question (1)

Основные алгебраические структуры: группы, кольца, поля (определение). Композиция отображений, ассоциативность композиции. Инъективные и сюръективные отображения. Биективные отображения. Обратное отображение.

Группа

Группа $(G,\ \cdot)$ - это множество G с бинарной операцией $\cdot$, которая удовлетворяет:

1. Ассоциативность: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \forall a,\ b,\ c \in G$
2. Существование нейтрального элемента: $\exists e \in G : e \cdot a = a \cdot e = a, \quad \forall a \in G$
   Называется единицей группы G и обозначается e
3. Существование обратного элемента: $\forall a \in G\ \exists b \in G : a \cdot b = b \cdot a = e$
   Если операция $\cdot$ коммутативна ($a \cdot b = b \cdot a$), то группа называется коммутативной или абелевой группой.
   Если группа G состоит из конечного числа элементов, то она называется конечной группой, а число элементов в ней - порядком группы.

Кольцо

Кольцо $(R,\ +,\ \cdot)$ - это множество R с двумя бинарными операциями $+$ (сложение), $\cdot$ (умножение), которые удовлетворяют:

1. $(R,\ +)$ - абелева группа (аддитивная группа кольца), то есть сложение ассоциативно, существует нейтральный элемент 0 (нулевой элемент), и каждый элемент $a \in R$ имеет обратный элемент $-a$.
2. Умножение ассоциативно: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \forall a,\ b,\ c \in R$
3. Дистрибутивность умножения относительно сложения: $(a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c)$ и $((a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c) \quad \forall a,\ b,\ c \in R$
   Если умножение коммутативно, то кольцо называется коммутативным. Если в R существует нейтральный элемент 1 относительно умножения, то кольцо называется кольцом с единицей.

Поле

Поле $(F,\ +,\ \cdot)$ - это коммутативное кольцо с единицей, где каждый ненулевой элемент обратим относительно умножения:

1. $(F,\ +)$ - абелева группа.
2. $(F \setminus \{0\},\ \cdot)$ - абелева группа. Эта группа называется мультипликативной группой поля.
3. Дистрибутивность умножения относительно сложения выполняется.

Композиция отображений, ассоциативность композиции

Пусть $f : A \to B,\ g : B \to C$ - два отображения. Тогда композиция $g \circ f : A \to C$ определяется как:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in A$$

Ассоциативность композиции:

$$h : U \to V, \quad g : V \to W, \quad f : W \to T$$
$$f(gh) = (fg)h$$

Доказательство: в соответствии с формальным определением равенства отображений нужно просто сравнить значения отображений $f(gh) : U \to T$ и $(fg)h : U \to T$ в произвольном элементе $u \in U$:

$$(f(gh))(u) = f((ghu)) = f(g(hu)) = (fg)(hu) = ((fg)h)u$$

Инъективное отображение

$$\forall x, y \in A \hookrightarrow (x \neq y \implies f(x) \neq f(y))$$

Сюръективное отображение

$$\forall y \in B\ \exists x \in A, f(x) = y$$

Биективное отображение

f – биективное отображение (взаимно однозначное), если f – инъекция и сюръекция.

Обратное отображение

Если $f : A \to B$ - биекция, то существует $f^{-1} : B \to A$ называемое обратным, такое что:

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in A$$
$$f^{-1}(f(y)) = y \quad \forall y \in B$$

Обратное отображение существует только для биекций.

question (2)

Комплексные числа. Сложение и умножение комплексных чисел. Алгебраическая запись комплексного числа. Поле комплексных чисел. Сопряжение комплексных чисел.

Комплексные числа

Это числа вида $z = a + bi$, где $a,\ b \in R$, а i - мнимая единица, такая, что $i^2 = -1$.

$$a - \text{ вещественная часть числа } z : \operatorname{Re}(z) = a$$
$$b - \text{ мнимая часть числа } z : \operatorname{Im}(z) = b$$

Сложение комплексных чисел

Для двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ сумма определяется как:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

Умножение комплексных чисел

Для двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ произведение определяется как:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

Поле комплексных чисел

Множество $\mathbb{C}$ образует поле, то есть оно замкнуто относительно сложения, вычитания, умножения и деления и удовлетворяет следующим свойствам:

1. Сложение:
    1. Ассоциативность: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
    2. Коммутативность: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
    3. Существование нуля: $z + 0 = z$
    4. Существование противоположного элемента: $z + (-z) = 0$
2. Умножение:
    1. Ассоциативность: $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$
    2. Коммутативность: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
    3. Существование единицы: $z \cdot 1 = z$
    4. Существование обратного элемента $\neq 0$: $z \cdot z^{-1} = 1$
3. Дистрибутивность:

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$$

4. Деление комплексных чисел выполняется через умножение на сопряженное число. Например, если $z = a + bi$ и $w = c + di \neq 0$, то:

$$\frac{z}{w} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2}$$

Сопряжение комплексного числа

Сопряжение числа $z = a + bi$ обозначается как $\overline{z} = a - bi$

Свойства:

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
4. $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$
5. $z \cdot \overline{z} = |z|^2, \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

question (3)

Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа. Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра.

Модуль комплексного числа

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

где $a = \mathrm{Re}(z),\ b = \mathrm{Im}(z)$. Геометрически, модуль — это расстояние от точки, соответствующей z на комплексной плоскости, до начала координат.

Аргумент комплексного числа

Аргументом называют угол φ между вектором соответствующим числу z, и положительным направлением вещественной оси Ox.
Обозначается $\arg(z)$.

$$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

Тригонометрическая форма комплексного числа

$$z = |z| \cdot (\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$$

Доказательство:
Модуль $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ определяет длину вектора. Косинус и синус определяются как:

$$\cos(\varphi) = \frac{a}{|z|}, \qquad \sin(\varphi) = \frac{b}{|z|}$$

$$\text{Тогда } z = a + bi = |z| \cdot \left(\frac{a}{|z|} + i\frac{b}{|z|}\right) = |z| \cdot (\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$$

Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Формула Муавра.

Формула Муавра применяется для возведения комплексного числа в степень и вытекает из умножения комплексных чисел. Если $z = |z|(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$, то для $\forall n \in \mathbb{Z}$:

$$z^n = |z|^n \cdot (\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

question (4)

Корни n-ой степени из комплексного числа. Корни из единицы. Группа корней n-ой степени из 1. Первообразные корни n-ой степени из 1.

Корни n-ой степени из комплексного числа

Корни n-ой степени из числа $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ это решение уравнения $w^n = z$. Каждое такое решение w_k записывается в виде:

$$w_k = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right), \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$$

Корни из единицы

$$w^n = 1$$
$$1 = \cos(0) + i\sin(0)$$
$$w_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right), \quad k = 0,\ 1,\ 2\ldots,\ n-1$$

Группа корней n-ой степени из 1

$$W = \{w_0,\ w_1,\ w_2,\ \ldots\ ,\ w_{n-1}\},$$

где $w_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)$ образует группу относительно умножения.
Свойства:

1. замкнутость (произведение двух корней w_k и w_j также является корнем n-ой степени из 1)
2. ассоциативность (следует из свойств умножения комплексных чисел.)
3. существует нейтральный элемент ($w_0 = 1$)
4. обратимость (для w_k это w_{n-k}).

Первообразные корни n-ой степени из 1

Первообразный корень n-ой степени из 1 - это такой корень $\zeta = w_k$, для которого его степени $\zeta^1,\ \zeta^2,\ \ldots,\ \zeta^n$ дают все n различных корней n-ой степени из 1.
Этот корень является первообразным тогда и только тогда, когда наибольший общий делитель k и n равен 1.
Формально: $\zeta^k \neq 1$ для $1 \leq k < n$, но $\zeta^n = 1$.
Доказательство: пусть $\zeta^m = 1$ для $1 \leq m < n$. Тогда m должно делить n, чтобы $\frac{2\pi km}{n}$

соответствовало полному обороту $2\pi l,\ l \in \mathbb{Z}$. Если $\textit{НОД}(k,\ n) = 1$, то $\zeta^m \neq 1$ так как k не делится на $\dfrac{n}{m}$. Следовательно все степени ζ^k дают различные n корней, а $\zeta = 1$.

question (5)

Перестановки. Число перестановок n элементов. Инверсия. Четность. Транспозиция и четность. Список перестановок, в котором каждая последующая получается одной транспозицией предыдущей.

Перестановки

Перестановка множества из n элементов - это упорядочение этих элементов, полученное перестановкой этих мест. Формально, перестановка множества $S = \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ - это биекция $\sigma : S \to S$.

