Simulación de Sistemas Continuos - Práctica 1

Luciano Andrade

15 de abril de 2014

P1.1 Respuesta al escalón de un sistema de primer orden Calcular y graficar la solución del sistema (1.4) considerando un volumen inincial $V(0) = 0$ y que el caudal de entrada es una función escalón unitario, es decir, $Q(t) = \epsilon(t)$, donde

$$\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x(t) < 0 \\ 1 & \text{si } x(t) \geq 0 \end{cases} \tag{P1.1a}$$

Utilizar los parámetros: $\rho = 1$, $g = 9.8$, $A = 1$ y $R = 1$.

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= -\frac{\rho \cdot g}{A \cdot R} \cdot V(t) + Q(t) \\ V(t) &= e^{\lambda} \cdot V(0) + \int_0^t e^{\lambda}(t-\pi) \cdot Q(\pi) d\pi \\ \lambda &= -\frac{\rho \cdot g}{A \cdot R} \end{aligned}$$

P1.2 Solucion libre de un sistema de segundo orden Para el sistema (1.5):

a) Reescribir la ecuación de forma matricial

b) Calcular y graficar la solución con condiciones iniciales $c_e(0) = 1$, $c_s(0) = 0$, considerando los parámetros $r_a = 2$ y $r_e = 1$

c) Repetir el punto anterior los parámetros $r_a = 20$, $r_e = 1$ y para $r_a = 0.1$, $r_e = 1$.

a)

$$\begin{cases} \dot{c_e}(t) &= -r_a \cdot c_e(t) \\ \dot{c_s}(t) &= r_a \cdot c_e(t) - r_e \cdot c_s(t) \end{cases} \tag{1.5}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{c_e}(t) \\ \dot{c_s}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_a & 0 \\ r_a & -r_e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_e(t) \\ c_s(t) \end{bmatrix}$$

