Università degli Studi di Firenze
Corso triennale in Informatica

Elaborato Calcolo Numerico

Autori
Alessandro De Cicco (matr.7009346)
Luca Fumagalli (matr.7004476)

Anno accademico: 2022/2023

Esercizio 1: Verificare che:

$$-\frac{1}{4}f(x-h)-\frac{5}{6}f(x)+\frac{3}{2}f(x+h)-\frac{1}{2}f(x+2h)+\frac{1}{12}f(x+3h)=hf'(x)+O(h^5)$$

Soluzione: Innanzitutto per semplificare i calcoli si può raccogliere:

$$\frac{1}{12}[-3f(x-h)-10f(x)+18f(x+h)-6f(x+2h)+f(x+3h)]=hf'(x)+O(h^5)$$

Se considero un h sufficientemente piccolo posso considerare di approssimare la funzione con il polinomio di Taylor centrato in x_0 con la funzione:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^k$$

Basterà approssimare il polinomio al quarto ordine:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+$$

$$+\frac{f''''(x_0)}{4!}(x-x_0)^4+O((x-x_0)^5)$$

Da cui possiamo ricavare:

$$\begin{aligned}
f(x-h)&=f(x)-hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)-\frac{h^3}{6}f'''(x)+\frac{h^4}{24}f''''(x_0)+O(h^5)\\
f(x+h)&=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\frac{h^3}{6}f'''(x)+\frac{h^4}{24}f''''(x_0)+O(h^5)\\
f(x+2h)&=f(x)+2hf'(x)+2h^2f''(x)+\frac{4}{3}h^3f'''(x)+\frac{2}{3}h^4f''''(x_0)+O(h^5)\\
f(x+3h)&=f(x)+3hf'(x)+\frac{9}{2}h^2f''(x)+\frac{9}{2}h^3f'''(x)+\frac{27}{8}h^4f''''(x_0)+O(h^5)
\end{aligned}\tag{1}$$

Possiamo, quindi, andare a sostituire:

$$\begin{aligned}
&\frac{-3f(x-h)-10f(x)+18f(x+h)-6f(x+2h)+f(x+3h)}{12}=\\
&=\frac{(-3-10+18-6+1)f(x)+(3+18-12+3)hf'(x)+(-\frac{3}{2}+9-12+\frac{9}{2})h^2f''(x)}{12}+\\
&+\frac{(\frac{1}{2}+3-8+\frac{9}{2})h^3f'''(x)+(-\frac{1}{8}+\frac{3}{4}-4+\frac{27}{8})h^4f''''(x)}{12}=\\
&=\frac{12hf'(x)+O(h^5)}{12}=hf'(x)+O(h^5)
\end{aligned}\tag{2}$$

Esercizio 2: Matlab utilizza la doppia precisione IEEE. Stabilire, pertanto, il nesso tra la variabile **eps** e la precisione di macchina di questa aritmetica.

Soluzione: Data la funzione $fl : I \longrightarrow \mathcal{M}$, che associa ad ogni numero reale $x \in \mathcal{I}$, un corrispondente numero di macchina $fl(x)$.

Lo Standard in doppia precisione IEEE prevede la rappresentazione per arrotondamento del numero $fl(x)$.

Possiamo quindi affermare che se $x \in \mathcal{I}, x \neq 0$, allora:

$$fl(x) = x(1 + \epsilon_x), \quad |\epsilon_x| \leq u$$

In cui:

$$u = \frac{1}{2}b^{1-m} \quad \text{rappresentazione per arrotondamento}$$

Dove b è la base, m è il numero di cifre per la mantissa e ϵ_x l'errore relativo di rappresentazione.

Dato che nello standard IEEE in doppia precisione si utilizza la base $b = 2$ e un numero di cifre per la mantissa pari a $m = 53$, avremo che la precisione di macchina con rappresentazione per arrotondamento è data da: $u = 2^{-53} \approx 1.1102 * 10^{-16}$

In Matlab, la variabile **eps** contiene la precisione di macchina in base 10 che coincide con il valore u nel caso di rappresentazione per troncamento infatti vale: $eps = 2.2204 * 10^{-16}$.

Dato che **eps** rappresenta quindi, la distanza tra 1 e il successivo numero in virgola mobile, ovvero il valore: $x = 1 + u = 1 + 2^{-53}$, il quale è rappresentato da $fl(x) = 1$ dato che $u \leq eps$. L'errore relativo commesso su x perciò è:

$$|\epsilon_x| = \frac{|fl(x) - x|}{|x|} = \frac{|1 - (1 + 2^{-53})|}{|1 + 2^{-53}|} = \frac{2^{-53}}{1 + 2^{-53}} \leq 2^{-53} = u \leq eps$$

Esercizio 3: Spiegare il fenomeno della cancellazione numerica. Fare un esempio che la illustri, spiegandone i dettagli.

Soluzione: La cancellazione numerica si verifica quando si perdono delle cifre significative durante un'operazione di somma algebrica, con addendi quasi opposti. Questo è dovuto al fatto che la somma è un'operazione malcondizionata e lo possiamo studiare, verificando il condizionamento di $y = x_1 + x_2, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad \text{con} \quad x_1 + x_2 \neq 0$.

Siano ϵ_1 e ϵ_2 gli errori relativi sui dati iniziali e considerando che non venga introdotto nessun nuovo errore nel calcolo della somma precedente, otteniamo:

$$y(1 + \epsilon_y) = x_1(1 + \epsilon_1) + x_2(1 + \epsilon_2)$$

Da cui possiamo ricavare che:

$$|\epsilon_y| \leq \frac{|x_1| + |x_2|}{|x_1 + x_2|}\epsilon_x \equiv k\epsilon_x \quad \text{con} \quad \epsilon_x = max\{|\epsilon_1|, |\epsilon_2|\}$$

Il numero k, quindi, indica il numero di condizionamento, che può essere arbitrariamente grande, nel caso di due addendi quasi opposti tra loro. Ciò significa che l'operazione di somma tra numeri quasi opposti è malcondizionata.

Per esempio, supponiamo di voler calcolare $y = 0.2345666 - 0.2345111 \equiv 0.0000555$. Se utilizziamo una rappresentazione per arrotondamento alla quarta cifra significativa, otteniamo:

$$\tilde{y} = 2.346 * 10^{-1} - 2.345 * 10^{-1} = 1 * 10^{-4}$$

L'errore relativo che commettiamo su y sarà quindi:

$$|\epsilon_y| = |\frac{5.55 * 10^{-5} - 1 * 10^{-4}}{5.55 * 10^{-5}}| \simeq 0.8018$$

Andando quindi a calcolare il numero di condizionamento k, otteniamo:

$$k = \frac{|x_1| + |x_2|}{|x_1 + x_2|} = \frac{|0.2345666| + |-0.2345111|}{|0.2345666 - 0.2345111|} = 8.45 * 10^3$$

perciò avendo un numero notevolmente alto, la somma precedente è malcondizionata e abbiamo una perdita di cifre significative.

Esercizio 4: Scrivere una function Matlab, `radice(x)` che, avendo in ingresso un numero x non negativo, calcoli $\sqrt[6]{x}$ utilizzando solo operazioni algebriche elementari, con la massima precisione possibile. Confrontare con il risultato fornito da $x^{(1/6)}$ per 20 valori di x, equispaziati logaritmicamente nell'intervallo $[1e-10, 1e10]$, tabulando i risultati in modo che si possa verificare che si è ottenuta la massima precisione possibile.