Число перестановок n элементов

Общее число перестановок n-элементного множества равно $n!$.

Инверсия

Инверсия в перестановке $\sigma = [\sigma(1),\ \sigma(2),\ \ldots,\ \sigma(n)]$ - это пара индексов, таких что $i < j,\ \sigma(i) > \sigma(j)$.

Пример: $\sigma = [3,\ 1,\ 2]$

$$\text{Инверсии: } (3 > 1),\ (3 > 2),\ (1 \not> 2)$$
$$\text{Общее число } I(\sigma) = 2$$

Четность перестановки

Четность перестановки определяется количеством инверсий: если $I(\sigma)$ четно, то перестановка четная, и если нет, то нечетная.

Транспозиция и четность

Транспозиция - это перестановка, которая меняет местами два элемента, оставляя остальные элементы неизменными, другими словами это цикл длины 2. Обозначается как $(i\ j)$, где $i,\ j$ - индексы переставляемых элементов.

Свойства четности транспозиции:

1. Транспозиция $(i\ j)$ всегда меняет четность перестановки (если перестановка была четной, она становится нечетной и наоборот).
2. Любая перестановка может быть представлена как произведение транспозиций. Если число транспозиций нечетное, перестановка нечетная и наоборот.

Список перестановок, в котором каждая последующая получается одной транспозицией предыдущей

Такой список можно получить, используя **обход перестановок в соседях** (например, алгоритм Джонсона-Троттера). Идея в том, чтобы менять только два соседних элемента в каждой следующей перестановке.
Для $n = 3$:

$$[1,\ 2,\ 3] \to [2,\ 1,\ 3] \to [2,\ 3,\ 1] \to [3,\ 2,\ 1] \to [3,\ 1,\ 2] \to [1,\ 3,\ 2] \to [1,\ 2,\ 3]$$

Для $n = 2$:

$$[1,\ 2] \to [2,\ 1] \to [1,\ 2]$$

Пусть утверждение верно для $n = k$. То есть существует список перестановок, где каждая следующая получается одной транспозицией.
Для $n = k + 1$, добавляя $(k + 1)$ в перестановки $n = k$ слева направо и обратно, мы получаем новый список перестановок.
Поскольку добавление $(k + 1)$ в разные позиции не нарушает порядок соседних перестановок, каждая следующая отличается одной транспозицией.

question (6)

Группа подстановок n-й степени. Четность подстановки. Транспозиции. Разложение подстановки в произведение транспозиций и четность перестановки.

Группа подстановок n-й степени

Группа подстановок S_n (или группа перестановок) — это множество всех возможных перестановок n-элементного множества $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, наделённое операцией композиции подстановок.

1. Элементы группы S_n — это биекции $\sigma : X \to X$, то есть перестановки множества X.
2. Композиция подстановок σ и τ ($\sigma \circ \tau$) определяется как последовательное применение: $(\sigma \circ \tau)(x) = \sigma(\tau(x))$.
3. Нейтральным элементом в S_n является тождественная подстановка $e(x) = x$ для всех $x \in X$.
4. Для каждой подстановки σ существует обратная подстановка σ^{-1}, такая, что $\sigma \circ \sigma^{-1} = e$.

Число элементов группы S_n равно $n!$.

Пример: Для $n = 3$, множество $\{1, 2, 3\}$ имеет $3! = 6$ перестановок:

$$S_3 = \{\mathrm{id}, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}.$$

Чётность подстановки

Чётность подстановки определяется через количество **инверсий**. Подстановка σ является:

- **Чётной**, если число инверсий в ней чётно.
- **Нечётной**, если число инверсий нечётно.

Инверсии

Инверсия — это пара (i, j), где $i < j$, но $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Пример: Для подстановки $\sigma = [3, 1, 2]$,

- Инверсии: $(3 > 1), (3 > 2)$,
- Число инверсий $I(\sigma) = 2$, значит, подстановка чётная.

Связь с разложением в транспозиции
Чётность подстановки также определяется количеством транспозиций в её разложении:

- Если подстановка разложена в чётное число транспозиций, то она чётная.
- Если в нечётное число транспозиций — нечётная.

Транспозиции

Транспозиция — это подстановка, меняющая местами два элемента, оставляя остальные элементы на своих местах. Обозначается $(i\ j)$, где $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Пример: Транспозиция $(1\ 3)$ при применении к $X = [1, 2, 3]$ даст $X' = [3, 2, 1]$.

Свойства транспозиций

1. Каждая транспозиция является **нечётной** подстановкой (одно инвертирование увеличивает число инверсий на 1).
2. Любая перестановка может быть разложена в произведение транспозиций.

Разложение подстановки в произведение транспозиций и чётность подстановки

Теорема. Любая подстановка $\sigma \in S_n$ может быть представлена в виде произведения транспозиций:

$$\sigma = (i_1\ j_1)(i_2\ j_2)\ldots(i_k\ j_k).$$

Свойства

1. Чётность числа транспозиций в разложении определяет чётность подстановки:
   - Если k — чётное, то подстановка чётная.
   - Если k — нечётное, то подстановка нечётная.
2. Разложение в транспозиции **не уникально**, но чётность количества транспозиций всегда остаётся неизменной.

Пусть дана подстановка $\sigma = (1\ 3\ 2)$ для множества $\{1, 2, 3\}$ (циклическая перестановка). Разложим её в транспозиции:

$$\sigma = (1\ 2)(1\ 3).$$

Здесь 2 транспозиции (чётное число), значит, подстановка σ чётная.

Группа чётных подстановок (A_n)

Множество всех чётных подстановок из S_n образует подгруппу, называемую **группой чётных подстановок** A_n (или **альтернирующей группой**). Число элементов в A_n равно $\frac{n!}{2}$.

question (7)

Циклы. Четность цикла. Разложение подстановки в произведение независимых циклов. Декремент подстановки и четность.

Циклы

Цикл — это подстановка, которая переставляет элементы внутри некоторого подмножества, а все остальные элементы оставляет на месте. Цикл длины k записывается как $(i_1\ i_2\ \dots\ i_k)$ и означает, что элемент i_1 переходит в i_2, i_2 — в i_3, … , а i_k переходит в i_1.

Независимые циклы
Циклы называются **независимыми**, если их множества индексов не пересекаются. Например, $(1\ 3)$ и $(2\ 4)$ — независимые циклы, так как ни один элемент из $\{1, 3\}$ не принадлежит $\{2, 4\}$.

Чётность цикла

Теорема. Чётность цикла $(i_1\ i_2\ \dots\ i_k)$ определяется длиной цикла:

- Если длина k чётна, то цикл **нечётный**.
- Если длина k нечётна, то цикл **чётный**.

Это связано с тем, что цикл длины k можно разложить в произведение $k-1$ транспозиций:

$$(i_1\ i_2\ \dots\ i_k) = (i_1\ i_2)(i_1\ i_3)\dots(i_1\ i_k).$$

Количество транспозиций $k-1$ определяет чётность цикла.

Пример

1. Цикл $(1\ 2\ 3)$ имеет длину 3 (нечётное), поэтому он **чётный**.
2. Цикл $(1\ 2\ 3\ 4)$ имеет длину 4 (чётное), поэтому он **нечётный**.

Разложение подстановки в произведение независимых циклов

Любая подстановка $\sigma \in S_n$ может быть представлена как произведение независимых циклов. Это разложение единственно с точностью до порядка циклов.

Пример
Подстановка $\sigma = [3, 1, 2, 4]$ для множества $\{1, 2, 3, 4\}$ раскладывается в циклы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Начинаем с 1: $1 \to 3,\ 3 \to 2,\ 2 \to 1$, получаем цикл $(1\ 3\ 2)$.
2. Остался элемент 4, он переходит в себя: (4).
   Итоговое разложение:

$$\sigma = (1\ 3\ 2)(4).$$

Декремент подстановки и чётность

Декремент подстановки σ — это минимальное число транспозиций, в которые можно разложить σ. Обозначим декремент как $d(\sigma)$.

Связь декремента и чётности
Чётность декремента определяет чётность подстановки:

- Если $d(\sigma)$ чётно, подстановка чётная.
- Если $d(\sigma)$ нечётно, подстановка нечётная.

Пример
Пусть $\sigma = (1\ 3\ 2)(4)$, разложим её в транспозиции:

$$(1\ 3\ 2) = (1\ 2)(1\ 3),$$

а (4) тождественно. Итоговое разложение:

$$\sigma = (1\ 2)(1\ 3),$$

декремент $d(\sigma) = 2$ (чётный), значит, σ — чётная подстановка.

question (8)

Определение определителя n-го порядка. Основные свойства определителя. Элементарные преобразования.