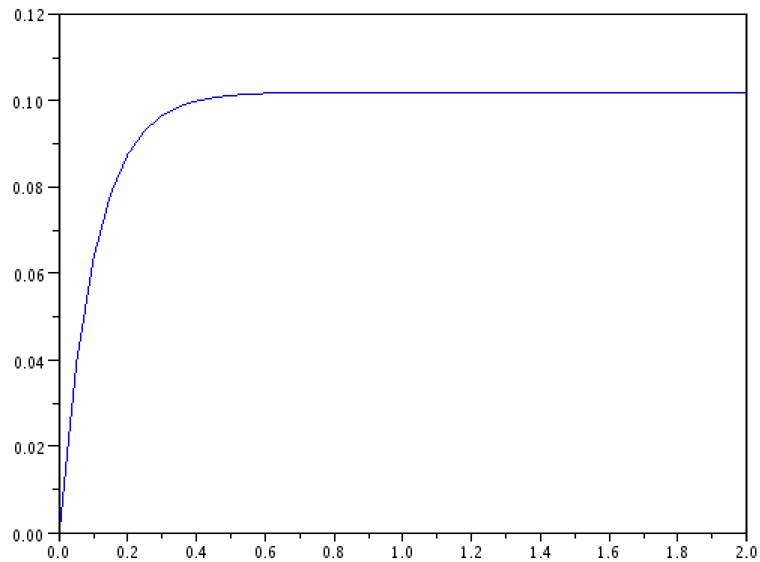

Figura 1: Volumen del sistema 1.4 a lo largo de 2s

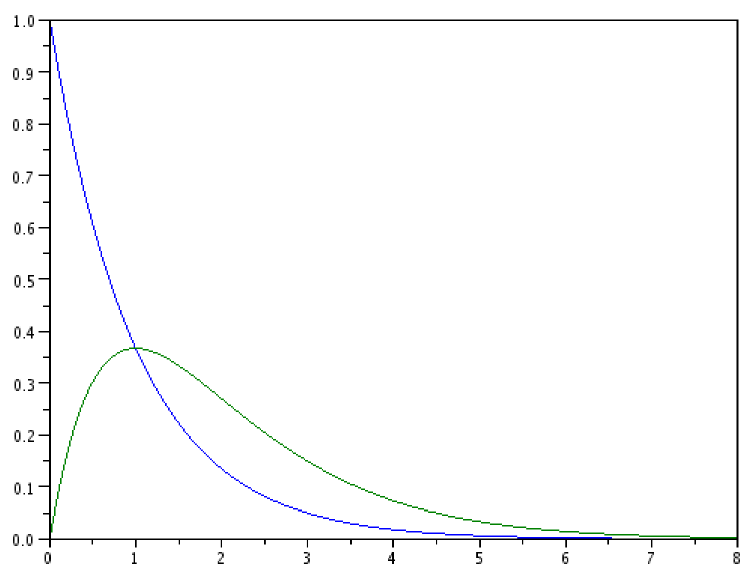

Figura 2: $c_e(0) = 1$, $c_s(0) = 0$, $r_a = 2$ y $r_e = 1$

b)

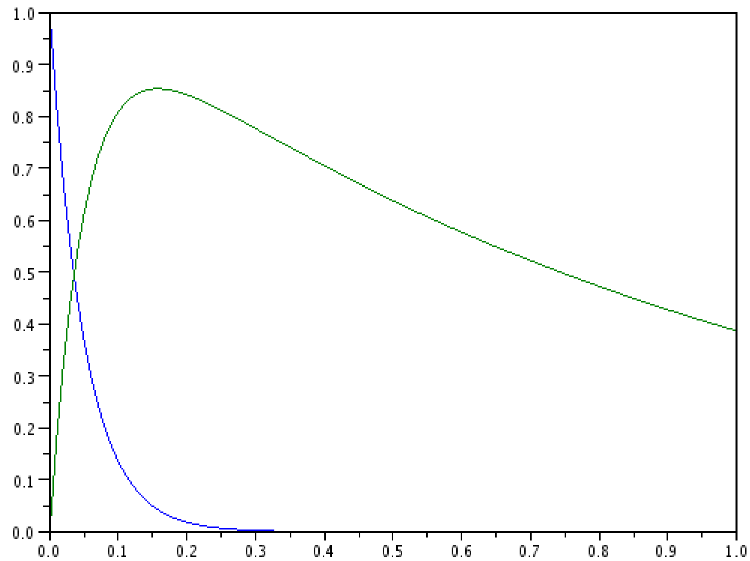

Figura 3: $c_e(0) = 1$, $c_s(0) = 0$, $r_a = 20$ y $r_e = 1$

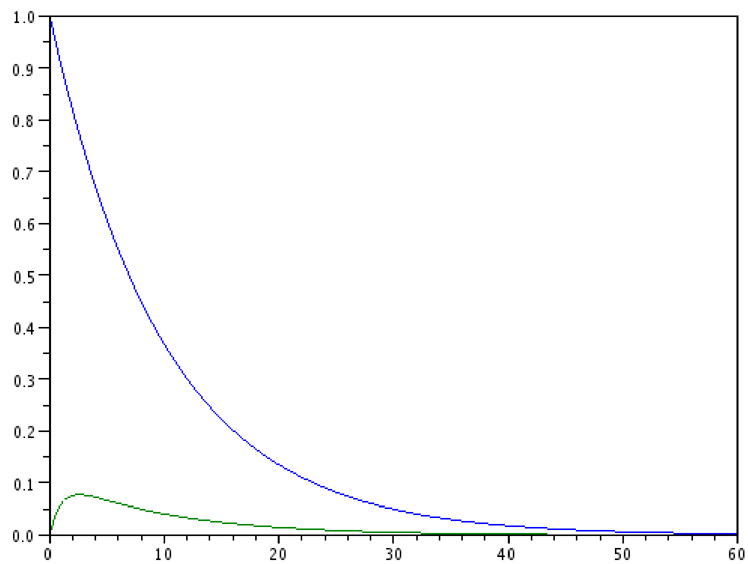

Figura 4: $c_e(0) = 1$, $c_s(0) = 0$, $r_a = 0.1$ y $r_e = 1$

c)