Soluzione: E' possibile notare che la radice sesta di un numero k sia data dalla soluzione positiva dell'equazione $x^6 = k$, che può essere riscritta come $x^6 - n = 0$. Ciò equivale a ricercare la radice della funzione nel semiasse positivo delle ascisse della funzione $f(x) = x^6 - k$, è possibile quindi usare il metodo di Newton per trovarla. Quindi il passo iterativo dell'algoritmo risulta essere:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^6 - k}{6x_n^5} = x_n - \frac{1}{6}(x_n - \frac{k}{x_n^5})$$

Da questo risultato si giunge nel formulare il seguente metodo iterativo che converge verso la radice di un numero x:

1. Si stima un valore iniziale di partenza x_0
2. Dopodiché si pone $x_{n+1} = x_n + \triangle x_n$ in cui $\triangle x_n = (\frac{x}{x_n^5} - x_n)\frac{1}{6} \quad \forall n = 0, 1, 2, ...$
3. Reiteriamo il passo precedente finchè non risulta che la differenza $|x_{n+1} - x_n|$ sia minore di una precisione scelta

Traducendo il precedente algoritmo in Matlab, otteniamo il seguente codice:

```
function y = radice(x)
%
% y = radice(x)
%
% Calcola la radice sesta di x utilizzando solo operazioni algebriche
% elementari con la massima precisione possibile.
%
% Input: x, numero di cui calcolare la radice
% Output: y, risultato dell'operazione di radice
%
if x<= 0, error('Il radicando non deve essere negativo'); end
x0 = 1;
x1 = x0 + (x/(x0^5)-x0)/6;
while (abs(x1-x0)) > 1e-16
    x0 = x1;
    x1 = x0 + (x/(x0^5)-x0)/6;
end
y=x1;
return
```

Con il seguente codice vado a generare 20 valori equispaziati logaritmicamente nell'intervallo $[1e-10, 1e10]$ e metto in comparazione la rappresentazione esatta della radice con quella della funzione radice precedente:

```
approssimato = zeros(1,20);
esatto = zeros(1,20);
errore = zeros(1,20);
x = logspace(log10(1e-10),log10(1e10),20);
for i = 1:20
    approssimato(i) = radice(x(i));
    esatto(i) = (x(i))^(1/6);
    errore(i) = abs(approssimato(i)-esatto(i));
end
variabili = {'n', 'approssimato', 'esatto', 'errore'};
table(x',approssimato',esatto', errore','VariableNames',variabili);
```

Ottengo così i seguenti risultati:

	n	approssimato	esatto	errore
1	1.0000e-10	0.0215	0.0215	6.9389e-18
2	1.1288e-09	0.0323	0.0323	0
3	1.2743e-08	0.0483	0.0483	6.9389e-18
4	1.4384e-07	0.0724	0.0724	1.3878e-17
5	1.6238e-06	0.1084	0.1084	2.7756e-17
6	1.8330e-05	0.1624	0.1624	2.7756e-17
7	2.0691e-04	0.2432	0.2432	2.7756e-17
8	0.0023	0.3643	0.3643	0
9	0.0264	0.5456	0.5456	0
10	0.2976	0.8171	0.8171	0
11	3.3598	1.2238	1.2238	0
12	37.9269	1.8330	1.8330	2.2204e-16
13	428.1332	2.7453	2.7453	0
14	4.8329e+03	4.1118	4.1118	8.8818e-16
15	5.4556e+04	6.1585	6.1585	0
16	6.1585e+05	9.2239	9.2239	0
17	6.9519e+06	13.8150	13.8150	1.7764e-15
18	7.8476e+07	20.6914	20.6914	3.5527e-15
19	8.8587e+08	30.9905	30.9905	7.1054e-15
20	1.0000e+10	46.4159	46.4159	1.4211e-14

Come si può notare, avendo scelto una tolleranza dell'ordine di `1e-16`, tutti gli errori sono molto piccoli e contenuti, alcuni nulli.

Esercizio 5: Scrivere function Matlab distinte che implementino efficientemente i metodi di Newton e delle secanti per la ricerca degli zeri di una funzione $f(x)$. Per tutti i metodi, utilizzare come criterio di arresto:

$$|x_{n+1} - x_n| \leq tol \cdot (1 + |x_n|)$$

essendo *tol* una opportuna tolleranza specificata in ingresso. Curare particolarmente la robustezza del codice.

Soluzione:

CODICE Matlab per il metodo di Newton

```
function [x,nit] = newton(f,f1,x0,tolx,maxit)
% Il metodo di Newton serve per determinare una approssimazione della
% radice a partire da un'approssimazione iniziale.
%
% Input: f = funzione di cui vogliamo trovare la radice
%        f1 = derivata prima della funzione f
%        x0 = approsimazione iniziale della radice
%        tolx = tolleranza fissata
%        maxit = massimo numero di iterazioni fissato
%
% Output: x = radice della funzione f
%         nit = numero di iterazioni svolte, vale -1 se la tolleranza non
%         e' soddisfatta entro maxit o la derivata si annulla
%
if nargin<4, error('Argomenti in input non sufficienti')
elseif nargin==4, maxit=100;end
if tolx<eps, error('Tolleranza non valida');end

x=x0;
nit=-1;
for i=1:maxit
    fx = feval(f,x);
    f1x = feval(f1,x);
    if f1x == 0, error('Derivata prima uguale a 0'); end
    x = x - fx/f1x;
    if abs(x-x0)<=tolx * (1+abs(x0))
        nit=i;
        break;
    else
        x0 = x;
    end
end

if nit == -1, disp('Tolleranza desiderata non raggiunta');end
end
```

CODICE Matlab per il metodo delle secanti

```
function [x,nit] = secanti(f,x0,x1,tolx,maxit)
%
% Il metodo delle secanti serve per determinare una approssimazione della
% radice di f(x)=0 a partire da due valori iniziali x0 e x1.
%
% Input: f = funzione di cui vogliamo trovare la radice
%        x0 = approsimazione iniziale della radice
%        x1 = approsimazione iniziale della radice
%        tolx = tolleranza fissata
%        maxit = massimo numero di iterazioni fissato
%
% Output: x = radice della funzione f
```

```
%          nit = numero di iterazioni svolte, vale -1 se la tolleranza non
%          e' soddisfatta entro maxit o la derivata si annulla
%
if nargin<4, error('Argomenti in input non sufficienti')
elseif nargin==4, maxit=100;end
if tolx<eps, error('Tolleranza non valida');end
nit=-1;
for i=1:maxit
    fx0 = feval(f,x0);
    fx1 = feval(f,x1);
    if fx1-fx0 == 0, error('Il denominatore e'' uguale a 0');end
    x = (fx1*x0-fx0*x1)/(fx1-fx0);
    x0 = x1;
    x1 = x;
    if abs(x-x0)<=tolx * (1+abs(x0))
        nit=i;
        break;
    end
end

if nit == -1, disp('Tolleranza desiderata non raggiunta');end
end
```

Esercizio 6: Utilizzare le *function* del precedente esercizio per determinare una approssimazione della radice della funzione:

$$f(x) = x - cos(x)$$

per $tol = 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-9}, 10^{-12}$, partendo da $x_0 = 0$ (e $x_1 = 0.1$ per il metodo delle secanti). Tabulare i risultati, in modo da confrontare il costo computazionale di ciascun metodo.

Soluzione:

tol	Radici Newton	iterazioni	Radici secanti	iterazioni
10^{-3}	7.390851333852840e-01	4	7.390985629062998e-01	4
10^{-6}	7.390851332151607e-01	5	7.390851332151466e-01	6
10^{-9}	7.390851332151607e-01	5	7.390851332151607e-01	7
10^{-12}	7.390851332151607e-01	6	7.390851332151607e-01	7

Il costo computazionale per ciascuna iterazione del metodo di Newton è pari a 2 valutazioni funzionali mentre per il metodo delle secanti è pari a 1.

Esercizio 7: Utilizzare le *function* dell'Esercizio 5 per determinare una approssimazione della radice della funzione:

$$f(x) = [x - cos(x)^5]$$

per $tol = 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-9}, 10^{-12}$, partendo da $x_0 = 0$ (e $x_1 = 0.1$ per il metodo delle secanti). Tabulare i risultati, in modo da confrontare il costo computazionale e l'accuratezza di ciascun metodo. Commentare i risultati ottenuti.

Soluzione:

tol	Radici Newton	iterazioni	Radici secanti	iterazioni
10^{-3}	0.732640697751109	20	0.730145017727562	26
10^{-6}	0.739078762321033	51	0.739075266476228	70
10^{-9}	0.739085126905744	82	0.739085038011533	-1
10^{-12}	0.7390851331015	-1	0.739085038011533	-1

Come possiamo notare dai precedenti risultati, in entrambi i metodi, essendo la funzione una radice multipla, si eseguono molte più iterazioni rispetto alla funzione dell'Esercizio 6, in alcuni casi neanche convergono. In particolare risulta che il metodo di Newton non converga su tolleranza pari a `1e-12` mentre il metodo delle secanti non converga nel caso la tolleranza sia pari a: `1e-9, 1e-12`.

In conclusione, in caso di radici multiple, non porta alcun vantaggio utilizzare metodi diversi da quello di Newton, anzi avremo un aumento considerevole nel numero di iterazioni.

