Università degli Studi di Firenze
Corso triennale in Informatica

Elaborato Calcolo Numerico

Autori
Alessandro De Cicco (matr.7009346)
Luca Fumagalli (matr.7004476)

Anno accademico: 2022/2023

Esercizio 1: Verificare che:

$$-\frac{1}{4}f(x-h)-\frac{5}{6}f(x)+\frac{3}{2}f(x+h)-\frac{1}{2}f(x+2h)+\frac{1}{12}f(x+3h)=hf'(x)+O(h^5)$$

Soluzione: Innanzitutto per semplificare i calcoli si può raccogliere:

$$\frac{1}{12}[-3f(x-h)-10f(x)+18f(x+h)-6f(x+2h)+f(x+3h)]=hf'(x)+O(h^5)$$

Se considero un h sufficientemente piccolo posso considerare di approssimare la funzione con il polinomio di Taylor centrato in x_0 con la funzione:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^k$$

Basterà approssimare il polinomio al quarto ordine:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+$$

$$+\frac{f''''(x_0)}{4!}(x-x_0)^4+O((x-x_0)^5)$$

Da cui possiamo ricavare:

$$\begin{aligned}
f(x-h)&=f(x)-hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)-\frac{h^3}{6}f'''(x)+\frac{h^4}{24}f''''(x_0)+O(h^5)\\
f(x+h)&=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\frac{h^3}{6}f'''(x)+\frac{h^4}{24}f''''(x_0)+O(h^5)\\
f(x+2h)&=f(x)+2hf'(x)+2h^2f''(x)+\frac{4}{3}h^3f'''(x)+\frac{2}{3}h^4f''''(x_0)+O(h^5)\\
f(x+3h)&=f(x)+3hf'(x)+\frac{9}{2}h^2f''(x)+\frac{9}{2}h^3f'''(x)+\frac{27}{8}h^4f''''(x_0)+O(h^5)
\end{aligned} \tag{1}$$

Possiamo, quindi, andare a sostituire:

$$\begin{aligned}
&\frac{-3f(x-h)-10f(x)+18f(x+h)-6f(x+2h)+f(x+3h)}{12}=\\
&=\frac{(-3-10+18-6+1)f(x)+(3+18-12+3)hf'(x)+(-\frac{3}{2}+9-12+\frac{9}{2})h^2f''(x)}{12}+\\
&+\frac{(\frac{1}{2}+3-8+\frac{9}{2})h^3f'''(x)+(-\frac{1}{8}+\frac{3}{4}-4+\frac{27}{8})h^4f''''(x)}{12}=\\
&=\frac{12hf'(x)+O(h^5)}{12}=hf'(x)+O(h^5)
\end{aligned} \tag{2}$$

Esercizio 2: Matlab utilizza la doppia precisione IEEE. Stabilire, pertanto, il nesso tra la variabile **eps** e la precisione di macchina di questa aritmetica.

Soluzione: Data la funzione $fl : I \longrightarrow \mathcal{M}$, che associa ad ogni numero reale $x \in \mathcal{I}$, un corrispondente numero di macchina $fl(x)$.

Lo Standard in doppia precisione IEEE prevede la rappresentazione per arrotondamento del numero $fl(x)$.

Possiamo quindi affermare che se $x \in \mathcal{I}, x \neq 0$, allora:

$$fl(x) = x(1 + \epsilon_x), \quad |\epsilon_x| \leq u$$

In cui:

$$u = \frac{1}{2}b^{1-m} \quad \text{rappresentazione per arrotondamento}$$

Dove b è la base, m è il numero di cifre per la mantissa e ϵ_x l'errore relativo di rappresentazione.

Dato che nello standard IEEE in doppia precisione si utilizza la base $b = 2$ e un numero di cifre per la mantissa pari a $m = 53$, avremo che la precisione di macchina con rappresentazione per arrotondamento è data da: $u = 2^{-53} \approx 1.1102 * 10^{-16}$

In Matlab, la variabile **eps** contiene la precisione di macchina in base 10 che coincide con il valore u nel caso di rappresentazione per troncamento infatti vale: $eps = 2.2204 * 10^{-16}$.

