pmatrix}$$

ovvero:

$$[Q, \vec{\varphi}_1] = i\varphi_2, \quad [Q, \vec{\varphi}_2] = -i\varphi_1 \tag{9.29}$$

- In presenza di rottura spontanea di simmetria, il parametro d'ordine $\langle 0 | \varphi_1 | 0 \rangle = \varphi_0 \neq 0$, ma allora dalla (9.29):

$$\langle 0 | [Q, \vec{\varphi}_2] | 0 \rangle = -i\langle 0 | \varphi_1 | 0 \rangle = -i\varphi_0 \neq 0$$

Ecco la proposizione "al lavoro": quando il parametro d'ordine della teoria, φ_0 , è diverso da zero, anche il VEV del commutatore $[Q, \vec{\varphi}_2]$ è diverso da zero, e questo è esattamente l'oggetto che entra nella dimostrazione del teorema di Goldstone da noi

delineata in precedenza.

Per completezza verifichiamo anche la validità della condizione finale ricavata nella dimostrazione del teorema, ovvero l'equazione (9.14):

$$\rho_{A,n}(\mu^2) = -\delta(\mu^2)(T^A)_{nm}\langle 0|O_m(x)|0\rangle$$

che nel nostro caso diventa:

$$\boxed{\rho_2(\mu^2) = -\delta(\mu^2)i\varphi_0} \quad (9.30)$$

Allo stesso modo possiamo riscrivere la struttura di ρ^μ , partendo dalla (9.15), ottenendo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^3}\rho_{A,n}^\mu(p) &= \frac{1}{(2\pi)^3}p^\mu(-i\varphi_0)\delta(p^2)\Theta(p^0) = \\ &= \sum_N \langle 0|j^\mu(0)|N\rangle\langle N|\varphi_2(0)|0\rangle\delta^{(4)}(p-p_N) \end{aligned} \quad (9.31)$$

Ricordiamo ora il fatto che \sum_N è una somma "generalizzata", quindi include anche un integrale sullo spazio dell'impulso. Questo, combinato con il fatto che dalla somma abbiamo solo il contributo di una particella (connessa al campo φ_2), restituisce la seguente espressione per il RHS:

$$\text{RHS} = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2k^0} \langle 0|j^\mu(0)|\vec{k}\rangle\langle\vec{k}|\varphi_2(0)|0\rangle\delta(p-k)$$

con $k^0 = |\vec{k}|$ in quanto lo stato $|N\rangle$ deve rappresentare una particella massless.

Possiamo quindi svolgere il calcolo esplicito, introducendo i campi shiftati (9.23). Piuttosto banalmente si trova per la corrente:

$$j^\mu \equiv (\partial^\mu\theta)\varphi_0 + [\chi(\partial^\mu\theta) - (\partial^\mu\chi)\theta]$$

Lavoriamo ora sull'integrandi $\langle 0|j^\mu(0)|k\rangle\langle k|\varphi_2(0)|0\rangle$, in particolare notando il fatto che, essendo necessariamente il termine relativo a φ_2 non nullo, lo stato $|k\rangle$ deve essere creato dal vuoto da θ . Questo comporta quindi che nel bra-ket relativo alla corrente, solo il termine $(\partial^\mu\theta)\varphi_0$ contribuisce! In formule:

$$\langle 0|j^\mu(0)|k\rangle\langle k|\varphi_2(0)|0\rangle = \langle 0|(\partial^\mu\theta)\varphi_0|\vec{k}\rangle\langle\vec{k}|\theta(0)|0\rangle$$

A questo punto scriviamo $\theta(x)$ in funzione degli operatori di creazione e distruzione:

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2p^0}} \left(a(\vec{p})e^{-ip\cdot x} + a^\dagger(\vec{p})e^{ip\cdot x} \right) \\ [a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{k})] &= (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{k}) \\ |\vec{p}\rangle &= \sqrt{2E_p} a^\dagger(\vec{p})|0\rangle \end{aligned}$$

Abbiamo quindi:

$$\begin{aligned}\langle \vec{k} | \theta(x) | 0 \rangle &= \sqrt{2E_k} \langle 0 | a(\vec{k}) \theta(x) | 0 \rangle = \\ &= \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2p^0}} (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{k}) \sqrt{2E_k} e^{ip \cdot x} \\ &= e^{ik \cdot x}\end{aligned}$$

Ma allora: $\langle k | \theta(0) | 0 \rangle = 1$!

D'altro canto l'azione di ∂^μ su $\theta(x)$ porta giù un fattore $(\pm ip^\mu)$ dall'esponentiale, quindi senza troppa difficoltà possiamo scoprire che:

$$\langle 0 | (\partial^\mu \theta(x)) \varphi_0 | \vec{k} \rangle = (-ik^\mu) \varphi_0 e^{-ik \cdot x}$$

Ergo $\langle 0 | (\partial^\mu \theta(0)) \varphi_0 | \vec{k} \rangle = (-i\varphi_0)k^\mu$!

Se ora torniamo al RHS da cui siamo partiti, sostituendo quanto appena appreso, separiamo la delta di Dirac ed integriamo su \vec{k} , otteniamo:

$$\begin{aligned}\text{RHS} &= \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 2k^0} (-i\varphi_0) k^\mu \delta^{(1)}(p^0 - |\vec{k}|) \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{k}) = \\ &= \frac{(-i\varphi_0)p^\mu}{(2\pi)^3 2p^0} \delta^{(1)}(p^0 - |\vec{p}|)\end{aligned}$$

Abbiamo sostanzialmente finito, ci basta ricordare l'identità:

$$\delta(p^2) = \delta((p^0)^2 - |\vec{p}|^2) = \frac{1}{2p^0} \delta(p^0 - |\vec{p}|) + \frac{1}{2p^0} \delta(p^0 + |\vec{p}|)$$

da cui estraiamo il primo termine moltiplicandola per una theta di Heaviside, i.e. $\delta(p^2)\Theta(p^0) = \frac{1}{2p^0}\delta(p^0 - |\vec{p}|)$.

Troviamo quindi in definitiva:

$$\boxed{\text{RHS} = \frac{1}{(2\pi)^3} (-i\varphi_0) p^\mu \delta(p^2) \Theta(p^0)} \quad (9.32)$$

perfettamente in accordo con il LHS della (9.31)

9.5 Realizzazione non Lineare della SSB di U(1)

Discutiamo ora una differente parametrizzazione, in grado di rendere più evidente la fisica dietro il teorema di Goldstone.

Consideriamo nuovamente la teoria descritta dalla (9.22), invariante sotto U(1):

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \varphi^*)(\partial^\mu \varphi) + \mu^2 \varphi^* \varphi - \lambda (\varphi^* \varphi)^2 - \frac{\mu^4}{4\lambda}$$

Consideriamo nuovamente come vuoto:

$$\langle 0 | \varphi(x) | 0 \rangle = \frac{\varphi_0}{\sqrt{2}}$$

ma questa volta invece di adottare una parametrizzazione cartesiana per i campi shiftati, che produrrebbe

$$\varphi(x) = \frac{\varphi_0}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} [\chi(x) + i\theta(x)]$$

utilizziamo una decomposizione polare, scrivendo

$$\boxed{\varphi(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_0 + \sigma(x)] \exp\left[\frac{i\pi(x)}{f_\pi}\right]} \quad (9.33)$$

dove $\sigma(x)$ e $\pi(x)$ sono campi scalari reali, denominati rispettivamente campo "radiale" ed "angolare".

" f_π ", invece, è un parametro la cui dimensione di massa rende l'argomento dell'esponenziale adimensionale.

Andiamo quindi ad analizzare la Lagrangiana nella broken phase in questa particolare parametrizzazione:

◆ Termine cinetico

Con le giuste accortezze, partendo dal termine $(\partial_\mu \varphi^*)(\partial^\mu \varphi)$, si arriva a

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)(\partial^\mu \sigma) + \frac{\varphi_0^2}{2f_\pi^2}(\partial_\mu \pi)(\partial^\mu \pi) + \frac{1}{2f_\pi^2}(2\varphi_0 \sigma + \sigma^2)(\partial_\mu \pi)(\partial^\mu \pi) \quad (9.34)$$

Se poi fissiamo $f_\pi = \varphi_0$ otteniamo il termine cinetico di π canonicamente normalizzato.

◆ Termine di potenziale

Per quanto riguarda il potenziale si tratta di svolgere della noiosa algebra, durante la quale bisogna ricordare che $\varphi_0^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}$. Alla fine dei conti si ottiene:

$$V(\sigma, \pi) = \mu^2 \sigma^2 + \lambda \varphi_0 \sigma^3 + \frac{\lambda}{4} \sigma^4 \quad (9.35)$$

Raccogliendo quanto appena appreso, possiamo scrivere la Lagrangiana totale nella broken phase, $\mathcal{L}_{\text{kin}} - V$:

$$\boxed{\mathcal{L}_{BP} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)(\partial^\mu \sigma) - \mu^2 \sigma^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \pi)(\partial^\mu \pi) + \frac{1}{2\varphi_0^2}(2\varphi_0 \sigma + \sigma^2)(\partial_\mu \pi)(\partial^\mu \pi) - \lambda \varphi_0 \sigma^3 - \frac{\lambda}{4} \sigma^4} \quad (9.36)$$

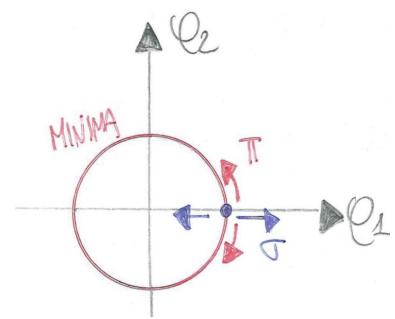
In questo caso il campo massivo è $\sigma(x)$, e presenta auto-interazioni cubiche e quartiche.

D'altro canto il campo di Goldstone è $\pi(x)$, essendo questo un campo massless.

Fin qui tutto come prima, ma ora possiamo dare due interpretazioni alla non-massività di π :

i) Interpretazione intuitiva dal punto di vista grafico.

$\pi(x)$ **descrive le fluttuazioni angolari**, lungo questa direzione (ovvero la direzione parallela al piano, intuibile dalla figura a lato in cui il potenziale è visto dall'alto), detta "direzione flat" non c'è alcun



Potenziale visto "da sopra".

pontenziale, in quanto ci stiamo muovendo sulla circonferenza dei minimi del potenziale, che abbiamo off-settato a zero. Dall'assenza di potenziale segue la non-massività.

D'altro canto $\sigma(x)$ **descrive le fluttuazioni radiali** e lungo questa direzione c'è potenziale, come si intuisce dalla figura in cui è rappresentato il potenziale visto in sezione. Questo fornisce quindi a σ un termine di massa!

ii) Interpretazione in termini di realizzazione non lineare della simmetria.

Torniamo alla Lagrangiana nella broken phase (9.36). Questa possiede una simmetria detta "simmetria di shift", ovvero è invariante sotto una trasformazione che produca uno shift dei campi di un termine costante, e.g. $\pi(x) \rightarrow \pi(x) + \text{cost.}$, la verifica è piuttosto ovvia, in quanto $\pi(x)$ figura nella Lagrangiana solo sotto derivata. Trasformazioni di questo tipo corrispondono precisamente ad un movimento nella direzione flat.

Inoltre, se torniamo alla definizione (9.33), notiamo come ad uno shift di $\pi(x)$ corrisponda una rotazione di $\varphi(x)$ per mezzo di una fase. Questo significa che la **simmetria originale** $\varphi \rightarrow e^{i\alpha} \varphi$ è ancora presente nella broken phase ma si realizza in maniera non lineare, sotto forma della simmetria di shift del campo di Goldstone. Inoltre è precisamente questa simmetria di shift impedisce la presenza del termine di massa per il campo di Goldstone!²

In sintesi, la differenza tra la broken e l'unbroken phase della Lagrangiana corrisponde ad una differente realizzazione della simmetria:

► Unbroken Phase.

- Simmetria realizzata linearmente rispetto ai campi dinamici: $\varphi(x) \rightarrow e^{i\alpha} \varphi(x)$;
- Vuoto unico;
- Simmetria realizzata sullo spettro della teoria:

$$\begin{aligned} Q|0\rangle &= |0\rangle, & |M, \vec{p}\rangle \otimes |q\rangle &= |M, \vec{p}, q\rangle \\ Q|q\rangle &= |q\rangle \end{aligned}$$

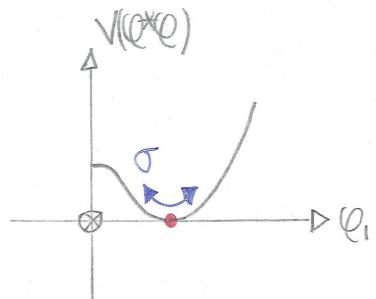
► Broken Phase.

- Simmetria realizzata non linearmente rispetto ai campi dinamici: $\pi(x) \rightarrow \pi(x) + c$
- Insieme di vuoti degeneri;
- Simmetria non realizzata sullo spettro della teoria e mostra la presenza di campi massless.

L'utilizzo della rappresentazione polare rende evidente un'altra importante proprietà dei bosoni di Goldstone:

Teorema 9.5.1 L'ampiezza di scattering di un processo che coinvolge bosoni di Goldstone "soft" (di basso impulso p^μ) tende a zero ad ordine $\mathcal{O}(p)$ quando $p^\mu \rightarrow 0$.

Nel caso dei molteplici bosoni di Goldstone nel processo, l'ampiezza di scattering si annulla quando **uno qualunque** degli impulsi di questi bosoni tende a zero.



Potenziale visto in sezione, con l'asse di φ_2 uscente dal foglio/schermo.

² Perché, come abbiamo notato precedentemente, alla simmetria di shift corrisponde uno spostamento sulla circonferenza dei minimi, con potenziale nullo.

Il motivo per cui questo risultato è particolarmente ovvio in rappresentazione polare risiede ancora una volta nell'invarianza sotto simmetria di shift, gli unici coupling possibili coinvolgono le derivate dei campi di Goldstone e queste sono proporzionali a p^μ !

Per fornire un esempio esplicito: $\frac{1}{2\varphi_0^2}(2\varphi_0\sigma + \sigma^2)(\partial_\mu\pi)(\partial^\mu\pi)$ è un coupling $\pi\pi\sigma + \pi\pi\sigma\sigma$ che coinvolge le derivate di π ed è detto di tipo derivativo.

Esercizio 9.5.1 Derivare le regole di Feynman associate al termine:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \frac{1}{2\varphi_0^2}(2\varphi_0\sigma + \sigma^2)(\partial_\mu\pi)(\partial^\mu\pi)$$

[Conti svolti Lez. 35 p. 52÷54]

Rottura Parziale di Simmetria

Abbiamo visto come la rottura spontanea della simmetria globale U(1) risulti in un campo massless di Goldstone che, con la giusta parametrizzazione, produce solo coupling di tipo derivativo.

Discutiamo ora una possibile generalizzazione e facciamolo considerando una teoria scalare la cui Lagrangiana può essere scritta come segue:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\vec{\varphi})(\partial^\mu\vec{\varphi}) - V(\vec{\varphi}) \quad (9.37)$$

dove $\vec{\varphi}$ è un qualche multipletto di campi scalari.