Определение определителя n-го порядка

Определитель матрицы $A = (a_{ij})$ **порядка** n — это число, вычисляемое по следующей формуле:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)},$$

где:

- S_n — множество всех перестановок σ элементов $\{1, 2, \ldots, n\}$,
- $\mathrm{sgn}(\sigma)$ — знак (чётность) перестановки σ: $+1$ для чётных перестановок и -1 для нечётных,
- $\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$ — произведение элементов, соответствующих данной перестановке.

Пример для $n = 2$
Для матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ определитель равен:

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Основные свойства определителя

1. **Линейность по строке (или столбцу)**:
   Если одна строка (или столбец) представлена как сумма двух строк (или столбцов), то определитель раскладывается как сумма определителей.
2. **Частный случай линейности**:
   Если умножить одну строку (или столбец) на число λ, то определитель умножится на λ.
3. **Симметрия и знакопеременность**:
   При перестановке двух строк (или столбцов) знак определителя меняется на противоположный:

   $$\det(A') = -\det(A),$$

   где A' — матрица, полученная перестановкой строк матрицы A.
4. **Определитель нулевой строки (или столбца)**:
   Если хотя бы одна строка (или столбец) матрицы состоит из нулей, то $\det(A) = 0$.
5. **Одинаковые строки (или столбцы)**:
   Если две строки (или столбца) матрицы совпадают, то $\det(A) = 0$.

6. **Треугольная матрица**:
Определитель треугольной матрицы (верхней или нижней) равен произведению её диагональных элементов:

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}.$$

7. **Умножение матриц**:
Определитель произведения матриц равен произведению их определителей:

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B).$$

8. **Обратимая матрица**:
Матрица A обратима тогда и только тогда, когда $\det(A) \neq 0$.

Элементарные преобразования строк (или столбцов) и их влияние на определитель

Три типа элементарных преобразований:

1. **Перестановка двух строк (или столбцов)**:
Меняет знак определителя:

$$\det(A') = -\det(A).$$

2. **Умножение строки (или столбца) на число λ**:
Определитель умножается на λ:

$$\det(A') = \lambda \cdot \det(A).$$

3. **Добавление к одной строке (или столбцу) другой строки (или столбца), умноженной на число**:
Определитель не изменяется:

$$\det(A') = \det(A).$$

Вычисление определителя методом элементарных преобразований

Для упрощения вычислений определителя применяются элементарные преобразования строк (или столбцов) с приведением матрицы к треугольному виду. Это делается следующим образом:

1. Используя преобразования строк, обнуляем элементы ниже главной диагонали.
2. Определитель треугольной матрицы вычисляется как произведение элементов на главной диагонали.

Пример:

Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 2 \\ 6 & 18 & 5 \end{pmatrix}$:

1. Приводим к треугольному виду.

2. Вычисляем $\det(A)$ как произведение диагональных элементов.

question (9)

Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по строке (столбцу). Теорема Лапласа.

Миноры и алгебраические дополнения

Минором элемента a_{ij} матрицы A порядка n называется определитель матрицы порядка $n-1$, полученной из A удалением i-й строки и j-го столбца. Минор обозначается как:

$$M_{ij} = \det(A_{ij}),$$

где A_{ij} — матрица, полученная из A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

Алгебраическое дополнение

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} называется число:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

где M_{ij} — минор, а знак $(-1)^{i+j}$ учитывает положение элемента в матрице.

Разложение определителя по строке (столбцу)

Формула разложения
Определитель матрицы $A = (a_{ij})$ порядка n можно вычислить, разложив его по элементам любой строки или столбца. Формула разложения по i-й строке:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} M_{ij} \cdot a_{ij}.$$

Пример
Рассмотрим матрицу A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Разложим $\det(A)$ по первой строке:

1. Элементы первой строки: $a_{11} = 1$, $a_{12} = 2$, $a_{13} = 3$.
2. Миноры:

$$M_{11} = \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} = 5 \cdot 9 - 6 \cdot 8 = -3,$$

$$M_{12} = \det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} = 4 \cdot 9 - 6 \cdot 7 = -6,$$

$$M_{13} = \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = 4 \cdot 8 - 5 \cdot 7 = -3.$$

3. Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = -3, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = 6, \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = -3.$$

4. Разложение:

$$\det(A) = 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 6 + 3 \cdot (-3) = -3 + 12 - 9 = 0.$$

Теорема Лапласа

Определитель матрицы A порядка n можно выразить через миноры и алгебраические дополнения элементов любой строки или столбца. Теорема утверждает, что для любого i:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij},$$

и для любого j:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}.$$

Свойство
Теорема Лапласа позволяет вычислить определитель по любой строке или столбцу, что может упростить вычисления, если строка или столбец содержит много нулей.

question (10)

Правило Крамера.

Правило Крамера

Правило Крамера — это метод нахождения решения системы линейных уравнений вида:

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

где:

- A — квадратная матрица порядка n с ненулевым определителем $\det(A) \neq 0$,
- $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ — вектор неизвестных,
- $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$ — вектор свободных членов.

Решение для x_i вычисляется как:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)},$$

где A_i — это матрица, полученная заменой i-го столбца матрицы A на вектор $\vec{b}$.

Формула

Для матрицы A и системы уравнений:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

решения:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где A_i — это матрица:

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

(В A_i i-й столбец заменён на $\vec{b}$).

Условия применения

1. Матрица A должна быть квадратной ($n \times n$).
2. Определитель $\det(A)$ не должен быть равен нулю ($\det(A) \neq 0$).

Пример

Решим систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 2, \\ 7x_1 + 8x_2 + 10x_3 = 3. \end{cases}$$

1. Матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислим $\det(A)$:

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}.$$

Расчёт:

$$\det(A) = 1 \cdot (5 \cdot 10 - 6 \cdot 8) - 2 \cdot (4 \cdot 10 - 6 \cdot 7) + 3 \cdot (4 \cdot 8 - 5 \cdot 7),$$

$$\det(A) = 1 \cdot (-10) - 2 \cdot (-2) + 3 \cdot (-3) = -10 + 4 - 9 = -15.$$

3. Вычислим $\det(A_1)$ (заменяем 1-й столбец на $\vec{b}$):

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

$$\det(A_1) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}.$$

Расчёт:

$$\det(A_1) = 1 \cdot (-10) - 2 \cdot (-2) + 3 \cdot (-1) = -10 + 4 - 3 = -9.$$

4. Аналогично находим $\det(A_2)$ и $\det(A_3)$:

$$\det(A_2) = 0, \quad \det(A_3) = 15.$$

5. Решения:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-9}{-15} = \frac{3}{5}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{0}{-15} = 0, \quad x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{15}{-15} = -1.$$

Итоговое решение:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

question (11)

Алгебра матриц. Свойства операций сложения и умножения матриц (ассоциативность умножения без док-ва).

Алгебра матриц

Матрица — это таблица чисел, организованная в виде прямоугольника с m строками и n столбцами:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрица A называется матрицей размера $m \times n$, где a_{ij} — элемент матрицы на i-й строке и j-м столбце.

Сложение матриц

Сложение матриц возможно, если они имеют одинаковый размер $m \times n$. Пусть $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ — две матрицы размера $m \times n$. Тогда их сумма $C = A + B$ определяется как:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad \forall i, j.$$

Умножение матрицы на скаляр

Если λ — скаляр, то умножение матрицы $A = (a_{ij})$ на λ даёт матрицу $\lambda A = (\lambda a_{ij})$, то есть:

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}.$$

Умножение матриц

Умножение матриц возможно, если число столбцов первой матрицы совпадает с числом строк второй. Пусть A имеет размер $m \times k$, а B — размер $k \times n$. Их произведение $C = AB$ будет матрицей размера $m \times n$, где элементы c_{ij} вычисляются по формуле:

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{k} a_{ir} b_{rj}.$$

Свойства сложения

1. **Коммутативность**:
   Для любых двух матриц A, B одинакового размера $m \times n$:

   $$A + B = B + A.$$

Доказательство: По определению сложения матриц:

$$(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad (B+A)_{ij} = b_{ij} + a_{ij}.$$

Поскольку сложение чисел коммутативно ($a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$), то $A + B = B + A$.

2. **Ассоциативность**:
   Для любых трёх матриц A, B, C одинакового размера $m \times n$:

   $$(A+B)+C = A+(B+C).$$

   Доказательство: По определению:

   $$((A+B)+C)_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}, \quad (A+(B+C))_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}).$$

   Так как сложение чисел ассоциативно, $(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})$. Значит, $(A+B)+C = A+(B+C)$.