Dato che **eps** rappresenta quindi, la distanza tra 1 e il successivo numero in virgola mobile, ovvero il valore: $x = 1 + u = 1 + 2^{-53}$, il quale è rappresentato da $fl(x) = 1$ dato che $u \leq eps$. L'errore relativo commesso su x perciò è:

$$|\epsilon_x| = \frac{|fl(x) - x|}{|x|} = \frac{|1 - (1 + 2^{-53})|}{|1 + 2^{-53}|} = \frac{2^{-53}}{1 + 2^{-53}} \leq 2^{-53} = u \leq eps$$

Esercizio 3: Spiegare il fenomeno della cancellazione numerica. Fare un esempio che la illustri, spiegandone i dettagli.

Soluzione: La cancellazione numerica si verifica quando si perdono delle cifre significative durante un'operazione di somma algebrica, con addendi quasi opposti. Questo è dovuto al fatto che la somma è un'operazione malcondizionata e lo possiamo studiare, verificando il condizionamento di $y = x_1 + x_2, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad \text{con} \;\; x_1 + x_2 \neq 0$.

Siano ϵ_1 e ϵ_2 gli errori relativi sui dati iniziali e considerando che non venga introdotto nessun nuovo errore nel calcolo della somma precedente, otteniamo:

$$y(1 + \epsilon_y) = x_1(1 + \epsilon_1) + x_2(1 + \epsilon_2)$$

Da cui possiamo ricavare che:

$$|\epsilon_y| \leq \frac{|x_1| + |x_2|}{|x_1 + x_2|}\epsilon_x \equiv k\epsilon_x \quad \text{con} \;\; \epsilon_x = max\{|\epsilon_1|, |\epsilon_2|\}$$

Il numero k, quindi, indica il numero di condizionamento, che può essere arbitrariamente grande, nel caso di due addendi quasi opposti tra loro. Ciò significa che l'operazione di somma tra numeri quasi opposti è malcondizionata.

Per esempio, supponiamo di voler calcolare $y = 0.2345666 - 0.2345111 \equiv 0.0000555$. Se utilizziamo una rappresentazione per arrotondamento alla quarta cifra significativa, otteniamo:

$$\tilde{y} = 2.346 * 10^{-1} - 2.345 * 10^{-1} = 1 * 10^{-4}$$

L'errore relativo che commettiamo su y sarà quindi:

$$|\epsilon_y| = |\frac{5.55 * 10^{-5} - 1 * 10^{-4}}{5.55 * 10^{-5}}| \simeq 0.8018$$

Andando quindi a calcolare il numero di condizionamento k, otteniamo:

$$k = \frac{|x_1| + |x_2|}{|x_1 + x_2|} = \frac{|0.2345666| + |-0.2345111|}{|0.2345666 - 0.2345111|} = 8.45 * 10^3$$

perciò avendo un numero notevolmente alto, la somma precedente è malcondizionata e abbiamo una perdita di cifre significative.

Esercizio 4: Scrivere una function Matlab, `radice(x)` che, avendo in ingresso un numero x non negativo, calcoli $\sqrt[6]{x}$ utilizzando solo operazioni algebriche elementari, con la massima precisione possibile. Confrontare con il risultato fornito da $x^{(1/6)}$ per 20 valori di x, equispaziati logaritmicamente nell'intervallo $[1e-10, 1e10]$, tabulando i risultati in modo che si possa verificare che si è ottenuta la massima precisione possibile.

Soluzione: Per calcolare la radice sesta di un numero x, preso in input, si utilizza il seguente metodo iterativo che converge velocemente verso la radice:

1. Si stima un valore iniziale di partenza x_n
2. Dopodiché si pone $x_{n+1} = x_n + \triangle x_n$ in cui $\triangle x_n = (\frac{x}{x_n^{k-1}} - x_n)\frac{1}{k}$ e k indica l'indice k-esimo della radice
3. Reiteriamo il passo precedente finchè non risulta che la differenza $|x_{n+1} - x_n|$ sia minore di una precisione scelta

Traducendo il precedente algoritmo in Matlab, otteniamo il seguente codice:

```
function y = radice(x)
%
% y = radice(x)
%
% Calcola la radice sesta di x utilizzando solo operazioni algebriche
% elementari con la massima precisione possibile.
%
% Input: x, numero di cui calcolare la radice
% Output: y, risultato dell'operazione di radice
%
if x<= 0, error('Il radicando non deve essere negativo'); end
x0 = 1;
x1 = x0 + (x/(x0^5)-x0)/6;
while (abs(x1-x0)) > 1e-16
    x0 = x1;
    x1 = x0 + (x/(x0^5)-x0)/6;
end
y=x1;
return
```

