question (1)

Вещественное векторное пространство. Аксиомы. Примеры.

Вещественное векторное пространство — это множество, элементы которого называются **векторами**, на котором определены операции **сложения** и **умножения на число** (скаляр), подчиняющиеся определённым аксиомам.

Аксиомы вещественного векторного пространства

Пусть V - множество векторов, а $\mathbb{R}$ - множество вещественных чисел. На V определены операции:

1. Сложение $+: \ V \times V \to V$
2. Умножение на число $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$
   Операции удовлетворяют следующим аксиомам:
3. Ассоциативность сложения:
$$\forall \vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c} \in V:\ \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$
4. Коммутативность сложения:
$$\forall \vec{a},\ \vec{b} \in V : \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$
5. Нулевой элемент: $\exists \vec{0} \in V : \forall \vec{a} \in V : \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
6. Обратный элемент: $\forall \vec{a} \in V \ \exists -\vec{a} :\ \vec{a} + (-\vec{a}) = 0$
7. Дистрибутивность умножения относительно сложения скаляров:
$$\forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{R};\ \forall \vec{a} \in V \implies (\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$$
8. Дистрибутивность умножения относительно сложения векторов:
$$\forall \gamma \in \mathbb{R}; \forall \vec{a},\ \vec{b} \in V : \gamma(\vec{a} + \vec{b}) = \gamma\vec{a} + \gamma\vec{b}$$
9. Ассоциативность умножения скаляров:
$$\forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{R};\ \forall \vec{a} \in V:\ \alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$$
10. Умножение на единицу:
$$\forall \vec{a} \in V : 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$$

   Пусть V - множество, для которого заданы два отображения $f : X \to Y$
   Первое называется сложением и сопоставляет упорядоченной паре элементов из V снова элемент из V:

$$(\vec{a},\ \vec{b}) \to \vec{a} + \vec{b}$$

Второе называется умножением вектора на число:

$$(\alpha,\ \vec{a}) \to \alpha\vec{a},\ \ \alpha \in \mathbb{R}; \quad \vec{a} \in V$$

Если отображения удовлетворяют аксиомам 1-8, то V называется вещественным векторным пространством.

Примеры

1. E^n, $n = 2,\ 3$ - множество векторов, построенное на аксиомах школьной геометрии.
2. Пространство $\mathbb{R}^n$. Элементы - векторы-столбцы из n вещественных чисел $(x_1,\ x_2,\ \dots\ ,\ x_n)$
   Операции:
   1. Сложение: $(x_1,\ \dots,\ x_n) + (y_1,\ \dots,\ y_n) = (x_1 + y_1 + \dots + x_n + y_n)$
   2. Умножение на число: $a \cdot (x_1,\ \dots,\ x_n) = (ax_1, \dots,\ ax_n)$
3. Пространство матриц:
   Операции:
   1. Покомпонентное сложение матриц
   2. Умножение всех элементов матрицы на число
4. Пространство функций:
   Элементы - функции вида $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которых определены сложение $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ и умножение на число $(a \cdot f)(x) = a \cdot f(x)$

question (2)

Линейно зависимые системы векторов и их свойства.

Система векторов $\{\vec{v_1},\ \vec{v_2},\ \ldots,\ \vec{v_n}\}$ в векторном пространстве V называется **линейно зависимой**, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору.

$$a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} + \cdots + a_n\vec{v_n} = \vec{0}$$

Если такой комбинации не существует, то система называется **линейно независимой**.

Свойства линейно зависимых систем векторов

В E^3

1. Система из одного вектора линейно зависима, когда $\vec{a} = \vec{0}$
   Доказательство:

$$\Longrightarrow \quad \alpha\vec{a} = \vec{0},\ \alpha \neq 0 \hookrightarrow \vec{a} = \vec{0}$$
$$\Longleftarrow \quad \vec{a} = \vec{0} \implies 1 \cdot \vec{a} = 0$$

2. Для 2-х и 3-х мерных векторов: два линейно зависимых вектора - коллинеарные, если лежат на одной прямой или на параллельных прямых (коллинеарные вектора - линейно зависимы)
3. Для 3-х мерных векторов: три линейно зависимые вектора - компланарные (три компланарные вектора - линейно зависимые)

Для других:

1. Система векторов содержащая нулевой вектор является линейно зависимой.

$$\{\vec{0}, \vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}\}$$
$$1 \cdot \vec{0} + 0 \cdot \vec{a_1} + \cdots + 0 \cdot \vec{a_n} = \vec{0}$$

2. Если система содержит линейно зависимую подсистему, то она линейно зависима.
   Доказательство:

$$\text{Пусть } \{\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n}\} \text{ и } \{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_k}\} \text{ – л.з. подпоследовательность, где } k < n$$
$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot \vec{a_i} = \vec{0} \implies \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot \vec{a_i} + 0 \cdot \vec{a}_k + 0 \cdot \vec{a}_{k+1} + \cdots + 0 \cdot \vec{a}_n = \vec{0}$$
$$\text{Так как существует нетривиальная комбинация, равная нулю,}$$
$$\text{для всей системы } \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}, \text{ то она л.з}$$

3. Любая подсистема линейно независимой системы является линейно независимой.
   Доказательство:

$$\{\vec{a_1}, \dots, \vec{a_n}\} - \text{л. нез.}$$

$$\text{Пусть } \{\vec{a_1}, \dots, \vec{a_k}\} - \text{л.з.}, k < n \implies \{\vec{a_1}, \dots, \vec{a_n}\} - \text{л.з} \implies \text{противоречие}$$

4. Критерий линейно зависимой системы векторов. Системы линейно зависимы $\iff$ когда по крайней мере один вектор системы является линейной комбинацией остальных.
   Доказательство:

$$(\implies) \quad A = \{\vec{a_1}, \dots, \vec{a_n}\} - \text{л.з.}$$

$$\implies \exists \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \vec{a_i} = \vec{0}$$

$$\text{Пусть } \alpha_1 \neq 0$$

$$\alpha_1 \cdot \vec{a_1} = -\sum_{i=2}^{n} \alpha_i \cdot \vec{a_i} \implies \vec{a_1} = -\sum_{i=2}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_1} \cdot \vec{a_i}$$

   Это означает, что вектор $\vec{a}_1$ выражается как линейная комбинация остальных векторов.
   Таким образом, хотя бы один вектор системы является линейной комбинацией остальных.

$$(\impliedby) \quad \text{Пусть } \vec{a_1} = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \cdot a_i \implies \vec{0} = (-1) \cdot \vec{a_1} + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \cdot \vec{a_i}$$

   Таким образом, существует нетривиальная линейная комбинация векторов системы.

Замечание: Верно ли утверждение: "если система линейно зависима, то каждый вектор системы является линейной комбинацией остальных".
Ответ: Нет.
Контрпример: $A = \{\vec{0}, \vec{a}\}, \;\; \vec{a} \neq \vec{0}, \forall \alpha \;\; \vec{a} \neq \alpha \cdot \vec{0}$

question (3)

Базис. Свойства координат вектора. Базисы в $\overline{E}^2$ и в $\overline{E}^3$

Базис векторного пространства V - это упорядоченная система линейно независимых векторов $\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \dots,\ \vec{e}_n\}$, которая порождает всё пространство V. Это значит, что:

1. Любой вектор пространства V может быть представлен как линейная комбинация остальных.

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \vec{e}_i$$

   где $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots$ - скаляры, называемые координатами вектора $\vec{v}$ в данном базисе.
2. Базис должен быть линейно независимым

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \vec{e}_i = \vec{0} \implies \alpha_1 = \dots = a_n = 0$$

3. Число векторов в базисе равно размерности пространства V.
   Если в векторном пространстве существует базис из конечно числа векторов, то он называется конечно мерным. Число векторов базиса называется размерностью пространства.

Коэффициенты разложения вектора по векторам базиса называется координатами вектора относительно данного базиса.

Свойства координат вектора

1. Единственность представления:
   В любом базисе каждый вектор $\vec{v} \in V$ имеет единственное разложение по векторам:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \vec{e}_i$$

   Координаты $c_1,\ \dots,\ c_n$ - уникальны.
   Доказательство:
   Предположим, что есть два разложения $\vec{x} = x^1\vec{e}_1 + \dots + x^n\vec{e}_n$ и $\vec{x} = y^1\vec{e}_1 + \dots + y^n\vec{e}_n$.
   Вычтем один вектор из другого и получаем:

$$\vec{0} = (x^1 - y^1)\vec{e}_1 + \dots + (x^n - y^n)\vec{e}_n$$

   Что представляет собой линейную комбинацию базисных векторов равную нулевому вектору. Так как базисные вектора линейно независимы, то получаем, что линейная комбинация обязана быть тривиальной, следовательно: $x^1 = y^1,\ \dots,\ x^n = y^n$.

2. Пусть есть базис $B = \{\vec{e}_1,\ \dots,\ \vec{e}_n\}$. $\vec{a} = (a_1,\ \dots a_n)_B$ и $\vec{b} = (b_1,\ \dots,\ b_n)_B$.
   Сумма и разность:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1,\ a_2 \pm b_2,\ \dots,\ a_n \pm b_n)_B$$

   Доказательство:

$$\vec{a} + \vec{b} \implies \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \vec{e_1} = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) \cdot \vec{e_i} = \vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)_B$$

   Умножение на скаляр:

$$\alpha\vec{a} = (\alpha a_1,\ \alpha a_2,\ \dots,\ \alpha a_n)_B$$

3. Коллинеарность в $\overline{E}^2$:

$$\vec{a} = (a_1, a_2)_B$$
$$\vec{b} = (b_1, b_2)_B$$
$$\vec{a}||\vec{b} \iff \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$
$$\underset{\vec{a}\neq 0}{\vec{a}||\vec{b}} \implies \exists \alpha \mid \vec{b} = \alpha \cdot \vec{a}$$
$$(b_1, b_2) = (\alpha \cdot a_1, \alpha \cdot a_2)$$
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ \alpha \cdot a_1 & \alpha \cdot a_2 \end{vmatrix} = 0$$
$$\det = a_1 \cdot (\alpha \cdot a_2) - a_2 \cdot (\alpha \cdot a_1) = 0$$

   В обратную сторону:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \implies \vec{a}||\vec{b}$$
$$\text{Пусть } a_1 \neq 0$$
$$a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 = 0 \implies b_2 = \frac{a_2}{a_1} \cdot b_1 \implies \vec{b} = (b_1,\ b_2) = \left(b_1,\ \frac{a_2}{a_1} \cdot b_1\right) = b_1 \cdot \left(1,\ \frac{a_2}{a_1}\right)$$

   Это показывает, что $\vec{b}$ является линейной комбинацией $\vec{a} \implies \vec{b}||\vec{a}$.
   Если $a_1 = 0$, то $a_2 \neq 0$(иначе $\vec{a} = \vec{0}$). Тогда из уравнения:

$$0 \cdot \vec{b_2} - a_2 \cdot b_1 = 0 \implies b_1 = 0$$

   Значит $\vec{b} = (0,\ b_2)$ и $\vec{b}||\vec{a}$. Это доказывает, что координаты векторов пропорциональны, а значит, векторы коллинеарны.

Базисы в $\overline{E}^2$ и $\overline{E}^3$

Базис в $\overline{E}^2$:

1. $\dim \overline{E}^2 = 2$.
2. Базис состоит из двух линейно независимых векторов, например:

$$e_1 = (1,\ 0),\ e_2 = (0,\ 1)$$

3. Любой вектор $\vec{v} = (x,\ y)$ представим в виде:

$$\vec{v} = x \cdot e_1 + y \cdot e_2$$

Базис в $\overline{E}^3$:

1. $\dim \overline{E}^3 = 3$.
2. Базис состоит из трех линейно независимых векторов, например:

$$e_1 = (1,\ 0,\ 0),\ e_2 = (0,\ 1,\ 0),\ e_3 = (0,\ 0,\ 1)$$

3. Любой вектор $\vec{v} = (x,\ y,\ x)$ представим в виде:

$$\vec{v} = x \cdot e_1 + y \cdot e_2 + z \cdot e_3$$

question (4)

Определение скалярного произведения векторов в E^3. Нахождение длины вектора и угла между векторами с помощью скалярного произведения. Связь скалярного произведения и умножение вектора на число.

Для двух векторов $\vec{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$ и $\vec{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$ в пространстве $\overline{E}^3$ скалярное произведение определяется как:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Скалярным произведением ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a},\ \vec{b})$$

Пусть $\vec{a},\ \vec{b}$ отложены от одной точки O: $\overline{OA} = \vec{a},\ \overline{OB} = \vec{b}$. Тогда углом между векторами называется наименьший из углов, образованных лучами OA и OB.
Если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, то $(\vec{a},\hat{\ } \vec{b}) = 0$.
Если $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, то $(\vec{a},\hat{\ } \vec{b}) = \pi$.
Если один из векторов равен нулевому, тогда угол между векторами не определен.

Свойства скалярного произведения:

1. Положительная определенность скалярного произведения $(\vec{a}, \vec{a}) \overset{\text{def}}{=} \vec{a}^2 \geq 0\ \ \forall \vec{a} \in \overline{E}^3$.
2. Коммутативность: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.
3. Дистрибутивность: $(\vec{a},\ \vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a},\ \vec{b}) + (\vec{a},\ \vec{c}), \quad \forall \vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c} \in \overline{E}^3$.
   Доказательство:
   Свойство косинусов эквивалентно свойству дистрибутивности.

$$\vec{AC} + \vec{CB} = \vec{AB}$$

$$\vec{CB} = \vec{AB} - \vec{AC} = \vec{c} - \vec{b}$$

$$\vec{CB}^2 = |\vec{c} - \vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\cos(\alpha) \cdot |\vec{c}| \cdot |\vec{b}| = |\vec{c}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2(\vec{c},\ \vec{b})$$

   Пусть $\vec{b} \to -\vec{b}$:

$$|\vec{c} + \vec{b}|^2 = (\vec{c},\ \vec{c}) + (\vec{b},\ \vec{b}) + 2(\vec{c},\ \vec{b})$$

   Пусть $\vec{b} \to (\vec{x} + \vec{y})$:

$$|\vec{c} + (\vec{x} + \vec{y})|^2 = (\vec{c},\ \vec{c}) + |(\vec{x} + \vec{y})|^2 + 2(\vec{c},\ \vec{x} + \vec{y})$$
$$\text{Где } |(\vec{x} + \vec{y})|^2 = (\vec{x},\ \vec{x}) + (\vec{y},\ \vec{y}) + 2(\vec{x},\ \vec{y})$$
$$\text{Тогда } |\vec{c} + (\vec{x} + \vec{y})|^2 = (\vec{c},\ \vec{c}) + (\vec{x},\ \vec{x}) + (\vec{y},\ \vec{y}) + 2(\vec{x},\ \vec{y}) + 2(\vec{c},\ \vec{x} + \vec{y})$$

Рассмотрим переход

$$(\vec{c} + (\vec{x} + \vec{y}))^2 = \vec{c}^2 + \vec{x}^2 + \vec{y}^2 + 2(\vec{x},\ \vec{y}) + 2(\vec{c},\ \vec{x} + \vec{y}) \quad (1)$$
$$((\vec{c} + \vec{x}) + \vec{y})^2 = \vec{c}^2 + \vec{x}^2 + \vec{y}^2 + 2(\vec{c},\ \vec{x}) + 2(\vec{c} + \vec{x},\ \vec{y}) \quad (2)$$
$$(1) - (2) \implies (\vec{x},\ \vec{y}) + (\vec{c},\ \vec{x} + \vec{y}) - (\vec{c},\ \vec{x}) - (\vec{c} + \vec{x},\ \vec{y}) = 0$$
$$\vec{y} \to -\vec{y}$$
$$-(\vec{x},\ \vec{y}) + (\vec{c},\ \vec{x} - \vec{y}) - (\vec{c},\ \vec{x}) + (\vec{c} + \vec{x},\ \vec{y}) = 0 \quad (3)$$

$$(1) - (2) + (3) = (\vec{c},\ \vec{x} + \vec{y}) + (\vec{c},\ \vec{x} - \vec{y}) - 2(\vec{c},\ \vec{x}) = 0$$

Пусть $\vec{x} + \vec{y} = \vec{a}$ и $\vec{x} - \vec{y} = \vec{b}$:

$$(\vec{c},\ \vec{a}) + (\vec{c},\ \vec{b}) = 2(\vec{c},\ \vec{x})$$
$$\vec{x} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$$
$$(\vec{c},\ \vec{a}) + (\vec{c},\ \vec{b}) = 2\left(\vec{c},\ \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}\right) = (\vec{c},\ \vec{a} + \vec{b})$$

Доказано.