Una teoria di questo tipo sarà invariante sotto l'azione di un qualche gruppo di simmetria G , che nel caso infinitesimo si può scrivere:

$$\begin{aligned} \varphi_A &\rightarrow \varphi_A - i\varepsilon_a(T^a)_{AB}\varphi_B \\ \delta\varphi_A &= -i\varepsilon_a(T^a)_{AB}\varphi_B \end{aligned} \quad , \quad a = 1, \dots, \dim G \quad (9.38)$$

Chiaramente l'energia sarà minimizzata per una qualche configurazione di campo $\vec{\varphi}_0$, omogenea nello spazio e nel tempo in modo da minimizzare sia il termine cinetico che il potenziale, i.e. simbolicamente:

$$\frac{\partial V}{\partial\vec{\varphi}_i}(\vec{\varphi}_0) = 0$$

sottintendendo la condizione di minimo dettata dalla derivata seconda che sarà definita positiva.

Possiamo a questo punto espandere attorno al minimo per mezzo di uno shift di campo $\vec{\varphi}(x) = \vec{\varphi}_0 + \vec{\chi}(x)$, da cui ricaviamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\vec{\chi})(\partial^\mu\vec{\chi}) - V(\vec{\varphi}_0 + \vec{\chi}(x)) = \\ &\approx \frac{1}{2}(\partial_\mu\vec{\chi})(\partial^\mu\vec{\chi}) - V(\vec{\varphi}_0) - \cancel{\frac{\partial V}{\partial\vec{\varphi}_i}(\vec{\varphi}_0)\chi_i} - \frac{\partial^2 V}{\partial\vec{\varphi}_i\partial\vec{\varphi}_j}(\vec{\varphi}_0)\chi_i\chi_j + \dots \end{aligned}$$

Il termine proporzionale alla derivata prima di V si annulla data la nostra definizione di minimo, il ci porta dunque alla seguente forma della

Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{\chi})(\partial^\mu \vec{\chi}) - V(\varphi_0) - \frac{\partial^2 V}{\partial \vec{\varphi}_i \partial \vec{\varphi}_j}(\vec{\varphi}_0)\chi_i \chi_j + \dots \quad (9.39)$$

In particolare a noi interessa il termine quadratico in $\vec{\chi}$, in quanto il suo coefficiente ne determina lo spettro di massa. Notiamo tuttavia che, essendo tale coefficiente la derivata seconda del potenziale, per costruzione questo sarà definito positivo, i.e. gli autovalori sono tutti positivi. Non male, in quanto significa che non abbiamo tachioni nella teoria.

Ragioniamo ora sulla rottura di simmetria. In generale possiamo dire che non è detto che tutti i generatori di G siano rotti, vediamolo con un esempio semplice.

Esempio 9.5.1 Consideriamo la teoria descritta dalla seguente densità di Lagrangiana:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \sum_{a=1}^3 (\partial_\mu \varphi_a)(\partial^\mu \varphi_a) - V(\vec{\varphi}) \\ V(\vec{\varphi}) &= -\frac{\mu^2}{2} \sum_{a=1}^3 \varphi_a^2 + \frac{\lambda}{4} \left(\sum_{a=1}^3 \varphi_a^2 \right)^2 \end{aligned}$$

dove $\mu^2 > 0$ ($m^2 = -\mu^2$) e $\lambda > 0$.

La teoria ha una simmetria globale sotto le rotazioni di $SO(3)$.

Minimizziamo quindi il potenziale e per semplificarcici la vita possiamo notare che questo è funzione di $X = \sum_{a=1}^3 \varphi_a^2$. Troviamo quindi:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dX} &= -\frac{\mu^2}{2} + \frac{\lambda}{2} X \stackrel{!}{=} 0 \\ \frac{d^2V}{dX^2} &= \frac{\lambda}{2} > 0 \end{aligned}$$

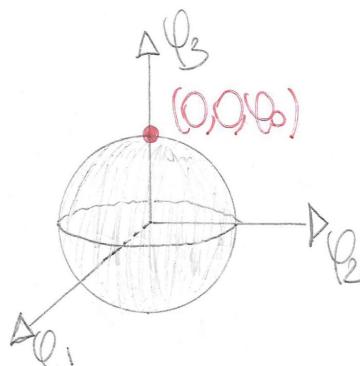
da cui segue che il potenziale ha un minimo in

$$X = \sum_{a=1}^3 \varphi_a^2 = \boxed{\varphi_0^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}}$$

L'equazione $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = \varphi_0^2$ descrive l'insieme dei possibili stati fondamentali, che geometricamente corrisponde alla 2-sfera (la superficie) di raggio φ_0 , rappresentata a lato.

Abbiamo quindi nuovamente la solita degenerazione degli stati fondamentali, tutti tra loro connessi da trasformazioni di $SO(3)$. Ne sceglieremo uno, ad esempio il polo nord $\vec{\varphi}_0 = (0, 0, \varphi_0)$, e questa specifica scelta rompe la simmetria originale!

Tuttavia c'è un sottogruppo non banale di $SO(3)$ sotto il quale il vuoto risulta ancora invariante (una sorta di gruppo piccolo) e tale sottogruppo è ovviamente $SO(2)$, il gruppo delle rotazioni (nello spazio dei campi) attorno ad un asse specifico, in questo caso particolare $\hat{\varphi}_3$.



Se indichiamo quindi con $T^{1,2,3}$ i generatori di $\text{SO}(3)$, siamo nella situazione in cui T^1 e T^2 sono rotti, mentre T^3 non lo è, in quanto genera la simmetria residua di $\text{SO}(2)$!

Torniamo al caso generale, denominiamo con T^a i generatori del gruppo G (al solito $a = 1, \dots, \dim G$) e separiamoli in Y^a , quelli che annichiliscono il vuoto e non sono rotti, ed in X^a , quelli che non lo annichiliscono, i.e. i generatori rotti. In formule:

$$Y^a \vec{\varphi}_0 = \vec{0}, \quad X^a \vec{\varphi}_0 \neq \vec{0}$$

I generatori non rotti, gli Y^a , formano una sottoalgebra e, di conseguenza, gli elementi generati dalla mappa esponenziale $\exp(i\alpha_a Y^a)$ formano un sottogruppo di G , solitamente denominato “ H ”. Diciamo in generale che **la simmetria è rotta spontaneamente da G ad H** .

Procediamo ora come segue:

- Il potenziale è invariante sotto la simmetria globale $\text{SO}(3)$, quindi la sua variazione infinitesima sarà nulla e possiamo scriverla nel modo seguente:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta V(\vec{\varphi}) = V(\vec{\varphi} + \delta\vec{\varphi}) - V(\vec{\varphi}) \\ &= \cancel{V(\vec{\varphi})} + \frac{\partial V}{\partial \varphi_A} \delta\varphi_A - \cancel{V(\vec{\varphi})} \\ &\stackrel{(9.38)}{=} \frac{\partial V}{\partial \varphi_A} (-i)\varepsilon_a (T^a)_{AB} \varphi_B \end{aligned}$$

Troviamo quindi:

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi_A} \varepsilon_a (T^a)_{AB} \varphi_B = 0$$

- Differenziamo ora rispetto a φ_C ed eliminiamo ε_a , che è arbitrario, da cui segue:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_A \partial \varphi_C} (T^a)_{AB} \varphi_B + \frac{\partial V}{\partial \varphi_A} (T^a)_{AB} \delta_{BC} = 0$$

- Possiamo ora valutare l'ultima espressione nella configurazione di vuoto $\vec{\varphi}_0$, che per definizione annulla la derivata del potenziale! Arriviamo quindi all'equazione:

$$\boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_A \partial \varphi_C} (\vec{\varphi}_0)(T^a \vec{\varphi}_0)_A = 0} \quad (9.40)$$

dove figura esattamente la matrice di massa, al quadrato, dei campi fisici che abbiamo discusso prima.

Ragioniamo ora sull'equazione (9.40) che abbiamo appena ricavato:

- L'equazione è banalmente soddisfatta nel caso dei generatori non rotti Y^a , in quanto la loro azione sulla configurazione di vuoto annulla il tutto.
- Nel caso dei generatori rotti, tuttavia, la situazione si fa interessante (ed avrete probabilmente già capito dove stiamo andando a parere), in quanto per loro definizione $(X^a \vec{\varphi}_0)_A \neq 0$. Ciò nonostante l'equazione (9.40) richiede che alla fine dei conti si ottenga zero.

L'unica soluzione è che $X^a \vec{\phi}_0$ sia autovettore per la matrice di massa al quadrato, con autovalore nullo!

Ma allora abbiamo a che fare con un bosone di Goldstone, in quanto la sua massa è nulla. Siccome possiamo poi ripetere lo stesso argomento per ogni X^a , possiamo concludere che **avremo un bosone di Goldstone per ogni generatore rotto.**

Esercizio 9.5.2 Mostrare che i generatori non rotti formano una sottalgebra. [Conti svolti Lez. 36 p. 62]

9.6 $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ Sigma Model e Simmetria Chirale

L'idea è a questo punto di arrivare al caso non abeliano, a tale scopo studiamo la seguente Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = i\bar{q}\gamma^\mu\partial_\mu q \quad (9.41)$$

dove $q \equiv \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ è un doppietto di campi di Dirac (ogni campo ha 4 componenti, due sono destre e due sono sinistre).

Qual è il gruppo di simmetria globale di questa Lagrangiana? In primo luogo saremmo portati a dire $SU(2)$, sotto il quale q trasforma come un doppietto e che coinvolge operatori unitari (condizione necessaria per far passare l'operatore attraverso la derivata). Questo è certamente corretto, ma c'è di più.

Prima di tutto, non abbiamo alcun motivo di restringerci al caso "speciale" del gruppo unitario, ed essendo $\dim U(2) = 4 > \dim SU(2) = 3^3$, il gruppo $U(2)$ identifica un gruppo di simmetria globale più grande per la nostra Lagrangiana. Ricordiamo inoltre la valenza della relazione $U(2) = U(1) \times SU(2)$.

Con alcune accortezze, possiamo tuttavia scoprire informazioni ancora più interessanti.

I Proiettori Chirali

Introduciamo i seguenti oggetti, detti proiettori chirali:

$$P_L \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma^5), \quad P_R \equiv \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) \quad (9.42)$$

Nella rappresentazione di Weyl, ricordando che $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, abbiamo:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.43)$$

³ Ricordiamo che $\dim U(N) = N^2$, mentre $\dim SU(N) = N^2 - 1$

Quindi i proiettori chirali assumono la forma esplicita:

$$\boxed{P_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad (9.44)$$

Considerando la loro applicazione su un campo di Dirac $\Psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}$, ovviamente troveremo:

$$P_L \Psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \Psi_L, \quad P_R \Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix} \equiv \Psi_R$$

Riprendiamo quindi la nostra trattazione in termini del doppietto q e definiamo il doppietto destro ed il doppietto sinistro:

$$\begin{aligned} q_L &\equiv P_L q = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \mathbb{1}_{2 \times 2} q = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \\ q_R &\equiv P_R q = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) \mathbb{1}_{2 \times 2} q = \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9.45)$$

Ricordando la proprietà elementare delle matrici γ , $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$ per ogni μ , si verifica immediatamente che:

$$\boxed{\gamma^\mu P_L = P_R \gamma^\mu, \quad \gamma^\mu P_R = P_L \gamma^\mu} \quad (9.46)$$

così come anche $q_L + q_R = (P_L + P_R)q = q$.

La Lagrangiana Chirale

Raccogliendo quanto appena appreso, possiamo riscrivere la Lagrangiana iniziale, separandola nelle componenti destre e sinistre del doppietto, di cui sopravvivono solo i due termini completamente destri o sinistri, quelli misti si annullano per una combinazione delle proprietà enunciate poc'anzi.

In definitiva la Lagrangiana chirale assume la forma:

$$\boxed{\mathcal{L} = i\bar{q}_L \gamma^\mu \partial_\mu q_L + i\bar{q}_R \gamma^\mu \partial_\mu q_R} \quad (9.47)$$

Esercizio 9.6.1 Verificare che il termine $\bar{q}_L \gamma^\mu \partial_\mu q_R$ si annulla. [Conti svolti Lez.36 p.65]

Il fatto che nella (9.47) non sia presente alcun termine di massa equivale a dire che i settori destri e sinistri sono completamente disaccoppiati. Questo ci consente quindi di definire due copie di U(2), una che lascia invariato q_L e l'altra che lascia invariato q_R , i.e.:

$$\begin{array}{c|c} \textbf{U(2)}_{\textbf{L}} = \textbf{U(1)}_{\textbf{L}} \times \textbf{SU(2)}_{\textbf{L}} & \textbf{U(2)}_{\textbf{R}} = \textbf{U(1)}_{\textbf{R}} \times \textbf{SU(2)}_{\textbf{R}} \\ \hline q_L \rightarrow e^{-i\theta_L} e^{-i\theta_L^a \sigma^a/2} q_L & q_L \rightarrow q_L \\ q_R \rightarrow q_R & q_R \rightarrow e^{-i\theta_R} e^{-i\theta_R^a \sigma^a/2} q_R \end{array}$$

Quindi l'effettivo gruppo di simmetria globale della Lagrangiana (9.47) corrisponde a $U(1)_L \times U(1)_R \times SU(2)_L \times SU(2)_R$, e da ciascuno dei gruppi che lo compongono possiamo ricavare le rispettive correnti di Noether. Non è difficile convincersi che questo siano:

$$\begin{aligned} U(1)_L &\rightarrow j_L^\mu = \bar{q}_L \gamma^\mu q_L \\ U(1)_R &\rightarrow j_R^\mu = \bar{q}_R \gamma^\mu q_R \\ SU(2)_L &\rightarrow j_L^{a,\mu} = \bar{q}_L \gamma^\mu \frac{\sigma^a}{2} q_L \\ SU(2)_R &\rightarrow j_R^{a,\mu} = \bar{q}_R \gamma^\mu \frac{\sigma^a}{2} q_R \end{aligned}$$

Simmetria Vettoriale ed Assiale

Invece di separare la Lagrangiana in componenti destre e sinistre, continuiamo a lavorare con $\mathcal{L} = i\bar{q}\gamma^\mu \partial_\mu q$ e cerchiamo di capire dove sia nascosto il gruppo di simmetria che abbiamo appena scoperto.

Non c'è dubbio sul fatto che questa Lagrangiana possiede una simmetria sotto il gruppo $U(2) \equiv U(2)_V$ dove V sta per **vettoriale** e dove con trasformazione "vettoriale" intendiamo una trasformazione del tipo $q \rightarrow e^{-i\theta_V} e^{-i\theta_V^a \sigma^a/2} q$.

Ovviamente a tale gruppo di simmetria corrispondono delle correnti di Noether, la cui struttura è la stessa di quelle che abbiamo già visto poco fa, a meno del pedice che in questo caso sarà V .

Esercizio 9.6.2 Mostrare che le cariche $Q_V = \int d^3x j_V^{a,0}(x)$ chiudono l'algebra di $SU(2)$. [Conti svolti Lez. 36 p. 67÷68]

Consideriamo ora una trasformazione leggermente differente, aggiungendo γ^5 negli esponenziali, i.e.:

$$\begin{aligned} q &\rightarrow e^{-i\theta_A \gamma^5} e^{-i\theta_A^a \frac{\sigma^a}{2} \gamma^5} q \\ \bar{q} &\rightarrow \bar{q} e^{-i\theta_A \gamma^5} e^{-i\theta_A^a \frac{\sigma^a}{2} \gamma^5} \end{aligned}$$

dove la legge di trasformazione per l'aggiunto di Dirac segue dalla prima per mezzo dell'anti-commutazione tra γ^5 e tutte le altre γ .