Con il seguente codice vado a generare 20 valori equispaziati logaritmicamente nell'intervallo $[1e-10, 1e10]$ e metto in comparazione la rappresentazione esatta della radice con quella della funzione radice precedente:

```
approssimato = zeros(1,20);
esatto = zeros(1,20);
errore = zeros(1,20);
x = logspace(log10(1e-10),log10(1e10),20);
for i = 1:20
    approssimato(i) = radice(x(i));
    esatto(i) = (x(i))^(1/6);
    errore(i) = abs(approssimato(i)-esatto(i));
end
variabili = {'n', 'approssimato', 'esatto', 'errore'};
table(x',approssimato',esatto', errore','VariableNames',variabili);
```

Ottengo così i seguenti risultati:

	n	approssimato	esatto	errore
1	1.0000e-10	0.0215	0.0215	6.9389e-18
2	1.1288e-09	0.0323	0.0323	0
3	1.2743e-08	0.0483	0.0483	6.9389e-18
4	1.4384e-07	0.0724	0.0724	1.3878e-17
5	1.6238e-06	0.1084	0.1084	2.7756e-17
6	1.8330e-05	0.1624	0.1624	2.7756e-17
7	2.0691e-04	0.2432	0.2432	2.7756e-17
8	0.0023	0.3643	0.3643	0
9	0.0264	0.5456	0.5456	0
10	0.2976	0.8171	0.8171	0
11	3.3598	1.2238	1.2238	0
12	37.9269	1.8330	1.8330	2.2204e-16
13	428.1332	2.7453	2.7453	0
14	4.8329e+03	4.1118	4.1118	8.8818e-16
15	5.4556e+04	6.1585	6.1585	0
16	6.1585e+05	9.2239	9.2239	0
17	6.9519e+06	13.8150	13.8150	1.7764e-15
18	7.8476e+07	20.6914	20.6914	3.5527e-15
19	8.8587e+08	30.9905	30.9905	7.1054e-15
20	1.0000e+10	46.4159	46.4159	1.4211e-14

Come si può notare, avendo scelto una tolleranza dell'ordine di `1e-16`, tutti gli errori sono molto piccoli e contenuti, alcuni nulli.

Esercizio 5: Scrivere function Matlab distinte che implementino efficientemente i metodi di Newton e delle secanti per la ricerca degli zeri di una funzione $f(x)$. Per tutti i metodi, utilizzare come criterio di arresto:

$$|x_{n+1} - x_n| \leq tol \cdot (1 + |x_n|)$$

essendo *tol* una opportuna tolleranza specificata in ingresso. Curare particolarmente la robustezza del codice.

Soluzione:

CODICE Matlab per il metodo di Newton

```
function [x,nit] = newton(f,f1,x0,tolx,maxit)
% Il metodo di Newton serve per determinare una approssimazione della
% radice a partire da un'approssimazione iniziale.
%
% Input: f = funzione di cui vogliamo trovare la radice
%         f1 = derivata prima della funzione f
%         x0 = approsimazione iniziale della radice
%         tolx = tolleranza fissata
%         maxit = massimo numero di iterazioni fissato
%
% Output: x = radice della funzione f
%          nit = numero di iterazioni svolte, vale -1 se la tolleranza non
%          e' soddisfatta entro maxit o la derivata si annulla
%
if nargin<4, error('Argomenti in input non sufficienti')
elseif nargin==4, maxit=100;end
if tolx<eps, error('Tolleranza non valida');end

x=x0;
nit=-1;
for i=1:maxit
    fx = feval(f,x);
    f1x = feval(f1,x);
    if f1x == 0, error('Derivata prima uguale a 0'); end
    x = x - fx/f1x;
    if abs(x-x0)<=tolx * (1+abs(x0))
        nit=i;
        break;
    else
        x0 = x;
    end
end

if nit == -1, disp('Tolleranza desiderata non raggiunta');end
end
```