4. Умножение на скаляр: $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$, $k \in \mathbb{R}$.
Доказательство:

$$\vec{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3),\ \vec{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3),\ k\vec{a} = (ka_1,\ ka_2,\ ka_3)$$
$$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = (ka_1)b_1 + (ka_2)b_2 + (ka_3)b_3 =$$
$$= k(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

Связь с длинной вектора: $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$
Доказательство:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

Сумма квадратов координат равна квадрату длины вектора:

$$|\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$
$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

Длинна вектора $\vec{a} = (a_1,\ a_2)$ равна:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Косинусом угла между векторами называется:

$$\cos(\vec{a},\ \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Связь скалярного произведения и умножение вектора на число.
Умножение вектора на число изменяет длину вектора, а скалярное произведение пропорционально произведению длин векторов. Если вектор $\vec{a}$ удлиняется в λ раз, то его "вклад" в скалярное произведение также увеличивается в λ раз.

question (5)

Дистрибутивность скалярного произведения относительно сложения векторов.

Дистрибутивность: $(\vec{a},\ \vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a},\ \vec{b}) + (\vec{a},\ \vec{c}), \quad \forall \vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c} \in \overline{E}^3$.
Доказательство: свойство косинусов эквивалентно свойству дистрибутивности.

$$\vec{AC} + \vec{CB} = \vec{AB}$$
$$\vec{CB} = \vec{AB} - \vec{AC} = \vec{c} - \vec{b}$$
$$\vec{CB}^2 = |\vec{c}-\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\cos(\alpha)\cdot|\vec{c}|\cdot|\vec{b}| = |\vec{c}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2(\vec{c},\ \vec{b})$$

Пусть $\vec{b} \to -\vec{b}$:

$$|\vec{c}+\vec{b}|^2 = (\vec{c},\ \vec{c}) + (\vec{b},\ \vec{b}) + 2(\vec{c},\ \vec{b})$$

Пусть $\vec{b} \to (\vec{x}+\vec{y})$:

$$|\vec{c}+(\vec{x}+\vec{y})|^2 = (\vec{c},\ \vec{c}) + |(\vec{x}+\vec{y})|^2 + 2(\vec{c},\ \vec{x}+\vec{y})$$
$$\text{Где } |(\vec{x}+\vec{y})|^2 = (\vec{x},\ \vec{x}) + (\vec{y},\ \vec{y}) + 2(\vec{x},\ \vec{y})$$
$$\text{Тогда } |\vec{c}+(\vec{x}+\vec{y})|^2 = (\vec{c},\ \vec{c}) + (\vec{x},\ \vec{x}) + (\vec{y},\ \vec{y}) + 2(\vec{x},\ \vec{y}) + 2(\vec{c},\ \vec{x}+\vec{y})$$

Рассмотрим переход

$$(\vec{c}+(\vec{x}+\vec{y}))^2 = \vec{c}^2 + \vec{x}^2 + \vec{y}^2 + 2(\vec{x},\ \vec{y}) + 2(\vec{c},\ \vec{x}+\vec{y}) \quad (1)$$
$$((\vec{c}+\vec{x})+\vec{y})^2 = \vec{c}^2 + \vec{x}^2 + \vec{y}^2 + 2(\vec{c},\ \vec{x}) + 2(\vec{c}+\vec{x},\ \vec{y}) \quad (2)$$
$$(1)-(2) \implies (\vec{x},\ \vec{y}) + (\vec{c},\ \vec{x}+\vec{y}) - (\vec{c},\ \vec{x}) - (\vec{c}+\vec{x},\ \vec{y}) = 0$$
$$\vec{y} \to -\vec{y}$$
$$-(\vec{x},\ \vec{y}) + (\vec{c},\ \vec{x}-\vec{y}) - (\vec{c},\ \vec{x}) + (\vec{c}+\vec{x},\ \vec{y}) = 0 \quad (3)$$

$$(1)-(2)+(3) = (\vec{c},\ \vec{x}+\vec{y}) + (\vec{c},\ \vec{x}-\vec{y}) - 2(\vec{c},\ \vec{x}) = 0$$

Пусть $\vec{x}+\vec{y} = \vec{a}$ и $\vec{x}-\vec{y} = \vec{b}$:

$$(\vec{c},\ \vec{a}) + (\vec{c},\ \vec{b}) = 2(\vec{c},\ \vec{x})$$
$$\vec{x} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$$
$$(\vec{c},\ \vec{a}) + (\vec{c},\ \vec{b}) = 2\left(\vec{c},\ \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right) = (\vec{c},\ \vec{a}+\vec{b})$$

Доказано.

question (6)

ЕВП. Определение ортогональных векторов. Вычисление скалярного произведения в ортонормированном базисе.

ЕВП

Вещественное векторное пространство V называется Евклидовым векторным пространством, если каждой упорядоченной паре векторов $\vec{a}, \vec{b}$ поставлено в соответствие число $(\vec{a}, \vec{b})$, которое называется скалярным произведением. При этом должны выполнены свойства скалярного произведения (положительная определенность ск.п., вынос скаляра за скобки, коммутативность, дистрибутивность).

$$\vec{a}, \vec{b} \to (\vec{a}, \vec{b})$$

Определение ортогональных векторов

Два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются ортогональными (перпендикулярными), если их скалярное произведение равно нулю:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 0$$

Определение: Базис в ЕВП называется ортонормированным, если:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \qquad \text{(нормированность)} \\ 0, & i \neq j \qquad \text{(ортогональность)} \end{cases}$$
$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij} \text{ – символ Кронекера}$$

Теорема: В ортонормированном базисе(ЕВП) $\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \dots,\ \vec{e}_n\}$:

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{e}_i \quad \vec{b} = \sum_{j=1}^{n} b_j \vec{e}_j$$

Скалярное произведение определяется как:

$$(\vec{a},\ \vec{b}) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Доказательство:

$$(\vec{a},\ \vec{b}) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\vec{e}_i \sum_{j=1}^{n} b_j\vec{e}_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j (\vec{e}_i\vec{e}_j)$$

Так как $\delta_{ij} = \begin{cases} 1,\ i = j \\ 0,\ i \neq j, \end{cases}$ и у нас $i = j$, то $(\vec{a},\ \vec{b}) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i$

question (7)

Аффинное пространство. Аффинная система координат. Определение координат точки. Вычисление координат вектора по координатам его начала и конца. Ортонормированный репер. Расстояние между двумя точками в ортонормированном репере.