3. **Существование нулевой матрицы**:
   Существует нулевая матрица O размера $m \times n$, такая что:

   $$A + O = A.$$

   Доказательство: Пусть $O = (0)_{ij}$, то есть $o_{ij} = 0$ для всех i, j. Тогда:

   $$(A+O)_{ij} = a_{ij} + o_{ij} = a_{ij} + 0 = a_{ij}.$$

   Значит, $A + O = A$.

4. **Существование противоположной матрицы**:
   Для каждой матрицы A существует матрица $-A$ (такая, что $(-A)_{ij} = -a_{ij}$), и:

   $$A + (-A) = O.$$

   Доказательство: По определению:

   $$(A + (-A))_{ij} = a_{ij} + (-a_{ij}) = 0.$$

   Значит, $A + (-A) = O$.

Свойства умножения

1. **Ассоциативность умножения**:
   Для любых матриц A, B, C, где размеры подходят для произведения:

   $$(AB)C = A(BC).$$

2. **Дистрибутивность относительно сложения**:
   Для матриц A, B, C таких, что операции имеют смысл:

   $$A(B+C) = AB + AC, \quad (A+B)C = AC + BC.$$

   Доказательство:
   Рассмотрим первую формулу $A(B+C) = AB + AC$.
   Элемент матрицы $(B+C)$ вычисляется как:

$$(B+C)_{ij} = b_{ij} + c_{ij}.$$

Элемент матрицы $A(B+C)$:

$$(A(B+C))_{ij} = \sum_{r=1}^{k} a_{ir}(b_{rj} + c_{rj}).$$

По распределительному закону чисел:

$$\sum_{r=1}^{k} a_{ir}(b_{rj} + c_{rj}) = \sum_{r=1}^{k} a_{ir}b_{rj} + \sum_{r=1}^{k} a_{ir}c_{rj}.$$

Это элементы матриц AB и AC. Значит, $A(B+C) = AB + AC$.
Аналогично доказывается $(A+B)C = AC + BC$.

3. **Сочетание с умножением на скаляр**:
Для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ и матриц A, B:

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B).$$

Доказательство: Рассмотрим элемент $(\lambda(AB))_{ij}$:

$$(\lambda(AB))_{ij} = \lambda \cdot \sum_{r=1}^{k} a_{ir}b_{rj}.$$

Переносим λ к одному из множителей:

$$\lambda \cdot \sum_{r=1}^{k} a_{ir}b_{rj} = \sum_{r=1}^{k} (\lambda a_{ir})b_{rj} = \sum_{r=1}^{k} a_{ir}(\lambda b_{rj}).$$

Значит, $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

4. **Не коммутативность умножения**:
В общем случае:

$$AB \neq BA.$$

Пример: Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В этом случае $AB = BA$, но в общем случае порядок имеет значение.

question (12)

Теорема об умножении определителей.

Теорема об умножении определителей

Для квадратных матриц A и B одинакового порядка n справедливо следующее:

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Доказательство (без использования теоремы Лапласа)

1. **Определитель матрицы A через строки**: Пусть A — матрица размера $n \times n$, определитель которой записывается как:

   $$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)},$$

   где S_n — множество всех перестановок порядка n, а $\operatorname{sgn}(\sigma)$ — знак перестановки.
2. **Произведение матриц AB**: Элементы произведения $C = AB$ вычисляются как:

   $$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

   Тогда определитель $\det(AB)$ записывается как:

   $$\det(AB) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} c_{i,\sigma(i)}.$$

3. **Подстановка выражения для $c_{i,\sigma(i)}$**: Подставим $c_{i,\sigma(i)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{k,\sigma(i)}$:

   $$\det(AB) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{k,\sigma(i)} \right).$$

4. **Раскрытие произведения**: Используем свойства суммы и произведения:

   $$\prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{k,\sigma(i)} \right)$$

   преобразуется в сумму по всем возможным n-упорядоченным индексам $k_1, k_2, \ldots, k_n$:

   $$\sum_{k_1, k_2, \ldots, k_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,k_i} b_{k_i,\sigma(i)}.$$

5. **Объединение перестановок**: Замечаем, что для каждого набора индексов $k_1, k_2, \ldots, k_n$ подстановка $\tau \in S_n$ задаёт отображение $k_i \mapsto i$. Тогда $\sigma \circ \tau$ — это композиция перестановок,

и выражение сводится к:

$$\det(AB) = \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn}(\tau) \det(A) \cdot \det(B).$$

6. **Итог**: Учитывая свойства перестановок и ассоциативность определителя, получаем:

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Пример

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Найдём $\det(A)$, $\det(B)$ и $\det(AB)$.

1. Определим $\det(A)$:

$$\det(A) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2.$$

2. Определим $\det(B)$:

$$\det(B) = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 1 = 4.$$

3. Найдём AB:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}.$$

4. Определим $\det(AB)$:

$$\det(AB) = 4 \cdot 8 - 4 \cdot 10 = 32 - 40 = -8.$$

5. Проверим:

$$\det(A) \cdot \det(B) = (-2) \cdot 4 = -8.$$

Итак, $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

question (13)

Обратная матрица.

Обратная матрица

Для квадратной матрицы A порядка n (размера $n \times n$) существует **обратная матрица** A^{-1}, если выполняется:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n,$$

где I_n — единичная матрица размера $n \times n$.

Если такая матрица A^{-1} существует, то матрица A называется **невырожденной** (или **обратимой**). Если $\det(A) = 0$, матрица A называется **вырожденной** и обратной матрицы не существует.

Формула для обратной матрицы

Обратная матрица A^{-1} для матрицы A выражается как:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A),$$

где:

1. $\det(A)$ — определитель матрицы A,
2. $\operatorname{adj}(A)$ — присоединённая (или сопряжённая) матрица, элементы которой являются алгебраическими дополнениями элементов A.

Построение обратной матрицы

1. **Вычислить определитель** $\det(A)$**.**
   Если $\det(A) = 0$, матрица необратима, и A^{-1} не существует.
2. **Найти миноры и алгебраические дополнения.**
   Для каждого элемента a_{ij} вычислить минор M_{ij} и алгебраическое дополнение:

   $$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

3. **Построить матрицу алгебраических дополнений.**
4. **Транспонировать матрицу алгебраических дополнений.**
   Получаем $\operatorname{adj}(A)$.
5. **Вычислить обратную матрицу.**
   Используя формулу:

   $$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A).$$

Свойства обратной матрицы

1. **Уникальность**:
   Для любой обратимой матрицы A существует единственная матрица A^{-1}, такая что $A \cdot A^{-1} = I_n$.
2. **Обратная от произведения**:
   Для обратимых матриц A и B:
   $$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$
3. **Обратная от транспонированной матрицы**:
   $$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$
4. **Обратимость диагональной матрицы**:
   Диагональная матрица $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ обратима, если $d_i \neq 0$ для всех i, и обратная:
   $$D^{-1} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \ldots, \frac{1}{d_n}\right).$$

question (14)

Системы линейных алгебраических уравнений. Эквивалентные системы лин. алгебраических уравнений. Элементарные преобразования. Метод Гаусса.

Системы линейных алгебраических уравнений

Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) состоит из m уравнений с n неизвестными, имеет вид:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

где: a_{ij} — коэффициенты системы, b_i — свободные члены, x_j — неизвестные.

Система может быть представлена в **матричной форме**:

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

где:

- A — матрица коэффициентов ($m \times n$),
- $\vec{x}$ — вектор неизвестных ($n \times 1$),
- $\vec{b}$ — вектор свободных членов ($m \times 1$).=

Эквивалентные системы линейных уравнений

Две системы линейных уравнений называются **эквивалентными**, если они имеют одинаковое множество решений.

Примеры эквивалентных преобразований:

1. Умножение (или деление) уравнения на ненулевое число.
2. Перестановка уравнений.
3. Добавление к одному уравнению другого, умноженного на число.

Элементарные преобразования системы

Для упрощения системы линейных уравнений и приведения её к более удобному виду, используют три типа элементарных преобразований строк (уравнений):

1. **Перестановка строк.**
2. **Умножение строки на ненулевое число.**
3. **Добавление к одной строке другой строки, умноженной на число.**

Эти преобразования не изменяют множество решений системы, что позволяет искать решения эквивалентной системы.

Метод Гаусса

Метод Гаусса — это алгоритм решения СЛАУ путём приведения матрицы коэффициентов к **ступенчатому виду** с помощью элементарных преобразований.