CODICE Matlab per il metodo delle secanti

```
function [x,nit] = secanti(f,x0,x1,tolx,maxit)
%
% Il metodo delle secanti serve per determinare una approssimazione della
% radice di f(x)=0 a partire da due valori iniziali x0 e x1.
%
% Input: f = funzione di cui vogliamo trovare la radice
%         x0 = approsimazione iniziale della radice
%         x1 = approsimazione iniziale della radice
%         tolx = tolleranza fissata
%         maxit = massimo numero di iterazioni fissato
%
% Output: x = radice della funzione f
```

```
%          nit = numero di iterazioni svolte, vale -1 se la tolleranza non
%          e' soddisfatta entro maxit o la derivata si annulla
%
if nargin<4, error('Argomenti in input non sufficienti')
elseif nargin==4, maxit=100;end
if tolx<eps, error('Tolleranza non valida');end
nit=-1;
for i=1:maxit
    fx0 = feval(f,x0);
    fx1 = feval(f,x1);
    if fx1-fx0 == 0, error('Il denominatore e'' uguale a 0');end
    x = (fx1*x0-fx0*x1)/(fx1-fx0);
    x0 = x1;
    x1 = x;
    if abs(x-x0)<=tolx * (1+abs(x0))
        nit=i;
        break;
    end
end

if nit == -1, disp('Tolleranza desiderata non raggiunta');end
end
```

Esercizio 6: Utilizzare le $function$ del precedente esercizio per determinare una approssimazione della radice della funzione:

$$f(x) = x - cos(x)$$

per $tol = 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-9}, 10^{-12}$, partendo da $x_0 = 0$ (e $x_1 = 0.1$ per il metodo delle secanti). Tabulare i risultati, in modo da confrontare il costo computazionale di ciascun metodo.

Soluzione:

tol	Radici Newton	iterazioni	Radici secanti	iterazioni
10^{-3}	7.390851333852840e-01	4	7.390985629062998e-01	4
10^{-6}	7.390851332151607e-01	5	7.390851332151466e-01	6
10^{-9}	7.390851332151607e-01	5	7.390851332151607e-01	7
10^{-12}	7.390851332151607e-01	6	7.390851332151607e-01	7

Il costo computazionale per ciascuna iterazione del metodo di Newton è pari a 2 valutazioni funzionali mentre per il metodo delle secanti è pari a 1.

Esercizio 7: Utilizzare le $function$ dell'Esercizio 5 per determinare una approssimazione della radice della funzione:

$$f(x) = [x - cos(x)^5]$$

per $tol = 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-9}, 10^{-12}$, partendo da $x_0 = 0$ (e $x_1 = 0.1$ per il metodo delle secanti). Tabulare i risultati, in modo da confrontare il costo computazionale e l'accuratezza di ciascun metodo. Commentare i risultati ottenuti.

Soluzione:

tol	Radici Newton	iterazioni	Radici secanti	iterazioni
10^{-3}	0.732640697751109	20	0.730145017727562	26
10^{-6}	0.739078762321033	51	0.739075266476228	70
10^{-9}	0.739085126905744	82	0.739085038011533	-1
10^{-12}	0.7390851331015	-1	0.739085038011533	-1

Come possiamo notare dai precedenti risultati, in entrambi i metodi, essendo la funzione una radice multipla, si eseguono molte più iterazioni rispetto alla funzione dell'Esercizio 6, in alcuni casi neanche convergono. In particolare risulta che il metodo di Newton non converga su tolleranza pari a `1e-12` mentre il metodo delle secanti non converga nel caso la tolleranza sia pari a: `1e-9, 1e-12`.

In conclusione, in caso di radici multiple, non porta alcun vantaggio utilizzare metodi diversi da quello di Newton, anzi avremo un aumento considerevole nel numero di iterazioni.

Esercizio 8: Scrivere una function Matlab,
`function x = mialu(A,b)`
che, data in ingresso una matrice A ed un vettore b, calcoli la soluzione del sistema lineare $Ax = b$ con il metodo di fattorizzazione LU con *pivoting parziale*. Curare particolarmente la scrittura e l'efficienza della function, e validarla su due esempi non banali, generati casualmente, di cui sia nota la soluzione.