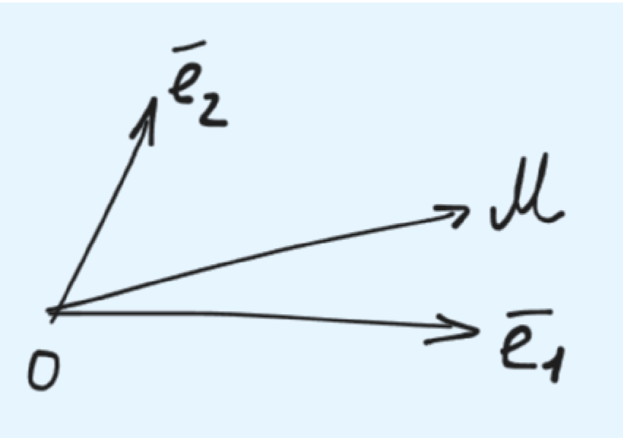
Определение: Аффинным пространство A, ассоциированным с векторным пространством V, называется множество A, для которого задано отображение $\varphi : A \times A \to V$, удовлетворяющее двум аксиомам Вейля:

1. От каждой точки можно отложить вектор единственным образом:
$\forall M \in A,\ \ \forall \vec{a} \in V\ \ \exists! N \in A \mid \varphi(M, N) = \vec{a}$.
2. Правило сложения векторов (правило треугольника):
$\forall M, N, P \in A \implies \varphi(M, N) + \varphi(N, P) = \varphi(M, P)$.

Определение: Пусть (A, V) аффинное пространство ассоциированное с векторным пространством V. Тогда совокупность точки $O \in A$ и базиса B_V называются аффинной системой координат или аффинный репер.

Обозначение: $R = (O, B_V)$, $B_V = \{\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}\}$

Вектор $\vec{OM}$ - радиус вектор точки M. ($\vec{r}_M = \vec{OM}$).
Координатами точки M в аффинной системе координат $R(O,\ B_V)$ называются координаты радиус вектора $\vec{OM}$ относительно базиса B_V



$\vec{r}_M = \vec{OM} \implies M(x_1,\ \ldots,\ x_n)_R \equiv \vec{OM}(x_1,\ \ldots,\ x_n)_B$. То есть радиус-вектор в базисе B_V имеет те же координаты, что и точка M в аффинном репере.

Определение координат вектора по координатам его начала и конца

Пусть $R = (O,\ B)$ - аффинная система координат, заданная начальной точкой и базисом

$$M(x_1, \ldots, x_n)_R$$
$$N(y_1, \ldots, y_n)_R$$

тогда $\vec{MN} = (y_1 - x_1, \ldots, y_n - x_n)_B$.

Доказательство:

$$\vec{OM} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \vec{e}_i$$

$$\vec{ON} = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \vec{e}_i$$

$$\vec{MN} = \vec{ON} - \vec{OM} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i) \cdot \vec{e}_i$$

Ортонормированный репер

Аффинная система координат $R(O,\ B)$ называется прямоугольно-декартовой системой координат или ортонормированным репером, если B - ортонормированный базис.
Базис называется ортонормированным, если $(\vec{e}_i,\ \vec{e}_j) = \begin{cases} 1,\ i = j \\ 0,\ i \neq j \end{cases}$

Расстояние между двумя точками в ортонормированным репере

Аффинное пространство называется евклидовым точечным пространством, если оно ассоциировано в Евклидово векторное пространство $(A,\ V)$.

Расстояние между точками A и B в ЕТП называется длина $\vec{AB}$:

$$|AB| \overset{def}{=} |\vec{AB}|$$

тогда $|AB| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$ - расстояние между двумя точками.

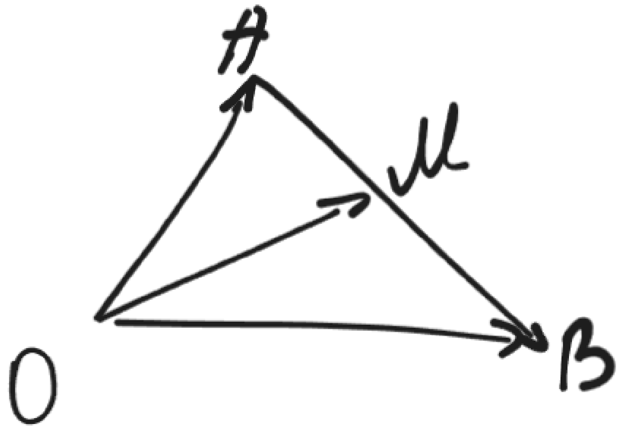
Теорема. Пусть $R(O,\ B)$ - ортонормированный репер, тогда координаты точки A в аффинном репере равны координатам радиус-вектора точки A в базисе.

$$A(x_1,\ \ldots,\ x_n)_R \equiv \vec{r}_A(x_1,\ \ldots,\ x_n)_B$$

question (8)

Деление отрезка в данном отношении.

Пусть $\vec{AM} = \lambda \vec{MB} \implies \vec{r}_M = \dfrac{\vec{r}_A + \lambda \vec{r}_B}{1+\lambda}$.



Доказательство:

$$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB} \implies \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

$$\vec{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_a$$

$$\vec{AB} = \vec{AM} + \vec{MB} = (1+\lambda)\vec{MB}$$

$$\vec{MB} = \frac{\vec{AB}}{1+\lambda} = \frac{\vec{r}_B - \vec{r}_A}{1+\lambda}$$

$$\begin{aligned}
\vec{OM} = \vec{OB} + \vec{BM} = \vec{OB} - \vec{MB} \\
&= \vec{OB} - \frac{\vec{r}_B - \vec{r}_A}{1+\lambda} \\
&= \vec{r}_B - \frac{\vec{r}_B - \vec{r}_A}{1+\lambda} \\
&= \frac{(1+\lambda)\vec{r}_B - (\vec{r}_B - \vec{r}_A)}{1+\lambda} \\
&= \frac{\vec{r}_B + \lambda\vec{r}_B - \vec{r}_B + \vec{r}_A}{1+\lambda} \\
&= \frac{\lambda\vec{r}_B + \vec{r}_A}{1+\lambda} = \frac{\vec{r}_A + \lambda\vec{r}_B}{1+\lambda}
\end{aligned}$$

question (9)

Векторное уравнение прямой. Параметрические уравнения прямой. Каноническое уравнение прямой. Уравнение прямой, проходящее через две точки.

Определение. Любой ненулевой вектор параллельной плоскости называется направляющим вектором данной прямой.

Обозначение. $l(A,\ \overline{a})$ - прямая, проходящая через A с направлением вектора $\overline{a}$.
Определение. В системе аксиом Г. Вейля, прямая $l(A,\ \overline{a}) = \{M \in E^2 \mid \overline{AM} || \overline{a}\}$.

Виды уравнений прямой на плоскости:

1. Векторное уравнение прямой:

$$\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AM} = \overline{OA} + t\overline{a},\ t \in \mathbb{R}$$
$$\vec{r}_M = \vec{r}_A + t\vec{a},\ t \in \mathbb{R}$$

2. Параметрическое уравнение прямой:

$$R(O,\ B),\ B = \{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2\}.$$
$$\text{Пусть } M(x,\ y),\ A(x_0,\ y_0),\ \vec{a}(a_1,\ a_2)$$
$$\underbrace{x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2}_{\vec{r}_M} = \underbrace{x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2}_{\vec{r}_A} + \underbrace{t(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2)}_{t\vec{a}}$$
$$\begin{matrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{matrix} \begin{cases} x = x_0 + ta_1,\ t \in \mathbb{R} \\ y = y_0 + ta_2,\ t \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2)$$

3. Каноническое уравнение прямой:
   Пусть $a_1 \cdot a_2 \neq 0$

$$(2) \implies \begin{matrix} t = \dfrac{x - x_0}{a_1} \\ t = \dfrac{y - y_0}{a_2} \end{matrix} \quad \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} \quad (3)$$

Замечание. Если один из коэффициентов $a_1,\ a_2,\ \ldots$, то будем полагать, что числитель равен 0.
т.е. $\dfrac{x - x_0}{0} = \dfrac{y - y_0}{a_2} \equiv \begin{cases} x - x_0 = 0 \\ y = y_0 + ta_2 \end{cases}$
4. Уравнение прямой, проходящей через 2 точки:

$$\text{Пусть } A(x_1,\ y_1),\ B(x_2,\ y_2) \in l,\ A \neq B$$

$$\text{Пусть } \vec{a} = \vec{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1) \overset{(3)}{\implies} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

question (10)

Общее уравнение прямой. Алгебраические линии первого порядка.