Esercizio 8: Scrivere una function Matlab,
`function x = mialu(A,b)`
che, data in ingresso una matrice A ed un vettore b, calcoli la soluzione del sistema lineare $Ax = b$ con il metodo di fattorizzazione LU con *pivoting parziale*. Curare particolarmente la scrittura e l'efficienza della function, e validarla su due esempi non banali, generati casualmente, di cui sia nota la soluzione.

Soluzione: `CODICE Matlab per funzione mialu`

```
function x = mialu(A,b)
% x = mialu(A,b)
% data in ingresso una matrice A ed un vettore b, calcoli la soluzione del
% sistema lineare Ax = b con il metodo di fattorizzazione LU con pivoting
% parziale.
% Input: A = matrice in ingresso che va fattorizzata LU con il metodo di
%            pivoting parziale
%        b = vettore dei termini noti
% Output: x = vettore soluzione di Ax=b
%

[m,n] = size(A);
dimb = length(b);
if m ~= n
    error("La matrice dei coefficenti A deve essere quadrata")
end
if m ~= dimb
    error("La matrice A ed il vettore b hanno dimensioni discordanti")
end
p = [1:n];
for i =1:n-1
    [mi,ki] = max(abs(A(i:n,i)));
    disp(abs(A(i:n,i)));
    disp(mi);
    disp(ki)
    if mi == 0
        error('La matrice non puo'' essere singolare');
    end
    ki = ki + i - 1;
    if ki > i
        % inverto la riga i-esima e ki-esima
        A([i,ki],:) = A([ki,i],:);
        % stessa cosa nel vettore delle permutazioni
        p([i,ki]) = p([ki,i]);
```

```
    end
    A(i+1:n,i) = A(i+1:n,i)/A(i,i);
    A(i+1:n,i+1:n) = A(i+1:n,i+1:n) - A(i+1:n,i)*A(i,i+1:n);
end
x = b(p);
for i = 1:n
    x(i+1:n) = x(i+1:n)-A(i+1:n,i)*x(i);
end
x(n) = x(n)/A(n,n);
for i = n-1:-1:1
    x(1:i) = x(1:i) - A(1:i,i+1)*x(i+1);
    x(i) = x(i)/A(i,i);
end
end
```

Esempi:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -4 \\ 3 & -3 & -4 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 18 \\ 16 \\ -20 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -15 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} \tag{4}$$

In entrambi i casi sono stati creati i valori della matrice A e del vettore x in modo casuale, mentre il vettore dei termini noti `b`, è stato calcolato tramite il prodotto `A*x`. Una volta inseriti i valori di `A` e `b` nella funzione `mialu(A,b)`, questa ha restituito il vettore x correttamente.

Esercizio 9: Scrivere una function Matlab,
`function x = mialdl(A,b)`
che, data in ingresso una matrice A ed un vettore b, calcoli la soluzione del corrispondente sistema lineare utilizzando la fattorizzazione LDL^T. Curare particolarmente la scrittura e l'efficienza della function, e validarla su due esempi non banali, generati casualmente, di cui sia nota la soluzione.

Soluzione: `CODICE Matlab per funzione mialdl`

```
function x = mialdl(A,b)
% x = mialdl(A,b)
% data in ingresso una matrice A ed un vettore b, calcoli la soluzione del
% sistema lineare Ax = b con il metodo di fattorizzazione LDL^T.

% Input: A = matrice in ingresso che va fattorizzata LDL^T
%        b = vettore dei termini noti
% Output: x = vettore soluzione di Ax=b
%
[m,n] = size(A);
dimb = length(b);
if m ~= n
    error("La matrice dei coefficenti A deve essere quadrata")
end
if m ~= dimb
    error("La matrice A ed il vettore b hanno dimensioni discordanti")
end
if A(1,1) <= 0, error('la matrice non e'' sdp'); end
A(2:n,1) = A(2:n,1)/A(1,1);
for j = 2:n
    v = (A(j,1:j-1).') .* diag(A(1:j-1,1:j-1));
```

```
    A(j,j) = A(j,j) - A(j,1:j-1)*v;
    if A(j,j) <= 0, error('la matrice non e'' sdp'); end
    A(j+1:n,j) = (A(j+1:n,j) - A(j+1:n,1:j-1) * v)/A(j,j);
end
x = b;
for i=1:n
    x(i+1:n) = x(i+1:n)-(A(i+1:n,i)*x(i));
end
x = x./diag(A);
for i=n:-1:2
    x(1:i-1) = x(1:i-1)-A(i,1:i-1).'*x(i);
end
end
```

Esempi:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 3 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -15 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

In entrambi i casi sono stati creati i valori della matrice A e del vettore x in modo casuale, mentre il vettore dei termini noti `b`, è stato calcolato tramite il prodotto `A*x`. Una volta inseriti i valori di `A` e `b` nella funzione `mialdl(A,b)`, questa ha restituito il vettore x correttamente.

Esercizio 10: Scrivere una function Matlab,
`function [x,nr] = miaqr(A,b)`
che, data in ingresso la matrice A $m \times n$, con $m \geq n = rank(A)$, ed un vettore b di lunghezza m, calcoli la soluzione del sistema lineare $Ax = b$ nel senso dei minimi quadrati e, inoltre, la norma, nr, del corrispondente vettore residuo. Curare particolarmente la scrittura e l'efficienza della function. Validare la function miaqr su due esempi non banali, generati casualmente, confrontando la soluzione ottenuta con quella calcolata con l'operatore Matlab \

Soluzione: `CODICE Matlab per funzione mialdl`

```
function [x,nr] = miaqr(A,b)
%
% [x,nr] = miaqr(A,b)
%
% La funzione miaqr fattorizza QR la matrice in ingresso A, dopodiche'
% restituisce la soluzione x del sistema Ax=b insieme alla norma del
% vettore residuo
%
% Input: A = matrice in ingresso
%        b = vettore dei termini noti
% Output: x = soluzione del sistema
%         nr = norma del vettore residuo
%

[m,n] = size(A);
dimb = length(b);
if n > m, error('Dimensioni matrice A errate'); end
if dimb ~= m, error('Dimensione vettore dei termini noti sbagliata'); end
for i=1:n
    alfa = norm(A(i:m,i));
```

```
    if alfa == 0, error('La matrice non ha rango massimo'), end
    if A(i,i) >= 0, alfa = -alfa; end
    v1 = A(i,i) - alfa;
    A(i,i) = alfa;
    A(i+1:m,i) = A(i+1:m,i)/v1;
    beta = -v1/alfa;
    A(i:m,i+1:n) = A(i:m,i+1:n) - (beta*[1; A(i+1:m,i)])*...
        ([1; A(i+1:m,i)]' * A(i:m,i+1:n));
end
for i=1:n
    v = [1; A(i+1:m,i)];
    beta = 2/(v'*v);
    b(i:dimb) = b(i:dimb) - (beta*(v'*b(i:dimb)))*v;
end
for i=n:-1:1
    b(i) = b(i)/A(i,i);
    b(1:i-1) = b(1:i-1) - A(1:i-1,i)*b(i);
end
x = b(1:n);
nr = norm(b(n+1:m));
end
```

Esempio 1: Data la matrice A di dimensioni 4×3 e il vettore b (entrambi generati casulmente):

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 3 & -5 & -4 \\ 3 & 3 & 2 \\ -5 & 5 & -4 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{7}$$

La soluzione generata dalla `function miaqr` è:

$$xMiaqr = \begin{pmatrix} -5.4619e-01 \\ -4.1315e-02 \\ -9.0373e-01 \end{pmatrix}, \text{ con norma } \quad nr = 5.3356e-00$$

Mentre la soluzione generata da $x = A \setminus b$ è:

$$x = \begin{pmatrix} -5.4619e-01 \\ -4.1315e-02 \\ -9.0373e-01 \end{pmatrix}$$

Esempio 2: Data la matrice A di dimensioni 5×4 e il vettore b (entrambi generati casulmente):

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & -4 \\ -3 & 0 & -3 & -4 \\ -1 & -4 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -4 & -2 \\ -3 & -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

La soluzione generata dalla `function miaqr` è:

$$xMiaqr = \begin{pmatrix} 2.8454e+00 \\ -1.8283e+00 \\ -1.7138e+00 \\ -4.5249e-01 \end{pmatrix}, \text{ con norma } \quad nr = 1.4966e+00$$

Mentre la soluzione generata da $x = A \setminus b$ è:

$$x = \begin{pmatrix} 2.8454e+00 \\ -1.8283e+00 \\ -1.7138e+00 \\ -4.5249e-01 \end{pmatrix}$$

Esercizio 11: Data la function Matlab

```
function [A1,A2,b1,b2] = linsis(n,simme)
%
%
rng(0);
[q1,r1] = qr(rand(n));
if nargin==2
    q2 = q1';
else
    [q2,r1] = qr(rand(n));
end
A1 = q1*diag([1 2/n:1/n:1])*q2;
A2 = q1*diag([1e-10 2/n:1/n:1])*q2;
b1 = sum(A1,2);
b2 = sum(A2,2);
return
```

che crea sistemi lineari casuali di dimensione n con soluzione nota,

$$A_1 x = b_1, \quad A_2 x = b_2, \quad x = (1, ..., 1)^T \in \mathbb{R}^n,$$

risolvere, utilizzando la *function* `mialu`, i sistemi lineari generati da `[A1,A2,b1,b2]=linsis(5)`. Commentare l'accuratezza dei risultati ottenuti, dandone spiegazione esaustiva.

