# AJUSTE DE CURVAS E MODELAGEM POPULACIONAL DE PETRÓPOLIS NO PERÍODO DE 1982 A 1990. III Encontro de Matemática Aplicada (2013)



Rodrigo Medeiros
Universidade Federal de Viçosa (UFV)

# AJUSTE DE CURVAS E MODELAGEM POPULACIONAL DE PETRÓPOLIS NO PERÍODO DE 1982 A 1990

**Rodrigo de Vasconcellos Viana Medeiros** – rodrigodevasconcellos.medeiros@gmail.com
Universidade Católica de Petrópolis, 25610-130 - Petrópolis, Rj, Brasil
**Eliane dos Santos de Souza Coutinho** – eliane.coutinho@ucp.br
Universidade Católica de Petrópolis, 25610-130 - Petrópolis, Rj, Brasil

***Resumo.*** *A modelagem matemática nos ajuda a reproduzir e compreender um determinado aspecto do mundo real. Como exemplo, temos os modelos que descrevem a evolução temporal de populações. Neste trabalho, tivemos por objetivo encontrar um modelo matemático que melhor se adapte aos dados dos censos populacionais do município de Petrópolis (RJ) no período de 1982 a 1990. Utilizamos três modelos matemáticos de ajuste de curvas: Linear, Exponencial e Logístico. A análise dos modelos nos permite uma previsão da população para os próximos anos.*

***Palavras-chave:*** *Modelagem Populacional, Ajuste de Curvas, Modelos Matemáticos*

## 1. INTRODUÇÃO

A cidade de Petrópolis, situada na Região Serrana do estado do Rio de Janeiro, foi fundada em 1843 com cerca de 2.000 habitantes. Dada as grandes regiões montanhosas em seu entorno a questão populacional tornou-se um elemento chave para compreender os atuais problemas ocupacionais da cidade. O objetivo de qualquer gestor é desenvolver uma estratégia que promova esse crescimento sem que ocorram fortes impactos para os moradores da região. É nesse contexto que a modelagem matemática pode contribuir para simular diversos cenários, contribuindo para uma avaliação crítica dos possíveis impactos causados por esse crescimento. Sob este aspecto, o ajuste de curvas surge como uma ferramenta formal para expressar alguma tendência do comportamento da população petropolitana em relação ao tempo. Em outras palavras, o ajuste de curvas funciona basicamente como a tentativa de se obter uma função a partir de dados de duas variáveis que irão se comportar de uma certa forma no plano cartesiano.

É interessante notar que a utilização da modelagem matemática está relacionada à questão da multidisciplinariedade, ou seja, o uso dos modelos matemáticos está atrelado aos mais diversos campos de pesquisa. Por este motivo, ela contribui para a interação entre os pesquisadores que utilizam esta ferramenta, expandindo em várias direções os possíveis questionamentos que surgirão durante a análise dos dados em relação à realidade encontrada. Se os resultados encontrados forem suficientemente bons para fazer certas previsões, a modelagem foi um sucesso e possivelmente o modelo será validado. Caso os resultados não reflitam a realidade, está na hora de repensar os procedimentos tomados e aperfeiçoar a modelagem e, neste aspecto, uma das técnicas mais utilizadas e eficientes é o ajuste de curvas.

## 2. MODELAGEM E MODELOS MATEMÁTICOS

A modelagem é uma maneira de simplificar o mundo real, de reproduzir e entender um determinado aspecto de um fenômeno (cf. Scheffer, apud Kfouri, 2008, p.75). Todo modelo matemático passa por uma série de etapas da modelagem, que são essenciais para identificar se o modelo está conseguindo atingir seus objetivos. Isso significa dizer que seja o modelo estático ou dinâmico, determinístico ou estocástico, a interação do modelo para reconhecer o real problema pesquisado e, assim, a familiarização com o assunto a ser modelado torna-se o primeiro passo para a sua construção. No processo de desenvolvimento de um modelo matemático, começamos escolhendo um tema e então medimos ou quantificamos os dados. Em seguida, representamos os resultados em uma tabela. (c.f Bassanezi, 2006) A disposição dos dados em um sistema cartesiano e um bom ajuste dos seus valores facilitará a visualização do fenômeno em estudo, propiciando tentativas de propostas de problemas, conjecturas ou leis de formação (Idem, 2006).