Уравнение прямой с заданной точкой и направляющим вектором:

$$M \in l(A,\ \overline{a}) \equiv \vec{AM}||\vec{a}$$
$$A(x_0,\ y_0),\ M(x,\ y)$$
$$\vec{a}(a_1,\ a_2)$$
$$\vec{AM}(x-x_0,\ y-y_0)$$
$$\implies \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

Из (5) вытекает общее уравнение прямой:

$$(5) \implies a_2(x-x_0) - a_1(y-y_0) = 0$$
$$\underbrace{a_2}_{A}\ x\ \underbrace{-a_1}_{B} y \underbrace{- a_2x_0 + a_1y_0}_{C} = 0$$

$$Ax + By + C = 0,\ \text{ где } A^2 + B^2 \neq 0$$

Это уравнение также называется уравнением алгебраической линии первого порядка, которая является прямой.

Доказательство:

Пусть $\vec{a}(-B,\ A)$ от общего уравнения прямой, и $M_0\left(\dfrac{-AC}{A^2+B^2},\ \dfrac{-BC}{A^2+B^2}\right)$

$$l(M_0,\ \vec{a}) \overset{(5)}{\implies} \begin{vmatrix} x + \dfrac{AC}{A^2+b^2} & y + \dfrac{BC}{A^2+B^2} \\ -B & A \end{vmatrix} = 0$$
$$\implies Ax + By + \frac{A^2C}{A^2+B^2} + \frac{B^2C}{A^2+B^2} = 0$$
$$\implies Ax + By + C\left(\frac{A^2}{A^2+B^2} + \frac{B^2}{A^2+B^2}\right) = 0$$

Замечание. Для прямой, заданной уравнением таким уравнением направляющий вектор $\vec{a}(-B,\ A)$

Следствие. $\vec{p}(p_1,\ p_2)\ ||\ l : Ax + By + C = 0 \iff Ap_1 + Bp_2 = 0$

Доказательство:

$$\vec{a}(-A,\ B)$$
$$\vec{a}||\vec{p} \iff \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ -B & A \end{vmatrix} = Ap_1 + Bp_2 = 0$$

Уточнение:

$$\vec{a}(a_1,\ a_2),\ \vec{b}(b_1,\ b_2)$$
$$\vec{a}||\vec{b} \iff \exists\lambda \in \mathbb{R} : \vec{b} = \lambda\vec{a}$$

Определитель как проверка измеряет площадь параллелограмма, образованного этими двумя векторами.

$$\vec{a}||\vec{b} \iff \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

Если он равен нулю, площадь параллелограмма равна нулю, что означает, что вектора лежат на одной прямой, то есть они коллинеарны.

question (11)

Взаимное расположение прямых на плоскости.

Даны прямые $l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$

1. $l_1 = l_2 \iff$ когда соответствующие коэффициенты совпадают,

$$\text{то есть } \exists\lambda : \begin{cases} A_2 = \lambda A_1 \\ B_2 = \lambda B_1 \\ C_2 = \lambda C_1 \end{cases}$$

   Доказательство:

$$(\implies) \text{ Направляющие векторы } \vec{a}_{l_1} || \, \vec{a}_{l_2} \implies \exists\lambda \in \mathbb{R} : \vec{a}_{l_2} = \lambda\vec{a}_{l_1}$$
$$\vec{a}_{l_2} = (-B_2,\ A_2),\ \vec{a}_{l_1} = (-B_1,\ A_1) \implies \begin{cases} A_2 = \lambda A_1 \\ B_2 = \lambda B_1 \end{cases} \quad (*)$$
$$\text{Пусть } l_1 \ni M_0(x_0,\ y_0) \in l_2 \hookrightarrow A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0 \quad (1)$$
$$\text{С учетом } (*)\ \lambda A_1x_0 + \lambda B_1y_0 + C_2 = 0 \quad (2)$$
$$\lambda \cdot (1) - (2) = \lambda C_1 = C_2$$

   $(\impliedby)$ Если коэффициенты пропорциональны, уравнения описывают одно и то же множество точек. Оба уравнения задают одно и то же множество точек, так как их уравнения отличаются лишь на множитель λ, а это не меняет геометрическую прямую.

2. $l_1 || l_2 \iff$ когда соответствующие коэффициенты при неизвестных пропорциональны, и не пропорциональны свободным членам,

$$\text{то есть } \exists\lambda : \begin{cases} A_2 = \lambda A_1 \\ B_2 = \lambda B_1 \\ C_2 \neq \lambda C_1 \end{cases}$$

   Доказательство:

$$(\implies)\ l_1 || l_2 \implies \vec{a}_{l_1} || \, \vec{a}_{l_2} \implies \begin{cases} A_2 = \lambda A_1 \\ B_2 = \lambda B_1 \end{cases}$$
$$\text{Если } C_2 = \lambda C_1, \text{ то по доказанному } l_1 = l_2. \text{ Противоречие.}$$

$$(\impliedby) \text{ Если } l_1 \not\parallel l_2, \text{ то } \exists M_0(x_0,\ y_0) \in l_1,\ l_2$$
$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0 \quad (1)$$
$$\text{С учетом, что } \begin{cases} A_2 = \lambda A_1 \\ B_2 = \lambda B_1 \\ C_2 \neq \lambda C_1 \end{cases}$$
$$\lambda A_1x_0 + \lambda B_1y_0 + C_2 = 0 \quad (2)$$
$$\text{Вычитая } \lambda(1) - (2) \text{ получаем } \lambda C_1 = C_2 - \text{ противоречие.}$$

3. $l_1 \cap l_2 = \{!M_0\} \iff$ когда соответствующие коэффициенты при неизвестных не совпадают,

$$\text{то есть } \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$$

Доказательство:

$$\text{Если } \begin{cases} A_2 = \lambda A_1 \\ B_2 = \lambda B_1, \\ C_2 = \lambda C_1 \end{cases} \text{ тогда } l_1 = l_2 - \text{ противоречие.}$$

$$\text{Если } \begin{cases} A_2 = \lambda A_1 \\ B_2 = \lambda B_1, \\ C_2 \neq \lambda C_1 \end{cases} \text{ тогда } l_1 || l_2 - \text{ противоречие.}$$

question (12)

Прямая в прямоугольной системе координат. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Вектор нормали и его связь с общим уравнением прямой.

Пусть $Ax + By + C = 0$

$$B \neq 0 \implies y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$
$$k = -\frac{A}{B},\ b = -\frac{C}{B}$$

$y = kx + b$ - уравнение прямой с угловым коэффициентом.
$\angle\alpha$ - угол наклона прямой к оси Ox, $0 \leq \alpha < 180^\circ$.
$k = \tan(\alpha)$ - геометрический смысл числа k, угловой коэффициент.
Если $B = 0 \implies x = -\dfrac{C}{A} \implies l||Ox$.

Прямая в прямоугольной системе координат

$l : Ax + By + C = 0$. Пусть $M_0(x_0,\ y_0) \in l \implies Ax_0By_0 + C = 0$

$$Ax + By + C = 0 \iff \begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ Ax_0 + By_0 + C = 0 \end{cases}$$
$$\iff A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$
$$\iff (\vec{N},\ \vec{M_0M}) = 0$$

Поскольку скалярное произведение равно нулю, векторы $\vec{N}$ и $\vec{M_0M}$ ортогональны. Это означает что вектор $\vec{N}$ перпендикулярен направлению прямой и, следовательно, является её нормальным вектором. $\vec{N} \neq 0$, так как $A^2 + B^2 \neq 0$.

question (13)

Неполные уравнения прямой.

Если в общем уравнении прямой $Ax + By + C = 0$ один или два из трех коэффициентов равны нулю, то уравнение называется неполным.

1. $C = 0 : Ax + By$ - прямая, проходящая через начало координат.
2. $B = 0 \ (A \neq 0) : Ax + C = 0$ - прямая перпендикулярная Ox.
3. $B = 0, \ C = 0 \ (A \neq 0) : x = 0$ - ось Oy.
4. $A = 0 \ (B \neq 0) : By + C$ - прямая перпендикулярная Oy.
5. $A = 0, \ C = 0 \ (B \neq 0) : y = 0$ - ось Ox.

question (14)

Уравнение прямой "в отрезках".

Если ни один из коэффициентов не равен нулю, то уравнение можно записать в виде:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \text{ где } a = -\frac{C}{A},\ b = -\frac{C}{B}$$

Вывод:
Рассмотрим общее уравнение прямой: $Ax + By + C = 0$. Предположим, что прямая пересекает ось Ox в точке $(a,\ 0)$ и ось Oy в точке $(0,\ b)$.
Подставляя $y = 0$ находим $x = a$:

$$Aa + C = 0 \implies a = -\frac{C}{A}$$

Подставляя $x = 0$ находим $y = b$:

$$Bb + C = 0 \implies b = -\frac{C}{B}$$

Разделим общее уравнение на $-C$:

$$\frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1 \implies \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Если прямые заданы уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то могут представится три случая:

$$\begin{aligned}
&1)\ \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} - \text{ прямые имеют одну общую точку.}\\
&2)\ \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} - \text{ прямые параллельны.}\\
&3)\ \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} - \text{ прямые совпадают.}
\end{aligned}$$

question (15)

Расстояние от точки до прямой на плоскости.

Пусть в прямоугольной системе координат $l: Ax + By + C = 0$. $M_0(x_0,\ y_0)$ - любая точка на плоскости. ρ - расстояние от M_0 до l. $\vec{N}||\vec{M_0M_1} \perp l$, где $\vec{N}(A,\ B)$.
Скалярное произведение: $(\vec{N},\ \vec{M_0M_1})$:

$$= |\vec{N}| \cdot |\vec{M_0M_1}| \cdot \underbrace{\cos(\vec{N},\ \vec{M_0M_1})}_{=\pm 1} \implies$$

$$\implies |(\vec{N},\ \vec{M_0M_1})| = |\vec{N}| \cdot |\vec{M_0M_1}| \implies \rho = \frac{|(\vec{N},\ \vec{M_0M_1})}{|\vec{N}|}$$

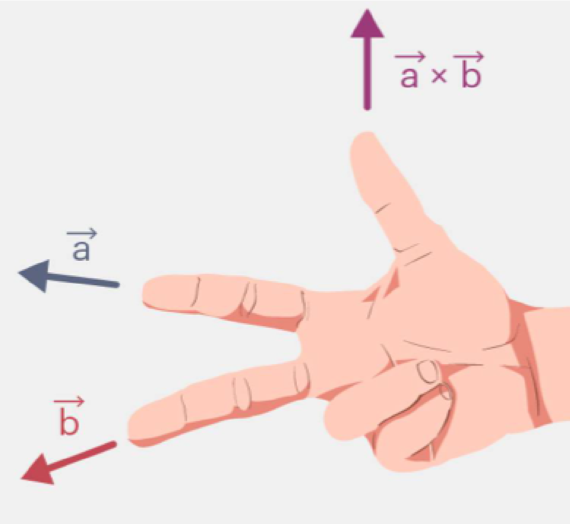
$$\rho = \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_1 + By_1 - (Ax_0 + By_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} =$$

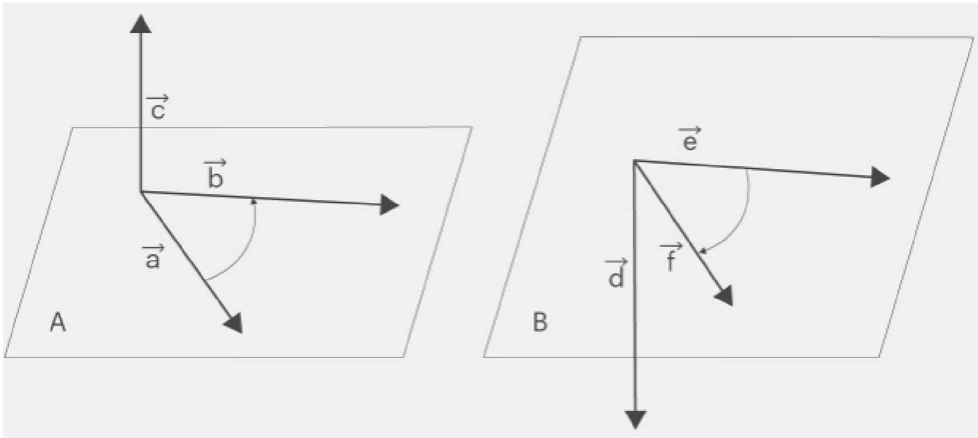
$$= \frac{|-C - Ax_0 - By_0|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_0 + Bx_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

question (16)

Определение и свойства векторного произведения.

Пусть $\vec{a}, \ \vec{b}, \ \vec{c}$ - упорядоченная тройка некомпланарных векторов. Векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$ определяется как вектор, удовлетворяющим следующим условиям:

1. Направление: $\vec{a}, \ \vec{b}$ - перпендикулярно плоскости, содержащей эти вектора, а направление определяется по правилу правой руки: если разместить указательный палец правой руки на первом векторе, а средний на втором, то отогнутый перпендикулярно к ладони большой палец покажет примерное направление произведения векторов.


Вектор $\vec{c}$, полученный в результате векторного произведения $\vec{a} \times \vec{b}$, направлен так, чтобы наименьшее вращение от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ вокруг вектора $\vec{c}$ осуществлялось против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора $\vec{c}$.


2. Длинна вектора $\vec{a} \times \vec{b}$: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \ \vec{b})$.
3. Вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ определяется однозначно, кроме случая $\vec{a}||\vec{b}$, где результат равен $\vec{0}$.

Свойства векторного произведения

1. Геометрический смысл длинны векторного произведения - площадь параллелограмма, построенного на этих векторах.

2. Перпендикулярность результата: $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a},\ \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$.
3. Антикоммутативность: $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$.
4. Ассоциативность по умножению на скаляр: $k(\vec{a} \times \vec{b}) = (k\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (k\vec{b}),\ k \in \mathbb{R}$.
5. Дистрибутивность: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$.
6. Собственный результат: $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.
7. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \iff |\vec{a} \times \vec{b}| = 0 \iff |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a},\ \vec{b})$ если $|\vec{a}| = 0$ или $|\vec{b}| = 0$ или $\sin(\vec{a},\ \vec{b}) = 0 : (\vec{a}, \hat{\ } \vec{b}) = 0^\circ$ или π.
8. Смешанное произведение: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

question (17)

Вывод формулы для векторного произведения в ортонормированном базисе.

Координаты векторного произведения в ортонормированном базисе. Базис ортонормирован, если $(e_i,\ e_j) = \begin{cases} 1,\ i = j \\ 0,\ i \neq j \end{cases}$

$$\text{В базисе } \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}:\ \vec{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3),\ \vec{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3) \implies$$
$$\implies \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} =$$
$$= (a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1)$$

Доказательство:

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) \times (b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) =$$
$$= a_1b_2\vec{k} - a_1b_3\vec{j} - a_2b_1\vec{k} + a_2b_3\vec{i} + a_3b_1\vec{j} - a_3b_2\vec{i} =$$
$$= (a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1)$$

question (18)

Определение смешанного произведения. Доказательство линейности смешанного произведения. Выражение смешенного произведения через объем параллелепипеда.

