

# Image processing con la morfologia matematica

# Cosa significa *morfologia*?

La parola morfologia (dal greco, *morphé* "forma" e *lògos* "discorso") significa "**studio della forma**" ed è applicato a varie discipline, come la biologia, la grammatica e, nel nostro caso, la matematica.

**La morfologia matematica** è una branca dell'informatica che si occupa dell'**analisi** e della **manipolazione** delle forme geometriche, in particolare delle immagini digitali.

La morfologia matematica è ampiamente utilizzata nell'**elaborazione delle immagini** per svolgere diverse funzioni, come l'eliminazione del rumore, l'estrazione di caratteristiche, la segmentazione di oggetti e molto altro ancora. Essenzialmente, si basa su **operazioni di trasformazione** di forme geometriche che vengono applicate agli elementi dell'immagine per ottenere risultati desiderati.

In sintesi, la morfologia matematica aiuta a manipolare e comprendere le forme e le strutture presenti nelle immagini digitali, contribuendo così a una vasta gamma di applicazioni in settori come la visione artificiale, il riconoscimento di pattern, l'analisi medica e altro ancora.



# Nozioni di base

La morfologia matematica deriva dalla **teoria degli insiemi**, e dunque utilizza le sue operazioni di base:

**Appartenenza:**  $w \in A, w \notin A$

**Inclusione:**  $A \subseteq B$

**Unione ed intersezione:**  $A \cup B, A \cap B$

**Complemento e differenza:**  $(A)^c = \{w : w \notin A\}, A - B = \{w : w \in A, w \notin B\}$

Due definizioni aggiuntive tipiche della morfologia matematica:

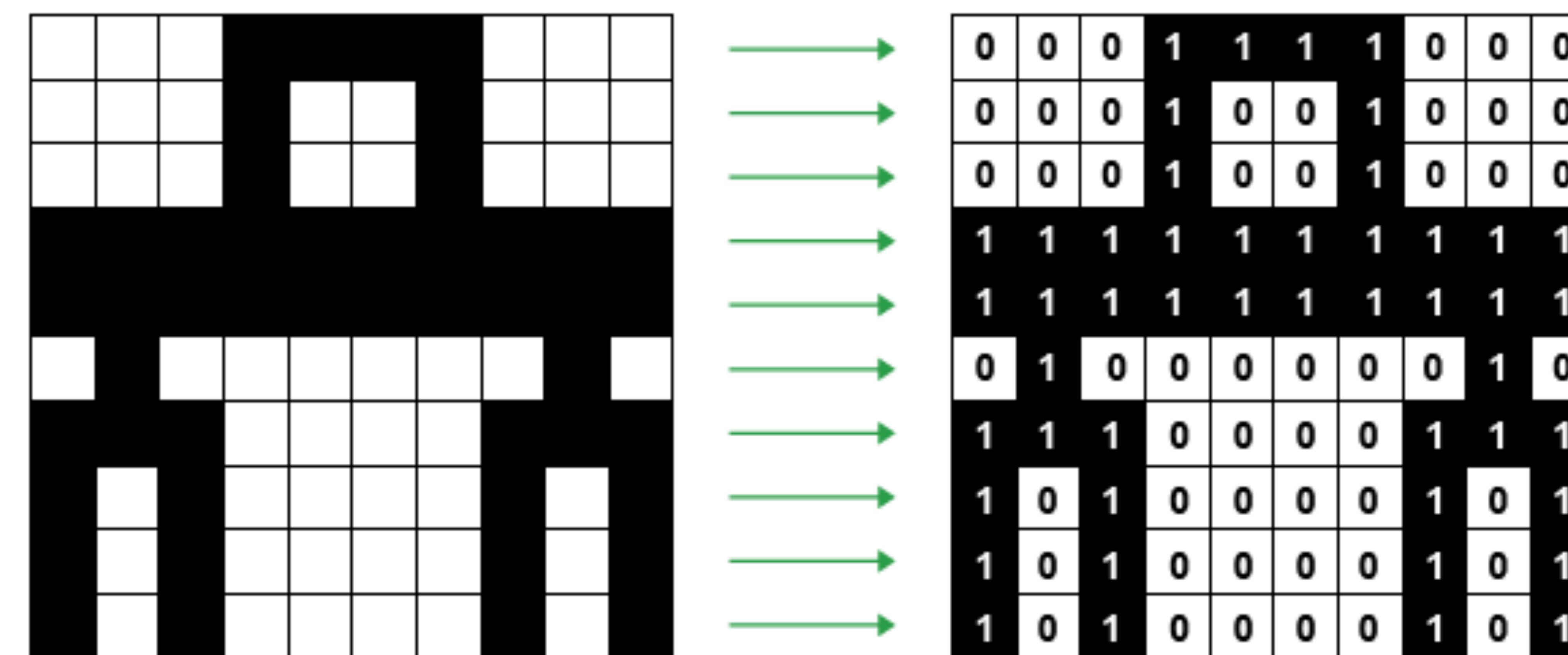
**La traslazione:**  $(A)_z = \{w : w = a + z, \text{ for } a \in A, z = (z_1, z_2)\}$

**La riflessione:**  $\dot{B} = \{w : w = -b, \text{ for } b \in B\}$

Nonostante con lo sviluppo della tecnologia si sia arrivati ad applicare la morfologia matematica anche alle immagini in greyscale e a colori, questa tecnica è utilizzata principalmente nelle **immagini binarie**.

Per una immagine binaria  $f$ , che assume cioè **2 valori** possibili (**0**, il background, e **1**, il foreground), ci si concentra tipicamente sugli insiemi di pixel di foreground:

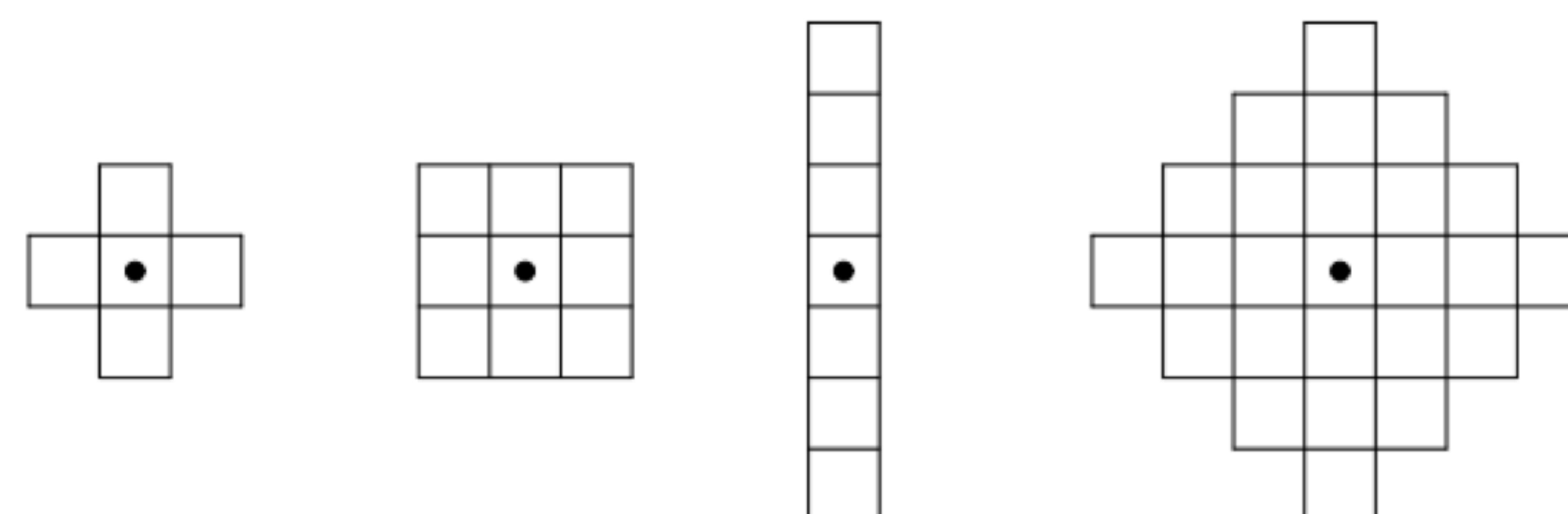
$$\mathbb{Z}^2 \supseteq A = \{w : f(w) = 1\} \text{ con } w=(m,n)$$



# L'elemento strutturante

L'idea di base nella morfologia binaria è sondare un'immagine con una forma semplice, solitamente codificato da un piccola immagine raster ( $3\times 3$  o  $5\times 5$ ), tracciando conclusioni su come questa forma si adatti o manchi nelle forme dell'immagine.

Questo semplice "sondaggio" è chiamato **elemento strutturante** ed è a sua volta un'immagine binaria (cioè un sottoinsieme dello spazio o della griglia).



# Gli operatori di base

Gli operatori morfologici di base consistono quindi in una “**ispezione**” di una immagine  $A$  guidata dall’elemento strutturante  $B$ .

- Si stabilisce una regola di confronto locale (ad esempio,  $B \cap A \neq \emptyset$ ).
- Si fa scorrere l’elemento strutturante sull’immagine, facendo inizialmente coincidere le origini dell’immagine e dell’elemento, sovrapponendo i risultati del confronto.

Sono definiti due operatori elementari: **dilatazione** ed **erosione**.