Алгоритм метода Гаусса

1. **Записать СЛАУ в виде расширенной матрицы.**
   Расширенная матрица включает матрицу коэффициентов A и вектор свободных членов $\vec{b}$:

$$[A \mid \vec{b}] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \mid & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \mid & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \mid & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & \mid & b_m \end{pmatrix}$$

2. **Привести матрицу к ступенчатому виду.**
   Выполняются элементарные преобразования строк, чтобы:
   - Каждый ведущий элемент строки (первый ненулевой элемент слева) был равен 1.
   - Все элементы ниже ведущих в каждом столбце были равны 0.
3. **Обратный ход (если нужно).**
   Если требуется найти единственное решение, приводим матрицу к **упрощённому ступенчатому виду**, чтобы все элементы выше ведущих в каждом столбце стали равны 0.
4. **Записать решение.**
   Решение может быть:
   - **Единственным**: если ранг матрицы A равен числу неизвестных.
   - **Бесконечным (множество решений)**: если ранг A меньше числа неизвестных.
   - **Отсутствующим**: если ранг матрицы коэффициентов A меньше ранга расширенной матрицы $[A \mid \vec{b}]$.

Пример

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 9, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

1. **Запишем расширенную матрицу:**

$$[A \mid \vec{b}] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \mid & 4 \\ 2 & 3 & 3 & \mid & 9 \\ 1 & 1 & 2 & \mid & 5 \end{pmatrix}$$

2. **Приводим к ступенчатому виду:**
   - Переставим строки так, чтобы в первой строке ведущий элемент был максимален (по модулю).

- Вычтем первую строку, умноженную на 2, из второй строки, и первую строку из третьей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 4 \\ 0 & -1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

- Сложим вторую и третью строки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 4 \\ 0 & -1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

3. **Записываем решения:**
   - Вторая строка даёт уравнение: $-x_2 + x_3 = 1$ или $x_2 = x_3 - 1$.
   - Первая строка: $x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$. Подставляем x_2:

$$x_1 + 2(x_3 - 1) + x_3 = 4 \implies x_1 + 3x_3 = 6 \implies x_1 = 6 - 3x_3.$$

4. **Общее решение:**
   Пусть $x_3 = t$ (параметр). Тогда:

$$x_1 = 6 - 3t, \quad x_2 = t - 1, \quad x_3 = t.$$

   Общее решение:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 - 3t \\ t - 1 \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

question (15)

Векторное пространство над полем, примеры. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов. Линейная оболочка системы векторов. Лемма о линейной зависимости.

Векторное пространство над полем

Векторное пространство V над полем F — это множество, элементы которого называются **векторами**, с двумя операциями:

1. **Сложение векторов**: $\vec{u} + \vec{v} \in V$ для любых $\vec{u}, \vec{v} \in V$.
2. **Умножение вектора на скаляр**: $\lambda\vec{v} \in V$ для любого $\vec{v} \in V$ и $\lambda \in F$.

Эти операции удовлетворяют следующим аксиомам:

1. **Сложение:**
   - Ассоциативность: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.
   - Коммутативность: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.
   - Существование нуля: $\exists \vec{0} \in V \ \forall \vec{v} \in V \ (\vec{v} + \vec{0} = \vec{v})$.
   - Обратимость: $\forall \vec{v} \in V \ \exists - \vec{v} \in V \ (\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0})$.
2. **Умножение на скаляр:**
   - Дистрибутивность: $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$, $(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$.
   - Ассоциативность: $(\lambda\mu)\vec{v} = \lambda(\mu\vec{v})$.
   - Умножение на единицу: $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$ для любого $\vec{v} \in V$.

Пример
Множество F^n (векторы из n элементов):

- Поле: F.
- Элементы: $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, где $v_i \in F$.
- Операции: покоординатное сложение и умножение на скаляр.

Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов

Система векторов $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ в векторном пространстве V называется **линейно зависимой**, если существует нетривиальная линейная комбинация, равная нулю:

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_k\vec{v}_k = \vec{0},$$

где хотя бы один из коэффициентов $\lambda_i \neq 0$.

Если такой нетривиальной комбинации не существует, то система называется **линейно независимой**.

Примеры

1. Векторы $\vec{v}_1 = (1,0,0)$, $\vec{v}_2 = (0,1,0)$, $\vec{v}_3 = (0,0,1)$ в F^3 линейно независимы, так как никакой вектор нельзя выразить через линейную комбинацию других.
2. Векторы $\vec{v}_1 = (1,2)$, $\vec{v}_2 = (2,4)$ в F^2 линейно зависимы, так как $\vec{v}_2 = 2\vec{v}_1$.

Линейная оболочка системы векторов

Линейная оболочка системы векторов $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ — это множество всех линейных комбинаций этих векторов:

$$\text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\} = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{v}_i \;\middle|\; \lambda_i \in F \right\}.$$

Свойства

1. Линейная оболочка всегда является подпространством V.
2. Если система векторов линейно зависима, то их линейная оболочка совпадает с линейной оболочкой некоторого подмножества.

Лемма о линейной зависимости

Если система векторов $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ в пространстве V линейно зависима, то один из векторов можно выразить как линейную комбинацию остальных:

$$\vec{v}_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j \vec{v}_j.$$

Доказательство

1. Поскольку система линейно зависима, существует нетривиальная комбинация:

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k = \vec{0},$$

   где хотя бы одно $\lambda_i \neq 0$.
2. Пусть $\lambda_i \neq 0$. Выразим $\vec{v}_i$:

$$\vec{v}_i = -\frac{1}{\lambda_i} \sum_{j \neq i} \lambda_j \vec{v}_j.$$

3. Это доказывает, что $\vec{v}_i$ является линейной комбинацией остальных.

question (16)

Подпространство. Базис подпространства. Размерность. Базис системы векторов. Ранг системы векторов.

Подпространство

Множество W называется **подпространством** векторного пространства V над полем F, если $W \subseteq V$ и W само является векторным пространством с теми же операциями сложения и умножения на скаляр.

Условия для подпространства
Множество W является подпространством, если выполнены следующие свойства:

1. **Нулевой вектор принадлежит** W: $\vec{0} \in W$.
2. **Замкнутость относительно сложения**: Если $\vec{u}, \vec{v} \in W$, то $\vec{u} + \vec{v} \in W$.
3. **Замкнутость относительно умножения на скаляр**: Если $\vec{u} \in W$ и $\lambda \in F$, то $\lambda\vec{u} \in W$.

Базис подпространства

Базис подпространства W — это линейно независимая система векторов $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$, которая порождает W, то есть:

$$W = \operatorname{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}.$$

Свойства базиса

1. Векторы базиса линейно независимы.
2. Любой вектор $\vec{w} \in W$ представляется в виде линейной комбинации базисных векторов:

$$\vec{w} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \dots + \lambda_k\vec{v}_k, \quad \lambda_i \in F.$$

3. Базис не является уникальным, но число векторов в базисе одинаково для всех базисов.

Размерность

Размерность подпространства W — это число векторов в базисе W. Обозначается как $\dim(W)$.

Свойства размерности

1. $\dim(W) \leq \dim(V)$, где V — пространство, а $W \subseteq V$.
2. Если $\dim(W) = \dim(V)$, то $W = V$.

Базис системы векторов

Система векторов $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$ называется **базисом линейной оболочки этой системы**, если:

1. $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m\}$ линейно независимы.
2. $\mathrm{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m\} = \mathrm{span}\{\text{все векторы системы}\}$.

Ранг системы векторов

Ранг системы векторов $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ — это размерность линейной оболочки этой системы:

$$\mathrm{rank}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\} = \dim\left(\mathrm{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}\right).$$

Свойства ранга

1. Ранг системы векторов равен числу линейно независимых векторов в системе.
2. Если ранг системы векторов равен числу векторов в ней, то система линейно независима.
3. Если ранг меньше числа векторов, то система линейно зависима.

Примеры

Пример подпространства
Векторное пространство $V = F^3$ (векторы (x, y, z)) имеет подпространство $W = \{(x, y, 0) \mid x, y \in F\}$. Проверим условия подпространства:

1. $(0, 0, 0) \in W$ (нулевой вектор принадлежит).
2. $(x_1, y_1, 0) + (x_2, y_2, 0) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0) \in W$.
3. $\lambda(x, y, 0) = (\lambda x, \lambda y, 0) \in W$.

W — подпространство.