Soluzione: Innanzitutto bisogna notare che eseguendo la function `linsis(5)`, che ha in input un solo argomento, andiamo a creare matrici non simmetriche. Perciò utilizzando i risultati come input della *function* `mialu`, otteniamo i seguenti risultati:

1. Nel primo caso, ovvero calcolando `x1 = mialu(A1,b1)`, il vettore risultante è:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 9.999999999999999e-01 \\ 9.999999999999998e-01 \\ 9.999999999999998e-01 \\ 1 \\ 9.999999999999998e-01 \end{pmatrix}$$

   Il risultato è pressoché identico al risultato atteso. D'altra parte il numero di condizionamento K della matrice A1, dato dalla funzione `cond(A1)` è pari a $K = 2.5000e+00$. Questo numero ci fa capire che il problema è quindi ben condizionato, essendo piccolo.

2. Nel secondo caso invece, ovvero calcolando `x2 = mialu(A2,b2)`, il vettore risultante è:

$$x_2 = \begin{pmatrix} 9.999996476574766e-01 \\ 1.000000446226050e+00 \\ 1.000000098875194e+00 \\ 1.000000207059384e+00 \\ 1.000000011600807e+00 \end{pmatrix}$$

   Il cui numero di condizionamento della matrice A2, dato dalla funzione `cond(A2)` è pari a $K = 9.999995892902628e+09$. Dato che il numero ottenuto è molto grande, ci fa capire che siamo di fronte ad un problema mal condizionato.
   Questo è dovuto all'operazione con cui otteniamo la matrice A2, in particolare all'operazione:

`diag ([1e-10 2/n:1/n:1])`, in cui il primo elemento della matrice diagonale è molto vicino allo zero:

$$D = \begin{pmatrix} 1e-10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il motivo per cui tale valore rende il problema mal condizionato deriva dalla costruzione della matrice A2 mediante $A = Q_1 * D * Q_2$, infatti per calcolare la matrice inversa Basterà ricordare che Q_1 e Q_2 sono matrici ortogonali, ottendendo: $A^{-1} = Q_2^{-1} * D^{-1} * Q_1^{-1} = Q_2^T * D^{-1} * Q_1^T$. Inoltre si può notare che la matrice inversa di una matrice diagonale è una matrice diagonale dove gli elementi diagonali sono il reciproco rispetto alla matrice di partenza:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1e10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.667 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolando quindi la matrice inversa con la formula sopra illustrata si ottiene che moltiplicando $Q1^T$ per D si va' a realizzare una matrice dove la prima colonna avrà elementi nell'ordine di $1e9$, tale matrice moltiplicata per Q_2^T infine produce una matrice dove tutti gli elementi raggiungono valori altissimi, come si può notare dalla norma della matrice inversa:

$$\|A1\|_2 = 1 \qquad \|A2\|_2 = 1 \qquad \|A1^{-1}\|_2 = 2.5 \qquad \|A2^{-1}\|_2 = 1.0000e + 10$$

In generale si ha che $\rho(A) \leq \|A\|$ Da questi risultati si evince quindi che la costruzione di A2 risulta peggiore rispetto a quella di A1 **DA FINIRE!**

Esercizio 12: Risolvere, utilizzando la *function* `mialdlt`, i sistemi lineari generati da `[A1,A2,b1,b2]=linsis(5,1)`. Commentare l'accuratezza dei risultati ottenuti, dandone spiegazione esaustiva.

Soluzione: Similmente al caso precedente usando la *function* `mialdl`, otteniamo i seguenti risultati:

1. Nel primo caso, ovvero calcolando `x1 = mialdl(A1,b1)`, il vettore risultante è:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 9.999999999999994e-01 \\ 9.999999999999999e-01 \\ 1.000000000000000e+00 \\ 1.000000000000000e+00 \end{pmatrix}$$

   Il risultato è pressoché identico al risultato atteso. D'altra parte il numero di condizionamento K della matrice A1, dato dalla funzione `cond(A1)` è pari a $K = 2.5000e + 00$. Questo numero ci fa capire che il problema è quindi ben condizionato, essendo piccolo.

2. Nel secondo caso invece, ovvero calcolando `x2 = mialdl(A2,b2)`, il vettore risultante è:

$$x_2 = \begin{pmatrix} 1.000000052293492e+00 \\ 1.000000058138759e+00 \\ 1.000000008150719e+00 \\ 1.000000058625536e+00 \\ 1.000000040588329e+00 \end{pmatrix}$$

Il cui numero di condizionamento della matrice A2, dato dalla funzione `cond(A2)` è pari a $K = 9.999995645805687e+09$. Dato che il numero ottenuto è molto grande, ci fa capire che siamo di fronte ad un problema mal condizionato.
Tuttavia a differenza del caso precedente le matrici A1 e A2 vengono costruite mediante la formula : $Q_1 * D * Q_1^T$, che ha particolarità di essere simmetrica, infatti la transposta è data data da: $(Q_1 * D * Q_1^T)^T = Q_1 * D^T * Q_1^T = Q_1 * D * Q_1^T$. Per la precisione le matrici A1 e A2 sono entrambe simmetriche semidefinite positive, infatti: $\forall x \in R^n, xQ_1 * D * Q_1^T x^T = (xQ_1) * D * (xQ_1)^T$, sostituendo $xQ_1 = y \in R^n$ con $y \neq 0$ (perché la matrice Q_1 è non singolare (?)), avremo che $y * D * y^T > 0$ perchè gli elementi della matrice diagonale sono tutti positivi, e quindi la matrice è sdp. Questa costruzione ha anche un'altra particolarità, ovvero le matrici A1 e A2 sono simili alla matrice D. Infatti per definizione, la matrice A e B sono simili se esiste una matrice M invertibile tale che: $A = P^{-1} * B * P$. Considerando $P = Q_1^T$ e $B = D$ allora si ha che: $A = (Q_1^T)^{-1} * D * Q_1^T = (Q_1^{-1})^T * D * Q_1^T = (Q_1^T)^T * D * Q_1^T = Q_1 * D * Q_1^T$. Quindi ciò comporta che le matrici A1 e A2 hanno gli stessi autovalori, e quindi lo stesso raggio spettrale della matrice diagonale. Anche la matrice inversa di A1 e A2 risulta essere simile, come si può notare anche da $A^{-1} = (Q_1^T) * D^{-1} * Q_1$. Quindi in generale avremo che:

$$\|A_1\| \geq \rho(D_1) = 1$$
$$\|A_1^{-1}\| \geq \rho(D_1^{-1}) = 2.5$$
$$\|A_2\| \geq \rho(D_2) = 1$$
$$\|A_2^{-1}\| \geq \rho(D_2^{-1}) = 1e10$$

Per cui data una norma qualsiasi, abbiamo che il numero di condizionamento della prima matrice sarà $\|A_1\| * \|A_1^{-1}\| \geq 2.5$, mentre per la seconda $\|A_2\| * \|A_2^{-1}\| \geq 1e10$. Ciò tuttavia è vero solo in condizioni ottimali, infatti entrambe le matrici sono soggette ad errori di round-off dovuti alla loro costruzione. Ciò si può notare anche solo usando il comando `isSymmetric()` che per entrambe le matrici risulta essere falso, come si può anche notare come il numero di condizionamento della seconda matrice calcolato tramite Matlab va in contraddizione con quanto stabilito. Quindi il mal condizionamento del secondo sistema rispetto al primo, causa errori di imprecisione maggiori.

