



# Análise e comparação assintótica de algoritmos de ordenação

Disciplia:

# Projeto e Análise de Algoritmos

Grupo constituído por:

- 01 Lucas Evangelista Freire
- 02 João Gabriel Alves de Souza
- 03 Larissa Mitie Curi Hirai
- 04 Fernanda Menezes Plessim de Melo
- 05 Welton Santana de Andrade Junior

# Resumo



Conforme solicitado pelo professor Dr. Warley Gramacho este artigo visa realizar uma comparação de eficiência entre diferentes algoritmos de ordenação (sorting algorithms) tendo como base a complexidade de cada um deles.

Ao longo do artigo pontos como a relação de recorrência de cada algoritmos, complexidade e tempo de execução serão comparadas visando mostrar como eles se comportam dadas entradas já ordenadas de forma crescente, aleatórias e ordenadas de forma decrescente, assim obtendo os tempos de melhor caso, caso médio e pior caso.

# Introdução

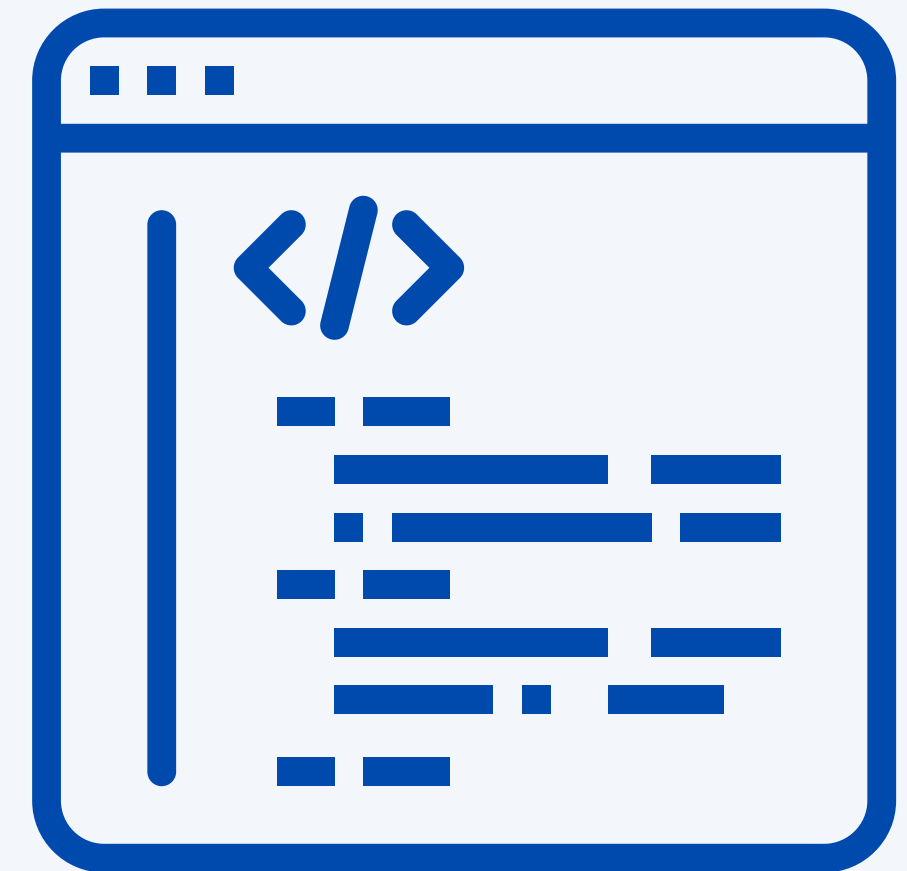
Este trabalho visa realizar a comparação de diferentes algoritmos de ordenação buscando explicar a teoria por trás da complexidade de cada um mostrando suas relações de recorrência.

Ao final deste artigo buscando retratar de forma mais palpável a eficiência de cada algoritmo serão realizadas uma série de comparações entre os algoritmos de forma mais empírica, apresentando o tempo de execução de cada um quando submetidos ao mesmo vetor.

Todas as implementações serão realizadas em python

## Algoritmos:

Bubble sort, Insertion sort, Quick sort, Merge sort, Shell sort, Comb sort, Heap sort, Selection sort.



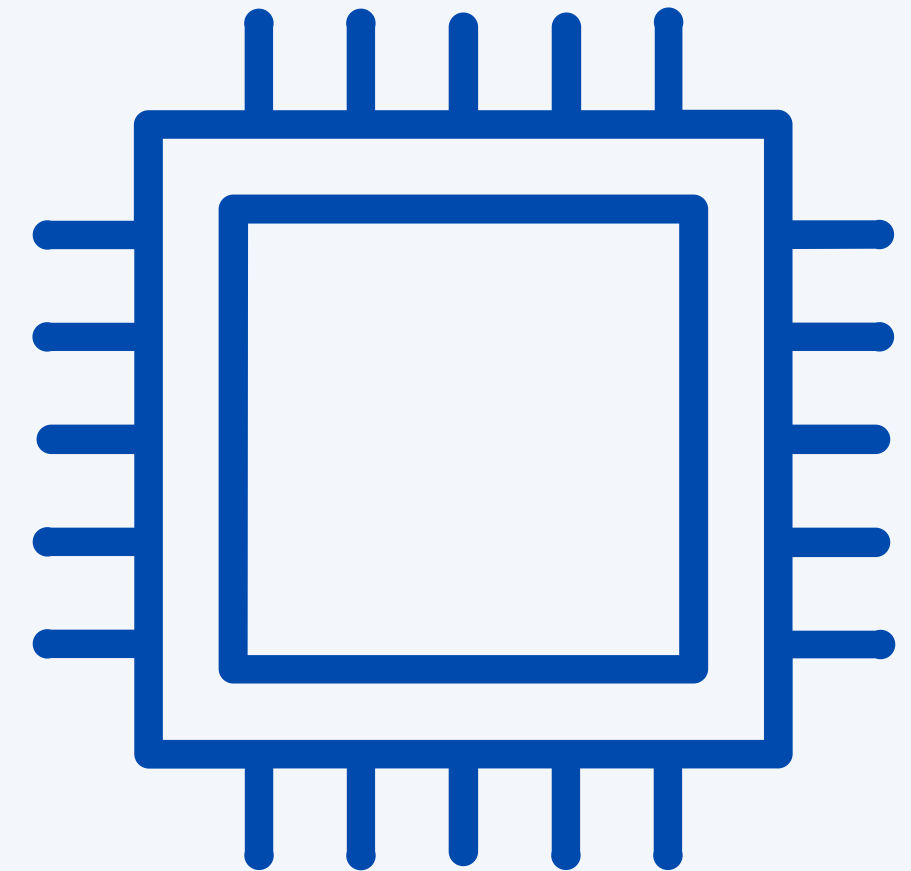
# Especificações de hardware

Por mais que haja a complexidade de cada algoritmo o hardware em que ele é executado é uma variável no resultado final visto que quanto mais atual o hardware mais rápido o algoritmo será executado.

Vale lembrar que mesmo que hajam dois hardwares com especificações diferentes dependendo do algoritmo, em dado momento se submetidos ao mesmo caso o hardware mais fraco pode terminar a execução primeiro.

Segue abaixo a especificação do hardware utilizado, tendo em vista que foi-se utilizado o plano gratuito do site replit :