Пример базиса и ранга
Система векторов $\vec{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{v}_3 = (1, 1, 0)$ в F^3:

1. Проверим линейную зависимость:

   $$\lambda_1(1, 0, 0) + \lambda_2(0, 1, 0) + \lambda_3(1, 1, 0) = (0, 0, 0).$$

   Это даёт $\lambda_1 + \lambda_3 = 0$, $\lambda_2 + \lambda_3 = 0$. Решение: $\lambda_1 = -\lambda_3$, $\lambda_2 = -\lambda_3$, λ_3 — произвольное. Значит, векторы линейно зависимы.
2. Линейно независимая подсистема: $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ — базис. Ранг системы: 2.

question (17)

Ранг матрицы. Теорема о ранге матрицы. Метод окаймляющих миноров. Необходимое и достаточное условие равенства нулю определителя n-го порядка.

Ранг матрицы

Ранг матрицы A — это наибольший порядок ненулевого минора матрицы.
Ранг обозначается как $\mathrm{rank}(A)$.

- Если все миноры порядка $k > r$ равны нулю, а хотя бы один минор порядка r отличен от нуля, то $\mathrm{rank}(A) = r$.
- Если матрица состоит только из нулей, то её ранг равен 0.

Теорема о ранге матрицы

Ранг матрицы A равен числу линейно независимых строк и числу линейно независимых столбцов:

$$\mathrm{rank}(A) = \dim(\mathrm{span}(\text{строки } A)) = \dim(\mathrm{span}(\text{столбцы } A)).$$

Следствие

1. $\mathrm{rank}(A) \leq \min(m, n)$, где $m \times n$ — размер матрицы A.
2. Ранг не изменяется при транспонировании: $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^T)$.

Метод окаймляющих миноров

Метод окаймляющих миноров используется для нахождения ранга матрицы. Он заключается в последовательной проверке миноров матрицы на ненулевое значение.

Пример

Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$:

1. Рассмотрим определитель матрицы 3×3:

$$\det(A) = 1 \cdot (5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) - 2 \cdot (4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3 \cdot (4 \cdot 8 - 5 \cdot 7) = 0.$$

   Значит, $\mathrm{rank}(A) < 3$.

2. Рассмотрим миноры порядка 2:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 = -3.$$

Этот минор отличен от нуля, значит, $\mathrm{rank}(A) = 2$.

Необходимое и достаточное условие равенства нулю определителя n-го порядка

Формулировка

Определитель матрицы A порядка n равен нулю, если и только если её строки (или столбцы) линейно зависимы.

Доказательство (необходимость):

1. Если строки (или столбцы) линейно зависимы, то хотя бы одна строка выражается как линейная комбинация других.
2. При вычислении определителя такая линейная зависимость приводит к равенству $\det(A) = 0$.

Доказательство (достаточность):

1. Если $\det(A) = 0$, то все миноры порядка n равны нулю.
2. Это означает, что строки (или столбцы) не могут быть линейно независимыми, иначе определитель был бы ненулевым.

question (18)

Критерий совместности системы линейных алгебраических уравнений (теорема Кронекера-Капелли).

Теорема Кронекера-Капелли

Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

где A — матрица коэффициентов, $\vec{x}$ — вектор неизвестных, $\vec{b}$ — вектор свободных членов, совместна (имеет хотя бы одно решение) тогда и только тогда, когда:

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}([A \mid \vec{b}]),$$

где $[A \mid \vec{b}]$ — расширенная матрица системы, полученная добавлением столбца свободных членов $\vec{b}$ к матрице A.

Объяснение теоремы

1. **Матрица коэффициентов** A: включает только коэффициенты при неизвестных.
2. **Расширенная матрица** $[A \mid \vec{b}]$: включает и коэффициенты, и свободные члены.

Если $\mathrm{rank}(A) \neq \mathrm{rank}([A \mid \vec{b}])$, то столбец $\vec{b}$ не лежит в линейной оболочке столбцов A, поэтому система несовместна.

Последствия теоремы

1. Если $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}([A \mid \vec{b}]) = r$:
   - **Единственное решение**, если $r = n$ (число неизвестных).
   - **Бесконечно много решений**, если $r < n$.
2. Если $\mathrm{rank}(A) \neq \mathrm{rank}([A \mid \vec{b}])$, система несовместна (нет решений).

Пример

Рассмотрим СЛАУ:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 4. \end{cases}$$

1. Матрица коэффициентов:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Расширенная матрица:

$$[A \mid \vec{b}] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 2 & 3 & | & 2 \\ 1 & 3 & 4 & | & 4 \end{pmatrix}$$

3. Вычислим ранг A:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1(2 \cdot 4 - 3 \cdot 3) - 1(1 \cdot 4 - 3 \cdot 1) + 1(1 \cdot 3 - 2 \cdot 1) = -1.$$

Ранг $A = 3$.

4. Вычислим ранг $[A \mid \vec{b}]$:

Уберём строки для проверки совместности. Получаем тот же результат: $\mathrm{rank}([A \mid \vec{b}]) = 3$.

5. Поскольку $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}([A \mid \vec{b}]) = 3$ и это равно числу неизвестных, система имеет **единственное решение**.

question (19)

Связь между решениями однородной и неоднородной систем линейных алгебраических уравнений. Однородные системы. Фундаментальная система решений.

Однородная система линейных уравнений

Определение

Однородной называется система линейных уравнений, у которой все свободные члены равны нулю:

$$A\vec{x} = \vec{0},$$

где A — матрица коэффициентов, $\vec{x}$ — вектор неизвестных, $\vec{0}$ — нулевой вектор.

Свойства решений однородной системы

1. Нулевой вектор $\vec{x} = \vec{0}$ всегда является решением (тривиальное решение).
2. Если $\mathrm{rank}(A) = r$ и число неизвестных n, то размерность пространства решений однородной системы равна $n - r$.
   - Если $r = n$, то система имеет только тривиальное решение.
   - Если $r < n$, то система имеет бесконечно много решений.

Неоднородная система линейных уравнений

Определение

Неоднородная система имеет вид:

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

где $\vec{b} \neq \vec{0}$.

Связь между решениями однородной и неоднородной систем

Теорема. Пусть $\vec{x}_p$ — частное решение неоднородной системы $A\vec{x} = \vec{b}$, а $\vec{x}_h$ — общее решение однородной системы $A\vec{x} = \vec{0}$. Тогда:

1. Общее решение неоднородной системы имеет вид:

   $$\vec{x} = \vec{x}_p + \vec{x}_h,$$

   где $\vec{x}_h$ пробегает все решения однородной системы.

2. Геометрически: решение неоднородной системы — это сдвинутое подпространство, параллельное пространству решений однородной системы.

Фундаментальная система решений

Фундаментальная система решений однородной системы $A\vec{x} = \vec{0}$ — это линейно независимая система векторов $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$, которая образует базис пространства решений однородной системы.
Любое решение однородной системы представляется в виде:

$$\vec{x}_h = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \dots + \lambda_k\vec{v}_k,$$

где $\lambda_i \in F$ — произвольные коэффициенты.

Пример

Однородная система
Рассмотрим систему:

$$\begin{gathered} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{gathered}$$

1. Матрица коэффициентов:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Приведём A к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Это соответствует системе:

$$\begin{gathered} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_3 = 0 \end{gathered}$$

3. Решения:

$$x_3 = 0,\ x_2 = t,\ x_1 = -2t.$$

Общее решение:

$$\vec{x}_h = t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Неоднородная система
Пусть:

$$\begin{gathered} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2. \end{gathered}$$

1. Решение частной системы (подставляем $x_3 = 0$):

$$x_1 + 2x_2 = 1, \quad x_1 = 1,\ x_2 = 0.$$

Частное решение:

$$\vec{x}_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Общее решение неоднородной системы:

$$\vec{x} = \vec{x}_p + \vec{x}_h = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

question (20)

Многочлены с коэффициентами из кольца. Кольцо многочленов. Степень многочлена. Кольцо многочленов над полем: степень произведения многочленов, отсутствие делителей нуля. Деление с остатком в кольце многочленов над полем.

Многочлены с коэффициентами из кольца

Многочлен с коэффициентами из кольца R — это выражение вида:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

где:

- $a_i \in R$ — коэффициенты многочлена,
- x — переменная,
- $n \geq 0$ — степень многочлена.

Кольцо многочленов

Кольцо многочленов $R[x]$ — это множество всех многочленов с коэффициентами из кольца R, наделённое двумя операциями:

1. **Сложение многочленов:**

   $$(P + Q)(x) = P(x) + Q(x).$$

   Коэффициенты складываются покомпонентно.
2. **Умножение многочленов:**

   $$(P \cdot Q)(x) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_i b_j x^{i+j},$$

   где $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ и $Q(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$.