Soluzione: `CODICE Matlab per funzione mialu`

```matlab
function x = mialu(A,b)
% x = mialu(A,b)
% data in ingresso una matrice A ed un vettore b, calcoli la soluzione del
% sistema lineare Ax = b con il metodo di fattorizzazione LU con pivoting
% parziale.
% Input: A = matrice in ingresso che va fattorizzata LU con il metodo di
%              pivoting parziale
%          b = vettore dei termini noti
% Output: x = vettore soluzione di Ax=b
%

[m,n] = size(A);
dimb = length(b);
if m ~= n
    error("La matrice dei coefficenti A deve essere quadrata")
end
if m ~= dimb
    error("La matrice A ed il vettore b hanno dimensioni discordanti")
end
p = [1:n];
for i =1:n-1
    [mi,ki] = max(abs(A(i:n,i)));
    disp(abs(A(i:n,i)));
    disp(mi);
    disp(ki)
    if mi == 0
        error('La matrice non puo'' essere singolare');
    end
    ki = ki + i - 1;
    if ki > i
        % inverto la riga i-esima e ki-esima
        A([i,ki],:) = A([ki,i],:);
        % stessa cosa nel vettore delle permutazioni
        p([i,ki]) = p([ki,i]);
```

```
    end
    A(i+1:n,i) = A(i+1:n,i)/A(i,i);
    A(i+1:n,i+1:n) = A(i+1:n,i+1:n) - A(i+1:n,i)*A(i,i+1:n);
end
x = b(p);
for i = 1:n
    x(i+1:n) = x(i+1:n)-A(i+1:n,i)*x(i);
end
x(n) = x(n)/A(n,n);
for i = n-1:-1:1
    x(1:i) = x(1:i) - A(1:i,i+1)*x(i+1);
    x(i) = x(i)/A(i,i);
end
end
```

Esempi:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -4 \\ 3 & -3 & -4 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 18 \\ 16 \\ -20 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -15 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} \tag{4}$$

In entrambi i casi sono stati creati i valori della matrice A e del vettore x in modo casuale, mentre il vettore dei termini noti `b`, è stato calcolato tramite il prodotto `A*x`. Una volta inseriti i valori di `A` e `b` nella funzione `mialu(A,b)`, questa ha restituito il vettore x correttamente.

Esercizio 9: Scrivere una function Matlab,
`function x = mialdl(A,b)`
che, data in ingresso una matrice A ed un vettore b, calcoli la soluzione del corrispondente sistema lineare utilizzando la fattorizzazione LDL^T. Curare particolarmente la scrittura e l'efficienza della function, e validarla su due esempi non banali, generati casualmente, di cui sia nota la soluzione.

Soluzione: `CODICE Matlab per funzione mialdl`

```
function x = mialdl(A,b)
% x = mialdl(A,b)
% data in ingresso una matrice A ed un vettore b, calcoli la soluzione del
% sistema lineare Ax = b con il metodo di fattorizzazione LDL^T.

% Input: A = matrice in ingresso che va fattorizzata LDL^T
%        b = vettore dei termini noti
% Output: x = vettore soluzione di Ax=b
%
[m,n] = size(A);
dimb = length(b);
if m ~= n
    error("La matrice dei coefficenti A deve essere quadrata")
end
if m ~= dimb
    error("La matrice A ed il vettore b hanno dimensioni discordanti")
end
if A(1,1) <= 0, error('la matrice non e'' sdp'); end
A(2:n,1) = A(2:n,1)/A(1,1);
for j = 2:n
    v = (A(j,1:j-1).') .* diag(A(1:j-1,1:j-1));
```

```
    A(j,j) = A(j,j) - A(j,1:j-1)*v;
    if A(j,j) <= 0, error('la matrice non e'' sdp'); end
    A(j+1:n,j) = (A(j+1:n,j) - A(j+1:n,1:j-1) * v)/A(j,j);
end
x = b;
for i=1:n
    x(i+1:n) = x(i+1:n)-(A(i+1:n,i)*x(i));
end
x = x./diag(A);
for i=n:-1:2
    x(1:i-1) = x(1:i-1)-A(i,1:i-1).'*x(i);
end
end
```

Esempi:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 3 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -15 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

In entrambi i casi sono stati creati i valori della matrice A e del vettore x in modo casuale, mentre il vettore dei termini noti `b`, è stato calcolato tramite il prodotto `A*x`. Una volta inseriti i valori di `A` e `b` nella funzione `mialdl(A,b)`, questa ha restituito il vettore x correttamente.