Si verifica che il gruppo a cui fa capo una tale trasformazione, $U(2)_A$, è un gruppo di simmetria per la nostra Lagrangiana. Questa simmetria è detta simmetria "**assiale**", da cui i pedici A , ed anche in questo caso avremo una corrente da $U(1)_A$ e tre correnti da $SU(2)_A$.

Riassumendo:

$$\begin{array}{l|l} \mathbf{U(2)_V = U(1)_V \times SU(2)_V} & \mathbf{U(2)_A = U(1)_A \times SU(2)_A} \\ \begin{array}{l} q \rightarrow e^{-i\theta_V} e^{-i\theta_V^a \sigma^a/2} q \\ U(1)_V \Rightarrow j_V^\mu = \bar{q} \gamma^\mu q \\ SU(2)_V \Rightarrow j_V^{a,\mu} = \bar{q} \gamma^\mu \sigma^a q \end{array} & \begin{array}{l} q \rightarrow e^{-i\theta_A \gamma^5} e^{-i\theta_A^a \frac{\sigma^a}{2} \gamma^5} q \\ U(1)_A \Rightarrow j_A^\mu = \bar{q} \gamma^\mu \gamma^5 q \\ SU(2)_A \Rightarrow j_A^{a,\mu} = \bar{q} \frac{\sigma^a}{2} \gamma^\mu \gamma^5 q \end{array} \end{array}$$

★Simmetria U(1) Vettoriale ed Assiale

A questo punto è utile riscrivere le trasformazioni di $U(1)_V$ ed $U(1)_A$ in termini della loro azione sulle componenti destre e sinistre:

- **Per la trasformazione vettoriale** abbiamo $q \rightarrow e^{-i\theta_V} q$.

Applicando i proiettori chirali otteniamo banalmente l'azione di $U(1)_V$ sulle componenti destre e sinistre, che risultano in definitiva ruotate dello stesso angolo, i.e.:

$$\boxed{U(1)_V : \begin{aligned} q_L &\rightarrow e^{-i\theta_V} q_L \\ q_R &\rightarrow e^{-i\theta_V} q_R \end{aligned}}$$

- **Per la trasformazione assiale**, d'altro canto, dobbiamo porre più attenzione. La trasformazione di base è $q \rightarrow e^{-i\theta_A \gamma^5} q$ e la presenza di γ^5 va tenuta in considerazione quando andiamo ad applicare i proiettori chirali.

Alla fine dei conti la sostanza è che per invertire l'ordine tra il proiettore sinistro e l'operatore di $U(1)_A$ bisogna eliminare la γ^5 e cambiare di segno all'esponente, mentre per fare la stessa cosa con il proiettore destro il segno non va cambiato. In formule:

$$\boxed{U(1)_A : \begin{aligned} q_L &\rightarrow e^{i\theta_A} q_L \\ q_R &\rightarrow e^{-i\theta_A} q_R \end{aligned}}$$

Ergo, sotto l'azione di $U(1)_A$, fermioni destri e sinistri vengono ruotati di fasi opposte.

Considerando allora l'azione combinata $U(1)_V \times U(1)_A$, nel caso in cui $\theta_A = \theta_V \equiv \theta_R/2$, siamo sostanzialmente di fronte all'azione del gruppo $U(1)_R$, infatti:

$$\boxed{\begin{aligned} U(1)_V \times U(1)_A &: q_L \rightarrow e^{-i\theta_R/2} e^{i\theta_R/2} q_L = q_L \\ \theta_A = \theta_V \equiv \theta_R/2 &: q_R \rightarrow e^{-i\theta_R/2} e^{-i\theta_R/2} q_R = e^{-i\theta_R} q_R \end{aligned}} \equiv U(1)_R$$

Considerando invece l'azione combinata $U(1)_V \times U(1)_A$, nel caso in cui $\theta_A = -\theta_V \equiv -\theta_L/2$, siamo di fronte all'azione del gruppo $U(1)_L$:

$$\boxed{\begin{aligned} U(1)_V \times U(1)_A &: q_L \rightarrow e^{-i\theta_L/2} e^{-i\theta_L/2} q_L = e^{-i\theta_L} q_L \\ \theta_A = -\theta_V \equiv -\theta_L/2 &: q_R \rightarrow e^{-i\theta_L/2} e^{i\theta_L/2} q_R = q_R \end{aligned}} \equiv U(1)_L$$

Questo significa che $U(1)_L \times U(1)_R \cong U(1)_V \times U(1)_A$ e la differenza sta nella differente scelta dei generatori.

Dal punto di vista delle cariche, abbiamo:

$$\begin{aligned} Q_V &\equiv \int d^3 \vec{x} \bar{q} \gamma^0 q & Q_A &\equiv \int d^3 \vec{x} \bar{q} \gamma^0 \gamma^5 q \\ Q_L &\equiv \int d^3 \vec{x} \bar{q}_L \gamma^0 q_L & Q_R &\equiv \int d^3 \vec{x} \bar{q}_R \gamma^0 q_R \end{aligned}$$

e si verifica quasi immediatamente, utilizzando le regole dei proiettori ed esplicitando la presenza di q nelle cariche L ed R , che:

$$Q_L + Q_R = Q_V \quad Q_R - Q_L = Q_A$$

Il cambio di base è quindi:

$$\begin{cases} Q_V = Q_L + Q_R \\ Q_A = Q_R - Q_L \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Q_R = (Q_A + Q_V)/2 \\ Q_L = (Q_V - Q_A)/2 \end{cases} \quad (9.48)$$

*Simmetria SU(2) Vettoriale ed Assiale

Per quanto riguarda le cariche derivanti da SU(2), si può verificare che queste, nel caso della simmetria assiale e vettoriale, rispettano le seguenti algebre:

$$\begin{aligned} [Q_A^a, Q_A^b] &= i\epsilon^{abc} Q_V^c \\ [Q_V^a, Q_V^b] &= i\epsilon^{abc} Q_V^c \\ [Q_V^a, Q_A^b] &= i\epsilon^{abc} Q_A^c \end{aligned} \quad (9.49)$$

Esercizio 9.6.3 Verificare la prima e l'ultima delle (9.49), la seconda è il risultato dell'esercizio 9.6.2. [Conti svolti Lez.36 p.72÷73]

Adottando quindi il cambiamento di base (9.48) scopriamo che l'algebra 6-dimensionale generata da Q_V^a e Q_A^a è equivalente all'algebra 6-dimensionale di $SU(2)_L \times SU(2)_R$, i.e.:

$$\begin{aligned} [Q_L^a, Q_L^b] &= i\epsilon^{abc} Q_L^c \\ [Q_R^a, Q_R^b] &= i\epsilon^{abc} Q_R^c \\ [Q_L^a, Q_R^b] &= 0 \end{aligned} \quad (9.50)$$

Esercizio 9.6.4 Scrivere l'azione delle trasformazioni vettoriali ed assiali, nel caso di SU(2), in termini dei campi destri e sinistri q_R e q_L . [Conti svolti Lez.36 p.75÷76]

Soluzione. La logica è analoga a quella usata per riscrivere l'azione combinata vettoriale-assiale, solo che in questo caso consideriamo le singole azioni in funzione dei parametri θ_V^a e θ_A^a .

Alla fine dei conti i risultati sono i seguenti:

SU(2)_V	SU(2)_A
$V(\vec{\theta}_V) \equiv \exp\left(-i\theta_V^a \frac{g^a}{2}\right)$	$A(\vec{\theta}_A) \equiv \exp\left(-i\theta_A^a \frac{g^a}{2}\right)$
$q_L \rightarrow V(\vec{\theta}_V) q_L$	$q_L \rightarrow A(\vec{\theta}_A)^\dagger q_L$
$q_R \rightarrow V(\vec{\theta}_V) q_R$	$q_R \rightarrow A(\vec{\theta}_A) q_R$

Da queste trasformazioni ci accorgiamo che un termine di massa del tipo $m\bar{q}q$ sarebbe compatibile con le trasformazioni vettoriali, ma non

con quelle assiali. È quindi proprio la simmetria assiale ad impedire la presenza del termine di massa!

$SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ Sigma Model

Partendo dalla semplice Lagrangiana studiata fino ad ora, la (9.41), “al-larghiamo” la teoria, inserendo termini composti da campi scalari ϕ e φ , così come anche un potenziale ed un termine di interazione tra scalari e fermioni. Vogliamo sostanzialmente studiare la seguente teoria:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \left[(\partial_\mu \varphi) (\partial^\mu \varphi) + \sum_{a=1}^3 (\partial_\mu \phi_a) (\partial^\mu \phi_a) \right] + i \bar{q} \gamma^\mu \partial_\mu q + \\ & + g \bar{q} (\varphi + i \gamma^5 \vec{\sigma} \cdot \vec{\phi}) q + \frac{\mu^2}{2} \left(\varphi^2 + \sum_{a=1}^3 \phi_a^2 \right) - \frac{\lambda}{4} \left(\varphi^2 + \sum_{a=1}^3 \phi_a^2 \right)^2 \end{aligned} \quad (9.51)$$

Risulta conveniente riscrivere i termini scalari utilizzando la seguente matrice 2×2 :

$$\Sigma \equiv \varphi \mathbb{1}_{2 \times 2} + i \vec{\sigma} \cdot \vec{\phi} \quad (9.52)$$

L'utilità di questa scrittura si manifesta nei modi seguenti:

- Innanzitutto, ricordando che le matrici di Pauli $\vec{\sigma}$ sono Hermitiane e ricordandone le relazioni di (anti-)commutazione, riassunte in $\sigma^a \sigma^b = \delta^{ab} \mathbb{1} + i \varepsilon^{abc} \sigma^c$, si trova:

$$\Sigma \Sigma^\dagger = \varphi^2 \mathbb{1} + \phi_a \phi_b (\delta^{ab} \mathbb{1} + i \varepsilon^{abc} \sigma^c)$$

Ma il termine in ε^{abc} (antisimmetrico sotto $a \leftrightarrow b$) è moltiplicato a $\phi_a \phi_b$ (simmetrico sotto $a \leftrightarrow b$), quindi non contribuisce. In definitiva abbiamo:

$$\Sigma \Sigma^\dagger = (\varphi^2 + \vec{\phi} \cdot \vec{\phi}) \mathbb{1}$$

- Alla luce del risultato del punto precedente, di cui ora prendiamo la traccia, troviamo la prima relazione interessante:

$$\text{Tr}[\Sigma \Sigma^\dagger] = 2 \left(\varphi^2 + \sum_{a=1}^3 \phi_a \phi_a \right) \quad (9.53)$$

- D'altro canto, considerando la derivata di Σ :

$$\partial_\mu \Sigma = \partial_\mu \varphi \mathbb{1}_{2 \times 2} + i \vec{\sigma} \cdot \partial_\mu \vec{\phi}$$

Non è difficile concludere che:

$$(\partial_\mu \Sigma) (\partial^\mu \Sigma^\dagger) = [(\partial_\mu \varphi) (\partial^\mu \varphi) + (\partial_\mu \vec{\phi}) (\partial^\mu \vec{\phi})] \mathbb{1}_{2 \times 2}$$

e di conseguenza:

$$\text{Tr}[(\partial_\mu \Sigma) (\partial^\mu \Sigma^\dagger)] = 2 \left[(\partial_\mu \varphi) (\partial^\mu \varphi) + \sum_{a=1}^3 (\partial_\mu \phi_a) (\partial^\mu \phi_a) \right] \quad (9.54)$$

- Se ora consideriamo $\bar{q}_L \Sigma q_R$ e $\bar{q}_R \Sigma^\dagger q_L$, riscrivendo $q_{L,R}$ ed aggiunti in termini di $P_{L,R}q$, ricordando il fatto che $\bar{q}_L = \bar{q} P_R$ (viceversa per \bar{q}_R) e notando il fatto che i proiettori chirali sono idempotenti (i.e. $P_{L,R}^2 = P_{L,R}$), si trova:

$$\begin{aligned}\bar{q}_L \Sigma q_R &= \bar{q} (\varphi \mathbb{1}_{2 \times 2} + i \vec{\sigma} \cdot \vec{\phi}) P_R q \\ \bar{q}_R \Sigma^\dagger q_L &= \bar{q} (\varphi \mathbb{1}_{2 \times 2} - i \vec{\sigma} \cdot \vec{\phi}) P_L q\end{aligned}$$

Di conseguenza, sfruttando il fatto che $P_R + P_L = 1$ e $P_R - P_L = \gamma^5$, è chiaro che:

$$\boxed{\bar{q}_L \Sigma q_R + \bar{q}_R \Sigma^\dagger q_L = \bar{q} (\varphi \mathbb{1}_{2 \times 2} + i \gamma^5 \vec{\sigma} \cdot \vec{\phi}) q} \quad (9.55)$$

Possiamo quindi riscrivere la Lagrangiana (9.51):

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{4} \text{Tr} [(\partial_\mu \Sigma)(\partial^\mu \Sigma^\dagger)] + i \bar{q} \gamma^\mu \partial_\mu q + g (\bar{q}_L \Sigma q_R + \bar{q}_R \Sigma^\dagger q_L) + \frac{\mu^2}{4} \text{Tr} [\Sigma \Sigma^\dagger] - \frac{\lambda}{16} (\text{Tr} [\Sigma \Sigma^\dagger])^2} \quad (9.56)$$

Ora le simmetrie sono più evidenti:

- i) **La Lagrangiana è invariante sotto le trasformazioni di $SU(2)_V$ estese al campo scalare**, i.e.:

$$\boxed{\begin{aligned}V(\vec{\theta}_V) &\equiv \exp \left(-i \vec{\theta}_V \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} \right) \\ q &\rightarrow V(\vec{\theta}_V)q, \quad \bar{q} \rightarrow \bar{q} V(\vec{\theta}_V)^\dagger, \quad \Sigma \rightarrow \Sigma' = V \Sigma V^\dagger\end{aligned}} \quad (9.57)$$

Dimostrazione. L'unica invarianza non del tutto banale è quella del termine di interazione, in cui va tenuto conto del fatto che:

$$q_L \rightarrow V(\vec{\theta}_V)q_L, \quad q_R \rightarrow V(\vec{\theta}_V)q_R$$

Dato ciò, il resto dei conti è banale. \square

Nota 9.6.1 Considerando la trasformazione di Σ espandendo quest'ultima secondo la (9.52), possiamo evidenziare alcuni fatti interessanti.

Il primo risultato viene dal termine in φ :

$$\boxed{\varphi \rightarrow V \varphi V^\dagger = \varphi} \quad (9.58)$$

i.e. φ è un singoletto sotto $SU(2)_V$!

Per quanto riguarda invece il secondo termine, proviamo ad isolare la proprietà di trasformazione di ϕ_a partendo da:

$$\vec{\phi} \cdot \vec{\sigma} \rightarrow V \vec{\phi} \cdot \vec{\sigma} V^\dagger$$

Sottintendendo le somme sugli indici ripetuti, al LHS abbiamo semplicemente $\phi_a \sigma^a$, mentre sul RHS, che scriviamo

$$e^{-i \vec{\theta}_V \cdot \vec{\sigma} / 2} \phi_a \sigma^a e^{i \vec{\theta}_V \cdot \vec{\sigma} / 2}$$

possiamo lavorare applicando la formula di Baker-Campbell-Hausdorff, i.e.:

$$\begin{aligned} e^{iA}Be^{-iA} &= B + i[A, B] + \frac{i^2}{2!}[A, [A, B]] + \dots + \\ &\quad + \frac{i^n}{n!}[A, [A, \dots [A, B]\dots]] + \dots \end{aligned} \tag{9.59}$$

identificando nel nostro caso specifico $A \equiv -\vec{\theta}_V \cdot \vec{\sigma}/2$ e $B \equiv \sigma^a$. Il commutatore ed il doppio vanno calcolati a mano, definendo $(T_{\text{adj}}^a)_b{}^c \equiv -i\varepsilon^{abc}$, e i risultati a cui si arriva sono i seguenti:

$$\begin{cases} [-\vec{\theta}_V \cdot \vec{\sigma}/2, \sigma^a] = \theta_V^b (T_{\text{adj}}^b)_{ac} \sigma^c \\ [-\vec{\theta}_V \cdot \vec{\sigma}/2, [-\vec{\theta}_V \cdot \vec{\sigma}/2, \sigma^a]] = (\vec{\theta}_V \cdot \vec{T}_{\text{adj}})^2_{ac} \sigma^c \end{cases}$$

Applicando quindi la BCH al caso di nostro interesse, otteniamo quanto segue:

$$\begin{aligned} \phi_a e^{-i\vec{\theta}_V \cdot \vec{\sigma}/2} \sigma^a e^{i\vec{\theta}_V \cdot \vec{\sigma}/2} &= \phi_a \{ \sigma^a + i\theta_V^b (T_{\text{adj}}^b)_{ac} \sigma^c + \\ &\quad + i(\vec{\theta}_V \cdot \vec{T}_{\text{adj}})^2_{ac} \sigma^c + \dots \} \end{aligned}$$

Notiamo quindi che gli elementi tra parentesi graffa ricostruiscono un esponenziale! Questo ci permette di riscrivere la legge di trasformazione da cui siamo partiti:

$$\phi_c \sigma^c \rightarrow \phi_a [\exp(i\vec{\theta}_V \vec{T}_{\text{adj}})]_{ac} \sigma^c$$

Per poi usare l'anti-simmetria di \vec{T}_{adj} sotto $a \leftrightarrow c$ arrivando in definitiva alla conclusione che $\vec{\phi}$ trasforma sotto la rappresentazione aggiunta di $SU(2)_V$, i.e.:

$$\boxed{\phi_c \rightarrow [\exp(-i\vec{\theta}_V \vec{T}_{\text{adj}})]_{ca} \phi_a} \tag{9.60}$$

Se ora prendiamo la forma infinitesima della (9.60), troviamo:

$$\phi_c \rightarrow [\delta_{ca} - i\theta_V^A (T_{\text{adj}}^A)_{ca}] \phi_a = \phi_c - \theta_V^A \varepsilon^{aca} \phi_a$$

Quindi giocando opportunamente con gli indici troviamo la forma della variazione infinitesima di $\vec{\phi}$:

$$\boxed{\begin{aligned} \delta\phi_c &= -\theta_V^a \varepsilon^{acb} \phi_b = \varepsilon^{cab} \theta_V^a \phi_b \\ \Rightarrow \delta\vec{\phi} &= \vec{\theta} \times \vec{\phi} \end{aligned}} \tag{9.61}$$

Possiamo quindi calcolare la corrente conservata associata ad $SU(2)_V$, che in linea del tutto generale si scrive:

$$V^{a,\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu q)} \frac{\delta q}{\delta \theta_V^A} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \frac{\delta \varphi}{\delta \theta_V^A} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \vec{\phi})} \frac{\delta \vec{\phi}}{\delta \theta_V^A}$$

Chiaramente $\delta q = -i\theta_V^A \frac{\sigma^A}{2} q$ ed altrettanto chiaramente il secondo termine è nullo in quanto φ è un singoletto sotto $SU(2)_V$. Di

conseguenza, la corrente di Noether si scrive:

$$\begin{aligned} V^{a,\mu} &= \bar{q} \gamma^\mu \frac{\sigma^A}{2} q + (\partial^\mu \phi_c) \epsilon^{cAb} \phi_b = \bar{q} \gamma^\mu \frac{\sigma^A}{2} q - (\partial^\mu \phi_c) \epsilon^{AcB} \phi_B \\ \Rightarrow \vec{V}^\mu &\equiv \bar{q} \gamma^\mu \frac{\sigma^A}{2} q - (\partial^\mu \vec{\phi}) \times \vec{\phi} \end{aligned} \quad (9.62)$$

A cui associamo la carica conservata $\vec{Q}_V \equiv \int d^3 \vec{x} V^0(\vec{x}, t)$.

- ii) **La Lagrangiana è invariante sotto le trasformazioni di $SU(2)_A$ estese al campo scalare**, i.e.:

$$\boxed{\begin{aligned} A(\vec{\theta}_A) &\equiv \exp\left(-i\vec{\theta}_A \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}\right) \\ q &\rightarrow \exp\left(-i\vec{\theta}_A \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} \gamma^5\right) q, \quad \Sigma \rightarrow \Sigma' = A^\dagger \Sigma A^\dagger \end{aligned}} \quad (9.63)$$

Dimostrazione. Anche qui l'invarianza è evidente, l'unica accortezza da tenere è nel caso del termine di interazione in cui vanno applicate le regole di trasformazione ricavate nell'esercizio 9.6.4. \square

Anche in questo caso vorremmo esplicitare quali siano le correnti di Noether e per farlo dobbiamo trovare le variazioni infinitesime di φ e $\vec{\phi}$, in quanto ancora una volta quella di q la conosciamo già. Per trovare tali variazioni lavoriamo nuovamente sulla trasformazione di Σ espandendo gli A^\dagger nel caso infinitesimo e svolgendo i prodotti, eventualmente tenendo conto delle regole di anticommutazione delle matrici di Pauli. I calcoli sono lasciati per esercizio [Conti svolti Lez. 37 p.83÷84] ma il risultato a cui si arriva è il seguente:

$$\Sigma = \varphi + i\vec{\sigma} \cdot \vec{\phi} \xrightarrow{SU(2)_A} \varphi - \vec{\phi} \cdot \vec{\theta}_A + i(\vec{\phi} + \varphi \vec{\theta}_A) \cdot \vec{\sigma}$$

A questo punto abbiamo tutte le variazioni che ci servono:

$$\boxed{\delta q = -i\theta_A^a \frac{\sigma^a}{2} \gamma^5 q, \quad \delta \varphi = -\phi_a \theta_A^a, \quad \delta \phi_a = \varphi \theta_A^a} \quad (9.64)$$

Possiamo dunque scrivere la corrente di Noether:

$$\begin{aligned} A^{a,\mu} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu q)} \frac{\delta q}{\delta \theta_A^a} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \frac{\delta \varphi}{\delta \theta_A^a} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \vec{\phi})} \frac{\delta \vec{\phi}}{\delta \theta_A^a} \\ &= \bar{q} \gamma^\mu \frac{\sigma^A}{2} \gamma^5 q + (\partial^\mu \varphi)(-\phi_a) + (\partial^\mu \phi_a) \varphi \end{aligned}$$

Quindi in definitiva:

$$\boxed{\vec{A}^\mu = \bar{q} \gamma^\mu \frac{\vec{\sigma}}{2} \gamma^5 q - [\vec{\phi}(\partial^\mu \varphi) - \varphi(\partial^\mu \vec{\phi})]} \quad (9.65)$$

A cui associamo la carica $\vec{Q}_A \equiv \int d^3 \vec{x} A^0(\vec{x}, t)$.

Si dimostra che le cariche conservative associate ad $SU(2)_{V,A}$ soddisfano le

seguenti algebre:

$$[Q_V^a, Q_V^b] = i\epsilon^{abc} Q_V^c, \quad [Q_A^a, Q_A^b] = i\epsilon^{abc} Q_V^c, \quad [Q_V^a, Q_A^b] = i\epsilon^{abc} Q_A^c \quad (9.66)$$

Possiamo allora definire nuovamente

$$\vec{Q}_R = (\vec{Q}_A + \vec{Q}_V)/2, \quad \vec{Q}_L = (\vec{Q}_V - \vec{Q}_A)/2$$

E verificare che \vec{Q}_L e \vec{Q}_R chiudono entrambe l'algebra di $SU(2)_L \times SU(2)_R$, i.e.:

$$[Q_L^a, Q_L^b] = i\epsilon^{abc} Q_L^c, \quad [Q_R^a, Q_R^b] = i\epsilon^{abc} Q_R^c, \quad [Q_L^a, Q_R^b] = 0 \quad (9.67)$$

Notiamo inoltre come $SU(2)_V$ sia un sottogruppo di $SU(2)_L \times SU(2)_R$, noto come **sottogruppo diagonale**.

Nota 9.6.2 Sulla scia di quanto già visto nel caso di $U(1)_{V,A}$, possiamo studiare l'azione combinata assiale-vettoriale su $q_{L,R}$ nel caso di $SU(2)$.

I ragionamenti sono pressoché gli stessi, e quello che si trova alla fine dei conti è che:

- ▶ Se si considera $\vec{\theta}_V = \vec{\theta}_A \equiv \vec{\theta}_R/2$, l'azione combinata assiale-vettoriale su $q_{L,R}$ corrisponde all'azione di $SU(2)_R$.
- ▶ D'altro canto, considerando $\vec{\theta}_V = -\vec{\theta}_A \equiv \vec{\theta}_L/2$, l'azione combinata assiale-vettoriale su $q_{L,R}$ corrisponde all'azione di $SU(2)_L$.

Ci si potrebbe chiedere a questo punto cosa accada a Σ , la cui legge di trasformazione sotto la combinazione assiale-vettoriale diventa:

$$\Sigma \rightarrow V(A^\dagger \Sigma A^\dagger) V^\dagger$$

ci accorgiamo senza troppa difficoltà che:

- ▶ Se $\vec{\theta}_V = \vec{\theta}_A \equiv \vec{\theta}_R/2$

$$\begin{aligned} \Sigma &\rightarrow \Sigma \left[\exp(-i\vec{\theta}_R \cdot \vec{\sigma}/2) \right]^\dagger \equiv \Sigma R(\vec{\theta}_R)^\dagger \\ R(\vec{\theta}_R) &\in SU(2)_R \end{aligned}$$

- ▶ Se $\vec{\theta}_V = -\vec{\theta}_A \equiv \vec{\theta}_L/2$

$$\begin{aligned} \Sigma &\rightarrow \exp(-i\vec{\theta}_L \cdot \vec{\sigma}/2) \Sigma \equiv L(\vec{\theta}_L) \Sigma \\ L(\vec{\theta}_L) &\in SU(2)_L \end{aligned}$$

Questo significa che, sotto l'azione di $SU(2)_L \times SU(2)_R$, Σ trasforma secondo:

$$\boxed{\Sigma \rightarrow L \Sigma R^\dagger}$$

con

$$L(\vec{\theta}_L) = \exp(-i\vec{\theta}_L \cdot \vec{\sigma}/2), \quad R(\vec{\theta}_R) = \exp(-i\vec{\theta}_R \cdot \vec{\sigma}/2)$$

Questa è detta rappresentazione bi-fondamentale di $SU(2)_L \times SU(2)_R$.

Rottura spontanea della simmetria chirale

Consideriamo a questo punto il potenziale che abbiamo introdotto nella Lagrangiana chirale generalizzata (9.51), i.e.:

$$\begin{aligned} V &= -\frac{\mu^2}{2} \left(\varphi^2 + \sum_{a=1}^3 \phi_a^2 \right) + \frac{\lambda}{4} \left(\varphi^2 + \sum_{a=1}^3 \phi_a^2 \right)^2 \\ &= \frac{\mu^2}{4} \text{Tr}[\Sigma \Sigma^\dagger] - \frac{\lambda}{16} \left(\text{Tr}[\Sigma \Sigma^\dagger] \right)^2 \end{aligned} \quad (9.68)$$

Notando la dipendenza del potenziale dal solo $|\varphi|$ possiamo sfruttare la solita procedura per ricavare che questo possiede un set di minimi degeneri in:

$$\varphi^2 + \sum_{a=1}^3 \phi_a^2 = \frac{\mu^2}{\lambda} \equiv \varphi_0^2$$

tutti legati da trasformazioni di SO(4).

Possiamo dunque fare una scelta e fissare il vuoto in modo tale che:

$$\langle 0 | \varphi | 0 \rangle = \varphi_0, \quad \langle 0 | \vec{\phi} | 0 \rangle = \vec{0}$$

che in termini di un vettore 4-dimensionale $\vec{\Phi} \equiv \begin{pmatrix} \varphi \\ \vec{\phi} \end{pmatrix}$ si scrive:

$$\langle 0 | \vec{\Phi} | 0 \rangle = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \vec{0} \end{pmatrix} \quad (9.69)$$

Questo stato di vuoto è chiaramente invariante sotto le trasformazioni di SO(3), quindi **questa scelta genera una rottura spontanea di simmetria $\text{SO}(4) \rightarrow \text{SO}(3)$** .

Ora qualcuno qui potrebbe chiedersi cosa c'entrino SO(4) ed SO(3), visto che abbiamo dedicato le precedenti pagine alla discussione del modello $\text{SU}(2)_L \times \text{SU}(2)_R$.

Il punto sta nel fatto che sussiste un isomorfismo tra i seguenti gruppi:

$$\begin{array}{ccc} \text{SO}(4) & \rightarrow & \text{SO}(3) \\ \cong & & \cong \\ \text{SU}(2) \times \text{SU}(2) & \rightarrow & \text{SU}(2) \end{array}$$

Dal punto di vista di $\text{SU}(2)_L \times \text{SU}(2)_R$, ossia quello che ci interessa, ci aspettiamo quindi che la simmetria sia rotta in favore di un suo sottogruppo di tipo SU(2). L'unica possibilità è $\text{SU}(2)_V$, quello corrispondente all'algebra $[Q_V^a, Q_V^b] = i \epsilon^{abc} Q_V^c$, poiché, come osservato in calce all'equazione (9.67), questo rappresenta il sottogruppo diagonale di $\text{SU}(2)_L \times \text{SU}(2)_R$.

La rottura di simmetria che ci aspettiamo e che vogliamo studiare è quindi

$$\boxed{\text{SU}(2)_L \times \text{SU}(2)_R \rightarrow \text{SU}(2)_V}$$

Per rendere questa affermazione più precisa consideriamo la situazione dal punto di vista del campo Σ che abbiamo introdotto come combinazione dei campi scalari presenti nella Lagrangiana. **In questi termini**

la configurazione di vuoto è $\boxed{\Sigma_0 \equiv \varphi_0 \mathbb{1}_{2 \times 2}}$, quindi proporzionale alla matrice identità.

