

Resolución de Sudokus utilizando Bases de Gröbner

Lucía Jiang

Jaime



Lucía



Trabajo de Modelización
ETSIINF

Contents

- 1 Introducción
- 2 Restricciones suma-producto
- 3 Coloración de grafos
- 4 Variables booleanas
- 5 Interfaz
- 6 Bases de Gröbner
- 7 Resultados

Introducción

Ejemplo Shidoku y Sudoku

	3	4	
4			2
1			3
	2	1	

2	3	4	1
4	1	3	2
1	4	2	3
3	2	1	4

2	5			3		9		1
	1				4			
4		7				2		8
		5	2					
				9	8	1		
	4				3			
			3	6			7	2
	7							3
9		3				6		4

Restricciones suma-producto

Shidoku

Sea el valor de cada casilla denotada como $x_{i,j}$.

Sean $\{w, x, y, z\}$ cuatro celdas en la misma fila, columna o cuadrado.

- Soluciones enteras

$$(x_{i,j} - 1) \cdot (x_{i,j} - 2) \cdot (x_{i,j} - 3) \cdot (x_{i,j} - 4) = 0 \quad \text{con } i, j = 1, 2, 3, 4$$

- Restricciones suma

$$w + x + y + z - 10 = 0$$

- Restricciones producto

$$wxyz - 24 = 0$$

40 ecuaciones + datos iniciales

Sudoku

Sea el valor de cada casilla denotada como $x_{i,j}$.

Consideramos el conjunto $\{-2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y hacemos corresponder $-2 \rightarrow 8$ y $-1 \rightarrow 9$

- Soluciones enteras

$$(x_{i,j} + 2) \cdot (x_{i,j} + 1) \cdot (x_{i,j} - 1) \cdot (x_{i,j} - 2) \cdot (x_{i,j} - 3) \cdot (x_{i,j} - 4) \cdot (x_{i,j} - 5) \\ \cdot (x_{i,j} - 6) \cdot (x_{i,j} - 7) = 0$$

con $i, j = 1, \dots, 9$

Sudoku

- Restricciones suma

$$x1 + x2 + x3 + x4 + x5 + x6 + x7 + x8 + x9 - 25 = 0$$

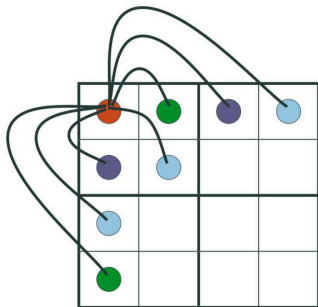
- Restricciones producto

$$x1 \cdot x2 \cdot x3 \cdot x4 \cdot x5 \cdot x6 \cdot x7 \cdot x8 \cdot x9 - 10080 = 0$$

135 ecuaciones + datos iniciales

Coloración de grafos

Shidoku



1	2	3	4
3	4		
2			
4			

Figura: Grafo relacionado con el Shidoku

Shidoku

Cada color es un valor del $\{1, 2, 3, 4\}$

Correspondencia de $\{1, 2, 3, 4\}$ a las raíz 4-ésima de la unidad: $\{1, -1, i, -i\}$

- Definir colores

$$x_{i,j}^4 - 1 = 0 \quad \text{con } i, j = 1, \dots, 4$$

- Restricciones 2 a 2: sean x, y dos vértices conectados por alguna arista.

$$x^4 - 1 = 0 \quad \text{y} \quad y^4 - 1 = 0$$

$$x^4 - y^4 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2) = 0$$

$$x \neq y \quad (x + y)(x^2 + y^2) = 0$$

72 ecuaciones + datos iniciales

Sudoku

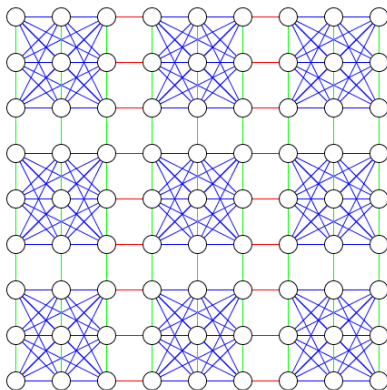


Figura: Versión simplificada del grafo relacionado con el Sudoku

Sudoku

Correspondencia de los números 1-9 con la raíz 9-ésima de la unidad

- Definir colores

$$x_{i,j}^9 - 1 = 0 \quad \text{con } i, j = 1, \dots, 9$$

- Restricciones 2 a 2:

$$x^9 - y^9 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)(x^6 + x^3y^3 + y^6)$$

$$x - y \neq 0$$

$$(x^2 + xy + y^2)(x^6 + x^3y^3 + y^6)$$

891 ecuaciones + datos iniciales.