Esercizio 10: Scrivere una function Matlab,
`function [x,nr] = miaqr(A,b)`
che, data in ingresso la matrice A $m \times n$, con $m \geq n = rank(A)$, ed un vettore b di lunghezza m, calcoli la soluzione del sistema lineare $Ax = b$ nel senso dei minimi quadrati e, inoltre, la norma, nr, del corrispondente vettore residuo. Curare particolarmente la scrittura e l'efficienza della function. Validare la function miaqr su due esempi non banali, generati casualmente, confrontando la soluzione ottenuta con quella calcolata con l'operatore Matlab \

Soluzione: `CODICE Matlab per funzione mialdl`

```
function [x,nr] = miaqr(A,b)
%
% [x,nr] = miaqr(A,b)
%
% La funzione miaqr fattorizza QR la matrice in ingresso A, dopodiche'
% restituisce la soluzione x del sistema Ax=b insieme alla norma del
% vettore residuo
%
% Input: A = matrice in ingresso
%        b = vettore dei termini noti
% Output: x = soluzione del sistema
%         nr = norma del vettore residuo
%

[m,n] = size(A);
dimb = length(b);
if n > m, error('Dimensioni matrice A errate'); end
if dimb ~= m, error('Dimensione vettore dei termini noti sbagliata'); end
for i=1:n
    alfa = norm(A(i:m,i));
```

```
    if alfa == 0, error('La matrice non ha rango massimo'), end
    if A(i,i) >= 0, alfa = -alfa; end
    v1 = A(i,i) - alfa;
    A(i,i) = alfa;
    A(i+1:m,i) = A(i+1:m,i)/v1;
    beta = -v1/alfa;
    A(i:m,i+1:n) = A(i:m,i+1:n) - (beta*[1; A(i+1:m,i)])*...
        ([1; A(i+1:m,i)]' * A(i:m,i+1:n));
end
for i=1:n
    v = [1; A(i+1:m,i)];
    beta = 2/(v'*v);
    b(i:dimb) = b(i:dimb) - (beta*(v'*b(i:dimb)))*v;
end
for i=n:-1:1
    b(i) = b(i)/A(i,i);
    b(1:i-1) = b(1:i-1) - A(1:i-1,i)*b(i);
end
x = b(1:n);
nr = norm(b(n+1:m));
end
```

Esempio 1: Data la matrice A di dimensioni 4×3 e il vettore b (entrambi generati casulmente):

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 3 & -5 & -4 \\ 3 & 3 & 2 \\ -5 & 5 & -4 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{7}$$

La soluzione generata dalla `function miaqr` è:

$$xMiaqr = \begin{pmatrix} -5.4619e-01 \\ -4.1315e-02 \\ -9.0373e-01 \end{pmatrix}, \text{ con norma} \quad nr = 5.3356e-00$$

Mentre la soluzione generata da $x = A \setminus b$ è:

$$x = \begin{pmatrix} -5.4619e-01 \\ -4.1315e-02 \\ -9.0373e-01 \end{pmatrix}$$

Esempio 2: Data la matrice A di dimensioni 5×4 e il vettore b (entrambi generati casulmente):

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & -4 \\ -3 & 0 & -3 & -4 \\ -1 & -4 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -4 & -2 \\ -3 & -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

La soluzione generata dalla `function miaqr` è:

$$xMiaqr = \begin{pmatrix} 2.8454e+00 \\ -1.8283e+00 \\ -1.7138e+00 \\ -4.5249e-01 \end{pmatrix}, \text{ con norma} \quad nr = 1.4966e+00$$

Mentre la soluzione generata da $x = A \setminus b$ è:

$$x = \begin{pmatrix} 2.8454e+00 \\ -1.8283e+00 \\ -1.7138e+00 \\ -4.5249e-01 \end{pmatrix}$$

Esercizio 11: Data la function Matlab

```
function [A1,A2,b1,b2] = linsis(n,simme)
%
%
rng(0);
[q1,r1] = qr(rand(n));
if nargin==2
    q2 = q1';
else
    [q2,r1] = qr(rand(n));
end
A1 = q1*diag([1 2/n:1/n:1])*q2;
A2 = q1*diag([1e-10 2/n:1/n:1])*q2;
b1 = sum(A1,2);
b2 = sum(A2,2);
return
```

che crea sistemi lineari casuali di dimensione n con soluzione nota,

$$A_1 x = b_1, \quad A_2 x = b_2, \quad x = (1, ..., 1)^T \in \mathbb{R}^n,$$

risolvere, utilizzando la *function* `mialu`, i sistemi lineari generati da `[A1,A2,b1,b2]=linsis(5)`. Commentare l'accuratezza dei risultati ottenuti, dandone spiegazione esaustiva.