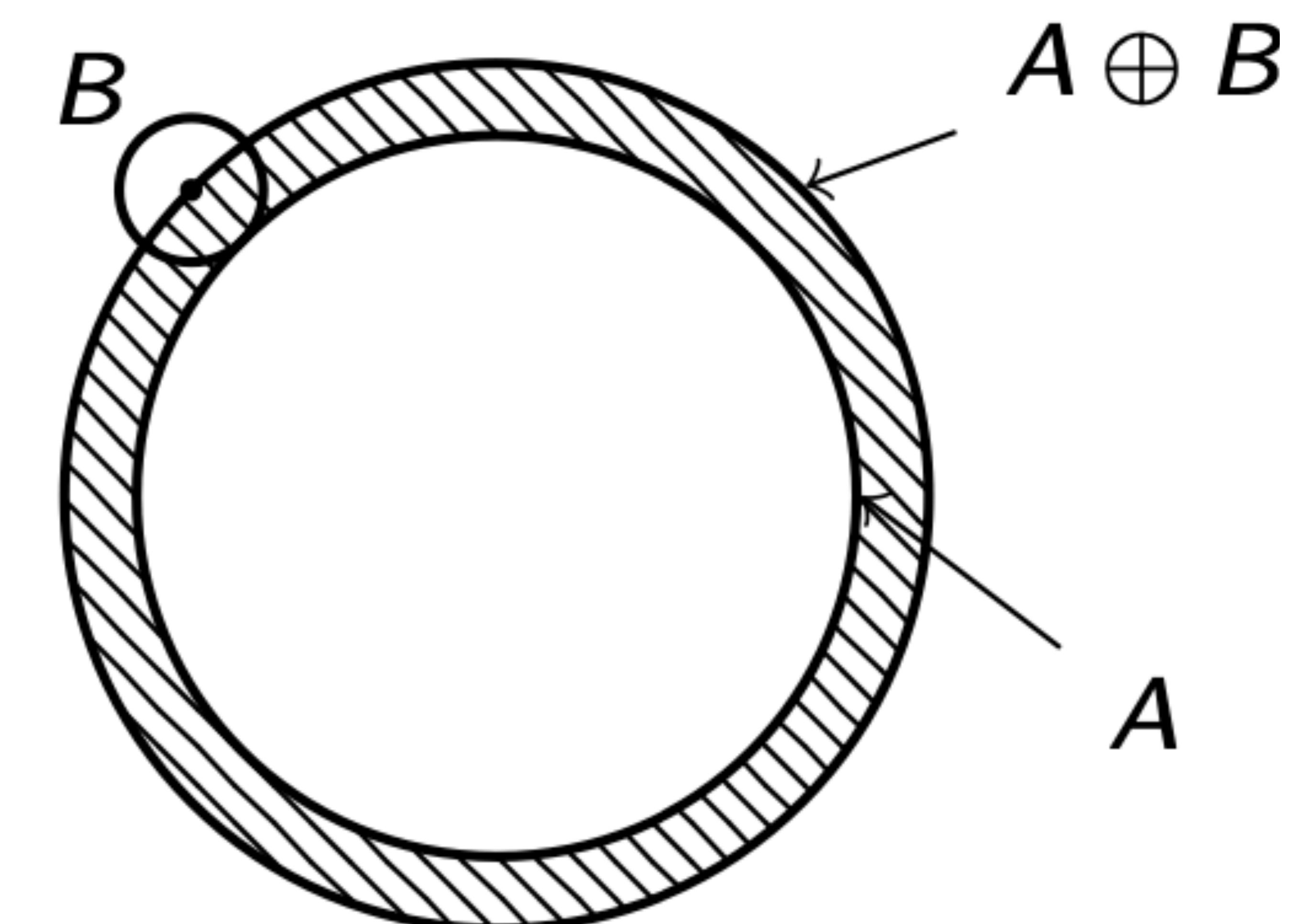
Operatori più complessi (come **apertura**, **chiusura** e trasformazione **hit-or-miss**) sono definiti come combinazione di questi ultimi.

# Dilatazione $\oplus$

La dilatazione **aumenta le dimensioni** degli oggetti nell'immagine binaria. Un pixel nell'immagine risultante è bianco se almeno un pixel dell'elemento strutturale si sovrappone con un pixel bianco nell'immagine originale.

Formalmente, la dilatazione di un'immagine binaria  $A$  con un elemento strutturante  $B$  è definita come:

$$A \oplus B = \{z \in \mathbb{Z}^2 \mid (B)_z \cap A \neq \emptyset\}$$



# Esempi di dilatazione

Immagine originale



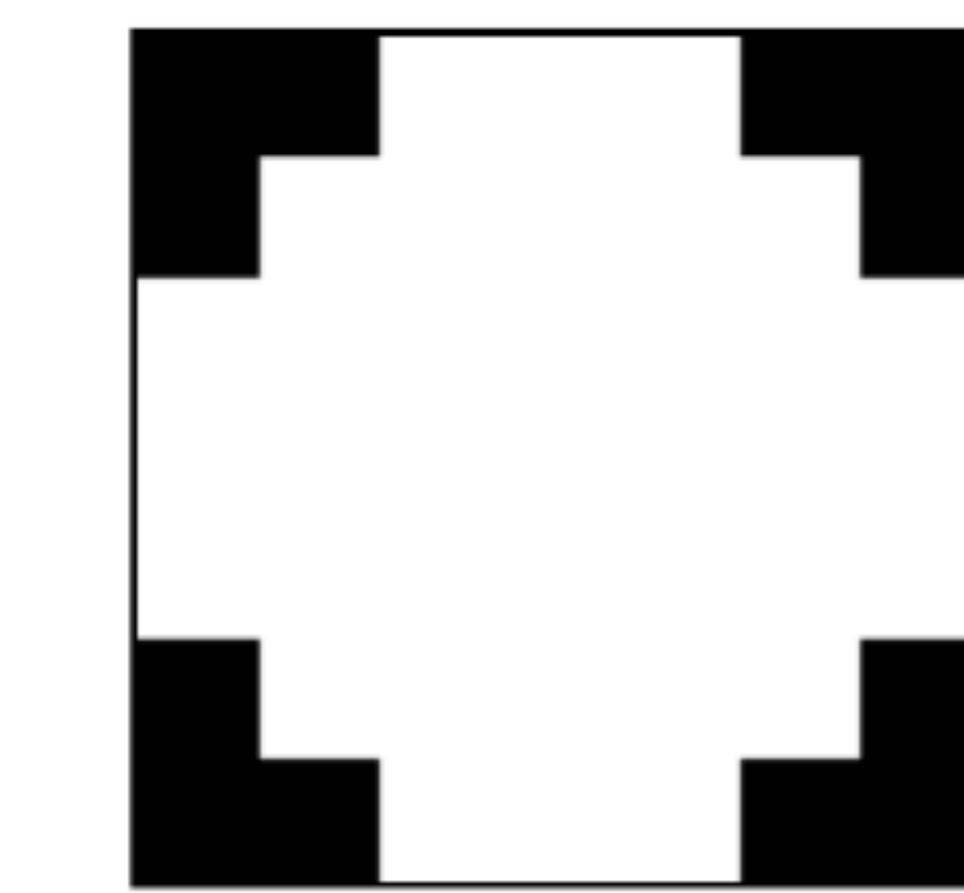
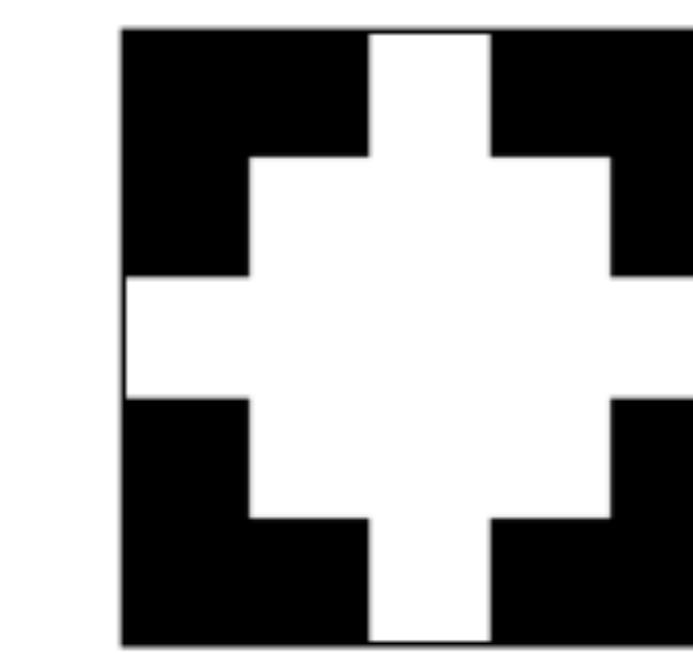
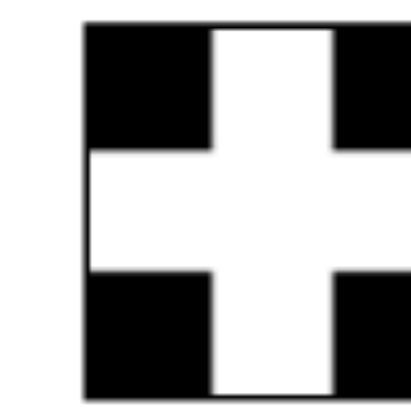
Dilatazione con  
disco di raggio 1

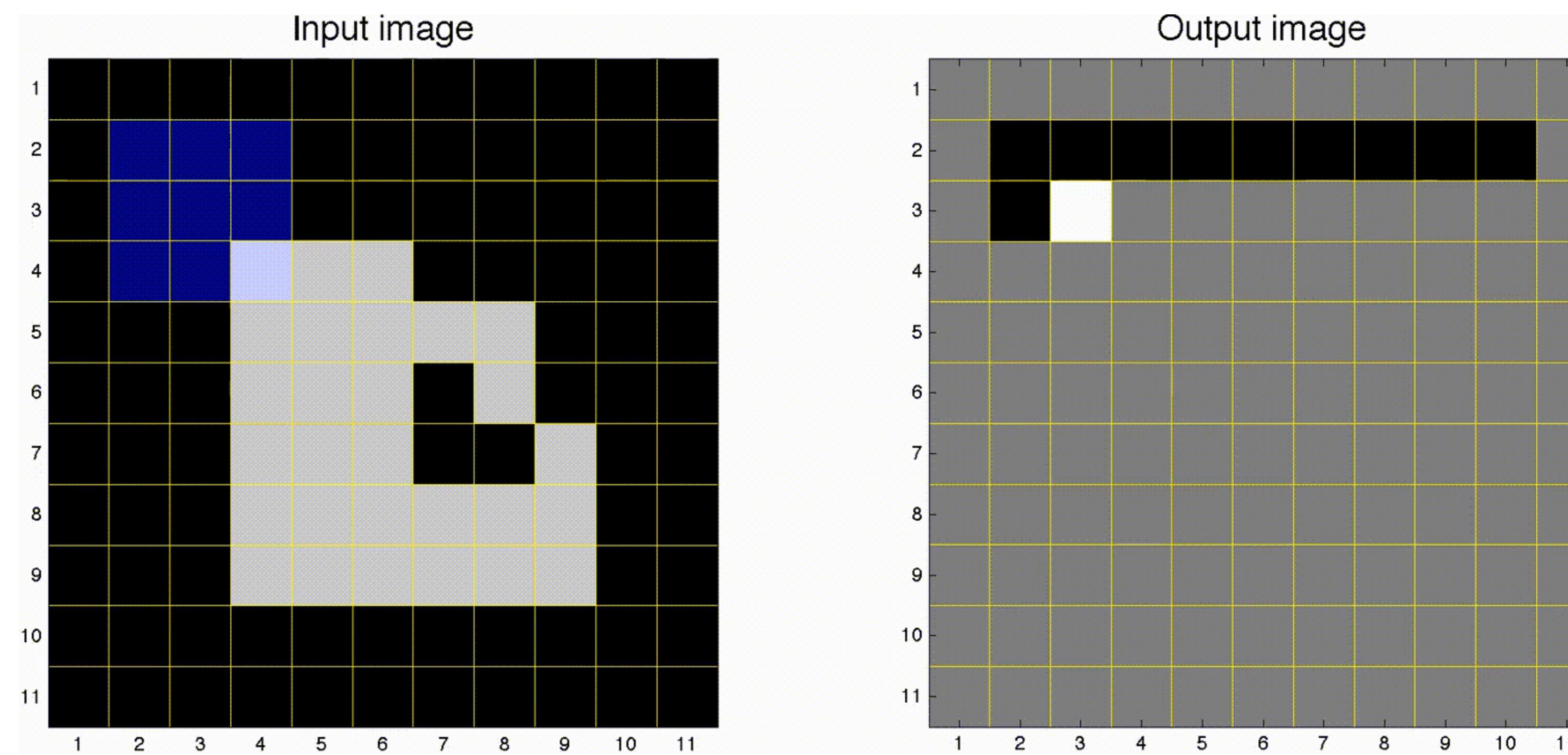
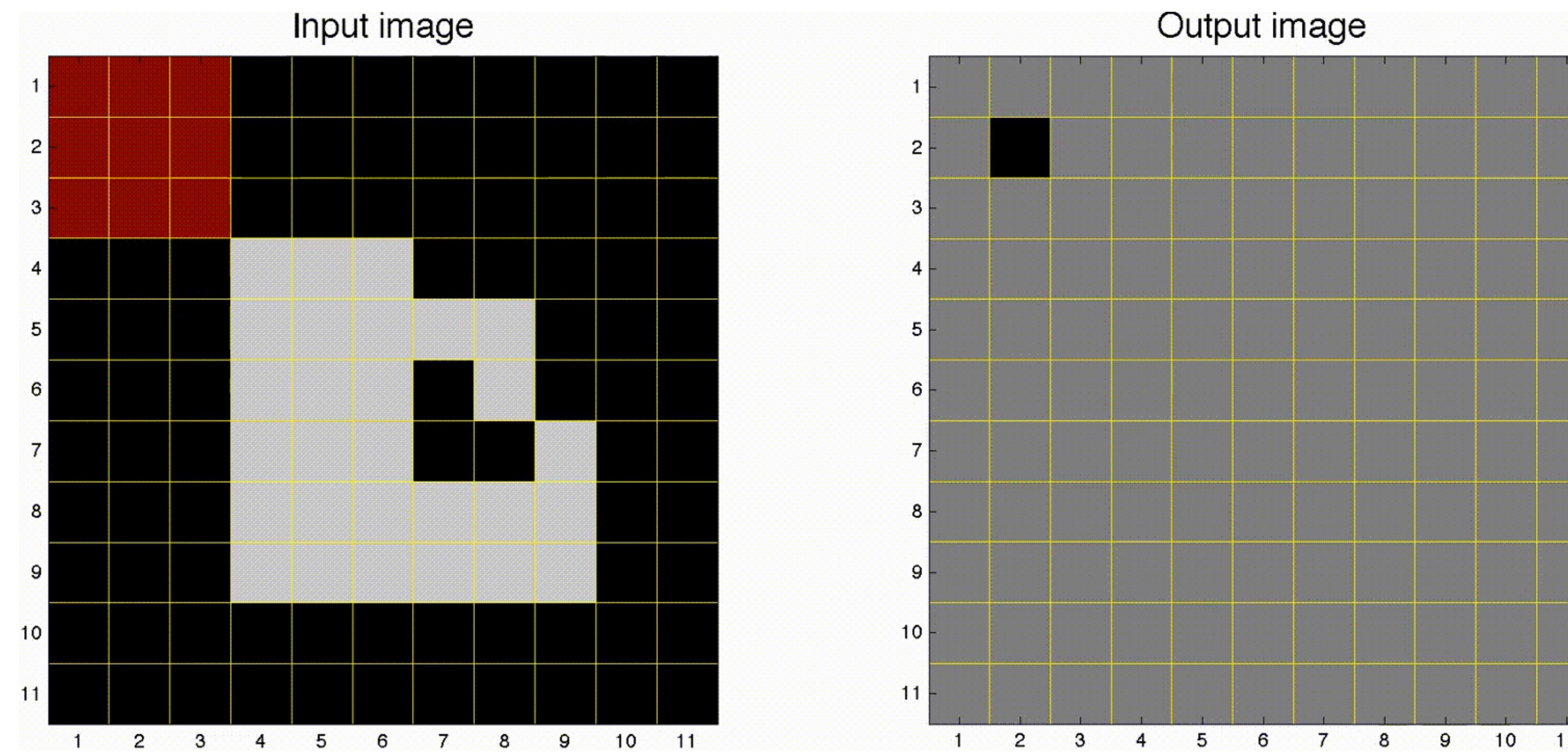


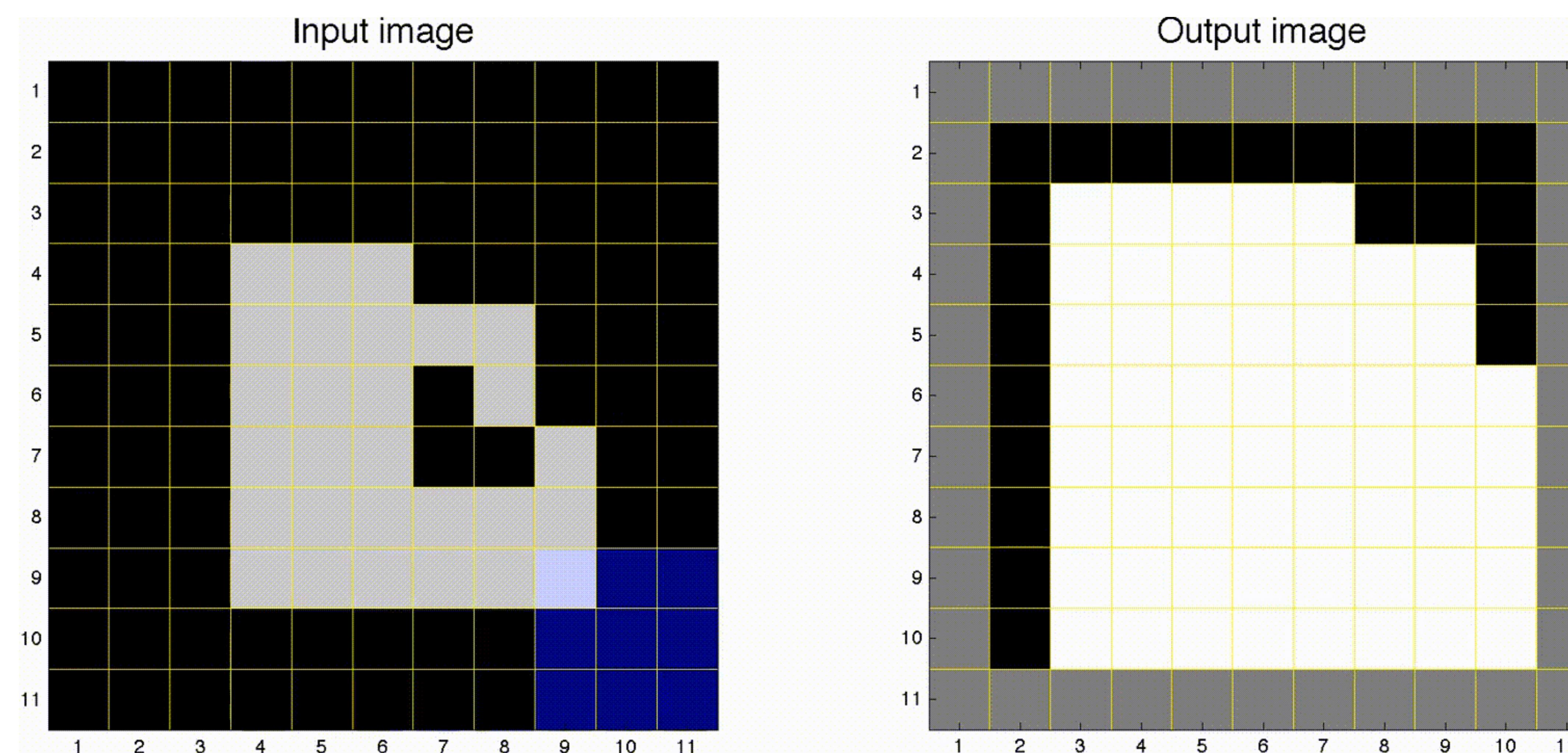
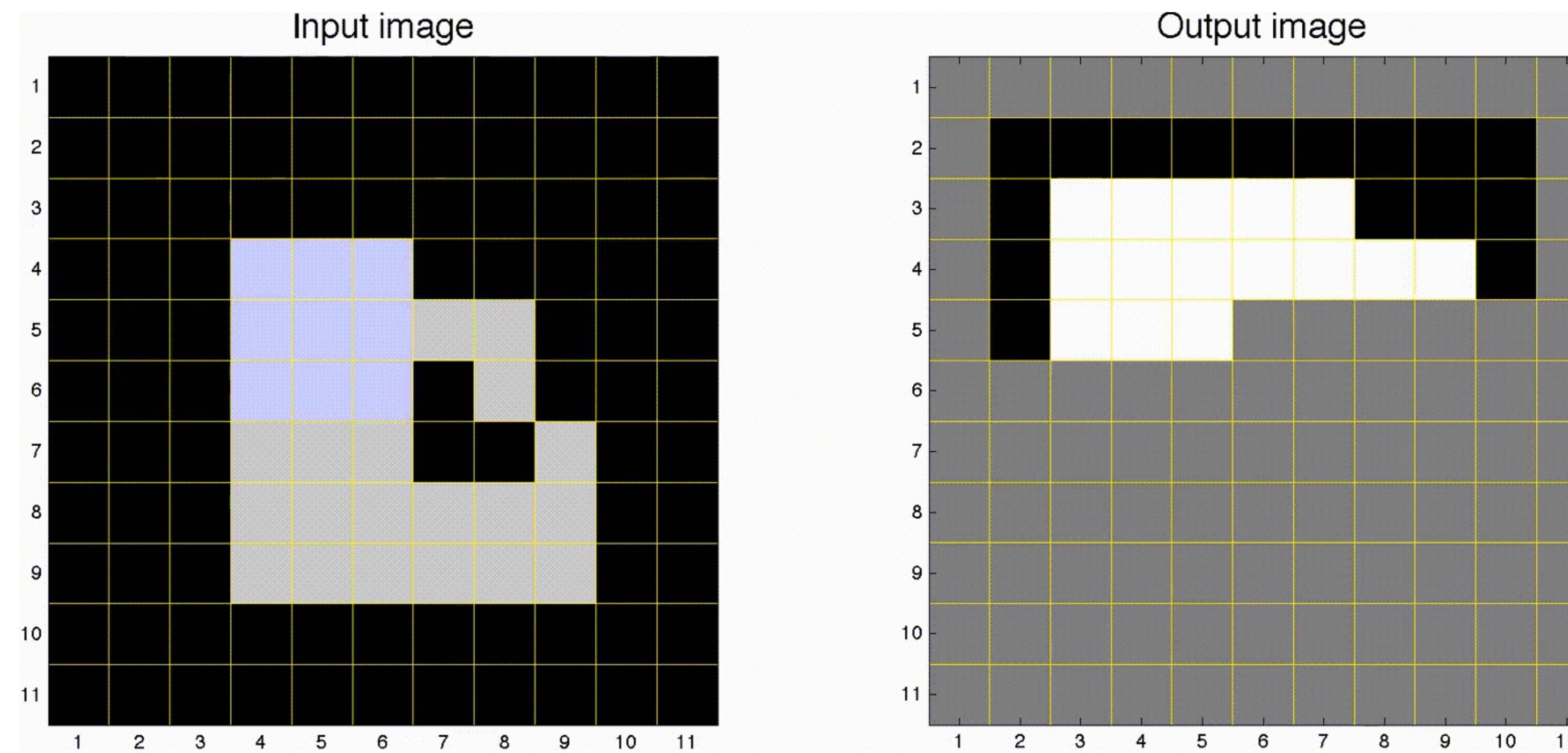
Dilatazione con  
disco di raggio 2



Dilatazione con  
disco di raggio 4







La dilatazione, chiamata anche *gap bridging*, ha diversi scopi di utilizzo:

**Riempie i buchi** di dimensione più piccola dell'elemento strutturante, **allarga le estremità** delle forme, **riempie i passaggi stretti** e **salda oggetti** a distanza inferiore alla taglia dell'elemento strutturante.

**Cantami o Diva del pelide  
Achille l'ira funesta**

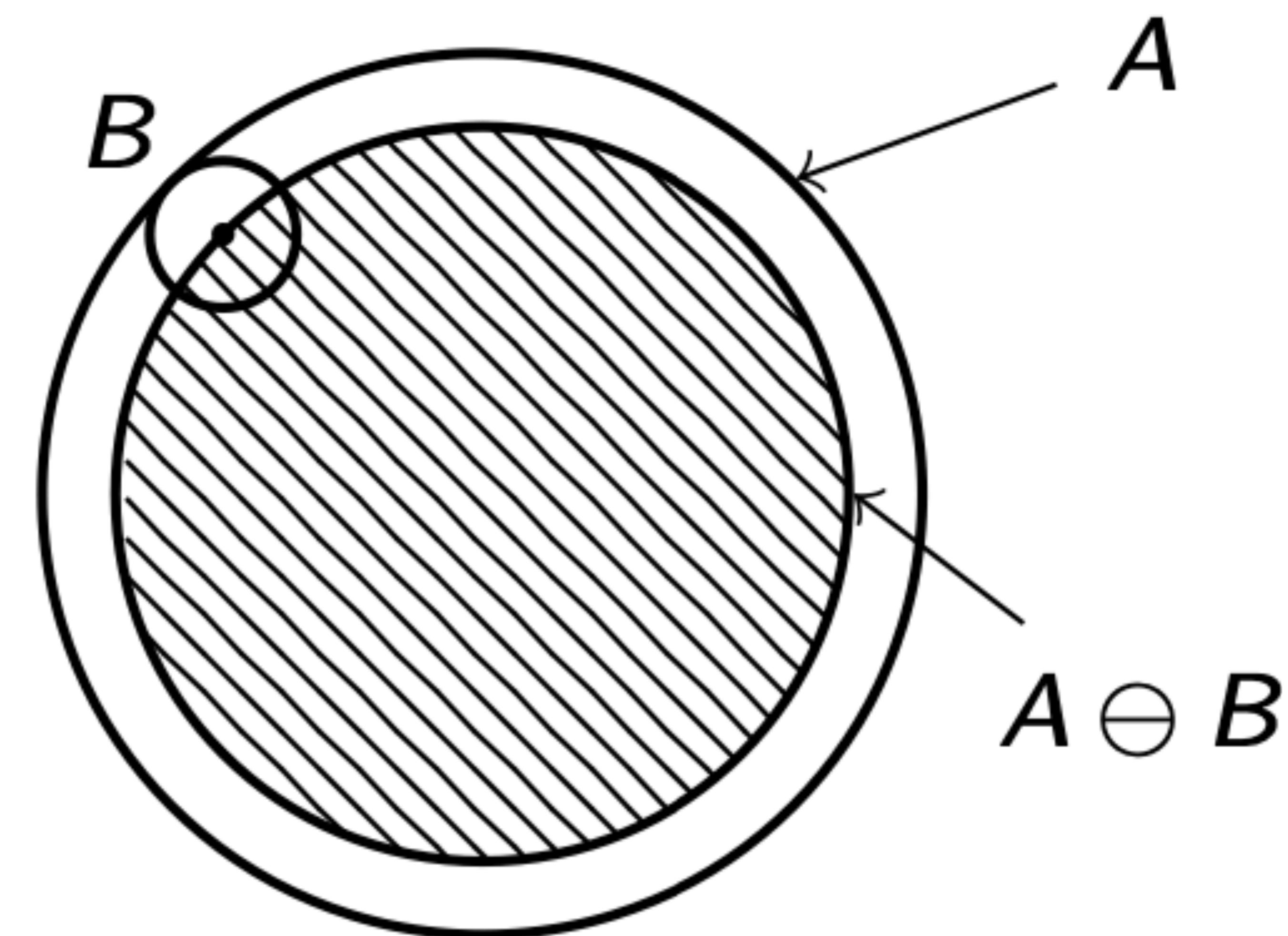
**Cantami o Diva del pelide  
Achille l'ira funesta**

# Erosione $\ominus$

L'erosione **riduce le dimensioni** degli oggetti nell'immagine binaria rimuovendo i pixel di valore 1 nei quali l'elemento strutturale non si sovrappone completamente con i pixel bianchi dell'immagine originale.

Formalmente, l'erosione di un'immagine binaria  $A$  con un elemento strutturale  $B$  è definita come:

$$A \ominus B = \{z \in \mathbb{Z}^2 \mid (B)_z \subseteq A\}$$



# Esempi di erosione

Immagine originale



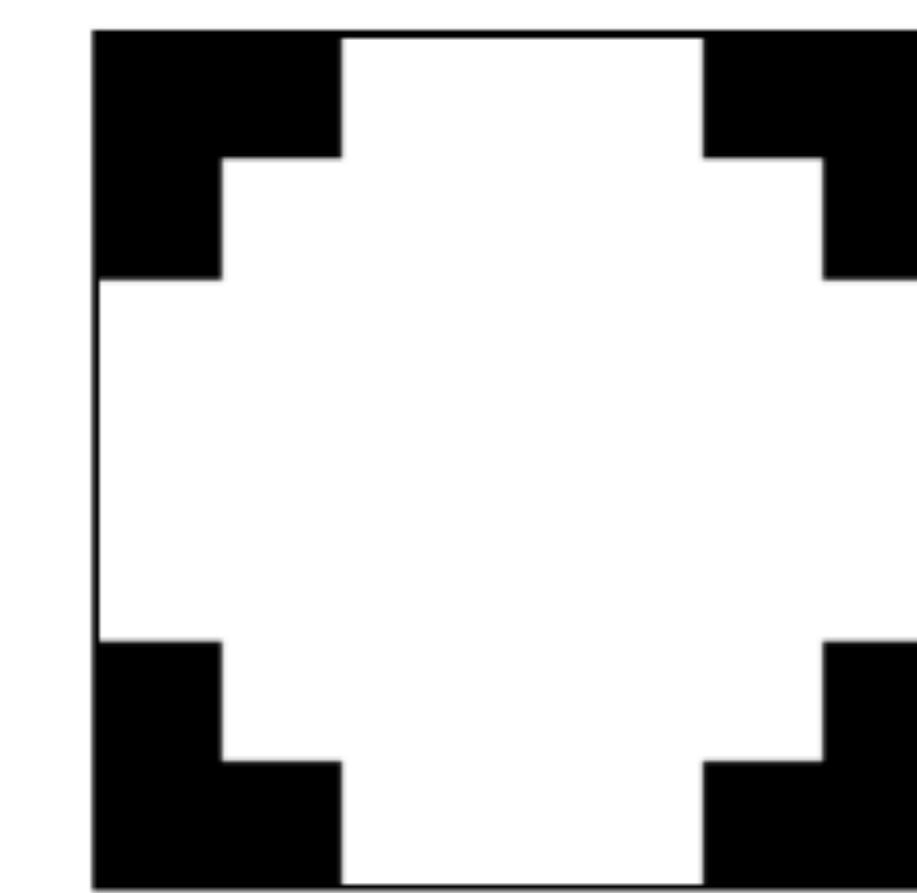
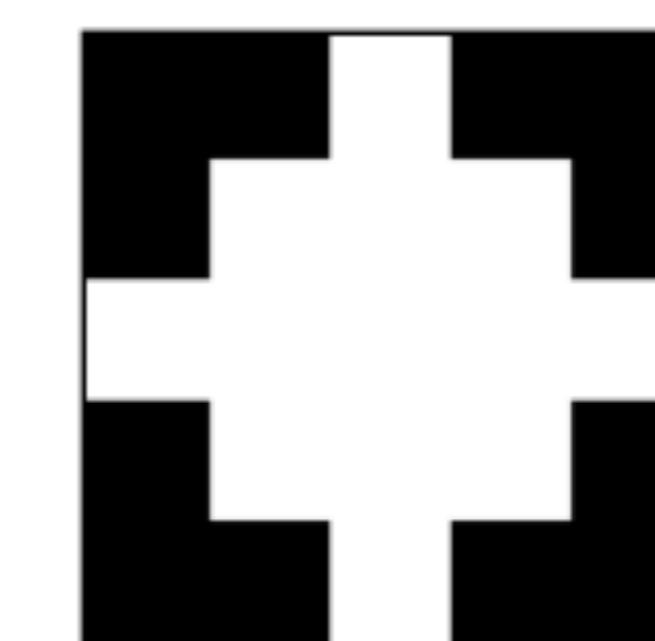
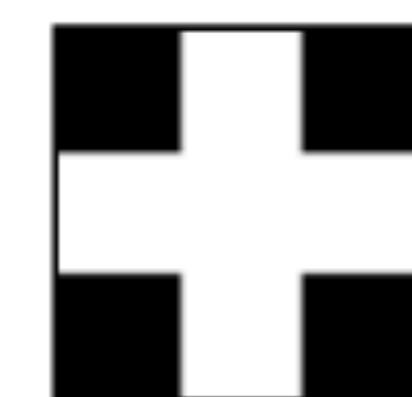
Erosione con  
disco di raggio 1

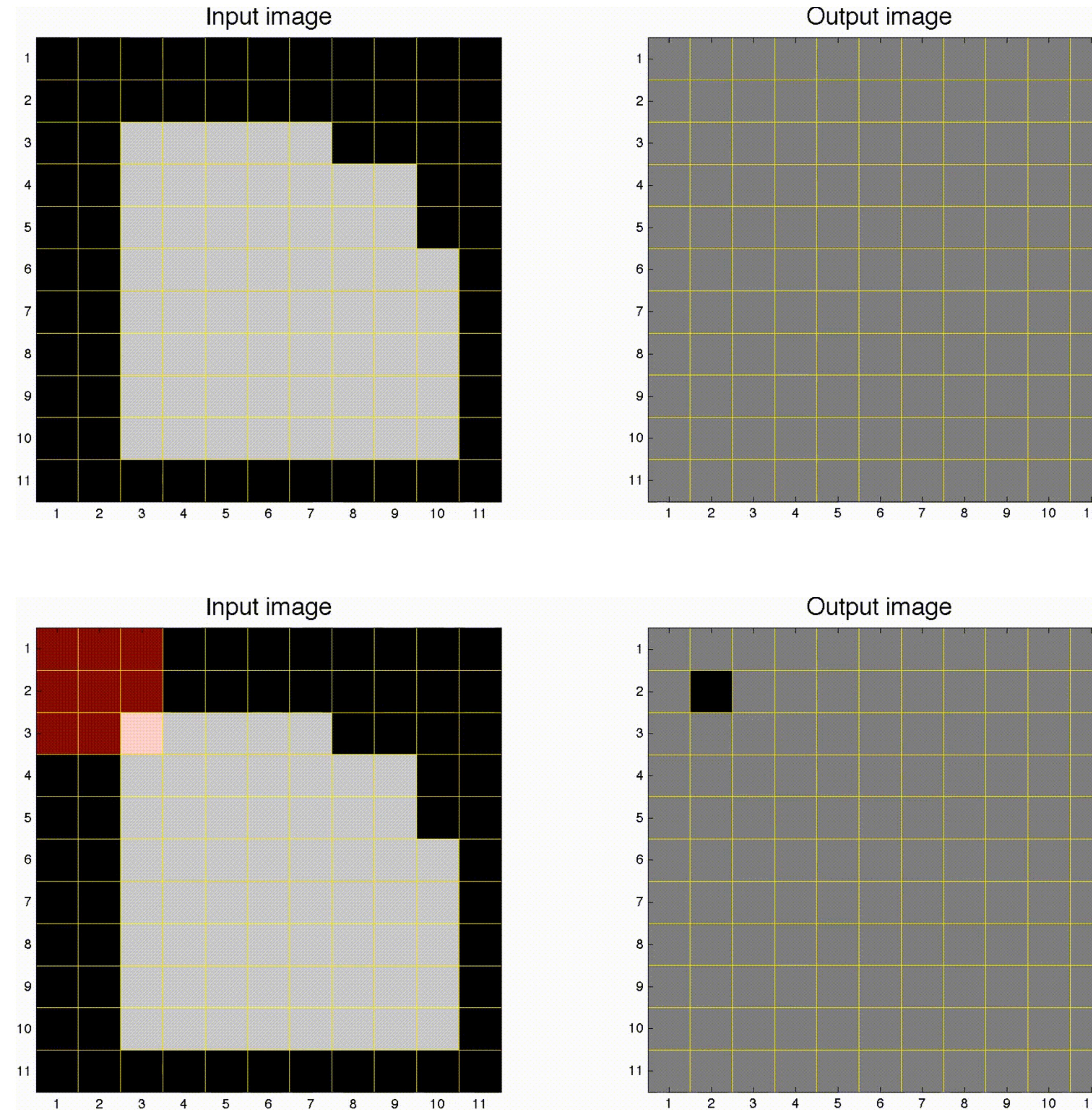


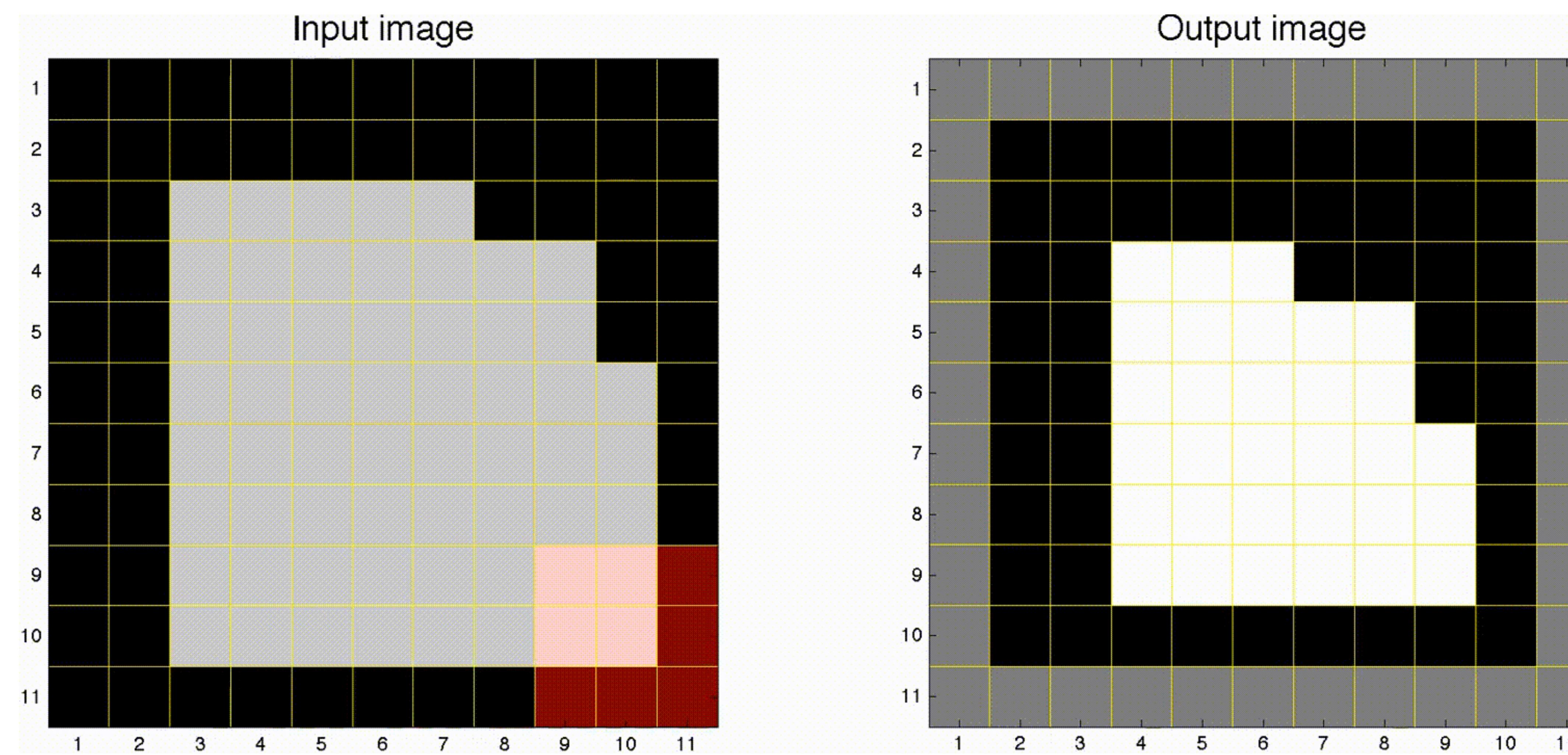
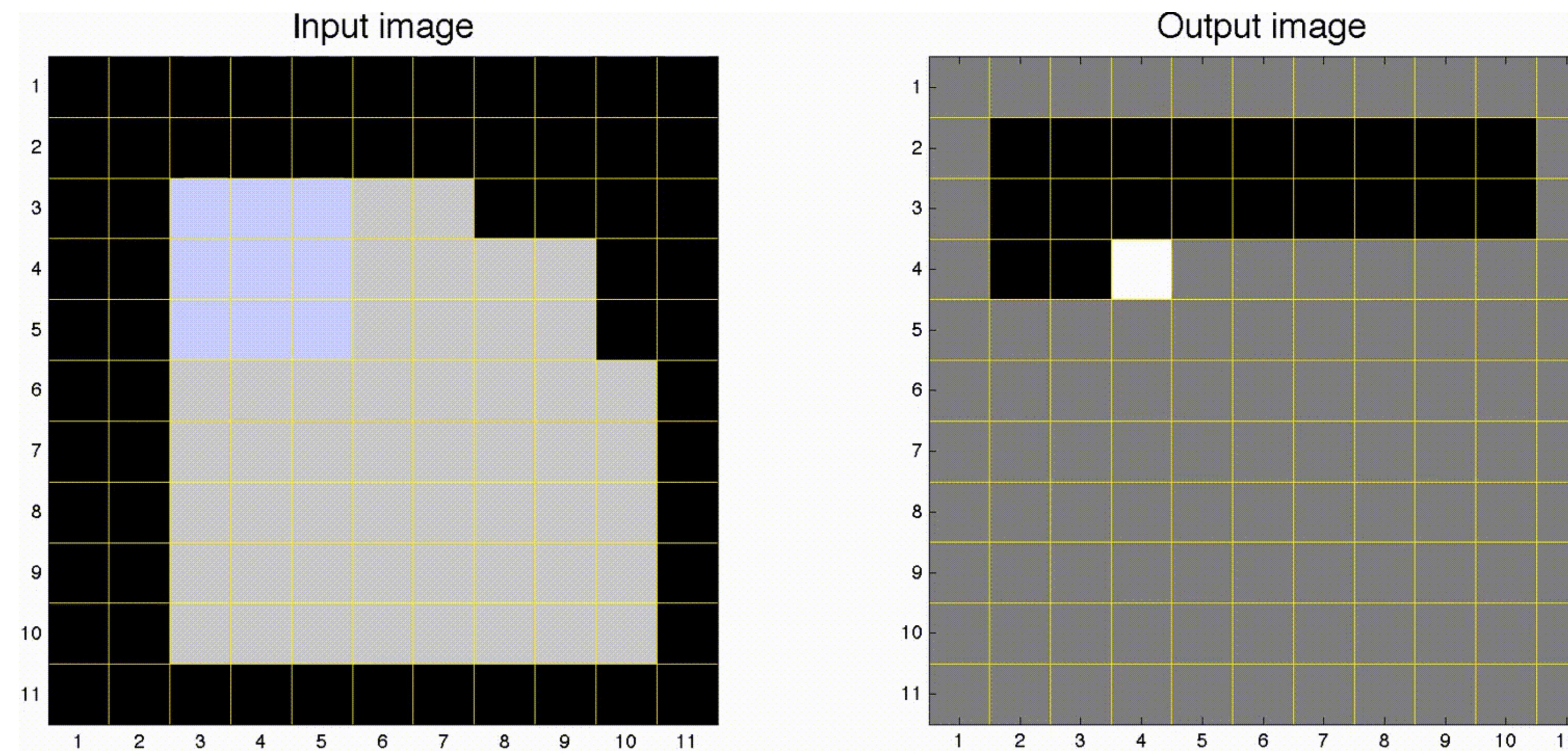
Erosione con  
disco di raggio 2



Erosione con  
disco di raggio 4







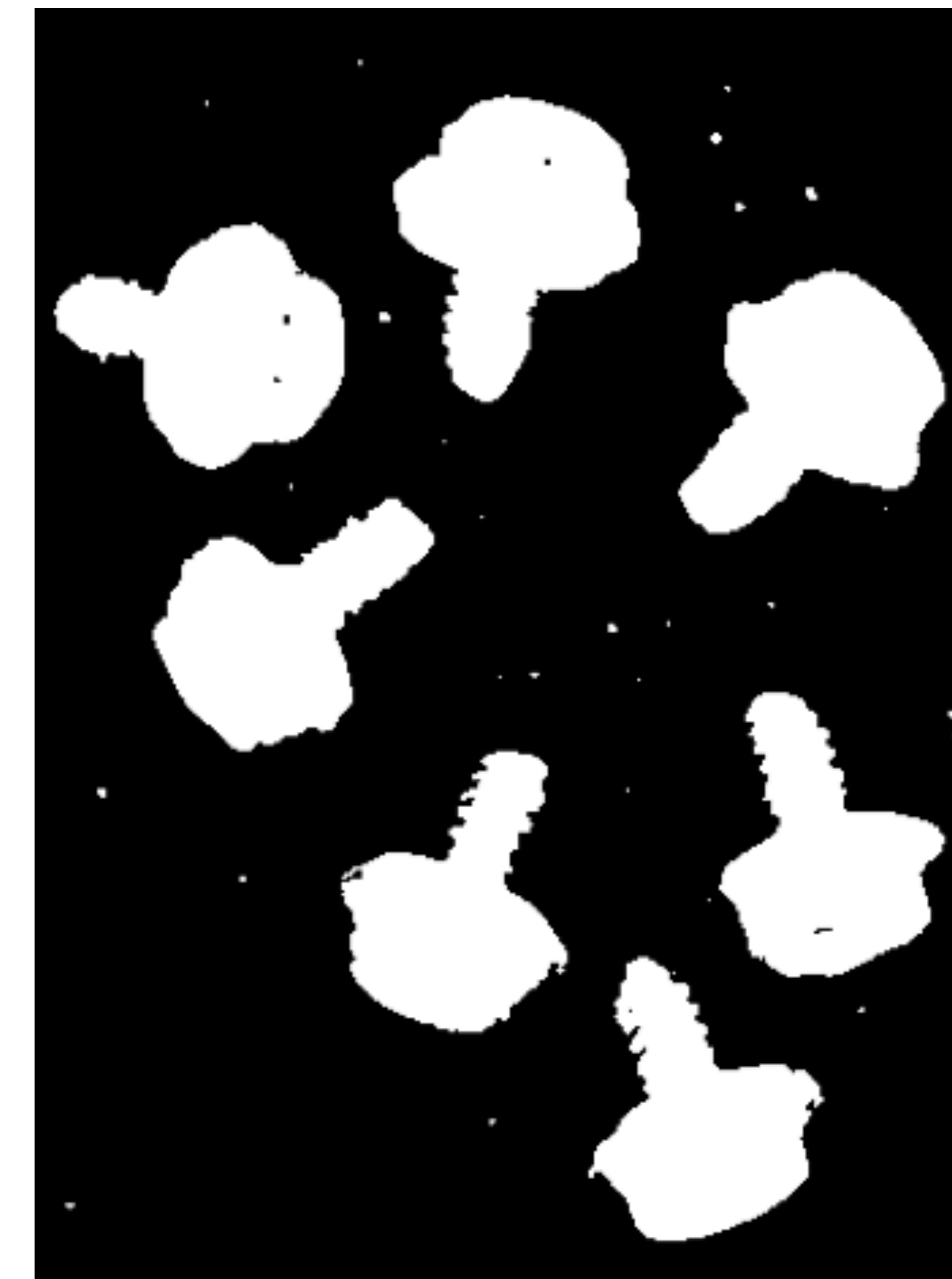
L'erosione, che sostanzialmente elimina gli elementi irrilevanti, ha diverse applicazioni:

**Riduce il rumore** di un'immagine, **cancella le estremità** sottili, **allarga buchi e passaggi** e **separa oggetti** connessi da un ponte “stretto”.

Immagine originale



Binarizzazione  
dell'immagine



Erosione per  
ridurre il rumore



# Altre operazioni

Gli operatori elementari hanno proprietà interessanti, ma modificano significativamente l'informazione rilevante.

- La **dilatazione** ricostruisce gli oggetti disconnessi ma ne **compromette la forma esterna**.
- L'**erosione** rimuove efficacemente rumore e dettagli ma **rischia di scomporre gli oggetti**.

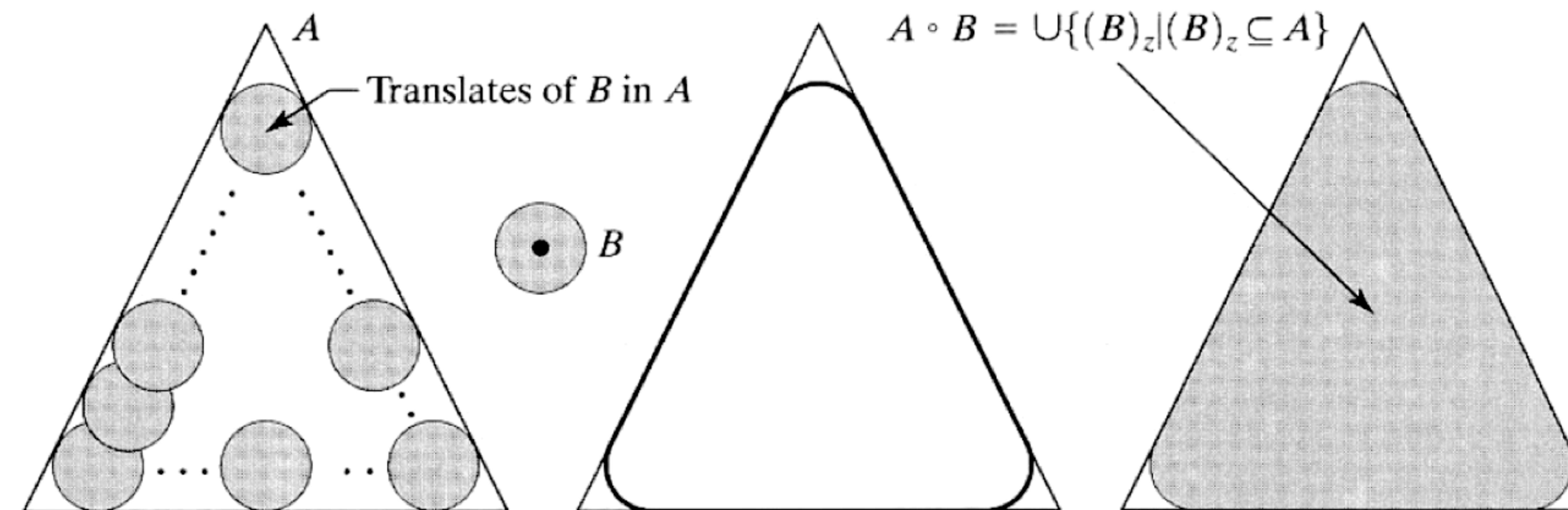
La combinazione di questi due operatori da' luogo a operatori complessi dalle proprietà ancora più interessanti.

**L'apertura morfologica** è costituita da un'erosione seguita da una dilatazione effettuata mediante lo stesso elemento strutturante:

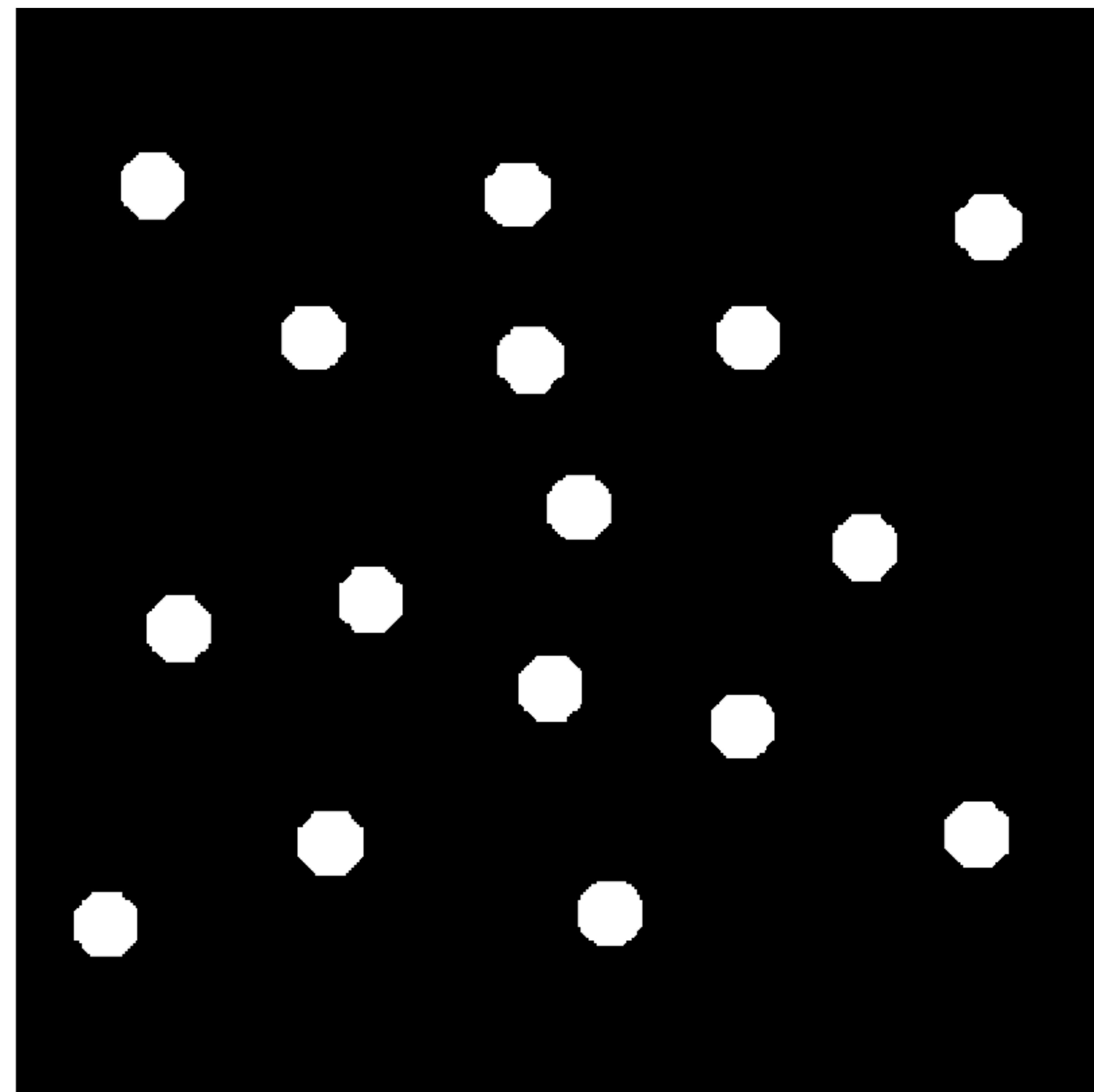
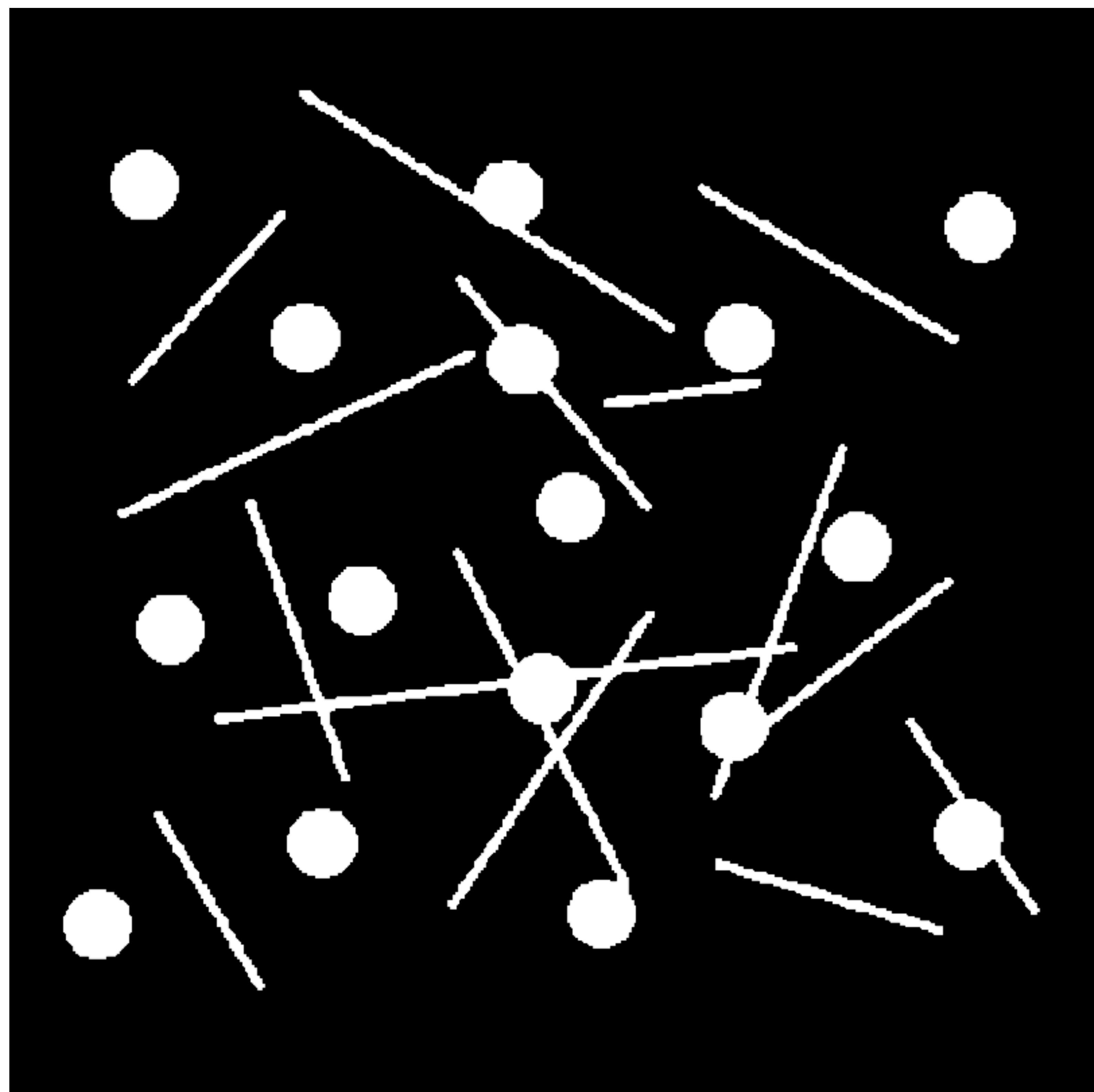
$$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$$

L'effetto dell'apertura è di **preservare il più possibile le regioni di forma simile all'elemento strutturante**, eliminando quelle differenti.

Si tratta di un filtro di **smoothing morfologico**, il cui effetto è determinato da forma e dimensioni dell'elemento strutturante.



L'apertura “seleziona” le forme d'interesse:

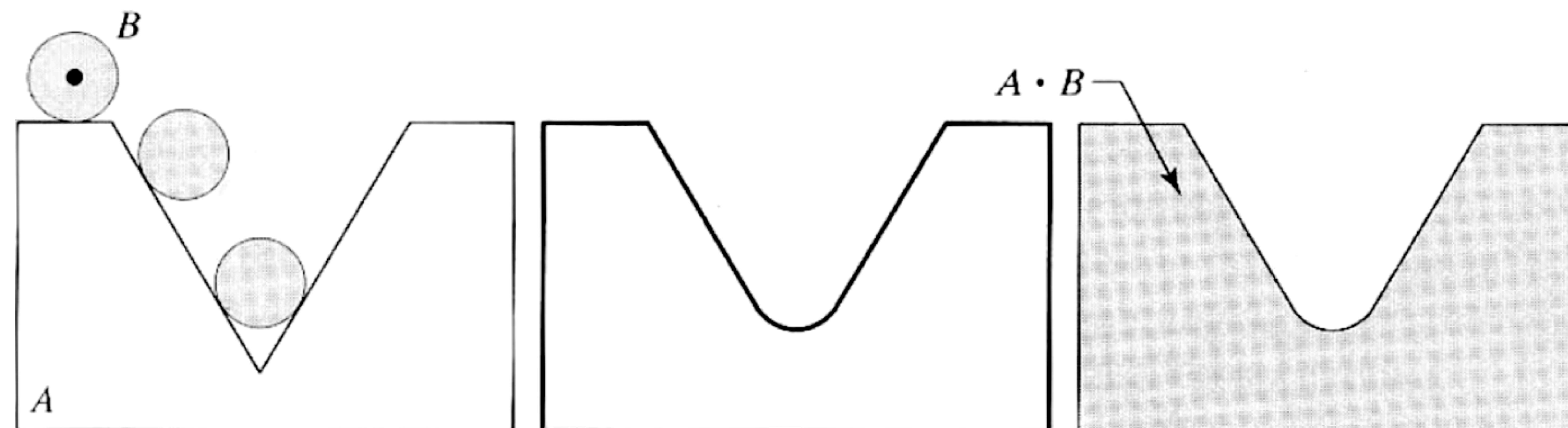


La **chiusura morfologica** è invece costituita da una dilatazione seguita da un'erosione effettuata mediante lo stesso elemento strutturante:

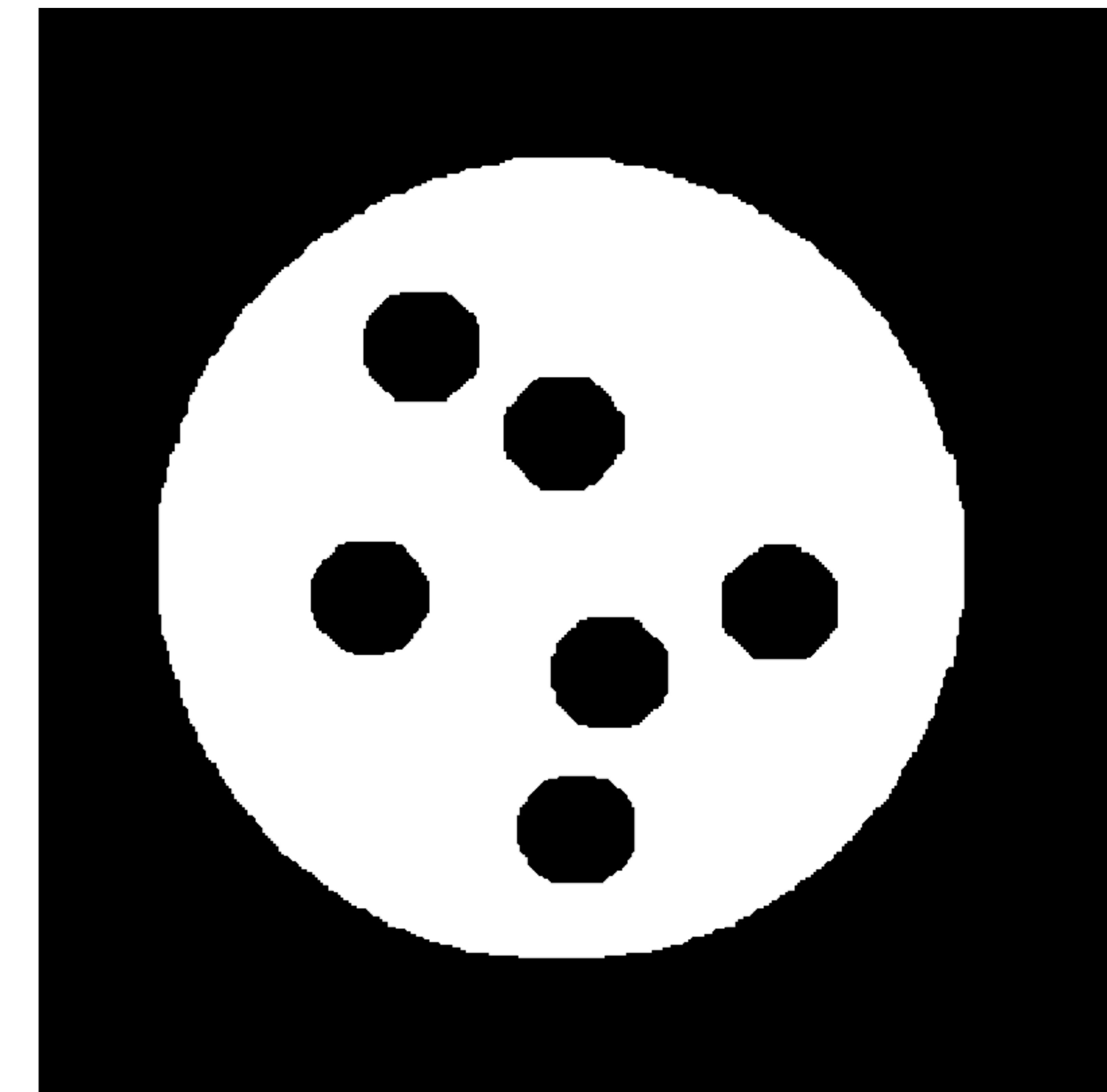
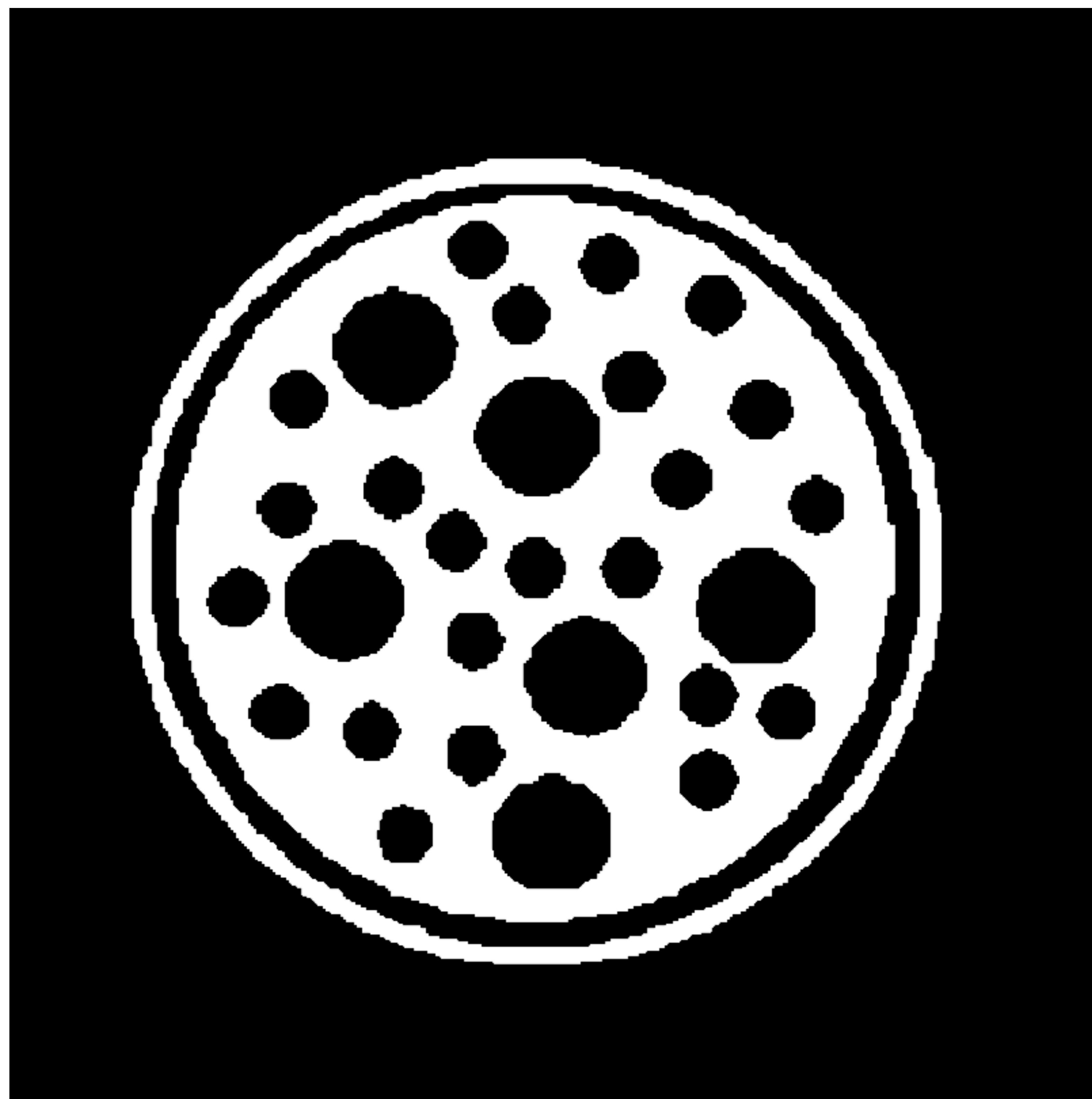
$$A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B$$

L'effetto della chiusura è speculare a quello dell'apertura: le cavità dell'immagine sono riempite in accordo all'elemento strutturante scelto.

Si tratta ancora di un filtro di **smoothing morfologico**.



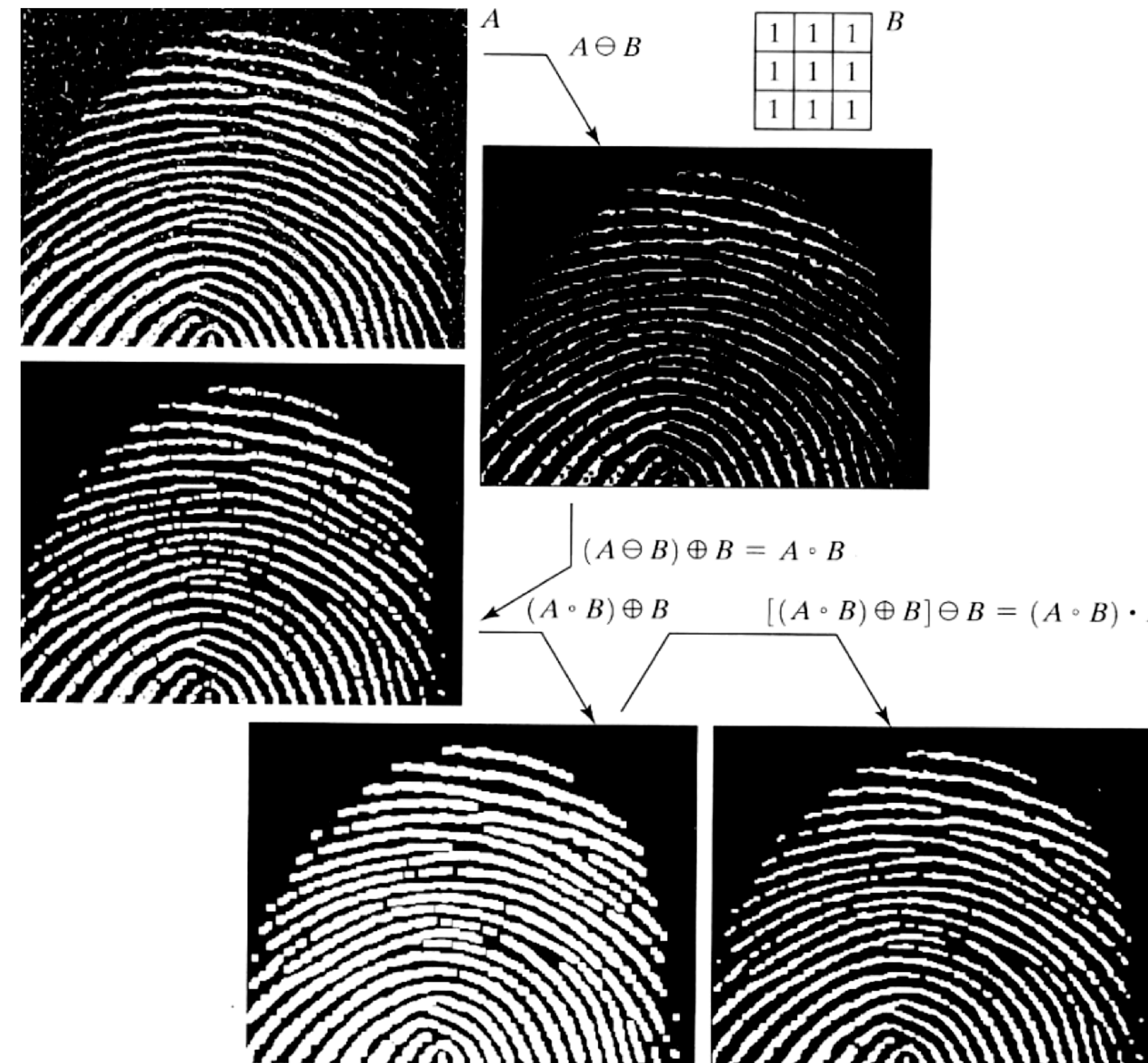
La chiusura ha un **comportamento duale** rispetto all'apertura:



L'apertura, detta anche *smoothing interno*, **regolarizza le forme, elimina le componenti connesse** di dimensioni inferiori all'elemento strutturante, conserva spesso la taglia e la forma e può alterare la topologia.

La chiusura, detta anche *smoothing esterno*, **salda le forme vicine, riempie i “buchi”** di dimensioni inferiori all'elemento strutturante, e come l'apertura conserva spesso la taglia e la forma e può alterare la topologia.

Nella prossima slide, un esempio in cui vengono applicati tutti i diversi operatori ad un'immagine di partenza.



Abbiamo analizzato solo gli operatori elementari e i loro derivati, ma ci sono altri operatori, come la **trasformazione hit-or-miss**: è un'operazione generale della morfologia binaria, usata per cercare pattern di pixel del foreground e del background, usata per il riconoscimento di forme complesse.

La combinazione di tutti gli operatori visti finora consente di eseguire numerose operazioni più complesse:

- **Estrazione dei contorni** delle forme
- **Riempimento di regioni**
- **Assottigliamento (*thinning*) e skeletonization**
- **Insessimento (*thickening*)**

E molte altre.

Con l'evoluzione delle tecniche e dei mezzi, si è arrivati anche alle operazioni morfologiche eseguite su immagini non più binarie ma in **scala di grigi**.

***Sitografia:***

[Wikipedia](#)

[Wikipedia \(English\)](#)

[Università degli studi di Napoli](#)

[Università di Bologna](#)

[Università di Catania](#)

[Robot Academy](#)

# Grazie!