Свойства кольца многочленов

1. Если R — коммутативное кольцо, то $R[x]$ также коммутативно.
2. Если R содержит единицу, то в $R[x]$ также есть единица (многочлен 1).
3. Кольцо $R[x]$ не является полем, даже если R — поле (поскольку многочлен не обязательно имеет обратный).

Степень многочлена

Степень многочлена $P(x)$ — это наибольший индекс n, при котором коэффициент $a_n \neq 0$. Обозначается $\deg(P)$.

Свойства степени

1. $\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$.
2. $\deg(P \cdot Q) = \deg(P) + \deg(Q)$ (если R не содержит делителей нуля).
3. $\deg(c \cdot P) = \deg(P)$ для $c \neq 0$, где $c \in R$.

Кольцо многочленов над полем

Если $R = F$ — поле, то $F[x]$ обладает особыми свойствами.

Степень произведения многочленов

Для многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ из $F[x]$:

$$\deg(P \cdot Q) = \deg(P) + \deg(Q),$$

если $P(x) \neq 0$ и $Q(x) \neq 0$.

Отсутствие делителей нуля

В кольце $F[x]$ отсутствуют делители нуля:

$$P(x) \cdot Q(x) = 0 \implies P(x) = 0 \text{ или } Q(x) = 0.$$

Деление с остатком

Для многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ из $F[x]$, где $Q(x) \neq 0$, существует единственная пара многочленов $D(x)$ (частное) и $R(x)$ (остаток), таких что:

$$P(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x),$$

где $\deg(R) < \deg(Q)$ или $R(x) = 0$.

Пример деления с остатком

Рассмотрим $P(x) = x^3 + 2x^2 + 4$ и $Q(x) = x + 1$ в поле $\mathbb{R}$.

1. **Шаг 1 (разделим старший член):**

   $$\frac{x^3}{x} = x^2.$$

   Умножаем $Q(x)$ на x^2:

   $$x^2 \cdot (x+1) = x^3 + x^2.$$

   Вычитаем:

   $$(x^3 + 2x^2 + 4) - (x^3 + x^2) = x^2 + 4.$$

2. **Шаг 2 (следующий член):**

$$\frac{x^2}{x} = x.$$

Умножаем $Q(x)$ на x:

$$x \cdot (x+1) = x^2 + x.$$

Вычитаем:

$$(x^2 + 4) - (x^2 + x) = 4 - x.$$

3. **Шаг 3 (остаток):**

$$\frac{4-x}{x} \text{ нельзя разделить (степень меньше } Q(x)\text{).}$$

Итог:

$$P(x) = Q(x) \cdot (x^2 + x) + (4 - x).$$

question (21)

Свойства делимости в кольце. Наибольший общий делитель многочленов. Алгоритм Евклида. Выражение наибольшего общего делителя многочленов f и g через f и g.

Свойства делимости в кольце

Пусть R — кольцо, $a, b \in R$. Говорят, что элемент a делит элемент b ($a \mid b$), если существует элемент $c \in R$, такой что:

$$b = a \cdot c.$$

Свойства делимости

1. **Отношение делимости транзитивно**:
   Если $a \mid b$ и $b \mid c$, то $a \mid c$.
2. **Если $a \mid b$ и $a \mid c$, то** $a \mid (\lambda b + \mu c)$, где $\lambda, \mu \in R$.
3. **Делимость в кольце многочленов**:
   Пусть $f(x), g(x) \in R[x]$ (где R — поле). Тогда $f(x) \mid g(x)$, если существует многочлен $q(x) \in R[x]$, такой что:
   $$g(x) = f(x) \cdot q(x).$$
4. **Делимость и степень многочлена**:
   Если $f(x) \mid g(x)$, то $\deg(f) \leq \deg(g)$.

Наибольший общий делитель (НОД) многочленов

Пусть $f(x), g(x) \in F[x]$ (где F — поле). **Наибольший общий делитель (НОД)** этих многочленов — это многочлен $d(x)$, удовлетворяющий:

1. $d(x) \mid f(x)$ и $d(x) \mid g(x)$ (делитель $f(x)$ и $g(x)$),
2. Если $h(x) \mid f(x)$ и $h(x) \mid g(x)$, то $h(x) \mid d(x)$.

Свойства НОД

1. НОД определён с точностью до умножения на ненулевой скаляр.
2. $\deg(d(x)) \leq \min(\deg(f(x)), \deg(g(x)))$.
3. Если $f(x) \mid g(x)$, то $\gcd(f(x), g(x)) = f(x)$.

Алгоритм Евклида для нахождения НОД многочленов

Для нахождения $\gcd(f(x), g(x))$ выполняем следующие шаги:

1. Разделим $f(x)$ на $g(x)$ с остатком:

$$f(x) = g(x) \cdot q_1(x) + r_1(x), \quad \deg(r_1) < \deg(g(x)).$$

2. Если $r_1(x) = 0$, то $\gcd(f(x), g(x)) = g(x)$.
3. Если $r_1(x) \neq 0$, продолжаем:

$$g(x) = r_1(x) \cdot q_2(x) + r_2(x), \quad \deg(r_2) < \deg(r_1(x)).$$

4. Повторяем процесс, пока остаток не станет равным 0.

НОД — это последний ненулевой остаток.

Пример
Найдём $\gcd(f(x), g(x))$ для $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ и $g(x) = x^2 - 1$.

1. Разделим $f(x)$ на $g(x)$:

$$f(x) = (x^2 - 1) \cdot (x - 2) + (x - 2).$$

   Остаток $r_1(x) = x - 2$.
2. Разделим $g(x)$ на $r_1(x)$:

$$g(x) = (x - 2) \cdot (x + 1) + 0.$$

   Остаток $r_2(x) = 0$.

Следовательно, $\gcd(f(x), g(x)) = x - 2$.

Выражение НОД через $f(x)$ и $g(x)$

НОД $d(x)$ многочленов $f(x)$ и $g(x)$ можно представить в виде линейной комбинации:

$$d(x) = u(x) \cdot f(x) + v(x) \cdot g(x),$$

где $u(x), v(x) \in F[x]$.

Алгоритм получения линейной комбинации

1. Используем алгоритм Евклида для нахождения НОД.
2. В процессе деления с остатком выражаем каждый остаток как линейную комбинацию $f(x)$ и $g(x)$.
3. Последний ненулевой остаток — это НОД, уже выраженный как линейная комбинация.

Пример
Рассмотрим $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ и $g(x) = x^2 - 1$.

1. Ранее мы нашли $\gcd(f(x), g(x)) = x - 2$.
2. Распишем:

$$x - 2 = f(x) - (x - 2) \cdot g(x).$$

3. Следовательно:

$$\gcd(f(x), g(x)) = (1) \cdot f(x) + (-g(x)) \cdot g(x).$$

question (22)

Взаимно простые многочлены. Свойства взаимно простых многочленов.

Определение

Взаимно простые многочлены.
Многочлены $f(x)$ и $g(x)$ называются взаимно простыми, если их НОД равен ненулевой константе.

Теорема 1

Для того чтобы многочлены $f(x)$ и $g(x)$ из $F[x]$ были взаимно простыми, необходимо и достаточно, чтобы в $F[x]$ существовали такие многочлены $v(x)$ и $u(x)$, что

$$v(x) \cdot f(x) + u(x) \cdot g(x) = 1.$$

Доказательство:

1. **Необходимость.** Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — взаимно простые многочлены в кольце $F[x]$. Тогда существует $v(x), u(x) \in F[x]$, такие что

   $$v(x) \cdot f(x) + u(x) \cdot g(x) = d(x),$$

   где $d(x) = \text{НОД}(f, g)$. Поскольку $\text{НОД}(f, g) = 1$, то

   $$v(x) \cdot f(x) + u(x) \cdot g(x) = 1.$$

2. **Достаточность.** Пусть $d(x) = \text{НОД}(f, g)$. Поскольку $f(x), g(x) \in F[x]$, то каждое слагаемое в равенстве

   $$v(x) \cdot f(x) + u(x) \cdot g(x) = 1$$

   делится на $d(x)$. Следовательно, 1 делится на $d(x)$, и, значит, $d(x) \neq 0$.

Свойства

1. **Если многочлен $f(x)$ взаимно прост с каждым из многочленов $g(x)$ и $h(x)$, то он взаимно прост и с их произведением $g(x) \cdot h(x)$.**
   Доказательство. Поскольку $f(x)$ прост с $g(x)$ и $h(x)$, то существуют такие многочлены $v(x), u(x), v_1(x), u_1(x)$, что

   $$v(x) \cdot f(x) + u(x) \cdot g(x) = 1,$$

   $$v_1(x) \cdot f(x) + u_1(x) \cdot h(x) = 1.$$

   Складывая эти равенства, получаем:

   $$\big(v(x) \cdot v_1(x) + f(x) \cdot v(x) + u_1(x) \cdot h(x) + v_1(x) \cdot g(x) \cdot u(x)\big) \cdot f(x) + \big(u(x) \cdot u_1(x)\big) \cdot \big(g(x) \cdot h(x$$

По теореме 1, $f(x)$ и $g(x) \cdot h(x)$ взаимно просты.

2. **Если произведение $f(x) \cdot g(x)$ делится на $h(x)$, причем многочлены $f(x)$ и $h(x)$ взаимно просты, то $g(x)$ делится на $h(x)$.**
   Доказательство. Так как $f(x)$ и $h(x)$ взаимно просты, то по теореме 1 существуют такие многочлены $v(x), u(x)$, что
   $$v(x) \cdot f(x) + u(x) \cdot h(x) = 1.$$
   Умножая обе части равенства на $g(x)$, получаем:
   $$g(x) \cdot v(x) \cdot f(x) + g(x) \cdot u(x) \cdot h(x) = g(x).$$
   Поскольку первое и второе слагаемое в левой части делятся на $h(x)$, то и $g(x)$ делится на $h(x)$.
3. **Если $f(x)$ делится на $g(x)$ и на $h(x)$, причем** НОД$(g, h) = 1$**, то $f(x)$ делится на $g(x) \cdot h(x)$.**

   Доказательство. Поскольку $f(x)$ делится на $g(x)$, существует $q(x)$, такое что $f(x) = q(x) \cdot g(x)$. Также $f(x)$ делится на $h(x)$. Так как НОД$(g, h) = 1$, то по свойству 2 $g(x)$ делится на $h(x)$. Следовательно, $f(x)$ делится на $g(x) \cdot h(x)$.

question (23)

Корни многочлена. Теорема Безу. Кратность корня. Критерий кратности корня. Количество корней многочлена с учетом кратностей.

Определение

Корень многочлена.
Элемент $c \in K$ называется корнем многочлена $f \in A[x]$, если $f(c) = 0$. Также говорят, что c — корень уравнения $f(x) = 0$.

Теорема Безу

Элемент $c \in A$ является корнем многочлена $f \in A[x]$ тогда и только тогда, когда $(x - c)$ делит f в кольце $A[x]$.

Доказательство:
При делении f на $(x - c)$ в частном получаем многочлен q, а в остатке — r, где r — константа:

$$f = q(x - c) + r.$$

Подставляя $x = c$ в обе части равенства, имеем:

$$f(c) = q(c - c) + r = r.$$

Если $f(c) = 0$, то $r = 0$, значит, $(x - c)$ делит f.

Определение

Кратный корень.
Элемент $c \in A$ называется k-кратным корнем многочлена $f \in A[x]$, если f делится на $(x - c)^k$, но не делится на $(x - c)^{k+1}$.

Или, эквивалентно:

$$c \in A \text{ — корень кратности } k \text{ тогда и только тогда, когда } f(x) = (x - c)^k g(x),$$

где НОД$(x - c, g(x)) = 1$.

Теорема

Корень кратности $k \geq 2$ многочлена f является корнем кратности $k - 1$ многочлена f'. Простой корень многочлена f не является корнем многочлена f'.

Доказательство:
Пусть c — корень кратности k многочлена f:

$$f = q(x - c)^k, \quad q \text{ не делится на } (x - c).$$

Тогда

$$f' = q'(x-c)^k + qk(x-c)^{k-1}.$$

Преобразуем:

$$f' = \big(q'(x-c) + qk\big)(x-c)^{k-1}.$$

Так как $q'(x-c)$ делится на $(x-c)$, но qk не делится на $(x-c)$, то $q'(x-c)+qk$ делится на $(x-c)$. Таким образом, f' имеет корень c кратности $k-1$.

Теорема

Пусть кольцо K не содержит делителей нуля. Тогда любой многочлен $f \in K[x]$ степени $n > 0$ имеет в кольце K не более n корней с учетом их кратностей.

Доказательство:
Пусть $f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_s)g = (x-\beta_1)(x-\beta_2)\dots(x-\beta_t)h$, где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ — элементы кольца K, причем $\alpha_i \neq \beta_j$ при $i \neq j$, а многочлены g и h не имеют корней в K.

Подставим α_i в $f(x)$. Так как α_i — корень, то $f(\alpha_i) = 0$. Тогда:

$$f(\alpha_i) = (\alpha_i - \alpha_1)(\alpha_i - \alpha_2)\dots(\alpha_i - \alpha_s)g(\alpha_i).$$

Поскольку $\alpha_i - \alpha_i = 0$, хотя остальные множители $\neq 0$ (в K нет делителей нуля), получаем, что $g(\alpha_i) = 0$. Однако это противоречит тому, что g не имеет корней в K. Следовательно, количество различных корней $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ ограничено степенью $f(x)$.

Для кратных корней учитывается их кратность: если $f(x)$ делится на $(x-\alpha)^k$, но не делится на $(x-\alpha)^{k+1}$, то α засчитывается k раз. Таким образом, общее количество корней с учетом кратностей не превышает n.

question (24)

Многочлены с комплексными коэффициентами: основная теорема алгебры комплексных чисел (без док-ва), разложение многочлена на линейные множители, формулы Виета, интерполяционный многочлен Лагранжа.

Теорема: Основная теорема алгебры

Любой многочлен $f \in \mathbb{C}[x]$ степени не меньше 1 имеет по крайней мере один комплексный корень.

Эта теорема утверждает полноту поля комплексных чисел: все корни любого многочлена с комплексными коэффициентами содержатся в $\mathbb{C}$.

Интерполяционный многочлен Лагранжа

Интерполяционный многочлен Лагранжа используется для нахождения многочлена минимальной степени, который проходит через заданное множество точек $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$. Формула имеет вид:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \cdot \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}.$$

Здесь:

- x_i — заданные значения аргумента.
- y_j — значения функции в точках x_j.

Многочлен Лагранжа применяется в следующих задачах:

1. **Интерполяция**: нахождение значений функции в промежуточных точках между известными значениями.
2. **Численное интегрирование**: используется в методах квадратур для аппроксимации значений интегралов.
3. **Обработка данных**: применяется в аппроксимации и анализе числовых данных.

Разложение многочлена на линейные множители

Теорема: Всякий многочлен n-ой степени разлагается на n линейных множителей вида $(x - a)$, где a — корни, и множитель, равный коэффициенту при x^n.

Доказательство:
Пусть $f(x)$ — многочлен n-ой степени:

$$f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_n.$$

По "Основной теореме алгебры", $f(x)$ имеет хотя бы один корень a_1. Тогда, по теореме Безу:

$$f(x) = (x - a_1) \cdot f_1(x),$$

где $f_1(x)$ — многочлен степени $n-1$. Повторяя процесс, разложим $f_1(x)$:

$$f_1(x) = (x - a_2) \cdot f_2(x),$$

где $f_2(x)$ — многочлен степени $n-2$. После n шагов разложения получим:

$$f(x) = A_0(x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n),$$

где A_0 — старший коэффициент, а $a_1, a_2, \dots, a_n$ — корни многочлена $f(x)$.

Формулы Виета

Пусть $f(x)$ — унитарный многочлен n-ой степени:

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n = (x - c_1)(x - c_2)\dots(x - c_n),$$

где $c_1, c_2, \dots, c_n$ — корни $f(x)$.

Раскрывая скобки в правой части и группируя коэффициенты, получим:

$$\begin{gathered} a_1 = -(c_1 + c_2 + \dots + c_n), \\ a_2 = c_1c_2 + c_1c_3 + \dots + c_{n-1}c_n, \\ a_3 = -(c_1c_2c_3 + c_1c_2c_4 + \dots + c_{n-2}c_{n-1}c_n), \end{gathered}$$

$$a_j = (-1)^j \cdot \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_j \le n} c_{i_1}c_{i_2}\dots c_{i_j},$$

$$a_n = (-1)^n c_1c_2\dots c_n.$$

Если $f(x)$ не является унитарным, т.е. его старший коэффициент $A_0 \neq 1$, то формулы Виета будут выражаться через отношение $\dfrac{a_j}{A_0}$.