Dalle proprietà di trasformazione di Σ , enunciate nella (9.57) e nella (9.63), vediamo chiaramente che:

- Sotto $SU(2)_V$ il vuoto è invariante, i.e.:

$$\Sigma_0 \rightarrow \Sigma_0 = V\Sigma V^\dagger = \Sigma(VV^\dagger) = \Sigma_0$$

- Sotto $SU(2)_A$ il vuoto non ha simmetrie, infatti:

$$\Sigma_0 \rightarrow \Sigma_0 = A^\dagger \Sigma A^\dagger = \Sigma(A^\dagger A^\dagger) \neq \Sigma_0$$

Di conseguenza i generatori rotti saranno quelli della simmetria assiale, le tre cariche \vec{Q}_A (quindi ci aspettiamo tre campi di Goldstone), mentre i generatori della simmetria vettoriale (le cariche \vec{Q}_V) non saranno rotti.

Un'ulteriore conseguenza risiede nello **spettro di massa**. Formalmente definiamo al solito i campi shiftati espandendo attorno al vuoto:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi_0 + \chi(x) \\ \vec{\phi}(x) &= \vec{\theta}(x) \end{aligned} \Rightarrow \Sigma(x) = \varphi_0 + \chi(x) + i\vec{\sigma} \cdot \vec{\theta}(x)$$

con $\chi(x)$ singoletto sotto $SU(2)_V$, mentre $\vec{\theta}(x)$ trasforma secondo la rappresentazione aggiunta di $SU(2)_V$, nel senso discusso nella nota 9.6.1.

Chiaramente la Lagrangiana nella broken phase rispetterà la simmetria non rottta, $SU(2)_V$, e possiamo dimostrare che i tre $\vec{\theta}(x)$ sono i campi di Goldstone in quanto non ottengono alcun termine di massa, mentre il campo $\chi(x)$ ottiene un termine di massa.

In particolare dobbiamo considerare il termine in cui figura la $\text{Tr}(\Sigma\Sigma^\dagger)$, ovviamente nel caso dei campi shiftati. Volendo, potremmo avvalerci della (9.53), ma con della banale algebra possiamo ricavare esplicitamente:

$$\Sigma\Sigma^\dagger = [(\varphi^0 + \chi)^2] \mathbb{1} + (\vec{\sigma} \cdot \vec{\theta})(\vec{\sigma} \cdot \vec{\theta})$$

ed avvalendoci nuovamente della proprietà delle matrici di Pauli $\sigma^a \sigma^b = \delta^{ab} \mathbb{1} + i\varepsilon^{abc} \sigma^c$ abbiamo:

$$\text{Tr}[\Sigma\Sigma^\dagger] = 2(\varphi_0 + \chi)^2 + 2 \sum_{a=1}^3 \theta_a^2 \quad (9.70)$$

Riprendiamo quindi l'espressione del potenziale in termini di Σ nella (9.68) sostituendo la (9.70):

$$V = \frac{\mu^2}{2} \left(\varphi_0^2 + \chi^2 + 2\varphi_0\chi + \sum_{a=1}^3 \theta_a^2 \right) - \frac{\lambda}{4} \left[(\varphi_0^2 + \chi^2 + 2\varphi_0\chi + \sum_{a=1}^3 \theta_a^2) \right]^2 \quad (9.71)$$

Ora sviluppiamo pazientemente il quadrato nel termine in λ , fermandoci al secondo ordine in χ e θ_a , e separiamo i differenti contributi:

- Termine di massa per χ :

$$\begin{aligned}\frac{\mu^2}{2}\chi^2 - \frac{\lambda}{4}(2\varphi_0^2\chi^2 + 2\varphi_0^2\chi^2) &= \frac{\mu^2}{2}\chi^2 - \frac{3\lambda}{2}\frac{\mu^2}{\lambda}\chi^2 \\ &= -\mu^2\chi^2\end{aligned}$$

Di conseguenza, applicando la relazione che abbiamo ricavato tempo fa, riportata nella (9.21), scopriamo che il campo χ possiede una massa pari a $m_\chi^2 = 2\mu^2$.

- Termine di massa per $\sum_a \theta_a^2$:

$$\begin{aligned}\frac{\mu^2}{2} \sum_a \theta_a^2 - \frac{\lambda}{4} \left(2\varphi_0^2 \sum_a \theta_a^2 \right) &= \sum_a \theta_a^2 \left(\frac{\mu^2}{2} - \frac{\lambda}{2} \frac{\mu^2}{\lambda} \right) \\ &= 0\end{aligned}$$

Come atteso, i tre campi $\vec{\theta}$ sono massless, consistentemente con il pattern di rottura di simmetria parziale secondo cui il numero di generatori rotti determina il numero di bosoni di Goldstone.

Notiamo inoltre come anche il coupling di Yukawa $g\bar{q}(\varphi + i\gamma^5\vec{\sigma} \cdot \vec{\phi})q$ generi un termine di massa, per q , nella broken phase. Considerando solo il primo termine nella parentesi otteniamo infatti:

$$g\varphi_0\bar{q}q = g\varphi_0(\bar{u}u + \bar{d}d)$$

Ricordiamo il fatto che siamo partiti da una teoria in cui non era presente alcun termine di massa (poiché incompatibile con la simmetria assiale), ed ora, dopo la rottura spontanea, il termine di massa è presente ed è perfettamente compatibile con la simmetria residua $SU(2)_V$, in quanto questa è realizzata à la Wigner-Weyl (linearmente, se vogliamo) ed è una simmetria dello stato di vuoto.

In particolare, inoltre, ci accorgiamo del fatto che entrambi i fermioni nel doppietto possiedono la stessa massa e ciò è conseguenza del gruppo di simmetria sottostante alla teoria.

★Realizzazione non lineare della SSB di $SU(2)_L \times SU(2)_R$

Come abbiamo fatto nel caso di $U(1)$ nella sezione 9.5, è possibile riparametrizzare Σ in modo tale da rendere la fisica più evidente, scoprendo che la simmetria originaria è ancora realizzata dopo la rottura spontanea, ma in maniera non lineare.

Parametrizziamo quindi Σ nel modo seguente:

$$\boxed{\Sigma = (\rho + \varphi_0) \exp \left(i \frac{\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma}}{f_\pi} \right) \equiv (\rho + \varphi_0) U} \quad (9.72)$$

Come osservato alla fine della nota 9.6.2, Σ trasforma sotto la rappresentazione bi-fondamentale di $SU(2)_L \times SU(2)_R$, i.e.:

$$\boxed{\Sigma \rightarrow L\Sigma R^\dagger}$$

con $L = \exp(-i\vec{\theta}_L \cdot \vec{\sigma}/2)$ e $R = \exp(-i\vec{\theta}_R \cdot \vec{\sigma}/2)$.

Di conseguenza U^4 trasformerà secondo la stessa legge, mentre ρ è un singoletto.

Consideriamo ora i termini della Lagrangiana (9.56) in cui figura Σ , tralasciando il coupling di Yukawa, i.e.:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} \text{Tr}[(\partial_\mu \Sigma)(\partial^\mu \Sigma^\dagger)] + \frac{\mu^2}{4} \text{Tr}[\Sigma \Sigma^\dagger] - \frac{\lambda}{16} (\text{Tr}[\Sigma \Sigma^\dagger])^2 \quad (9.73)$$

e riscriviamola in termini di ρ e U .

Ci accorgiamo immediatamente di quale sia il vantaggio di questa parametrizzazione: nel calcolo esplicito di $\text{Tr}(\Sigma \Sigma^\dagger)$ i campi $\vec{\pi}$ scompaiono e di conseguenza scompaiono dal potenziale. Ma allora, non potendo acquisire alcun potenziale, vediamo immediatamente che questi devono essere i tre bosoni di Goldstone!

In particolare è banale verificare che $\Sigma \Sigma^\dagger = (\rho + \varphi_0)^2 \mathbb{1}_{2 \times 2}$, così come è banale (ma lungo e noioso), verificare che i termini relativi al potenziale nella (9.73) si riscrivono nel modo seguente:

$$\frac{\mu^2}{4} \text{Tr}[\Sigma \Sigma^\dagger] - \frac{\lambda}{16} (\text{Tr}[\Sigma \Sigma^\dagger])^2 = \frac{\mu^4}{4\lambda} - \mu^2 \rho^2 - \mu \sqrt{\lambda} \rho^3 - \frac{\lambda}{4} \rho^4$$

dove possiamo eliminare il primo termine offsettando a zero l'energia del vuoto.

Equivalentemente noioso e banale è il calcolo che porta alla traccia del termine cinetico in Σ , che alla fine dei conti si scrive:

$$\begin{aligned} \text{Tr}[(\partial_\mu \Sigma)(\partial^\mu \Sigma^\dagger)] &= 2(\partial_\mu \rho)(\partial^\mu \rho) + (\rho + \varphi_0)^2 \text{Tr}[(\partial_\mu U)(\partial^\mu U^\dagger)] + \\ &\quad + (\rho + \varphi_0) \cancel{\text{Tr}[(\partial_\mu U)U^\dagger]} + (\rho + \varphi_0)(\partial_\mu \rho) \cancel{\text{Tr}[U(\partial^\mu U^\dagger)]} \end{aligned}$$

Con le due tracce finali che si annullano in quanto proporzionali alla traccia di una matrice di Pauli.

In conclusione scriviamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \rho)(\partial^\mu \rho) - \mu^2 \rho^2 - \mu \sqrt{\lambda} \rho^3 - \frac{\lambda}{4} \rho^4 + \frac{\varphi_0^2}{4} \text{Tr}[(\partial_\mu U)(\partial^\mu U^\dagger)] \\ &\quad + \frac{\rho^2 + 2\rho\varphi_0}{4} \text{Tr}[(\partial_\mu U)(\partial^\mu U^\dagger)] \end{aligned} \quad (9.74)$$

Notiamo dunque che:

- i) Il campo “radiale” ρ è massivo e la sua massa al quadrato è $m_\rho^2 = 2\mu^2$.
- ii) I campi π^a corrispondono, come già evidenziato, ai campi di Goldstone. Il fatto che non abbiano potenziale impedisce loro di assumere una massa, i.e.: la loro non massività è conseguenza della simmetria realizzata non linearmente (che a breve scopriremo essere quella assiale).

Consideriamo la trasformazione $U \rightarrow L(\vec{\theta}_L)UR(\vec{\theta}_R)^\dagger$, che corrisponde ad una trasformazione vettoriale nel caso in cui $\vec{\theta}_L = \vec{\theta}_R \equiv \vec{\theta}_V$ e che corrisponde ad una trasformazione assiale nel caso $-\vec{\theta}_L = \vec{\theta}_R \equiv \vec{\theta}_A$.

⁴ che per inciso è una matrice 2×2 , in quanto esponenziale di una combinazione lineare delle matrici di Pauli per mezzo dei campi scalari $\vec{\pi}$

Esercizio 9.6.5 Elaborare $U \rightarrow L(\vec{\theta}_L)UR(\vec{\theta}_R)^\dagger$ nel limite infinitesimo
[Conti svolti Lez. 38.1 p. 95÷96]

Nel limite infinitesimo abbiamo:

$$\pi^a \rightarrow \pi^a + \frac{f_\pi}{2}(\theta_R^a - \theta_L^a) - \frac{1}{2}\epsilon^{abc}\pi^b(\theta_R^c + \theta_L^c) \quad (9.75)$$

Da cui ricaviamo:

- Le trasformazioni vettoriali: ($\vec{\theta}_L = \vec{\theta}_R \equiv \vec{\theta}_V$)

$$\pi^a \rightarrow \pi^a - \epsilon^{abc}\pi^b\theta_V^c \quad (9.76)$$

da cui è evidente che, come atteso, i π^a trasformano linearmente sotto il gruppo di simmetria residuo (simmetria realizzata à la Wigner Weyl) ed in particolare trasformano sotto la rappresentazione aggiunta di SU(2).

- Le trasformazioni assiali: ($\vec{\theta}_L = -\vec{\theta}_R \equiv -\vec{\theta}_A$)

$$\pi^a \rightarrow \pi^a - f_\pi(\theta_A^a) \quad (9.77)$$

da cui ricaviamo che i π^a trasformano non linearmente sotto il gruppo di simmetria rotto.

La simmetria originale, spontaneamente rottuta, si realizza sotto forma di **simmetria di shift** e previene l'esistenza di un termine di massa per i bosoni di Goldstone $\vec{\pi}$!

Per completezza, consideriamo ora anche il coupling di Yukawa, che include sia i fermioni che i campi scalari, ovvero $g(\bar{q}_L\Sigma q_R + \bar{q}_R\Sigma^\dagger q_L)$, che con la parametrizzazione "polare" di Σ si scrive:

$$g\rho(\bar{q}_L U q_R + \bar{q}_R U^\dagger q_L) + g\varphi_0(\bar{q}_L U q_R + \bar{q}_R U^\dagger q_L)$$

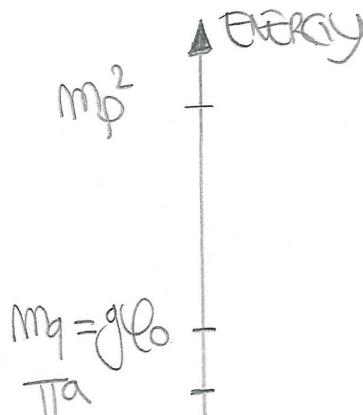
Di conseguenza la Lagrangiana totale nella broken phase è data da:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{BP} = & \frac{1}{2}(\partial_\mu\rho)(\partial^\mu\rho) - \mu^2\rho^2 - \mu\sqrt{\lambda}\rho^3 - \frac{\lambda}{4}\rho^4 + \bar{q}i\gamma^\mu\partial_\mu q \\ & + \frac{\varphi_0^2}{4}\text{Tr}[(\partial_\mu U)(\partial^\mu U^\dagger)] + \frac{\rho^2 + 2\rho\varphi_0}{4}\text{Tr}[(\partial_\mu U)(\partial^\mu U^\dagger)] \\ & + g\rho(\bar{q}_L U q_R + \bar{q}_R U^\dagger q_L) + g\varphi_0(\bar{q}_L U q_R + \bar{q}_R U^\dagger q_L) \end{aligned} \quad (9.78)$$

- ♦ Questa Lagrangiana rispetta la simmetria completa $SU(2)_L \times SU(2)_R$, che tuttavia è adesso realizzata non linearmente.
- ♦ Tutte le informazioni riguardo il pattern di rottura di simmetria sono contenute nella sola matrice $U = \exp(i\pi^a\sigma^a/f_\pi)$, definita dai campi di Goldstone. **Al contrario, ρ è un singoletto e non contiene alcuna informazione in merito al pattern di rottura di simmetria.**

Cerchiamo di esplicitare l'affermazione appena fatta considerando il limite in cui $\mu^2 \rightarrow \infty$ e $\lambda \rightarrow \infty$, così che $\varphi_0^2 = \frac{\mu^2}{\lambda} = \text{const.}$.

In tale limite anche la massa $m_\rho \rightarrow \infty$ e il campo radiale si disaccoppia dalle componenti di bassa energia della teoria, nel senso che (siccome per produrre una particella ρ con una certa massa m_ρ è necessario avere



a disposizione almeno il doppio di questa massa come energia del centro di massa) nel limite di m_ρ molto grande, non c'è modo di produrre ρ . Avrebbe quindi senso "eliminare" tale campo dalla Lagrangiana o, per meglio dire, "**integralo fuori**".

Definiamo quindi la procedura da seguire per effettuare tale operazione, che si compone di tre step:

- i) Scriviamo l'equazione del moto per ρ .
- ii) Espandiamo la soluzione in potenze di $\frac{1}{\lambda}$.
- iii) Utilizziamo la soluzione ricavata nel punto ii) nella Lagrangiana.

Ora sviluppiamo questi passaggi:

i) Equazione del moto per ρ .

Le equazioni del moto sono definite da $\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \rho)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho}$ e non è difficile convincersi del fatto che in questo caso questa equazione si riduca a:

$$\square \rho + 2\varphi_0^2 \lambda \rho + 3\varphi_0 \lambda \rho^2 + \lambda \rho^3 - \frac{(\rho + \varphi_0)}{2} t - g(\bar{q}_L U q_R + \bar{q}_R U^\dagger q_L) = 0 \quad (9.79)$$

dove $t \equiv \text{Tr}[(\partial_\mu U)(\partial^\mu U^\dagger)]$ e si è usato $\mu^2 = \varphi_0^2 \lambda$ e $\mu = \varphi_0 \sqrt{\lambda}$

ii) Soluzione in potenze di $\frac{1}{\lambda}$.

L'idea è quella di riscrivere il campo radiale come

$$\rho = \rho_0 + \frac{1}{\lambda} \rho_1 + \dots$$

e per farlo procediamo in maniera iterativa.

Ad $\mathcal{O}(\lambda^1)$, il più alto ordine di λ , la (9.79) si riduce a:

$$2\varphi_0 \lambda \rho_0 + 3\varphi_0 \lambda \rho_0^2 + \lambda \rho_0^3 = 0 \Rightarrow [\rho_0 = 0]$$

Ed ha senso: ρ produce le eccitazioni radiali attorno a φ_0 ma non abbiamo energia a sufficienza per produrlo nel limite di bassa energia, quindi nel momento in cui ci accontentiamo dell'ordine minore dell'espansione che stiamo considerando non abbiamo modo di deviare radialmente da φ_0 .

quindi possiamo già dire che $\rho = 0 + \frac{1}{\lambda} \rho_1$.

Ad $\mathcal{O}(\lambda^0)$ abbiamo dunque:

$$\begin{aligned} 2\varphi_0^2 \chi \frac{\rho_1}{\chi} - \frac{(\cancel{\rho_0} + \varphi_0)}{2} t - g(\bar{q}_L U q_R + \bar{q}_R U^\dagger q_L) &= 0 \\ 2\varphi_0^2 \rho_1 &= \frac{\varphi_0}{2} t + g(\bar{q}_L U q_R + \bar{q}_R U^\dagger q_L) \\ \rho_1 &= \frac{1}{4\varphi_0} t + \frac{g}{2\varphi_0^2} (\bar{q}_L U q_R + \bar{q}_R U^\dagger q_L) \end{aligned}$$

dunque la soluzione ad $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$:

$$\rho = \frac{1}{4\varphi_0 \lambda} t + \frac{g}{2\varphi_0^2 \lambda} (\bar{q}_L U q_R + \bar{q}_R U^\dagger q_L) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \quad (9.80)$$

La logica del punto ii) si ritrova nel fatto che siamo interessati al caso in cui λ è molto grande. Questo produce automaticamente un parametro molto piccolo nella teoria, pari esattamente all'inverso di λ

iii) Soluzione ricavata nella Lagrangiana.

Questo passaggio, al prim'ordine, corrisponde a fissare $\rho = \rho_0 = 0$ nella 9.78, ottenendo la Lagrangiana "Low-Energy":

$$\mathcal{L}_{\text{LE}} = \bar{q} i \gamma^\mu \partial_\mu q + \frac{\varphi_0^2}{4} \text{Tr} [(\partial_\mu U)(\bar{\partial}^\mu U^\dagger)] + g \varphi_0 (\bar{q}_L U q_R + \bar{q}_R U^\dagger q_L) \quad (9.81)$$

In sintesi: a bassa energia, integrando fuori il campo radiale, note le proprietà di trasformazione dei campi di Goldstone sotto l'azione del gruppo di simmetria completo (determinate dalla forma infinitesima di $U \rightarrow LUR^\dagger$), la struttura della Lagrangiana è completamente determinata dal pattern di rottura di simmetria $SU(2)_L \times SU(2)_R \rightarrow SU(2)_V$, nel senso che gli unici termini che possiamo scrivere nella Langrangiana sono quelli che rispettano la simmetria sotto $U = \exp(i\pi^a \sigma^a/f_\pi)$.

Nota 9.6.3 Quanto appena osservato, riguardo la struttura a bassa energia di una teoria che subisce una rottura spontanea di simmetria, è rilevante soprattutto perché, in generale, non conosciamo quale sia la teoria completa.

Esercizio 9.6.6 Calcolare la forma esplicita della Lagrangiana ad $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$.
[Conti svolti Lez. 38.1 p. 101÷102]



10 Il Meccanismo di Higgs^a

^a Immagine da Towards Data Science, "A No-Nonsense Explanation of How the Higgs Boson Gives Particles Their Masses"

10.1 Caso Abeliano

Consideriamo la teoria di gauge abeliana $U(1)$, descritta dalla Lagrangiana della QED:

$$\mathcal{L}_{QED} = (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) + \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

con $D_\mu \phi = (\partial_\mu + ig A_\mu) \phi$, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $\mu^2 > 0$ e $\lambda > 0$.

Questa Lagrangiana è invariante sotto trasformazioni di gauge, che ricordiamo essere rappresentate dalle trasformazioni simultanee:

$$\begin{aligned}\phi(x) &\rightarrow \phi'(x) = e^{-i\alpha(x)} \phi(x) \\ A_\mu(x) &\rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{i}{g} \partial_\mu \alpha(x)\end{aligned}$$

Inoltre, abbiamo la rottura spontanea di simmetria. Consideriamo infatti il potenziale

$$V(|\phi|) \equiv -\mu^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2$$

Si verifica che questo ha un minimo in $|\phi|^2 = \frac{\mu^2}{2\lambda}$, ma questo significa che esiste un insieme di vuoti degeneri tutti uguali a meno di una fase, vale a dire interconnessi da trasformazioni di $U(1)$, i.e.:

$$\bar{\phi} = \frac{v}{\sqrt{2}} e^{i\alpha}, \quad v = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}$$

Come al solito, effettuiamo una scelta specifica in coordinate cartesiane, definendo $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$ e fissando

$$\langle 0 | \phi_1 | 0 \rangle = v, \quad \langle 0 | \phi_2 | 0 \rangle = 0$$

10.1 Caso Abeliano	223
La gauge unitaria	224
10.2 Caso non-Abeliano	226
Il numero di bosoni di gauge massivi	230
10.3 Modello Standard: Settore Bosonomico	230
SSB di $SU(2)_L \times U(1)_Y$	231
Gauge unitaria e bosoni di gauge massivi	233
Interazioni puramente di gauge	235
10.4 Modello Standard: Settore Fermionico	236
Termini cinetici	236
10.5 Correnti Elettrodeboli	236
10.6 Generazione di Massa	236
10.7 Il decadimento del muone .	236

Se ora espandiamo attorno a questa scelta, shiftando le componenti di $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$ rispettivamente, possiamo scrivere:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \varphi_1(x) + i\varphi_2(x))$$

Ci aspettiamo che il bosone di Goldstone si possa identificare con $\varphi_2(x)$. Procediamo quindi a riscrivere i termini della Lagrangiana in funzione dei campi dinamici $\varphi_{1,2}$, in modo da ottenere la teoria nella sua broken phase.

Qualcosa di peculiare avviene tuttavia quando proviamo a riscrivere il termine cinetico:

$$\begin{aligned} (D_\mu \phi)^*(D^\mu \phi) &= \frac{1}{2} |(\partial_\mu + igA_\mu)(v + \varphi_1 + i\varphi_2)|^2 = \\ &= \frac{1}{2} |\partial_\mu \varphi_1 - gA_\mu \varphi_2 + i[gA_\mu(v + \varphi_1) + \partial_\mu \varphi_2]|^2 = \\ &= \frac{1}{2} [(\partial_\mu \varphi_1 - gA_\mu \varphi_2)^2 + (gA_\mu v + gA_\mu \varphi_1 + \partial_\mu \varphi_2)^2] \end{aligned}$$

Svolgendo ora il secondo quadrato si trova il risultato finale:

$$\begin{aligned} |D_\mu \phi|^2 &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi_1 - gA_\mu \varphi_2)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi_2 + gA_\mu \varphi_1)^2 + \\ &\quad + gvA^\mu(\partial_\mu \varphi_2 + gA_\mu \varphi_1) + \frac{1}{2} g^2 v^2 A_\mu A^\mu \end{aligned} \tag{10.1}$$

I primi due termini sono quelli attesi per la QED scalare, ma gli ultimi due?

- i) $\frac{1}{2}g^2 v^2 A_\mu A^\mu$ assomiglia molto ad un [termine di massa di Proca](#)¹ per il campo di gauge.
- ii) $gvA^\mu(\partial_\mu \varphi_2)$ è invece un mixing cinetico tra φ_2 (il Goldstone) ed il campo di gauge A_μ .

La gauge unitaria

L'idea è quella di rimuovere il mixing e per farlo consideriamo la rappresentazione polare del campo scalare, ovvero:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \rho(x))e^{i\pi(x)/v}$$

dove $\pi(x)$ sarà il campo di Goldstone.

Essendo la teoria invariante sotto trasformazioni di gauge, possiamo riscrivere la Lagrangiana in termini dei campi:

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= e^{-i\alpha(x)} \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \rho(x))e^{i\pi(x)/v} \\ A'_\mu(x) &= A_\mu(x) + \frac{i}{g}\partial_\mu \alpha(x) \end{aligned}$$

con la garanzia di ottenere una teoria totalmente equivalente.

¹ Ovvero un termine di massa associato ad un campo massivo di spin 1

Siccome questo è vero per ogni $\alpha(x)$, ci facciamo furbi e scegliamo una trasformazione di gauge tale che:

$$\boxed{\alpha(x) = \frac{\pi(x)}{v}} \quad (10.2)$$

Questa scelta in particolare è conosciuta come **gauge unitaria** e sostanzialmente quello che stiamo facendo si chiama *gauge fixing*.

Definiamo quindi:

$$\boxed{\begin{aligned} \phi_u(x) &= e^{-i\pi(x)/v} \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \rho(x)) \\ A_u^\mu(x) &= A^\mu(x) + \frac{i}{gv} \partial_\mu \pi(x) \end{aligned}} \quad (10.3)$$

Si verifica, invertendo le trasformazioni di gauge, che $D_\mu \phi = e^{i\alpha} (\partial_\mu + igA'_\mu) \phi'$ e di conseguenza

$$D^\mu \phi(x) = e^{i\pi(x)/v} (\partial^\mu + igA_u^\mu) \phi_u(x)$$

Questo significa che nel termine cinetico $(D_\mu \phi)^*(D^\mu \phi)$ scompare la dipendenza da $\pi(x)$!

La Lagrangiana assume dunque la forma seguente:

$$\boxed{\mathcal{L}_u = \left| \partial^\mu \phi_u + igA_u^\mu \phi_u \right|^2 + \mu^2 |\phi_u|^2 - \lambda |\phi_u|^4 - \frac{1}{4} F_{u,\mu\nu} F^{u,\mu\nu}} \quad (10.4)$$

$$\text{con } \phi_u = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \rho)$$

Possiamo fare di meglio, esplicitando i vari quadrati nell'espressione precedente:

■ Termini di potenziale

$$\mu^2 |\phi_u|^2 - \lambda |\phi_u|^4 = \cancel{\frac{\mu^4}{4\lambda}} - \mu^2 \rho - v \lambda \rho^3 - \frac{\lambda}{4} \rho^4$$

Dove il primo termine, come al solito, si può rimuovere rinormalizzando il potenziale a zero.

Ancora una volta scopriamo, questa volta senza troppo stupore, che il campo radiale ρ è massivo, con massa quadrata $m_\rho^2 = 2\mu^2$, e possiede interazioni cubiche e quartiche con campi del suo stesso tipo.

■ Termine cinetico

$$\begin{aligned} \left| \partial^\mu \phi_u + igA_u^\mu \phi_u(x) \right|^2 &= \frac{1}{2} \left| \partial^\mu \rho + ig(v + \rho) A_u^\mu \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \rho)(\partial^\mu \rho) + \frac{1}{2} g^2 (v + \rho)^2 A_{u,\mu} A_u^\mu \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \rho)(\partial^\mu \rho) + \frac{1}{2} g^2 v^2 A_{u,\mu} A_u^\mu + \frac{1}{2} g^2 (\rho^2 + 2\rho v) A_{u,\mu} A_u^\mu \end{aligned}$$

Possiamo dunque scrivere la Lagrangiana esplicita nella gauge unitaria, omettendo da qui in poi la "u" sui campi:

$$\mathcal{L}_u = \frac{1}{2}(\partial_\mu \rho)(\partial^\mu \rho) - \mu^2 \rho - v \lambda \rho^3 - \frac{\lambda}{4} \rho^4 - \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + \frac{1}{2}g^2 v^2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}g^2(\rho^2 + 2\rho v)A_\mu A^\mu \quad (10.5)$$

I termini evidenziati rappresentano una [Lagrangiana di Proca](#), che descrive un campo massivo di spin 1

In sintesi:

- i) Abbiamo un campo scalare massivo (reale) ρ con massa $m_\rho^2 = 2\mu^2$ ed auto-interazioni di terzo e quart'ordine.
- ii) Nella gauge unitaria, A_μ descrive un campo di gauge massivo con $m_A^2 \equiv g^2 v^2$
- iii) Non c'è alcun bosone di Goldstone nello spettro di massa! Il campo di gauge ha "mangiato" il bosone di Goldstone ed in tal modo ha acquisito la sua massa.

Il senso di questa ultima affermazione risiede nel fatto che il grado di libertà relativo al bosone di Goldstone scompare dalla Lagrangiana e compare come grado di libertà aggiuntivo necessario a descrivere un campo di gauge massivo. Discutiamo meglio questo punto nella nota successiva.

Nota 10.1.1 (Contare i gradi di libertà.)

Consideriamo i due regimi assunti dalla simmetria:

- Simmetria non rotta. $m^2 = -\mu^2 > 0$, $\mu^2 < 0$, $\langle 0 | \phi | 0 \rangle = 0$.
 - 1 campo scalare complesso \Rightarrow 2 gradi di libertà (1 particella scalare massiva + 1 anti-particella scalare massiva).
 - 1 campo di gauge massless \Rightarrow 2 gradi di libertà, le due polarizzazioni $\lambda = \pm 1$.

In totale abbiamo 4 gradi di libertà.

- Simmetria rotta. $m^2 < 0$, $\mu^2 > 0$, $|\langle 0 | \phi | 0 \rangle| = v/\sqrt{2} \neq 0$.
 - 1 campo scalare reale $\rho \Rightarrow$ 1 grado di libertà (1 particella scalare massiva senza carica).
 - 1 campo di gauge massivo \Rightarrow 3 gradi di libertà, le tre elicità $\lambda = 0, \pm 1$.

In totale abbiamo 4 gradi di libertà.

10.2 Caso non-Abeliano

Consideriamo una teoria di gauge non abeliana basata su SU(2) con un doppietto di campi scalari complessi Φ .

Nella notazione da noi adottata in precedenza, la Lagrangiana invariante di gauge, nel caso di SU(2), è:

$$\mathcal{L} = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - V(\Phi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu} \quad (10.6)$$

$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$ trasforma secondo la rappresentazione fondamentale di SU(2).

Ricordiamo inoltre che per quanto riguarda la derivata covariante, il tensore di Faraday ed il potenziale, abbiamo:

$$\boxed{\begin{aligned} D_\mu \Phi &= \partial_\mu \Phi + ig A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} \Phi & \dim \text{SU}(2) = 3 \Rightarrow 3 \text{ campi di gauge } A_\mu^a \\ F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g \epsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c & \\ V(\Phi) &= -\mu^2 |\Phi|^2 + \lambda |\Phi|^4 & \mu^2 > 0, \lambda > 0 \end{aligned}}$$

L'invarianza di gauge è garantita dalle trasformazioni

$$\boxed{\begin{aligned} \Phi(x) &\rightarrow \Phi'(x) = U(x)\Phi(x) \\ A_\mu(x) &\rightarrow A'_\mu(x) = U(x)A_\mu(x)U(x)^{-1} + \frac{i}{g}(\partial_\mu U(x))U(x)^{-1} \end{aligned}}$$

con $U(x) = \exp(-ig\frac{\sigma^a}{2}\alpha^a(x))$ e $A_\mu(x) \equiv A_\mu^a(x)\frac{\sigma^a}{2}$.

Essendo $\mu^2 > 0$ abbiamo la rottura spontanea di simmetria. In particolare, il potenziale è funzione del solo $|\Phi|^2 = \Phi^\dagger \Phi \equiv X$, da cui segue:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dX} = -\mu^2 + 2\lambda X = 0 \\ \left. \frac{d^2V}{dX^2} \right|_{X_*} > 0 \end{cases} \Rightarrow X_* = \frac{\mu^2}{2\lambda} \text{ minimo}$$

Ancora una volta abbiamo un insieme di vuoti degeneri, connessi da trasformazioni di SU(2), descritto dalla condizione:

$$\langle 0 | \Phi^\dagger \Phi | 0 \rangle = \frac{v^2}{2}, \quad v^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}$$

Scegliamo il vuoto che più ci fa comodo, ad esempio:

$$\boxed{\bar{\Phi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad \bar{\Phi}^\dagger \bar{\Phi} = \frac{1}{2} v^2}$$

ed espandiamo le componenti del doppietto attorno a tale scelta.

Come al solito partiamo dalla descrizione cartesiana:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi_1(x) + i\varphi_2(x) \\ v + \varphi_4(x) + i\varphi_3(x) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{pmatrix}$$

La numerazione delle componenti è scelta in modo tale che considerando $\Phi^\dagger \Phi$ si ottenga:

$$\Phi^\dagger \Phi = \frac{1}{2} [(v + \varphi_4)^2 + |\vec{\varphi}|^2]$$

con $\vec{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}$, dove la numerazione delle componenti è consistente.

Se ora analizziamo il potenziale da questo punto di vista, svolgendo accuratamente le potenze al suo interno, scopriamo che il termine quadratico in φ_4 vale $-\mu^2 \varphi_4^2$, ergo φ_4 è un campo scalare massivo.

D'altro canto, il termine quadratico in $|\vec{\varphi}|$ è nullo, quindi **i tre campi $\varphi_{1,2,3}$ sono i bosoni di Goldstone**.

Adottiamo ora la parametrizzazione esponenziale per i campi scalari, definendo:

$$\Phi(x) = \exp\left(i \frac{\pi^a \sigma^a}{2v}\right) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \rho(x) \end{pmatrix}$$

Chiaramente l'esponenziale viene eliminato nel calcolo di $\Phi^\dagger \Phi$, quindi i campi π^a non hanno potenziale e si identificano con i bosoni di Goldstone.

Introduciamo dunque la gauge unitaria definendo il campo trasformato:

$$\Phi_u(x) = \exp\left(-i \frac{\sigma^a}{2} \alpha^a(x)\right) \Phi(x)$$

e scegliendo i parametri della trasformazione in modo tale da cancellare l'esponenziale in $\Phi(x)$, i.e. $\boxed{\alpha^a(x) \equiv \pi^a(x)/v}$.

Di conseguenza avremo:

$$\boxed{\Phi_u(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \rho(x) \end{pmatrix}}$$

Dobbiamo inoltre trasformare a modo anche i campi di gauge, vale a dire:

$$\boxed{A_u^\mu(x) = U(x) A^\mu(x) U(x)^{-1} + \frac{i}{g} (\partial_\mu U(x)) U(x)^{-1}}$$

con $U(x) = \exp\left(i \frac{\pi^a \sigma^a}{2v}\right)$.

Per costruzione, la Lagrangiana scritta in termini di Φ_u ed A_u^μ ha la stessa struttura della Lagrangiana originale.

Esercizio 10.2.1 Verificare quanto appena affermato. [Conti svolti Lez.39 p.13÷15]

La Lagrangiana nella gauge unitaria per una teoria di gauge basata su SU(2) si scrive infatti (tralasciando il pedice “ u ” sui campi per amor di notazione):

$$\boxed{\mathcal{L}_u = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - V(\Phi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu}} \quad (10.7)$$

con $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \rho(x) \end{pmatrix}$.

Guardando la (10.7) ci accorgiamo immediatamente che i bosoni di Goldstone sono scomparsi!

Scriviamo quindi esplicitamente i vari termini della Lagrangiana:

► Termini di potenziale.

Questo è il solito calcolo già fatto più volte. Chiaramente

$$\Phi^\dagger \Phi = \frac{1}{2} (v^2 + 2v\rho + \rho^2)$$

e non è dunque difficile convincersi del fatto che:

$$\begin{aligned}-V(\Phi) &= \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \\ &= \frac{\mu^4}{4\lambda} - \mu^2 \rho^2 - v \lambda \rho^3 - \frac{\lambda}{4} \rho^4\end{aligned}$$

► Termine cinetico.

In questo caso il calcolo non è proprio banalissimo, in particolare dobbiamo sviluppare a dovere il prodotto tra le componenti del campo di gauge e le matrici di Pauli nascosto nella definizione di A_μ . Infatti abbiamo

$$A_\mu \equiv A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A_\mu^3 & A_\mu^1 - iA_\mu^2 \\ A_\mu^1 + iA_\mu^2 & -A_\mu^3 \end{pmatrix}$$

E di conseguenza abbiamo:

$$\begin{aligned}(D_\mu \Phi) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\partial_\mu + \frac{ig}{2} \begin{pmatrix} A_\mu^3 & A_\mu^1 - iA_\mu^2 \\ A_\mu^1 + iA_\mu^2 & -A_\mu^3 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ v + \rho \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \partial_\mu \rho \end{pmatrix} + \frac{ig}{2} (v + \rho) \begin{pmatrix} A_\mu^1 - iA_\mu^2 \\ -A_\mu^3 \end{pmatrix} \right]\end{aligned}$$

Passando quindi al termine cinetico vero e proprio, svolgendo il prodotto scalare si può mostrare che i termini misti si cancellano a vicenda e in un paio di passaggi si arriva al risultato finale:

$$\begin{aligned}(D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \rho) (\partial^\mu \rho) + \frac{1}{2} \left(\frac{g^2 v^2}{4} \right) \sum_{a=1}^3 (A_\mu^a)^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{g^2}{4} \right) (\rho^2 + 2v\rho) \sum_{a=1}^3 (A_\mu^a)^2\end{aligned}$$

Abbiamo quindi tutti gli ingredienti per scrivere la Lagrangiana esplicita nella gauge unitaria:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_u = & \frac{1}{2} (\partial_\mu \rho) (\partial^\mu \rho) - \mu^2 \rho^2 - v \lambda \rho^3 - \frac{\lambda}{4} \rho^4 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu} + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{g^2 v^2}{4} \right) \sum_{a=1}^3 (A_\mu^a)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{g^2}{4} \right) (\rho^2 + 2v\rho) \sum_{a=1}^3 (A_\mu^a)^2\end{aligned} \quad (10.8)$$

Possiamo a questo punto notare che:

- i) Il campo reale scalare ρ è massivo: **lui è il bosone di Higgs!**
- ii) Nella broken phase tutti i bosoni di gauge di SU(2) diventano massivi e sono degeneri in massa: $m_A^2 \equiv \frac{g^2 v^2}{4}$. Questa degenerazione è dovuta al fatto che i termini evidenziati in blu riproducono la struttura di tre [Lagrangiane di Proca](#), una per ogni campo di gauge, ma tutte con coefficienti identici per il termine di massa.
- iii) Non ci sono bosoni di Goldstone nello spettro, i tre attesi sono stati “mangiati” dai tre campi di gauge che sono diventati massivi.
- iv) Confrontando con la (10.6), si può verificare come in entrambi i casi i gradi di libertà siano 10 in totale. Anche qui i gradi di libertà

dei Goldstone sono stati convertiti per descrivere la massività dei bosoni di gauge.

Il numero di bosoni di gauge massivi

Nell'esempio precedente, l'intera simmetria $SU(2)$ era rottata. In casi come questi tutti i bosoni di gauge diventano massivi.

In generale, data una teoria simmetrica sotto il gruppo G che subisce una parziale SSB in $H \leq G$ (che diventa gruppo di simmetria residua), possiamo dire che:

- ▶ inizialmente avremo $\dim G$ bosoni di gauge massless;
- ▶ la SSB genera $\dim G - \dim H$ bosoni di Goldstone, equivalenti al numero di generatori rotti di G .
- ▶ I bosoni di gauge mangiano i bosoni di Goldstone, questo produce dunque $\dim G - \dim H$ bosoni di gauge massivi!
- ▶ **Di conseguenza, persistono in generale $\dim G - (\dim G - \dim H) = \dim H$ bosoni di gauge massless dopo una parziale SSB.**

10.3 Modello Standard: Settore Bosonico

Il modello standard è una teoria di gauge basata sul gruppo

$$\boxed{\begin{array}{c} SU(3)_C \times \underbrace{SU(2)_L \times U(1)_Y}_{\xrightarrow{SSB} U(1)_{EM}} \end{array}}$$

Che, come evidenziato, subisce una parziale rottura spontanea della sua componente $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{EM}$.

Applicando quanto visto poco fa, ci aspettiamo in principio 4 bosoni di gauge massless (3 per $SU(2)_L$ e 1 per $U(1)_Y$), essendo la simmetria residua basata sul gruppo $U(1)$, solo un generatore sarà non rotto e, sulla base dei 3 generatori rotti, ci aspettiamo 3 bosoni di Goldstone.

Dunque, nella broken phase, ci aspettiamo che 3 dei 4 bosoni di gauge iniziali divengano massivi “mangiando” i tre bosoni di Goldstone. Ci aspettiamo inoltre un bosone di gauge massless nello spettro di massa.

Discutiamo ora come funziona il tutto concentrandoci sul settore bosonico.

Introduciamo innanzitutto un doppietto di campi scalari $H = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}$, il *doppietto di Higgs*, di cui chiaramente dobbiamo specificare la legge di trasformazione sotto il gruppo di simmetria $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$.

Indichiamo i tre bosoni di gauge associati al gruppo di gauge $SU(2)_L$ con $W_\mu^{a=1,2,3}$, mentre per quanto riguarda quello associato ad $U(1)_Y$ ² decidiamo di chiamarlo B_μ .

I numeri quantici di H sono $(1, 2, +1/2) \leftrightarrow (SU(3)_C, SU(2)_L, U(1)_Y)$, da cui ricaviamo le seguenti informazioni:

² $U(1)_Y$ è detto *gruppo di gauge di ipercarica*.

- H è un singoletto di $SU(3)_C$, i.e. trasforma in sé stesso.
- H trasforma come un doppietto sotto $SU(2)_L$.
- H ha carica $+\frac{1}{2}$ sotto $U(1)_Y$.

Più nel dettaglio possiamo notare che gli elementi $H_{1,2}$ sono complessi.

Essendo $U(1)_Y$ un gruppo abeliano, per il *Lemma di Schur* tutte le sue rappresentazioni complesse irriducibili sono 1-dimensionali.

Quindi, siccome assume valori in \mathbb{C}^2 , H trasformerà secondo la rappresentazione 2-dimensionale riducibile di $U(1)_Y$.

Indichiamo dunque con Y il generatore di ipercarica e definiamo la sua azione sul doppietto di Higgs come segue:

$$YH = \frac{1}{2} \mathbb{1}_{2 \times 2} H \quad (10.9)$$

Di conseguenza possiamo scrivere le leggi di trasformazione di H sotto $SU(2)_L$ ed $U(1)_Y$:

$$\begin{aligned} SU(2)_L : \quad H(x) &\rightarrow \exp\left(-i\alpha_L^a(x)\frac{\sigma^a}{2}\right)H(x) \\ U(1)_Y : \quad H(x) &\rightarrow \exp\left(-i\theta_Y\frac{1}{2}\mathbb{1}_{2 \times 2}\right)H(x) \end{aligned} \quad (10.10)$$

Chiamiamo con:

- “ g_S ” il coupling di gauge associato al gruppo $SU(3)_C$.
- “ g_L ” il coupling di gauge associato al gruppo $SU(2)_L$.
- “ g_Y ” il coupling di gauge associato al gruppo $U(1)_Y$.

Per quanto riguarda la derivata covariante, la sua azione sul campo H , concentrandoci sulla parte della teoria connessa ad $SU(2)_L \times U(1)_Y$, può essere scritta come segue:

$$D_\mu H = \partial_\mu H + \frac{i g_L}{2} W_\mu^a(x) \sigma^a H(x) + \frac{i g_Y}{2} B_\mu(x) H(x) \quad (10.11)$$

La Lagrangiana nel settore puramente bosonico sarà dunque:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = -\frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a,\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + (D_\mu H)^\dagger (D^\mu H) + \\ + \mu^2 H^\dagger H - \lambda (H^\dagger H)^2 \end{aligned} \quad (10.12)$$

con $W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a - g_L \epsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c$ e $B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$.

SSB di $SU(2)_L \times U(1)_Y$

Nel momento in cui si considerano $\mu^2 > 0$ e $\lambda > 0$ ci si trova davanti alla rottura spontanea della simmetria $SU(2)_L \times U(1)_Y$, con i minimi degeneri descritti dall'equazione

$$H^\dagger H = \frac{\mu^2}{2\lambda} \equiv \frac{v^2}{2}, \quad v^2 = \frac{\mu^2}{\lambda} \quad (10.13)$$

Dimostrazione. È banale convincersene se si considera $X = \sqrt{H^\dagger H}$, da cui $V(X) = -\mu^2 X^2 + \lambda X^4$, e si procede con la solita tecnica per minimizzare il potenziale. \square

Come al solito tutte le configurazioni del vuoto che realizzano la condizione (10.13) sono interconnesse da trasformazioni di simmetria e noi facciamo la seguente scelta:

$$\langle 0 | H | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (10.14)$$

Il punto cruciale sta nel capire quali delle simmetrie sono ancora valide (sempre se qualcuna lo è) o, equivalentemente, quali generatori distruggono il vuoto e quali invece no.

Consideriamo quindi una generica trasformazione di simmetria, appartenente ad $SU(2)_L \times U(1)_Y$, agente su H . Al livello dei generatori sappiamo che, posti T^a e Y generatori di $SU(2)_L$ ed $U(1)_Y$ rispettivamente:

$$\begin{aligned} T^a H &= \frac{\sigma^a}{2} H \\ YH &= \frac{1}{2} \mathbb{1}_{2 \times 2} H \end{aligned}$$

Definendo quella che è una sorta di *formula di Gell-Mann - Nishijima* (a meno del fattore $1/2$), i.e.:

$$Q \equiv T^3 + Y \quad (10.15)$$

in cui chiaramente T^3 assume il ruolo dell'isospin, possiamo verificare piuttosto facilmente che:

$$QH = \begin{pmatrix} H_1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Q \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = 0$$

Ergo il generatore (Hermitiano) $T^3 + Y$ annichilisce il vuoto e la simmetria da questo generata è una simmetria del vuoto!

Difatti la simmetria generata da Q è un sottogruppo abeliano di tipo $U(1)$ di $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Sotto tale sottogruppo il doppietto di Higgs trasforma nel modo seguente:

$$\begin{aligned} H' &= \exp[-i\alpha(T^3 + Y)]H = \exp\left[-i\alpha \frac{1}{2}(\sigma^3 + \mathbb{1}_{2 \times 2})\right]H = \\ &= \exp\left[-i\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]H = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} e^{-i\alpha}H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

H trasforma quindi secondo la rappresentazione 2-dimensionale riducibile del gruppo $U(1)$ generato da $Q = T^3 + Y$.

La prima componente, H_1 , trasforma secondo la rappresentazione irriducibile con carica +1, mentre H_2 non trasforma (carica = 0).

Ricordiamo che, se si prende l'esponenziale matriciale di una matrice diagonale, il risultato sarà una matrice diagonale con, sulla diagonale stessa, l'esponenziale degli elementi della matrice originale.

Gauge unitaria e bosoni di gauge massivi

La SSB $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)$ genera 3 bosoni di Goldstone [dim $SU(2)_L + \dim U(1)_Y - \dim U(1) = 3 + 1 - 1$]. Ci aspettiamo, quindi, che 3 dei bosoni di gauge (tra i 4 che abbiamo chiamato W_μ e B_μ) alla fine dei conti diventino massivi.

Per capire come funzioni **utilizziamo la gauge unitaria**, con la stessa implementazione discussa in precedenza: utilizziamo la trasformazione di gauge per eliminare i campi di Goldstone, definendo

$$H_u(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix} \quad (10.16)$$

con $h(x)$ noto come *campo di Higgs fisico*.

■ Potenziale.

Il calcolo è il solito, esplicitiamo $H^\dagger H = \frac{1}{2}(v + h)^2$ e con qualche passaggio troviamo il potenziale scalare per il campo fisico di Higgs:

$$V(h) = -\mu^2 H^\dagger H + \lambda(H^\dagger H)^2 = -\frac{\mu^4}{4\lambda} + \lambda v^2 h^2 + \lambda v h^3 + \frac{\lambda}{4} h^4$$

Possiamo dunque estrapolare l'informazione relativa alla massa del bosone di Higgs, $m_h^2 = 2\lambda v^2 \approx (125 \text{ GeV})^2$

■ Termine cinetico.

L'elaborazione del termine cinetico ci dà modo di discutere come la massa dei campi di gauge emerga. Innanzitutto scriviamo la derivata covariante di H nella gauge unitaria ossia, partendo dalla sua definizione (10.11), sostituiamo H_u al posto di H :

$$D_\mu H_u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_\mu h \end{pmatrix} + \frac{i g_L}{2\sqrt{2}} W_\mu^a \sigma^a \begin{pmatrix} 0 \\ v + h \end{pmatrix} + \frac{i g_Y}{2\sqrt{2}} \mathbb{1}_{2 \times 2} B_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ v + h \end{pmatrix}$$

Utilizziamo ora:

$$\sum_{a=1}^3 W_\mu^a \sigma^a = \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \quad (10.17)$$

per arrivare, con alcuni banali passaggi, al risultato finale:

$$D_\mu H_u = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{i g_L}{2} (W_\mu^1 - iW_\mu^2)(v + h) \right] \left[\partial_\mu h + \frac{i}{2} (g_Y B_\mu - g_L W_\mu^3)(v + h) \right] \quad (10.18)$$

Non è dunque difficile convincersi del fatto che:

$$(D_\mu H_u)^\dagger (D^\mu H_u) = \frac{1}{2} \left\{ (\partial_\mu h)(\partial^\mu h) + \frac{g_L^2}{4} (v + h)^2 \left[(W_\mu^1)^2 + (W_\mu^2)^2 \right] + \frac{1}{4} (v + h)^2 (g_Y B_\mu - g_L W_\mu^3)^2 \right\} \quad (10.19)$$

Non solo abbiamo trovato il termine cinetico canonicamente normalizzato per il campo fisico di Higgs h , ma abbiamo trovato anche

i termini di massa per i campi di gauge insieme alle loro interazioni con l'Higgs!

Concentriamoci ora sullo **spettro di bassa dei bosoni di gauge**:

$$\left\{ \frac{g_L^2}{4} v^2 \left[(W_\mu^1)^2 + (W_\mu^2)^2 \right] + \frac{1}{4} v^2 (g_Y B_\mu - g_L W_\mu^3)^2 \right\}$$

Notiamo che il primo termine è già diagonale, dunque possiamo direttamente ricavare le masse per i bosoni di gauge $W_\mu^{1,2}$, che sono identiche e pari a:

$$M_W^2 \equiv \frac{g_L^2 v^2}{4} \Rightarrow M_W \equiv \frac{g_L v}{2} \quad (10.20)$$

D'altro canto, il secondo termine non è diagonale, ma possiamo riscriverlo nel modo seguente:

$$\frac{1}{4} v^2 \left[g_Y^2 B_\mu^2 + g_L^2 (W_\mu^3)^2 - 2 g_Y g_L B_\mu W_\mu^3 \right] = \begin{pmatrix} W_\mu^3 & B_\mu \end{pmatrix} \underbrace{\frac{v^2}{4} \begin{pmatrix} g_L^2 & -g_L g_Y \\ -g_L g_Y & g_Y^2 \end{pmatrix}}_{\equiv M^2} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}$$

Risolviamo quindi il problema agli autovalori per la matrice di massa non diagonale M^2 , ovvero l'equazione $\det(M^2 - \lambda \mathbb{1}) = 0$, da cui otteniamo:

$$\lambda \left[\lambda - \frac{v^2(g_L^2 + g_Y^2)}{4} \right] = 0$$

Abbiamo dunque due soluzioni:

$$M_A^2 = 0, \quad M_Z^2 = \frac{v^2}{4} (g_L^2 + g_Y^2) \quad (10.21)$$

Da cui è chiaro che un bosone di gauge sia massless, mentre un altro ancora (3 in tutto con i due di prima) diviene massivo.

Possiamo vedere questa soluzione come il risultato di una trasformazione ortogonale definita da:

$$\begin{aligned} (W^3 \quad B) M^2 \begin{pmatrix} W^3 \\ B \end{pmatrix} &= (W^3 \quad B) O^T (O M^2 O^T) O \begin{pmatrix} W^3 \\ B \end{pmatrix} = \\ &= (W^3 \quad B) O^T \begin{pmatrix} M_Z^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} O \begin{pmatrix} W^3 \\ B \end{pmatrix} \\ &= (Z \quad A) \begin{pmatrix} M_Z^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ A \end{pmatrix} \end{aligned}$$

con autostati di massa $\begin{pmatrix} Z \\ A \end{pmatrix} := O \begin{pmatrix} W^3 \\ B \end{pmatrix}$.

La trasformazione ortogonale viene generalmente parametrizzata sulla base di un parametro noto come angolo di Weinberg, θ_W , nel modo seguente:

$$O := \begin{pmatrix} \cos \theta_W & -\sin \theta_W \\ \sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix}$$

Per trovare il valore dell'angolo basta considerare l'equazione

$$(OM^2O^T) \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} M_Z^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^2 \equiv \frac{v^2}{4} \begin{pmatrix} g_L^2 & -g_L g_Y \\ -g_L g_Y & g_Y^2 \end{pmatrix}$$

Sulle diagonali troviamo due equazioni:

$$\begin{cases} \frac{v^2}{4} (g_Y \cos \theta_W - g_L \sin \theta_W)^2 = 0 \\ \frac{v^2}{4} (g_L \cos \theta_W + g_Y \sin \theta_W) = M_Z^2 \stackrel{(10.21)}{\equiv} \frac{v^2}{4} (g^2 + g_Y^2) \end{cases}$$

Che risolte ci forniscono i seguenti risultati:

$$\boxed{\begin{aligned} g_L \sin \theta_W &= g_Y \cos \theta_W \\ \sin^2 \theta_W &= \frac{g_Y^2}{g_L^2 + g_Y^2} \Rightarrow \cos^2 \theta_W = \frac{g_L^2}{g_L^2 + g_Y^2} \end{aligned}} \quad (10.22)$$

Quindi noti i coupling abbiamo modo di estrarre l'angolo di Weinberg.

Tornando ora alla definizione degli autostati di massa $\binom{Z}{A}$ e sfruttando le (10.22) possiamo esplicitare i campi Z_μ ed A_μ , i.e.:

$$\boxed{\begin{aligned} Z_\mu &\equiv \cos \theta_W W_\mu^3 - \sin \theta_W B_\mu = \frac{1}{(g_L^2 + g_Y^2)^{1/2}} (g_L W_\mu^3 - g_Y B_\mu) \\ M_Z^2 &= \frac{v^2}{4} (g^2 + g_Y^2) \end{aligned}} \quad (10.23)$$

$$\boxed{\begin{aligned} A_\mu &\equiv \cos \theta_W B_\mu + \sin \theta_W W_\mu^3 = \frac{1}{(g_L^2 + g_Y^2)^{1/2}} (g_L B_\mu + g_Y W_\mu^3) \\ M_A^2 &= 0 \end{aligned}} \quad (10.24)$$

Interazioni puramente di gauge

Invece di usare W^1 e W^2 , è buona abitudine introdurre due oggetti che risultano piuttosto familiari nel nome:

$$\boxed{W^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (W^1 - iW^2), \quad W^- \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (W^1 + iW^2)} \quad (10.25)$$

che poi è la stessa cosa di $W^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (W^+ + W^-)$ e $W^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (W^+ - W^-)$.

Scriviamo quindi le interazioni puramente di gauge nella nuova base composta dai quattro bosoni di gauge del modello standard: $\{W^+, W^-, Z, A\}$.

Notiamo innanzitutto che i campi W^\pm sono carichi sotto $U(1)_{EM}$, il gruppo di simmetria residuo generato dalla carica $Q = T^3 + Y$.

Dimostrazione. Per vederlo esplicitamente possiamo passare per la trasformazione di gauge di $W_\mu \equiv \frac{g^a}{2} W_\mu^a$, che si riduce alla sola trasformazione

sotto $SU(2)_L$, in quanto W_μ non trasforma sotto $U(1)_Y$ ed ha dunque $Y = 0$, i.e.:

$$W'_\mu = UW_\mu U^{-1} + \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1}, \quad U = \exp\left(-i\alpha_L^a(x)\frac{\sigma^a}{2}\right)$$

Siccome siamo interessati alle trasformazioni globali, possiamo considerare α_L^a costante e ridurci a considerare trasformazioni del tipo $U = \exp(-i\alpha_L \frac{\sigma^3}{2})$, in cui $Q = T^3$.

Possiamo quindi togliere di mezzo il secondo termine della trasformazione e studiare:

$$W'_\mu = UW_\mu U^{-1} \Rightarrow \frac{\sigma^a}{2} W_\mu^a = U \frac{\sigma^a}{2} W_\mu^a U^{-1}$$

che possiamo tradurre in forma matriciale sfruttando la (10.17), i.e.:

$$\begin{pmatrix} \frac{W_\mu^3}{2} & \frac{W^+}{\sqrt{2}} \\ \frac{W^-}{\sqrt{2}} & -\frac{W_\mu^3}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{W_\mu^3}{2} & \frac{W^+}{\sqrt{2}} \\ \frac{W^-}{\sqrt{2}} & -\frac{W_\mu^3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{+i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \frac{W_\mu^3}{2} & e^{-i\alpha/2} \frac{W^+}{\sqrt{2}} \\ e^{+i\alpha/2} \frac{W^-}{\sqrt{2}} & -\frac{W_\mu^3}{2} \end{pmatrix}$$

□

Dalla comparazione arriviamo alla verifica della tesi:

$W^+ \rightarrow e^{-i\alpha/2} W^+$	trasforma con carica +1
$W^- \rightarrow e^{+i\alpha/2} W^-$	trasforma con carica -1

(10.26)

ed allo stesso tempo possiamo concludere che W^3 , non subendo alcun effetto dalla trasformazione, deve avere carica nulla sotto $U(1)_{EM}$.

10.4 Modello Standard: Settore Fermionico

Termini cinetici

10.5 Correnti Elettrodeboli

10.6 Generazione di Massa

10.7 Il decadimento del muone

Notazione

Il seguente elenco descrive alcuni simboli che sono usati in questo documento.

\mathbb{H}	Insieme dei quaterioni
\mathbb{N}	Numeri naturali - <i>Natural numbers</i>
\mathcal{H}	Spazio di Hilbert - <i>Hilbert space</i>
$\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$	Algebra di Lie (matriciale) - <i>(matrix) Lie algebra</i>
\mathcal{U}	Gruppo degli operatori unitari nello spazio di Hilbert (usato in QM)
U	Gruppo di Lie degli operatori unitari
c	Velocità della luce nel vuoto in un sistema di riferimento inerziale
E	Spazio di Banach - <i>Banach space</i>
H	Hamiltoniana o funzione di Hamilton
h	Costante di Planck
U	Operatore unitario

Lettere greche con pronuncia inglese

Carattere	Nome	Carattere	Nome
α	alpha <i>AL-fuh</i>	ν	nu <i>NEW</i>
β	beta <i>BAY-tuh</i>	ξ, Ξ	xi <i>KSIGH</i>
γ, Γ	gamma <i>GAM-muh</i>	\omicron	omicron <i>OM-uh-CRON</i>
δ, Δ	delta <i>DEL-tuh</i>	π, Π	pi <i>PIE</i>
ϵ	epsilon <i>EP-suh-lon</i>	ρ	rho <i>ROW</i>
ζ	zeta <i>ZAY-tuh</i>	σ, Σ	sigma <i>SIG-muh</i>
η	eta <i>AY-tuh</i>	τ	tau <i>TOW (as in cow)</i>
θ, Θ	theta <i>THAY-tuh</i>	υ, Υ	upsilon <i>OOP-suh-LON</i>
ι	iota <i>eye-OH-tuh</i>	ϕ, Φ	phi <i>FEE, or FI (as in hi)</i>
κ	kappa <i>KAP-uh</i>	χ	chi <i>KI (as in hi)</i>
λ, Λ	lambda <i>LAM-duh</i>	ψ, Ψ	psi <i>SIGH, or PSIGH</i>
μ	mu <i>MEW</i>	ω, Ω	omega <i>oh-MAY-guh</i>

Capitals shown are the ones that differ from Roman capitals.