Universidad Politécnica de Madrid

Facultad de Ingenieros Informáticos

Resolución de Sudokus aplicando Bases de Gröbner

Modelización grupo B5

Autores:

Lucía Jiang [redacted]

Jaime [redacted]

Lucía [redacted]

25 de mayo de 2022

Índice

1. Introducción

El propósito de este trabajo es utilizar la teoría de Bases de Gröbner y aplicarlas para la resolución de un tablero de Sudoku 9x9 y alguna de sus variantes (4x4 y 6x6). Para ello, los hemos representado como sistemas de ecuaciones de tres maneras diferentes: restricciones suma y producto, coloración de grafos y por variables booleanas.

Para explicar cómo se han obtenido las ecuaciones, se explicará primero con un Shidoku. Un Shidoku es una variación del Sudoku 9x9, de tamaño 4x4 rellenados del 1 al 4 sin repetir filas, columnas ni cuadrados 2x2. Tras ello, se indicarán las ecuaciones del 9x9 y se omitirán las del 6x6, que son completamente análogas.

Finalmente, buscaremos una base de Gröbner a los sistema de ecuaciones y estudiaremos el número de soluciones que presenta el tablero, así como el rendimiento de cada representación.

	3	4	
4			2
1			3
	2	1	

2	3	4	1
4	1	3	2
1	4	2	3
3	2	1	4

Figura 1: Ejemplo Shidoku resuelto

2	5			3		9		1
	1				4			
4		7				2		8
		5	2					
				9	8	1		
	4				3			
			3	6			7	2
	7							3
9		3				6		4

Figura 2: Ejemplo sudoku

2. Restricciones suma-producto

2.1. Shidoku

Este sistema se basa en que usando los números del 1-4, la única manera de que la suma sea 10 y el producto 24 sea utilizando cada número una única vez. Hay cuatro maneras diferentes de combinar los números 1, 2, 3 y 4 de manera que sumen 10 ($\{1,1,4,4\}, \{1,3,3,3\}, \{2,2,2,4\}, \{2,2,3,3\}$) pero ninguna de ellas multiplica 24.

Sean $x_{1,1}, ..., x_{4,4}$ el valor que toma cada una de las 16 celdas respectivamente. Las ecuaciones son de la forma:

1. **Soluciones enteras:** establecemos la condición de que los números solo pueden tomar valores enteros del 1-4:

$$(x_{i,j} - 1) \cdot (x_{i,j} - 2) \cdot (x_{i,j} - 3) \cdot (x_{i,j} - 4) = 0 \qquad \text{con } i, j = 1, 2, 3, 4$$

2. **Restricciones sumas y productos:** sean $\{w, x, y, z\}$ cuatro celdas en la misma fila, columna o cuadrado.

$$w + x + y + z - 10 = 0$$

$$wxyz - 24 = 0$$

Finalmente, a estas ecuaciones habría que añadir las de los datos iniciales. Por ejemplo, para los datos de la figura 1 sería añadir: $x_{1,4} - 4 = 0, x_{2,1} - 4 = 0, x_{2,3} - 2 = 0, x_{3,2} - 3 = 0, x_{3,4} - 1 = 0, x_{4,1} - 1 = 0$.

Estas ecuaciones, más las de los datos iniciales completarían la representación del Shidoku. Resultando en un total de 40 ecuaciones + datos iniciales.

2.2. Sudoku

La idea es la misma que el Shidoku 4x4, pero con el problema de que los números $\{1, ..., 9\}$ no cumplen que la única forma de que sumen 45 y multipliquen $9! = 362800$ sea utilizando todos los números una sola vez. Por ejemplo, el conjunto $\{9, 9, 7, 5, 4, 4, 4, 2, 1\}$ cumple estas dos restricciones.

Por tanto, es necesario buscar otro conjunto de 9 números enteros que cumplan suma y producto único. Tras indagar un poco, hemos dado con que el conjunto $\{-2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ sí lo verifica.

Haremos una correspondencia de los números, -2 $\rightarrow$ 8, -1 $\rightarrow$ 9 y resto de números igual.

