1.4.

Introducción a la expresión de la incertidumbre de medida

Maite Pueyo

laSalle ENG
Universitat Ramon Llull

CONCEPTOS BÁSICOS DE ESTADÍSTICA APLICADA A LA GESTIÓN DE LAS MEDICIONES ACÚSTICAS

- Conceptos de estadística descriptiva: moda, mediana, media, recorrido, amplitud, percentil, desviación estándar, coeficiente de variación, media robusta.

- Distribuciones de probabilidad: tipos, probabilidad de cobertura, grados de libertad

- Tratamiento de aberrantes.

- Actividades de aseguramiento de la calidad: Control interno, intercomparaciones. Criterios para la evaluación

1- Conceptos de ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

Parte de la estadística dedicada a ordenar, representar i resumir los datos experimentales que constituyen una población.

Los individuos de una población pueden ordenarse, clasificarse, representarse gráficamente (distribuciones) y caracterizarse mediante parámetros obtenidos por cálculo:

- PARÁMETROS DE POSICIÓN

- PARÁMETROS DE DISPERSIÓN

- la MODA ($\hat{x}$)

  Valor más frecuente. Fácil de calcular pero muy inestable. Depende del número de datos.

- la MEDIANA ($\tilde{x}$)

  Valor central de una serie de datos ordenados, por debajo del cual está el 50% de los datos. Muy estable, no afectado por aberrantes.

- la MEDIA ARTIMÉTICA ($\bar{x}$)

  Centro de gravedad de la distribución. Está afectada por los aberrantes. Se calcula según:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{\text{ind}} x_k}{N} = \frac{\sum_{\text{val}} n_k x_k}{N} = \sum_{\text{val}} f_k x_k$$

PROPIEDADES DE LA MEDIA ARITMÉTICA

- $$\sum_{\text{ind}} \left(x_k - \bar{x}\right) = 0$$

- $$\sum_{\text{ind}} \left(x_k - \bar{x}\right)^2 = valor\ mínimo$$

- Si se tienen m poblaciones cada una con n_i individuos, se cumple que la media de las medias es igual a la media global.

$$\bar{x}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} x_j}{n_i} \qquad \bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i}{m} \qquad \text{o bien} \qquad \bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} x_{j,i}}{n_1 + n_2 + \cdots + n_m}$$

- el RECORRIDO o AMPLITUD

  Diferencia entre el valor máximo y el mínimo. Muy afectado por aberrantes.

- los PERCENTILES

  Corresponde al valor de la población por debajo del cual se encuentra un determinado porcentaje de datos. Los más utilizados son el Q_{25} y el Q_{75}.

- la VARIANZA (σ^2)

  Es la suma ponderada de los cuadrados de las desviaciones respecto de la media.

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{\text{ind}} (x_k - \bar{x})^2}{N} = \frac{\sum_{\text{val}} n_k (x_k - \bar{x})^2}{N} = \sum_{\text{val}} f_k (x_k - \bar{x})^2$$

DESVIACIÓN ESTÁNDAR:
La raíz cuadrada de la varianza es la desviación estándar (*s*).

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum x^2 - \frac{\left(\sum x\right)^2}{n}}{n-1}}$$

PROPIEDADES DE LA DESVIACIÓN ESTÁNDAR

- Es el valor más pequeño que caracteriza la dispersión de una población.
- Parámetro que tiene asociado a su vez una dispersión.

PROPIEDADES DE LA DESVIACIÓN ESTÁNDAR

¿ Cómo “componer” diferentes valores de repetibilidad obtenidas mediante experiencias pasadas?

- 1ª experiencia : n_1 observaciones varianza : S_1^2
- 2ª experiencia : n_2 observaciones varianza : S_2^2

....

- kª experiencia : n_k observaciones varianza : S_k^2

$$S^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2 + \ldots (n_k-1)S_k^2}{(n_1-1)+(n_2-1)+\ldots+(n_k-1)}$$

- Caso particular :

$$n_1 = n_2 = \ldots = n_k \qquad S^2 = \frac{S_1^2 + S_2^2 + \ldots + S_k^2}{n}$$

PROPIEDADES DE LA DESVIACIÓN ESTÁNDAR:

Desviación estándar de la media

$$s^2(\bar{x}) = \frac{s^2}{n}$$

Si las n observaciones son independientes. En caso contrario:

$$s^2(\bar{x}) = s^2$$

ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA: PARÁMETROS DE DISPERSIÓN

Ejemplo 1:

LABORATORIO	LAeq, interior (dBA)
1	52,3
2	51,1
3	52,6
4	52,7
5	53,0
6	51,3
7	51,7
8	52,4
9	51,4
10	52,3
11	52,9
12	49,6
13	53,5
14	51,3
15	53,1
16	53,4
17	51,9
18	52,4
19	34,5
20	51,7
21	51,5
22	53,6
23	50,9
24	49,7
25	53,6
26	52,0
27	51,3
28	53,5

Obtener valor de:

- moda
- mediana
- media aritmética
- desviación estándar
- desviación estándar de la media

Ejemplo 2:

LABORATORIO	LAeq, interior (dBA)				
	1	2	3	4	5
1	52,3	52	53	52,3	50,8
2	51,1	52,4	51,5	52,1	51,8
3	52,6	52,4	52,4	52,5	52,6
4	52,7	52,6	52,3	52,5	52,7
5	53,0	53	53,1	52,8	52,9
6	51,3	51,3	51,3	51,2	51,3
7	51,7	51,8	51,8	51,8	51,8
8	52,4	52,6	52,6	52,2	52,4
9	51,4	51,7	51,6	51,6	51,5
10	52,3	51,8	52,5	52,1	52,6
11	52,9	53	53,1	53,1	53
12	49,6	49,7	49,6	49,7	49,5
13	53,5	53,7	53,7	53,7	53,7
14	51,3	51,8	51,5	51,7	51,7
15	53,1	53,1	53,4	53	52,9
16	53,4	53	52,2	52,2	52,8
17	51,9	52,2	52,1	51,7	51,7
18	52,4	51,7	52,4	52,4	52,4
19	34,5	34,7	33,2	32,7	34,4
20	51,7	51,9	52,1	52	51,9
21	51,5	51,9	51,6	51,6	51,4
22	53,6	52,6	53,2	53	52,8
23	50,9	51	50,9	50,2	50,4
24	49,7	49,2	48	48,6	48,8
25	53,6	53,6	53,7	53,6	53,5
26	52,0	52	52	52	52
27	51,3	51,1	51,5	51,8	51,4
28	53,5	53,7	53,7	53,7	53,7

Calcular:
- la media aritmética de cada laboratorio
- la desviación estándar en cada laboratorio y entre laboratorios

2- DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

Una distribución de probabilidad (d.d.p.) asigna a cada uno de los valores de la variable aleatoria la probabilidad de los sucesos que generan ese valor.

Jueves 21 de julio	Viernes 22 de julio	Sábado 23 de julio
30 %	30 %	40%
Máxima 38°	Máxima 37°	Máxima 35°
Mínima 25°	Mínima 25°	Mínima 24°

Esperanza matemática

Para una variable aleatoria *X* con una distribución de probabilidad que asigna la probabilidad p_i al valor x_i la esperanza matemática de *X* es

$$\mathrm{E}(X) = \sum p_i x_i = \mu$$

Se le llama, por comodidad, “media” de X, cuando no hay confusión.

Varianza en teoría de probabilidad

Si se considera una variable aleatoria con una d.d.p. que asigna la probabilidad p_i al valor x_i, la varianza de X es

$$V(X) = \sum p_i \left[x_i - \mathrm{E}(X)\right]^2 = \mathrm{E}\left[(X-\mu)^2\right]$$

$V(X)$ también se puede denotar por σ^2

Probabilidad de cobertura o tolerancia

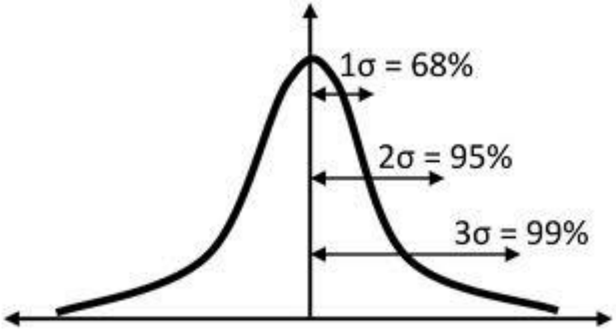
Una vez se conocen la media y la varianza de una distribución de datos, se determina entre qué márgenes se encuentra un determinado porcentaje de los valores (intervalo de tolerancia).

Así, por ejemplo, para una distribución normal, los límites:

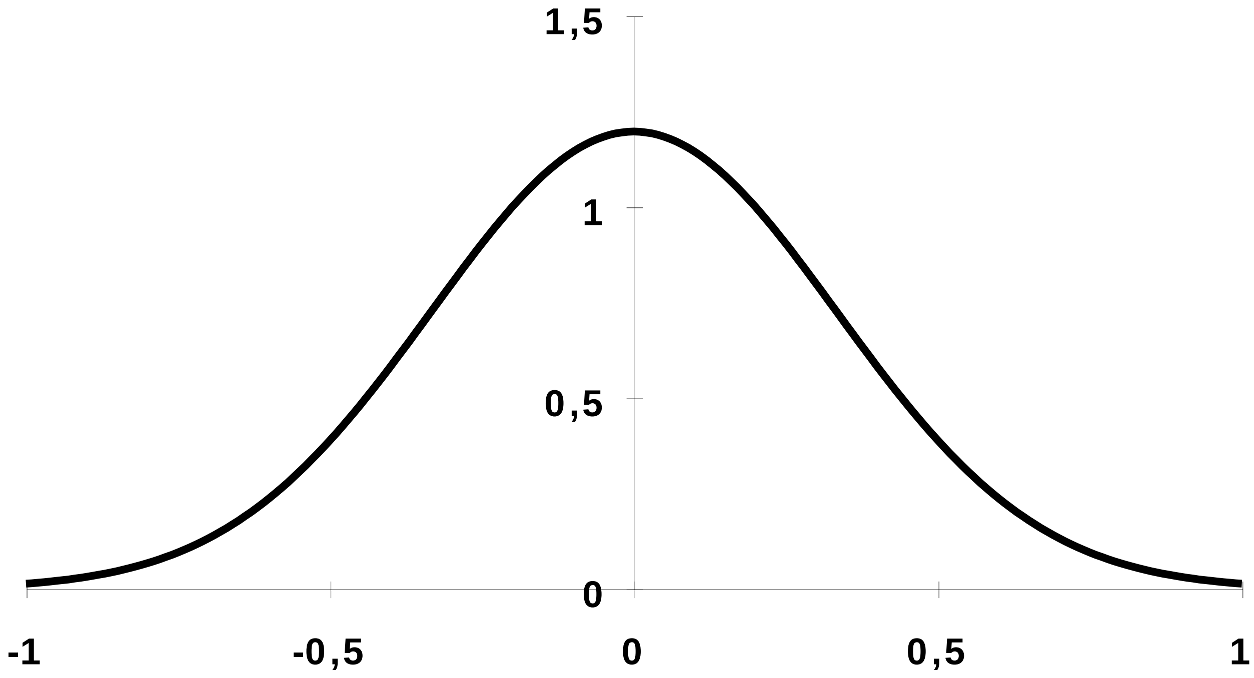
$\bar{x} \pm s,$ contemplan el 70% de los datos.

Y a $\bar{x} \pm 2s,$ se encuentran

aproximadamente el 95% de los datos.



Distribución normal



Distribución *t-Student*

Distribución asociada los datos que se han obtenido experimentalmente con pocas repeticiones.

En consecuencia, el cálculo de un intervalo de confianza para cubrir una determinada probabilidad de cobertura es:

$$t \cdot s$$

Siendo *t* un factor que está en función del número de grados de libertad. Por ejemplo, para una probabilidad del 95%:

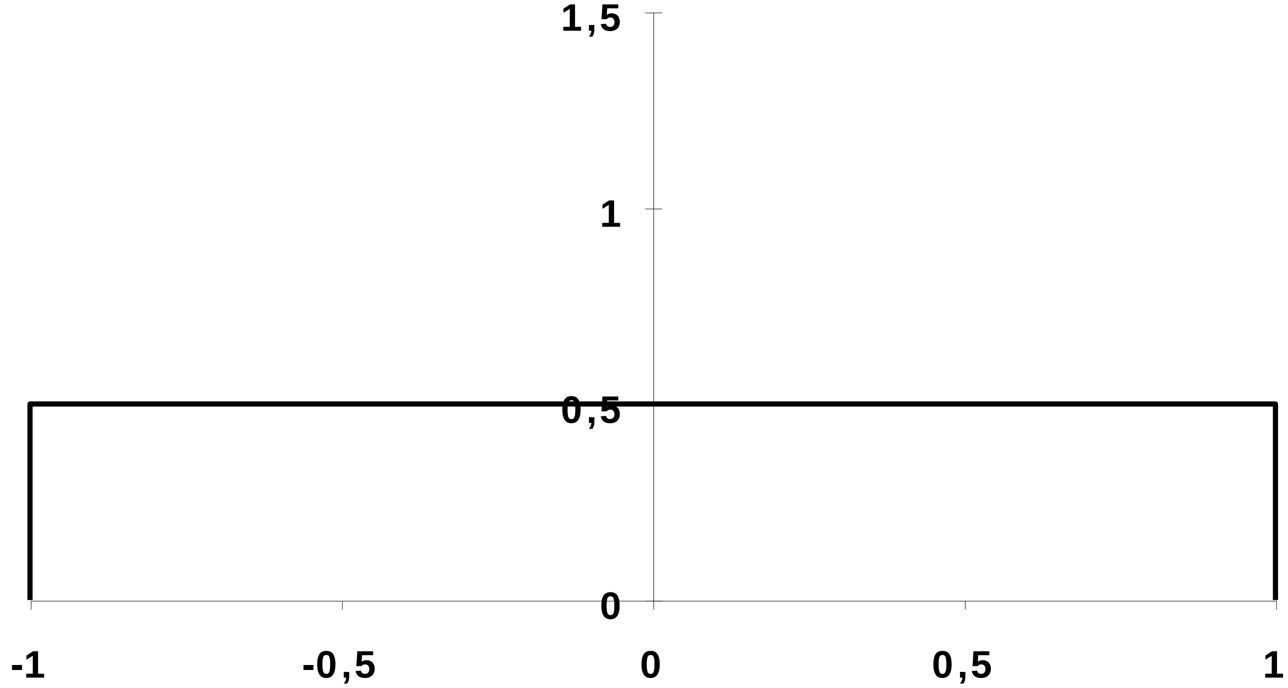
ν	1	2	3	4	5	6	7	8	10	20	50	∞
t	12,71	4,30	3,18	2,78	2,57	2,45	2,36	2,31	2,23	2,09	2,04	1,96

Distribución *t-Student*

ν	α 0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1 533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
inf.	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

*De la tabla IV de R. A. Fisher, *Statistical Methods for Research Workers*, publicado por Oliver & Boyd, Edinburgh, con el permiso del autor y los editores.

Distribución uniforme



$$\text{media} = \mathbf{0} \qquad \text{varianza} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \qquad \text{desviación típica} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}$$

Grados de libertad

En general, para obtener un buen estimador sin sesgo de la varianza debe calcularse la "media" mediante mínimos cuadrados, obtener la suma de los cuadrados de las desviaciones respecto de esta media y dividir por el número de grados de libertad.

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

El número de grados de libertad es el número de valores independientes de que se dispone menos el número de parámetros de la "media".

Caso especial: distribución de probabilidad no experimental (p.e. especificación). Grados de libertad = infinitos

3- TRATAMIENTO DE VALORES ANÓMALOS

Se considera que un resultado es anómalo cuando tiene una probabilidad baja de ocurrir.

Los resultados anómalos son un problema a la hora de manipular y extraer conclusiones de los datos experimentales ya que desplazan el valor medio de la distribución y la ensanchan.

Existen diferentes técnicas para eliminar la influencia de los aberrantes:

- Estadística robusta
- Criterio de Dixon
- Test de Grubbs
- Test de Box-Whisker

TEST DE COCHRAN (UNE 82009-2)

Aplicación: para comparar poblaciones de medidas experimentales de una misma muestra.

Procedimiento:

Dado un conjunto p de desviaciones típicas (s_i), todas obtenidas a partir del mismo número (n) de réplicas en la obtención de resultados, el estadístico C del ensayo de Cochran es:

$$C = \frac{s_{\max}^2}{\sum_{i=1}^{p} s_i^2}$$

Si el valor del estadístico es mayor que el 1% de su valor crítico, el elemento se considera incompatible y se elimina del grupo.

p	n = 2		n = 3		n = 4		n = 5		n = 6	
	1 %	5 %	1 %	5 %	1 %	5 %	1 %	5 %	1 %	5 %
2	—	—	0,995	0,975	0,979	0,939	0,959	0,906	0,937	0,877
3	0,993	0,967	0,942	0,871	0,883	0,798	0,834	0,746	0,793	0,707
4	0,968	0,906	0,864	0,768	0,781	0,684	0,721	0,629	0,676	0,590
5	0,928	0,841	0,788	0,684	0,696	0,598	0,633	0,544	0,588	0,506
6	0,883	0,781	0,722	0,616	0,626	0,532	0,564	0,480	0,520	0,445
7	0,838	0,727	0,664	0,561	0,568	0,480	0,508	0,431	0,466	0,397
8	0,794	0,680	0,615	0,516	0,521	0,438	0,463	0,391	0,423	0,360
9	0,754	0,638	0,573	0,478	0,481	0,403	0,425	0,358	0,387	0,329
10	0,718	0,602	0,536	0,445	0,447	0,373	0,393	0,331	0,357	0,303
11	0,684	0,570	0,504	0,417	0,418	0,348	0,366	0,308	0,332	0,281
12	0,653	0,541	0,475	0,392	0,392	0,326	0,343	0,288	0,310	0,262
13	0,624	0,515	0,450	0,371	0,369	0,307	0,322	0,271	0,291	0,243
14	0,599	0,492	0,427	0,352	0,349	0,291	0,304	0,255	0,274	0,232
15	0,575	0,471	0,407	0,335	0,332	0,276	0,288	0,242	0,259	0,220
16	0,553	0,452	0,388	0,319	0,316	0,262	0,274	0,230	0,246	0,208
17	0,532	0,434	0,372	0,305	0,301	0,250	0,261	0,219	0,234	0,198
18	0,514	0,418	0,356	0,293	0,288	0,240	0,249	0,209	0,223	0,189
19	0,496	0,403	0,343	0,281	0,276	0,230	0,238	0,200	0,214	0,181
20	0,480	0,389	0,330	0,270	0,265	0,220	0,229	0,192	0,205	0,174
21	0,465	0,377	0,318	0,261	0,255	0,212	0,220	0,185	0,197	0,167
22	0,450	0,365	0,307	0,252	0,246	0,204	0,212	0,178	0,189	0,160
23	0,437	0,354	0,297	0,243	0,238	0,197	0,204	0,172	0,182	0,155
24	0,425	0,343	0,287	0,235	0,230	0,191	0,197	0,166	0,176	0,149
25	0,413	0,334	0,278	0,228	0,222	0,185	0,190	0,160	0,170	0,144
26	0,402	0,325	0,270	0,221	0,215	0,179	0,184	0,155	0,164	0,140
27	0,391	0,316	0,262	0,215	0,209	0,173	0,179	0,150	0,159	0,135
28	0,382	0,308	0,255	0,209	0,202	0,168	0,173	0,146	0,154	0,131
29	0,372	0,300	0,248	0,203	0,196	0,164	0,168	0,142	0,150	0,127
30	0,363	0,293	0,241	0,198	0,191	0,159	0,164	0,138	0,145	0,124
31	0,355	0,286	0,235	0,193	0,186	0,155	0,159	0,134	0,141	0,120
32	0,347	0,280	0,229	0,188	0,181	0,151	0,155	0,131	0,138	0,117
33	0,339	0,273	0,224	0,184	0,177	0,147	0,151	0,127	0,134	0,114
34	0,332	0,267	0,218	0,179	0,172	0,144	0,147	0,124	0,131	0,111
35	0,325	0,262	0,213	0,175	0,168	0,140	0,144	0,121	0,127	0,108
36	0,318	0,256	0,208	0,172	0,165	0,137	0,140	0,118	0,124	0,106
37	0,312	0,251	0,204	0,168	0,161	0,134	0,137	0,116	0,121	0,103
38	0,306	0,246	0,200	0,164	0,157	0,131	0,134	0,113	0,119	0,101
39	0,300	0,242	0,196	0,161	0,154	0,129	0,131	0,111	0,116	0,099
40	0,294	0,237	0,192	0,158	0,151	0,126	0,128	0,108	0,114	0,097

VALORES CRÍTICOS TEST DE COCHRAN

TEST DE GRUBBS (UNE 82009-2)

Aplicación: para detectar una única observación aberrante.

Procedimiento:

Dado un conjunto de datos, colocado en orden creciente, se determina si la observación más alejada (x_p) es compatible con el resto mediante el cálculo del estadístico de Grubbs:

$$G_p = \frac{\left| x_p - \bar{x} \right|}{s}$$

Si el valor del estadístico es mayor que el 1% de su valor crítico, el elemento se considera incompatible y se elimina del grupo.

TRATAMIENTO DE VALORES ANÓMALOS

p	Uno más grande o uno más pequeño		Dos más grandes o dos más pequeños	
	Superior a 1%	Superior a 5%	Inferior a 1%	Inferior a 5%
3	1,155	1,155	—	—
4	1,496	1,481	0,000 0	0,000 2
5	1,764	1,715	0,001 8	0,009 0
6	1,973	1,887	0,011 6	0,034 9
7	2,139	2,020	0,030 8	0,070 8
8	2,274	2,126	0,056 3	0,110 1
9	2,387	2,215	0,085 1	0,149 2
10	2,482	2,290	0,115 0	0,186 4
11	2,564	2,355	0,144 8	0,221 3
12	2,636	2,412	0,173 8	0,253 7
13	2,699	2,462	0,201 6	0,283 6
14	2,755	2,507	0,228 0	0,311 2
15	2,806	2,549	0,253 0	0,336 7
16	2,852	2,585	0,276 7	0,360 3
17	2,894	2,620	0,299 0	0,382 2
18	2,932	2,651	0,320 0	0,402 5
19	2,968	2,681	0,339 8	0,421 4
20	3,001	2,709	0,358 5	0,439 1
21	3,031	2,733	0,376 1	0,455 6
22	3,060	2,758	0,392 7	0,471 1
23	3,087	2,781	0,408 5	0,485 7
24	3,112	2,802	0,423 4	0,499 4
25	3,135	2,822	0,437 6	0,512 3
26	3,157	2,841	0,451 0	0,524 5
27	3,178	2,859	0,463 8	0,536 0
28	3,199	2,876	0,475 9	0,547 0
29	3,218	2,893	0,487 5	0,557 4
30	3,236	2,908	0,498 5	0,567 2
31	3,253	2,924	0,509 1	0,576 6
32	3,270	2,938	0,519 2	0,585 6
33	3,286	2,952	0,528 8	0,594 1
34	3,301	2,965	0,538 1	0,602 3
35	3,316	2,979	0,546 9	0,610 1
36	3,330	2,991	0,555 4	0,617 5
37	3,343	3,003	0,563 6	0,624 7
38	3,356	3,014	0,571 4	0,631 6
39	3,369	3,025	0,578 9	0,638 2
40	3,381	3,036	0,586 2	0,644 5

VALORES CRÍTICOS TEST DE GRUBBS

TRATAMIENTO DE ABERRANTES

TEST DE BOX-WHISKER: sustituye a Grubbs

1 Calcular la mediana $\tilde{x}$ de las x_i

2 Calcular el percentil a 25 (Q_{25}) y a 75 (Q_{75})

3 Calcular: $d = Q_{75} - Q_{25}$

4 Calcular los límites superior e inferior

$$LS = Q_{75} + 1{,}5\ d$$

$$LI = Q_{25} - 1{,}5\ d$$

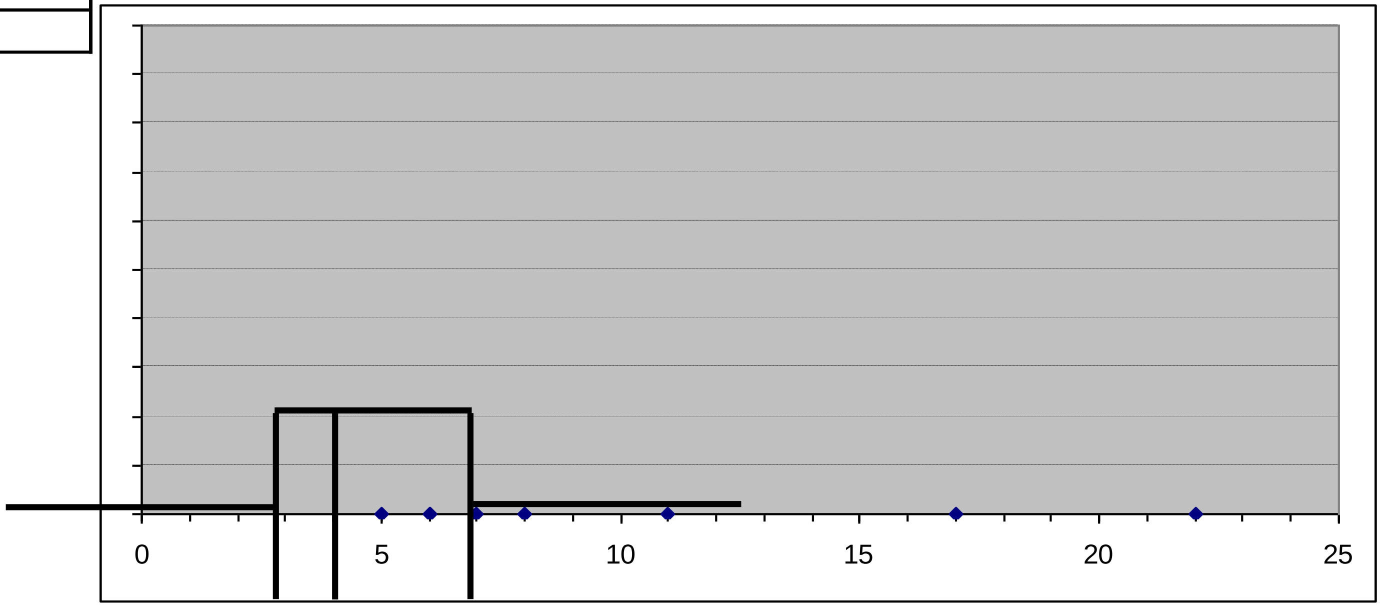
5 Buscar el valor de la serie de datos más cercano a LS, pero que no sea mayor que LS. Todos los valores superiores a este se consideran aberrantes.

6 Buscar el valor de la serie de datos más cercano a LI, pero que no sea menor que LI. Todos los valores inferiores a este se consideran aberrantes.

TRATAMIENTO DE VALORES ANÓMALOS

serie de valores
5
6
6
7
7
8
8
11
17
22

mediana = 7,5
Q25 = 6,25
Q75 = 10,25
d = 4
LS = 16,25
LI = 0,25



TRATAMIENTO DE VALORES ANÓMALOS

Ejemplo:

LABORATORIO	LAeq, interior (dBA)
1	52,3
2	51,1
3	52,6
4	52,7
5	53,0
6	51,3
7	51,7
8	52,4
9	51,4
10	52,3
11	52,9
12	49,6
13	53,5
14	51,3
15	53,1
16	53,4
17	51,9
18	52,4
19	34,5
20	51,7
21	51,5
22	53,6
23	50,9
24	49,7
25	53,6
26	52,0
27	51,3
28	53,5

¿existe algún valor anómalo?

4- ACTIVIDADES DE ASEGURAMIENTO DE LA CALIDAD

• Control interno de la calidad:
repetición de la medida por dos técnicos
repetición de la medida con equipos distintos

Importante !
Tener identificado qué se controla en cada prueba (repetibilidad, precisión intermedia, exactitud, …)
Tener un programa de control que asegure que se controlan todas las familias con una periodicidad razonable..

• Intercomparaciones (actividades externas)

<u>Evaluación de los resultados de las intercomparaciones (ensayos de aptitud)</u>: (ISO 17043)

El tratamiento estadístico de las intercomparaciones consiste en el cálculo del índice z (z-score):

$$z - score = \frac{x_{laboratorio} - x_{ref}}{s_{ref}}$$

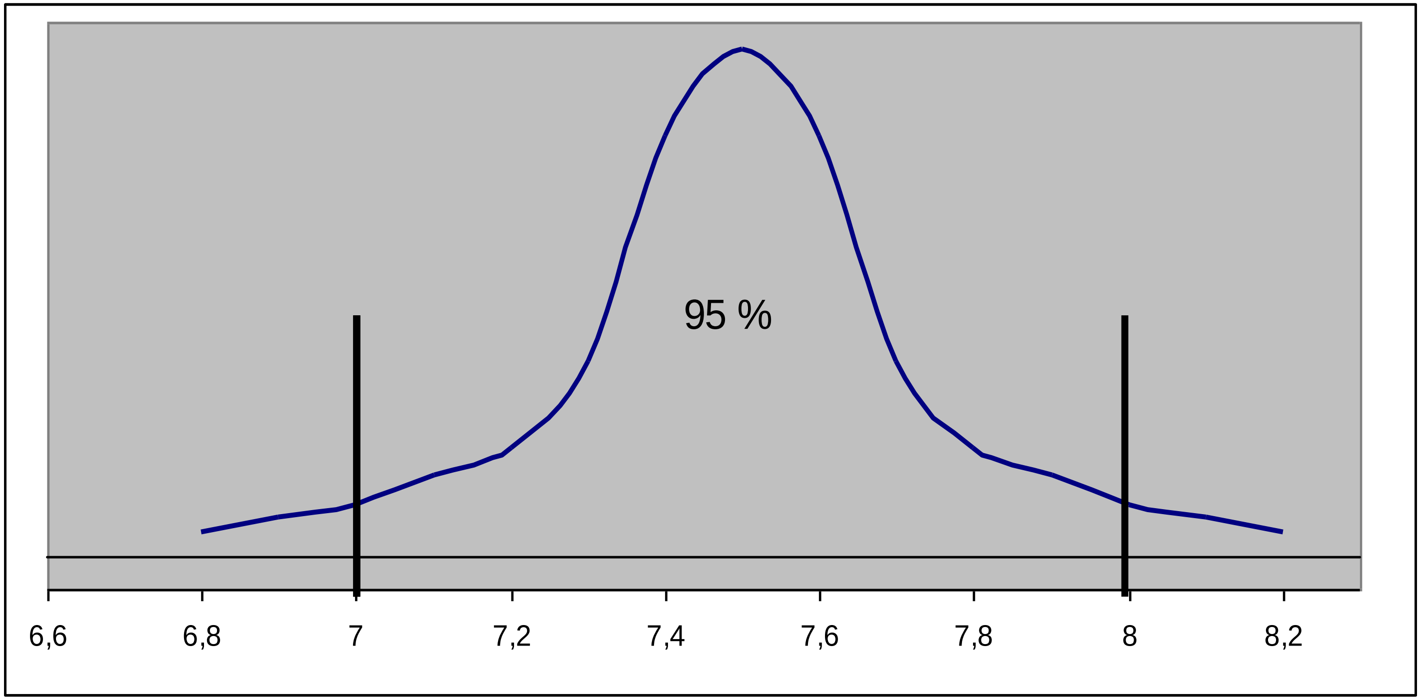
o bien del número E_n:

$$E_n = \frac{x_{laboratorio} - x_{ref}}{\sqrt{U_{lab}^2 + U_{ref}^2}}$$

El resultado se considera satisfactorio si el *z-score* es inferior a 2 o si el número *E* es inferior a 1.

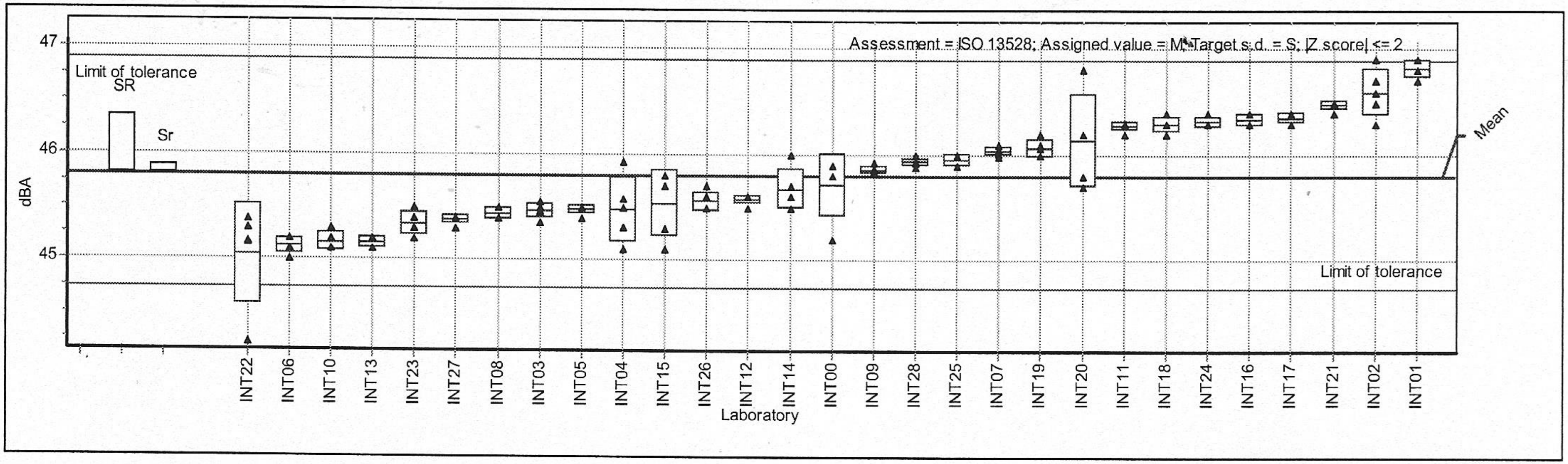
Evaluación de los resultados de las intercomparaciones:

Interpretación del *z-score* o del número E_n:



Ejemplo de resultados de una intercomparación de medida de ambiente interior:

Sample:	**Immissió promig**	**Assigned value:**	**45,809 dBA (Empirical value)**
Measurand:	**LAeq**	**Rel. target s.d.:**	**1,18% (Empirical value)**
Method:	**ISO 13528**	**Rel. repeatability s.d.:**	**0,18%**
No. of laboratories:	**29**	**Tolerance limits:**	**44,730 - 46,887 dBA (|Z score| < 2,00)**



Evaluación de los resultados de las intercomparaciones (estudios colaborativos):
(UNE 82009 (ISO 5725): Exactitud (veracidad y precisión) de resultados y métodos de medición)

El tratamiento estadístico de las intercomparaciones según ISO 5725 consiste en el cálculo de la repetibilidad (r) y la reproducibilidad (R) del método:

$$r = 2{,}8 \cdot s_r$$

siendo s_r la desviación típica promedio en todos los laboratorios participantes

$$R = 2{,}8 \cdot \sqrt{s_r^2 + s_L^2}$$

siendo s_L la desviación típica entre todos los laboratorios participantes

Ejemplo de resultados de un estudio colaborativo de medida de aislamiento:

Hz	Laboratorios													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9					
	sw2	sw2	sw2	sw2	sw2	sw2	sw2	sw2	sw2	**sr2**	**sL2**	**sR2**	**r**	**R**
100	3,30	2,42	0,20	0,50	1,33	1,27	1,86	0,89	1,30	1,45	2,05	3,50	3,4	5,2
125	2,19	0,23	0,18	1,21	2,49	0,58	0,45	0,75	2,97	1,23	1,13	2,36	3,1	4,3
160	1,58	0,57	0,25	0,10	1,68	0,93	2,11	0,47	0,39	0,90	1,15	2,05	2,7	4,0
200	1,30	0,31	0,24	0,12	1,55	2,94	2,02	0,32	0,46	1,03	0,77	1,80	2,8	3,8
250	0,51	0,29	0,08	0,22	1,68	0,73	0,19	0,06	0,17	0,28	2,94	3,22	1,5	5,0
315	0,32	0,05	0,10	0,44	0,38	0,43	0,18	0,42	0,57	0,32	0,56	0,88	1,6	2,6
400	0,40	0,09	0,87	0,23	0,53	0,56	0,14	0,05	0,91	0,42	0,35	0,77	1,8	2,5
500	0,66	0,08	0,17	0,17	0,17	1,17	0,31	0,09	0,14	0,33	0,19	0,52	1,6	2,0
630	0,22	0,13	0,05	0,14	0,07	0,14	0,47	0,13	0,22	0,17	0,56	0,73	1,2	2,4
800	0,12	0,08	0,28	0,04	0,10	0,04	0,34	0,02	0,14	0,13	0,33	0,46	1,0	1,9
1000	0,03	0,11	0,05	0,11	0,04	0,06	0,46	0,05	0,02	0,06	0,51	0,57	0,7	2,1
1250	0,13	0,07	0,06	0,06	0,09	0,04	0,11	0,00	0,05	0,07	0,94	1,00	0,7	2,8
1600	0,11	0,06	0,02	0,04	0,17	0,12	0,32	0,05	0,09	0,11	0,74	0,85	0,9	2,6
2000	0,12	0,06	0,03	0,03	0,12	0,10	0,35	0,03	0,02	0,10	0,82	0,92	0,9	2,7
2500	0,04	0,05	0,01	0,01	0,07	0,09	4,04	0,02	0,05	0,04	1,05	1,10	0,6	2,9
3150	0,07	0,00	0,04	0,09	0,07	0,07	7,91	0,22	0,01	0,07	1,39	1,46	0,7	3,4
4000	0,05	0,06	1,12	1,03	0,17	0,13	11,40	1,65	0,02	0,53	2,95	3,47	2,0	5,2
5000	0,04	0,13	9,40	2,03	0,24	0,37	19,51	1,49	0,01	0,62	3,48	4,09	2,2	5,7

Evaluación de los resultados de las intercomparaciones:

Interpretación de los valores de repetibilidad y reproducibilidad:

- r – la diferencia límite entre dos resultados simples obtenidos en idéntico material, por el mismo operador, usando los mismos aparatos dentro del más corto intervalo de tiempo. Esta diferencia no debe exceder, en promedio, el valor de repetibilidad, más de 1 vez por cada 20 (95%).

- R – la diferencia entre dos resultados simples obtenidos en idéntico material por dos laboratorios. Esta diferencia no debe exceder, en promedio, el valor de reproducibilidad, más de 1 vez por cada 20 (95%).

(UNE 82009-6)

PROCESO PARA LA EXPRESIÓN DE LA INCERTIDUMBRE DE MEDIDA

- Determinación de las fuentes de incertidumbre.
- Definición del modelo matemático.
- Evaluación de la incertidumbre típica. Tipo A y B.
- Evaluación de la incertidumbre típica combinada. Ley de propagación de las incertidumbres.
- Determinación de la incertidumbre expandida. Obtención de los grados de libertad.
- Expresión del resultado. Reglas para el redondeo.

INCERTIDUMBRE DE MEDIDA

¿QUÉ ES LA INCERTIDUMBRE?

¿PARA QUÉ SIRVE?

INCERTIDUMBRE DE MEDIDA

¿QUÉ ES LA INCERTIDUMBRE?

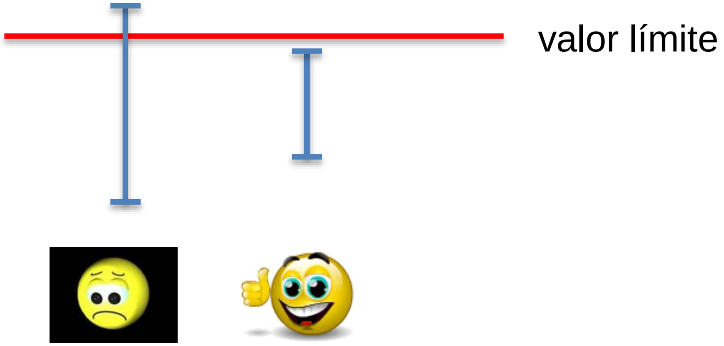
- Una descripción de nuestro conocimiento: la mesa mide ..... cm ± ... cm

- Un parámetro de dispersión de los valores razonables

INCERTIDUMBRE DE MEDIDA

¿PARA QUÉ SIRVE?

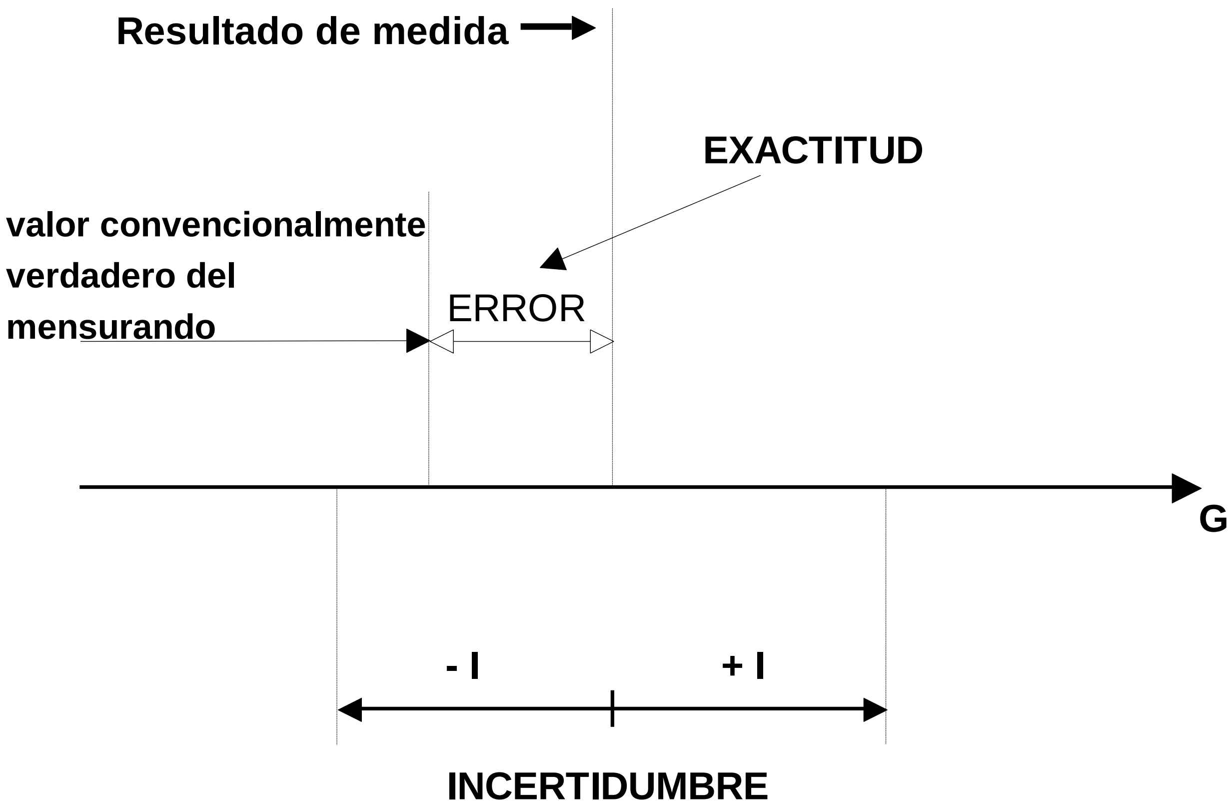
- Para comparar datos y tomar decisiones.



- Para optimizar el proceso de medición (gestión de la mejora)

PROCESO PARA LA EXPRESIÓN DE LA INCERTIDUMBRE DE MEDIDA

1. Identificar las **fuentes de error** (magnitudes de entrada)
2. Determinar la **función** que relaciona la magnitud de salida con las magnitudes de entrada (fuentes de error)
3. Estimar **Incertidumbres típicas** asociadas a las fuentes de error.
4. Cálculo de la incertidumbre típica de la magnitud de salida. Aplicar la **ley de propagación de errores** (u_c)
5. Calcular la **Incertidumbre expandida** $U=k \cdot u_c$



NO CONFUNDIR ERROR CON INCERTIDUMBRE !!

“**EXACTITUD DE MEDIDA: § 3.5 del VIM**

Proximidad del acuerdo entre el resultado de una medición y un valor verdadero del mensurando.
Nota El concepto de “exactitud” es cualitativo.
El término “precisión” no debe utilizarse en lugar de “exactitud””.

“**ERROR (DE MEDIDA): § 3.10 del VIM**

Resultado de una medición menos un valor verdadero del mensurando
Nota 1 Dado que no puede determinarse un valor verdadero, en la práctica se utiliza un valor convencionalmente verdadero.
2 ...”

“**INCERTIDUMBRE DE MEDIDA: § 3.9 del VIM**

Parámetro, asociado al resultado de una medición, que caracteriza la dispersión de los valores que podrían atribuirse razonablemente al mensurando...”.

Fuentes posibles de error y de incertidumbre (GUM)

a) Definición incompleta del mensurando

b) Realización imperfecta de la definición del mensurando

c) Muestreo no representativo - la muestra medida puede no ser representativa del mensurando definido

d) Conocimiento insuficiente de los efectos de las condiciones ambientales sobre la medición o medición imperfecta de las condiciones ambientales

e) Sesgo debido al observador para la lectura de los instrumentos analógicos

f) Resolución finita del instrumento o umbral de mobilidad

g) Valores inexactos de los patrones y materiales de referencia

h) Valores inexactos de las constantes y otros parámetros, obtenidos de fuentes exteriores y utilizados en el algoritmo de tratamiento de los datos

i) Aproximaciones e hipótesis introducidas en el método y en el procedimiento de medida

j) Variaciones entre las observaciones repetidas del mensurando en condiciones aparentemente idénticas

¿Cómo podemos reducir los errores ?

resultado = valor verdadero + error

Resultado = valor verdadero + error sistemático + error aleatorio

El objetivo es dar un resultado próximo al valor verdadero (desconocido para siempre), por ello es importante disminuir los errores.

¿Cómo podemos reducir los errores ? (2)

♦ Generalmente se hacen disminuir los errores aleatorios aumentando el número de observaciones independientes y tomando la media de estos valores.

♦ Se hacen disminuir los errores sistemáticos aplicando correcciones.

Medidas del nivel de ruido mediante un

SONÓMETRO

1 DEFINICION

Medida directa de ruido (dB) mediante un sonómetro calibrado y verificado al inicio y al final de las mediciones.

2 DATOS INSTRUMENTOS DE MEDIDA

- Sonómetro tipo 1
  - Tolerancia: ± 1 dB
  - Resolución: ± 0,1 dB

- Calibrador tipo 1
  - Condiciones de referencia
    - Temperatura: 20 ºC
    - Presión: 1013 hPa
    - Humedad: 65% RH

  - Influencia de las condiciones ambientales
    - Temperatura: 0,0015 dB/ºC ± 0,0001 dB/ºC
    - Presión: 8.10^{-5} dB/hPa ± 0,00001 dB/hPa
    - Humedad: 0,001 dB/%RH ± 0,0002 dB/%RH

3 DATOS EXPERIMENTALES

- Se realizan 10 mediciones Lp (repetibilidad) obteniéndose los siguientes resultados:

  80,2 dB
  80,4 dB
  81,0 dB
  80,4 dB
  80,3 dB
  80,5 dB
  80,5 dB
  80,5 dB
  80,4 dB
  80,5 dB
- Condiciones ambientales
  - Temperatura: 20 ºC ± 4 ºC
  - Presión: 1013 hPa ± 5 hPa
  - Humedad: 50 % ± 20 %

3 DETERMINAR

1. Fuentes de incertidumbre
2. Modelo matemático
3. Incertidumbre típica, u(Lp)
4. Coeficientes de sensibilidad
5. Incertidumbre expandida, U(Lp)
6. Expresión del resultado

1 FUENTES DE INCERTIDUMBRE

a - Incertidumbre de calibración del sonómetro
b - Incertidumbre de calibración del calibrador (clase)
c - Influencia de las condiciones ambientales sobre el calibrador
d - Incertidumbre debida a la resolución de las mediciones
e- Repetibilidad de las mediciones

MODELIZAR EL PROCESO DE MEDIDA

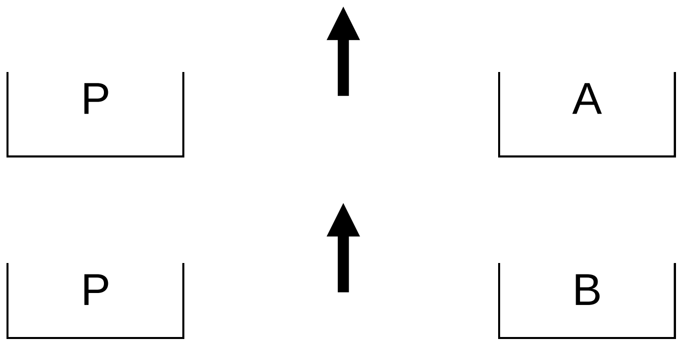
En muchos casos, el resultado Y no se mide directamente sino que se determina a partir de N otras magnitudes X_1, X_2 ...X_N a través de una relación funcional f :

$$\underbrace{\boldsymbol{Y}}_{\text{resultado declarado}} = \boldsymbol{f}\left(\underbrace{\boldsymbol{X_1, X_2 \ldots X_N}}_{\text{magnitudes de entrada}}\right)$$

Las magnitudes de entrada reflejan las fuentes de incertidumbre a tener en cuenta.

Modelización de la medición

Ejemplo : Calibración de dos masas de 50 g para formar un patrón de 100 g



$$A = P + x_1$$

$$B = P + x_2$$

Se forma la suma de A y B para realizar un nuevo patrón de 100 g. podemos escribir el modelo de dos maneras.

o bien $\quad y = A + B$

o bien $\quad y = 2P + x_1 + x_2$

2 MODELO MATEMÁTICO

$$L_p = \frac{\sum L_{pi}}{n} + \alpha_t (t - 20) + \alpha_p (p - 1013) + \alpha_{hr} (hr - 65) + C_{cal} + \delta_{res} + \delta_{rep}$$

CUANTIFICAR LOS COMPONENTES DE INCERTIDUMBRE

El modelo matemático del proceso

$$Y = f(X_1, \quad X_2 \quad \ldots \quad X_N)$$

$$\uparrow \quad \uparrow \quad \quad \uparrow$$

duda duda duda

Sobre cada una de las magnitudes de entrada X_1 ...X_N tenemos una duda. La composición de estas dudas engendrará la duda o incertidumbre sobre Y.

Existen dos métodos:

- tipo A: se fundamentan en distribuciones de frecuencia
- tipo B: se fundamentan en distribuciones a priori

Evaluación de tipo A de la incertidumbre típica

Tenemos a nuestra disposición un conjunto de observaciones.

Una evaluación de tipo A puede estar fundada en cualquier método de tratamiento de los datos (cálculo de la desviación típica de la media de una serie de observaciones independientes, utilización de un método de ajuste por la técnica de mínimos cuadrados para estimar los parámetros de una curva y su desviación típica, organización de un análisis de la varianza para identificar y cuantificar efectos aleatorios).

Evaluación de tipo B de la incertidumbre típica

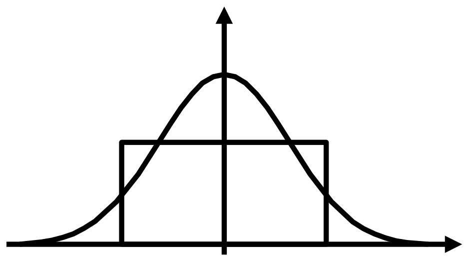
Una evaluación de tipo B de la incertidumbre típica se efectúa por un criterio científico fundado sobre todas las informaciones disponibles que pueden incluir:

- resultados de medidas anteriores
- la experiencia o el conocimiento general del comportamiento y las propiedades de los materiales e instrumentos utilizados
- las especificaciones del fabricante
- los datos suministrados por certificados de calibración u otros documentos
- la incertidumbre asignada a valores de referencia obtenidos de la literatura técnica y los manuales

Evaluación de tipo B de la incertidumbre típica (2)

Los métodos de tipo B se fundamentan :

- en la forma de la distribución de probabilidad de $\boldsymbol{X_i}$



- en los límites de variación de $\boldsymbol{X_i}$ (el recorrido de $\boldsymbol{X_i}$)

Evaluación de tipo B de la incertidumbre típica (3)

<u>Ejemplo</u> :

Utilización de una corrección definida en un Certificado de Calibración

- Corrección C_c = -9 µm
- Incertidumbre expandida indicada en el certificado U = 2µm
- Factor de cobertura empleado por EAL y por ENAC $\boldsymbol{k = 2}$

$\Rightarrow$ Incertidumbre típica de la corrección $u(C_c) = \dfrac{U}{k} = \dfrac{2}{2} = 1$ µm

Evaluación de tipo B de la incertidumbre típica (4)

Ejemplo :

- Un instrumento de medida se define por su clase. El fabricante garantiza que el error de justeza es inferior al error máximo tolerado (± 15 μm)

- mejor estimación de la corrección de justeza $C_j = \frac{-15+15}{2} = 0$

- incertidumbre típica de la corrección de justeza $u(C_j) = \frac{15}{\sqrt{3}}$ μm

(semi-recorrido : 15 μm, distribución a priori rectangular)

3 INCERTIDUMBRE TÍPICA DE LAS MAGNITUDES DE ENTRADA

Repetibilidad: (tipo A)

$$u(\delta_{rep}) = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

80,2 dB
80,4 dB
81,0 dB
80,4 dB
80,3 dB
80,5 dB
80,5 dB
80,5 dB
80,4 dB
80,5 dB

promedio = 80,47 dB
s = 0,21 dB

$$u(\delta_{rep}) = \frac{s}{\sqrt{n}} = 0{,}067\, dB$$

3 INCERTIDUMBRE TÍPICA DE LAS MAGNITUDES DE ENTRADA

Instrumento de medida:

- certificado de calibración, $u(C_{cal})$

Corrección de calibración = 0 dB
Distribución rectangular
Incertidumbre de calibración (tipo 1)= ± 1,0 dB

$$u(C_{cal}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

- resolución, $u(\delta_{res})$

Distribución rectangular
r = 0,1 dB

$$u(\delta_{res}) = \frac{0{,}1}{\sqrt{12}}$$

3 INCERTIDUMBRE TÍPICA DE LAS MAGNITUDES DE ENTRADA (cont.)

Influencia de las condiciones ambientales:

Temperatura:

$$u(\delta_{\mathrm{t}}) = \alpha_t \frac{u(t)}{\sqrt{3}}$$

Humedad relativa:

$$u(\delta_{\mathrm{hr}}) = \alpha_{hr} \frac{u(HR)}{\sqrt{3}}$$

Presión:

$$u(\delta_{\mathrm{p}}) = \alpha_p \frac{u(p)}{\sqrt{3}}$$

3 INCERTIDUMBRE TÍPICA DE LAS MAGNITUDES DE ENTRADA (cont.)

magnitud X_i	estimación x_i	incertidumbre típica $u(x_i)$	distribución
Lp	= 80,475 dB	-------	------
C_{CAL}	0	1 dB / √3	rectangular
$\delta_{resolucion}$	0	0,1 mm / 2√3	rectangular
t	20ºC	4 ºC / √3	rectangular
α_t	0,0015 dB / ºC	0,0001dB·ºC^{-1} / √3	rectangular
p	1013 hPa	5 hPa / √3	rectangular
α_p	0,00008 dB / hPa	0,00001 dB·hPa^{-1} / √3	rectangular
hr	50 %	20 % / √3	Rectangular
α_{hr}	0,001 dB / %HR	0,0002 dB·%HR^{-1} / √3	rectangular
$\delta_{repetibilidad}$	0	0,067 dB	normal
$\boldsymbol{X_N}$			
$\boldsymbol{Lp}$	***80,46 dB***		

La ley de propagación de la incertidumbre

$$Y = f\left(X_1, X_2, \ldots X_N\right)$$

La incertidumbre típica de *y* , se calcula a partir de:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}\right]u\left(x_i, x_j\right)$$

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} c_i c_j u(x_i) u\left(x_j\right) r\left(x_i, x_j\right)$$

Casos más frecuentes:

- $$y = x_1 + x_2 + x_3$$

  $$u^2(y) = u^2(x_1) + u^2(x_2) + u^2(x_3)$$

- $$y = \frac{x_1 \cdot x_2}{x_3}$$

  $$\frac{u^2(y)}{y^2} = \frac{u^2(x_1)}{x_1^2} + \frac{u^2(x_2)}{x_2^2} + \frac{u^2(x_3)}{x_3^2}$$

El análisis de la incertidumbre para una medición debe incluir una lista de todas las fuentes de incertidumbre, junto con las incertidumbres típicas de medida asociadas y los métodos para evaluarlas. Se recomienda presentar los datos en forma de tabla.

magnitud X_i	estimación x_i	incertidumbre típica $u(x_i)$	coef. de sensibilidad c_i	contribución $u_i\,(y)$
X_1	x_1	$u(x_1)$	c_1	$u_1\,(y)$
X_2	x_2	$u(x_2)$	c_2	$u_2\,(y)$
...	...	...	...	...
X_N	x_N	$u(x_N)$	c_N	$u_N\,(y)$
Y	y			$u(y)$

Ejemplo:

El modelo: 2 masas de 50 g *A* y *B* se comparan sucesivamente con un mismo patrón *P* de 50 g.

A continuación *A* y *B* se utilizan simultáneamente para realizar un patrón de 100 g.

$$A = P + x_1$$
$$B = P + x_2$$
$$y = A + B$$

Escribamos el modelo desarrollado:

$$y = A + B$$

$$y = P + x_1 + P + x_2$$

$$y = 2P + x_1 + x_2$$

$$u_c^2(y) = 4u^2(P) + u^2(x_1) + u^2(x_2)$$

4 COEFICIENTES DE SENSIBILIDAD

$$L_p = \frac{\sum L_{pi}}{n} + \alpha_t(t-20) + \alpha_p(p-1013) + \alpha_{hr}(hr-65) + C_{cal} + \delta_{res} + \delta_{rep}$$

$$c(C_{CAL}) =$$

$$c(\alpha_p) = \frac{\partial \overline{L_p}}{\partial \alpha_p} =$$

$$c(\delta_{resolucion}) =$$

$$c(p) = \frac{\partial \overline{L_p}}{\partial p} =$$

$$c(\delta_{repetibilidad}) =$$

$$c(\alpha_t) = \frac{\partial \overline{L_p}}{\partial \alpha_t} =$$

$$c(\alpha_{hr}) = \frac{\partial \overline{L_p}}{\partial \alpha_{hr}} =$$

$$c(t) = \frac{\partial \overline{L_p}}{\partial t} =$$

$$c(t) = \frac{\partial \overline{L_p}}{\partial t} =$$

4 COEFICIENTES DE SENSIBILIDAD (cont.)

$$L_p = \frac{\sum L_{pi}}{n} + \alpha_t(t-20) + \alpha_p(p-1013) + \alpha_{hr}(hr-65) + C_{cal} + \delta_{res} + \delta_{rep}$$

$$c(C_{CAL}) = 1 \qquad c(\delta_{resolucion}) = 1 \qquad c(\delta_{repetibilidad}) = 1$$

$$c(t) = \frac{\partial \overline{L_p}}{\partial t} = \alpha_t \qquad c(\alpha_t) = \frac{\partial \overline{L_p}}{\partial \alpha_t} = t - 20^{\circ} C$$

$$c(p) = \frac{\partial \overline{L_p}}{\partial p} = \alpha_p \qquad c(\alpha_p) = \frac{\partial \overline{L_p}}{\partial \alpha_p} = p - 1013 hPa$$

$$c(t) = \frac{\partial \overline{L_p}}{\partial hr} = \alpha_{hr} \qquad c(\alpha_{hr}) = \frac{\partial \overline{L_p}}{\partial \alpha_{hr}} = hr - 65\%$$

4 COEFICIENTES DE SENSIBILIDAD (cont.)

$$L_p = \frac{\sum L_{pi}}{n} + \alpha_t (t-20) + \alpha_p (p-1013) + \alpha_{hr} (hr-65) + C_{cal} + \delta_{res} + \delta_{rep}$$

$$u^2(L_p) = u^2(C_{CAL}) + u^2(\delta_{resolucion}) + u^2(\delta_{rep}) +$$

$$+ (t - 20^{\circ} C)^2 \cdot u^2(\alpha_t) + \alpha_t^2 \cdot u^2(t) +$$

$$+ (p - 1013\,hPa)^2 \cdot u^2(\alpha_p) + \alpha_p^2 \cdot u^2(p) +$$

$$+ (hr - 65\%)^2 \cdot u^2(\alpha_{hr}) + \alpha_{hr}^2 \cdot u^2(hr)$$

4 INCERTIDUMBRE TÍPICA COMBINADA

magnitud X_i	estimación x_i	incertidumbre típica $u(x_i)$	coef. de sensibilidad c_i	contribución $u_i(y) = c_i \cdot u(x_i)$
Lp	= 80,475 dB	-------	-----	------
C_{CAL}	0	1 dB / √3	1	0,5773 dB
$\delta_{resolucion}$	0	0,1 mm / 2√3	1	0,0289 dB
t	20ºC	4 ºC / √3	α_t = 0,0015 dB·ºC^{-1}	0,00346 dB
α_t	0,0015 dB / ºC	0,0001 / √3	(20-20) ºC	------
p	1013 hPa	5 hPa / √3	α_p = 0,0008 dB·hPa^{-1}	0,00231 dB
α_p	0,0008 dB / hPa	0,00001 / √3	(1013-1013) hPa	------
hr	50 %	20 % / √3	α_{hr} = 0,001 dB·%HR^{-1}	0,01155 dB
α_{hr}	0,001 dB / %HR	0,0002 / √3	(50-65) %HR	0,00173 dB
$\delta_{repetibilidad}$	0	0,067 dB	1	0,067 dB
$\boldsymbol{X_N}$				$\boldsymbol{u_N(y)}$
Lp	***80,46 dB***			***0,582 dB***

5 -DETERMINACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE EXPANDIDA

- La incertidumbre expandida U para una probabilidad de cobertura p del intervalo (y-U, y+U) se obtiene multiplicando la incertidumbre típica combinada $u_c(y)$ por un factor de cobertura k, que depende de la forma de la distribución y de la probabilidad de cobertura

$$U = k\, u_c(y)$$

- Usualmente la incertidumbre expandida se da para una probabilidad de cobertura p = 95 %. En Europa, este valor es obligatorio en los certificados de calibración emitidos por laboratorios acreditados por miembros de EA.

Determinación del factor de cobertura

Si se cumplen las condiciones del Teorema Central del Límite y el número de grados de libertad es lo suficientemente grande como para basar U en la distribución casi normal, puede utilizarse $k = 2$ para una probabilidad de cobertura de aproximadamente el 95 %.

Esta situáción ocurre en el 95% de los casos.

5 INCERTIDUMBRE EXPANDIDA

Lp = 80,5 dB ± 1,2 dB **(k=2, p=95%)**

La expresión del resultado incluye la mejor estimación *y* (valor numérico y unidad), la incertidumbre expandida *U* (valor numérico y unidad), el factor de cobertura *k*, la probabilidad de cobertura *p* , la distribución de probabilidad y el número de grados de libertad si son escasos.

La combinación de la mejor estimación y la incertidumbre expandida se da en la forma $y \pm U$, más una nota explicatoria que en los certificados de calibración EA, según el caso, deberá tener el siguiente contenido:

Número de cifras a conservar: 2 cifras significativas máximo

L_p = 72,5 dB ± 1,2 dB

R_W = 49 dB ± 1 dB

Los valores numéricos de $u_c(y)$ y U se dan como máximo con 2 cifras significativas y el valor numérico de y se da hasta la misma posición decimal que U.

INCERTIDUMBRE HABITUALES EN MEDIDAS ACÚSTICAS

ORIENTACIÓN SOBRE INCERTIDUMBRES MÍNIMAS A CONSIDERAR EN CASO DE QUE NO SE HAYAN CALCULADO O ESPECIFICADO

Inmisión de ruido interior exigible entre la actividad y la vivienda ± 1,5 dB

Ruido exterior a distancias inferiores a 50 metros ± 2 dB

Ruido exterior a distancias de 50 a 250 metros: ± 2,5 dB

Ruido exterior a distancias superiores a 250 metros: ± 3 dB

Reglas de redondeo

1 Cuando la cifra que sigue inmediatamente a la última cifra a conservar es inferior a 5, la última cifra no cambia.

2 Cuando la cifra que sigue inmediatamente a la última cifra a conservar es superior a 5, la última cifra a conservar se aumenta en una unidad.

3 Cuando la cifra que sigue inmediatamente a la última cifra a conservar es igual a 5 y está seguida por al menos una cifra diferente de cero, la última cifra a conservar se aumenta en una unidad; pero si no está seguida por ninguna otra cifra o si solamente está seguida por ceros, la última cifra a conservar no cambia si es par, y aumenta en una unidad si es impar.

El redondeo no debe realizarse en varias etapas sino solamente una vez.

Reglas de redondeo

<u>Ejemplos:</u>

9,90942 → 9,909

9,90962 → 9,910

9,90950 → 9,910

9,90850 → 9,908