4.2

TEORÍA ONDULATORIA

Ivana Rossell Turull con la colaboración de Manuel Sobreira

Directora del Máster de Acústica Arquitectónica y Medioambiental
Gerente de Ivana Rossell - Acústica
ivana@salleurl.edu/ acustica@ivanarossell.com

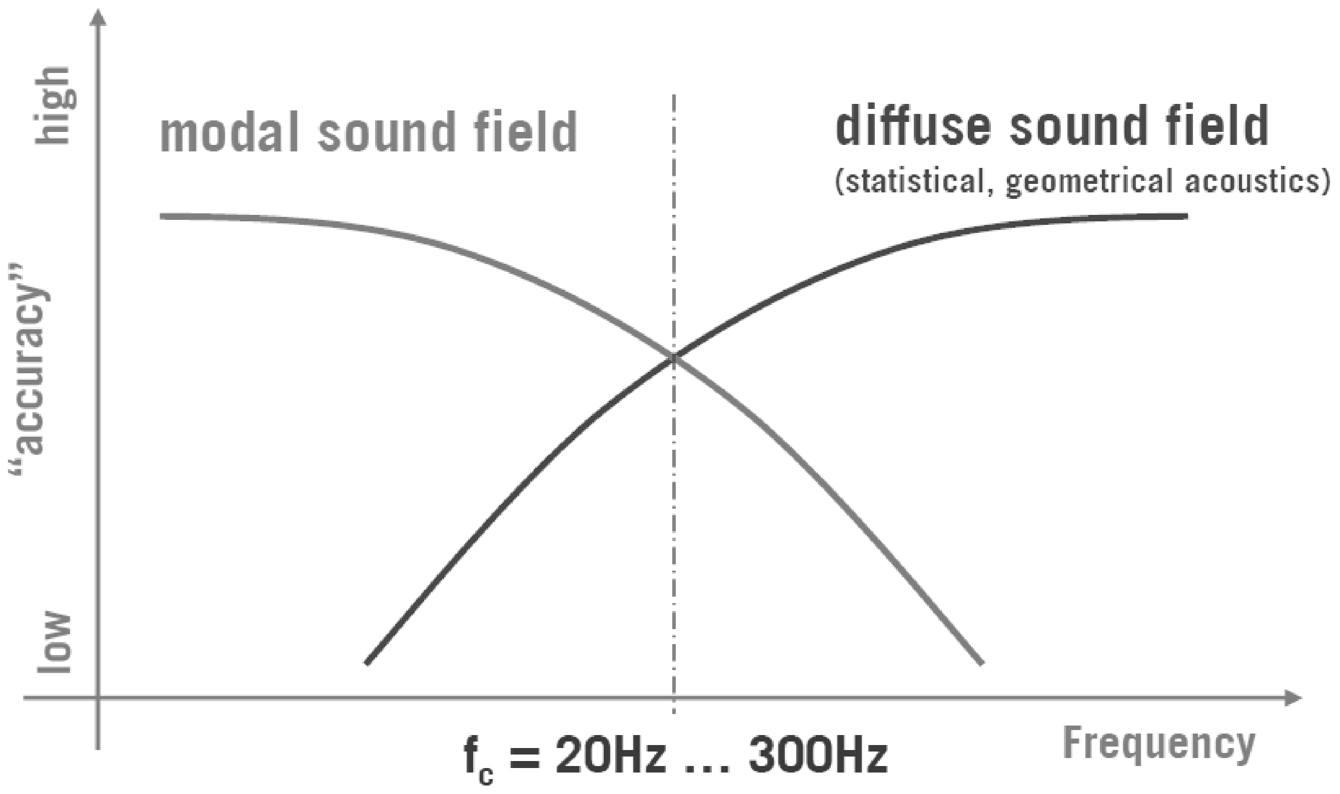
laSalle ENG
Universitat Ramon Llull

Teoría Ondulatoria

Esta teoría es la única que tiene en consideración el carácter ondulatorio de la onda sonora. Analiza la calidad acústica de una sala partiendo de la realidad física del fenómeno ondulatorio.

La Teoría Ondulatoria permite estudiar si la sala tiene algún defecto grave o algún problema acústico incapaz de detectarse a través de la Teoría Geométrica o Estadística.
Básicamente analiza las frecuencias propias de la sala (o modos propios de vibración), su distribución, densidad y sus consecuencias.

A bajas frecuencias es necesario estudiar el comportamiento modal de la salas, es decir, sus modos propios de vibración.
A media y alta frecuencia podemos suponer un campo acústico difuso y, por tanto, podemos estudiarlo a partir de la teoría estadística y geométrica:



La frecuencia de corte *fc* marca la frecuencia por debajo de la cual es necesario un estudio modal (usando la teoría ondulatoria). Para el caso de recintos de elevado volumen no hace falta este tipo de estudios (fc adquiere un valor muy bajo).

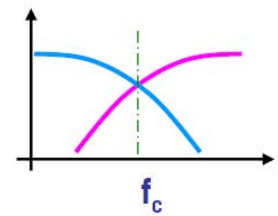
El valor de fc depende del volumen y del Tmid:

Postfinance Arena

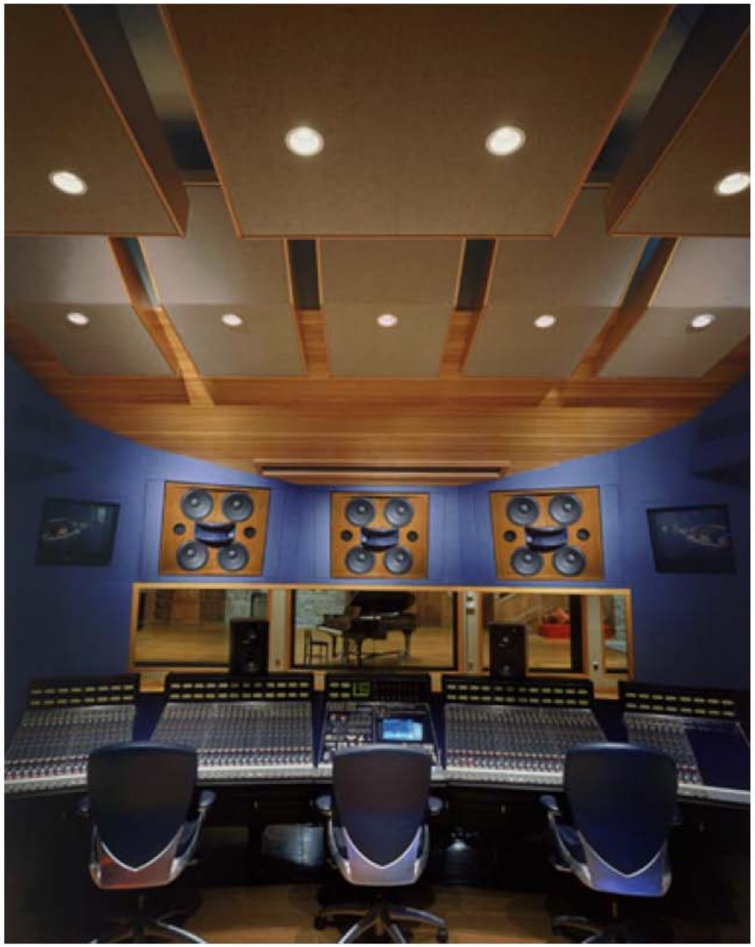
$V = 19'000\ m^3$

$T_m = 1.85\ s$

$f_c = 19.7\ Hz$

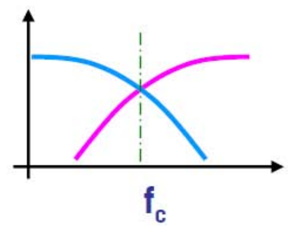


Para el caso de estudios de grabación, siempre se requerirá de un estudio modal. Por eso la aplicación de la teoría ondulatoria se suele hacer en lo que se denomina: small room acoustics.

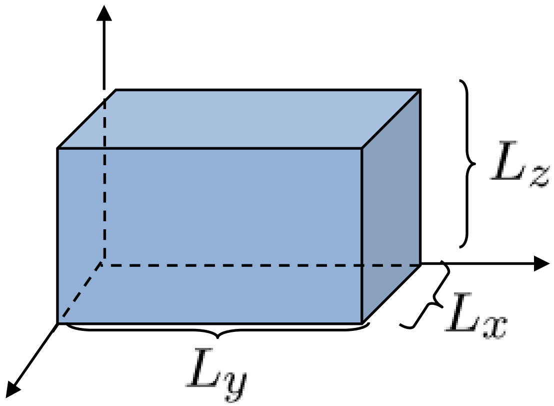


Allaire Audio Studio Control Room

$V = 167\ m^3$
$T_m = 0.34\ s$
$f_c = 90.2\ Hz$



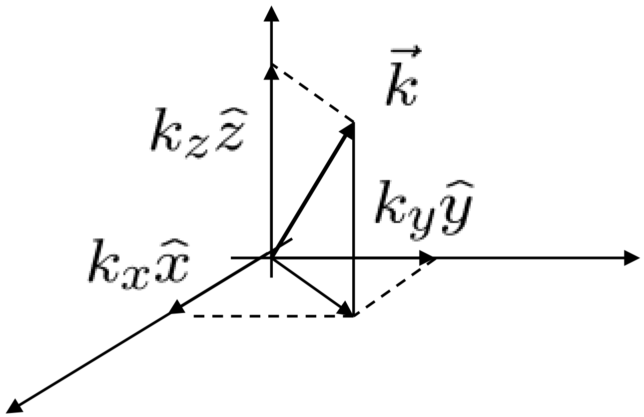
Solución de la Ecuación de Ondas en 3 Dimensiones para Salas Rectangulares (paralelepípedos)



Ecuación de Ondas para ondas armónicas (Helmholtz):

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k^2 p = 0$$



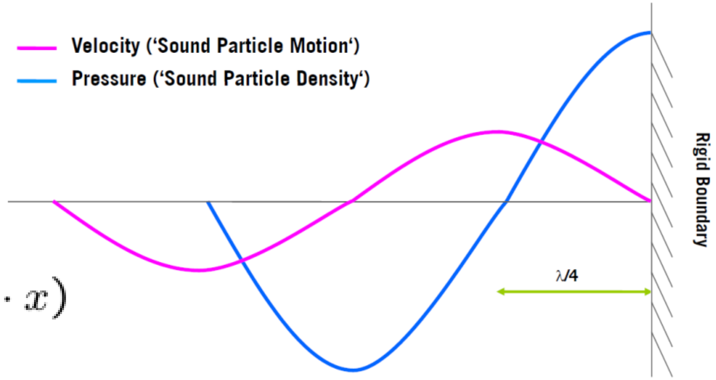
Ecuación en derivadas parciales con variables separables: equivale a resolver tres tubos perpendiculares: resolvemos cada dirección independientemente y la solución general será el producto de las tres soluciones. El vector de propagación resultantes se obtendrá de la suma vectorial de los vectores en cada una de las direcciones.

$$\vec{k} = k_x\hat{x} + k_y\hat{y} + k_z\hat{z}$$

(módulo del vector de propagación) $\longrightarrow$ $|k| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$

Solución en la dirección X:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + k_x^2 p = 0$$



Solución general: $p(x) = A_1 cos(k_x \cdot x) + B_1 sen(k_x \cdot x)$

Condiciones de contorno: $v(x=0) = 0;\ v(x = L_x) = 0$

Recordamos que: $v(x) = \frac{\partial p(x)}{x}$

Es decir, en los extremos rígidos (coeficiente de absorción prácticamente nulo), la velocidad vibratoria de las partículas tiene que ser nula. La única posibilidad para satisfacer esta condición es que la presión sonora presente un punto de tangencia horizontal (máximo o mínimo) en el contorno rígido.

Para cumplir esta condición, B_1 debe necesariamente ser nulo. $B_1=0$

La solución será por tanto: $p_x(x) = A \cdot cos(k_x\ x)$

Donde los $k_x = \frac{n_x\ \pi}{L_x};\ n_x = 0, 1, 2, 3, ...$ son los autovalores de la ecuación diferencial: números de onda para los que existe solución distinta de la trivial, *p(x)=0*.

Direcciones Y,Z

De forma análoga a la dirección x: $p_y(y) = A_y \cdot cos(k_y\ y)$

$$p_z(z) = A_z \cdot cos(k_z\ z)$$

Solucion General:

$$\boxed{p_{n_x n_y n_z}(x,y,z) = C \cdot cos(\frac{\pi\ n_x}{L_x}x) \cdot cos(\frac{\pi\ n_y}{L_y}y) \cdot cos(\frac{\pi\ n_z}{L_z}z)}$$

Que corresponde con la expresión de un modo propio propagándose en x,y,z., con el módulo del vector de propagación (número de onda):

$$|k| = k = \pi\sqrt{\left(\frac{n_x}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{L_z}\right)^2}$$

Recordando que: $k = \frac{2\pi}{\lambda}; \qquad \lambda = \frac{c}{f} \rightarrow f = \frac{c \cdot k}{2\pi}$

Obtenemos las frecuencias propias de la sala (frecuencias que cumplen la ecuación y condiciones de contorno):

$$\boxed{f_{n_x n_y n_z} = \frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{n_x}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{L_z}\right)^2}}$$

El comportamiento de la presión sonora por tanto será de la forma:

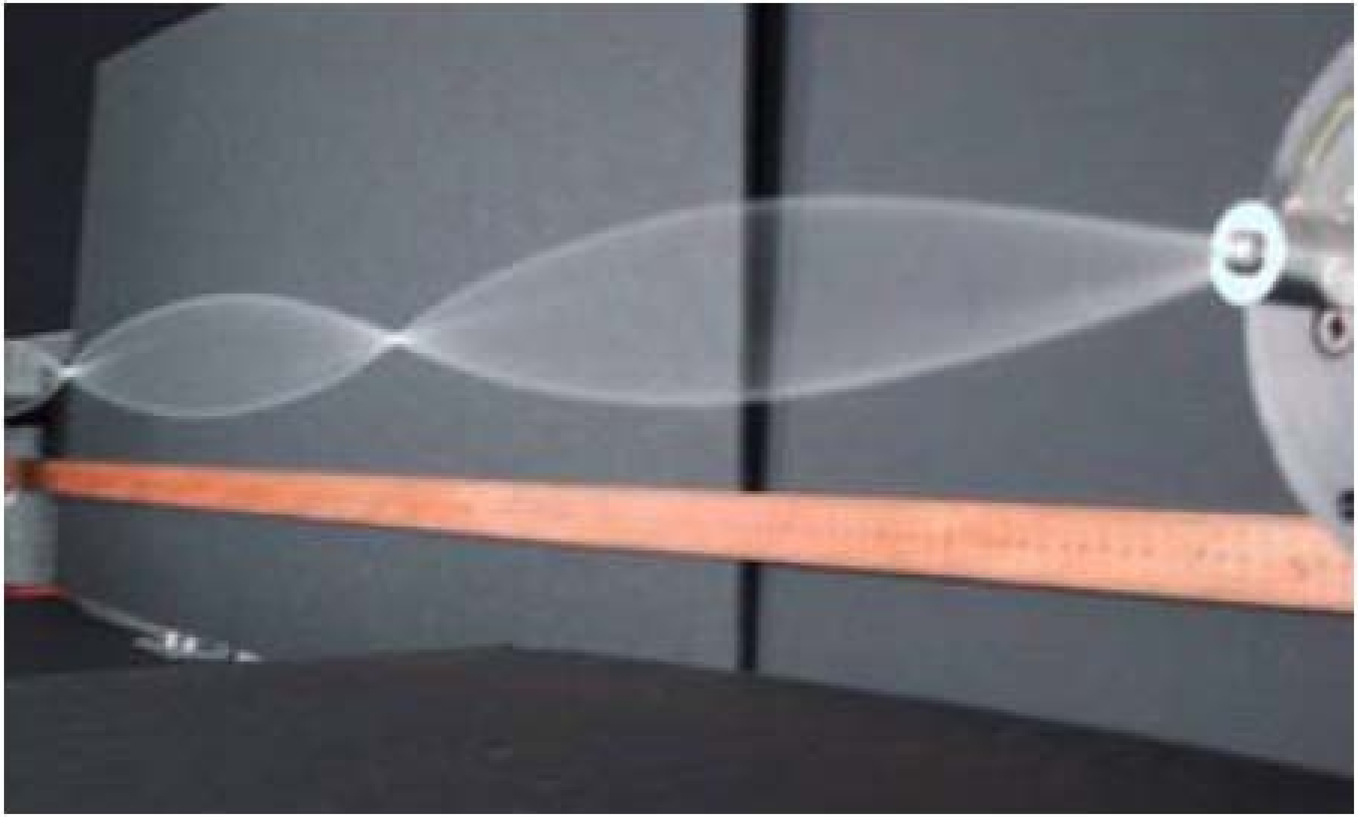
$$p_{n_x n_y n_z}(x,y,z) = C\cdot cos(\frac{\pi\ n_x}{L_x}x)\cdot cos(\frac{\pi\ n_y}{L_y}y)\cdot cos(\frac{\pi\ n_z}{L_z}z)$$

Donde C es una constante que depende de las condiciones iniciales (posición de la fuente).

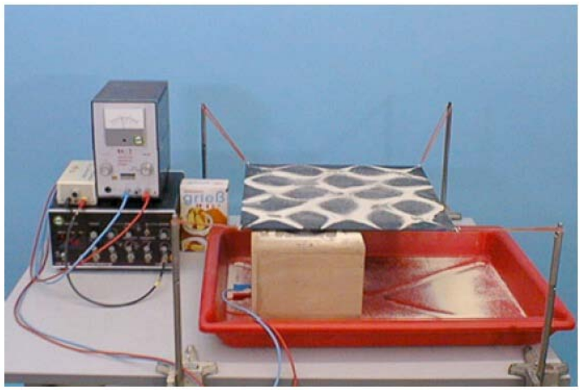
La solución completa será:

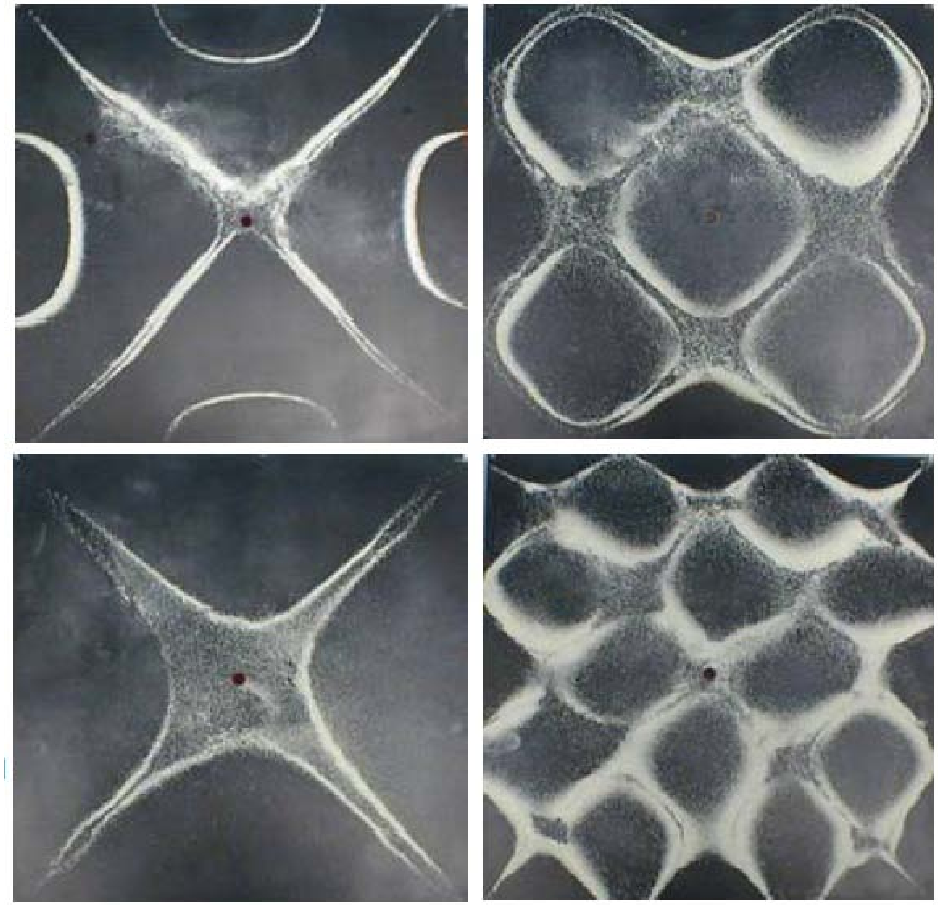
$$p_t(x,y,z) = \sum_{n_x}\sum_{n_y}\sum_{n_z} p_{n_x n_y n_z}(x,y,z)$$

Podemos representar una onda estacionaria unidimensional con la ayuda de una cuerda fija en sus extremos. La forma del modo propio de vibración puede observarse si se excitan los extremos a la frecuencia correspondiente a este modo:



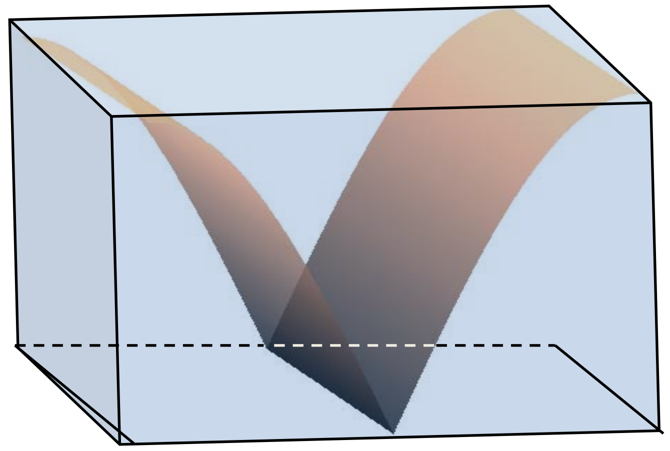
Para representar el caso en dos dimensiones nos podemos ayudar de Placa de Chladni:





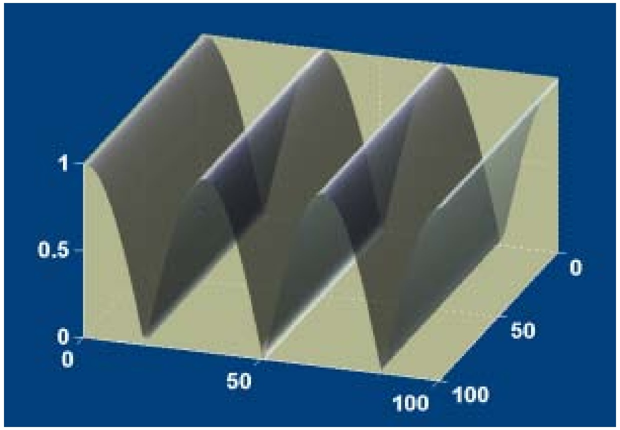
Para representar espacialmente los modos propios en salas debemos ayudarnos de representaciones informáticas

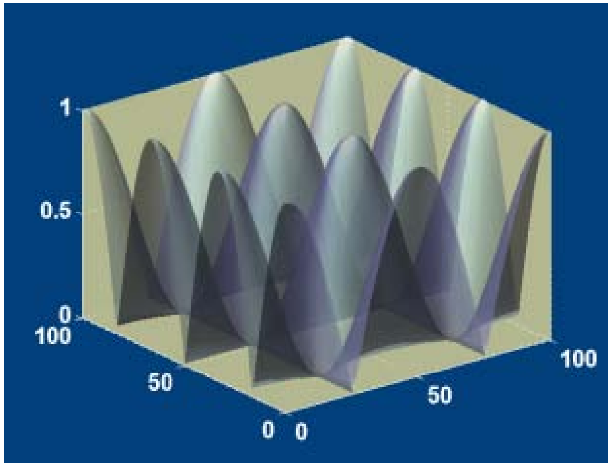
Para cada n_x, n_y, $n_{z,}$ Tendremos un modo vibratorio y su f_{res}



Modo 100

Modo Axial (3,0,0)



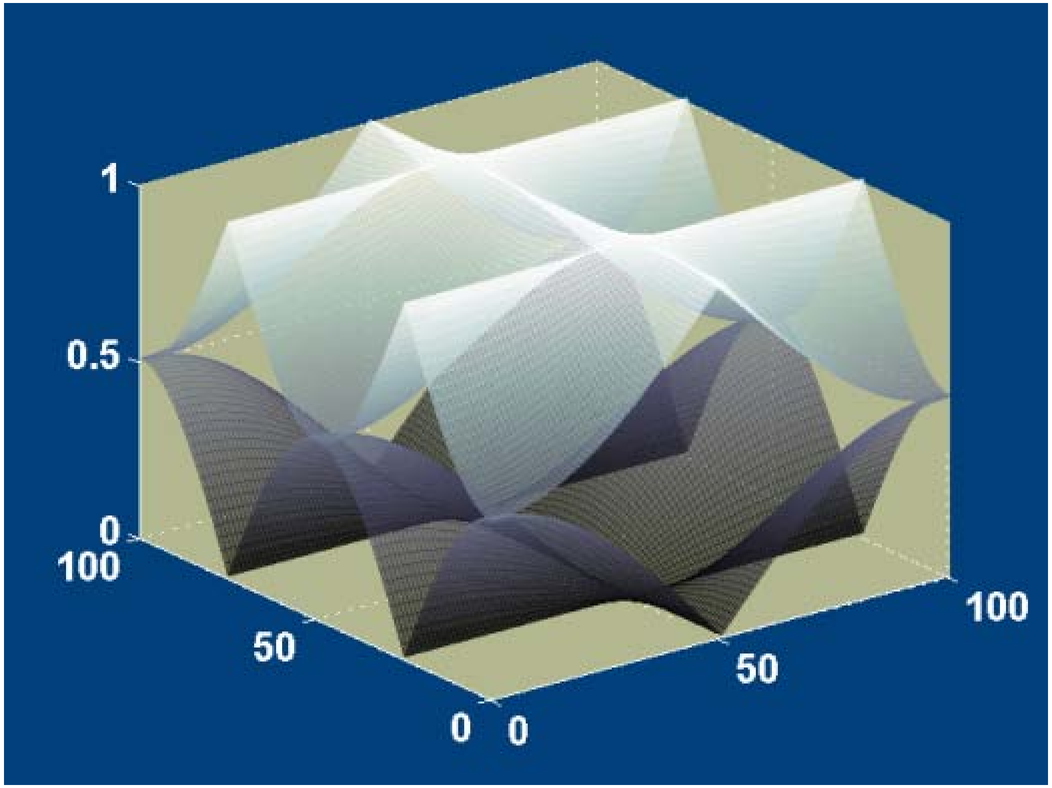


Modo Tangencial (3,2,0)

Modo axial:
se propaga siguiendo la dirección de alguno de los ejes de la sala.
Únicamente una de las n_x,n_y o n_z es distinta de 0.

Modo tagencial:
Su vector de propagación es paralelo a alguno de los planos que definen la sala. Una de las nx,ny o nz es 0.

Modos Oblícuos: Vector de propagación con las tres componentes. Implica a todos los contornos del recinto.



Modo (2,1,1)

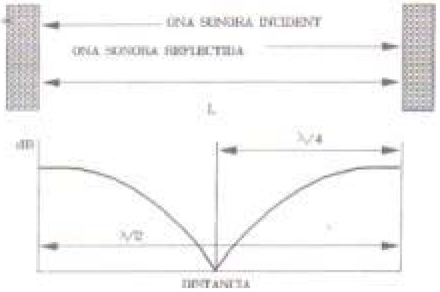
Acabamos de ver la expresión que nos proporciona todas las frecuencias propias de vibración de un espacio paralepipédo:

$$f_{n_x,n_y,n_z} = \frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{n_x}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{L_z}\right)^2}$$

Estos modos de vibración se encuentran dando valores (enteros) a n_x,n_y y n_z.
Hablaremos del modo 0,0,1 o del modo, 2,2,1 o...etc, según el valor de la n.

¿Cuál sería la frecuencia propia mínima de una sala?
Sería la correspondiente a la máxima dimensión (n=1) y el resto n=0·
Este modo de vibración equivale a la onda de longitud de onda igual a 2*L, por lo tanto, la dimensión mayor de la sala es la mitad de la longitud de onda de la frecuencia propia mínima.

$$f_{mín} = \frac{c}{2}\frac{1}{L_{\max}}$$



Respuesta en Frecuencia:

<u>Para que una sala tenga una respuesta acústica buena debe tener una buena densidad de frecuencias propias y una distribución de las mismas lo más uniforme posible, las frecuencias propias deben repartirse homogéneamente en el espectro.</u>

Podemos representar gráficamente los modos calculados, y de esta forma, apreciar si su densidad y su distribución es correcta.

Una sala cúbica (Lx=Ly=Lz), tiene una repetición de modos propios en los tres ejes, sus modos coinciden dado que sus dimensiones son iguales. Una sala de dimensiones con relaciones múltiples entre ellas, también ofrecerá coincidencia de modos propios en una misma frecuencia: esto implica acumulación de frecuencias, que supondrá una coloración en la respuesta de la sala.

Para cada modo propio, teniendo en cuenta el amortiguamiento asociado al modo, su comportamiento en frecuencia responde a la siguiente expresión:

$$p_{n_x n_y n_z} = \frac{K \cdot \omega}{\left[(4\omega_n k_n^2 + (\omega - \omega_n^2)^2 \right]^{1/2}} \cos\left(\frac{n_x \pi}{L_x} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{L_y} y\right) \cos\left(\frac{n_z \pi}{L_z} z\right)$$

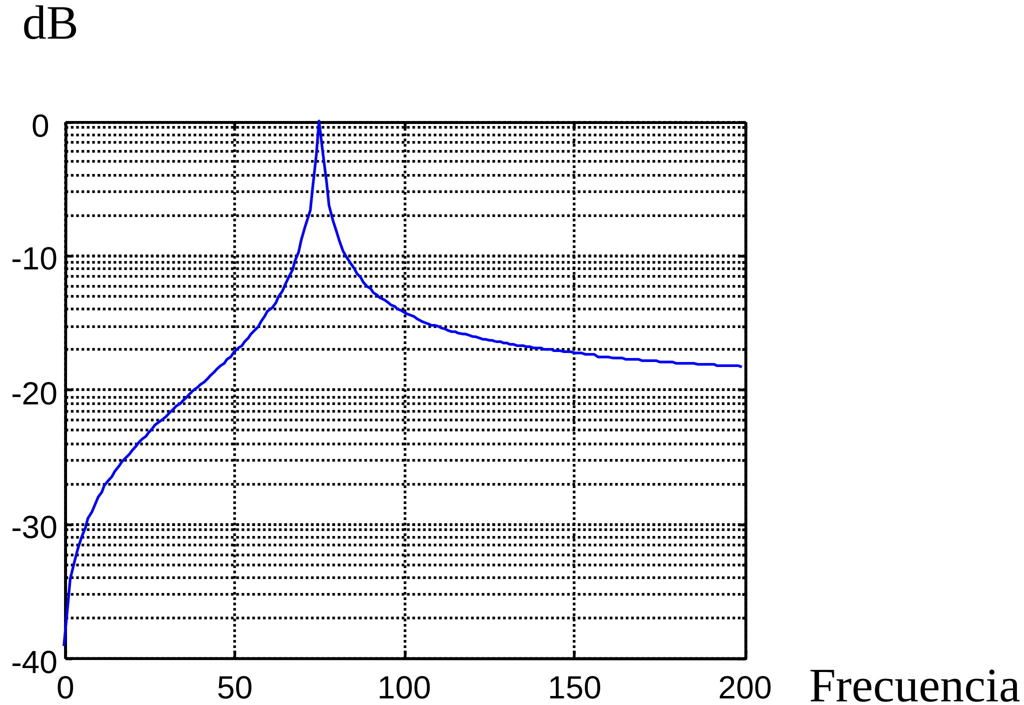
Donde K es una constante que depende de la ubicación de la fuente en el recinto:

$$K = C \cdot cos\left(\frac{n_x \pi}{L_x} x_o\right) cos\left(\frac{n_y \pi}{L_y} y_o\right) cos\left(\frac{n_z \pi}{L_z} z_o\right)$$

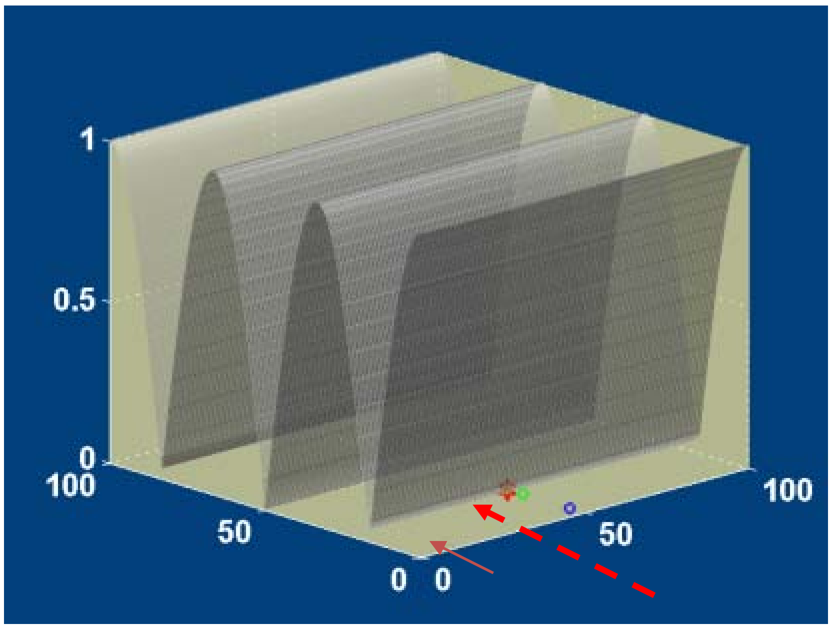
Si la fuente sonora se sitúa en el punto de coordenadas (0, 0, 0) o en cualquier otra esquina de la sala, la constante K adquiere su mayor máximo (K=C), manifestando el modo su máxima amplitud.

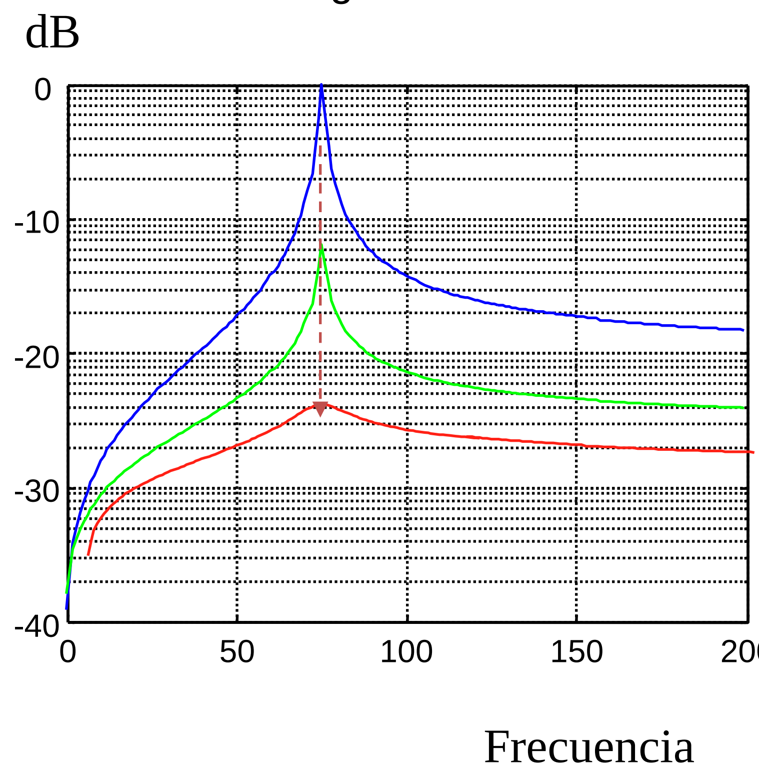
Para la posición anterior (alguna de las esquinas), representamos la ecuación:

$$p_{n_x n_y n_z} = \frac{K \cdot \omega}{\left[(4\omega_n k_n^2 + (\omega - \omega_n^2)^2\right]^{1/2}} \cos(\frac{n_x \pi}{L_x} x) \cos(\frac{n_y \pi}{L_y} y) \cos(\frac{n_z \pi}{L_z} z)$$



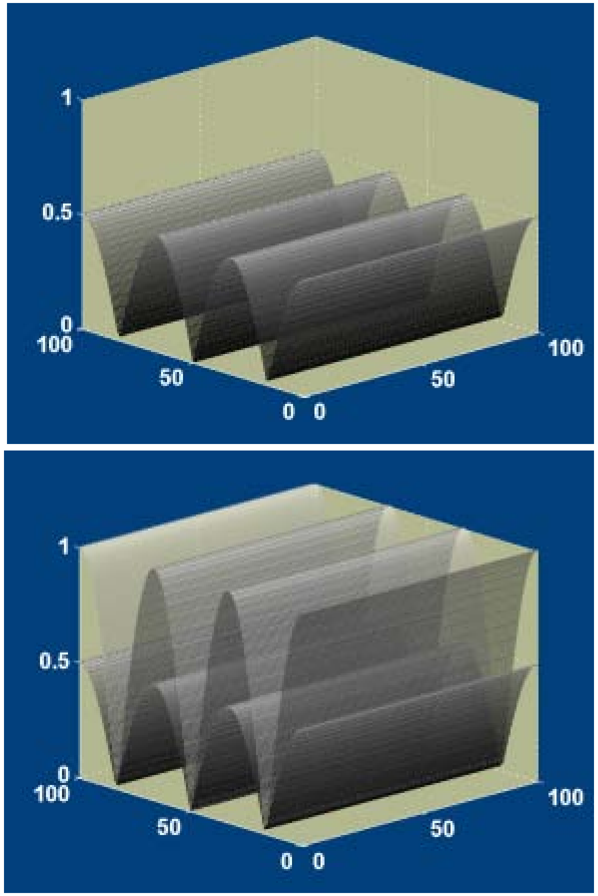
Fijando la posición de la fuente en una esquina de la sala, veremos ahora cómo observaríamos el comportamiento de un modo, en función de la posición del observador: a medida que nos alejamos de la fuente, acercándonos a un nodo (K=0 en la ecuación), el valor absoluto de la presión sonora disminuye, disminuyendo por tanto la contribución de este modo a la respuesta en frecuencia global de la sala.

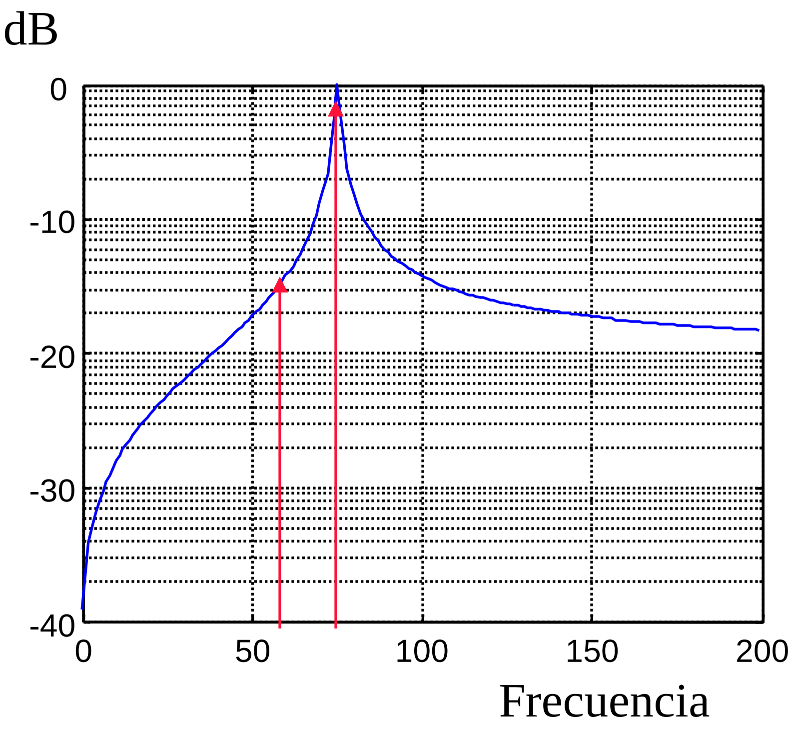




Respuesta en Frecuencia

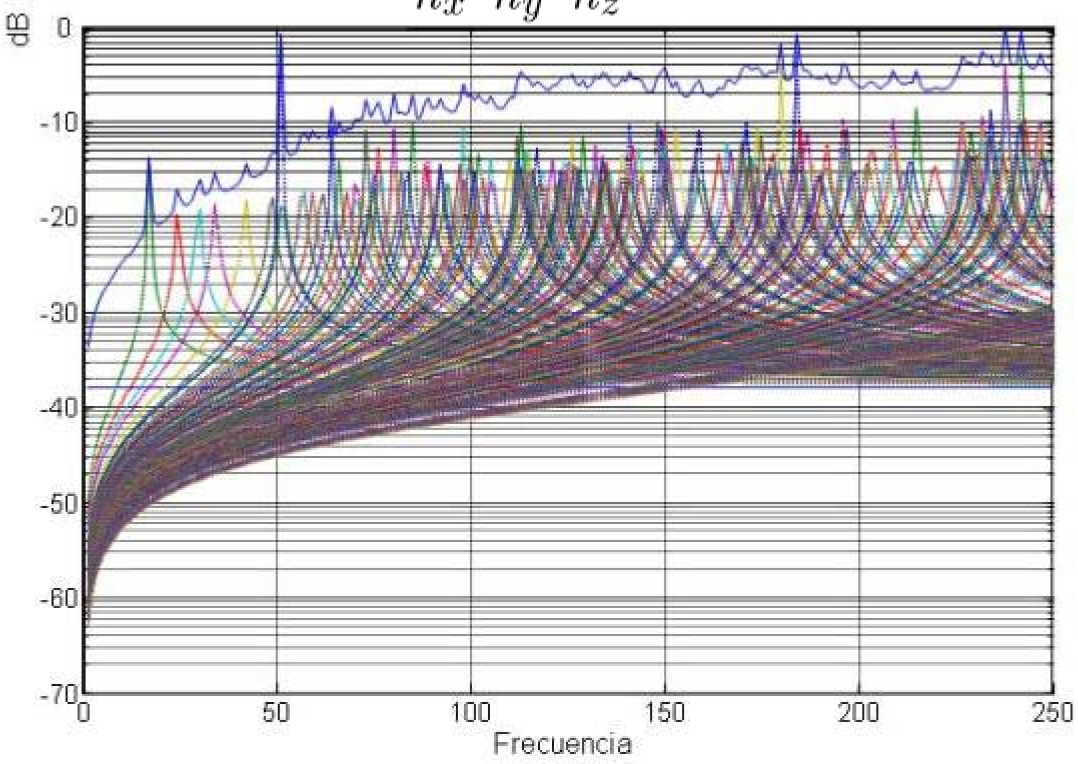
Para dos frecuencias diferentes, una correspondiente a la frecuencia de resonancia y otra próxima, el modo responderá con mayor amplitud en el segundo caso.





Finalmente, la solución completa se obtiene aplicando el sumatorio que ya conocíamos:

$$p_t(x,y,z) = \sum_{n_x}\sum_{n_y}\sum_{n_z} p_{n_x n_y n_z}(x,y,z)$$



Ejemplo: Respuesta en Frecuencia

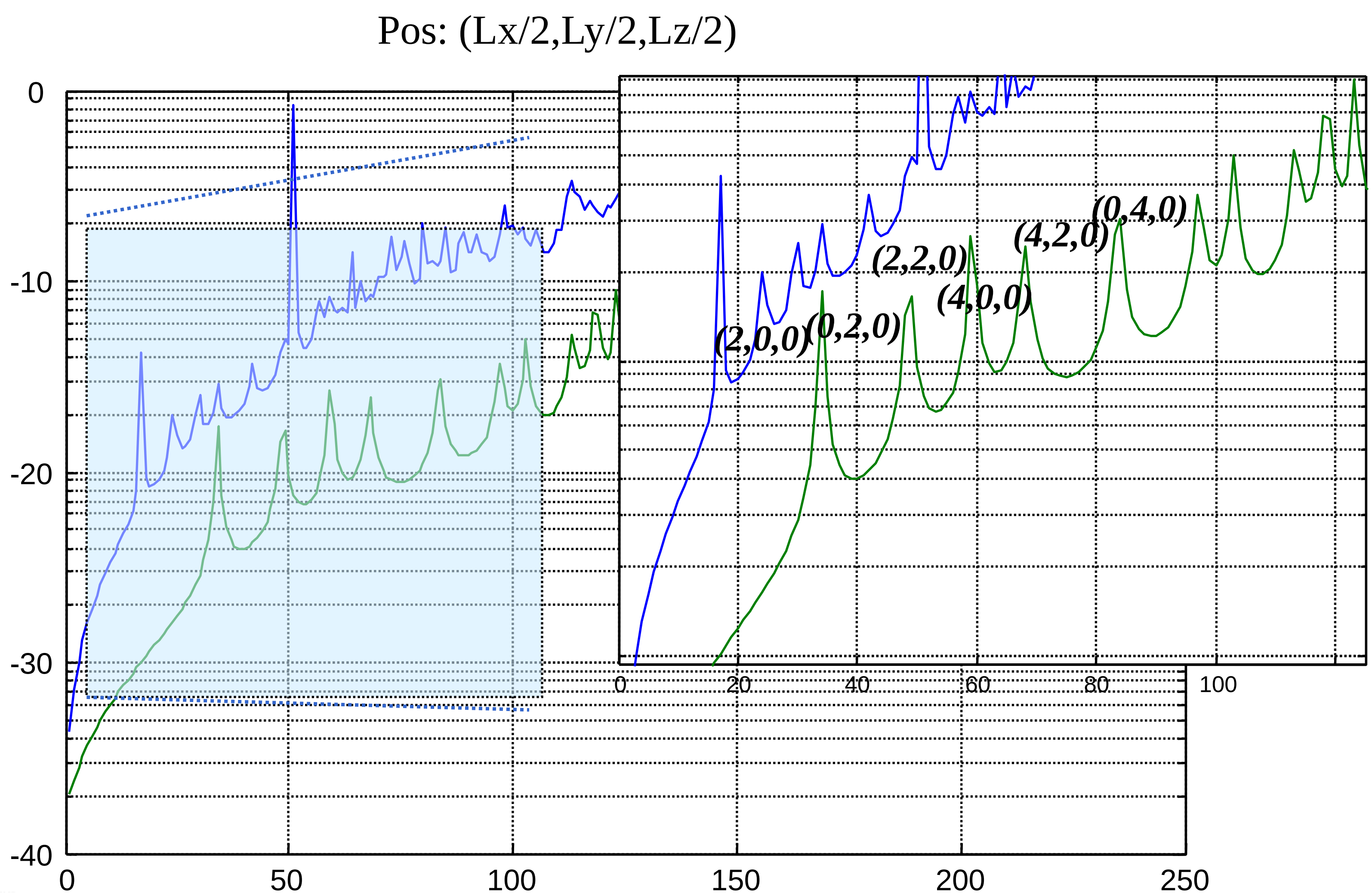
Calculamos la respuesta de una sala de dimensiones:
Lx=10 m, Ly=7 m ; Lz=3m
En la posición de escucha:
Lx/2, Ly/2, Lz/2.

Claramente, todos los modos con n_x, n_y o n_z impar no contribuirán a la respuesta en frecuencia, ya que el producto de cosenos resultante es nulo.

Del conjunto de modos de la tabla, únicamente los marcados contribuirán a la respuesta en frecuencia. *En la siguiente transparencia, la figura indica cómo queda la respuesta (línea verde) frente a la respuesta posible de la sala (todos los modos propios actuando).*

f	nx	ny	nz
17.00	1	0	0
24.29	0	1	0
29.64	1	1	0
34.00	**2**	**0**	**0**
41.78	2	1	0
48.57	**0**	**2**	**0**
51.00	3	0	0
51.46	1	2	0
56.49	3	1	0
56.67	0	0	1
59.16	1	0	1
59.29	**2**	**2**	**0**
61.65	0	1	1
63.95	1	1	1
66.08	2	0	1

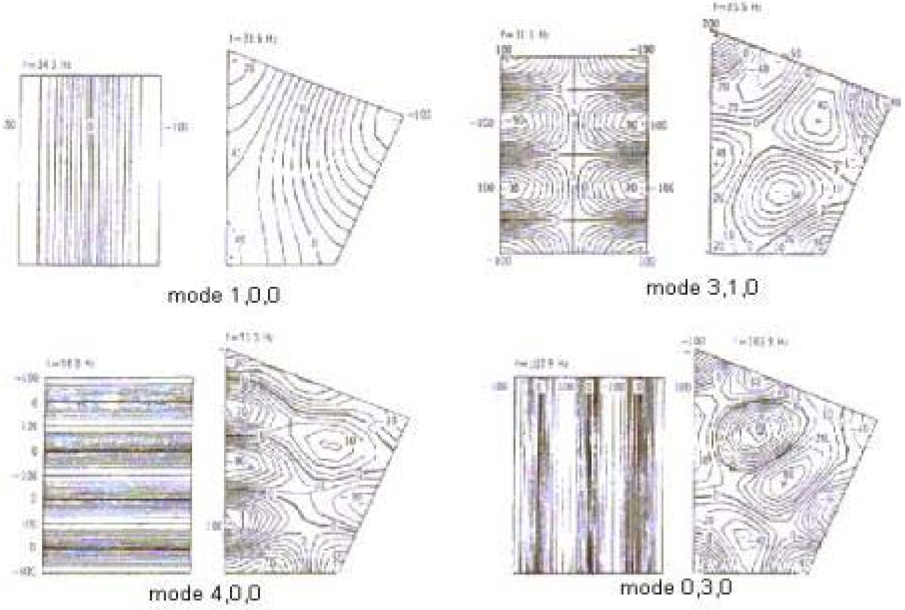
Ejemplo Respuesta en Frecuencia

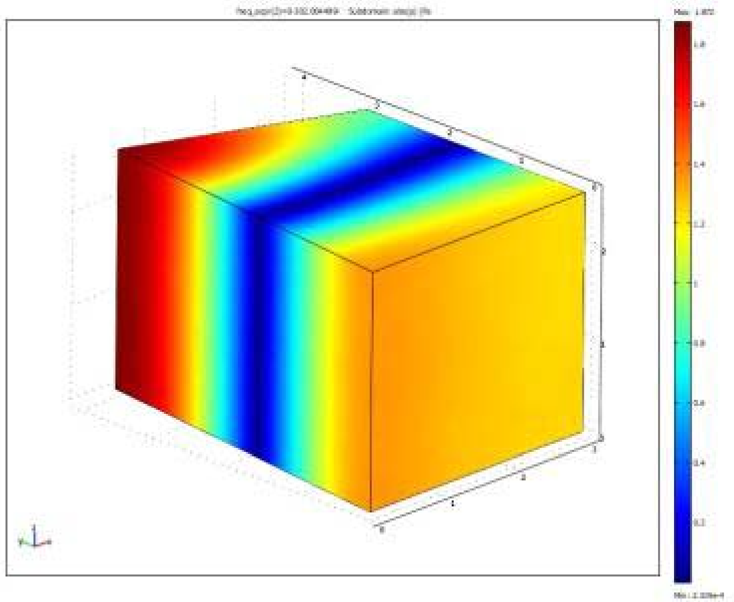


Salas no rectangulares:

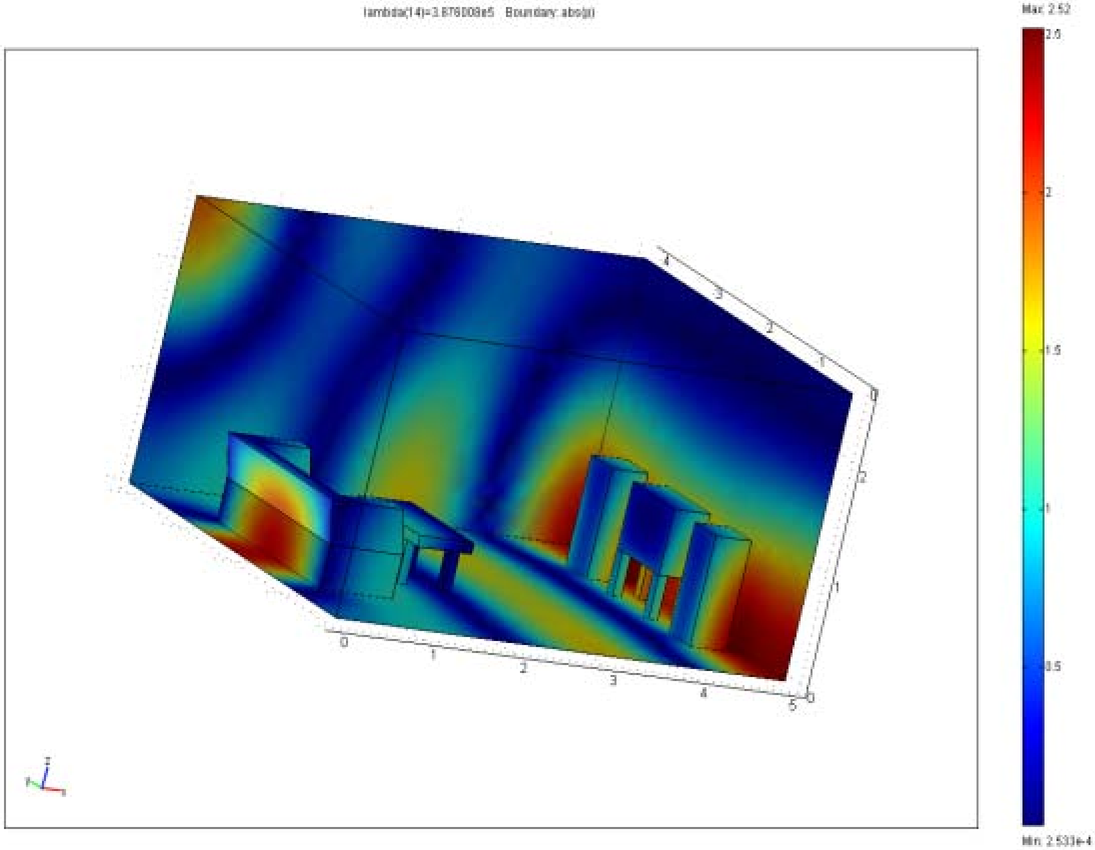
El cálculo de los modos propios en caso de salas irregulares es complicado. Se puede obtener la respuesta utilizando métodos numéricos (FEM/BEM)

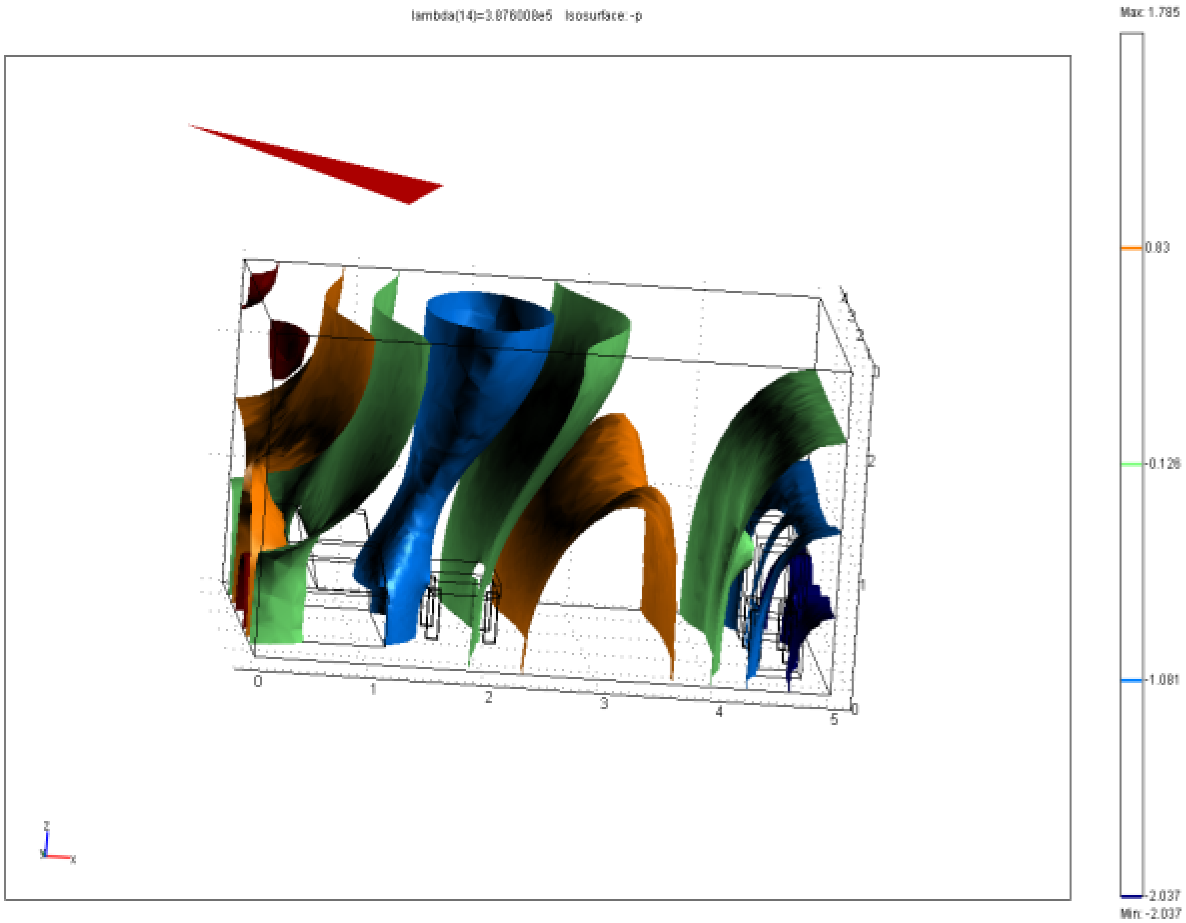
Su distribución es, en términos generales mejor. No refuerzan tanto los modos axiales, que son los más potentes y "peligrosos".





El mobiliario y obstáculos influyen en el comportamiento de las salas:




lambda(14)=3.876008e5 Isosurface: -p
Max: 1.785
0.83
-0.126
-1.081
-2.037
Min: -2.037
0
1
2
3
4
5

Número de frecuencias propias de un recinto paralelepípedo:

¿Cómo contamos los modos para comprobar si su densidad es adecuada?

Número de modos axiales hasta una frecuencia f_n:

$$N_a = \frac{L}{2 \cdot c} f_n$$

$(N_{ax},0,0)$ / $(0,N_{ay},0)$ / $(0,0,N_{az})$

L= perímetro de la sala (4*(Lx+Ly+Lz)

Número de modos tangenciales hasta una frecuencia f_n :

$$N_t = \frac{\pi \cdot A}{2c^2} f_n^2 - \frac{L}{2c} f_n$$

(N,N,0) / (N,0,N) / (0,N,N)

A= Área de la sala

Número de modos oblicuos hasta una frecuencia f_n :

$$N_{ob} = \frac{4\pi V}{3c^3} f_n^3 - \frac{\pi A}{4c^2} f_n^2 + \frac{L}{8c} f_n$$

(N_x,N_y,N_z)

V= Volumen de la sala

Número total de modos propios hasta una frecuencia f_n :

$$N = \frac{4\pi V}{3c^3} f_n^3 + \frac{\pi A}{4c^2} f_n^2 + \frac{L}{8c} f_n$$

(f_n es la frecuencia final hasta la cual se contabilizan los modos)

Cálculo del número de modos propios dentro de una banda frecuencial

Número de modos axiales: $$\Delta N_a = \frac{L}{2 \cdot c} \Delta f_n$$

Número de modos tangenciales: $$\Delta N_t = \left[\frac{\pi \cdot A}{2c^2} f_n - \frac{L}{2c} \right] \Delta f_n$$

Número de modos oblicuos: $$\Delta N_{ob} = \left[\frac{4\pi V}{3c^3} f_n^2 - \frac{\pi A}{2c^2} f_n + \frac{L}{8c} \right] \Delta f_n$$

Número total de modos propios: $$\Delta N = \left[\frac{4\pi V}{3c^3} f_n^2 + \frac{\pi A}{2c^2} f_n + \frac{L}{8c} \right] \Delta f_n$$

(f_n es la frecuencia central de la banda, Δf_n es el ancho de banda analizado)

Ejemplo numérico:

Calcular el número de modos propios dentro de la banda de 80 a 100Hz de un recinto paralelepípedo de dimensiones 8·5·3:

$$V = 120m^3$$

$$A = 158m^2$$

$$L = 64m$$

$$f_n = \frac{f_1 + f_2}{2} = 90Hz$$

$$\Delta f_n = f_2 - f_1 = 20Hz$$

$$\Delta N = \left[\frac{4\pi V}{3c^3} f_n^{\,2} + \frac{\pi A}{2c^2} f_n + \frac{L}{8c} \right] \Delta f_n = 10$$

Para asegurar un campo uniforme en la sala el número de frecuencias propias debe ser suficiente y su distribución uniforme.
¿Cómo valoramos la densidad calculada?

La sala debe tener un volumen mínimo para asegurar que en la banda frecuencial más baja el nº de modos propios sea el suficiente .

<u>CRITERIOS DE DENSIDAD</u>

Uno de los criterios más restrictivos es el de **Morse & Ingard** que exige 10 modos propios cada 10 Hz. Esto, según el volumen de la sala y para muy baja frecuencia es imposible, pero nos da una idea de cuando la densidad empieza a estar bien.

CRITERIO DE BONELLO:
Se calculan cuantos modos hay, por cada tercio de octava y se traza una curva que da el número de modos por tercio. La curva, para ser correcta debe ser monótonamente creciente, pero como solo se toman 48 modos hay una frecuencia a partir de la cual comienza a caer. Se realiza el análisis hasta esa frecuencia.

Condiciones que debe cumplir una buena sala:
1º La subida deber ser monótonamente creciente, o, a lo sumo, tener la misma cantidad de modos en dos tercios de octava consecutiva.
2º No deben existir modos dobles (dos frecuencias iguales) o si existen solo se tolera en tercios de octava de densidad mayor que 5).

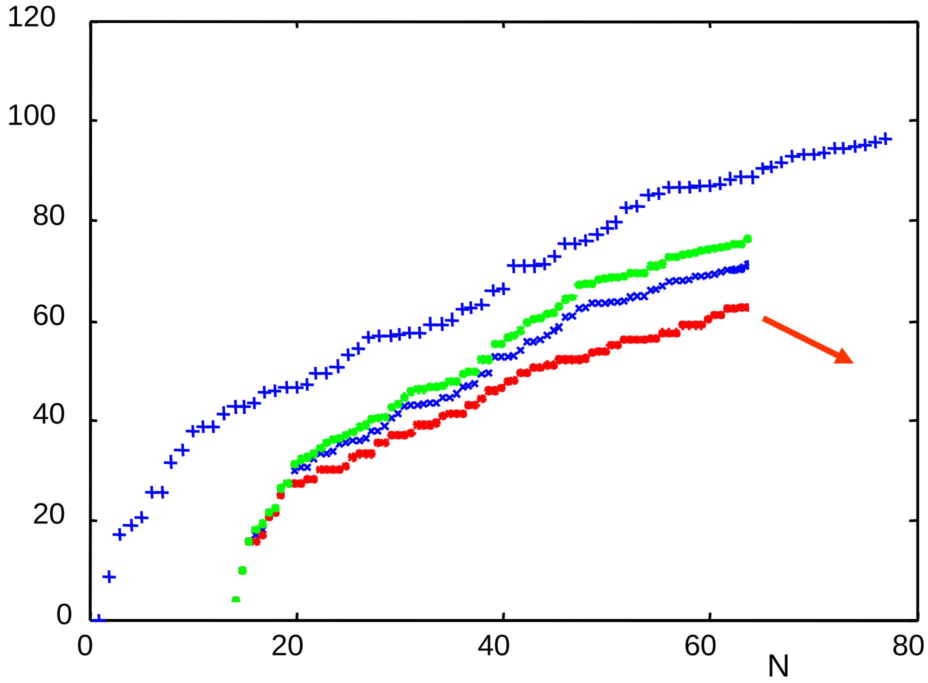
CRITERIOS DE DISTRIBUCION

Deben evitarse las concentraciones de modos propios. Debe evitarse que las dimensiones de la sala sean iguales o que guarden relaciones enteras.

Existen diferentes recomendaciones sobre las proporciones entre las dimensiones del recinto, todas se normalizan a una dimensión (generalmente L_z). Las recomendaciones se basan en los ratios recomendados que se obtienen al dividir las dimensiones entre la altura, generalmente. (aplicable en salas rectangulares).

Volumen (m^3)	L_x	L_y	L_z
40-250	1	1.6	1.25
250-900	1	2.5	1.6
900-2500	1	3.2	2.5
>2500	1	3.2	1.25

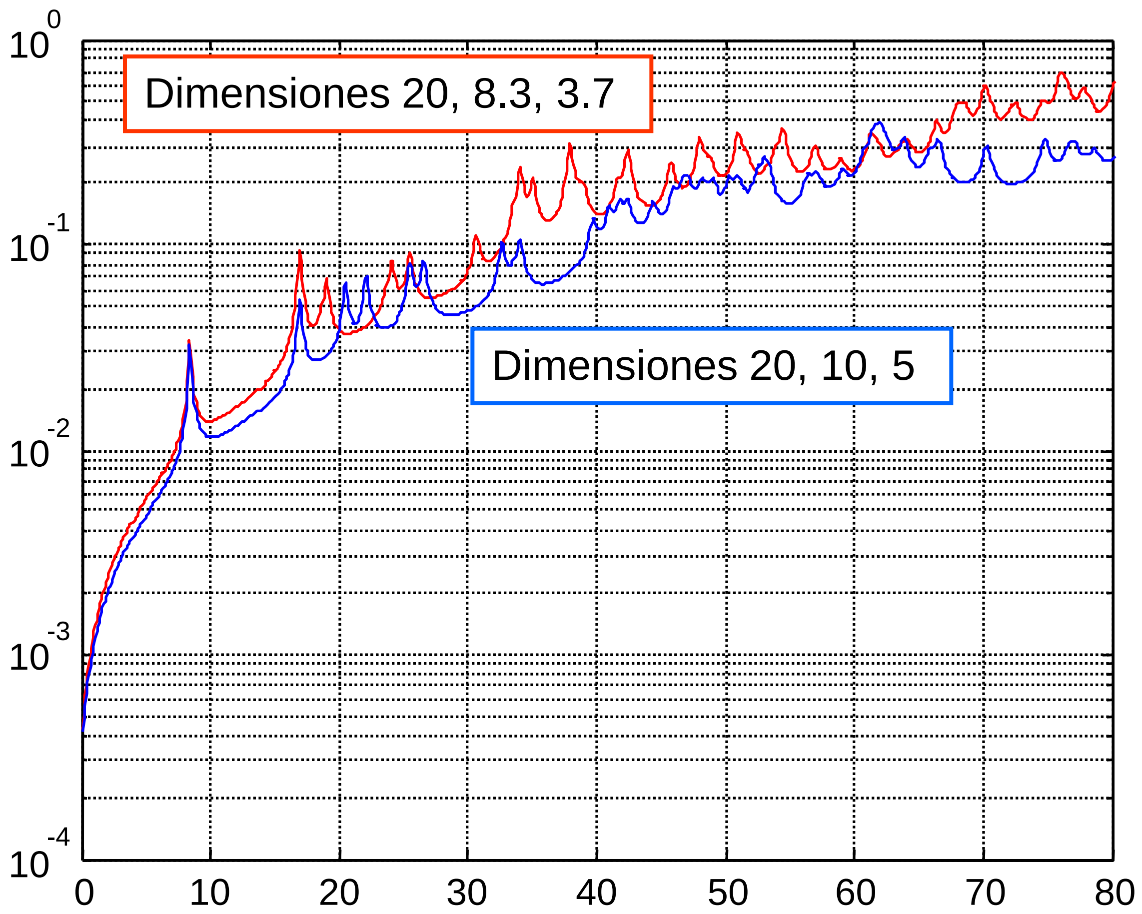
Representando las frecuencias de resonancia frente el orden de aparición del modo (eje x, 0..N) obtenemos una gráfica como la de la figura. Si hay varias frecuencias coincidentes, la pendiente será nula y la gráfica será escalonada. Cuanto más uniforme sea la gráfica, mejor será la respuesta en frecuencia (menso coloración en baja frecuencia).



Dimensiones 20, 8.3, 3.7

Dimensiones 20, 9, 4

Dimensiones 20, 10, 5

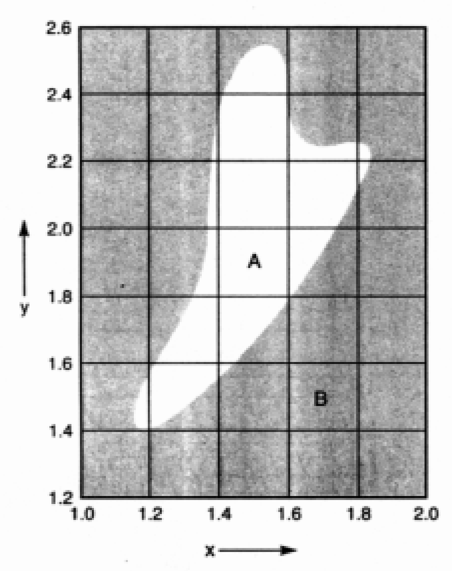


Dimensiones 20, 8.3, 3.7
Dimensiones 20, 10, 5
10^{0}
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
0
10
20
30
40
50
60
70
80

-La conocida como **"<u>regla de oro</u>"** relaciona las dimensiones del recinto con las proporciones: **5:3:2** (proporciones áureas)

-Otra recomendación la dan las relaciones: $\mathbf{1:2^{1/3}:4^{1/3}}$

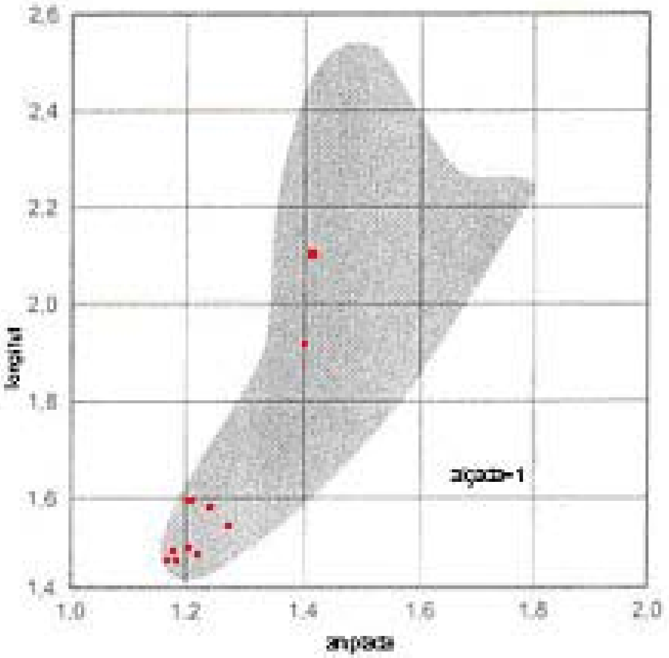
-El **Diagrama de Bolt** es otra referencia para fijar el dimensionado correcto de la sala desde el punto de vista ondulatorio (es un poco permisivo):



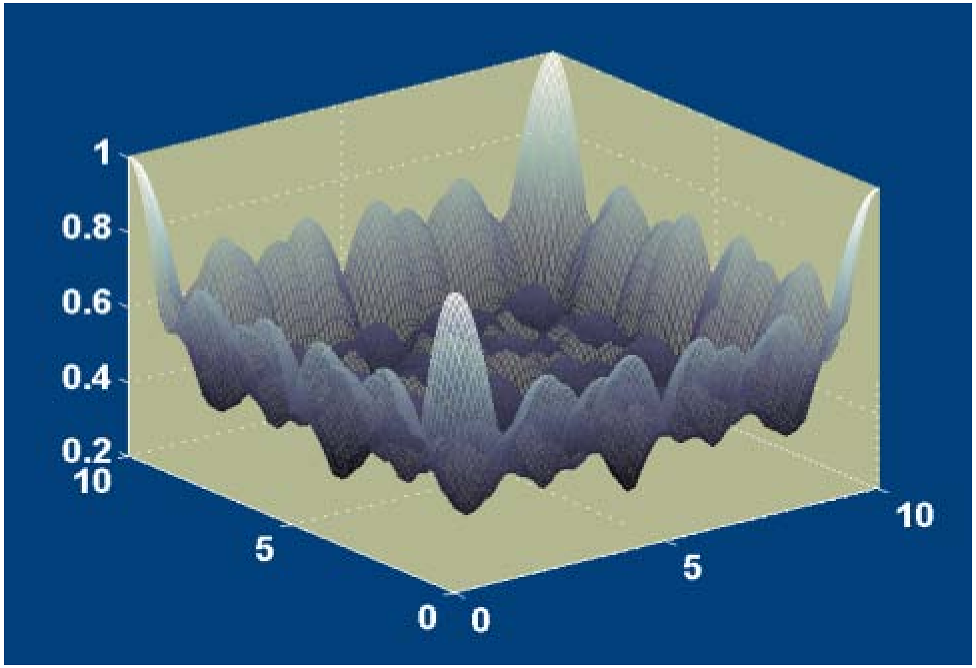
Este diagrama está normalizado a una dimensión que se toma de referencia (z). La zona dentro del área llamada A marca las dimensiones que aportan los requisitos para una buena distribución y densidad de frecuencias propias.

Resumen de teorías para determinar las relaciones idóneas entre las dimensiones de una sala rectangular y representación de las teorías dentro del diagrama de Bolt (el más permisivo):

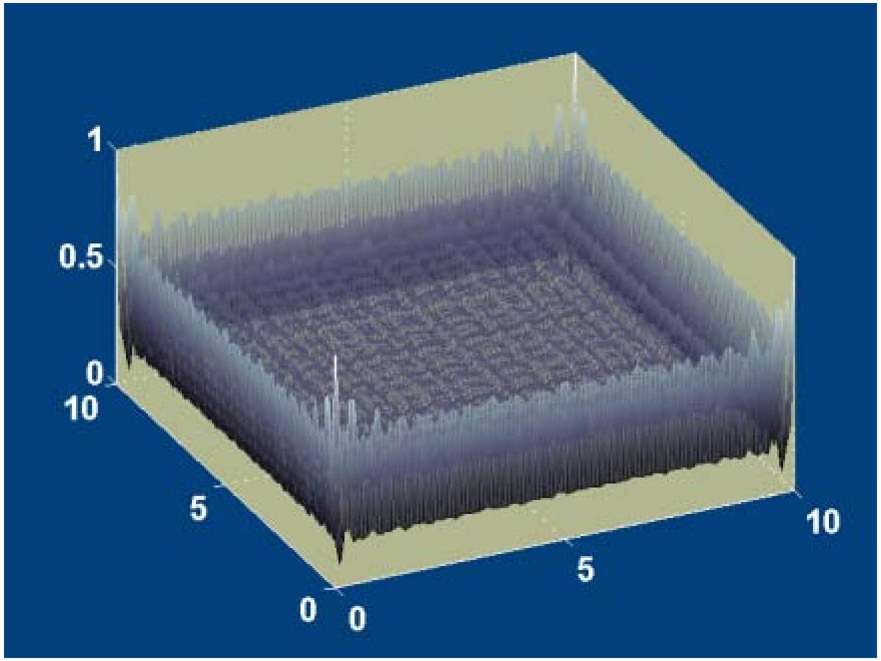
ASHRAE:	1 : 1.17 : 1.47 1 : 1.45 : 2.10
Bolt:	1 : 1.28 : 1.54
IAC:	1 : 1.25 : 1.60
Sepmeyer:	1 : 1.14 : 1.41
Regla de oro:	1 : 1.26 : 1.41
Pujolle	1: 1.202: 1.435 1: 1.404: 1.863
Boner	1: 1.26: 1.59
Otras teorías	1: 1.259: 1.387 1: 1.202: 1.59



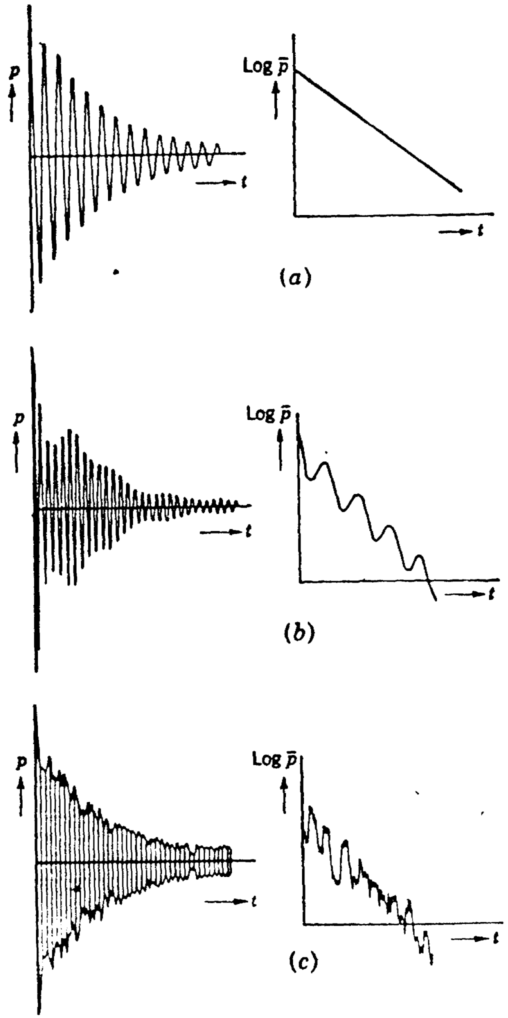
Representando qué ocurre con la distribución de la presión sonora en la sala, podemos observar que en baja frecuencia (poca densidad modal), la presión sonora no es uniforme. Además observamos cómo la presión tiende a ser mayor en la proximidad de las paredes y el máximo se aprecia en las esquinas de la sala. Esta es la razón por la cual las normas de medida de presión sonora en interiores recomiendan alejarse más de 1 m de las paredes (a 100 Hz, $\lambda/4=0.85$ m). La figura representa la composición de 10 modos.



Para altas densidades modales y alta frecuencia, la presión sonora según la teoría ondulatoria tiende a ser uniforme en la sala, excepto en puntos muy próximos a las superficies reflectantes. La figura representa la composición de 100 modos.

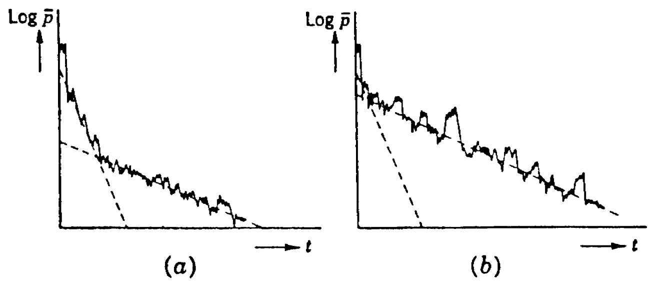


TIEMPO DE REVERBERACIÓN Y TEORÍA ONDULATORIA



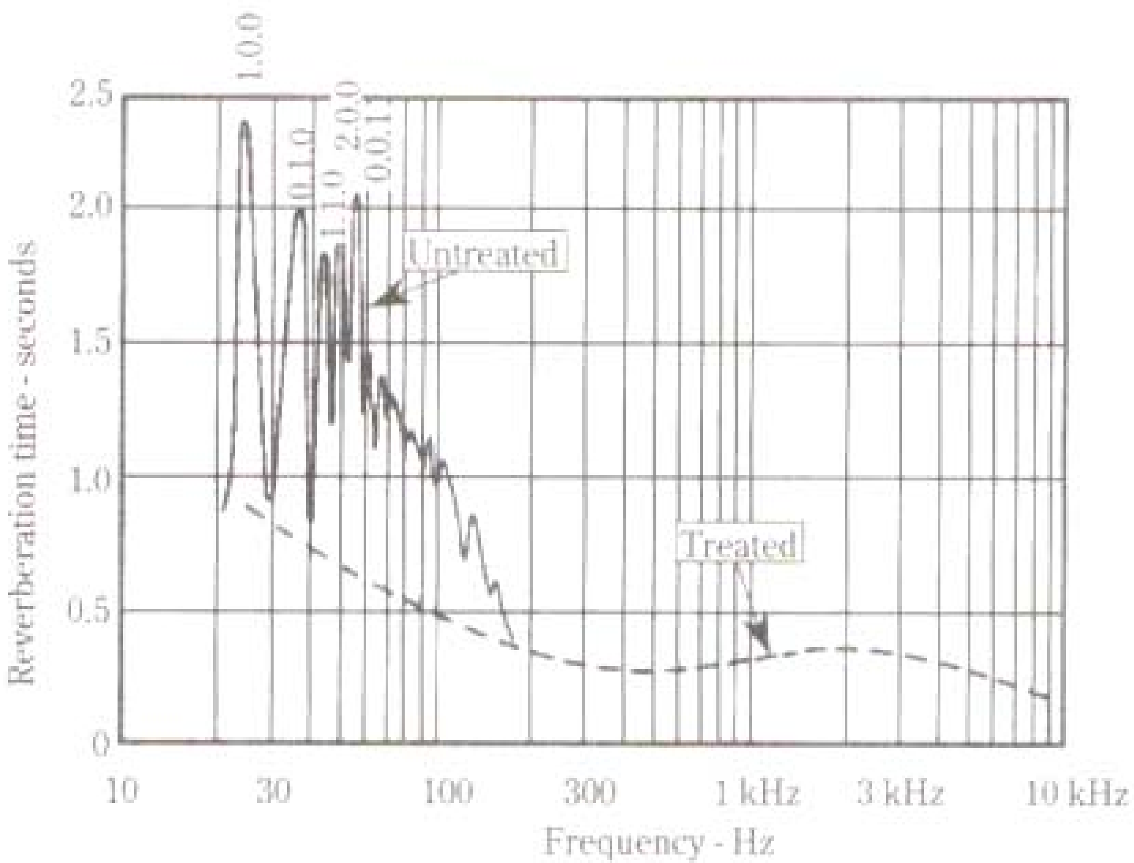
Una fuente acústica al radiar energía en el interior de un recinto genera primero un régimen transitorio que se extingue rápidamente para dar lugar a un régimen permanente que estabiliza las vibraciones forzadas y los modos normales de vibración en la sala. Cuando se desconecta la fuente acústica, el sistema pierde el equilibrio que tenía; las frecuencias propias de la sala se mantienen más tiempo que el resto de frecuencias que van disminuyendo gradualmente, siguiendo una ley exponencial.

Cuando se excitan varios modos propios, estos se quedan "danzando" en la sala provocando caídas de energía no exponenciales, sino parecidas a las gráficas b y c.
Esto ocurre cuando la sala tiene unas frecuencias propias aisladas, coincidentes, y poco tratamiento acústico a esas frecuencias.



También es posible que cada modo tenga su propia constante de decrecimiento, según la posición del material absorbente del recinto. En estos casos el nivel de presión decrece con un cambio de pendiente, como puede verse en la gráfica mostrada.

Coloración de una sala debido a la acumulación de modos propios en determinadas frecuencias:



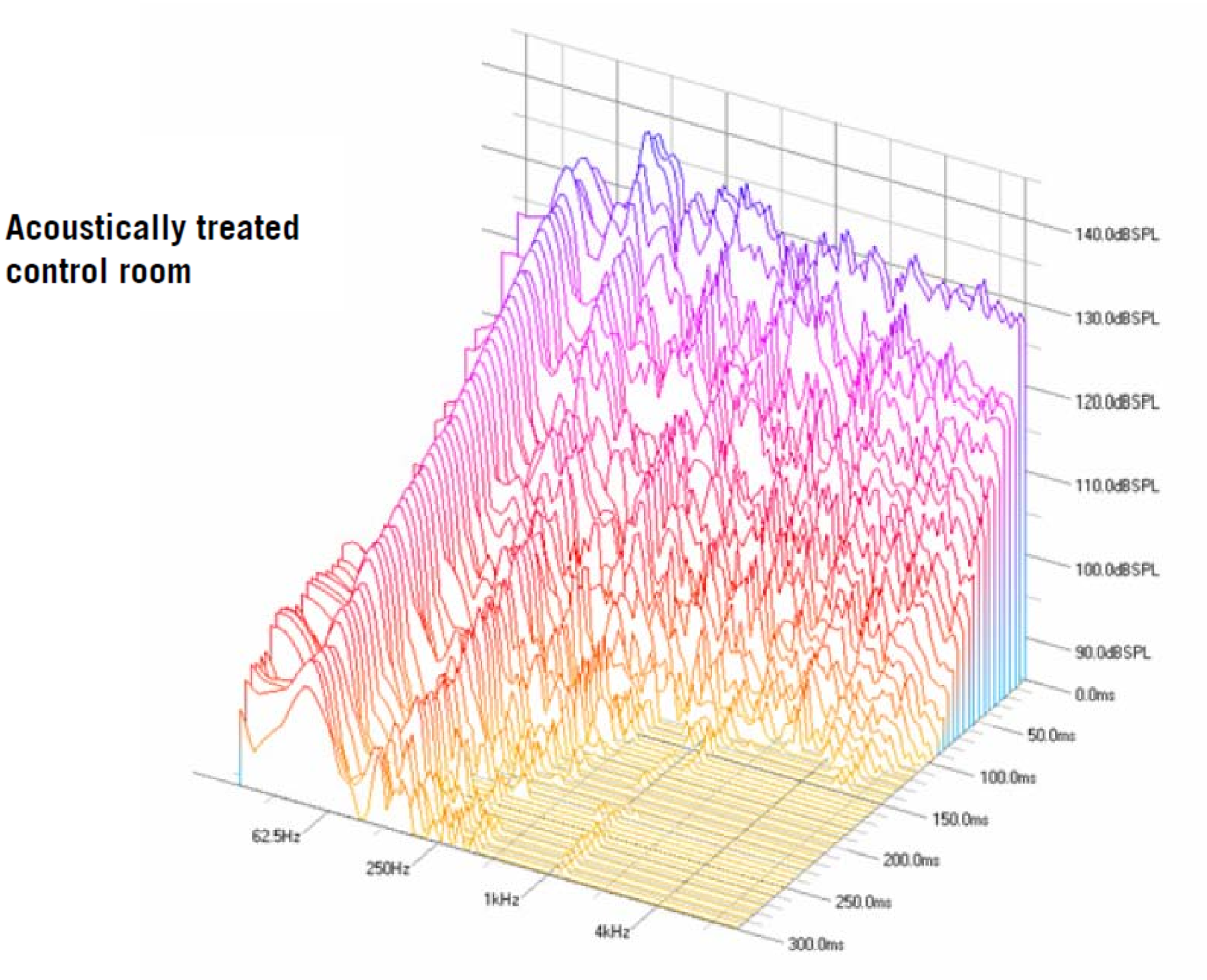


Imagen cortesía de Walter – Storyk Design Group

Acoustically treated control room

with:

tuned Helmholtz Resonator

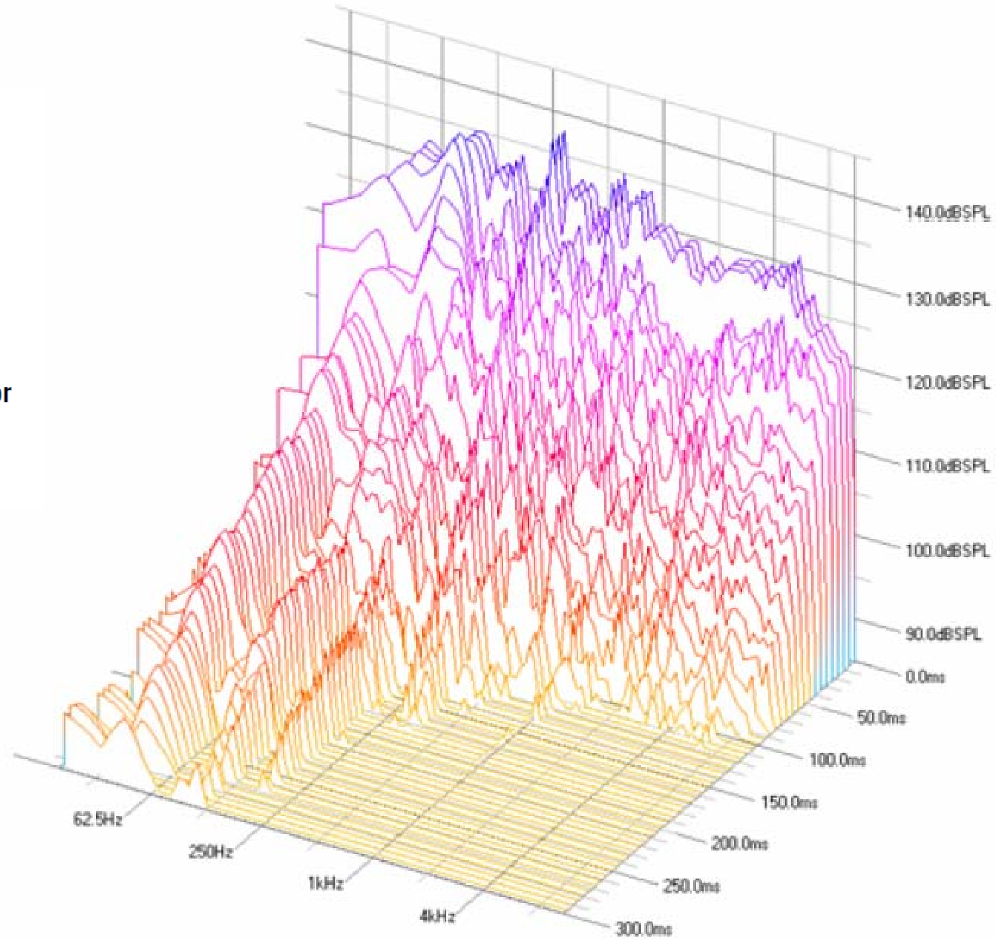


Imagen cortesía de Walter–Storyk Design Group

Acoustically treated control room

with:

tuned Helmholtz Resonator

and:

active loudspeaker membrane absorber

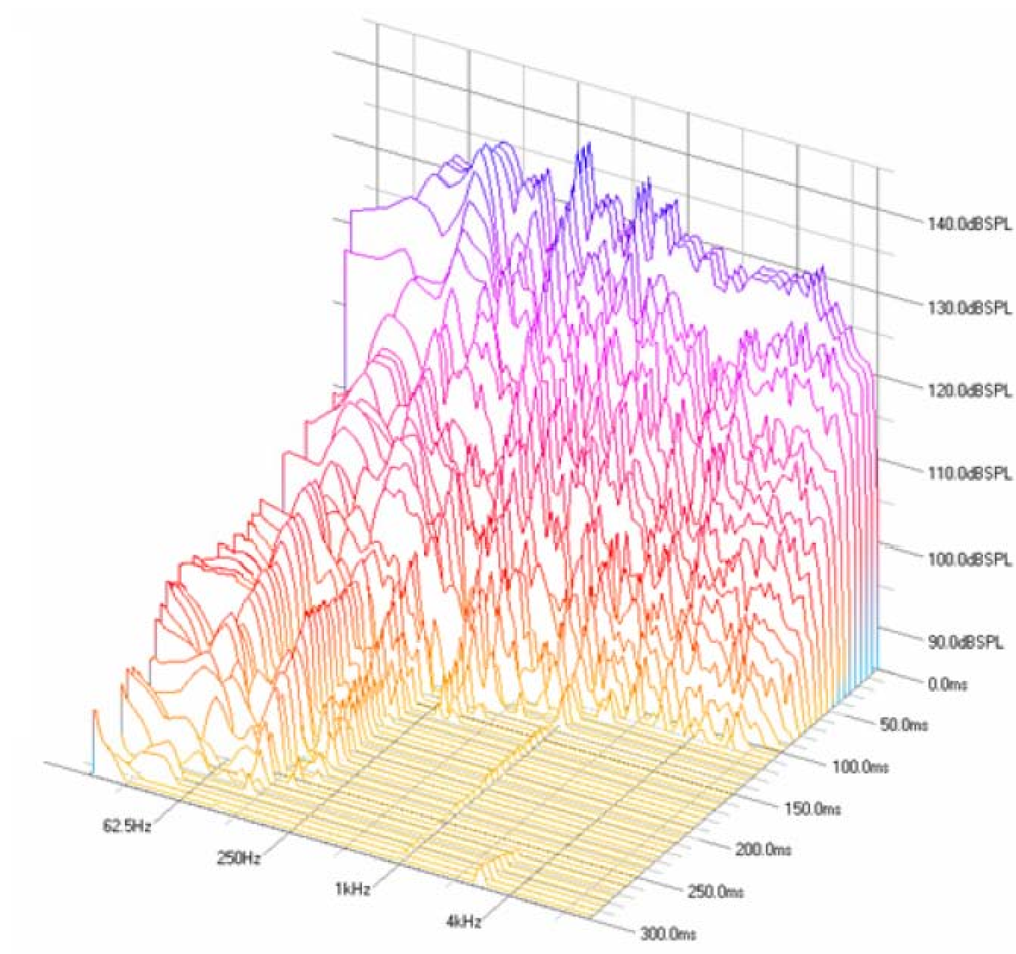
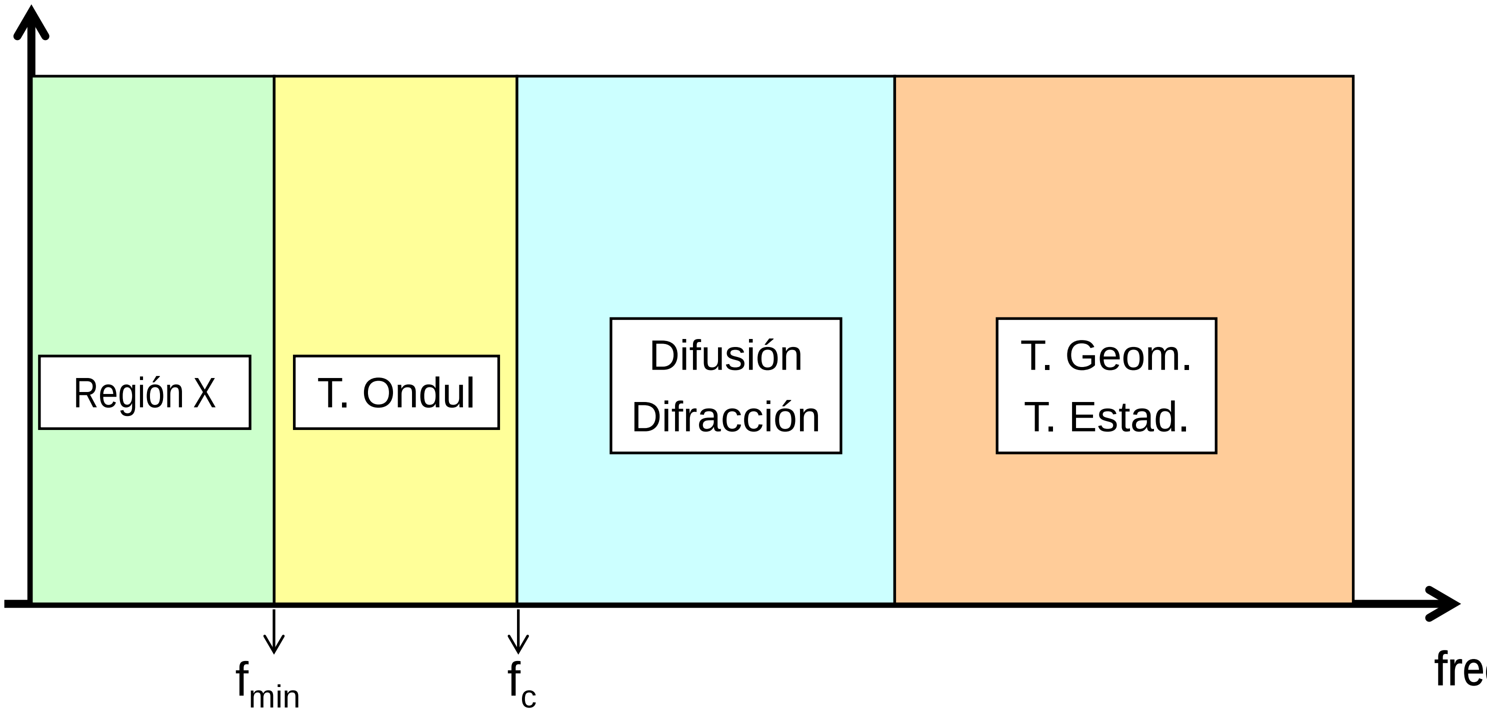


Imagen cortesía de Walter – Storyk Design Group

RESUMEN: Uso de las Teorías de salas en el margen frecuencial

Cada teoría es necesaria en una zona determinada dentro del margen frecuencial. A grandes rasgos, el correcto uso de cada teoría en función de la frecuencia sería de la siguiente manera:



Límites frecuenciales:

La frecuencia natural mínima de la sala viene determinada por la dimensión mayor:

$$f_{mín} = \frac{c}{2L_{\max}}$$

Por debajo de esta frecuencia la sala no tiene ningún modo propio de vibración (*Región X*).

La frecuencia límite superior (f_c) que marca la zona frecuencial que necesita estudio ondulatorio, puede calcularse aproximadamente con las siguientes fórmulas (RT=Reverberation Time):

$$f_{\max} = 1849\sqrt{\frac{RT}{V}} \qquad f_{schroeder} = 2000\sqrt{\frac{RT}{V}}$$

Otra expresión interesante es la que da idea del volumen mínimo requerido para trabajar a partir de una frecuencia mínima y asegurar un comportamiento acústico bueno, en la sala (campo uniforme):

$$f_{mín} = \frac{1000}{V^{1/3}}$$

Conclusiones sobre la teoría ondulatoria:

- Una buena calidad acústica requiere una distribución uniforme de modos propios y una densidad suficiente
- Una buena distribución se consigue con un proporcionado correcto (regla de oro..etc.)
- Evitar siempre tener dimensiones múltiples entre ellas.
- Una densidad suficiente se consigue a partir de unas dimensiones mínimas ($V_{mín}$)
- Los problemas se dan en el margen de la baja frecuencia y en salas pequeñas.
- Los modos propios no pueden evitarse, dependen del dimensionado y proporcionado del recinto (de las dimensiones de las paredes reales; impedancia infinita)). Pero pueden mitigarse con absorción. En caso de querer eliminar un pico determinado deberán usarse resonadores sintonizados, para actuar en un margen frecuencial concreto y selectivo. Pueden usarse sistemas resonadores, también, o trampas de graves (preferentemente en las esquinas).
- Las esquinas son sitios adecuados para colocar la absorción comentada pero cada sala tiene sus zonas idóneas con sus máximos de presión a diferentes frecuencias (modos).
- Los problemas y las soluciones creados por los modos propios requieren medidas y experiencia empírica; "cada sala es un mundo".