Las ecuaciones resultantes son:

1. **Soluciones enteras:**

$$(x_{i,j}+2)\cdot(x_{i,j}+1)\cdot(x_{i,j}-1)\cdot(x_{i,j}-2)\cdot(x_{i,j}-3)\cdot(x_{i,j}-4)\cdot(x_{i,j}-5)\cdot(x_{i,j}-6)\cdot(x_{i,j}-7)=0$$

   con $i, j = 1, ..., 9$

2. **Restricciones suma y producto:** sean $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}$ 9 celdas de la misma fila, columna o cuadrado

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 - 25 = 0$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \cdot x_8 \cdot x_9 - 10080 = 0$$

Quedan 135 ecuaciones + datos iniciales.

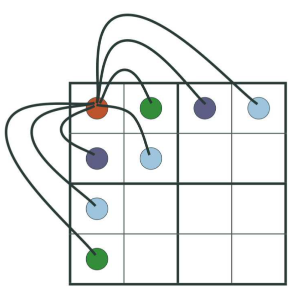
3. Coloración de grafos

Otra manera de representar los tableros es, en vez de considerar el conjunto de todas las celdas que pertenecen a la misma región, estudiarlo como pares de celdas que están relacionadas.

Esto es equivalente al problema de coloración de grafos. Consideraremos el sudoku como un grafo, en el que cada celda es un vértice, cada celda con la que está relacionada (misma fila, columna o cuadrado) una arista, y cada valor de la celda un color.

Utilizaremos las raíces n-ésimas para referirnos a cada color, siendo n la dimensión del $n \times n$ tablero.

3.1. Shidoku



1	2	3	4
3	4		
2			
4			

Figura 3: Grafo relacionado con el Shidoku

Reemplazaremos los valores $\{1, 2, 3, 4\}$ por las raíces de $\sqrt[4]{1}$, $\{1, -1, i, -i\}$.

1. **Restringir colores:** 16 ecuaciones, una para cada celda/vértice

$$x_{i,j}^4 - 1 = 0 \qquad \text{con } i, j = 1, ..., 4$$

2. **Restricciones 2 a 2:**

   Sean x, y dos vértices conectados por alguna arista (celdas en misma región), como $x^4 - 1 = 0$ y $y^4 - 1 = 0$, tenemos que $x^4 - y^4 = 0$ y factorizando: $(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2) = 0$. Como x, y pertenecen a la misma región, $x \neq y$ y por tanto $x - y \neq 0$. Obtenemos la ecuación:

$$(x + y)(x^2 + y^2) = 0$$

Obtenemos $\binom{4}{2} = 6$ combinaciones de escoger x, y por cada una de las 4 columnas y las 4 filas. Además. por cada bloque 2x2 tenemos $\binom{4}{2}$ combinaciones, de las que ya hemos considerado las 2 de fila y 2 de columna, luego $6 - 2 - 2 = 2$.

Obtenemos un total de $6 \cdot 4 + 6 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 16 = 72$ ecuaciones + datos iniciales.

3.2. Sudoku

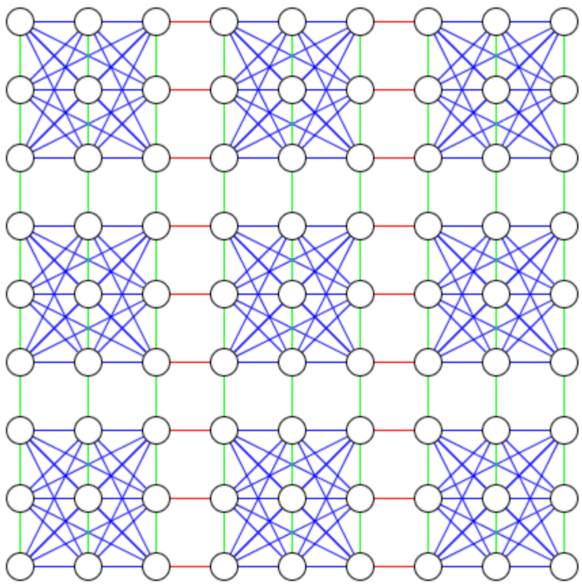


Figura 4: Versión simplificada del grafo relacionado con el Sudoku 9x9

Reemplazaremos los valores $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ por las raíces de $\sqrt[9]{1}$, que son $\{e^0 = 1, e^{2i\pi/9}, e^{4i\pi/9}, e^{2i\pi/3}, e^{8i\pi/9}, e^{-2i\pi/9}, e^{-4i\pi/9}, e^{-2i\pi/3}, e^{-8i\pi/9}\}$

1. **Restringir colores:** 81 ecuaciones, una para celda/vértice

$$x_{i,j}^9 - 1 = 0 \qquad \text{con } i, j = 1, ..., 9$$

2. **Restricciones 2 a 2:**

   Se hace lo mismo que en el 4x4, pero considerando $x^9 - y^9 = 0$, factorizando $(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^6+x^3y^3+y^6)$ y sabiendo que $x - y \neq 0$ queda como resultado

$$(x^2+xy+y^2)(x^6+x^3y^3+y^6)$$

Obtenemos $\binom{9}{2}\cdot 9 + \binom{9}{2}\cdot 9 + (\binom{9}{2} - 18)\cdot 9 + 81 = 648 + 162 + 81 = 891$. Por tanto, tenemos 891 ecuaciones.

4. Variables booleanas

Finalmente, presentamos la última representación del juego: el sistema booleano. Introducimos más variables a cambio de unas ecuaciones más simples. Para cada celda del tablero, incluiremos tantas variables booleanas como número de posibles valores haya. En esta sección se explicará el Shidoku y el Sudoku a la vez debido a la similaridad de ambas.

1. **Variables booleanas:** sea n el tamaño del lado (4 para Shidoku y 9 para Sudoku), $x_{i,j}$ una celda, denotaremos $x_{i,j,k} = 1$ cuando la celda $x_{i,j}$ tome el valor k, con $k = 1...n$, y $x_{i,j,k} = 0$ en caso contrario. En el Shidoku pasaremos de 16 variables a $16\cdot 4 = 64$, y en el Sudoku de 81 a $81\cdot 9 = 729$.

$$(x_{i,j,k})\cdot(x_{i,j,k} - 1) = 0 \qquad i, j, k \in \{1, ..., n\}$$

2. **Cada celda un único valor:** sabemos que cada celda no puede tomar más de un valor, esto es, $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$ existirá un único k tal que $x_{i,j,k} = 1$.

$$\sum_{k=1}^{n} x_{i,j,k} = 1 \qquad i, j \in \{1, ..., n\}$$

3. **Dos celdas en misma región con diferentes valores:** sean $x_{i,j}, y_{i',j'}$ dos celdas que pertenecen a una misma región (fila, columna o cuadrado), $\forall k$ se cumple que $x_{i,j,k}$ o $y_{i',j',k}$ tiene que ser 0. Luego:

$$\sum_{k=1}^{n} x_{i,j,k}\cdot y_{i',j',k} = 0 \quad \text{con } i, j, i', j' \in \{1, ..., n\}$$

Para el Shidoku salen 136 ecuaciones + datos iniciales, y para el Sudoku 1620 + datos iniciales.

5. Interfaz

Para visualizar el funcionamiento, hemos creado una interfaz en Python para los tableros 4x4, 6x6 y 9x9, utilizando la librería de Kivy.

En ella se puede ver cómo introduciendo unos valores iniciales en el tablero, podemos obtener todas las soluciones gracias a las bases de Gröbner. Con el botón del medio podremos recorrer todas las soluciones posibles y también nos indicará cuándo no hay soluciones. Asimismo, se indica el tiempo que se ha tardado en calcular todas las soluciones.

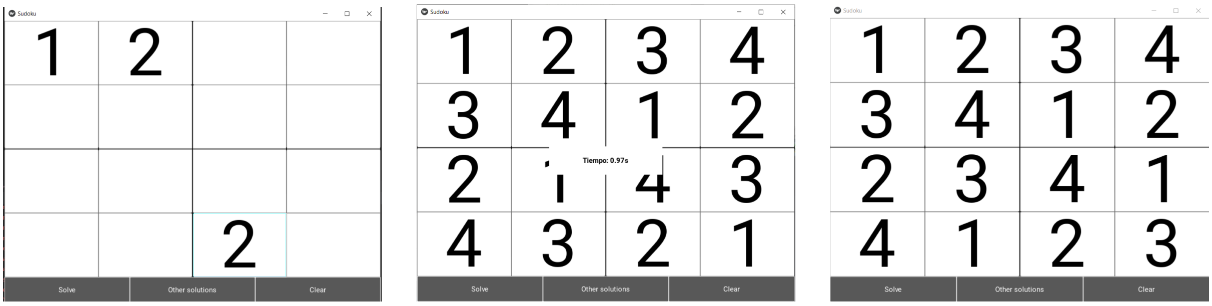


Figura 5: Interfaz del Shidoku

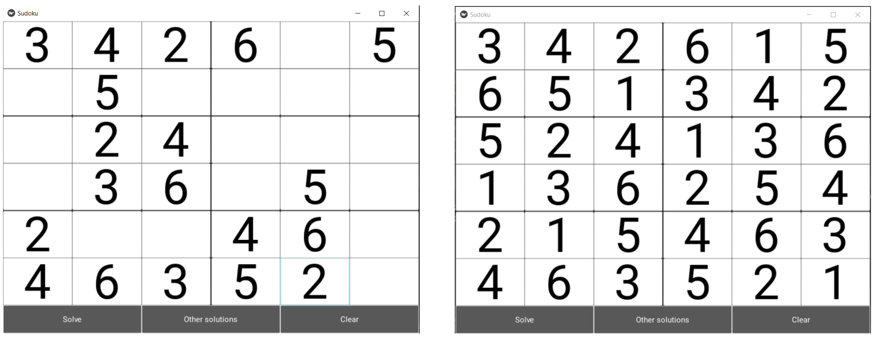


Figura 6: Interfaz del Sudoku 6x6

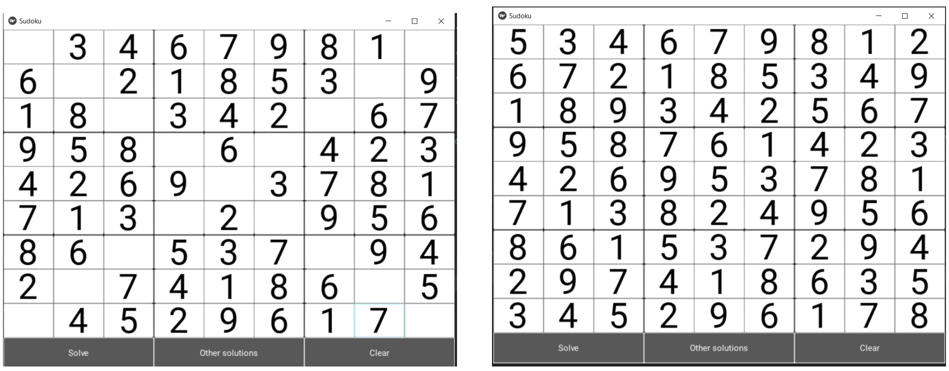


Figura 7: Interfaz del Sudoku 9x9

6. Cálculo de las bases de Gröbner

6.1. Algoritmo de Buchberger

Para obtener las bases de Gröbner hemos recurrido a una librería de Python (Sympy), que utiliza el algoritmo de Buchberger. Este algoritmo obtiene, a partir de un conjunto de generadores de un ideal de polinomios, una base de Gröbner. El funcionamiento general del algoritmo es el siguiente:

Entrada: un conjunto de polinomios finito F que genera I

Salida: una base de Gröbner G que genera I

1. $G := F$
2. $\forall f_i, f_j$ en G, se denota por g_i al término líder de f_j con respecto del orden dado (hemos utilizado orden lexicográfico), y por a_{ij} al mínimo común múltiplo de g_i y g_j.
3. Se escogen dos polinomios en G, y se denota $S_{ij} = \frac{a_{ij}}{g_j} f_j - \frac{a_{ij}}{g_j} f_j$.
4. Se reduce S_{ij} mediante un algoritmo llamado división multivariante, con respecto del conjunto G hasta que el resultado no se pueda reducir más. Si el resultado es distinto de cero, se añade a G.
5. Se repiten los pasos 2-4 hasta que todos los pares posibles hayan sido considerados, incluidos los que contienen polinomios añadidos en el paso 4.
6. Se devuelve G.

6.2. Complejidad

La complejidad del algoritmo de Buchberger es muy complicado de estimar, ya que las ecuaciones y operaciones pueden cambiar drásticamente el tiempo de ejecución. Sin embargo; está demostrado que los grados de los elementos de una base de Gröbner reducida siempre están acotados por

$$2 \cdot \left(\frac{d^2}{2} + d \right)^{2^{n-2}}$$

siendo n el número de variables y d el grado total de los polinomios de entrada [5].

7. Resultados

7.1. Comparación de representaciones

Las ecuaciones de la representación suma-producto son las más complicadas, mientras que las de los booleanos son las más simples (orden menor). Esto lleva a pensar que la mejor representación es la de los booleanos, luego la de coloración y finalmente la de suma-producto.

No obstante, el hecho de intentar transformar las ecuaciones a otras de orden inferior, ha supuesto el drástico aumento en el número de ecuaciones, que influye negativamente en el algoritmo de Buchberger. Esto se ha probado empíricamente, realizando pruebas con las 3 representaciones.

A continuación se deja una tabla con los resultados de realizar varias pruebas utilizando los tableros que se muestran en las figuras 5, 6 y 7. Cabe mencionar que según la variante del juego, la dificultad del tablero ha sido diferente:

1. Shidoku 4x4 con varias soluciones
2. Sudoku 6x6 nivel fácil
3. Sudoku 9x9 quitando la diagonal principal y secundaria

		Nº ecuaciones	Nº variables	Tiempo promedio (s)
Suma-producto	Shidoku	40	16	1
	Sudoku 6x6	72	36	1.2
	Sudoku 9x9	135	81	5.5
Coloración de grafos	Shidoku	72	16	0.7
	Sudoku 6x6	240	36	29
	Sudoku 9x9	891	81	990
Variables booleanas	Shidoku	136	64	154
	Sudoku 6x6	468	216	193
	Sudoku 9x9	1620	729	2486

Tabla 1: Tabla con el nº de ecuaciones, nº variables y tiempo promedio de ejecución para los 3 métodos y las 3 variantes.

Por tanto, concluimos los siguientes puntos:

1. A medida que crece el número de variables, es mejor menos ecuaciones de mayor grado, que muchas ecuaciones de grado bajo para muchas variables.
2. Para tableros con múltiple solución también es mejor el sistema de restricciones suma-producto.

7.2. Explosión combinatoria

Durante la realización del trabajo, nos hemos dado cuenta de que para la mayoría de Sudokus 9x9 no se llegaba a conseguir una solución en tiempo razonable (más de 8h). Sin embargo; el 4x4 sí se logra rápidamente.

Tras indagar sobre este fenómeno, descubrimos el problema de la explosión combinatoria. Hay 288 combinaciones diferentes en un Shidoku, mientras que en el Sudoku hay más de $6 \cdot 10^{21}$ tableros diferentes [6]. Esto hace que computacionalmente sea casi imposible alcanzar la solución.

n	Número de tableros de orden $n \times n$
1	1
4	288
9	6,670,903,752,021,072,936,960
16	$5{,}96 \cdot 10^{98}$ (estimado)
25	$4{,}36 \cdot 10^{308}$ (estimado)

Tabla 2: Número de tableros existentes para cada n

7.3. Observaciones

Hemos observado que es importante el orden en el que introducimos las ecuaciones para el cálculo de las bases de Gröbner. Por ejemplo, se reduce considerablemente el tiempo de ejecución si se colocan los datos iniciales al principio del sistema.

Además, la posición de las celdas vacías cambia significativamente el resultado. Por ejemplo, para el caso 9x9, eliminando una fila o columna entera es peor computacionalmente que quitando la diagonal principal y secundaria. Es decir, la dificultad del Sudoku depende más de dónde estén colocadas las pistas, que de cuántas pistas se proporcionen.

Referencias

[1] Decker, W., & Pfister, G. (2013). A First Course in Computational Algebraic Geometry (AIMS Library of Mathematical Sciences).

[2] Gimenez, Philippe. (2014). Una introducción a las bases de Gröbner y algunas de sus aplicaciones.

[3] David A. Cox, John Little, and Donal O'Shea. 2007. Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra.

[4] Bruno Buchberger and Manuel Kauers (2011) Buchberger's algorithm. Scholarpedia, 6(10)

[5] Dubé, T. (1990). The Structure of Polynomial Ideals and Gröbner Bases. SIAM J. Comput., 19, 750-773.

[6] Arnold, Elizabeth & Lucas, Stephen & Taalman, Laura. (2010). Gröbner Basis Representations of Sudoku. The College Mathematics Journal.