P1.3 Respuesta al escalón de un sistema de segundo orden para el sistema masa resorte (1.7):

a) Reescribir la ecuación en forma matricial.

b) Calcular y graficar la solución considerando condiciones iniciales nulas y que la fuerza de entrada es un escalón unitario, $F(t) = \epsilon(t)$ definido en la Ec(P1.1a). Suponer que los parámetros valen $m = k = b = 1$.

a)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = v(t) \\ \dot{v}(t) & = -\frac{k}{m} \cdot x(t) - \frac{b}{m} \cdot v(t) + \frac{1}{m} \cdot F(t) \end{cases} \tag{1.5}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \cdot F(t)$$

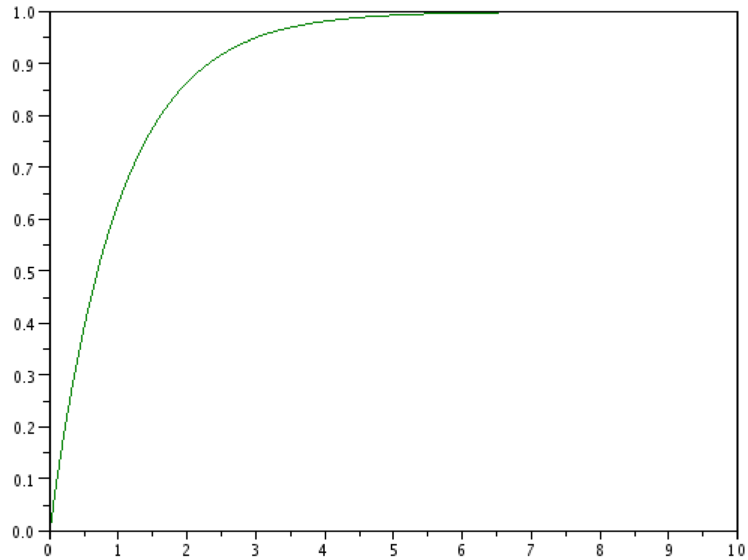

Figura 5:

P1.4 Transformación de una DAE en una ODE explícita. Convertir la DAE (1.9)-(1.10) en una ecuación diferencial ordinaria y escribirla en forma matricial.

$$\begin{cases} \dot{u_c}(t) & = \frac{1}{C} \cdot i_L(t) + \frac{1}{R_2 \cdot C} u_L(t) \\ \dot{i_L}(t) & = -\frac{1}{L} \cdot u_L(t) \\ U(t) & = R_1 \cdot i_L(t) - u_C(t) - (1 + \frac{R_1}{R_2}) \cdot u_L(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{u_c}(t) & = (\frac{1}{C} - \frac{R_1}{C \cdot (R_1+R_2)}) \cdot i_L(t) - \frac{1}{C(R_1+R_2)} \cdot u_L(t) + \frac{1}{C \cdot (R_1+R_2)} \cdot U(t) \\ \dot{i_L}(t) & = -\frac{R_1 \cdot R_2}{L \cdot (R_1+R_2)} \cdot i_L(t) - \frac{R_1}{L \cdot (R_1+R_2)} \cdot u_C(t) + \frac{R_2}{L \cdot (R_1+R_2)} \cdot U(t) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{i_C}(t) \\ \dot{u_L}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1 \cdot R_2}{L \cdot (R_1+R_2)} & \frac{R_2}{L \cdot (R_1+R_2)} \\ \frac{1}{C} \cdot (1 - \frac{R_1}{(R_1+R_2)} & -\frac{1}{C \cdot (R_1+R_2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_C(t) \\ u_L(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{R_2}{L \cdot (R_1+R_2)} \\ \frac{1}{C \cdot (R_1+R_2)} \end{bmatrix} \cdot U(t)$$

P1.5 Estabilidad de los sitemas lineales y estacionarios. Analizar la estabilidad de los sistemas de los Ejemplos 1.1, 1.3, 1.4, 1.5 y 1.7. Considerar en todos los casos que todos los parametros son positivos.