Cpu : 0,5 vCPU  
RAM : 512 Mb



# Bubble sort

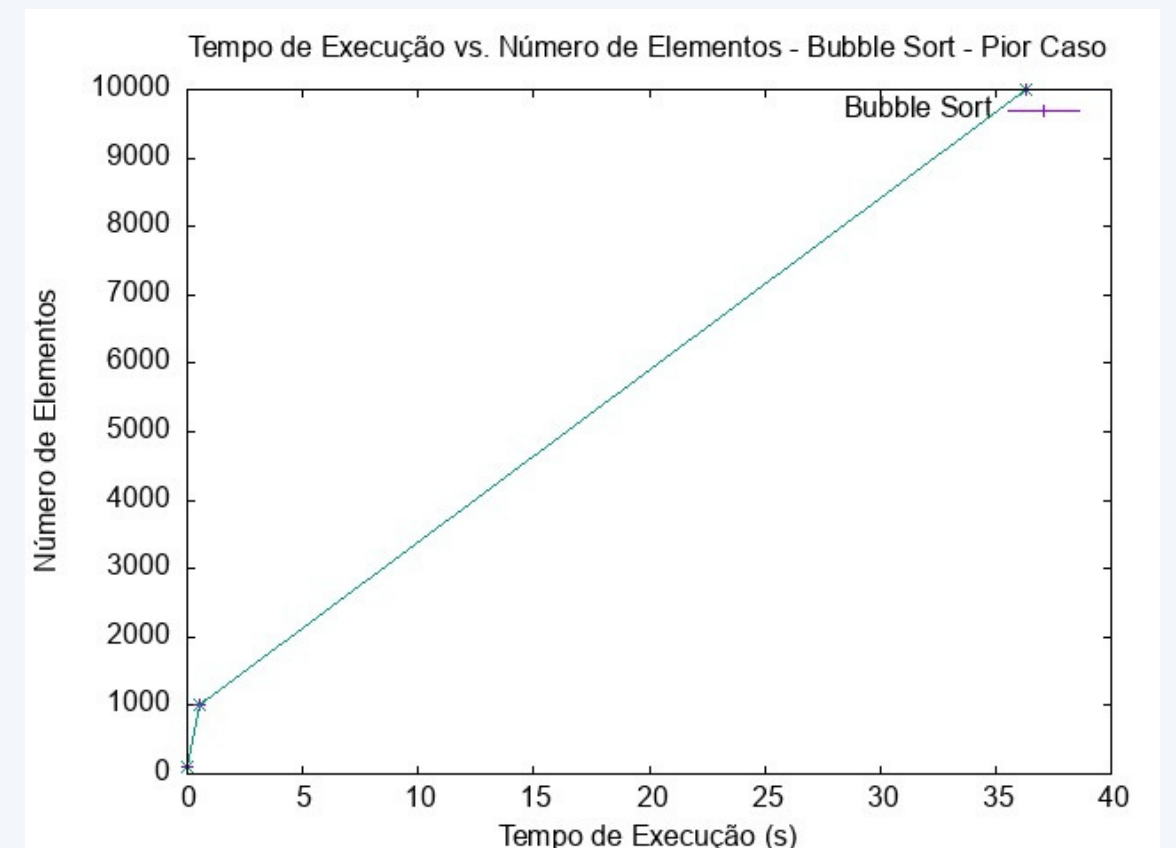
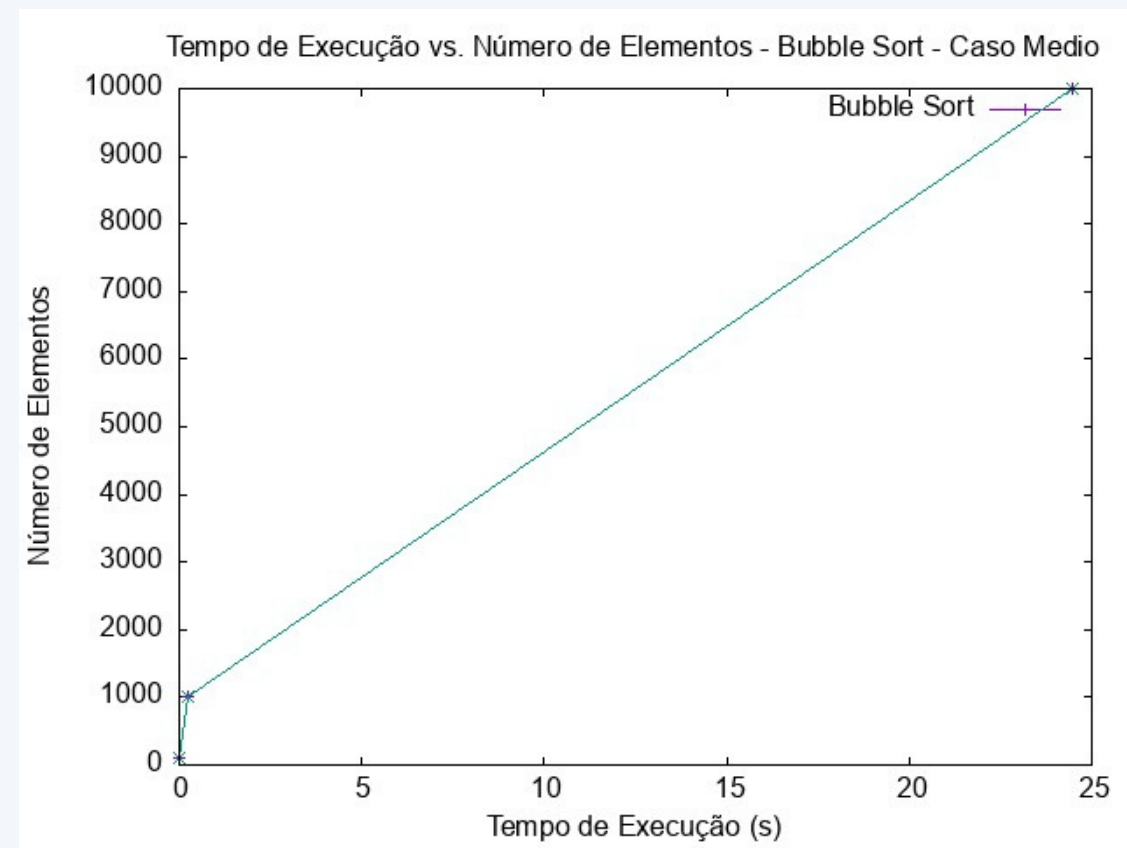
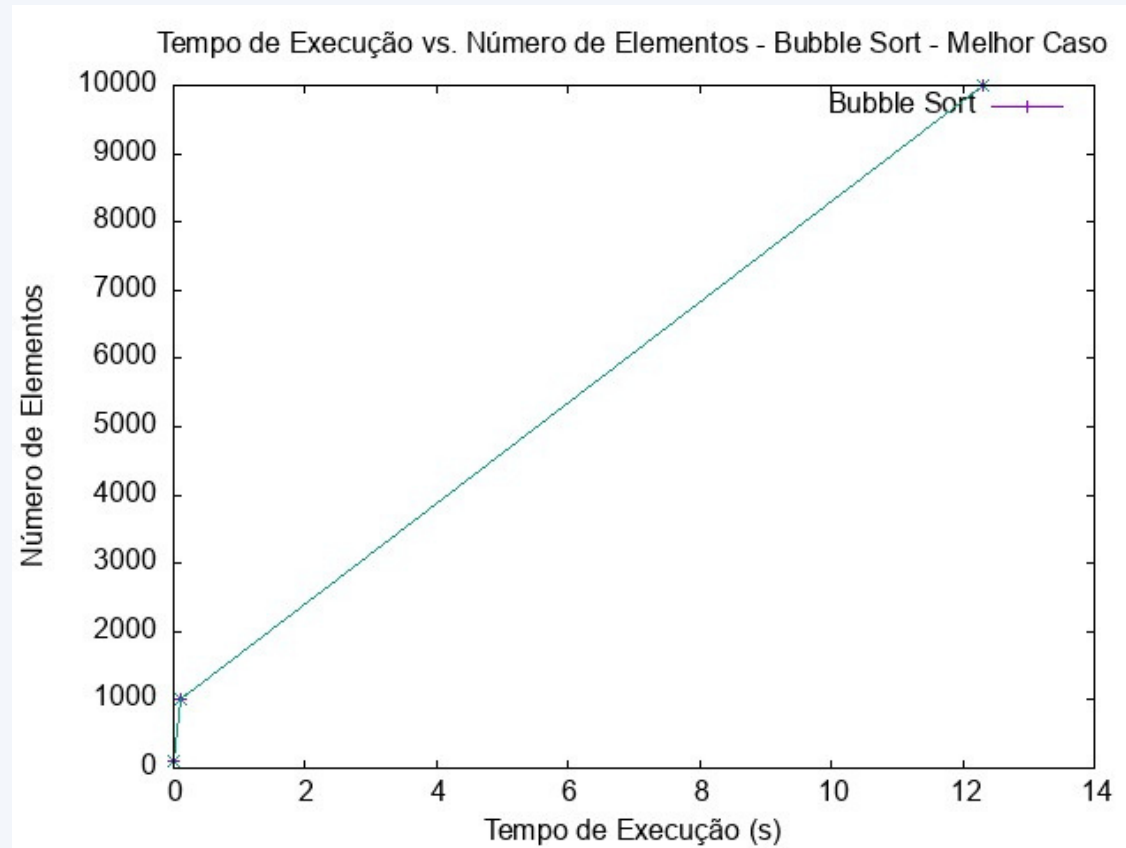
```
function bubbleSort (int array) {  
    int m, n, swap;  
    for (m = 0; m < array - m; m++) {  
        for (n = 0; n < array - (m + 1); n++)  
            if (array [n] > array [n + 1]) {  
                swap = array [n];  
                array [n] = array [n + 1];  
                array [n + 1] = swap  
            }  
        }  
    }  
    return array;  
}
```

- Um algoritmo de ordenação simples e intuitivo.
- Baseia-se na comparação de pares adjacentes de elementos.
- Fácil de entender e implementar.
- Estável, ou seja, preserva a ordem de elementos com mesmo valor
- O algoritmo no pior caso (array invertido) e no caso médio (array aleatório) tem complexidade  $n^2$  e tem por relação de recorrência o seguinte :
  - $T(n) = T(n - 1) + n - 1$
- No melhor caso o algoritmo recebe um vetor ordenado e nunca é executado visto que não há necessidade de uma ordenação, logo sua complexidade é  $O(n)$ .

# Bubble sort

Casos	Tempo de execução	Número de trocas
Melhor caso com 100 posições Melhor caso com 1000 posições Melhor caso com 10000 posições	0.001751420000800863 0.272968235000000755 31.093445957000768	0 0 0
Caso médio com 100 posições Caso médio com 1000 posições Caso médio com 10000 posições	0.002546239000366768 0.5836652469997716 57.047481122000136	2333 250251 24966640
Pior caso com 100 posições Pior caso com 1000 posições Pior caso com 10000 posições	0.003795009999521426 0.7202099539999836 79.82543029200042	4950 499500 49995000

# Bubble sort





# Selection Sort

```
Function SelectionSort(array[]):  
  int i, j, menor, aux;  
  for (i ← 0; i < array; i++) do  
    menor ← i;  
    for (j ← i + 1; j < array; j++) do  
      if (array [j] < array [menor]) then  
        menor ← j;  
      end  
    end  
    if (array [i] ≠ array [menor]) then  
      aux ← array [i];  
      array [i] ← array [menor];  
      array [menor] ← aux;  
    end  
  end  
  return array;
```

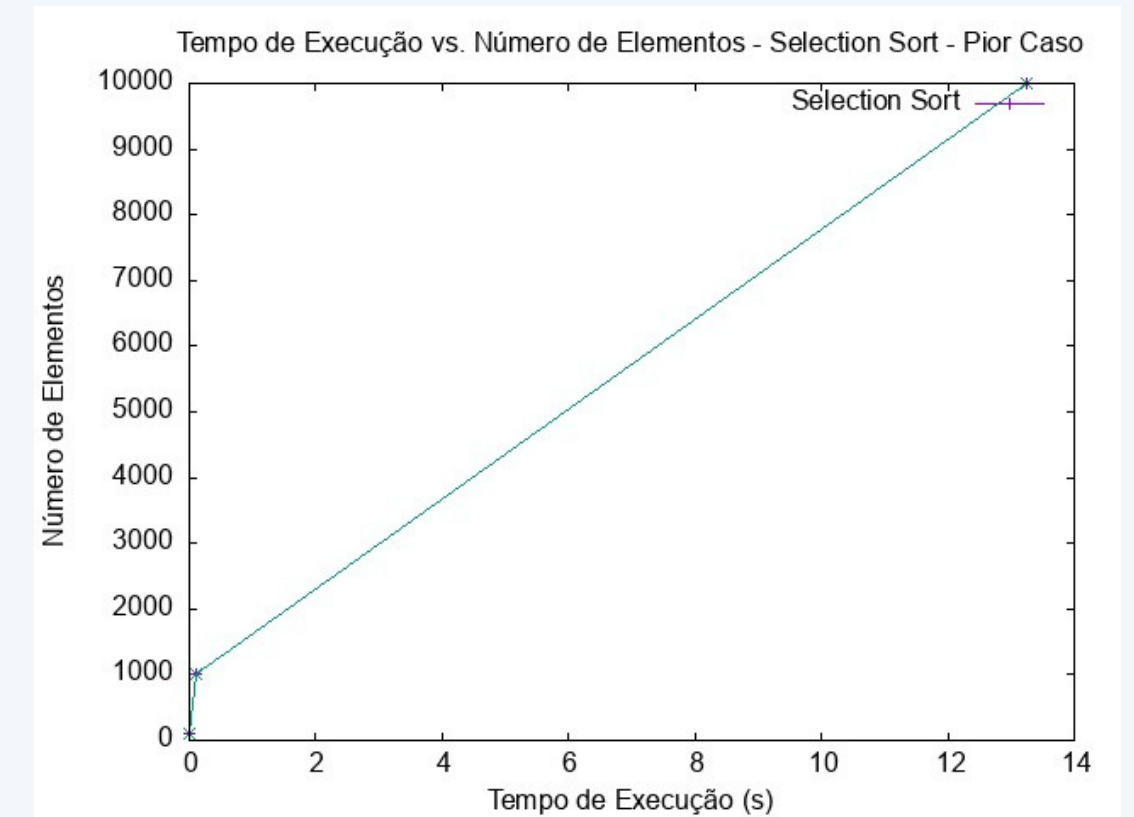
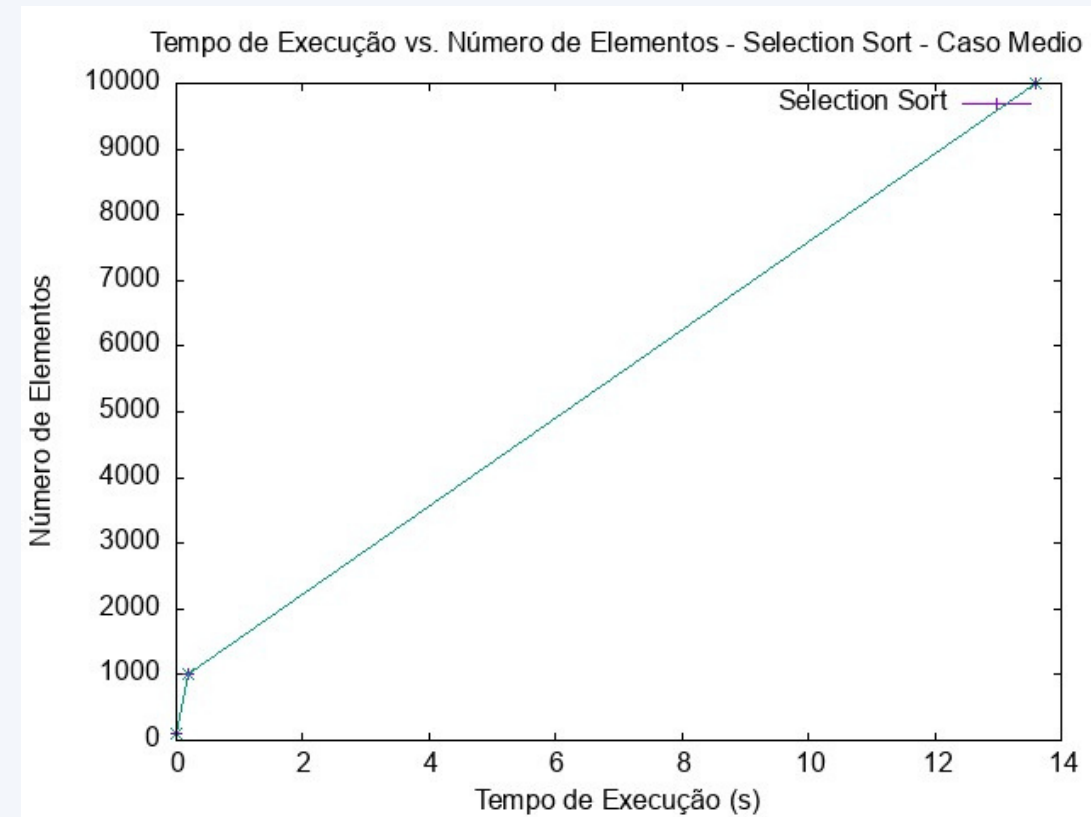
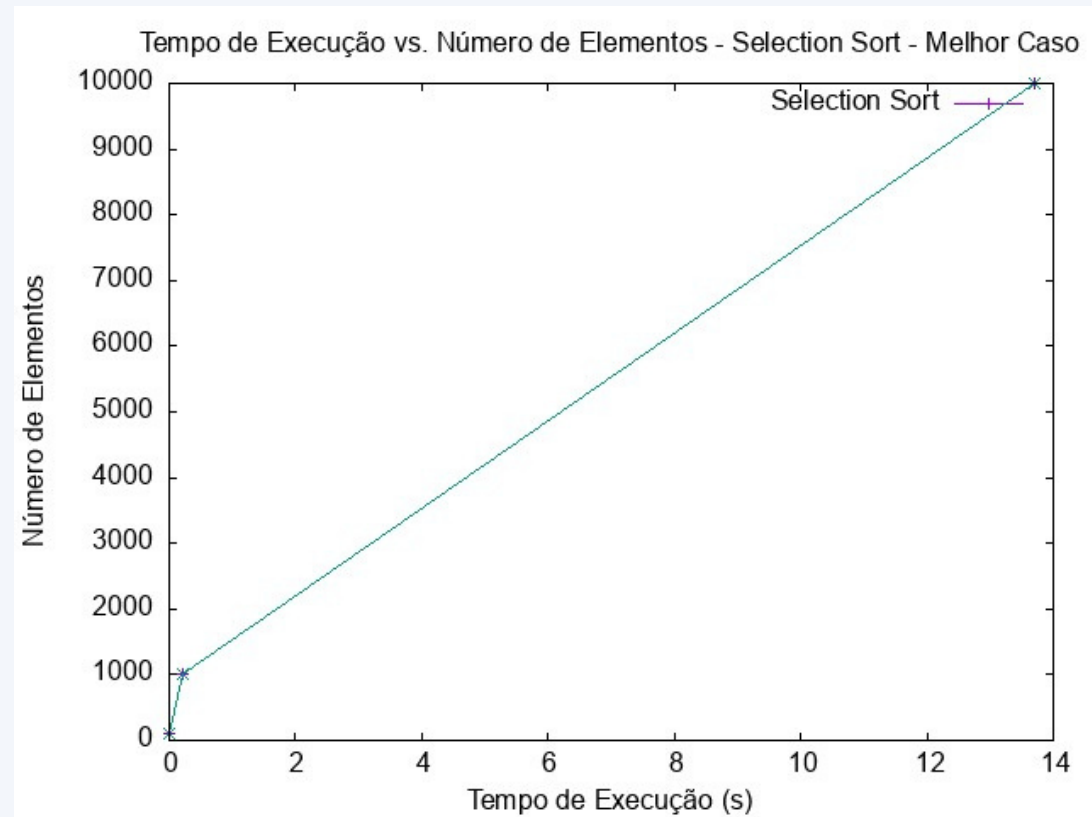
- Um algoritmo de ordenação simples que seleciona o elemento de menor valor (ou maior valor) e o coloca na posição correta na lista
- Não requer movimentação repetitiva de elementos na lista.
- O algoritmo no pior caso (array invertido), caso médio (array aleatório) e melhor caso (array ordenado) tem complexidade  $n^2$  e tem por relação de recorrência o seguinte :

$$T(n) = T(n - 1) + n - 1$$

# Selection Sort

Casos	Tempo de execução	Número de trocas
Melhor caso com 100 posições Melhor caso com 1000 posições Melhor caso com 10000 posições	0.0016296699996019015 0.48282380100044975 27.297785023999495	4950 499500 49995000
Caso médio com 100 posições Caso médio com 1000 posições Caso médio com 10000 posições	0.0016296699996019015 0.41332481000063126 29.1222143300000133	4950 499500 49995000
Pior caso com 100 posições Pior caso com 1000 posições Pior caso com 10000 posições	0.0017672200010565575 0.303630243000004327 30.80261730699931	4950 499500 49995000

# Selection Sort



# Insertion sort

**Function** InsertionSort(*array*[]):

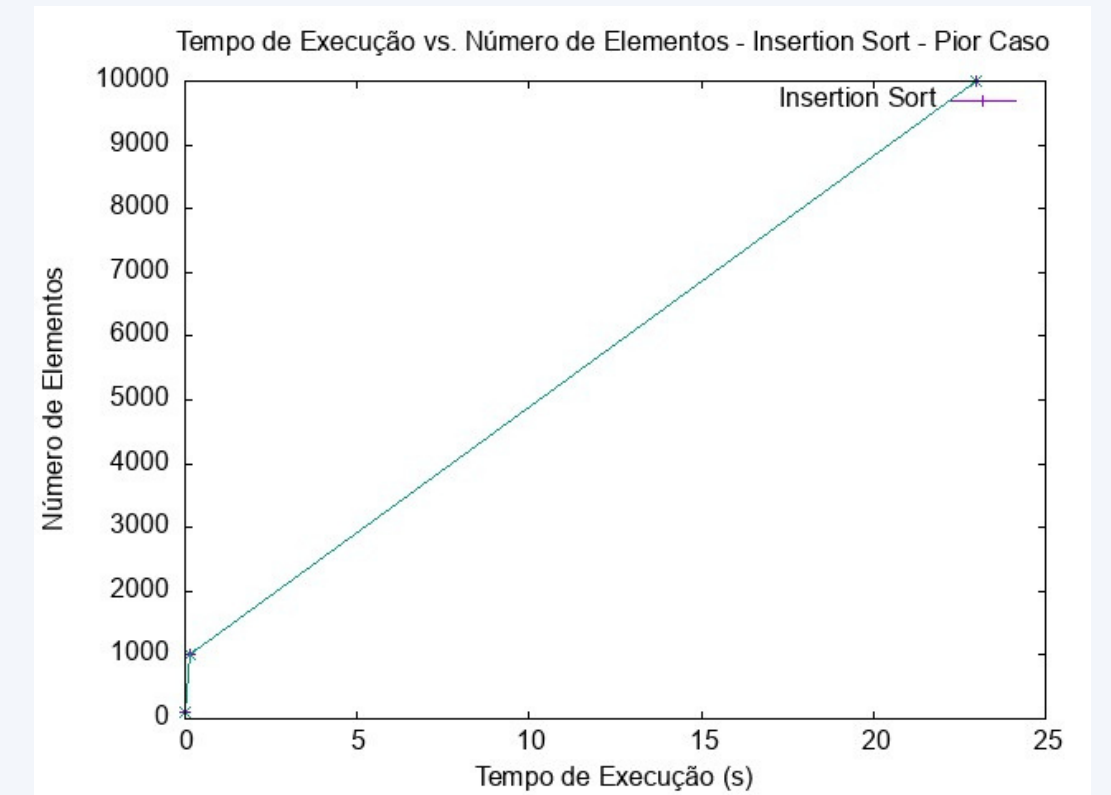
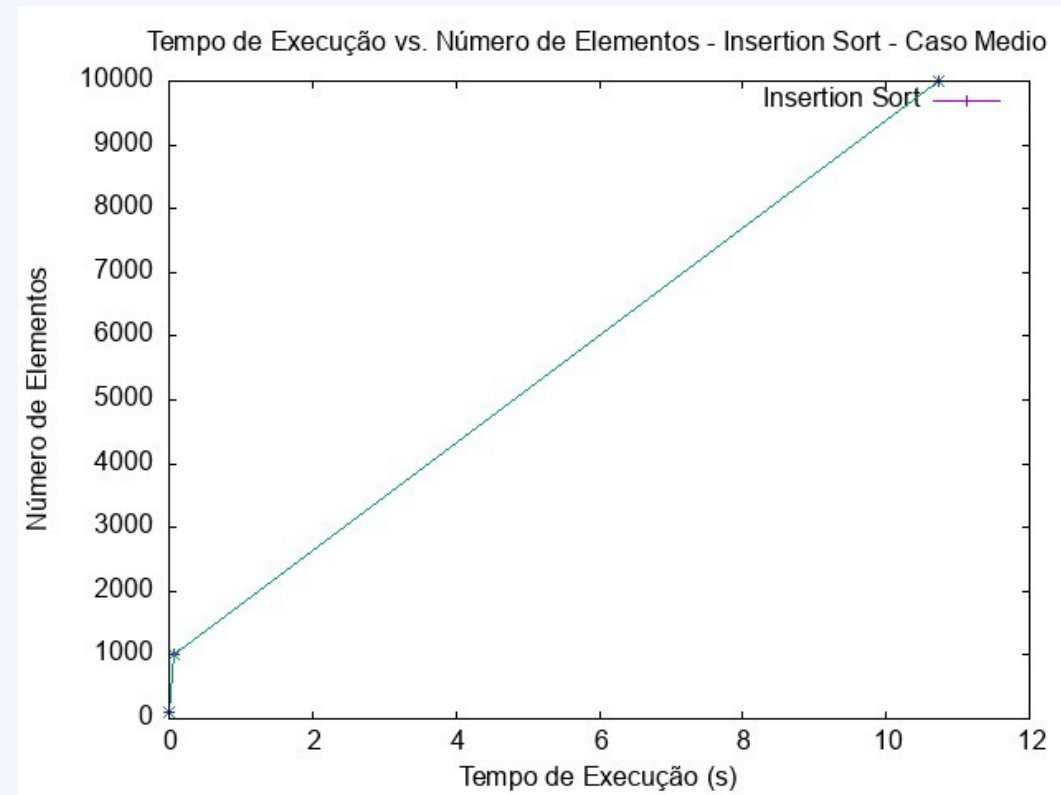
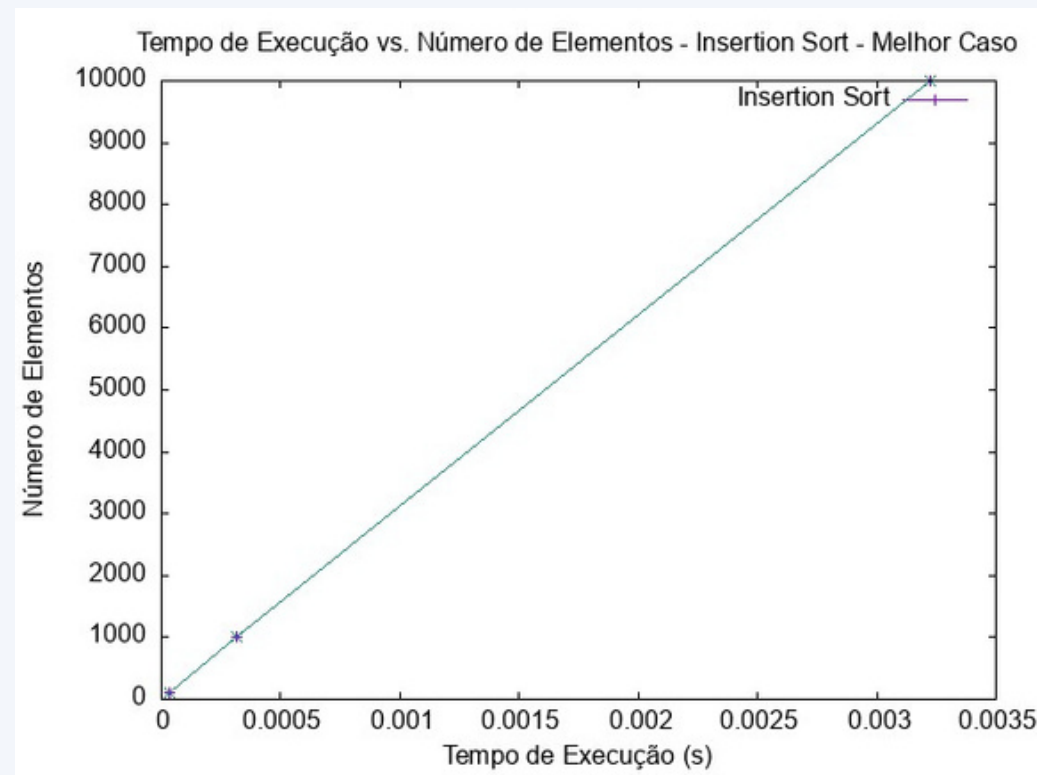
```
int i, j, key;
for (i ← 1; i < array; i++) do
    key ← array [i];
    j ← i - 1;
    while j ≥ 0 and key < array [j] do
        array [j + 1] ← array [j];
        j ← j - 1;
        array [j + 1] ← key;
    end
end
return array;
```