Soluzione: Innanzitutto bisogna notare che eseguendo la function `linsis(5)`, che ha in input un solo argomento, andiamo a creare matrici non simmetriche. Perciò utilizzando i risultati come input della *function* `mialu`, otteniamo i seguenti risultati:

1. Nel primo caso, ovvero calcolando `x1 = mialu(A1,b1)`, il vettore risultante è:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 9.999999999999999e-01 \\ 9.999999999999998e-01 \\ 9.999999999999998e-01 \\ 1 \\ 9.999999999999998e-01 \end{pmatrix}$$

   Il risultato è pressoché identico al risultato atteso. D'altra parte il numero di condizionamento K della matrice A1, dato dalla funzione `cond(A1)` è pari a $K = 2.5000e+00$. Questo numero ci fa capire che il problema è quindi ben condizionato, essendo piccolo.

2. Nel secondo caso invece, ovvero calcolando `x2 = mialu(A2,b2)`, il vettore risultante è:

$$x_2 = \begin{pmatrix} 9.999964765747 66e-01 \\ 1.000000446226050e+00 \\ 1.000000098875194e+00 \\ 1.000000207059384e+00 \\ 1.000000011600807e+00 \end{pmatrix}$$

   Il cui numero di condizionamento della matrice A2, dato dalla funzione `cond(A2)` è pari a $K = 9.999995892902628e+09$. Dato che il numero ottenuto è molto grande, ci fa capire che siamo di fronte ad un problema mal condizionato.
   Questo è dovuto all'operazione con cui otteniamo la matrice A2, in particolare all'operazione: `diag ([1e-10 2/n:1/n:1])`, in cui il primo elemento della matrice diagonale è molto vicino allo zero **DA FINIRE!**

Esercizio 12: Risolvere, utilizzando la *function* `mialdlt`, i sistemi lineari generati da `[A1,A2,b1,b2]=linsis(5,1)`. Commentare l'accuratezza dei risultati ottenuti, dandone spiegazione esaustiva.

Soluzione: Bisogna notare che, eseguendo la function `linsis(5,1)`, che ha in input due argomenti, andiamo a creare matrici simmetriche. Perciò utilizzando i risultati come input della *function* `mialdl`, otteniamo i seguenti risultati:

1. Nel primo caso, ovvero calcolando `x1 = mialdl(A1,b1)`, il vettore risultante è:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 9.999999999999994e-01 \\ 9.999999999999999e-01 \\ 1.000000000000000e+00 \\ 1.000000000000000e+00 \end{pmatrix}$$

   Il risultato è pressoché identico al risultato atteso. D'altra parte il numero di condizionamento K della matrice A1, dato dalla funzione `cond(A1)` è pari a $K = 2.5000e+00$. Questo numero ci fa capire che il problema è quindi ben condizionato, essendo piccolo.

2. Nel secondo caso invece, ovvero calcolando `x2 = mialdl(A2,b2)`, il vettore risultante è:

$$x_2 = \begin{pmatrix} 1.000000052293492e+00 \\ 1.000000058138759e+00 \\ 1.000000008150719e+00 \\ 1.000000058625536e+00 \\ 1.000000040588329e+00 \end{pmatrix}$$

   Il cui numero di condizionamento della matrice A2, dato dalla funzione `cond(A2)` è pari a $K = 9.999995645805687e+09$. Dato che il numero ottenuto è molto grande, ci fa capire che siamo di fronte ad un problema mal condizionato.
   Bisogna spiegare il perché. DA FINIRE!

Ercizio 13: Utilizzare la *function* `miaqr` per risolvere, nel senso dei minimi quadrati, i sistemi lineari sovradeterminati
`Ax = b,    (D*A)x = (D*b),    (D1*A)x = (D1*b),`
definiti dai seguenti dati:

```
A = [ 1 3 2; 3 5 4; 5 7 6; 3 6 4; 1 4 2 ];
b=[15 28 41 33 22]';
D = diag(1:5);
D1 = diag(pi*[1 1 1 1 1]).
```

Calcolare le corrispondenti soluzioni e residui, e commentare i risultati ottenuti.