Genericamente, pode-se dizer que matemática e realidade são dois conjuntos disjuntos e a modelagem é um meio de fazê-los interagir. Segundo Biembengut e Hein (2007, p. 15) essa interação envolve uma série de procedimentos, que podem ser agrupados em três etapas, subdivididas em seis subetapas conforme (Fig. 1):

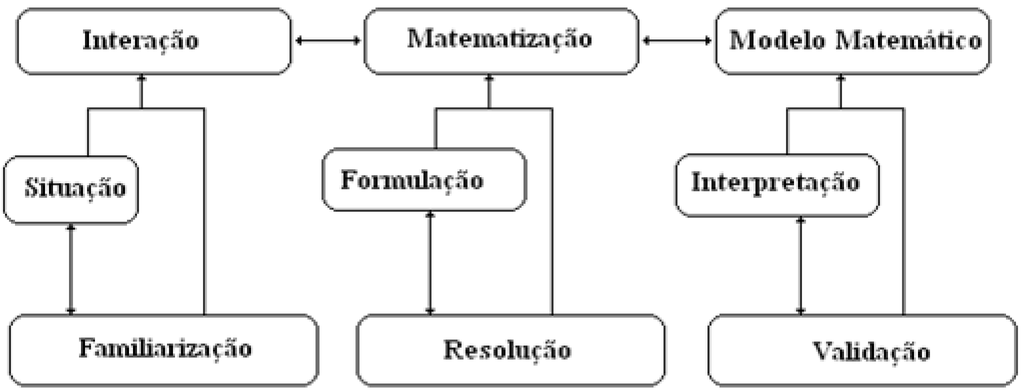

Figura 1. Dinâmica da modelagem matemática.

Na primeira fase, faz-se o reconhecimento da situação-problema e um estudo de referencial teórico para a familiarização com o assunto a ser modelado.

A fase da matematização é onde devem ser formuladas as hipóteses do modelo e a partir disso sua resolução em termos matemáticos. Por fim, construído o modelo chega a hora de interpretá-lo, analisando as implicações da solução encontrada e investigando se isto traduz a realidade.

Se o modelo não atender às necessidades que o geraram, o processo deve ser retomado na segunda etapa, matematização, mudando-se ou ajustando hipóteses, variáveis e etc.

## 3. AJUSTE DE CURVAS

Para estudar a dinâmica populacional da cidade de Petrópolis foram consideradas, inicialmente, três hipóteses que a população poderia assumir durante o período estudado

(1982 - 1990): comportamento próximo a um ajuste linear, exponencial ou logístico. A metodologia adotada nos ajustes está baseada na utilização de uma regressão na qual o método dos mínimos quadrados é o mais indicado para obter os melhores resultados, uma vez que tal método é um dos mais disseminados pelo meio acadêmico.

Neste método considera-se um conjunto de $n$ dados observados $\{\overline{x}_i, \overline{y}_i\}, i = 1, 2, 3, \ldots, n$ e uma função $y(x) = f(x; a_1, a_2, \ldots, a_k)$, onde $a_j\,(j = 1, \ldots, k)$ são os parâmetros. O método dos quadrados mínimos consiste em determinar estes parâmetros de modo que "minimize" o valor de $S = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[f\left(\overline{x}_i; a_1, a_2, \ldots, a_k\right) - \overline{y}_i\right]^2$, isto é, devemos minimizar a soma dos quadrados dos desvios entre os valores $\overline{y}_i$, observados e os valores $y_i = f\left(\overline{x}_i; a_1, a_2, \ldots, a_k\right)$ ajustados. Neste caso, devemos encontrar os valores dos parâmetros $a$ e $b$ que tornam mínimo o valor da soma dos quadrados dos desvios:

$$S = S(a,b) = \sum_{i=1}^{n}\left(a\overline{x}_i + b - \overline{y}_i\right)^2$$

Aplicando propriedades de produtos notáveis e de somatório encontraremos:

$$S = S(a,b) = \left(\sum_{i=1}^{n}\overline{x}_i^2\right)a^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n}\overline{x}_i\right)ab + nb^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n}\overline{x}_i\overline{y}_i\right) - 2\left(\sum_{i=1}^{n}\overline{y}_i\right)b + \left(\sum_{i=1}^{n}\overline{y}_i^2\right) \qquad (1)$$

Derivando a eq. (1) parcialmente para $a$ e $b$ e reorganizando os termos iremos encontrar o sistema de equações:

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n}\overline{x}_i^2\right)a + \left(\sum_{i=1}^{n}\overline{x}_i\right)b = \left(\sum_{i=1}^{n}\overline{x}_i\overline{y}_i\right) \\ \left(\sum_{i=1}^{n}\overline{x}_i\right)a + nb = \sum_{i=1}^{n}\overline{y}_i \end{cases} \qquad (2)$$

Isolando $b$ na segunda equação do sistema acima encontraremos:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n}\overline{y}_i - a\sum_{i=1}^{n}\overline{x}_i}{n} \qquad (3)$$

Substituindo o valor de $b$ da eq. (3) na primeira equação do sistema (2) temos:

$$a = \frac{n\sum\overline{x}_i\overline{y}_i - \sum\overline{x}_i\sum\overline{y}_i}{n\sum\overline{x}_i^2 - \left(\sum\overline{x}_i\right)^2} \qquad (4)$$

### 3.1 Ajuste linear

O ajuste linear é caracterizado pela forma

$$y = ax + b \tag{5}$$

Onde os parâmetros *a* e *b* são encontrados pelo método dos mínimos quadrados, de forma que tais parâmetros minimizam os valores das somas dos desvios. Com base nos dados obtidos no SIAB (Sistema de Informação da Atenção Básica de Saúde da Secretaria Municipal de Petrópolis e no IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística) a população petropolitana foi encontrada e está discriminada na tabela 1 para o cálculo dos parâmetros do ajuste linar.

Tabela 1. Ajuste Linear da População de Petrópolis

| ANO | POPULAÇÃO ($y_i$) | $x_i$ | $x_i.y_i$ | $(x_i)^2$ |
|---|---|---|---|---|
| **1982** | 233.955 | 1 | 233.955 | 1 |
| **1983** | 236.409 | 2 | 472.818 | 4 |
| **1984** | 238.856 | 3 | 716.568 | 9 |
| **1985** | 241.295 | 4 | 965.180 | 16 |
| **1986** | 243.712 | 5 | 1.218.560 | 25 |
| **1987** | 246.094 | 6 | 1.476.564 | 36 |
| **1988** | 248.926 | 7 | 1.742.482 | 49 |
| **1989** | 250.699 | 8 | 2.005.592 | 64 |
| **1990** | 252.916 | 9 | 2.276.244 | 81 |
| **SOMA** | **2.192.862** | **45** | **11.107.963** | **285** |

Fonte: Medeiros e Coutinho, dados da pesquisa.

Transformando cada ano em um respectivo $x_i$ e utilizando as eq. (3) e (4) encontraremos os parâmetros *a* e *b* que melhor ajustam os dados obtidos:

$$a = \frac{n\sum \bar{x}_i \bar{y}_i - \sum \bar{x}_i \sum \bar{y}_i}{n\sum \bar{x}_i^2 - \left(\sum \bar{x}_i\right)^2} = \frac{9(11.207963) - (2.192862)(45)}{9(285) - (45)^2} = 2.394,22$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i - a\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i}{n} = \frac{(2.192.862) - (2.394,22)(45)}{9} = 231.680,25$$

Portanto, substituindo na eq. (5) os resultados encontrados, depararemos com a função que melhor ajusta os dados populacionais de Petrópolis:

$$y = 2.394,22x + 231.680,25$$

Como o ajuste linear pressupõe que a variação no número de indivíduos é constante, isto é, a quantidade de indivíduos por unidade de tempo não varia com o tempo, tal ajuste não é o melhor para modelos dados demográficos uma vez que toda população tende a uma certa estabilidade depois de um intervalo de tempo.

### 3.2 Ajuste linear de modelos exponenciais

Para os modelos exponenciais, o ajuste linear é utilizado quando a representação deste modelo se aproxima da equação (6):

$$y = be^{ax} \tag{6}$$

Todavia para que o ajuste linear seja utilizado e, consequentemente, o método dos mínimos quadrados, uma mudança nas variáveis deve ser providenciada, isto é:

$$\begin{aligned} & y = be^{ax} \\ & \ln y = \ln b + \ln e^{ax} \\ & \ln y = z \Rightarrow \boxed{z = \beta + \alpha x} \end{aligned} \tag{7}$$

O fato é que ao aplicarmos o logaritmo natural para a população *y*, $\beta$ e $\alpha$ tornaram-se, respectivamente, semelhantes à *b* e *a* da eq. (5) possibilitando o emprego dos mínimos quadrados no ajuste.

Tabela 2. Ajuste exponencial da população de Petrópolis

| ANO | POPULAÇÃO (y) | x | z=lnY | x.z |
|---|---|---|---|---|
| **1982** | 233.955 | 1 | 12,3629 | 12,3629 |
| **1983** | 236.409 | 2 | 12,3733 | 24,7466 |
| **1984** | 238.856 | 3 | 12,3836 | 37,1508 |
| **1985** | 241.295 | 4 | 12,3938 | 49,5751 |
| **1986** | 243.712 | 5 | 12,4037 | 62,0187 |
| **1987** | 246.094 | 6 | 12,4135 | 74,4808 |
| **1988** | 248.926 | 7 | 12,4249 | 86,9744 |
| **1989** | 250.699 | 8 | 12,432 | 99,4561 |

Fonte: Medeiros e Coutinho, dados da pesquisa.

Sendo assim, o ajuste a ser procedido será semelhante ao ajuste do modelo linear :

$$\alpha = \frac{n\sum \bar{x}_i \bar{z}_i - \sum \bar{x}_i \sum \bar{z}_i}{n\sum \bar{x}_i^2 - \left(\sum \bar{x}_i\right)^2} = \frac{9(558,7328) - (45)(111,6285)}{9(285) - (45)^2} = 0,0098$$

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{z_i} - a\sum_{i=1}^{n} \overline{x_i}}{n} = \frac{(111,6285) - (0,0098)(45)}{9} = 12,3540$$

Um último procedimento deve ser feito em $\beta$ pois ele está na base logarítmica. Então, temos:

$$\beta = \ln b \Rightarrow b = e^{\beta} \Rightarrow b = e^{12,3540} = 231.885,73$$

Após isso basta substituir os parâmetros encontrados na eq. (6) para encontrarmos a equação que melhor se ajusta ao modelo exponencial:

$$y = 231.885,73e^{0,0098x}$$

### 3.2 Ajuste linear para o modelo logístico

A expressão da curva logística é dada por:

$$y(x) = \frac{a}{be^{\lambda x} + 1} \tag{8}$$

Onde $a = y^*$, $b = \frac{y^*}{y_0} - 1$ e $\lambda = \alpha y^*$ é taxa de reprodutividade máxima.

Usando a mudança de variáveis temos,

$$z = ln\left(\frac{\frac{y}{a}}{1 - \frac{y}{a}}\right) \Rightarrow z = ln\left(\frac{1}{b}e^{\lambda x}\right) \tag{9}$$

E obtemos a equação da reta

$$z = \lambda x - ln b \tag{10}$$

Para estimar a capacidade suporte para a população de Petrópolis, utilizou-se o método de Ford-Walford (Bassanezi, 2002, p.72). Para se obter um valor razoável de $y^*$ é conveniente considerar somente os valores no qual a taxa de crescimento começou a apresentar redução. Observando a tabela 3, verifica-se que isto ocorre a partir de 1982 ($t=0$).

Tabela 3. Crescimento relativo no período 1982 - 1990

| ANO | POPULAÇÃO ($y_i$) | Crescimento relativo |
|---|---|---|
| **1982** | 233.955 | 0,0104892 |
| **1983** | 236.409 | 0,0103507 |
| **1984** | 238.856 | 0,0102112 |
| **1985** | 241.295 | 0,0100168 |
| **1986** | 243.712 | 0,0097738 |
| **1987** | 246.094 | 0,0094761 |
| **1988** | 248.926 | 0,0071225 |
| **1989** | 250.699 | 0,0088433 |
| **1990** | 252.916 | |

Fonte: Medeiros e Coutinho, dados da pesquisa.

Este método supõe que, uma vez a população em equilíbrio, ela não varia mais, isto é, $y_{t+1} = y_t$. Assim a estimativa deste valor limite pode ser obtida relacionando os valores das populações nos instantes $t$ e $t+1$. A partir dos pontos obtidos, ajusta-se uma reta que descreve como as populações consecutivas estão relacionadas $y_{t+1} = f(y)_t = ay_t + b$, conforme mostrado na Figura 2. Para encontrar o valor de equilíbrio, basta determinar a interseção desta reta com a bissetriz, uma vez que estamos supondo que no valor limite a população não varia, isto é, $y_{t+1} = y_t$.

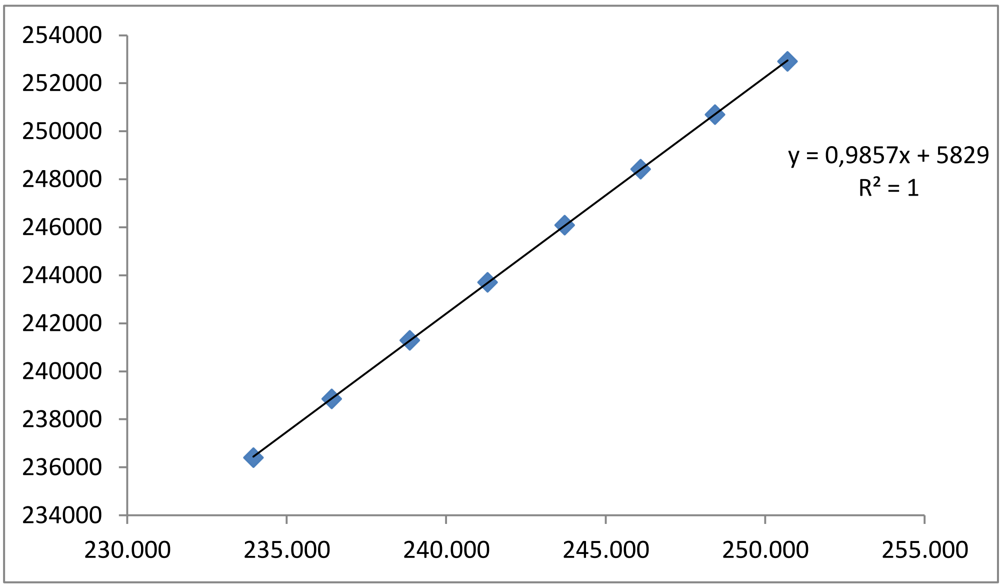


Figura 2. Reta utilizada para encontrar o valor de equilíbrio.

Assim, nas estimativas dos valores de *a* para este modelo, foram considerados os valores populacionais de 1982 a 1989.

Fazendo a interseção da reta da fig. 2 com a bissetriz encontramos o valor-limite da população

$$a = y^* = \frac{5829}{1-0,985} = 388.533$$

Para encontrar os valores de $b$ e $\lambda$ eq. (10) utilizamos a mudança de variáveis obtida na eq. (9) e encontramos de z em cada período, conforme tabela 4.

Tabela 4. Estimativa dos valores de $b$ e $\lambda$ para o modelo logístico.

| **Ano** | **Tempo** | $\mathbf{Y_t}$ | $\mathbf{Y_{t+1}}$ | **Z** |
|---|---|---|---|---|
| **1982** | 0 | 233955 | 236409 | 0,41443 |
| **1983** | 1 | 236409 | 238856 | 0,440867 |
| **1984** | 2 | 238856 | 241295 | 0,467381 |
| **1985** | 3 | 241295 | 243712 | 0,49397 |
| **1986** | 4 | 243712 | 246094 | 0,520489 |
| **1987** | 5 | 246094 | 248426 | 0,5468 |
| **1988** | 6 | 248926 | 250699 | 0,578324 |
| **1989** | 7 | 250699 | 252916 | 0,598203 |

Fonte: Medeiros e Coutinho, dados da pesquisa.

Utilizando os mínimos quadrados são obtidos os valores de $b$ e $\lambda$ para a eq. (10)

$$z = 0,026x + 0,414$$

Fazendo a mudança de base em $b$ temos $b = e^{0,414} \Rightarrow b = 0,66$

Portanto, a curva logística que ajusta esses dados é dada por:

$$y(x) = \frac{388.533}{0.66e^{0,026x} + 1}$$

## 4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Uma comparação básica entre os modelos propostos foi feita a partir do cálculo do erro entre os valores reais e os valores estimados em cada modelo. Assim, uma avaliação mais crítica sobre cada modelo poderá ser feita.

Tabela 5. Erros dos modelos

| ANO | LINEAR | ERRO | EXPONENCIAL | ERRO | LOGISTÍCO | ERRO | REAL |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1982 | 234.074,50 | 5,11% | 234.177,13 | 9,49% | 234.051,36 | 4,12% | 233.955 |
| 1983 | 236.468,70 | 2,53% | 236.491,50 | 3,49% | 236.493,59 | 3,58% | 236.409 |
| 1984 | 238.862,90 | 0,29% | 238.828,73 | 1,14% | 238.921,88 | 2,76% | 238.856 |
| 1985 | 241.257,10 | 1,57% | 241.189,07 | 4,39% | 241.335,54 | 1,68% | 241.295 |
| 1986 | 243.651,30 | 2,49% | 243.572,73 | 5,71% | 243.733,85 | 0,90% | 243.712 |
| 1987 | 246.045,60 | 1,97% | 245.979,95 | 4,63% | 246.116,14 | 0,90% | 246.094 |
| 1988 | 248.439,80 | 19,53% | 248.410,95 | 20,69% | 248.481,77 | 17,85% | 248.926 |
| 1989 | 250.834 | 5,38% | 250.865,99 | 6,66% | 250.830,08 | 5,23% | 250.699 |
| 1990 | 253.228,20 | 12,34% | 253.345,29 | 16,97% | 253.160,47 | 9,67% | 252.916 |

Fonte: Medeiros e Coutinho, dados da pesquisa.

Nota-se que, para os valores no período de 1982 a 1990, o modelo que mais se aproxima dos dados é o logístico. A elaboração dos modelos matemáticos apresentados proporcionou a vivência da modelagem matemática no estudo da dinâmica populacional com o uso de ajuste de curvas. Para os três modelos testados os erros cometidos através dos modelos lineares se aproximam do modelo logístico, que contempla a hipótese da população ter uma capacidade-limite.

Para projeções em curto prazo, tanto o modelo linear como o exponencial são adequados, mas pelo fato de admitirem um crescimento ilimitado, espera-se que à medida que o tempo passe, a estimativa através do modelo logístico seja mais razoável, e o erro cometido menor. Este trabalho reforça a ideia da importância da matemática nos estudos de fenômenos reais.

## AGRADECIMENTOS

Ao CNPq pela concessão da bolsa de iniciação científica.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BASSANEZI, R.C. *Equações diferenciais com aplicações.* Ed. Harbra, S.Paulo. 1988.

BASSANEZI, R.C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática.* Ed. Contexto, S.Paulo. 2006.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. *Modelagem matemática no ensino*. 4.ed. São Paulo: Contexto, 2007.

COUTINHO, Eliane SS. *A Dinâmica populacional do pirarucu (arapaima gigas) na reserva de desenvolvimento sustentável Mamirauá* (RDSM), Amazônia. Tese de doutorado, LNCC, 2008.

IBGE. Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. *Banco de Metadados.* 2013.

SCHEFFER, N.F. *Modelagem matemática: uma abordagem para o ensino aprendizagem da matemática.* Educação Matemática em Revista, SBEM-RS, n.01, p.11- 16, janeiro/junho 1999.

SIAB. Sistema de Informação da Atenção Básica. *Dados disponibilizados pela secretaria municipal de saúde de Petrópolis*. 2013

CURVE FITTING AND MODELING POPULATION IN THE CITY OF PETRÓPOLIS BETWEEN 1982 AND 1990

Abstract: Mathematical modeling helps us to understand a particular aspect of the real world. For instance, there are models that describe the population growth through time. This article intends to find a mathematical model that best fits the data from the population census in the city of Petrópolis (RJ) in the period 1982-1990. We will use three mathematical models of curve fitting: Linear, Exponential and Logistic. The analyse of the models allows us to predict population growth in the coming years.

***Keywords:*** *Population Modeling, Curve Fitting, Mathematical Models*