- Um algoritmo de ordenação que se baseia na ideia de ordenar elementos como se estivesse organizando um baralho de cartas.
- Estável, ou seja, preserva a ordem de elementos com mesmo valor
- Fácil de entender e implementar.
- Eficiente para pequenas listas ou listas parcialmente ordenadas.
- O algoritmo no pior caso (array invertido) e no caso médio (vetor aleatório) tem complexidade  $n^2$  e tem por relação de recorrência o seguinte :
  - $T(n) = T(n - 1) + n - 1$
- No melhor caso o algoritmo recebe um vetor ordenado, não há nenhuma troca e sua complexidade é  $O(n)$

# Insertion sort

Casos	Tempo de execução	Número de trocas
Melhor caso com 100 posições Melhor caso com 1000 posições Melhor caso com 10000 posições	7.101999995029473 0.0005271600000469334 0.0037117099998340564	0 0 0
Caso médio com 100 posições Caso médio com 1000 posições Caso médio com 10000 posições	0.0030275200001597113 0.29654498300010346 22.487308944000006	2927 234812 24969176
Pior caso com 100 posições Pior caso com 1000 posições Pior caso com 10000 posições	0.0025175299999773415 0.5348003090000475 41.90451112100004	4950 499500 49995000

# Insertion sort



# Quick sort

```
Function QuickSort(Array[], Inicio, Fim):  
  int Baixo, Alto, pivo, swap;  
  Baixo = Inicio;  
  Alto = Fim;  
  pivo = Array[(Inicio + Fim) / 2];  
  while (Baixo ≤ Alto) do  
    while (Array[Baixo] < pivo) do  
      | Baixo = Baixo + 1;  
    end  
    while (Array[Alto] > pivo) do  
      | Alto = Alto - 1;  
    end  
    if (Baixo ≤ Alto) then  
      | swap = Array[Baixo];  
      | Array[Baixo] = Array[Alto];  
      | Array[Alto] = swap;  
      | Baixo = Baixo + 1;  
      | Alto = Alto - 1;  
    end  
  end  
  if (Inicio < Alto) then  
    | QuickSort (Array, Inicio, Alto);  
  end  
  if (Baixo < Fim) then  
    | QuickSort (Array, Baixo, Fim);  
  end
```

```
Function QuickSortIterative(Array[], Inicio, Fim):  
  Stack stack;  
  stack.push((Inicio, Fim));  
  while stack is not empty do  
    (Inicio, Fim) ← stack.pop();  
    pivo ← Partition(Array, Inicio, Fim);  
    if Inicio < pivo - 1 then  
      | stack.push((Inicio, pivo - 1));  
    end  
    if pivo + 1 < Fim then  
      | stack.push((pivo + 1, Fim));  
    end  
  end  
  
Function Partition(Array[], Inicio, Fim):  
  pivo ← Array[Fim];  
  i ← Inicio - 1;  
  for j ← Inicio to Fim - 1 do  
    if Array[j] ≤ pivo then  
      | i ← i + 1;  
      | swap ← Array[i];  
      | Array[i] ← Array[j];  
      | Array[j] ← swap;  
    end  
  end  
  swap ← Array[i + 1];  
  Array[i + 1] ← Array[Fim];  
  Array[Fim] ← swap;  
  return i + 1;
```

- Um algoritmo eficiente de ordenação baseado na estratégia "dividir e conquistar".
- Amplamente utilizado na prática devido à sua velocidade e simplicidade.



# Quick sort

- O pior caso se torna aquele em que o particionamento de todas as rotinas gera uma sublista de tamanho  $n - 1$  e outra de tamanho  $O$ . Resultando na seguinte relação de recorrência:

$$T(n) = T(n - 1) + T(O) + \theta(n)$$

- O melhor caso acontece quando o particionamento de cada rotina gera duas sublistas de tamanho  $\leq n/2$ , representado pela relação:

$$T(n) \leq 2T(n/2) + \theta(n)$$

- Portanto, A complexidade do quickSort é  $O(n^2)$ , no pior caso e  $O(n \log n)$ , no melhor caso e no caso medio.



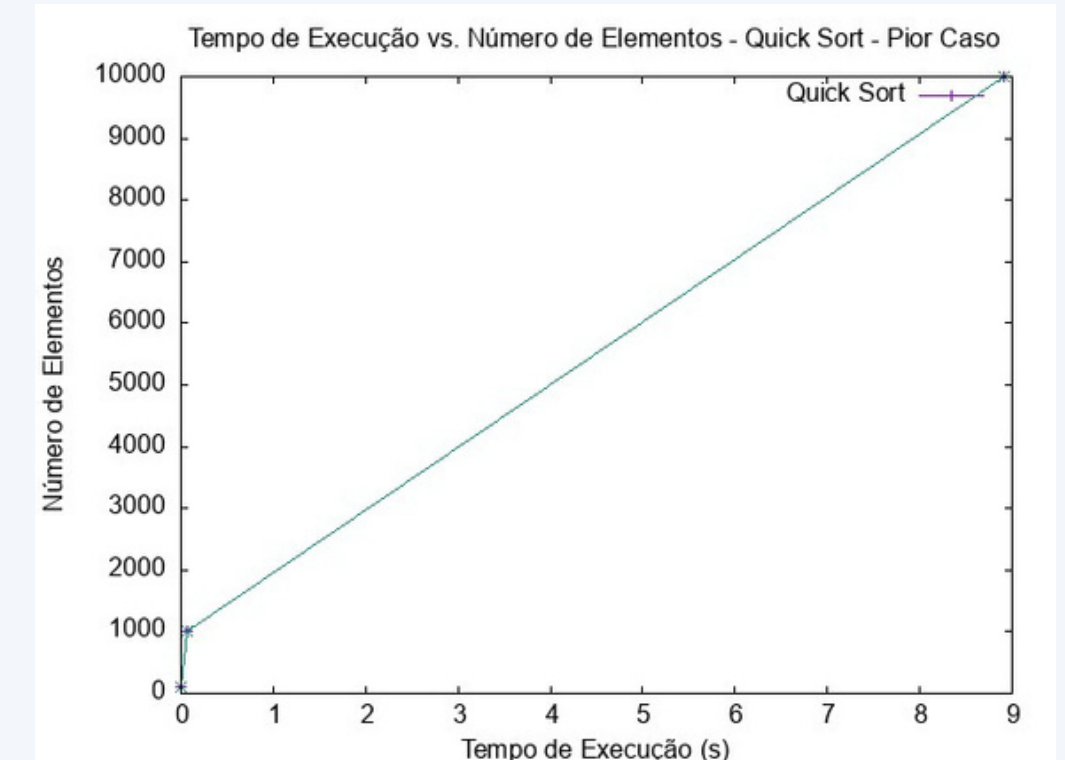
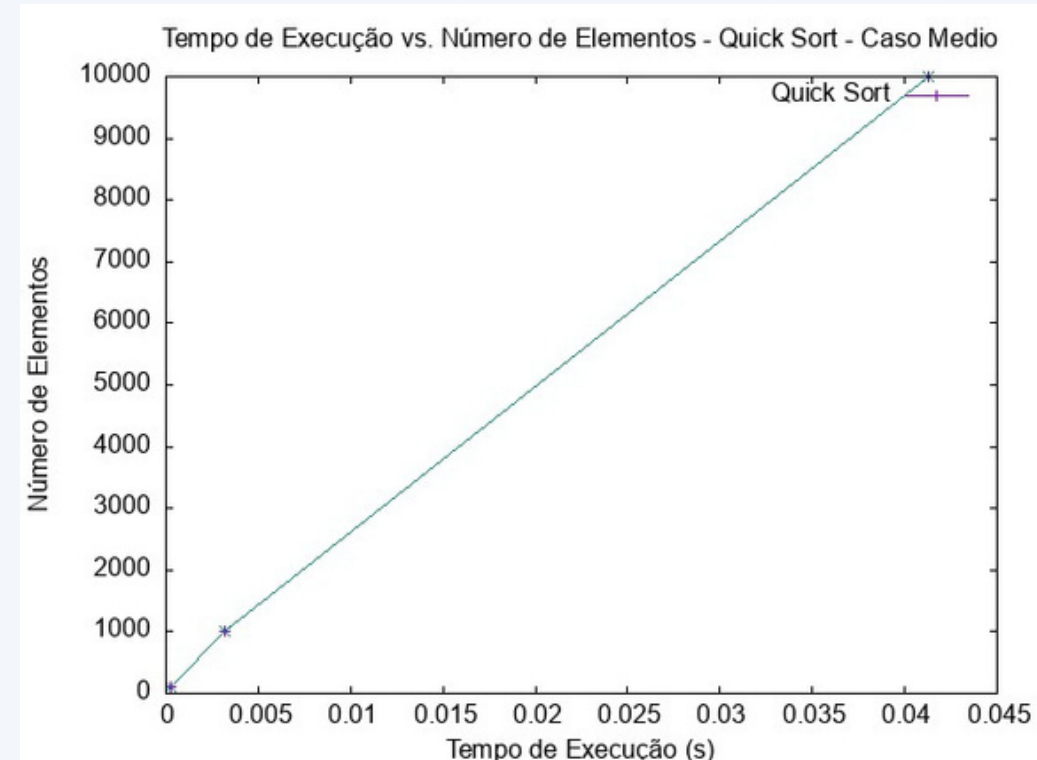
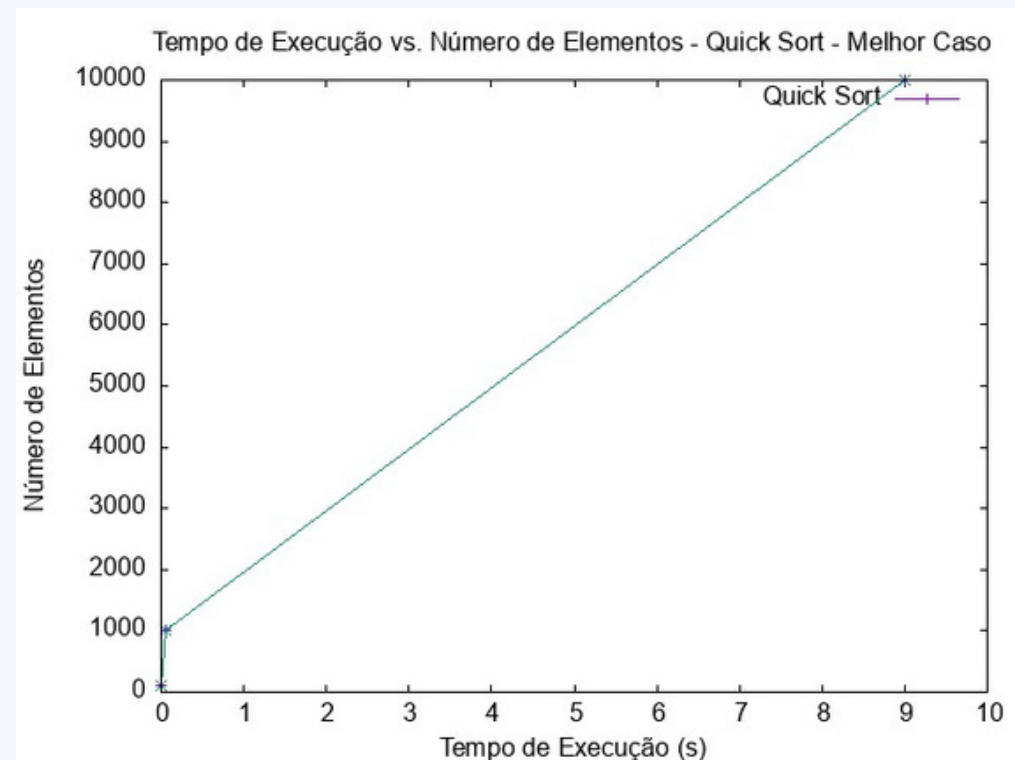
# Quick sort

Casos	Tempo de execução	Número de trocas
Melhor caso com 100 posições Melhor caso com 1000 posições Melhor caso com 10000 posições	0.0009836200006247964 0.18042436500036274 21.367593666000175	99 999 9999
Caso médio com 100 posições Caso médio com 1000 posições Caso médio com 10000 posições	0.002989118998812046 0.0029637789994012564 0.10647092100043665	161 2364 30721
Pior caso com 100 posições Pior caso com 1000 posições Pior caso com 10000 posições	0.0010493189984117635 0.19795522300046287 20.90247191399976	99 999 9999

# Quick sort

...