Смешанным произведением $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению $\vec{a}$ на векторное произведение $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

$$(\vec{a},\ [\vec{b},\ \vec{c}])$$

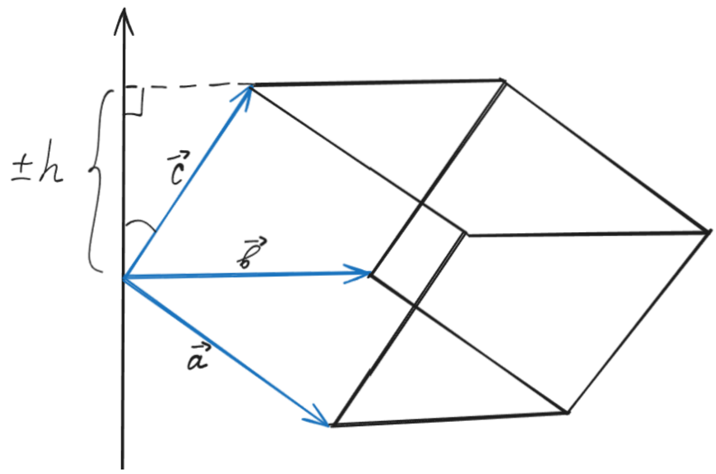
1. Линейность смешанного произведения: $(\vec{a}+\vec{b},\vec{c},\vec{d}) = (\vec{a},\vec{c},\vec{d}) + (\vec{b},\vec{c},\vec{d})$.
   Доказательство:

   $$(\vec{a}+\vec{b},\vec{c},\vec{d}) = ((\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c})\cdot\vec{d} = (\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{d} = (\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{d} + (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{d} = (\vec{a},\vec{c},\vec{d}) + (\vec{b},\vec{c},\vec{d})$$

2. $(\lambda\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \lambda(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$
   Доказательство:

   $$(\lambda\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\lambda\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \lambda(\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})) = \lambda(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$$

3. Выражение через объем параллелепипеда



V - объем параллелепипеда, построенного на $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$.

$$\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c} = \begin{cases} V, & \vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c} - \text{ правая} \\ -V, & \vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c} - \text{ левая} \end{cases}$$

question (19)

Критерий компланарности, использующий смешанное произведение.

Для компланарности векторов $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ трехмерного пространства необходимо и достаточно, чтобы их смешанное произведение было равно нулю.
Доказательство:
$\implies$ Предположение: вектора компланарны. Это означает, что $\vec{c}$ можно выразить как линейную комбинацию $\vec{a},\ \vec{b}$:

$$\begin{gathered}\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}, \quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{R} \\ [\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) = \\ = \alpha((\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a}) + \beta((\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b})\end{gathered}$$

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0$, так как $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$
$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$, так как $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$
Тогда $[\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}] = 0$.

$\impliedby$ Если смешанное равно нулю, то вектора компланарны:

$$[\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$$

Это означает, что $\vec{c}$ ортогонален $(\vec{a} \times \vec{b})$, а значит, лежит в той же плоскости, что и $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

question (20)

Вывод формулы для смешанного произведения в ортонормированном базисе.

Пусть в ортонормированном базисе $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (a_1,\ a_2,\ a_3)\\ \vec{b} &= (b_1,\ b_2,\ b_3)\\ \vec{c} &= (c_1,\ c_2,\ c_3)\end{aligned} \implies \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Доказательство:

$$\begin{aligned}\vec{b}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}\cdot\vec{i} - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}\cdot\vec{j} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\cdot\vec{k} = \\ &= (b_2c_3 - b_3c_2)\vec{i} - (b_1c_3 - b_3c_1)\vec{j} + (b_1c_2 - b_2c_1)\vec{k}\end{aligned}$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

question (21)

Двойное векторное произведение.

Двойное векторное произведение $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ - это векторное произведение $\vec{a}$ на векторное произведение $\vec{a}$ на векторное произведение $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

$$\left[\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right] = \left[\vec{a},\ \left[\vec{b},\ \vec{c}\right]\right]$$

Формула Лагранжа:

$$\left[\vec{a},\ \left[\vec{b},\ \vec{c}\right]\right] = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

которую можно запомнить по мнемоническому правилу «бац минус цаб».

Доказательство:
Выберем правый ортонормированный базис $\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\}$ так, чтобы:

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3$$
$$\vec{b} = \beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2$$
$$\vec{c} = \gamma_1\vec{e}_1$$
$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & 0 \\ \gamma_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0,\ 0,\ -\beta_2\gamma_1)$$
$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \times (0,\ 0,\ -\beta_2\gamma_1) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & -\beta_2\gamma_1 \end{vmatrix} = (-\alpha_2\beta_2\gamma_1,\ \alpha_1\beta_2\gamma_1,\ 0)$$
$$\vec{a} \cdot \vec{c} = \alpha_1\gamma_1$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) &= \alpha_1\gamma_1\vec{b} - (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)\vec{c} \\ &= (\alpha_1\beta_1\gamma_1,\ \alpha_1\beta_2\gamma_1,\ 0) - (\alpha_1\beta_1\gamma_1 + \alpha_2\beta_2\gamma_1,\ 0,\ 0) \\ &= (-\alpha_2\beta_2\gamma_1,\ \alpha_1\beta_2\gamma_1,\ 0) \end{aligned}$$

Таким образом $\left[\vec{a},\ \left[\vec{b},\ \vec{c}\right]\right] = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

Замечание. Векторное произведение не ассоциировано. Не для любых векторов $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ верно, что $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$.

question (22)

Параметрические уравнения плоскости - векторное и в координатах.

$\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^3$ - линейное подпространство, $\dim \mathcal{L} = 2$. $\mathcal{L}$ - направляющее пространство плоскости π.

$$\vec{a},\ \vec{b} - \text{ базис пространства } \mathcal{L}$$

$$\pi = M_0 + \mathcal{L} = \{M \in \pi \mid \vec{M_0M} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}\}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{M_0M} = \underbrace{\vec{r}_0 + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}}_{\text{век-парам. урав.}};\quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}; [a,\ b] \neq 0$$

где $\vec{r}_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ - радиус-вектор некоторой фиксированной точки плоскости.
Чтобы $\vec{r}$ был радиус-вектором некоторой точки плоскости, необходимо, чтобы $\vec{r} - \vec{r}_0$, $\vec{a} - \vec{b}$ лежали в одной плоскости, то есть их смешанное произведение $= 0$.

Координатное разложение:

$$x = x_0 + \lambda a_1 + \mu b_1$$
$$y = y_0 + \lambda a_2 + \mu b_2$$
$$z = z_0 + \lambda a_3 + \mu b_3$$

Это система параметрических уравнений, выражающая координаты произвольной точки $M(x,\ y,\ z)$ через параметры.

Извлечение общего уравнения плоскости:
Вектор $\vec{M_0M} = (x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0)$.
Плоскость как линейная комбинация векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$: $\vec{M_0M} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$.
Нормальный вектор $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$ где $\vec{n} = (n_1,\ n_2,\ n_3)$ - координаты нормального вектора:

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0$$

Раскрывая скобки:

$$n_1x + n_2y + n_3z + D = 0$$

где $D = -(n_1x_0 + n_2y_0 + n_3z_0)$.

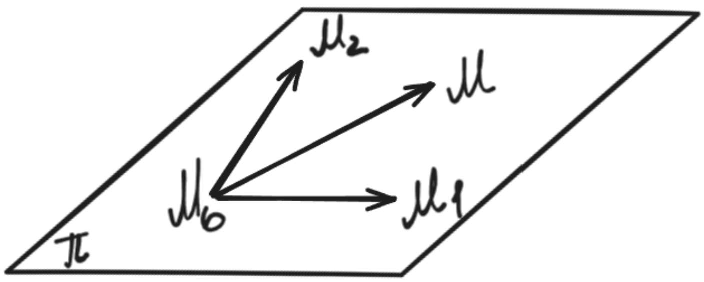
Получаем итоговое координатное уравнение.

question (23)

Уравнение в плоскости, проходящей через три точки.

Пусть $M(x,\ y,\ z),\ M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ в аффинном репере $(O,\ \{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\})$.

$$\implies \begin{cases} x = x_0 + \lambda a_1 + \mu b_1 \\ y = y_0 + \lambda a_2 + \mu b_2 \\ z = z_0 + \lambda a_3 + \mu b_3 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{где } \vec{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3) \\ \vec{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3) \\ \text{в базисе } \{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\} \end{matrix}$$



$M_0\vec{M}_1,\ M_0\vec{M}_2$ - базис направляющего пространства плоскости π.

$M \in \pi \iff M_0\vec{M}_1,\ M_0\vec{M}_2,\ M_0\vec{M}$ - компланарны. То есть

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_2 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_3 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

Это называется уравнением плоскости, проходящее через 3 точки.