1.1) $\dot{c_e}(t) = -r_a \cdot c_e(t)$ Modo exponencial convergente

1.3) $\dot{v}(t) = g - \frac{b}{m} \cdot v(t) \cdot |v(t)|$ Modo exponencial convergente

1.4) $\dot{V}(t) = -\frac{\rho \cdot g}{A \cdot R} \cdot V(t)'Q(t)$ Modo exponencial convergente

1.5) $\begin{cases} \dot{c_e}(t) & = -r_a \cdot c_e(t) \\ \dot{c_s}(t) & = r_a \cdot c_e(t) - r_e \cdot c_s(t) \end{cases}$ Autovalores -2 y 0 , por lo tanto los modos son exponencial convergente y marginalmente estable.

1.7) $\begin{cases} \dot{x}(t) & = -v(t) \\ \dot{v}(t) & = -\frac{k}{m}\dot{x}(t) - \frac{b}{m} \cdot v(t) + \frac{1}{m} \cdot F(t) \end{cases}$ La matriz del sistema asociado tiene autovalores ($-0.5+0.8660254i$ y $-0.5-0.8660254i$) complejos y conjugados con $\mathbf{R}_e(\lambda_i) < 0$ por lo que el modo es estable.

P1.6 Punto de equilibrio de un sistema lineal y estacionario. Para el sistema hidráulico (1.4), considerando $Q(t) = \bar{Q}$ (constante) y los parámetros utilizandos en el Problema P1.1, calcular el *punto de equilibrio*. Es decir, se pide cualcular el valor del estado (en este caso $V(t)$) para el cual la solución queda en un estado estacionario ($\dot{V}(t) = 0$) Corroborar luego este resultado con la solución del sistema calculada en el Problema P1.1.

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= -\tfrac{\rho \cdot g}{A \cdot R} V(t) + \bar{Q} \\ \dot{V}(t) &= 0 = -\tfrac{\rho \cdot g}{A \cdot R} V(t) + \bar{Q} \\ \bar{Q} &= \tfrac{\rho \cdot g}{A \cdot R} V(t) \\ V(t) &= \tfrac{A \cdot R}{\rho \cdot g \cdot \bar{Q}} \end{aligned}$$

P1.7 Punto de equilibrio en sistemas no lineales Calcular el/los puntos/s de equilibrio de los sistemas:

a) El sistema (1.3), considerando $b = m = 1$, $g = 9.8$

b) El sistema presa-depredador (1.8), suponiendo $r = a = b = m = 0.1$.

Interpretar los resultados.

a) $b = m = 1$, $g = 9.8$

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= g - v(t) \cdot |v(t)| \\ g &= v(t) \cdot |v(t)| \\ v(t) &= \sqrt{g} \end{aligned}$$

La velocidad no cambia (velocidad constante) , cuando es igual a la raiz cuadrada de la gravedad

b) $r = a = b = m = 0.1$.

$$\begin{cases} \dot{p}(t) & = r \cdot p(t) - a \cdot p(t) \cdot d(t) \\ \dot{d}(t) & = b \cdot p(t) \cdot d(t) - m \cdot d(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 & = r \cdot p(t) - a \cdot p(t) \cdot d(t) \\ 0 & = b \cdot p(t) \cdot d(t) - m \cdot d(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} d(t) &= \frac{r}{a} \\ p(t) &= \frac{m}{b} \end{cases}$$

El sistema no varia, es decir la cant. de presas y depredadores no varia cuando los depredadores son igual a la tasa de crecimiento del número de presas sobre el coeficiente de depredación, es decir se depreda tanto como crecen y las presas son igual a la tasa de mortalidad de depredadores sobre la tasa de crecimiento de depredadores, es decir cuando el numero de depredadores se mantiene constante.