Ercizio 13: Utilizzare la *function* `miaqr` per risolvere, nel senso dei minimi quadrati, i sistemi lineari sovradeterminati
`Ax = b, (D*A)x = (D*b), (D1*A)x = (D1*b),`
definiti dai seguenti dati:

```
A = [ 1 3 2; 3 5 4; 5 7 6; 3 6 4; 1 4 2 ];
b=[15 28 41 33 22]';
D = diag(1:5);
D1 = diag(pi*[1 1 1 1 1]).
```

Calcolare le corrispondenti soluzioni e residui, e commentare i risultati ottenuti.

Soluzione: Ricordando che risolvere il sistema nel senso dei minimi quadrati consiste in un problema di ottimizzazione nella forma:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2$$

dove per residuo si intente un vettore $r = Ax - b$, si nota che la norma euclidea al quadrato dei residui non è altro che il valore all'ottimo. Applicando quindi la *function* `miaqr` ai vari sistemi, si

ottengono quindi le seguenti soluzioni, residui e norme euclidee al quadrato:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 3.000000000000008e+00 \\ 5.800000000000001e+00 \\ -2.500000000000008e+00 \end{pmatrix}; r_1 = \begin{pmatrix} 0.399999999999993 \\ -3.5527136788005e-15 \\ -0.399999999999999 \\ 0.799999999999997 \\ -0.800000000000004 \end{pmatrix}; \|r_1\|_2^2 = 1.6$$

$$x_2 = \begin{pmatrix} -6.025699862322442e-01 \\ 4.701698026617703e+00 \\ 1.758375401560388e+00 \end{pmatrix}; r_2 = \begin{pmatrix} 2.01927489674164 \\ 1.46856356126666 \\ -1.65213400642492 \\ 1.74391922900415 \\ -1.3951353832033 \end{pmatrix}; \|r_2\|_2^2 = 13.9513538320331$$

$$x_3 = \begin{pmatrix} 3.00000000000001 \\ 5.80000000000001 \\ -2.50000000000003 \end{pmatrix}; r_3 = \begin{pmatrix} 1.25663706143589 \\ -5.6843418860808e-14 \\ -1.25663706143598 \\ 2.51327412287179 \\ -2.51327412287183 \end{pmatrix}; \|r_3\|_2^2 = 15.7913670417428$$

Dai risultati ottenuti è possibile notare una grande discrepanza tra quelli ottenuti con il primo e il secondo sistema, nonostante che risolvere il sistema lineare `Ax=b` sia equivalente a risolvere il sistema lineare sovradeterminato `(D*A)x = (D*b)`. Tuttavia possiamo notare che nel caso dei minimi quadrati ciò non è sempre vero. Infatti il problema di minimo nel secondo caso risulta essere:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|(D * A)x - (D * b)\|_2^2 = \|D * (Ax - b)\|_2^2$$

Non è detto infatti che la soluzione x_1 risolva questo nuovo problema, anzi, provando a sostituire ad x x_1 otteniamo come risultato che la funzione obbiettivo ha come valore 27.8400000000001 che risulta essere una soluzione ben peggiore rispetto a quella data da x_2.
Possiamo notare che la quantità $Ax - b$ risulta essere un vettore, per cui usando le proprietà delle norme:

$$\|D * (Ax - b)\|_2^2 \leq \|D\|_2^2 * \|Ax - b\|_2^2$$

Quindi il valore dell'obbiettivo del problema di minimo generato dal sistema `(D*A)x = (D*b)` risulta essere al massimo Nel caso invece del terzo sistema, possiamo notare che la matrice altro non è che il risultato del prodotto $\pi * I$. Il problema in questo caso risulterà essere:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|(\pi * A)x - (\pi * b)\|_2^2 = \|\pi * (Ax - b)\|_2^2 = \pi^2 * \|Ax - b\|_2^2$$

E' possibile notare che tale problema equivale a quello del primo sistema moltiplicato per uno scalare, per cui la soluzione di questo problema di minimo coincide con la soluzione di quella del primo sistema. Infatti le due soluzioni ad eccezzione di qualche decimale coincidono, come si può inoltre notare dalla norma residua calcolata ponendo $x = x_1$ che risulta essere: 15.7913670417428, le cifre inesatte sono dovute da piccole imprecisioni delle operazioni in artimetica finita, specialmente considerando l'approssimazione necessaria di π, non essendo possible rappresentare il numero interamente in codice macchina.

Esercizio 14: Scrivere una function Matlab,
`[x,nit] = newton(fun,jacobian,x0,tol,maxit)`
che implementi efficientemente il metodo di Newton per risolvere sistemi di equazioni nonlineari. Curare particolarmente il criterio di arresto, che deve essere analogo a quello usato nel caso scalare. La seconda variabile, se specificata, ritorna il numero di iterazioni eseguite. Prevedere opportuni valori di *default* per gli ultimi due parametri di ingresso.

Soluzione: Funzione che calcola il metodo di Newton per risolvere sistemi di equazioni nonlineari

```
function [x,nit] = newtonJ(fun,jacobian,x0,tol,maxit)
%   [x,nit] = newtonJ(fun,jacobian,x0,tol,maxit)
%   Funzione che implementa il metodo di Newton per sistemi
%   di equazioni nonlineari
%
%   Input:
%   fun: function funzione di un sistema nonlineare
%   jacobian: matrice jacobiana di fun
%   x0: approssimazione iniziale
%   tol: tolleranza richiesta
%   maxit: massimo numero di iterazioni richiesto
%   Output:
%   x: risultato del metodo di Newton
%   nit: numero di iterazioni effettuate
%
if nargin < 3
    error('numero argomenti insufficienti');
elseif nargin==3
    tol=1e-13;
    maxit=10e3;
elseif nargin==4
    maxit=10e3;
end
if tol<0
    error('la tolleranza non deve essere negativa');
end
if maxit<=0
    error('maxit deve essere maggiore di 0');
end
x=x0;
nit=-1;
for i=1:maxit
    fx = feval(fun,x);
    f1x = feval(jacobian,x);
    if f1x == 0, error('Derivata prima uguale a 0'); end
    dx=-f1x\(fx);
    x = x + dx;
    if abs(x-x0)<=tol*(1+abs(x0))
        nit=i;
        break;
    else
        x0 = x;
    end
end

if nit == -1, disp('Il metodo di Newton per il sistema lineare non converge');end
end
```

Esercizio 15: Usare la function del precedente esercizio per risolvere, a partire dal vettore iniziale nullo, il sistema nonlineare derivante dalla determinazione del punto stazionario della funzione:

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}^T\left[\sin(\frac{\pi}{2}\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}\right], \qquad \boldsymbol{e} = \frac{1}{100}\begin{pmatrix}1\\2\\\vdots\\100\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{100},$$

$$Q = \begin{pmatrix}2 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1\\ & & 1 & 2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{100\times 100}, \qquad \sin(\frac{\pi}{2}\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix}\sin(\frac{\pi}{2}x_1)\\ \sin(\frac{\pi}{2}x_2)\\ \vdots \\ \sin(\frac{\pi}{2}x_{100})\end{pmatrix}$$

utilizzando tolleranze `tol = 1e-3, 1e-8, 1e-13`. Graficare la soluzione e tabulare in modo conveniente i risultati ottenuti.

Soluzione: Usando la funzione `newton` su $\bigtriangledown f(x)$ (definito in Matlab come `Q*x-((pi/2).*cos((pi/2)*x)+1).*e`) si ottiene:

Esercizio 16: Costruire una function, `lagrange.m`, avente la stessa sintassi della function `spline` di Matlab, che implementi, in modo vettoriale, la forma di Lagrange del polinomio interpolante una funzione.

Soluzione: `CODICE Matlab per funzione lagrange`

```
function p = lagrange(x, y, xq)
%
%   p=lagrange(x, y, xq)
%
%   Calcolo del polinomio interpolante in base di Lagrange:
%
%   Input:
%   x: ascisse di interpolazione
%   y: valori della funzione interpolanda nelle ascisse di interpolazione
%   xq: valori su cui calcolare il valore del polinomio interpolante
%
%   Output:
%   p: vettore con i valori calcolati
%
n=length(x);
p=zeros(size(xq));
for i=1:n
    p=p+y(i)*Lin(i,x,xq);
end
return
end
```

CODICE Matlab per funzione Lin

```
function L = Lin(i, xi, x)
%
%   L=Lin(i,xi,x)
%
%   Calcolo della base di Lagrange
%
%   Input:
%   i: indice
%   xi: ascisse di interpolazione
%   x: valori su cui calcolare la base di Lagrange
%
%   Output:
%   L: vettore con i valori della base di Lagrange con indice i
%
L=ones(size(x));
zi=xi(i);
xi(i)=[];
n=length(xi);
for j=1:n
    L=L.*(x-xi(j));
end
L=L/prod(zi-xi);
return
end
```

Esercizio 17: Costruire una function, `newton.m`, avente la stessa sintassi della function `spline` di Matlab, che implementi, in modo vettoriale, la forma di Newton del polinomio interpolante una funzione.

Soluzione: CODICE Matlab per funzione newton

```
function p = newton(x, y, xq)
%
%   p=newton(x, y, xq)
%
%   Calcolo del polinomio interpolante in base di Newton:
%
%   Input:
%   x: ascisse di interpolazione
%   y: valori della funzione interpolanda nelle ascisse di interpolazione
%   xq: valori su cui calcolare il valore del polinomio interpolante
%
%   Output:
%   p: vettore con i valori calcolati
%
n = length(x)-1;
for j=1:n
    for i=n+1:-1:j+1
        y(i)=(y(i)-y(i-1))/(x(i)-x(i-j));
    end
end
p=horner(x,y,xq);
return
end
```

CODICE Matlab per l'algoritmo di horner

```
function p = horner(x, f, xq)
%
%   p=horner(x, f, ,xq)
%
%   Algoritmo di horner generalizzato per il calcolo di un polinomio:
%
%   Input:
%   x: ascisse di interpolazione
%   f: valori delle differenze divise
%   xq: valori su cui calcolare il polinomio
%
%   Output:
%   p: vettore con i valori calcolati
%
n=length(x)-1;
p=ones(size(xq))*f(n+1);
for i=n:-1:1
    p=p.*(xq-x(i))+f(i);
end
return
end
```

Esercizio 18: Costruire una function, `hermite.m`, avente sintassi

`yy = hermite( xi, fi, f1i, xx )`

che implementi, in modo vettoriale, il polinomio interpolante di Hermite.

Soluzione: CODICE Matlab per hermite

```
function yy = hermite(xi, fi, f1i, xx)
%
%   p=hermite(xi, fi, ,f1i, xx)
%
%   Calcolo del polinomio interpolante di Hermite:
%
%   Input:
%   xi: ascisse di interpolazione
%   fi: valori della funzione interpolanda nelle ascisse di interpolazione
%   f1i: valori della derivata prima della funzione interpolanda nelle
%   ascisse di interpolazione
%   xx: valori su cui calcolare il valore del polinomio interpolante
%
%   Output:
%   yy: vettore con i valori calcolati
%
n=length(xi)-1;
xi=repelem(xi,2);
fi=repelem(fi,2);
fi(2:2:end)=f1i;
for i = (2*n+1):-2:3
    fi(i)=(fi(i)-fi(i-2))/(xi(i)-xi(i-1));
end
for j=2:2*n+1
    for i = (2*n+2):-1:j+1
        fi(i)= (fi(i)-fi(i-1))/(xi(i)-xi(i-j));
    end
end
```

```
yy=horner(xi,fi,xx);
return
end
```

CODICE Matlab per l'algoritmo di horner

```
function p = horner(x, f, xq)
%
%   p=horner(x, f, ,xq)
%
%   Algoritmo di horner generalizzato per il calcolo di un polinomio:
%
%   Input:
%   x: ascisse di interpolazione
%   f: valori delle differenze divise
%   xq: valori su cui calcolare il polinomio
%
%   Output:
%   p: vettore con i valori calcolati
%
n=length(x)-1;
p=ones(size(xq))*f(n+1);
for i=n:-1:1
    p=p.*(xq-x(i))+f(i);
end
return
end
```

Esercizio 19: Costruire una function Matlab che, specificato in ingresso il grado n del polinomio interpolante, e gli estremi dell'intervallo $[a, b]$, calcoli le corrispondenti ascisse di Chebyshev.

Soluzione: Calcolo delle ascisse di Chebyshev

```
function x = cheby(n,a,b)
%
%   x=cheby(n,a,b)
%
%   Calcolo delle ascisse di Chebyshev:
%
%   Input:
%   n: grado del polinomio
%   a,b: estremi dell'intervallo
%
%   Output:
%   x: vettore contentente le ascisse di Chebyshev
if n<1 || n~=fix(n)
    error('n deve essere un numero naturale');
elseif a>=b
    error('l''intervallo non e'' corretto');
end
x=(a+b)/2 + cos((2*(n:-1:0)+1)*pi./(2*(n+1))) * (b-a)/2;
return
end
```

Esercizio 20: Costruire una function Matlab, con sintassi

```
ll = lebesgue( a, b, nn, type )
```

che approssimi la costante di Lebesgue per l'interpolazione polinomiale sull'intervallo `[a,b]`, per i polinomi di grado specificato nel vettore `nn`, utilizzando ascisse equidistanti, se `type=0`, o di Chebyshev, se `type=1` (utilizzare 10001 punti equispaziati nell'intervallo `[a,b]` per ottenere ciascuna componente di ll). Graficare i risultati ottenuti, per `nn=1:100`, utilizzando `[a,b]=[0,1]` e `[a,b]=[-3,7]`. Giustificare i risultati ottenuti.

Soluzione:

```
function ll = lebesgue(a,b,nn,type)
n=length(nn);
ll=zeros(1,length(nn));
f=@(n) linspace(a,b,n+1);
if type==0
    f=@(n) cheby(n,a,b);
end
for i=1:n
    xi=f(nn(i));
    x=linspace(a,b,10001);
    L=zeros(size(x));
    for j=1:length(xi)
        L=L+abs(Lin(j,xi,x));
    end
    ll(i)=max(L);
end
return
end
```

Esercizio 21: Utilizzando le function dei precedenti esercizi, graficare (in semilogy) l'andamento errore di interpolazione (utilizzare 10001 punti equispaziati nell'intervallo per ottenerne la stima) per la funzione di Runge,

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad x \in [-5, 5] \tag{9}$$

utilizzando sia le ascisse equidistanti che di Chebyshev, per i polinomi interpolanti di grado `nn=2:2:100`. Graficare l'errore di interpolazione anche per i polinomi interpolanti di Hermite di grado `nn=3:2:99`, sia utilizzando ascisse equidistanti che ascisse di Chebyshev, nell'intervallo considerato.

Soluzione:

Esercizio 22: Costruire una function, `myspline.m`, avente sintassi

```
yy = myspline( xi, fi, xx, type )
```

dove `type=0` calcola la *spline* cubica interpolante naturale i punti `(xi,fi)`, e `type~=0` calcola quella calcola quella *not-a-knot* (default).

Soluzione:

Esercizio 23: Graficare, utilizzando il formato semilogy, l'errore di approssimazione utilizzando le *spline* interpolanti naturale e *not-a-knot* per approssimare la funzione di Runge sull'intervallo [-5,5], utilizzando una partizione $\Delta = \{-5 = x_0 < ... < x_n = 5\}$, con ascisse equidistanti e `n=4:4:400`. Utilizzare 10001 punti equispaziati nell'intervallo [-5, 5] per ottenere la stima dell'errore.

Soluzione:

Esercizio 24: E' noto che un fenomeno fisico evolve come $y = x^n$ con n incognito. Il file `data.mat` contiene 1000 coppie di dati (x_i, y_i), in cui la seconda componente è affetta da un errore con distribuzione Gaussiana a media nulla e varianza "piccola". Utilizzando un opportuno polinomio di approssimazione ai minimi quadrati, stimare il grado n. Argomentare il procedimento seguito, graficando la norma del residuo rispetto a valori crescenti di n. E richiesto il codice Matlab dell'algoritmo che avrete implementato (potete utilizzare, se lo ritenete opportuno, la function `polyfit` di Matlab).

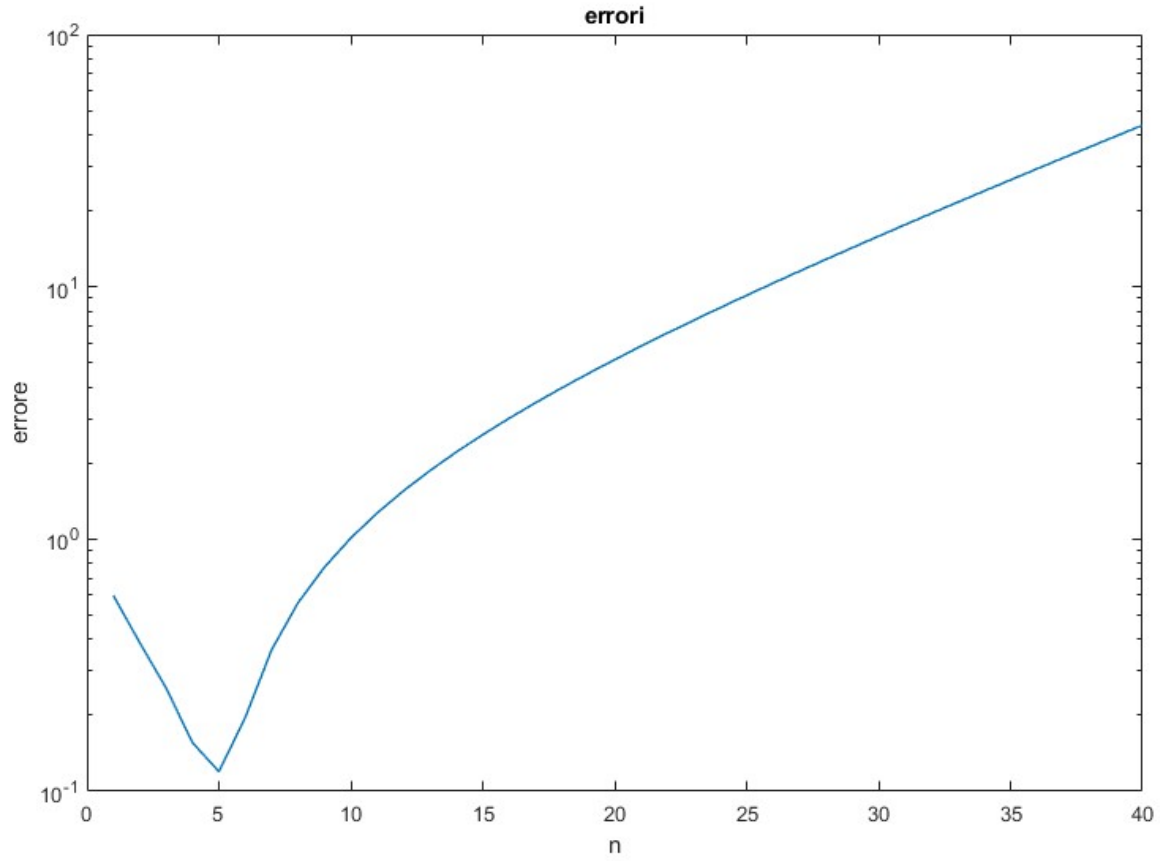
Soluzione: Dato che l'incognita dell'equazione è l'esponente, conviene innanzitutto riscriverla utilizzando le proprietà dei logaritmi:

$$y = x^n \Rightarrow ln(y) = ln(x^n) \Rightarrow ln(y) = nln(x)$$

Così facendo si ottiene una equazione lineare che una volta applicata alle coppie (x_i, y_i) delle misurazioni permette di utilizzare un'approsimazione polinomiale ai minimi quadrati di grado 1 per stimare il valore di `n` che sarà dato dal coefficente a_1. Per meglio transformare i dati in modo che si avvicinino una retta, conviene usare una rappresentazione in scala semi-logaritmica, si potrebbe infatti approssimare $ln(x)$ con la retta tangente al punto $x_0 = 1$ ottenendo così: $ln(y) \approx n(x-1)$. Un'ulteriore considerazione da fare è quella di scartare le misurazioni y_i negative, essendo le ascisse x_i tutte positive e di conseguenza anche x_i^n, ed inoltre non sarebbe possibile calcolare $log(y)$. L'algoritmo descritto è stato così implementato:

```
function n = estimate(data)
fixedData=data;
fixedData(fixedData(:,2)<0,:)=[];
x=fixedData(:,1);
y=log(fixedData(:,2));
r=polyfit(x,y,1);
n=r(1);
return
end
```

Si ottiene quindi che il grado `n` è 5, come si può notare graficando in `semilogy` l'errore (approsimato con la norma infinito) del residuo rispetto ad n:



difatti esso è minimo per `n=5`.

Esercizio 25: Costruire una function Matlab che, dato in input n, restituisca i pesi della quadratura della formula di Newton-Cotes di grado n. Tabulare, quindi, i pesi delle formule di grado 1, 2,. . . , 7 e 9 (come numeri razionali).

Soluzione: `codice per i pesi di Newton Codes`

```
function c = pesiNewtCotes(n)
%
%   c=pesiNewtCotes
%
%   Calcolo dei pesi della formula di Newton Cotes:
%
%   Input:
%   n: grado della formula
%
%   Output:
%   c: vettore con i pesi
%
if n<1 || n~=fix(n)
    error('n deve essere un numero naturale');
else
c=zeros(1,n);
for i=0:n/2
    den = prod( i - [0:i-1, i+1:n]);
    coeff = poly([0:i-1 i+1:n]);
    coeff = [coeff./((n+1):-1:1) 0];
    num=polyval(coeff,n);
    c(i+1)=num/den;
end
```

```
for i=n+1:-1:n/2
    c(i) = c(n+2-i);
end
return
end
```

n	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1/2	1/2						
2	1/3	4/3	1/3					
3	3/8	9/8	9/8	3/8				
4	14/45	64/45	8/15	64/45	14/45			
5	95/288	125/96	125/144	125/144	125/96	95/288		
6	41/140	54/35	27/140	68/35	27/140	54/35	41/140	
7	1073/3527	810/559	343/640	649/536	649/536	343/640	810/559	1073/3527
9	130/453	1374/869	243/2240	5287/2721	704/1213	704/121	5287/2721	130/453

Esercizio 26: Scrivere una function Matlab,

`[If,err] = composita( fun, a, b, k, n )`
che implementi la formula composita di Newton-Cotes di grado `k` su `n+1` ascisse equidistanti, con `n` multiplo pari di `k`, in cui:

- `fun` è la funzione integranda (che accetta input vettoriali);
- `[a,b]` è l'intervallo di integrazione;
- `k`, `n` come su descritti;
- `If` è l'approssimazione dell'integrale ottenuta;
- `err` è la stima dell'errore di quadratura.

Soluzione: Calcolo della formula composita di Newton-Cotes di grado `k` su `n+1` ascisse equidistanti.

```
function [If,err] = composita(fun, a, b, k, n)
x=linspace(a,b,n+1);
y=fun(x);
h=(b-a)/n;
c=pesiNewtCotes(k);
If=0;
for i=1:k:n+1-k
    If=If+sum(y(i:i+k).*c);
end
If=h*If;
IfH=0;
for i=1:2*k:n+1-2*k
    IfH=IfH+sum(y(i:2:i+2*k).*c);
end
IfH=2*h*IfH;
if mod(k,2)==1
    u=1;
else
    u=2;
end
err=abs(IfH-If)/(2^(k+u)-1);
```

Esercizio 27: Utilizzare la function `composita` per ottenere l'approssimazione dell'integrale

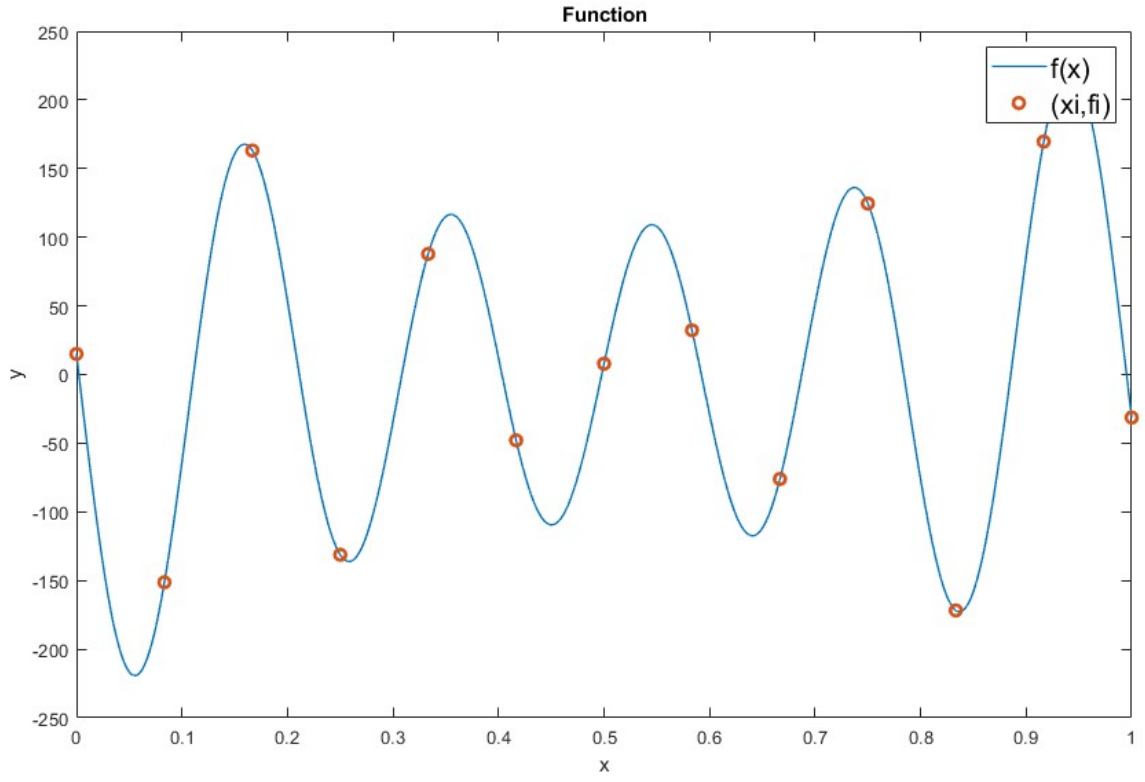
$$\int_0^1 (\sum_{i=1}^{5} i\cos(2\pi ix) - e^i \sin(2(\pi i + 0.1)x))dx$$

con le formule composite di Newton-Cotes di grado `k=1,2,3,6`. Per tutte, utilizzare `n=12`.

Soluzione: Utilizzando le formule composite di Newton-Cotes con n=12 per approssimare l'integrale si vanno ad ottenere i seguenti risultati:

k	valore	errore
1	-0.092598047616972	0.192379444267582
2	-0.284977491884554	0.034967622162555
3	0.114030927423084	0.029823785706593
6	-0.702525851480416	0.002428474323110

Si può notare come i risultati risultano essere imprecisi e discordanti tra loro, infatti andando a graficare la funzione in esame negli estremi dell'intervallo di integrazione



possiamo notare che oscilla frequentemente, rendendo le formule più inaccurate per le ascisse considerate. Aumentando il numero di quest'ultime si può ridurre ulteriormente l'errore, d'altronde si ha:

$$E_k^{(n)} = v_k f^{(k+u)}(\xi)\left(\frac{b-a}{k}\right)\left(\frac{b-a}{n}\right)^{(k+u)} con \xi \in [a,b]$$

che sappiamo tende a 0 per n che tende ad infinito, altrimenti si possono usare pure le formule adattive.

Esercizio 28: Implementare la formula composita adattativa di Simpson.

Soluzione: Calcolo della formula adattiva di Simpson

```
function [I2,vf] = adapsim(a,b,f,tol,fa,f1,fb)
%
%   [I2,vf] = adapsim(a,b,f,tol)
%
%   Calcola la formula adattiva di Simpson
%
%   Input:
%   a,b: estremi intervallo di integrazione
%   f: function funzione integranda
%   tol: tolleranza richiesta
%   Output:
%   I2: approssimazione ottenuta
%   vf: valutazioni funzionali
%
if a==b
    I2=0;
    return
elseif a>b
    error('intervallo non corretto');
elseif tol<0
    error('tolleranza negativa');
end
x1=(a+b)/2;
vf=0;
if nargin==4
    fa=feval(f,a);
    fb=feval(f,b);
    f1=feval(f,x1);
    vf=3;
end
h=(b-a)/6;
I1=h*(fa+4*f1+fb);
x2=(a+x1)/2;
x3=(x1+b)/2;
f2=feval(f,x2);
f3=feval(f,x3);
I2=.5*h*(fa+4*f2+2*f1+4*f3+fb);
vf=vf+2;
e=abs(I2-I1)/15;
if e>tol
    [left,vf1]=adapsim(a,x1,f,tol/2,fa,f2,f1);
    [right,vf2]=adapsim(x1,b,f,tol/2,f1,f3,fb);
    I2=left+right;
    vf=vf+vf1+vf2;
end
return
end
```

Esercizio 29: Implementare la formula composita adattativa di Newton-Cotes di grado `k=4`.

Soluzione: Calcolo della formula adattiva di Newton-Cotes di grado k=4.

```
function [I2,vf] = adapquad(a,b,f,tol,fa,f1,f2,f3,fb)
%
%   [I2,vf] = adapquad(a,b,f,tol)
%
%   Calcola la formula adattiva di Simpson
%
%   Input:
%   a,b: estremi intervallo di integrazione
%   f: function funzione integranda
%   tol: tolleranza richiesta
%   Output:
%   I2: approssimazione ottenuta
%   vf: valutazioni funzionali
%
if a==b
    I2=0;
    return
elseif a>b
    error('intervallo non corretto');
elseif tol<0
    error('tolleranza negativa');
end
vf=0;
x2=(a+b)/2;
x1=(a+x2)/2;
x3=(x2+b)/2;
if nargin==4
    fa=feval(f,a);
    fb=feval(f,b);
    f1=feval(f,x1);
    f2=feval(f,x2);
    f3=feval(f,x3);
    vf=5;
end
h=(b-a)/180;
I1=h*(14*fa+64*f1+24*f2+64*f3+14*fb);
x4=(a+x1)/2;
x5=(x1+x2)/2;
x6=(x2+x3)/2;
x7=(x3+b)/2;
f4=feval(f,x4);
f5=feval(f,x5);
f6=feval(f,x6);
f7=feval(f,x7);
I2=.5*h*(14*fa+64*f4+24*f1+64*f5+28*f2+64*f6+24*f3+64*f7+14*fb);
vf=vf+4;
e=abs(I2-I1)/63;
if e>tol
    [left,vf1]=adapquad(a,x2,f,tol,fa,f4,f1,f5,f2);
    [right,vf2]=adapquad(x2,b,f,tol,f2,f6,f3,f7,fb);
    I2=left+right;
    vf=vf+vf1+vf2;
end
return
end
```

Esercizio 30: Confrontare le formule adattative degli ultimi due esercizi, tabulando il numero di valutazioni funzionali effettuate, rispetto alla tolleranza `tol = 1e-2, 1e-3, ..., 1e-9`, per ottenere l'approssimazione dell'integrale

$$\int_{10^{-5}}^{1} x^{-1}\cos(\log(x^{-1}))dx \equiv \sin(\log(10^5))$$

Costruire un'altra tabella, in cui si tabula l'errore vero (essendo l'integrale noto, in questo caso) rispetto a `tol`.

Soluzione:

	n=2		n=4	
tol	valore	valutazioni funzionali	valore	valutazioni funzionali
1e-2	-0.869425809078715	201	-0.818445828479865	113
1e-3	-0.869589504976433	333	-0.863917726701441	121
1e-4	-0.869158635812636	605	-0.868851170727444	129
1e-5	-0.869134625866697	1061	-0.869126106965213	137
1e-6	-0.869132581815646	1869	-0.869134425591871	145
1e-7	-0.869132317617779	3277	-0.869132234992719	265
1e-8	-0.869132284264119	5921	-0.869132276557698	345
1e-9	-0.869132281362861	10589	-0.869132278121886	473

	n=2		n=4	
tol	valore	errore	valore	errori
1e-2	-0.869425809078715	2.935280256943784e-04	-0.818445828479865	0.050686452573156
1e-3	-0.869589504976433	4.572239234117426e-04	-0.863917726701441	0.005214554351580
1e-4	-0.869158635812636	2.635475961443312e-05	-0.868851170727444	0.000281110325577
1e-5	-0.869134625866697	2.344813675669855e-06	-0.869126106965213	0.000006174087808
1e-6	-0.869132581815646	3.007626251383400e-07	-0.869134425591871	0.000002144538850
1e-7	-0.869132317617779	3.656475811020243e-08	-0.869132234992719	0.000000046060302
1e-8	-0.869132284264119	3.211098165145643e-09	-0.869132276557698	0.000000004495323
1e-9	-0.869132281362861	3.098394874001542e-10	-0.869132278121886	0.000000002931135