Его можно записать в векторном виде, где $r - r_0,\ r_1 - r_0,\ r_2 - r_0$ - радиус векторы.

question (24)

Общее уравнение плоскости.

Общее уравнение плоскости в трехмерном пространстве имеет вид:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

где $A,\ B,\ C$ - координаты нормального вектора $\vec{n} = (A,\ B,\ C) \neq (0,\ 0,\ 0)$, D - свободный член, который зависит от положения плоскости относительно начала координат, $x,\ y,\ z$ - координаты произвольной точки $M(x,\ y,\ z)$ на плоскости. Это уравнение называется линейным относительно $x,\ y,\ z$.

Теорема. Любая плоскость задается линейным уравнением относительно $x,\ y,\ z$.
Доказательство: пусть $M_0,\ M_1,\ M_2 \in \pi$ - точки, не лежащие на одной прямой.

$$\pi : \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

где $(a_1,\ a_2,\ a_3) = (x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0)$ и $(b_1,\ b_2,\ b_3) = (x_2 - x_0,\ y_2 - y_0,\ z_2 - z_0)$

$$A = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix},\ B = -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix},\ C = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

В ортонормированном репере $\vec{n} = (A,\ B,\ C) \perp \pi$

$$Ax + By + Cz + \underbrace{(-Ax_0 - By_0 - Cz_0)}_{D} = 0$$

Теорема. Любое линейное уравнение относительно $x,\ y,\ z$ задает плоскость в E^3.
Доказательство:
Рассмотрим линейное уравнение вида

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Оно задает множество всех точек $M(x,\ y,\ z) \in E^3$, которые удовлетворяют линейной зависимости между координатами. Это множество образует плоскость так как $\vec{n} = (A,\ B,\ C) \perp$ плоскости. D - определяет положение плоскости относительно начала координат.
Если $D \neq 0$, то плоскость не проходит через начало координат. Найдем точку $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ на плоскости: выберем $x_0,\ y_0,\ z_0$ удовлетворяющие $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

$$A \neq 0 : y_0 = 0,\ z_0 = 0, \text{ тогда } x_0 = -\frac{D}{A}.$$
$$A = 0,\ B \neq 0 : y_0 = -\frac{D}{B},\ x_0 = 0,\ z_0 = 0$$
Аналогично для $C \neq 0$.

Таким образом, всегда можно найти точку на плоскости.

Для задания плоскости нужно найти два направляющих вектора, которые лежат в ней, поэтому они должны быть ортогональны нормальному вектору $\vec{n} = (A,\ B,\ C)$. Пусть $\vec{v}_1 = (v_{1x},\ v_{1y},\ v_{1z})$ и $\vec{v}_2 = (v_{2x},\ v_{2y},\ v_{2z})$ - направляющие векторы плоскости. Они должны удовлетворять:

$$Av_{1x} + Bv_{1y} + Cv_{1z} + D = 0$$
$$Av_{2x} + Bv_{2y} + Cv_{2z} + D = 0$$

Такие векторы всегда существуют, потому что $(A,\ B,\ C) \neq (0,\ 0,\ 0)$ одновременно.

Уравнение плоскости можно записать через точку $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ и два направляющих вектора $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2$. Для любой точки $M(x,\ y,\ z)$ на плоскости вектор $\vec{M_0}M$ лежит в плоскости, а значит его можно разложить по $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2$:

$$\vec{M_0}M = \lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2, \qquad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$$

Условие ортогональности с $\vec{n}$ приводит к линейному уравнению относительно $x,\ y,\ z$.

question (25)

Угол между плоскостями. Взаимное расположение плоскостей.

Взаимное расположение плоскостей
Пусть

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Они совпадают если $\exists\lambda \in R : A_2 = \lambda A_1,\ B_2 = \lambda B_1,\ C_2 = \lambda C_1,\ D_2 = \lambda D_1$. Заметим, что $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, так как совпадение - частный случай параллельности. Ввиду совпадения плоскостей, координаты $(x,\ y,\ z)$ в π_1 и π_2 совпадают.

Плоскости параллельны, но не совпадают, если их нормальные векторы $\vec{n}_1 = (A_1,\ B_1,\ C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2,\ B_2,\ C_2)$ коллинеарны, то есть

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

однако, в отличие от случая совпадения, свободные члены D_1 и D_2 не пропорциональны, то есть:

$$\frac{D_1}{D_2} \neq \frac{A_1}{A_2} \dots$$

$\vec{n}_1 || \vec{n}_2$ - критерий параллельности плоскостей. Если $\vec{n}_1$ можно выразить через $\lambda\vec{n}_2$, то $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = 0 \implies \vec{n}_1 || \vec{n}_2$.

Если плоскости не параллельны, то они пересекаются по прямой. Условие для этого: $\vec{n}_1 \not\parallel \vec{n}_2$, то есть:

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \quad \text{или} \quad \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$$

Чтобы найти уравнение прямой пересечения нужно решить систему:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Плоскости перпендикулярны, если их нормальные векторы ортогональны:

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$$

Это означает, что $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Угол между двумя плоскостями определяется как угол между их нормальными векторами $\in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
Пусть $\vec{n}_1 = (A_1,\ B_1,\ C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2,\ B_2,\ C_2)$ для плоскостей $\pi_1,\ \pi_2$.

$$\cos(\theta) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

$$\theta = \arccos(\cos(\theta))$$

Отсюда вытекают частные случаи взаимного расположения плоскостей:

1. $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \implies \cos(\theta) = 0 \implies \theta = 90^\circ$
2. $\vec{n}_1 || \vec{n}_2 \implies \dfrac{\vec{n}_1}{\vec{n}_2} = \text{const} \implies \theta = 0^\circ$ или 180°, но мы всегда рассматриваем $\theta = 0^\circ$ для параллельных плоскостей.

question (26)

Пучок плоскостей.

Пучок плоскостей — это множество всех плоскостей, которые можно выразить как линейную комбинацию двух непараллельных плоскостей. Уравнение пучка плоскостей имеет вид:

$$\lambda\pi_1 + \mu\pi_2 = 0$$

где

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

заданные плоскости, причем их нормальные вектора неколлинеарные ($\vec{n}_1 \not\parallel \vec{n}_2$).

Доказательство:
Уравнение пучка в явном виде:

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$
$$(\lambda A_1 + \mu A_2)x + (\lambda B_1 + \mu B_2)y + (\lambda C_1 + \mu C_2)z + (\lambda D_1 + \mu D_2) = 0$$

Это линейное уравнение относительно $x,\ y,\ z$, а значит задает плоскость, если хотя бы один из коэффициентов при $x,\ y,\ z$ ненулевой.
Если $\lambda \neq 0$ и $\mu \neq 0$, то обе плоскости $\pi_1,\ \pi_2$ одновременно входят в пучок. В этом случае они пересекаются по прямой l, которая является общей осью пучка.
И уравнение прямой называется решение системы:

$$l : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

У неё всегда есть решение, так как $\vec{n}_1 \not\parallel \vec{n}_2$.

Параметры $\lambda,\ \mu$ дают возможность изменять соотношение между плоскостями, что позволяет получить любую плоскость, проходящую через прямую l.
Если $\lambda = 0$, то пучок состоит из всех плоскостей, пропорциональных π_2.
Если $\mu = 0$, то пучок состоит из всех плоскостей, пропорциональных π_1.

Множество плоскостей, проходящих через точку $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ называется связкой плоскостей с центов в точке M_0.
Уравнение связки имеет вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

где $A,\ B,\ C \in \mathbb{R},\ (A,\ B,\ C) \neq (0,\ 0,\ 0)$, если $\pi_1,\ \pi_2,\ \pi_3 \dots \in M_0$ и $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 \dots = M_0$.
Уравнение связки — это уравнение пучка, где ось пучка (прямая пересечения) вырождается в точку.

Уравнение любой плоскости из связки:

$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i (A_i x + B_i y + C_i z + D_i) = 0$$

где $\lambda_i \in R, \pi_i : A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$