P1.8 Pelota rebotando. El siguiente modelo puede verse como una combinación del sistema (1.3) (suponiendo rozamiento lineal y con $v(t)$ positiva hacia arriba) y el sistema (1.7) (con $F(t) = -m.g$):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= v(t) \\ \dot{v}(t) &= \begin{cases} -\frac{b_a}{m} \cdot v(t) - g & \text{si } x(t) > 0 \\ -\frac{k}{m} \cdot x(t) - \frac{b}{m} \cdot v(t) - g & \text{si } x(t) \leq 0, \end{cases} \end{aligned} \tag{P1.8a}$$

Este sistam puede representar un modelo simplificado de una pelota que rebota contra el piso. Cuando $x(t) > 0$ la pelota está en el aire y cuando $x(t) \leq 0$ la pelota está en contacto con el piso y se modeliza como un sistema "masa resorte"

Desde el punto de vista matemático, la ecuación (7.1) es seccionalmente lineal ó lineal a tramos. Si bien no se puede calcular la solución analítica en forma exacta, es posible calcular tramos de la solución.

Considerando entonces los parámetros $b_a = 0.1$, $m = 1$, $b = 30$, $g = 9.8$ y $k = 100000$, se pide:

a) Calcular y graficar un tramo de la solución desde la condición inicial $x(0) = 10$, $v(0) = 0$, hasta el tiempo t_1, en el que se verifique $x(t_1) = 0$. Ayuda: Como la matriz A es singular es este caso no puede calcularse la integral de $e^{A \cdot t}$ como $A^{-1} \cdot e^{A \cdot t}$. Una opción (para seguir utilizando esta forma de integrar) es modificar la matriz A, agregando un pequeño término que evite que sea singular.

   Además notar que para calcular el tiempo t_1 va a ser necesario utilizar alguna forma de iteración.

   $t1 = 1.4642$

b) Utiliando como condición inicial los valores finales del tramo obtenido en el punto anterior: $x(t_1)(= 0)$, $v(t_1)$, calcular un nuevo tramo de la solución hasta un instante t_2 en que se verifique nuevamente $x(t_2) = 0$.

c) Repetir el punto anterior varias veces y graficar la solución obtenida.

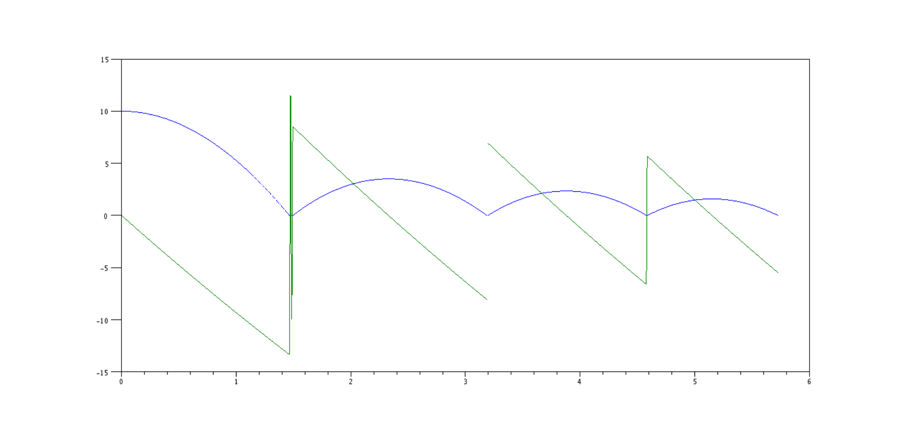

Figura 6: