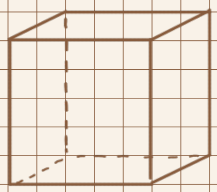
26 февраля 2025 г.

Задача 3.1:

Дано: $l_1(A, \overline{a})$, $l_2(B, \overline{b})$, l_1, l_2 - скрещ-ся



Задача 2: Дано: $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, $B' = \{\vec{e}_1', \vec{e}_2'\}$ - базисы в V, $C = \left(\frac{B}{B'}\right)$

Найти:

Решение:

$\vec{e}_{11}' = c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2 = \vec{e}_1'(c_{11}, c_{21})$

$\vec{e}_2 = c_{12} \cdot \vec{e}_1 + c_{22} \cdot \vec{e}_2$

$C = \left((\vec{e}_1'), (\vec{e}_2')\right) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$

$\forall \overline{x} \in V$

$\overline{x} = x_1 \cdot \overline{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 = x_1' \vec{e}_1' + x_2' \vec{e}_2'$ (1)

$\overline{x}_B = (x_1, x_2)$

$\overline{x}_{B'} = (x_1', x_2')$ $\quad \overline{x} = x_1' \vec{e}_1' + x_2' \vec{e}_2' = x_1' \cdot (c$

Как связаны координаты вектора в разных базисах

$\begin{cases} x_1 = x_1' c_{11} + x_2' c_{12} \\ x_2 = x_1' c_{21} + x_2' c_{22} \end{cases}$ (2) $\Rightarrow \tilde{x} = C\tilde{x}'$ (3)

Обозначим $\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ $\tilde{x}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$

3.2. Дано: пусть $R = \{O, \overline{e}_1, \overline{e}_2\}$, $R' = \{O', \overline{e}_1', \overline{e}_2'\}$

Аффинный репер $\equiv$ аффинная система координат.

Найти зависимость, если $C = (B/B')$, $B = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$, $B' = \{\overline{e}_1', \overline{e}_2'\}$

$O'_R(x_0, y_0)$

Решение: $\forall M(x, y)_R$, $M(x', y')_{R'}$

$\overline{OM} = x\overline{e}_1 + y\overline{e}_2$

$\overline{O'M} = x'\overline{e}_1' + y'\overline{e}_2'$ $\Rightarrow \overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M}$ (3) (правило Δка)

$(\overline{OO'} = x_0\overline{e}_1 + y_0\overline{e}_2)$

$\overline{O'M} = x'(c_{11}\bar{e}_1 + c_{21}\bar{e}_2) + y'(c_{12}\bar{e}_1 + c_{22}\bar{e}_2) = (x'c_{11} + y'c_{12})\bar{e}_1 + (x'c_{21} + y'c_{22})\bar{e}_2$

$(3) \Rightarrow x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 = (x'c_{11} + y'c_{12})\bar{e}_1 + (x'c_{21} + y'c_{22})\bar{e}_2 + x_0\bar{e}_1 + y_0\bar{e}_2$

$\begin{cases} x = x'c_{11} + y'c_{12} + x_0 \\ y = x'c_{21} + y'c_{22} + y_0 \end{cases}$ В матричном виде: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ (4)

Опр. Пусть $R = \{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$, $R' = \{O', \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$.

Тогда говорят, что R' получен из R параллельным переносом O в O'.

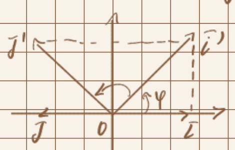
(4) => формулы преобразования координат при паралл. переносе.

$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$ (5)

Опр. Пусть $R = \{O, \bar{i}, \bar{j}\}$ – ОНР.

Пусть $(\widehat{\bar{i}, \bar{i}'}) = \varphi$

$(\widehat{\bar{j}, \bar{j}'}) = \varphi + \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$



$R' = \{O, \bar{i}', \bar{j}'\}$

Тогда говорят, что R' получ. из R поворотом φ.

$\Rightarrow \bar{i}' = \cos\varphi\,\bar{i} + \sin\varphi\,\bar{j}$

$\bar{j}' = \cos(\varphi + \frac{\pi}{2})\bar{i} + \sin(\varphi + \pi/2)\bar{j} = -\sin\varphi\,\bar{i} + \cos\varphi\,\bar{j}$

$C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

$x_0 = 0,\ y_0 = 0$

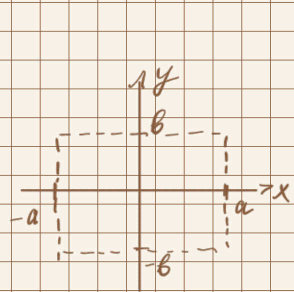
$(4) \Rightarrow \begin{cases} x = \cos\varphi\, x' - \sin\varphi\, y' \\ y = \sin\varphi\, x' + \cos\varphi\, y' \end{cases}$ (6)

Эллипсом называется мн-во точек γ: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $a \geq b > 0$ (1)

Ур. (1) называется каноническим.

Свойства эллипса

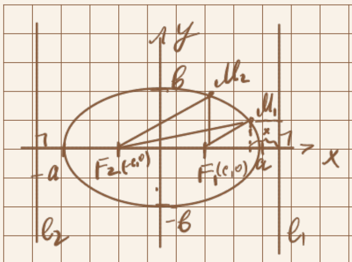
1. $(1) \Rightarrow \frac{|x|}{a} \leq 1,\ \frac{|y|}{b} \leq 1$



Эллипс должен быть расположен внутри прямоуг.

2. $\forall M(x_0, y_0) \in \gamma$

$M(\pm x_0, \pm y_0) \in \gamma$ $\Rightarrow O(0,0)$ – центр симметрии



Опр. точки летят где-то.

Опр. $2c = 2\sqrt{a^2-b^2}$

точки $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$ назыв. фокусами эллипса

Опр. $\varepsilon = \frac{c}{a}$ – эксцентриситет.

Опр. $l_1: x = \frac{a}{\varepsilon}$, $l_2: x = -\frac{a}{\varepsilon}$ – директрисы

Замечание. $0 \le \varepsilon < 1$

Т1. (Фокальное свойство)

Эллипс – мн-во т. плоскости для кажд. из которой сумма раст. до фокусов есть величина постоянная $= 2a$

Доказательство: $(\Rightarrow)$ пусть $\gamma_1 = \{M(x,y) \in E^2 \mid F_1M + F_2M = 2a\}$

$\gamma \overset{?}{=} \gamma_1$

1. $\gamma \overset{?}{\subset} \gamma_1$ $\forall M(x,y) \in \gamma$

$F_1M^2 = (x-c)^2 + y^2 \overset{(1)}{=} x^2 - 2cx + c^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) =$

$= x^2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) - 2cx + \underset{a^2-b^2}{\underset{\parallel}{c^2}} + b^2 = x^2\frac{c^2}{a^2} - 2cx + a^2 = x^2\varepsilon^2 - 2a\varepsilon x + a^2 =$

$= (x\varepsilon - a)^2$

$\Leftrightarrow F_1M = a - x\varepsilon$

Аналогично $F_2M = a + x\varepsilon$

$\Rightarrow F_1M + F_2M = 2a$

$(\Leftarrow)$ $\gamma_1 \overset{?}{\subset} \gamma$

$\forall M(x,y) \in \gamma_1 \Rightarrow F_1M + F_2M = 2a$

$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$

$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$

$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$

$-cx = a^2 - a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

$a^2 + cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

$a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 = a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2)$

$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$

$-x^2b^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) = -a^2b^2 \quad /:(-a^2b^2) \overset{(1)}{\parallel}$

Опр. Пары (F_1, l_1) и (F_2, l_2) назыв. одноименными.

Т2. (директориальное свойство эллипса.

Эллипс – множество точек плоскости, для кажд. из кот. отнош. раст. до фокуса к расст. до одноименной директрисы есть величина постоянна $= \varepsilon$.

Док-во: пусть $\gamma_2 = \{ M(x,y) \in E^2 \mid \frac{F_1 M}{d(M_1, l_1)} = \varepsilon \}$

$\gamma \overset{?}{=} \gamma_2$

1) $\gamma \subset \gamma_2$. $\forall M(x,y) \in \gamma$, $F_1 M = a - \varepsilon x$ (в Т1)

$d(M, l_1) = \frac{a}{\varepsilon} - x \Rightarrow \frac{F_1 M}{d(M, l_1)} = \frac{a - \varepsilon x}{\frac{a}{\varepsilon} - x} = \varepsilon$ ■

2) $\gamma_2 \overset{?}{\subset} \gamma$ ...