Soluzione: Andando ad utilizzare la *function* `miaqr` per risolvere il primo sistema lineare nel senso dei minimi quadrati, otteniamo che la soluzione x_1 è:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 3.000000000000008e+00 \\ 5.800000000000001e+00 \\ -2.500000000000008e+00 \end{pmatrix}$$

In cui la norma dei residui, ottenuta tramite la funzione norm di Matlab, è $nr = 1.2649e + 00$.
Se invece utilizziamo la *function* `miaqr` per risolvere il secondo sistema lineare nel senso dei minimi quadrati, otteniamo che la soluzione x_2 è:

$$x_2 = \begin{pmatrix} -6.025699862322442e-01 \\ 4.701698026617703e+00 \\ 1.758375401560388e+00 \end{pmatrix}$$

In cui la norma dei residui, ottenuta tramite la funzione norm di Matlab, è $nr = 3.7352e + 00$.
Infine, utilizzando la *function* `miaqr` per risolvere l'ultimo sistema lineare nel senso dei minimi quadrati, otteniamo che la soluzione x_3 è:

$$x_3 = \begin{pmatrix} 3.000000000000016e+00 \\ 5.800000000000005e+00 \\ -2.500000000000020e+00 \end{pmatrix}$$

In cui la norma dei residui, ottenuta tramite la funzione norm di Matlab, è $nr = 3.973835306318414e+00$.

Dal momento che, risolvere il sistema lineare `Ax=b`, è equivalente a risolvere il sistema lineare sovradeterminato `(D*A)x = (D*b)`, ci si aspetta che le soluzioni x_1 e x_2 coincidano. Ciò non avviene, perché la *function* `miaqr` risolve il sistema lineare nel senso dei minimi quadrati. Significa che la funzione trova il valore x per cui risulta che la norma del vettore residuo è minimizzata.
Per verificare quanto detto, prendiamo in considerazione il vettore x_1 e utilizziamolo come soluzione del sistema lineare sovradeterminato `(D*A)x = (D*b)`, calcolandone la norma.
Il valore risultante è $nr = 5.2764e + 00$ che è molto distante dalla norma ottenuta considerando x_2 nel sistema, ciò giustifica la discrepanza nei risultati.
Nell'ultimo caso, invece, possiamo notare una lieve discrepanza tra i risultati x_1 e x_3. Ripetendo il controllo del caso precedente, quindi, andando a calcolare la norma del sistema lineare sovradeterminato `(D1*A)x = (D1*b)` ponendo $x = x_1$ otteniamo che la norma residua è pari a: $nr = 3.973835306318418e+00$ che differisce per la cifra meno significativa dal risultato ottenuto ponendo $x = x_3$. Questo spiegherebbe la lieve discrepanza tra i risultati in esame.

Esercizio 14: Scrivere una function Matlab,
`[x,nit] = newton(fun,jacobian,x0,tol,maxit)`
che implementi efficientemente il metodo di Newton per risolvere sistemi di equazioni nonlineari. Curare particolarmente il criterio di arresto, che deve essere analogo a quello usato nel caso scalare. La seconda variabile, se specificata, ritorna il numero di iterazioni eseguite. Prevedere opportuni valori di *default* per gli ultimi due parametri di ingresso.

Soluzione:

Esercizio 15: Usare la function del precedente esercizio per risolvere, a partire dal vettore iniziale nullo, il sistema nonlineare derivante dalla determinazione del punto stazionario della funzione:

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T Q \boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}^T \left[\sin(\frac{\pi}{2}\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}\right], \qquad \boldsymbol{e} = \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 100 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{100},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{100\times 100}, \qquad \sin(\frac{\pi}{2}\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \sin(\frac{\pi}{2}x_1) \\ \sin(\frac{\pi}{2}x_2) \\ \vdots \\ \sin(\frac{\pi}{2}x_{100}) \end{pmatrix}$$

utilizzando tolleranze `tol = 1e-3, 1e-8, 1e-13`. Graficare la soluzione e tabulare in modo conveniente i risultati ottenuti.

Soluzione: