

Simulación numérica de EDPs

Trabajo nº4



Ecuaciones en Derivadas Parciales

ETSIINF

UPM

24 de enero de 2023

Índice

1. Ecuación de ondas unidimensional	2
1.1. Cuestión 1	2
1.2. Cuestión 2	3
1.3. Cuestión 3	3
1.4. Cuestión 4	4
1.5. Cuestión 5	4
1.6. Cuestión 6	4
1.7. Ejercicio 1	5
1.8. Ejercicio 2	7
2. Ecuación del calor unidimensional	9
2.1. Cuestión 7	10
2.2. Cuestión 8	10
2.3. Ejercicio 3	11
2.4. Cuestión 9	13
2.5. Cuestión 10	13
2.6. Cuestión 11	14
2.7. Ejercicio 4	15
3. EDPs elípticas. Las ecuaciones de Laplace y Poisson	17
3.1. Cuestión 12	17
3.2. Cuestión 13	18
3.3. Cuestión 14	19
3.4. Ejercicio 5	20
3.5. Ejercicio 6	21
3.6. Ejercicio 7	22

1. Ecuación de ondas unidimensional

Consideremos el siguiente problema que involucra la ecuación de ondas unidimensional

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t), & (x, t) \in (0, a) \times (0, b) \\ u(0, t) = 0, u(a, t) = 0, & t \in [0, b] \\ u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = g(x), & x \in [0, a] \end{cases}$$

donde a, b y c son constantes reales positivas.

1.1. Cuestión 1

Supongamos que $u \in \mathcal{C}^4([0, a] \times [0, b])$ y $t - k, t, t + k \in [0, b]$. Fijando x y por el Teorema de Taylor, tenemos que:

$$u(x, t + k) = u(x, t) + u_t(x, t)k + \frac{u_{tt}(x, t)}{2!}k^2 + \frac{u_{ttt}(x, t)}{3!}k^3 + \frac{u_{tttt}(x, c_t^1)}{4!}k^4 \quad (1)$$

$$u(x, t - k) = u(x, t) - u_t(x, t)k + \frac{u_{tt}(x, t)}{2!}k^2 - \frac{u_{ttt}(x, t)}{3!}k^3 + \frac{u_{tttt}(x, c_t^2)}{4!}k^4 \quad (2)$$

Sumando (1) y (2), llegamos a que

$$u(x, t + k) + u(x, t - k) = 2u(x, t) + u_{tt}(x, t)k^2 + \frac{u_{tttt}(x, c_t^1) + u_{tttt}(x, c_t^2)}{4!}k^4$$

Y, por el Teorema de los valores intermedios, existe $c_t \in (c_t^1, c_t^2)$ tal que

$$u(x, t + k) + u(x, t - k) = 2u(x, t) + 2u_{tt}(x, t)k^2 + 2\frac{u_{tttt}(x, c_t)}{4!}k^4$$

de donde obtenemos que:

$$u_{tt}(x, t) = \frac{u(x, t + k) - 2u(x, t) + u(x, t - k)}{k^2} - 2\frac{u_{tttt}(x, c_t)}{4! \cdot k^2}k^4$$

Y por tanto:

$$\boxed{u_{tt}(x, t) = \frac{u(x, t + k) - 2u(x, t) + u(x, t - k)}{k^2} + \mathcal{O}(k^2)} \quad (3)$$

Supongamos que $u \in \mathcal{C}^4([0, a] \times [0, b])$ y $x - h, x, x + h \in [0, a]$. Fijando t y por el Teorema de Taylor, tenemos que:

$$u(x + h, t) = u(x, t) + u_x(x, t)h + \frac{u_{xx}(x, t)}{2!}h^2 + \frac{u_{xxx}(x, t)}{3!}h^3 + \frac{u_{xxxx}(c_x^1, t)}{4!}h^4 \quad (4)$$

$$u(x-h, t) = u(x, t) - u_x(x, t)h + \frac{u_{xx}(x, t)}{2!}h^2 - \frac{u_{xxx}(x, t)}{3!}h^3 + \frac{u_{xxxx}(c_x^2, t)}{4!}h^4 \quad (5)$$

Sumando (4) y (5), llegamos a que

$$u(x+h, t) + u(x-h, t) = 2u(x, t) + u_{xx}(x, t)h^2 + \frac{u_{xxxx}(c_x^1, t) + u_{xxxx}(c_x^2, t)}{4!}h^4$$

Y, por el Teorema de los valores intermedios, existe $c_x \in (c_x^1, c_x^2)$ tal que

$$u(x+h, t) + u(x-h, t) = 2u(x, t) + 2u_{xx}(x, t)h^2 + 2\frac{u_{xxxx}(c_x, t)}{4!}h^4$$

de donde obtenemos que:

$$u_{xx}(x, t) = \frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2} - 2\frac{u_{xxxx}(c_x, t)}{4! \cdot h^2}h^4$$

Y por tanto:

$$\boxed{u_{xx}(x, t) = \frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)} \quad (6)$$

1.2. Cuestión 2

Sabemos por el problema inicial que $u_{tt}(x, t) = c^2 \cdot u_{xx}(x, t)$.

Despreciando los términos $\mathcal{O}(k^2)$ y $\mathcal{O}(h^2)$ en (3) y (6) respectivamente y sustituyendo en el problema inicial, obtenemos que:

$$\frac{u(x, t+k) - 2u(x, t) + u(x, t-k)}{k^2} = c^2 \cdot \frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2}$$

Finalmente, usando las aproximaciones $u_{i,j}$ para $u(x_i, t_j)$ y teniendo en cuenta que $x_{i+1} = x_i + h$ y $t_{j+1} = k + t_j$ llegamos a:

$$\boxed{\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = c^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}}$$

1.3. Cuestión 3

Sea $x = x_i$ sobre la frontera, y aplicando la fórmula de Taylor de orden 1 para desarrollar $u(x, t)$ alrededor de $(x_i, 0)$ obtenemos que

$$u(x_i, 0+k) = u(x_i, 0) + u_t(x_i, 0)k + \frac{u_{tt}(x, 0)}{2!}k^2$$

Luego

$$\boxed{u(x_i, k) = u(x_i, 0) + u_t(x_i, 0)k + \mathcal{O}(k^2)} \quad (7)$$

1.4. Cuestión 4

Por (7) sabemos que, alrededor de $(x_i, 0)$

$$u(x_i, k) = u(x_i, 0) + u_t(x_i, 0)k + \mathcal{O}(k^2)$$

y despreciando $\mathcal{O}(k^2)$, obtenemos que

$$u(x_i, k) = u(x_i, 0) + u_t(x_i, 0)k$$

Entonces, recordando que $t_2 = k$, es claro que

$$\boxed{u_{i,2} = f_i + kg_i} \quad (8)$$

1.5. Cuestión 5

Sabemos por el problema inicial que $u_{tt}(x, t) = c^2 \cdot u_{xx}(x, t)$

Entonces

$$u_{tt}(x_i, 0) = c^2 \cdot u_{xx}(x_i, 0) \xrightarrow{u(x_i, 0) = f(x_i)} u_{tt}(x_i, 0) = c^2 \cdot f''(x_i)$$

Por otra parte, por (3):

$$u_{tt}(x, t) = c^2 \frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

y entonces:

$$u_{tt}(x_i, 0) = c^2 \frac{u(x_i+h, 0) - 2u(x_i, 0) + u(x_i-h, 0)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

Finalmente, como $x_{i+1} = h + x_i$ y $u(x_i, 0) = f(x_i)$, concluimos con que

$$\boxed{u_{tt}(x_i, 0) = c^2 \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)} \quad (9)$$

1.6. Cuestión 6

Aplicando la fórmula de Taylor de orden 2 en $x = x_i$ obtenemos:

$$u(x_i, k) = u(x_i, 0) + u_t(x_i, 0)k + \frac{u_{tt}(x_i, 0)k^2}{2} + \mathcal{O}(k^3)$$

Y sabemos que $u(x_i, 0) = f(x_i) = f_i$, $u_t(x_i, 0) = g(x_i) = g_i$ y sustituyendo $u_{tt} = c^2 \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$ y $\mathcal{O}(k^2) = \frac{k^2}{2}$:

$$\boxed{u(x_i, k) = f_i + kg_i + \frac{c^2 k^2}{2h^2} (f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}) + \mathcal{O}(h^2)\mathcal{O}(k^2) + \mathcal{O}(k^3)}$$

1.7. Ejercicio 1

Use el método de diferencias finitas desarrollado a lo largo de esta sección para resolver numéricamente el problema de ecuación de ondas siguiente.

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = 4u_{xx}(x, t), & (x, t) \in (0, 1) \times (0, \frac{1}{2}) \\ u(0, t) = 0, u(1, t) = 0, & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ u(x, 0) = \sin(\pi x) + \sin(2\pi x), u_t(x, 0) = 0, & x \in [0, 1] \end{cases}$$

tomando $h = \frac{1}{10}$ y $k = \frac{5}{100}$ para la construcción de la malla

a) Interprete las condiciones iniciales y de contorno del problema

Nuestra onda tiene inicialmente la forma $\sin \pi x + \sin 2\pi x$ y velocidad 0.

Además durante todo el tiempo que se mueva la cuerda, los extremos ($x = 0, x = 1$) se mantienen en 0 (condiciones de contorno).

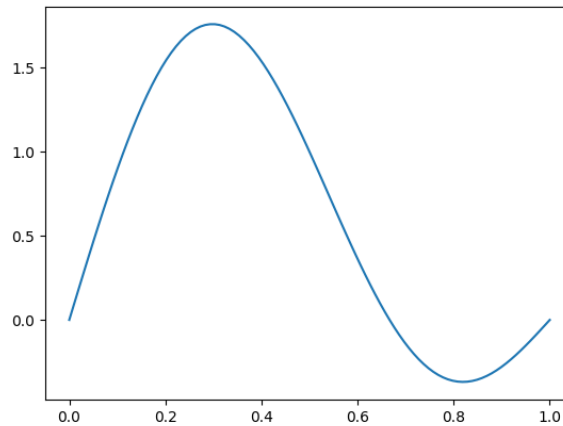


Figura 1: Condición inicial para $t=0$.

b) ¿Es estable el método? ¿Por qué?

Sí es estable debido a que $r = ck/h = 2 \frac{5/100}{1/10} = 1 \leq 1$ por tanto el error cometido está lo suficientemente amortiguado.

c) Construya una tabla en la que se muestren todos los valores de las aproximaciones $u_{i,j}$ en cada uno de los nodos de la malla.

Para obtener los valores de la tabla, hemos creado una matriz en Python cuya primera fila conocíamos gracias a las condiciones iniciales. A continuación, rellenamos la segunda fila utilizando la fórmula:

$$u_{i,2} = (1 - r^2)f_i + kg_i + \frac{r^2}{2}(f_{i+1} + f_{i-1})$$

Y finalmente, completamos las demás filas sabiendo que:

$$u_{i,j+1} = (2 - 2r^2)u_{i,j} + r^2(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1}$$

Con ello, hemos obtenido los siguientes valores:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
t_1	0	0.8968	1.5388	1.7601	1.5388	1	0.3633	-0.142	-0.3633	-0.2788	0
t_2	0	0.7694	1.3284	1.5388	1.38	0.9511	0.429	0	-0.2104	-0.1816	0
t_3	0	0.4316	0.7694	0.9484	0.9511	0.809	0.5878	0.3606	0.1816	0.0684	0
t_4	0	0	0.0516	0.1816	0.3774	0.5878	0.7407	0.7694	0.6394	0.3633	0
t_5	0	-0.38	-0.5878	-0.5194	-0.1816	0.309	0.7694	1.0194	0.9511	0.571	0
t_6	0	-0.5878	-0.9511	-0.9511	-0.5878	0	0.5878	0.9511	0.9511	0.5878	0
t_7	0	-0.571	-0.9511	-1.0194	-0.7694	-0.309	0.1816	0.5194	0.5878	0.38	0
t_8	0	-0.3633	-0.6394	-0.7694	-0.7407	-0.5878	-0.3774	-0.1816	-0.0516	0	0
t_9	0	-0.0684	-0.1816	-0.3606	-0.5878	-0.809	-0.9511	-0.9484	-0.7694	-0.4316	0
t_{10}	0	0.1816	0.2104	0	-0.429	-0.9511	-1.38	-1.5388	-1.3284	-0.7694	0
t_{11}	0	0.2788	0.3633	0.142	-0.3633	-1	-1.5388	-1.7601	-1.5388	-0.8968	0

Cuadro 1: Valores de las aproximaciones $u_{i,j}$ en cada uno de los nodos de la malla

d) Compruebe que la solución analítica del problema viene dada por

$$u(x, t) = \text{sen}(\pi x) \cos(2\pi t) + \text{sen}(2\pi x) \cos(4\pi t)$$

Verificamos que la posible solución satisfaga el problema:

$$u_x(x, t) = \pi \cdot (2 \cos(4\pi t) \cos(2\pi x) + \cos(2\pi t) \cos(\pi x))$$

$$u_{xx}(x, t) = -\pi^2 \cdot (4 \cos(4\pi t) \sin(2\pi x) + \cos(2\pi t) \sin(\pi x))$$

$$u_t(x, t) = -2\pi \cdot (2 \sin(2\pi x) \sin(4\pi t) + \sin(\pi x) \sin(2\pi t))$$

$$u_{tt}(x, t) = -4\pi^2 \cdot (4 \sin(2\pi x) \cos(4\pi t) + \sin(\pi x) \cos(2\pi t))$$

Sustituyendo en la primera condición del problema obtenemos que se cumple, además $u(0, t) = 0$, $u(1, t) = 0$, $u(x, 0) = \sin(\pi x) + \sin(2\pi x)$ y $u_t(x, 0) = 0$ y cumple las condiciones de compatibilidad, por tanto, como $u \in C^2([0, 1] \times [0, 1/2])$ es solución que satisface el problema.

e) Proporcione una tabla en la que se muestren los errores cometidos por las aproximaciones $u_{i,j}$, teniendo en cuenta la solución exacta

Para obtener esta tabla, hemos partido de los valores de la tabla obtenida en el apartado c) y una tabla nueva con los valores reales en los mismos puntos, ya que conocemos la solución analítica. Entonces, la resta en valor absoluto de las dos tablas nos proporciona los errores cometidos por las aproximaciones:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
t_1	0	9e-18	3e-17	1e-16	5e-17	0	1e-17	1e-17	2e-17	3e-17	0
t_2	0	1e-17	2e-16	1e-16	1e-16	3e-16	3e-16	7.1e-17	1.01e-16	4.19e-17	0
t_3	0	1e-16	2e-17	1e-16	2e-16	4e-17	1e-16	1e-16	2e-16	1e-16	0
t_4	0	7e-17	4e-16	3e-17	3e-16	1e-16	7e-17	2e-16	1e-16	3e-16	0
t_5	0	3e-17	2e-16	1e-16	9e-17	9e-17	3e-16	5e-17	8e-17	2e-16	0
t_6	0	2e-16	4e-17	4e-17	1e-16	0	3e-16	2e-16	2e-16	2e-16	0
t_7	0	1e-16	8e-17	2e-16	6e-17	3e-16	2e-17	5e-16	5e-16	3e-16	0
t_8	0	1e-16	3e-16	2e-16	2e-16	5e-17	3e-16	4e-16	4e-16	1e-16	0
t_9	0	2e-16	2e-18	2e-16	1e-16	5e-17	3e-16	2e-16	1e-16	6e-17	0
t_{10}	0	1e-16	1e-16	1e-16	1e-16	6e-17	8e-17	5e-18	2e-16	2e-17	0
t_{11}	0	3e-17	1e-16	1e-17	4e-16	4e-16	5e-16	5e-16	5e-17	3e-16	0

Cuadro 2: Errores cometidos por las aproximaciones $u_{i,j}$

f) Obtenga la solución numérica del problema

A continuación, mostramos gráficamente la solución aproximada y la real.

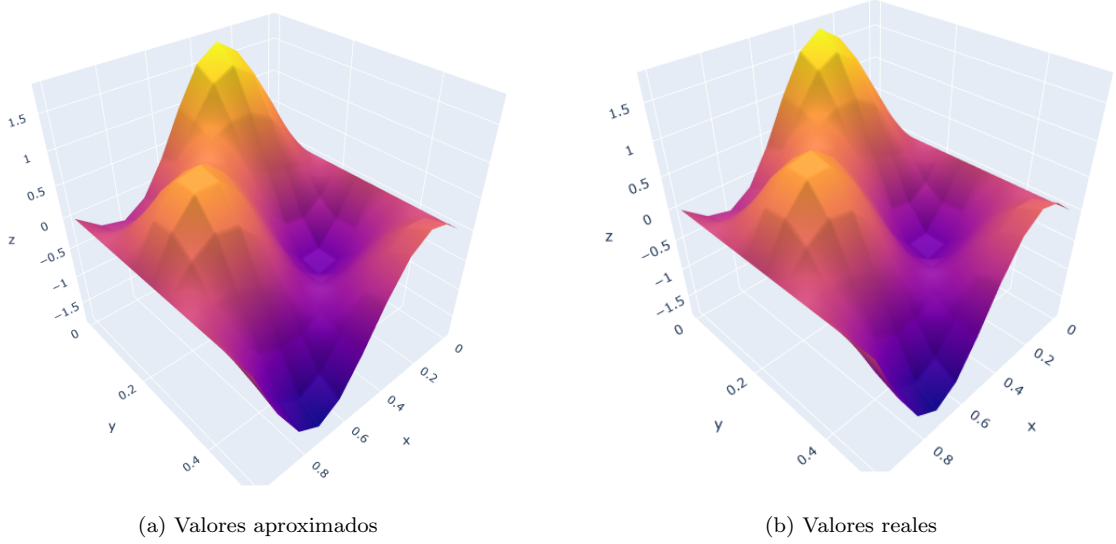


Figura 2: Comparativa entre los valores aproximados y los reales.

1.8. Ejercicio 2

Use el método de diferencias finitas desarrollado a lo largo de esta sección para resolver numéricamente el problema de ecuación de ondas siguiente.

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = 4u_{xx}(x, t), & (x, t) \in (0, 1) \times (0, \frac{1}{2}) \\ u(0, t) = 0, u(1, t) = 0, & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ u(x, 0) = f(x) + \sin(2\pi x), u_t(x, 0) = 0, & x \in [0, 1] \end{cases}$$

tomando $h = \frac{1}{10}$ y $k = \frac{5}{100}$ para la construcción de la malla, donde la función f viene dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{3}{5} \\ \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x, & \text{si } \frac{3}{5} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

a) Interprete las condiciones iniciales y de contorno del problema

Nuestra onda tiene inicialmente la forma $f(x)$ y velocidad 0. Donde $f(x)$ es:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{3}{5} \\ \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x, & \text{si } \frac{3}{5} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Además durante todo el tiempo que se mueva la cuerda, los extremos ($x = 0, x = 1$) se mantienen en 0 (condiciones de contorno).

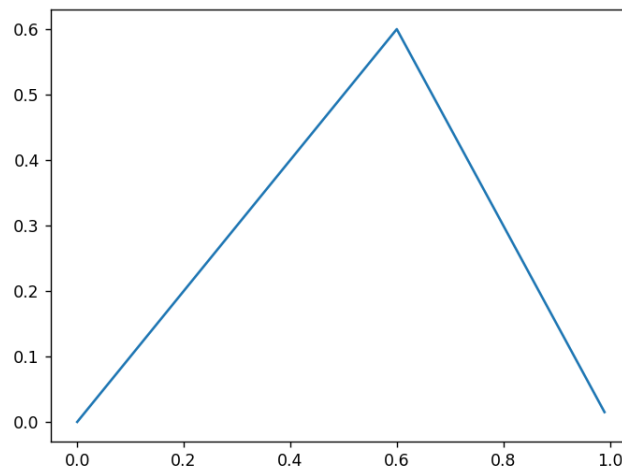


Figura 3: Condición inicial para $t=0$.

b) ¿Es estable el método? ¿Por qué?

Sí es estable debido a que $r = ck/h = 2 \frac{5/100}{1/10} = 1 \leq 1$. Por tanto el error cometido está lo suficientemente amortiguado.

c) Construya una tabla en la que se muestren todos los valores de las aproximaciones $u_{i,j}$ en cada uno de los nodos de la malla.

El método para construir la tabla es el mismo que en el ejercicio 1. A continuación se muestran los valores que hemos obtenido empleando Python

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
t_1	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.45	0.3	0.15	0
t_2	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.475	0.45	0.3	0.15	0
t_3	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.375	0.35	0.325	0.3	0.15	0
t_4	0	0.1	0.2	0.3	0.275	0.25	0.225	0.2	0.175	0.15	0
t_5	0	0.1	0.2	0.175	0.15	0.125	0.1	0.075	0.05	0.025	0
t_6	0	0.1	0.075	0.05	0.025	0	-0.025	-0.05	-0.075	-0.1	0
t_7	0	-0.025	-0.05	-0.075	-0.1	-0.125	-0.15	-0.175	-0.2	-0.1	0
t_8	0	-0.15	-0.175	-0.2	-0.225	-0.25	-0.275	-0.3	-0.2	-0.1	0
t_9	0	-0.15	-0.3	-0.325	-0.35	-0.375	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0
t_{10}	0	-0.15	-0.3	-0.45	-0.475	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0
t_{11}	0	-0.15	-0.3	-0.45	-0.6	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0

Cuadro 3: Valores de las aproximaciones $u_{i,j}$ en cada uno de los nodos de la malla

d) Obtenga la solución numérica del problema

Representamos la solución numérica gráficamente:

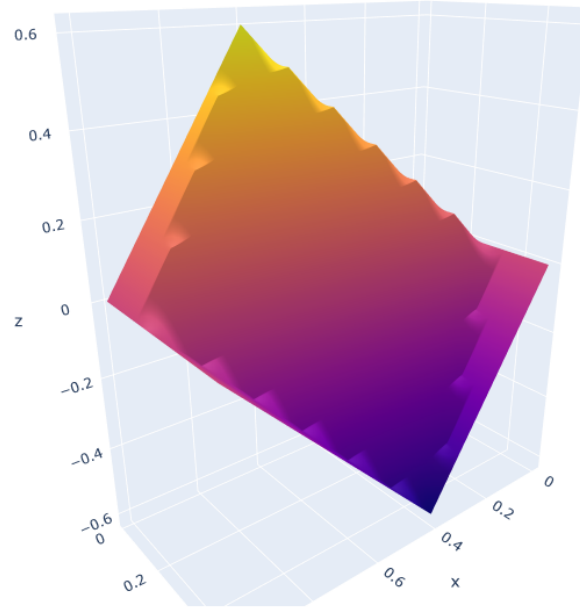


Figura 4: Condición inicial para $t=0$.

2. Ecuación del calor unidimensional

Consideremos el siguiente problema que involucra la ecuación del calor unidimensional

$$\begin{cases} u_t(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t), & (x, t) \in (0, a) \times (0, b) \\ u(0, t) = c_1, u(a, t) = c_2, & t \in [0, b] \\ u(x, 0) = f(x), & x \in [0, a] \end{cases}$$

donde a , b y c son constantes reales positivas, siendo c_1 y c_2 constantes reales.

