Übungsserie 4

Reihen und Funktionen

Seminar in KW 46

1 Berechnung der Wurzelfunktion

Sei $x_0 = 1$ und c eine positive Zahl, dann konvergiert die Folge x_n mit

$$x_0 = 1, \text{ und } x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{c}{2 \cdot x_n}$$

gegen

$$\sqrt{c}.$$

Implementieren Sie die Vorschrift zur Berechnung von x_n in zwei Versionen:

1. Eingabe ist ein festes n, für das Sie x_n bestimmen.
2. Geben Sie anstatt n den Fehler e an, der beim Quadrieren der Wurzel entstehen soll:

$$|x_n^2 - c| < e$$

   Wird als Fehler e z.B. 0,000001 angegeben, so soll das Programm das x_n ausgeben, für das der Fehler $|x_n^2 - c| < 0,000001$ das erste mal unterschritten gilt.[1]

2 Berechnung der Cosinusfunktion

Gehen Sie davon aus, dass es weder die Funktionen `cos` noch eine Funktion zur Berechnung der Fakultät auf ihrem System gibt.

- Implementieren und testen Sie die Funktion zur Berechnung der Fakultät $n!$ der Zahl n, wie sie in der Vorlesung vorgegeben wurde.
- Was ist das maximale n, wofür das Programm das korrekte Ergebnis liefert? Dokumentieren Sie diese Eigenschaft in Ihrem Quelltext.
- `cos(x)` ist über folgende Summenformel gegeben:

$$\cos(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \tag{1}$$

  Angenommen, man berechnet nur die ersten N Summanden kann man die Formel als Näherungslösung interpretieren:

$$\cos(x) \equiv \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}}_{\text{angenäherte Lösung}} + \underbrace{\sum_{n=N}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}}_{\text{Fehler}} \tag{2}$$

  Schreiben Sie ein Programm, das $\cos(x)$ mit der gegebenen Summenformel annähert. Dafür muss der Term der angenäherten Lösung ausgewertet werden. Berechnen Sie dabei die Summe genau so lange, dass $(2n)$ nicht zu groß für die Berechnung der Fakultät wird.

Implementieren Sie dabei die Fakultät und die Berechnung des Cosinus als C++-Funktion!

[1] Das verwendete Verfahren ist das Newtonverfahren, welches zur Bestimmung der Nullstellen einer Funktion verwendet wird. Hier verwenden wir die Gleichung $f(x) = c - x^2$ und bestimmen iterativ laut dem Newtonverfahren die Nullstellen $0 = f(x)$ durch wiederholte Berechnung $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Ein ähnliches Verfahren zur Bestimmung der Wurzel erhält man durch die positiven Nullstellen der Funktion $f(x) = 1 - \frac{c}{x^2}$ nach dem gleichen Verfahren.

3 Zusatzaufgabe: Berechnung der Sinusfunktion

Gehen Sie davon aus, dass es weder die Funktionen `sin` noch eine Funktion zur Berechnung der Fakultät auf ihrem System gibt.

- Nutzen Sie die Funktionalität der Fakultät $n!$ wie sie bereits implementiert wurde.
- `sin(x)` ist über folgende Summenformel gegeben:

$$\sin(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{3}$$

  Auch hier nehmen wir die Annäherung bis zum $N+1$-ten Summanden an:

$$\sin(x) \equiv \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\text{angenäherte Lösung}} + \underbrace{\sum_{n=N}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\text{Fehler}} \tag{4}$$

  Schreiben Sie ein Programm, das $\sin(x)$ mit der gegebenen Summenformel annähert. Berechnen Sie dabei die Summe genau so lange, dass $(2n)$ nicht zu groß für die Berechnung der Fakultät wird.

4 Zusatzaufgabe

Die Annäherungen von Sinus und Kosinus haben ein Problem bei der Genauigkeit der Berechnung mit betragsmäßig hohen Werten (großes Bogenmaß) in der Eingabe x. Modifizieren Sie die Programme so, dass die Werte auch für große Werte für x sinnvolle Ausgaben liefern.