...



# Merge sort

- Assim como o quick sort se baseia na estratégia de "dividir para conquistar".
- Eficiente para grandes quantidades de dados.
- A complexidade do merge sort para o pior caso (array invertida), caso médio (array aleatória) e melhor caso (array ordenada) é  $n \log n$  e sua relação de recorrência para todos os casos é de :

$$T(n) = 2 \times T(n/2) + O(n)$$

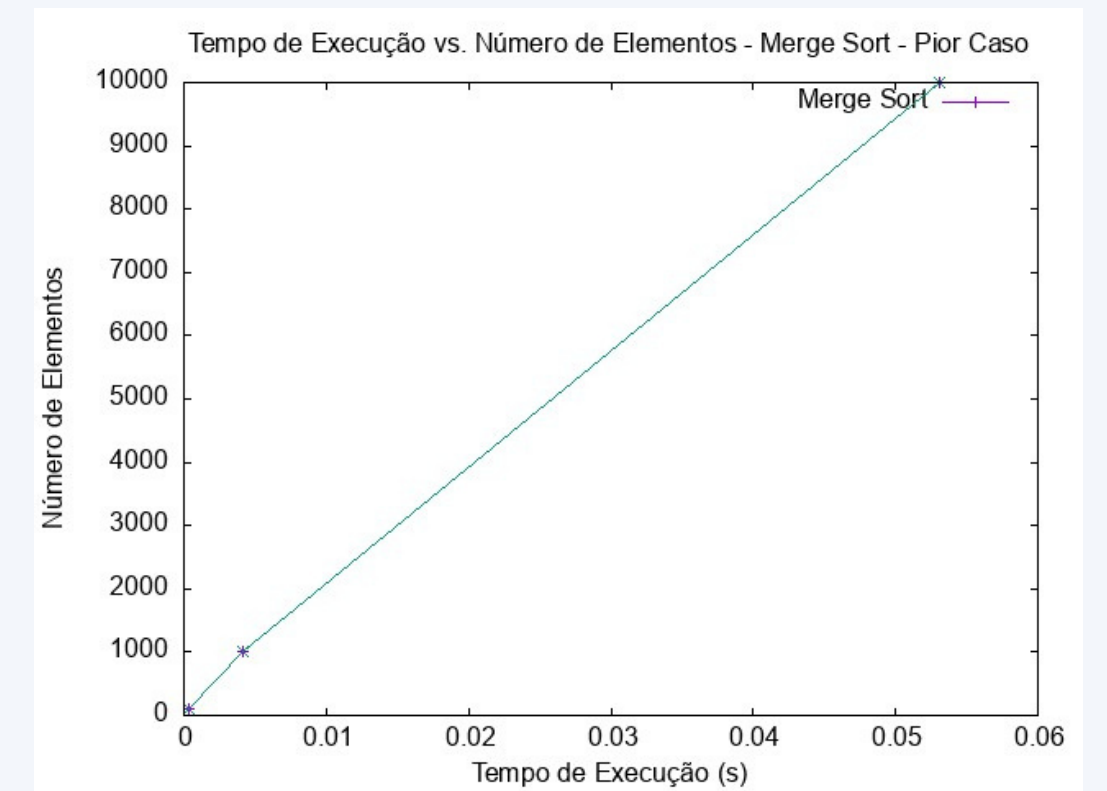
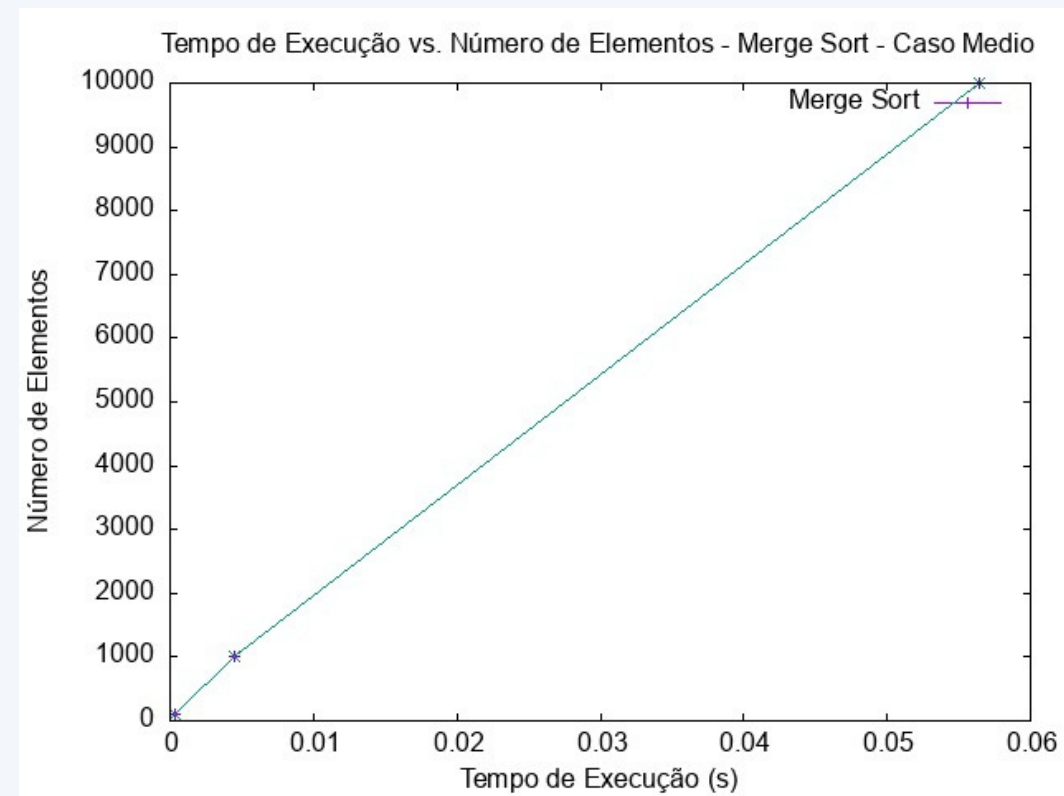
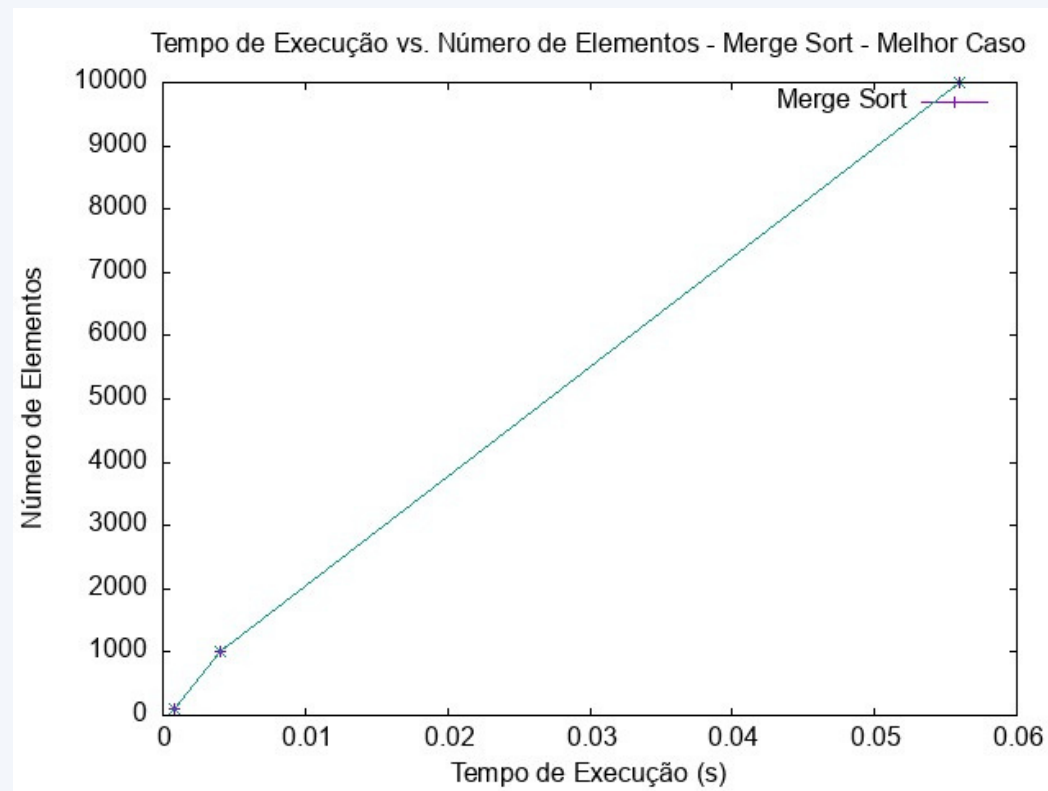
**Function MergeSort (array[]):**

```
int mid, left, right, i, j, k;
if (array > 1) then
    mid  $\leftarrow \frac{\text{array}}{2}$ ;
    left  $\leftarrow$  array [:mid]; //recebe a primeira parte da array
    right  $\leftarrow$  array [mid:]; // recebe a segunda parte da array
    MergeSort (left);
    MergeSort (right);
    i  $\leftarrow$  j  $\leftarrow$  k  $\leftarrow$  0;
end
while (i = 0; i < left and j < r) do
    if (left [i]  $\leq$  right [j]) then
        array [k]  $\leftarrow$  left [i];
        i  $\leftarrow$  i + 1;
    end
    array [k]  $\leftarrow$  right [j];
    j  $\leftarrow$  j + 1;
    k  $\leftarrow$  k + 1;
end
while (i < left) do
    array [k]  $\leftarrow$  left [i];
    i  $\leftarrow$  i + 1;
    k  $\leftarrow$  k + 1;
end
while (j < right) do
    array [k]  $\leftarrow$  right [j];
    j  $\leftarrow$  j + 1;
    k  $\leftarrow$  k + 1;
end
return array
```

# Merge Sort

Casos	Tempo de execução	Número de trocas
Melhor caso com 100 posições Melhor caso com 1000 posições Melhor caso com 10000 posições	0.0005619100011244882 0.005540949001442641 0.20440335899911588	0 0 0
Caso médio com 100 posições Caso médio com 1000 posições Caso médio com 10000 posições	0.0005567500011238735 0.056981145000463584 0.2876178810001875	205 3323 40667
Pior caso com 100 posições Pior caso com 1000 posições Pior caso com 10000 posições	0.0006723500009684358 0.007618838997586863 0.22137081699838745	316 4932 64608

# Merge Sort



# Heap sort

- Um algoritmo que se baseia na estrutura de dados heap que age como uma árvore binária organizada num vetor
- Ao receber um array uma operação de heapify será aplicada nela até que a array se comporte como uma heap.
- A complexidade do merge sort para o pior caso (array invertida), caso médio (array aleatória) e melhor caso (array ordenada) é  $n \log n$  e sua relação de recorrência para todos os casos é de :

$$T(n) = 2 \times T(n/2) + O(\log n)$$

**Function** Heapify(*int array[]*, *int n*, *int i*):

```
int largest ← i, swap;
int left ← 2 × i + 1, right ← 2 × i + 2;
if (left < n and array [i] < array [left]) then
    | largest ← left;
end
if (right < n and array [largest] < array [right]) then
    | largest ← right;
end
if (largest != i) then
    | swap ← array [i];
    | array [i] ← array [largest];
    | array [largest] ← array [i];
end
return Heapify (arr, n, largest);
```

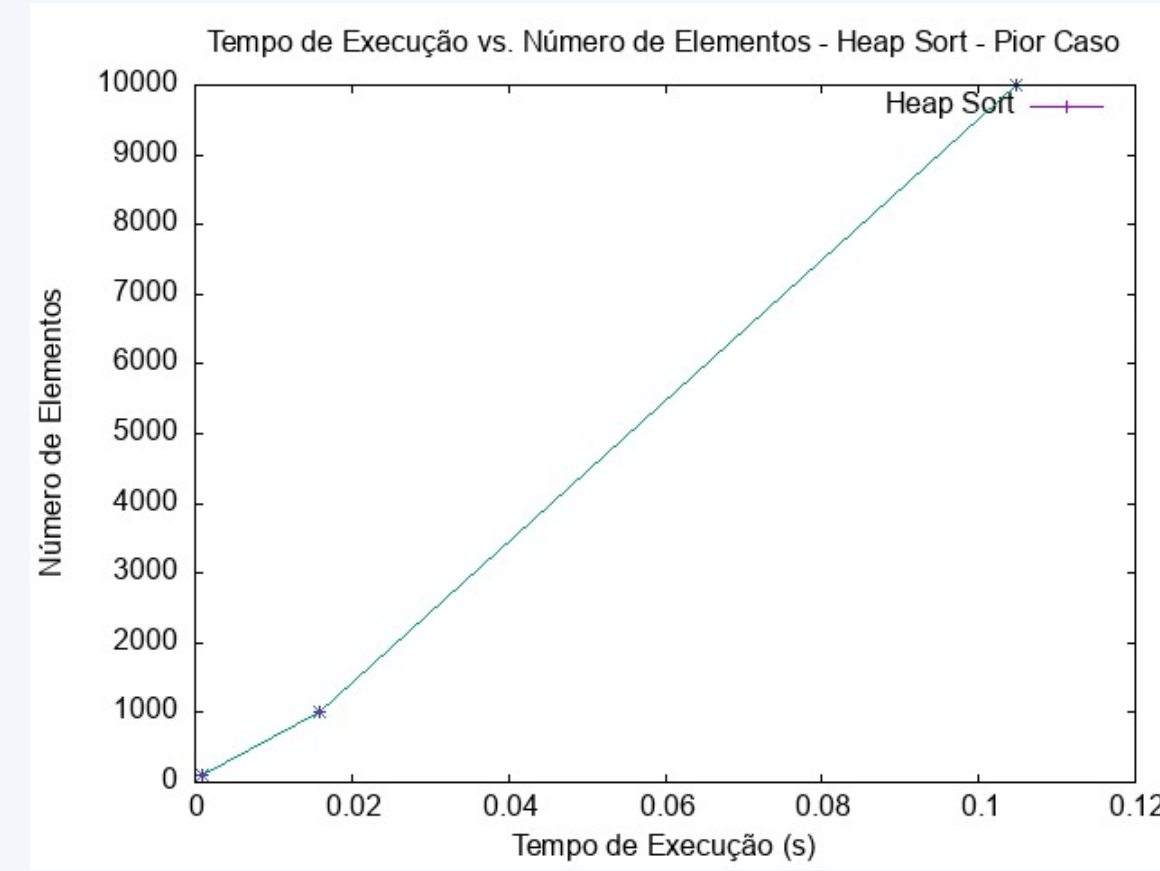
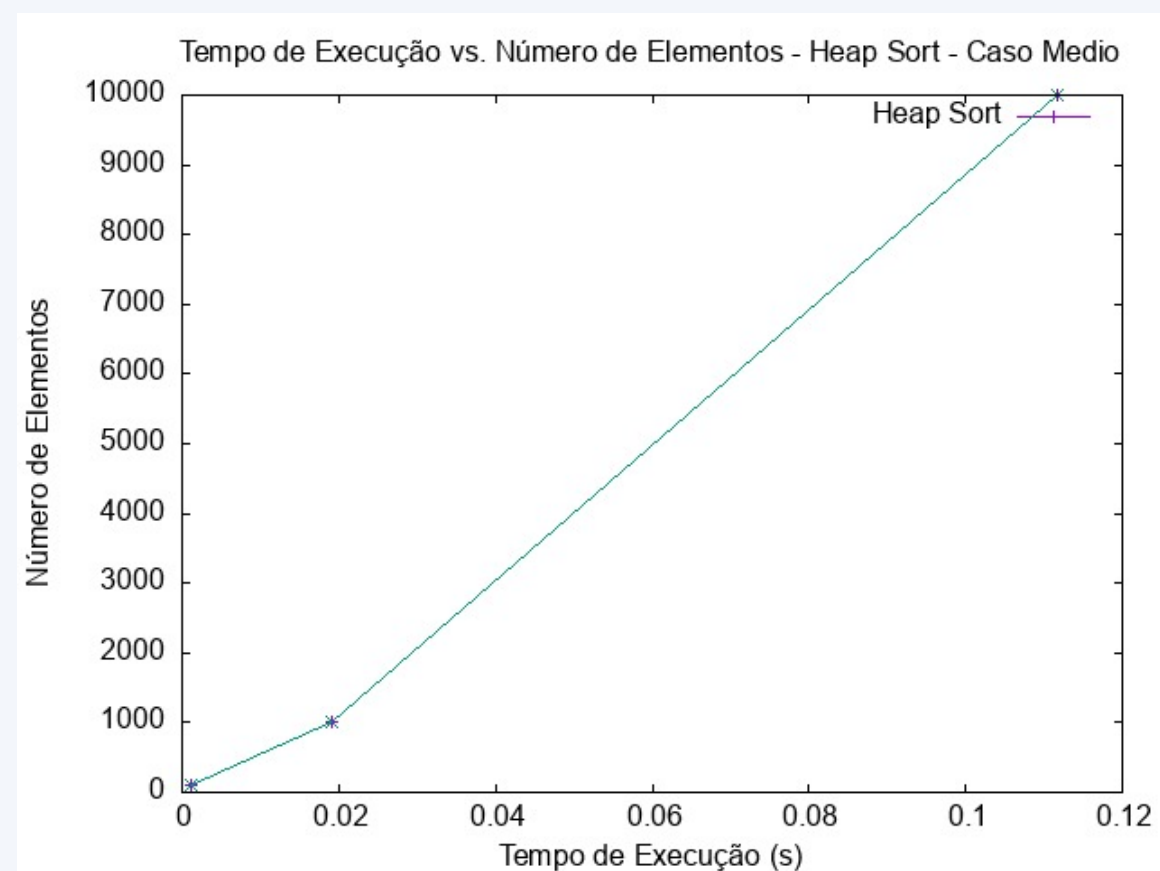
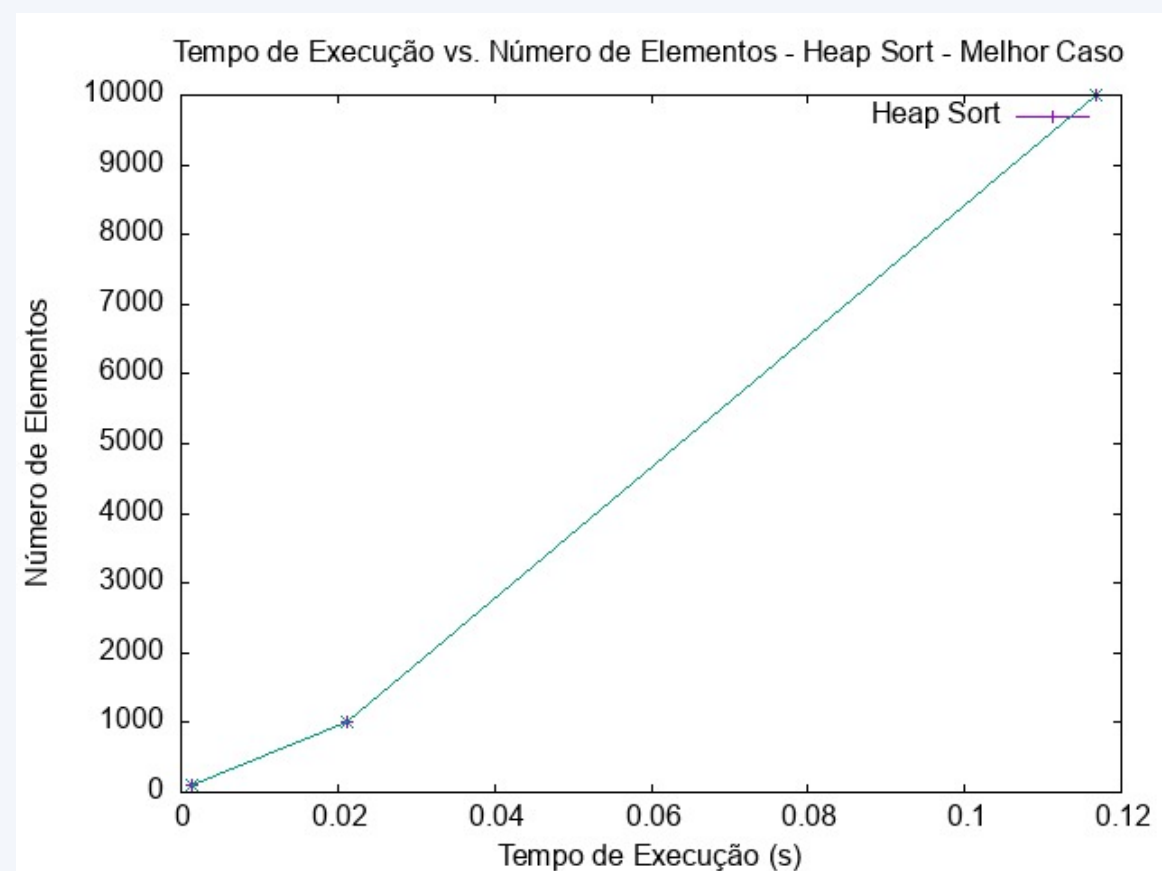
**Function** HeapSort(*int array[]*):

```
int n ← length (array), i, swap;
for (i ←  $\frac{n}{2}-1$ ; i ≤ -1; i -) do
    | Heapify (array, n, i);
end
for (i ← n - 1; i ≥ 0; i -) do
    | swap = array [i];
    | array [i] ← array [0];
    | array [0] ← swap;
    | Heapify (array, n, i);
end
return array;
```

# Heap Sort

Casos	Tempo de execução	Número de trocas
Melhor caso com 100 posições Melhor caso com 1000 posições Melhor caso com 10000 posições	0.0007792299984430429 0.01083201900109998 0.3897250690024521	247 2496 24997
Caso médio com 100 posições Caso médio com 1000 posições Caso médio com 10000 posições	0.04823076500179013 0.05125076600234024 0.31345455499831587	238 2318 23949
Pior caso com 100 posições Pior caso com 1000 posições Pior caso com 10000 posições	0.0006795010012865532 0.007393488998786779 0.19963725399793475	197 1996 19997

# Heap Sort





# Shell sort

```
Function ShellSort(int array[]):  
  int h ← 1, n ← length (array), i, c, j;  
  while (h > 0) do  
    for (i ← h; i < n; i++) do  
      c ← array [i];  
      j ← i;  
      while (j > h and c < array [j - h]) do  
        array [j] ← array [j - h];  
        j ← j - h;  
        array [j] ← c;  
      end  
    end  
    h ←  $\frac{h}{2}$ ;  
  end  
  return array;
```

- um algoritmo de ordenação que combina a estratégia do Insertion Sort com a técnica "dividir para conquistar"
- instável, o que significa que não preserva a ordem relativa de elementos com o mesmo valor.
- Mais eficiente do que algoritmos de ordenação quadráticos

# Shell sort

- A complexidade do shell sort vai variar de acordo com o gap do algoritmo que no caso é 2,2. Para o pior caso (array invertida) a complexidade é de  $O(n^2)$  :

$$T(n) = 2 \times T(n/2.2) + O(n)$$

- A complexidade do algoritmo no caso médio (array aleatório) pode variar de acordo com o gap que geralmente, mas mesmo assim a complexidade costuma variar entre  $n^2$  e  $n \log n$ . No caso desse algoritmo com gap de 2,2 a complexidade está mais próxima de  $\Theta(n^2)$ .

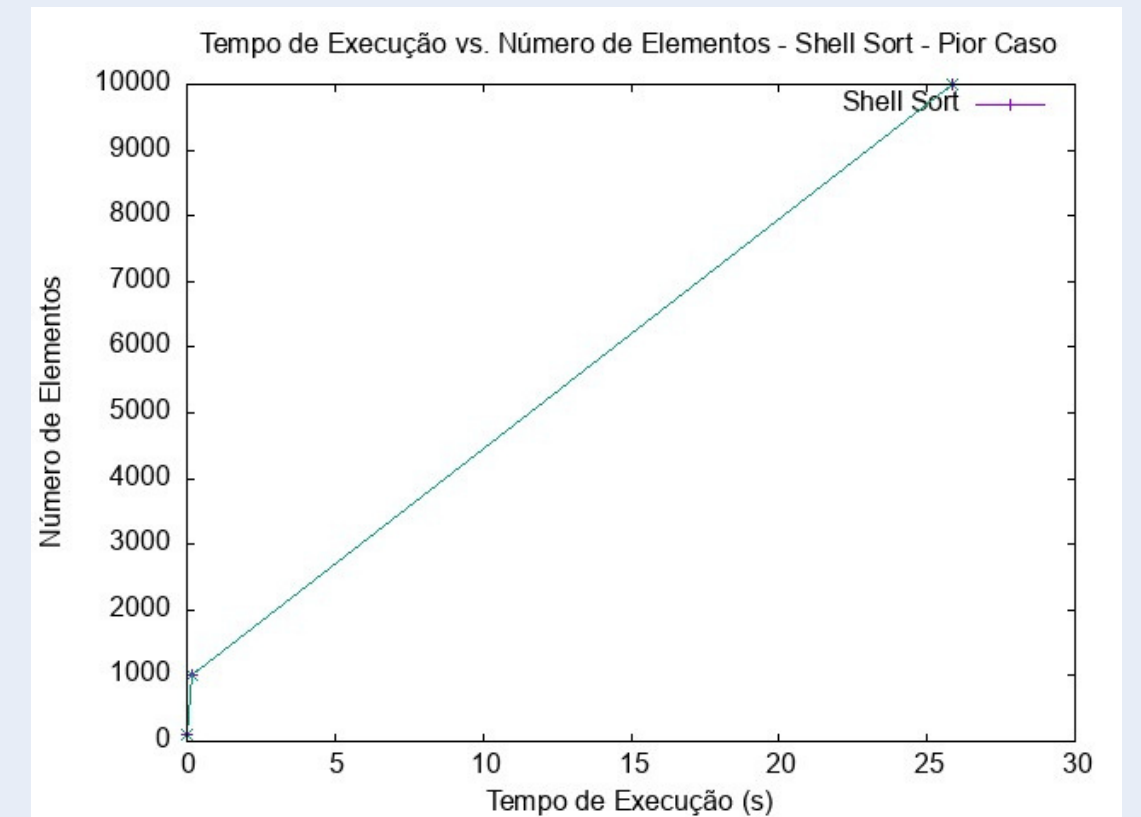
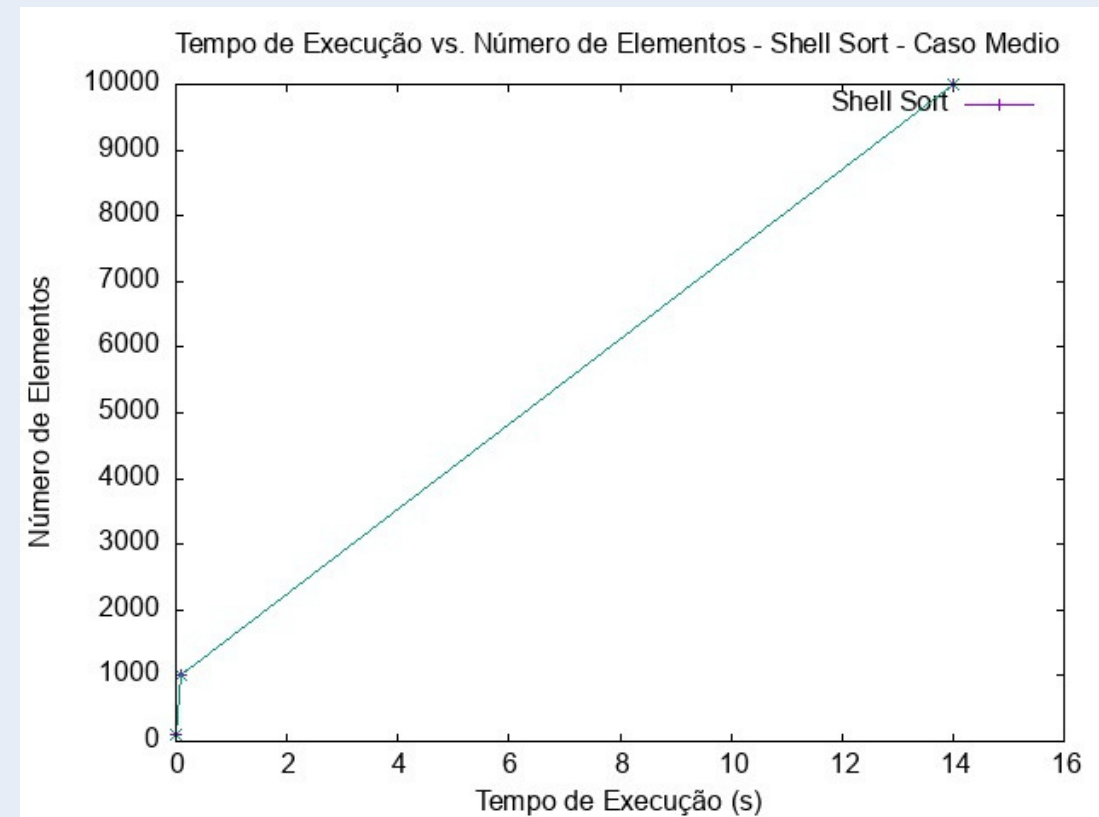
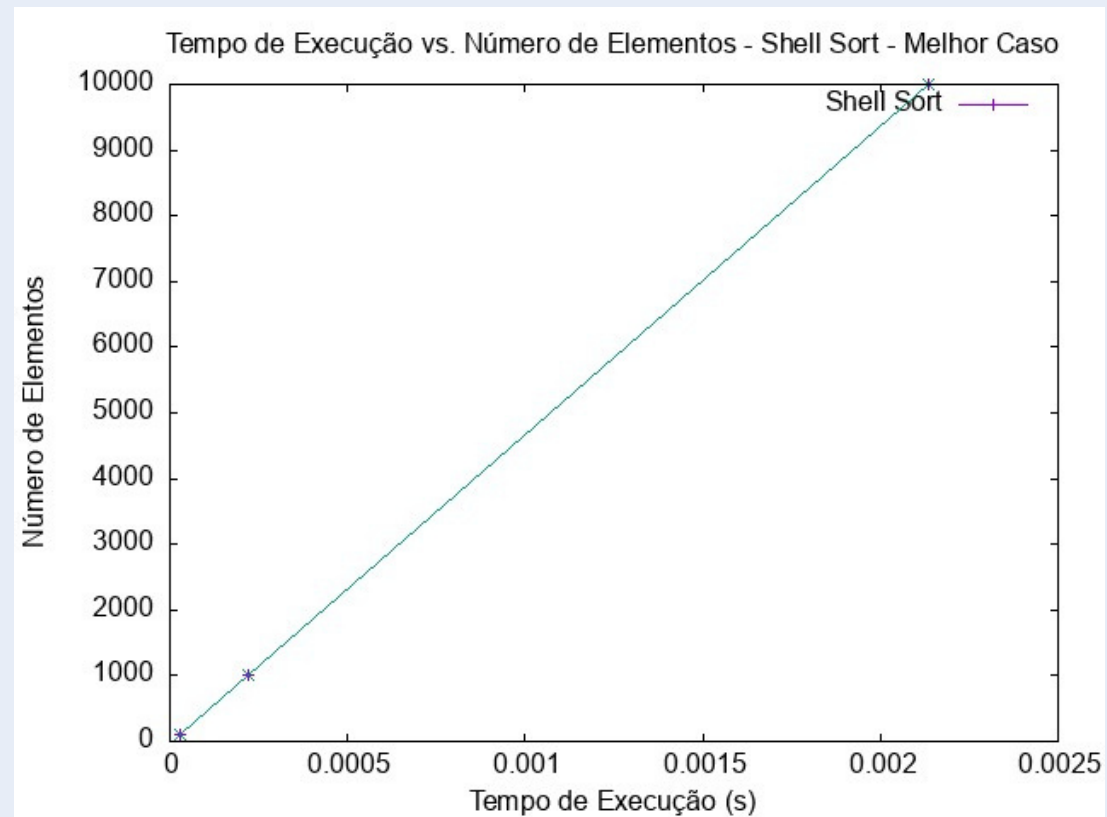
- A complexidade do shell sort no melhor caso (array ordenada) é  $\Omega(n \log n)$ . Não ocorre nenhuma troca e sua relação de recorrência é :

$$T(n) = 2 \times T(n/2.2) + O(1)$$

# Shell sort

Casos	Tempo de execução	Número de trocas
Melhor caso com 100 posições Melhor caso com 1000 posições Melhor caso com 10000 posições	2.7889000193681568 0.0005072999992989935 0.0036803689999942435	0 0 0
Caso médio com 100 posições Caso médio com 1000 posições Caso médio com 10000 posições	0.0013505490005627507 0.5037145500009501 30.09744681200027	2489 259850 24751426
Pior caso com 100 posições Pior caso com 1000 posições Pior caso com 10000 posições	0.002479200000379933 0.6976805189988227 55.59779411499949	4950 499500 49995000

# Shell sort



# Comb sort

**Function** GetNextGap(*int gap*):

```
gap  $\leftarrow \frac{gap \times 10}{13}$ ;  
if (gap < 1) then  
|   return 1;  
end  
return gap;
```

**Function** CombSort(*int array*[]):

```
int n  $\leftarrow$  lenght (array);  
int gap  $\leftarrow$  n, swapped  $\leftarrow$  true, i, swap;  
while (gap != 1 or swapped == 1) do  
|   gap = GetNextGap (gap);  
|   swapped = False;  
|   for (i  $\leftarrow$  0; i < n - gap; i++) do  
|   |   if (array [i] > array [i + gap]) then  
|   |   |   swap  $\leftarrow$  array [i];  
|   |   |   array [i]  $\leftarrow$  array [i + gap];  
|   |   |   array [i + gap]  $\leftarrow$  swap;  
|   |   end  
|   end  
end  
return array;
```

- Um algoritmo de ordenação que basicamente é uma melhoria do Bubble Sort.
- Tem uma diferença crucial que impacta no desempenho: a utilização de um gap (espaçamento) definido que diminui a cada iteração.

# Comb sort

- O comb sort no pior caso (array invertido) tem complexidade  $O(n^2)$  e sua relação de recorrência é:

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + O(n)$$

- No caso médio (array aleatório) o algoritmo tem complexidade  $\Theta(n^2)$  e sua relação de recorrência é:

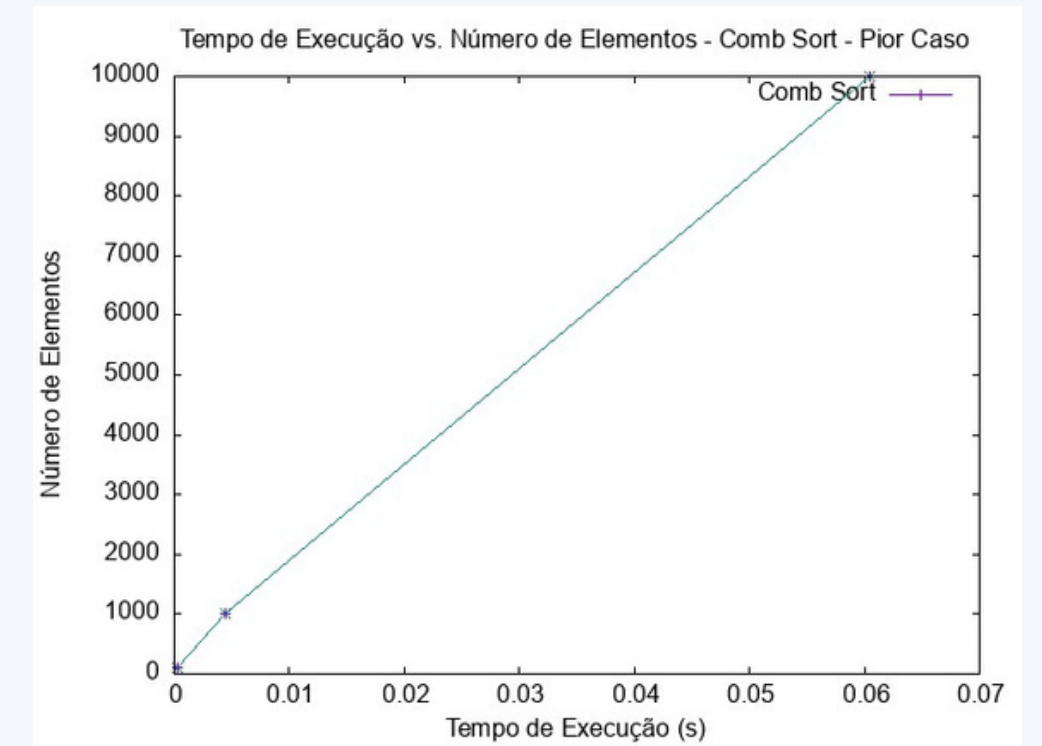
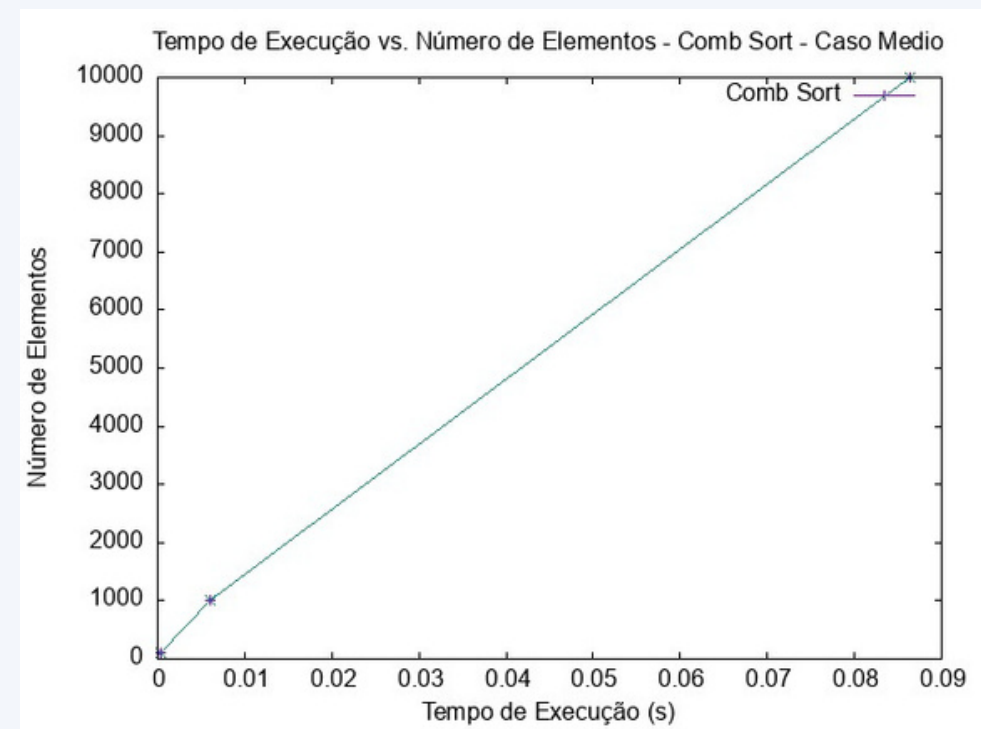
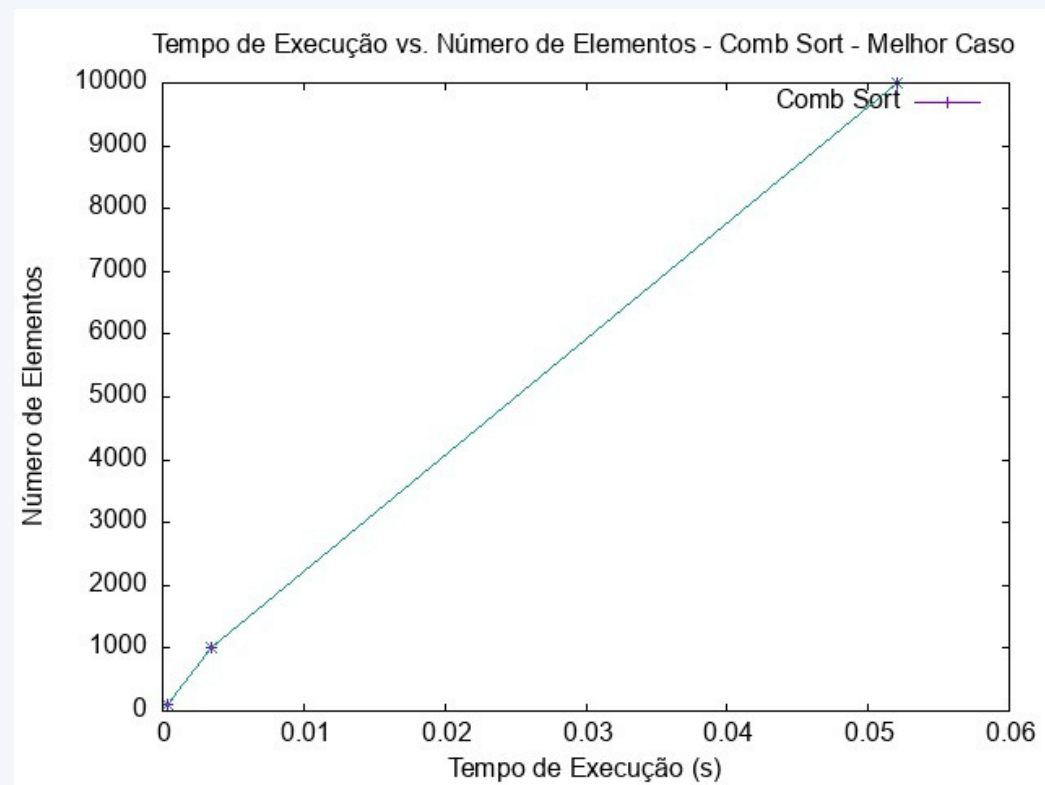
$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + O(n)$$

- No melhor caso (array ordenado) não são feitas comparações e sua complexidade é  $\Omega(n \log n)$ .

# Comb sort

Casos	Tempo de execução	Número de trocas
Melhor caso com 100 posições Melhor caso com 1000 posições Melhor caso com 10000 posições	0.00014797999938309658 0.004542329999821959 0.18482989999938582	0 0 0
Caso médio com 100 posições Caso médio com 1000 posições Caso médio com 10000 posições	0.0003504800006339792 0.005528989000595175 0.29971279699930164	227 4192 59997
Pior caso com 100 posições Pior caso com 1000 posições Pior caso com 10000 posições	0.00033552000058989506 0.004736650000268128 0.21666921700125386	122 1582 20078

# Comb sort





# COMPARAÇÕES GERAIS

Em cada algoritmo no final foi-se mostrado uma tabela onde o algoritmo era submetido às entradas de melhor, pior e caso médio porém isoladamente. Vale lembrar que nessas comparações individuais a cada tabela eram gerados novos vetores aleatórios para o caso médio.

Neste tópico teremos uma tabela de comparação de complexidades e tempos de execução de uma forma geral.



Algoritmo	Complexidade
Bubble Sort	$O(n^2)$
Insertion Sort	$O(n^2)$
Quick Sort	$O(n \log n)$
Selection Sort	$O(n^2)$
Merge Sort	$O(n \log n)$
Heap Sort	$O(n \log n)$
Shell Sort	$O(n^2)$ ou $O(n \log n)$
Comb Sort	$n^2$



# Tempo de execução de cada algoritmo sob os mesmos vetores de 100 posições

Algoritmo	Melhor Caso	Caso Médio	Pior Caso
Bubble Sort	0.0030403300006582867	0.0033711889991536736	0.004250359999787179
Insertion Sort	4.263099981471896	0.00010435900003358256	4.277100015315227
Quick Sort	0.0011450600013631629	0.0007421600002999185	0.0009756999988894677
Selection Sort	0.0015285600002243882	0.0019408499993005535	0.0013760700003331294
Merge Sort	0.00048257999878842384	0.0004475999994610902	0.0004970400004822295
Heap Sort	0.0007292700011021225	0.0007292700011021225	0.0006809000005887356
Shell Sort	3.4160000723204575	2.8329999622656032	2.764000055321958
Comb Sort	0.00024913999914133456	0.00023983999926713295	0.00027306999982101843

# Tempo de execução de cada algoritmo sob os mesmos vetores de 1000 posições

Algoritmo	Melhor Caso	Caso Médio	Pior Caso
Bubble Sort	0.4528377839999712	0.6000362499980838	0.6095789489991148
Insertion Sort	0.0003869700012728572	0.00048098000115714967	0.0006285900017246604
Quick Sort	0.19558338999922853	0.17557772200234467	0.21362827800112427
Selection Sort	0.28916351000225404	0.23413935600183322	0.27402310199977364
Merge Sort	0.009515379002550617	0.005215859000600176	0.005090038997877855
Heap Sort	0.009027899002830964	0.01108194900000722	0.009569058998749824
Shell Sort	0.0003303100020275451	0.00033041999995475635	0.00033271999927819706
Comb Sort	0.056768414000544	0.0051228000011178665	0.004421278998052003

# Tempo de execução de cada algoritmo sob os mesmos vetores de 10000 posições

Algoritmo	Melhor Caso	Caso Médio	Pior Caso
Bubble Sort	34.23319528799948	55.964998411000124	70.19898077499965
Insertion Sort	0.003694589999213349	0.0053324000000429805	0.004612770000676392
Quick Sort	21.902357894001398	13.633132177999869	21.19884775799983
Selection Sort	30.187859120998837	28.484823288999905	31.691810364000048
Merge Sort	0.1914418000014848	0.1749050519993034	0.12761318599950755
Heap Sort	0.6150853649996861	0.3385325350009225	0.3501250830013305
Shell Sort	0.0029185399998823414	0.003976488998887362	0.003118220000033034
Comb Sort	0.19023469999956433	0.18981027999871003	0.10567796899886162

# Conclusão



Ao longo deste artigo tivemos a oportunidade de aprender um pouco mais sobre alguns algoritmos de ordenação, tendo uma visão geral sobre eles

Vale ressaltar que por mais que alguns algoritmos sejam mais ineficientes eles não são obsoletos visto que podem cumprir o que se pede em projetos simples e possuem fins didáticos uma vez que algoritmos mais eficientes tem uma curva de aprendizado maior e requerem que quem os implementa tenha uma experiência prévia sobre alguns assuntos.