2.1. Cuestión 7

Supongamos que $u \in \mathcal{C}^2([0, a] \times [0, b])$ y $t, t+k \in [0, b]$. Fijando x y por el Teorema de Taylor, tenemos que:

$$u(x, t+k) = u(x, t) + u_t(x, t)k + \frac{u_{tt}(x, t)}{2!}k^2 \quad (10)$$

Y por tanto, despejando $u_t(x, t)$:

$$\boxed{u_t(x, t) = \frac{u(x, t+k) - u(x, t)}{k} + \mathcal{O}(k)} \quad (11)$$

Supongamos que $u \in \mathcal{C}^4([0, a] \times [0, b])$ y $x-h, x, x+h \in [0, a]$. Fijando t y por el Teorema de Taylor, tenemos que:

$$u(x+h, t) = u(x, t) + u_x(x, t)h + \frac{u_{xx}(x, t)}{2!}h^2 + \frac{u_{xxx}(x, t)}{3!}h^3 + \frac{u_{xxxx}(c_x^1, t)}{4!}h^4 \quad (12)$$

$$u(x-h, t) = u(x, t) - u_x(x, t)h + \frac{u_{xx}(x, t)}{2!}h^2 - \frac{u_{xxx}(x, t)}{3!}h^3 + \frac{u_{xxxx}(c_x^2, t)}{4!}h^4 \quad (13)$$

Sumando (12) y (13), llegamos a que

$$u(x+h, t) + u(x-h, t) = 2u(x, t) + u_{xx}(x, t)h^2 + \frac{u_{xxxx}(c_x^1, t) + u_{xxxx}(c_x^2, t)}{4!}h^4$$

Y, por el Teorema de los valores intermedios, existe $c_x \in (c_x^1, c_x^2)$ tal que

$$u(x+h, t) + u(x-h, t) = 2u(x, t) + 2u_{xx}(x, t)h^2 + 2\frac{u_{xxxx}(c_x, t)}{4!}h^4$$

de donde obtenemos que:

$$u_{xx}(x, t) = \frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2} - 2\frac{u_{xxxx}(c_x, t)}{4! \cdot h^2}h^4$$

Y por tanto:

$$\boxed{u_{xx}(x, t) = \frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)} \quad (14)$$

2.2. Cuestión 8

Sabemos por el problema inicial que $u_t(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t)$

Despreciando los términos $\mathcal{O}(k^2)$ y $\mathcal{O}(h^2)$ en (11) y (14) respectivamente y sustituyendo en el problema inicial, obtenemos que:

$$\frac{u(x, t+k) - u(x, t)}{k} = c^2 \cdot \frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2}$$

Finalmente, usando las aproximaciones $u_{i,j}$ para $u(x_i, t_j)$ y teniendo en cuenta que $x_{i+1} = x_i + h$ y $t_{j+1} = k + t_j$ llegamos a:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = c^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

2.3. Ejercicio 3

Use el método de diferencias finitas desarrollado a lo largo de esta sección para resolver numéricamente el problema de ecuación del calor siguiente.

$$\begin{cases} u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), & (x, t) \in (0, 1) \times (0, \frac{1}{5}) \\ u(0, t) = 0, u(1, t) = 0, & t \in [0, \frac{1}{5}] \\ u(x, 0) = 4x - 4x^2, & x \in [0, 1] \end{cases}$$

tomando $h = \frac{1}{5}$ y $k = \frac{2}{100}$ para la construcción de la malla.

a) Interpretar las condiciones iniciales y de contorno del problema

El calor de la varilla tiene inicialmente la forma $4x - 4x^2$

Además durante todo el tiempo que se mantenga el calor en la varilla, los extremos ($x = 0, x = 1$) se mantienen en 0 (condiciones de contorno).

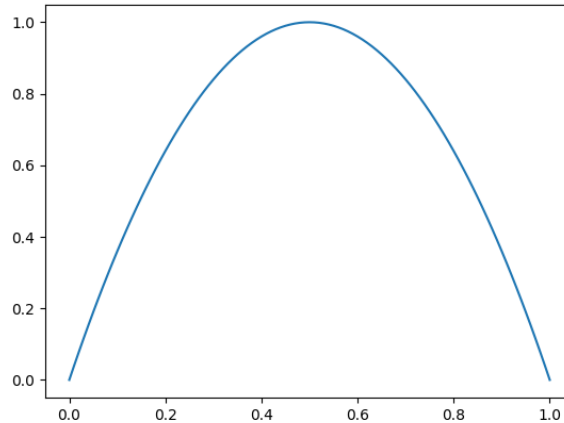


Figura 5: Condición inicial para $t=0$.

b) ¿Es estable el método? ¿Por qué?

Para que sea estable, el tamaño del paso k debe satisfacer la fórmula: $k \leq \frac{h^2}{2c^2}$

Efectivamente, $\frac{2}{100} \leq \frac{(\frac{1}{5})^2}{2 \cdot 1^2} = \frac{2}{100}$ cumple la fórmula y por tanto, el método sí es estable.

c) Construya una tabla en la que se muestren todos los valores de las aproximaciones $u_{i,j}$ en cada uno de los nodos de la malla

Para obtener los valores de las aproximaciones $u_{i,j}$, comenzamos rellendo la primera fila con los valores dados por la condición inicial. A continuación, podemos rellenar el resto con la siguiente fórmula, deducida en el enunciado de la práctica:

$$u_{i,j+1} = (1 - 2r)u_{i,j} + r(u_{i-1,j} + u_{i+1,j})$$

siendo $r = \frac{c^2 k}{h^2}$.

Así, obtenemos los valores:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
t_1	0	0.64	0.96	0.96	0.64	0
t_2	0	0.48	0.8	0.8	0.48	0
t_3	0	0.4	0.64	0.64	0.4	0
t_4	0	0.32	0.52	0.52	0.32	0
t_5	0	0.26	0.42	0.42	0.26	0
t_6	0	0.21	0.34	0.34	0.21	0
t_7	0	0.17	0.275	0.275	0.17	0
t_8	0	0.1375	0.2225	0.2225	0.1375	0
t_9	0	0.1113	0.18	0.18	0.1113	0
t_{10}	0	0.09	0.1456	0.1456	0.09	0

Cuadro 4: Valores de las aproximaciones $u_{i,j}$ en cada uno de los nodos de la malla

d) Obtenga la solución numérica del problema

La solución numérica del problema, representada gráficamente es la siguiente:

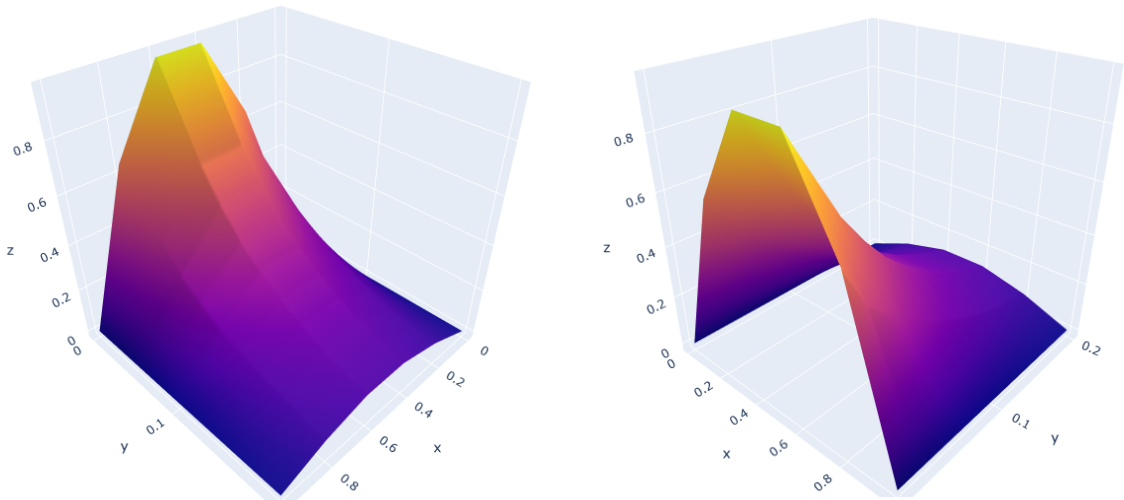


Figura 6: Solución numérica mediante método estable.

e) Considere ahora $h = \frac{2}{10}$ y $k = \frac{1}{30}$. ¿Es estable el método? ¿Por qué? Obtenga la solución numérica del problema con los nuevos valores de h y k .

Con los nuevos valores de k y h , el método no sería estable, ya que $\frac{1}{30} \geq \frac{(\frac{2}{10})^2}{2 \cdot 1^2} = \frac{2}{100}$, no cumple la condición de estabilidad. Por tanto, los errores que cometemos en la fila de una

mallas serán magnificados en las filas siguientes. Tal y como vemos en la figura siguiente, es mucho menos suave que la anterior.

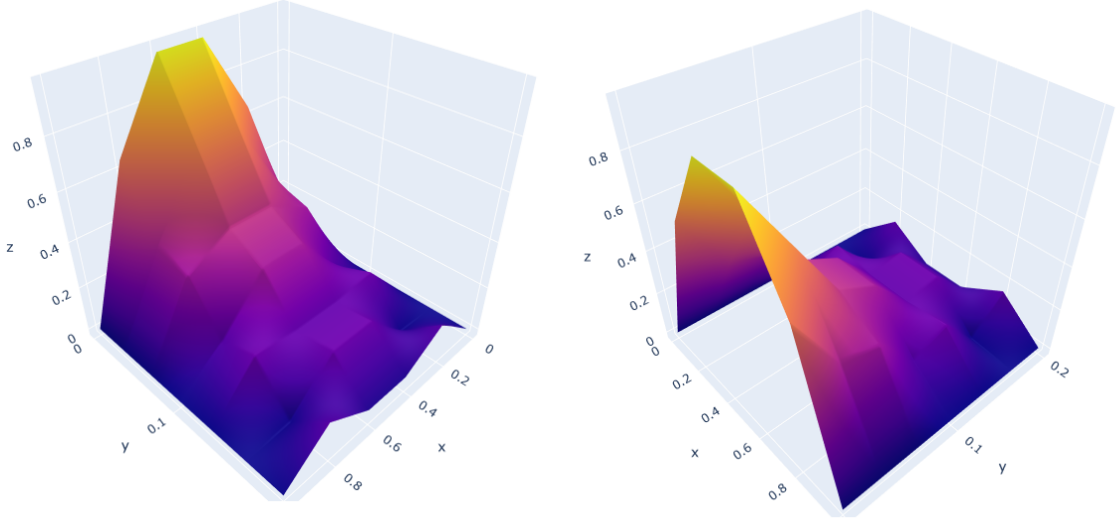


Figura 7: Solución numérica mediante método no estable.

2.4. Cuestión 9

$$u_t(x, t + \frac{k}{2}) = \frac{u(x, t + k) - u(x, t)}{k} + \mathcal{O}(k^2) \quad (15)$$

$$u_{xx}(x, t + \frac{k}{2}) = \frac{u(x - h, t + k) - 2u(x, t + k) + u(x + h, t + k) + u(x - h, t) - 2u(x, t) + u(x + h, t)}{2h^2} + \mathcal{O}(h^2) \quad (16)$$

Por el problema inicial, sabemos que $u_t(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t) \implies u_t(x, t + \frac{k}{2}) = c^2 u_{xx}(x, t + \frac{k}{2})$

Entonces, sustituyendo como indica (15) y (16), despreciando los términos de error $\mathcal{O}(h^2)$ y $\mathcal{O}(k^2)$ y utilizando la notación $u_{i,j} \approx u(x_i, t_j)$, obtenemos que:

$$\boxed{\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = c^2 \frac{u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{2h^2}} \quad (17)$$

2.5. Cuestión 10

De (17) tenemos:

$$2u_{i,j+1} - 2u_{i,j} = \frac{c^2 k}{h^2} (u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j})$$

Entonces, utilizando el cambio de variable $r = c^2 k / h^2$ tenemos:

$$2u_{i,j+1} - 2u_{i,j} = r(u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j})$$

$$-ru_{i-1,j+1} + 2u_{i,j+1} + 2ru_{i,j+1} - ru_{i+1,j+1} = 2u_{i,j} - 2ru_{i,j} + ru_{i-1,j} + ru_{i+1,j}$$

$$\boxed{-ru_{i-1,j+1} + (2+2r)u_{i,j+1} - ru_{i+1,j+1} = (2-2r)u_{i,j} + r(u_{i-1,j} + u_{i+1,j})} \quad (18)$$

2.6. Cuestión 11

Sabemos que:

$$-u_{i-1,j+1} + 4u_{i,j+1} - u_{i+1,j+1} = u_{i-1,j} + u_{i+1,j} \quad (19)$$

Y que las condiciones de contorno son:

$$u_{1,j} = u_{1,j+1} = c_1 \text{ y } u_{n,j} = u_{n,j+1} = c_2 \quad (20)$$

Representaremos las ecuaciones (19) en un sistema matricial $AX = B$, donde A es la matriz de coeficientes, X la matriz de incógnitas y B la matriz que contiene los términos independientes.

Para obtener la matriz A , cogemos los coeficientes del miembro izquierdo de (19) para $i = 2, \dots, n-1$, y obtenemos que:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Por otro lado, B está formado por los términos independientes. Asimismo, notar que para los casos $i = 2$ y $i = n-1$, hay que tener en cuenta las condiciones frontera.

$$i = 2 : -u_{1,j+1} + 4u_{2,j+1} - u_{3,j+1} = u_{1,j} + u_{3,j} \xrightarrow[u_{1,j+1}=c_1]{u_{1,j}=c_1} 4u_{2,j+1} - u_{3,j+1} = 2c_1 + u_{3,j}$$

$$i = n-1 : -u_{1,j+1} + 4u_{2,j+1} - u_{3,j+1} = u_{1,j} + u_{3,j} \xrightarrow[u_{n,j+1}=c_2]{u_{n,j}=c_2} 4u_{2,j+1} - u_{3,j+1} = 2c_2 + u_{n-1,j}$$

Por tanto, el primer elemento de B , $b_1 = 2c_1 + u_{3,j}$ y el último $b_{n-2} = 2c_2 + u_{n-1,j}$

Finalmente, para el resto de filas $i = 2, \dots, n-3$, $b_i = u_{i-1,j} + u_{i+1,j}$

En conclusión, la matriz B es:

$$B = \begin{pmatrix} 2c_1 + u_{3,j} \\ u_{2,j} + u_{4,j} \\ \vdots \\ u_{i-1,j} + u_{i+1,j} \\ \vdots \\ u_{n-3,j} + u_{n-1,j} \\ u_{n-2,j} + 2c_2 \end{pmatrix}$$

Entonces, el sistema tridiagonal $AX = B$ queda de la forma:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{2,j+1} \\ u_{3,j+1} \\ \vdots \\ u_{i,j+1} \\ \vdots \\ u_{n-2,j+1} \\ u_{n-1,j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 + u_{3,j} \\ u_{2,j} + u_{4,j} \\ \vdots \\ u_{i-1,j} + u_{i+1,j} \\ \vdots \\ u_{n-3,j} + u_{n-1,j} \\ u_{n-2,j} + 2c_2 \end{pmatrix} \quad (21)$$

2.7. Ejercicio 4

Use el método de Crank-Nicholson desarrollado a lo largo de esta sección para resolver numéricamente el problema de ecuación del calor siguiente.

$$\begin{cases} u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), & (x, t) \in (0, 1) \times (0, \frac{1}{10}) \\ u(0, t) = 0, u(1, t) = 0, & t \in [0, \frac{1}{10}] \\ u(x, 0) = \sin(\pi x) + \sin(3\pi x), & x \in [0, 1] \end{cases}$$

tomando $h = \frac{1}{10}$ y $k = \frac{1}{100}$ para la construcción de la malla.

a) Interpretar las condiciones iniciales y de contorno del problema

El calor de la varilla tiene inicialmente la forma $\sin(\pi x) + \sin(3\pi x)$

Además durante todo el tiempo que se mantenga el calor en la varilla, los extremos ($x = 0, x = 1$) se mantienen en 0 (condiciones de contorno).

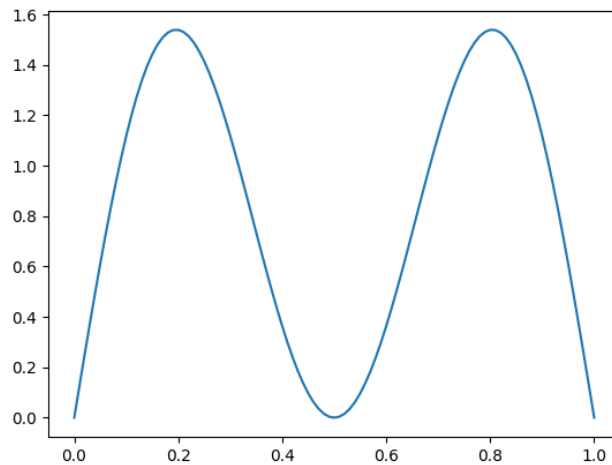


Figura 8: Condición inicial para $t=0$.

b) ¿Es estable el método? ¿Por qué?

Para que sea estable, el tamaño del paso k debe satisfacer la fórmula: $k \leq \frac{h^2}{2c^2}$

Sin embargo, esto no se cumple ya que, $\frac{1}{100} \geq \frac{(\frac{1}{10})^2}{2 \cdot 1^2} = \frac{1}{200}$ no satisface la fórmula y por tanto, no es estable el método. Por esta razón, debemos utilizar el método de Crank-Nicholson para evitar el coste computacional.

c) Construya una tabla en la que se muestren todos los valores de las aproximaciones $u_{i,j}$ en cada uno de los nodos de la malla

Para obtener los valores de las aproximaciones, hemos resuelto el sistema desarrollado en la sección (21). El resultado que hemos obtenido ha sido:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
t_1	0	1.118	1.5388	1.118	0.3633	0	0.3633	1.118	1.5388	1.118	0
t_2	0	0.5776	0.7716	0.9701	0.8728	0.6188	0.4845	0.5926	0.7678	0.5767	0
t_3	0	0.3033	0.4414	0.6908	0.7741	0.7613	0.6822	0.6104	0.5479	0.3289	0
t_4	0	0.1781	0.2709	0.4641	0.5913	0.6855	0.6985	0.6522	0.5385	0.2716	0
t_5	0	0.1111	0.1734	0.3115	0.4306	0.5488	0.6149	0.621	0.5314	0.2675	0
t_6	0	0.0719	0.1141	0.2112	0.3081	0.4172	0.5004	0.5387	0.4847	0.254	0
t_7	0	0.0477	0.0766	0.1447	0.219	0.3092	0.3892	0.4393	0.4122	0.2242	0
t_8	0	0.0322	0.0522	0.1	0.1554	0.2259	0.2945	0.344	0.3329	0.1863	0
t_9	0	0.022	0.036	0.0696	0.1102	0.1638	0.2189	0.2621	0.2594	0.1481	0
t_{10}	0	0.0152	0.025	0.0487	0.0783	0.1181	0.1608	0.1959	0.1971	0.1141	0
t_{11}	0	0.0106	0.0175	0.0343	0.0556	0.0849	0.1171	0.1446	0.1471	0.0861	0

Cuadro 5: Valores de las aproximaciones $u_{i,j}$ en cada uno de los nodos de la malla

d) Compruebe que la solución analítica del problema viene dada por

$$u(x, t) = \sin(\pi x)e^{-\pi^2 t} + \sin(3\pi x)e^{-9\pi^2 t}$$

Empecemos verificando que la posible solución satisface el problema:

$$u_x = \pi e^{-\pi^2 t} \cos(\pi x) + 3\pi e^{-9\pi^2 t} \cos(3\pi x)$$

$$u_{xx} = -\pi^2 e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x) - 9\pi^2 e^{-9\pi^2 t} \sin(3\pi x)$$

$$u_t = -\pi^2 \sin(\pi x)e^{-\pi^2 t} - 9\pi^2 \sin(3\pi x)e^{-9\pi^2 t}$$

Vemos que efectivamente, $u_t(x, t) = u_{xx}(x, t)$

Además $u(0, t) = 0$, $u(1, t) = 0$ y $u(x, 0) = \sin(\pi x) + \sin(3\pi x)$ y cumple las condiciones de compatibilidad. Por tanto, como $u \in C^2([0, 1] \times [0, 1/10])$, $u(x, t)$ concluimos con que $u(x, t)$ sí es la solución analítica del problema.

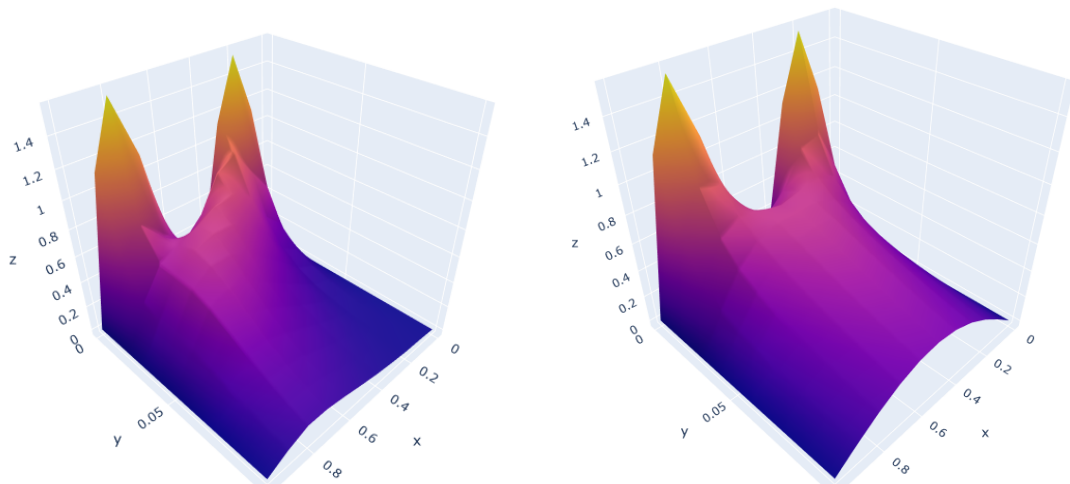
e) Proporcione una tabla en la que se muestren los errores cometidos por las aproximaciones $u_{i,j}$, teniendo en cuenta la solución exacta

Para obtener esta tabla, hemos partido de los valores de la tabla obtenida en el apartado c) y una tabla nueva con los valores reales ya que conocemos la solución analítica. Entonces, la resta en valor absoluto de las dos tablas nos proporciona los errores cometidos por las aproximaciones:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
t_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
t_2	0	0.0352	0.1521	0.11	0.2529	0.1242	0.1354	0.2675	0.1559	0.0361	0
t_3	0	0.0873	0.202	0.0256	0.0929	0.1097	0.001	0.106	0.0955	0.0616	0
t_4	0	0.1081	0.2325	0.1591	0.0751	0.0114	0.0321	0.029	0.0351	0.0145	0
t_5	0	0.1203	0.2499	0.2424	0.1934	0.0964	0.0091	0.067	0.1081	0.0361	0
t_6	0	0.1263	0.2559	0.2863	0.2656	0.1815	0.0733	0.0412	0.1147	0.0558	0
t_7	0	0.1272	0.2531	0.3043	0.3042	0.2391	0.134	0.0097	0.0824	0.0494	0
t_8	0	0.1243	0.2443	0.3061	0.32	0.2732	0.1809	0.0621	0.0365	0.0298	0
t_9	0	0.1189	0.2317	0.298	0.3211	0.2894	0.2124	0.1055	0.0083	0.0071	0
t_{10}	0	0.1122	0.2171	0.2842	0.3128	0.2929	0.2302	0.137	0.045	0.0133	0
t_{11}	0	0.1047	0.2017	0.2673	0.2988	0.2877	0.2372	0.157	0.0721	0.0292	0

Cuadro 6: Errores cometidos por las aproximaciones $u_{i,j}$ teniendo en cuenta la solución exacta

f) Obtenga la solución numérica del problema



(a) Valores aproximados

(b) Valores reales

Figura 9: Comparativa entre los valores aproximados y los reales.

3. EDPs elípticas. Las ecuaciones de Laplace y Poisson

3.1. Cuestión 12

Supongamos que $f \in C^4([a, b])$ y $x - h, x, x + h \in [a, b]$. Fijando x y por el Teorema de Taylor, tenemos que:

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \frac{f''''(c_x^1)}{4!}h^4 \quad (22)$$

$$f(x-h) = f(x, t) - f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 - \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \frac{f''''(c_x^2)}{4!}h^4 \quad (23)$$

Sumando (22) y (23), llegamos a que

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x)h + f''(x, t)h^2 + \frac{f''''(c_x^1) + f''''(c_x^2)}{4!}h^4$$

Y, por el Teorema de los valores intermedios, existe $c_x \in (c_x^1, c_x^2)$ tal que

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + 2f''(x)h^2 + 2\frac{f''''(c_x)}{4!}h^4$$

de donde obtenemos que:

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - 2\frac{f''''(c_x)}{4! \cdot h^2}h^4$$

Y por tanto:

$$\boxed{f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)} \quad (24)$$

3.2. Cuestión 13

Aplicando el mismo procedimiento a una función $u(x, y)$ podemos aproximar u_{xx} y u_{yy} :

Supongamos que $u \in \mathcal{C}^4([a, b] \times [c, d])$ y $y-h, yy+h \in [c, d]$. Fijando x y por el Teorema de Taylor, tenemos que:

$$u(x, y+h) = u(x, y) + u_y(x, y)h + \frac{u_{yy}(x, y)}{2!}h^2 + \frac{u_{yyy}(x, y)}{3!}h^3 + \frac{u_{yyyy}(x, c_y^1)}{4!}h^4 \quad (25)$$

$$u(x, y-h) = u(x, y) - u_y(x, y)h + \frac{u_{yy}(x, y)}{2!}h^2 - \frac{u_{yyy}(x, y)}{3!}h^3 + \frac{u_{yyyy}(x, c_y^2)}{4!}h^4 \quad (26)$$

Sumando (25) y (26), llegamos a que

$$u(x, y+h) + u(x, y-h) = 2u(x, y)h + u_{yy}(x, y)h^2 + \frac{u_{yyyy}(x, c_y^1) + u_{yyyy}(x, c_y^2)}{4!}h^4$$

Y, por el Teorema de los valores intermedios, existe $c_y \in (c_y^1, c_y^2)$ tal que

$$u(x, y+h) + u(x, y-h) = 2u(x, y) + 2u_{yy}(x, y)h^2 + 2\frac{u_{yyyy}(x, c_y)}{4!}h^4$$

de donde obtenemos que:

$$u_{yy}(x, y) = \frac{u(x, y+k) - 2u(x, y) + u(x, y-k)}{h^2} - 2\frac{u_{yyyy}(x, c_y)}{4! \cdot h^2}h^4$$

Y por tanto:

$$u_{yy}(x, y) = \frac{u(x, y+h) - 2u(x, y) + u(x, y-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \quad (27)$$

Supongamos que $u \in \mathcal{C}^4([a, b] \times [c, d])$ y $x-h, x, x+h \in [a, b]$. Fijando t y por el Teorema de Taylor, tenemos que:

$$u(x+h, y) = u(x, y) + u_x(x, y)h + \frac{u_{xx}(x, y)}{2!}h^2 + \frac{u_{xxx}(x, y)}{3!}h^3 + \frac{u_{xxxx}(c_x^1, y)}{4!}h^4 \quad (28)$$

$$u(x-h, y) = u(x, y) - u_x(x, y)h + \frac{u_{xx}(x, y)}{2!}h^2 - \frac{u_{xxx}(x, y)}{3!}h^3 + \frac{u_{xxxx}(c_x^2, y)}{4!}h^4 \quad (29)$$

Sumando (28) y (29), llegamos a que

$$u(x+h, y) + u(x-h, y) = 2u(x, y) + u_{xx}(x, y)h^2 + \frac{u_{xxxx}(c_x^1, y) + u_{xxxx}(c_x^2, y)}{4!}h^4$$

Y, por el Teorema de los valores intermedios, existe $c_x \in (c_x^1, c_x^2)$ tal que

$$u(x+h, y) + u(x-h, y) = 2u(x, y) + 2u_{xx}(x, y)h^2 + 2\frac{u_{xxxx}(c_x, y)}{4!}h^4$$

de donde obtenemos que:

$$u_{xx}(x, y) = \frac{u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y)}{h^2} - 2\frac{u_{xxxx}(c_x, y)}{4! \cdot h^2}h^4$$

Y por tanto:

$$u_{xx}(x, y) = \frac{u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \quad (30)$$

Ahora que tenemos u_{xx} y u_{yy} podemos calcular el Laplaciano, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$:

$$\Delta u(x, y) = \frac{u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y)}{h^2} + \frac{u(x, y+h) - 2u(x, y) + u(x, y-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

$$\boxed{\Delta u(x, y) = \frac{u(x+h, y) + u(x-h, y) + u(x, y+h) + u(x, y-h) - 4u(x, y)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)} \quad (31)$$

3.3. Cuestión 14

En (31) realizamos el cambio de variable $x_{i+1} - x_i = h = y_{i+1} - y_i$ y sabemos que en la ecuación de Laplace $-\Delta u(x, y) = 0$ en su dominio, por tanto:

$$\boxed{\frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}}{h^2} = 0} \quad (32)$$

3.4. Ejercicio 5

Resuelva numéricamente la ecuación de Laplace $-\Delta u(x, y) = 0$ en el rectángulo

$$R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4\}$$

donde las condiciones de frontera vienen dadas como

$$\begin{cases} u(x, 0) = 20, & \text{para todo } 0 < x < 4 \\ u(x, 4) = 180, & \text{para todo } 0 < x < 4 \\ u(0, y) = 80, & \text{para todo } 0 < y < 4 \\ u(4, y) = 0, & \text{para todo } 0 < y < 4 \end{cases}$$

Hemos decidido coger los pasos $h = k = \frac{2}{5}$, lo que nos da como resultado 9 puntos en el interior.

Para obtener la solución, hemos creado un sistema matricial $AX = B$ utilizando la ecuación de (32) y con ello hemos creado una matriz de coeficientes A de tamaño $(4 + 81) \times (4 + 81)$, siendo 4 los valores l_1, l_2, l_3, l_4 , 180, 80, 20 y 0 respectivamente, que son los valores en las fronteras. Las 81 filas y columnas restantes corresponden con cada una de las 81 incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_{80}, x_{81}$.

Por simplicidad, mostramos cómo sería las matrices A , B y C para una malla menos fina, con únicamente 4 puntos.

$$A = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -4 \end{array} \right) \quad X = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 180 \\ 80 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tras resolver el sistema de 85 ecuaciones, obtenemos los siguientes puntos interiores:

	$x = 0$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	$x = 4$
$y = 4$		180	180	180	180	180	180	180	180	180	
y_9	80	127.3	144.4	150.7	152.3	151.1	147.2	139.4	123.8	89.1	0
y_8	80	105.0	119.4	126	127.5	125.0	118.4	106.6	86.5	52.7	0
y_7	80	93.3	102.3	106.5	106.5	102.8	95.0	82.2	62.8	35.3	0
y_6	80	85.9	89.9	91.1	89.4	84.7	76.5	64.3	47.3	25.5	0
y_5	80	80.5	80.2	78.7	75.4	70	62.0	51.0	36.8	19.4	0
y_4	80	75.8	71.9	68.0	63.5	57.9	50.6	41.1	29.3	15.4	0
y_3	80	70.8	63.5	57.8	52.8	47.5	41.2	33.5	24.0	12.7	0
y_2	80	63.8	53.5	47.1	42.4	38.0	33.3	27.7	20.6	11.5	0
y_1	80	50.9	39.8	34.6	31.5	29.0	26.4	23.3	19.1	12.7	0
$y = 0$		20	20	20	20	20	20	20	20	20	

Cuadro 7: Valores interiores

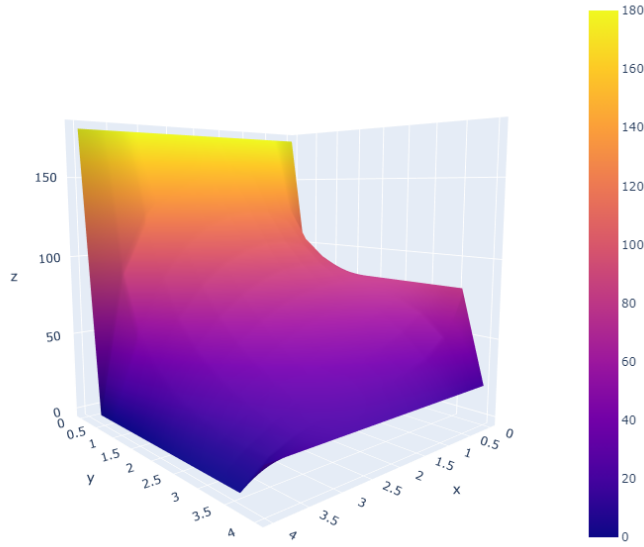


Figura 10: Valores aproximados para un paso de 0,05.

3.5. Ejercicio 6

Adapte la teoría de la presente sección para poder resolver numéricamente la ecuación de Poisson en el rectángulo $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$, considerando la malla correspondiente del mismo tal y como se ha hecho para la ecuación de Laplace.

Partiendo del resultado de la cuestión 13, consideramos el rectángulo

$$R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$$

subdividido en $(n - 1) \times (m - 1)$ cuadrados de lado h , es decir $a = nh$ y $b = mh$. Además notamos que los nodos de la malla están equiespaciados, pues $x_{i+1} - x_i = h$ y $y_{i+1} - y_i = h$. Como el $\Delta u(x, y) = f(x)$ sustituimos en la ecuación y nos queda:

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = h^2 f(x) \quad (33)$$

La fórmula relaciona el valor de la aproximación $u_{i,j}$ con sus cuatro vecinos, además de depender del valor de la función de la frontera en cada nodo de la malla y la separación que hay entre los cuadrados de la malla.

Así, obteniendo los valores que debe de tomar en la frontera:

$$u(x_1, y_j) = u_{1,j} \quad \forall 2 \leq j \leq m-1$$

$$u(x_i, y_1) = u_{i,1} \quad \forall 2 \leq i \leq n-1$$

$$u(x_n, y_j) = u_{n,j} \quad \forall 2 \leq j \leq m-1$$

$$u(x_i, y_m) = u_{i,m} \quad \forall 2 \leq i \leq n-1$$

Con los valores de la frontera y la fórmula anterior obtenemos un sistema lineal de $n-2$ ecuaciones con $n-2$ incógnitas que puede ser resuelto para hallar las aproximaciones de la solución en el interior de la malla.

3.6. Ejercicio 7

Resuelve numéricamente la ecuación de Poisson $\Delta u(x, y) = xe^y$ en el rectángulo

$$R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$$

donde la condiciones frontera vienen dadas como

$$\begin{cases} u(x, 0) = x, & \text{para todo } 0 \leq x \leq 2 \\ u(x, 1) = ex, & \text{para todo } 0 \leq x \leq 2 \\ u(0, y) = 0, & \text{para todo } 0 \leq y \leq 1 \\ u(2, y) = 2e^y, & \text{para todo } 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

haciendo uso de pasos $h = \frac{1}{4}$ y $k = \frac{1}{2}$.

Compare los resultados numéricos obtenidos con la solución exacta $u(x, y) = xe^y$, verificando previamente que, en efecto, dicha solución de la ecuación de Poisson anterior.

Comprobemos primero que $u(x, y) = xe^y$ es efectivamente la solución del problema.

$$\begin{cases} u_x(x, y) = e^y \implies u_{xx}(x, y) = 0 \\ u_t(x, y) = xe^y \implies u_{xt}(x, y) = xe^y \end{cases}$$

Vemos que $u(x, y) = xe^y$ cumple la ecuación de Poisson:

$$\Delta u(x, y) = u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0 + xe^y = xe^y \implies \boxed{\Delta u(x, y) = xe^y}$$

Y que es compatible con las condiciones frontera:

$$\begin{cases} u(x, 0) = xe^0 = x, & \text{para todo } 0 \leq x \leq 2 \\ u(x, 1) = xe^1 = ex, & \text{para todo } 0 \leq x \leq 2 \\ u(0, y) = 0 \cdot e^y = 0 = 0, & \text{para todo } 0 \leq y \leq 1 \\ u(2, y) = 2 \cdot e^y = 2e^y, & \text{para todo } 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

Siguiendo los pasos del ejercicio anterior, realizamos una matriz de dimensión 9×9 , siendo 9 el número de nodos interiores de la malla, para crear un sistema $AX = B$ en este caso utilizando (33). Para que resulte una matriz cuadrada escogemos $k = \frac{1}{2}$ como paso en x , y $h = \frac{1}{4}$ para la y . La diferencia con el anterior es que en vez de hacer una submatriz para ver qué lado del borde es. Dependiendo de la posición del nodo, obtenemos sus coordenadas y las sustituimos en la $f(x)$ correspondiente, para así obtener el coeficiente de cada ecuación. La matriz de coeficientes A , la de incógnitas X y la de resultado B son:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{5}{8} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{5}{8} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{5}{8} & 0 & 0 & \frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{16} & 0 & 0 & -\frac{5}{8} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{16} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{5}{8} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{16} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{16} & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{5}{8} & 0 & 0 & \frac{1}{16} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16} & 0 & 0 & -\frac{5}{8} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16} & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{5}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16} & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{5}{8} \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} -0,07491 \\ -0,1441 \\ -1,2637 \\ 0,0100 \\ 0,0258 \\ -1,0089 \\ -0,0212 \\ -0,0367 \\ -1,1026 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos la solución aproximada del problema en R , cuyos valores mostramos a continuación, tanto en tabla como gráficamente.

	$x = 0$	$x = 0,5$	$x = 1$	$x = 1,5$	$x = 2$
$y = 1$	0	1.3591	2.7183	4.0774	5.4366
$y = 0,75$	0	1.0539	2.1045	3.1594	5.4366
$y = 0,5$	0	0.9222	1.8856	2.9564	4.234
$y = 0,25$	0	0.786	1.6496	2.7197	3.2974
$y = 0$	0	0.5	1	1.5	2

Cuadro 8: Solución aproximada del problema planteado en R

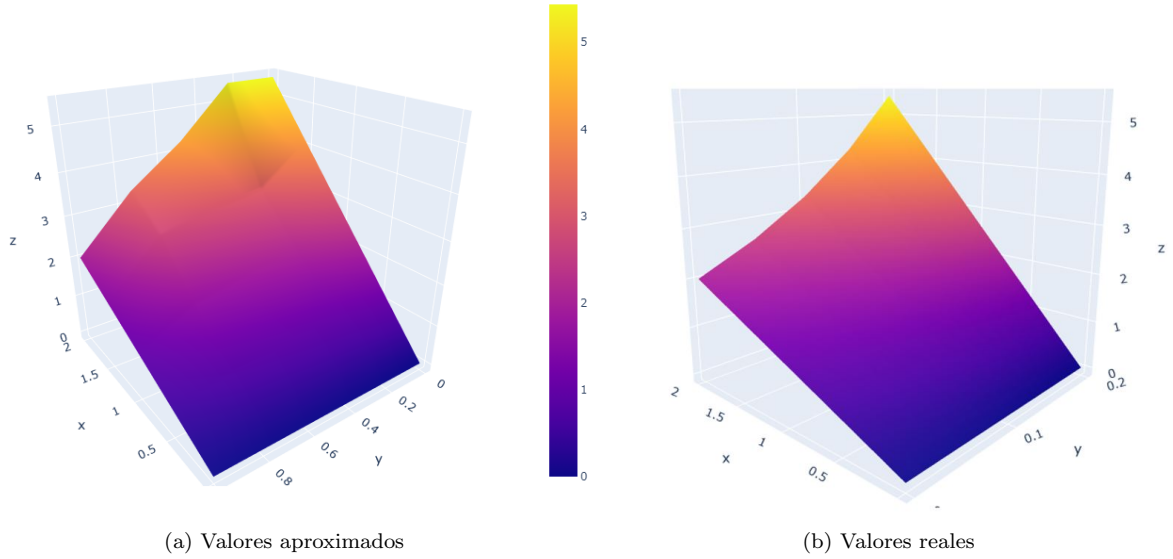


Figura 11: Comparativa entre los valores aproximados y los reales.