Variables booleanas

Variables booleanas

Sea n el número de lados

- Booleanas

$$(x_{i,j,k})(x_{i,j,k} - 1) = 0 \quad i, j, k \in \{1, \dots, n\}$$

- Cada celda un único valor

$$\sum_{k=1}^n x_{i,j,k} = 1 \quad i, j \in \{1, \dots, n\}$$

- Dos celdas en misma región, diferentes valores

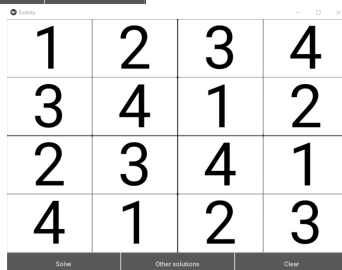
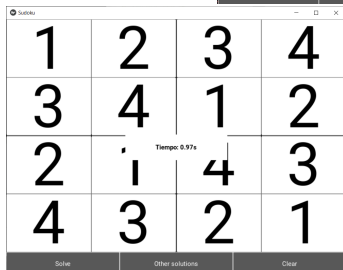
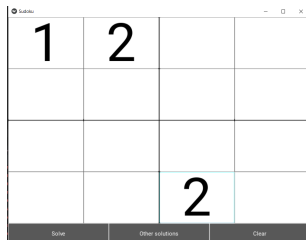
$$\sum_{k=1}^n x_{i,j,k} \cdot y_{i',j',k} = 0$$

Shidoku: 136 ecuaciones + datos iniciales

Sudoku: 1620 ecuaciones + datos iniciales

Interfaz

Shidoku 4x4



Sudoku 6x6 y 9x9

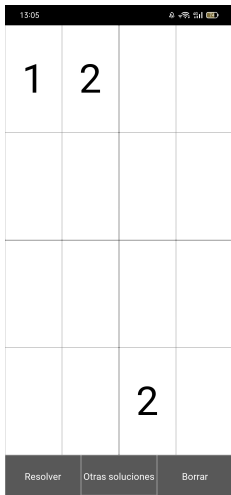
3	4	2	6		5
	5				
	2	4			
	3	6		5	
2			4	6	
4	6	3	5	2	
Solve Other solutions Clear					

3	4	2	6	1	5
6	5	1	3	4	2
5	2	4	1	3	6
1	3	6	2	5	4
2	1	5	4	6	3
4	6	3	5	2	1
Solve Other solutions Clear					

	3	4	6	7	9	8	1	
6		2	1	8	5	3		9
1	8		3	4	2		6	7
9	5	8		6		4	2	3
4	2	6	9		3	7	8	1
7	1	3		2		9	5	6
8	6		5	3	7		9	4
2		7	4	1	8	6		5
	4	5	2	9	6	1	7	
Solve Other solutions Clear								

5	3	4	6	7	9	8	1	2
6	7	2	1	8	5	3	4	9
1	8	9	3	4	2	5	6	7
9	5	8	7	6	1	4	2	3
4	2	6	9	5	3	7	8	1
7	1	3	8	2	4	9	5	6
8	6	1	5	3	7	2	9	4
2	9	7	4	1	8	6	3	5
3	4	5	2	9	6	1	7	8
Solve Other solutions Clear								

Interfaz en el móvil



Bases de Gröbner

Obtención base de Gröbner

- Librería Sympy de Python
- Utiliza método de Buchberger y lexicográfico
- Orden de los elementos acotado a

$$2 \cdot \left(\frac{d^2}{2} + d \right)^{2^{n-2}}$$

siendo n el número de variables y d el grado total de los polinomios de entrada (5).

Resultados

Comparación resultados

		Nº ecuaciones	Nº variables	Tiempo promedio
Suma-producto	Shidoku 4x4	40	16	1s
	Sudoku 6x6	72	36	1.2s
	Sudoku 9x9	135	81	5.5s
Coloración de grafos	Shidoku 4x4	72	16	0.7s
	Sudoku 6x6	240	36	29s
	Sudoku 9x9	891	81	990s
Variables booleanas	Shidoku 4x4	136	64	154s
	Sudoku 6x6	492	216	193s
	Sudoku 9x9	1620	729	2486s

Explosión combinatoria

n	Número de tableros de orden $n \times n$
1	1
4	288
9	6,670,903,752,021,072,936,960
16	$5,96 \cdot 10^{98}$ (estimado)
25	$4,36 \cdot 10^{308}$ (estimado)

Figura: Número de tableros existentes para cada n

Observaciones

- Orden de las ecuaciones relevante
- La complejidad depende de la colocación de las pistas, más que del número de pistas

Referencias

- [1] Decker, W., & Pfister, G. (2013). A First Course in Computational Algebraic Geometry (AIMS Library of Mathematical Sciences).
- [2] Gimenez, Philippe. (2014). Una introducción a las bases de Gröbner y algunas de sus aplicaciones.
- [3] David A. Cox, John Little, and Donal O'Shea. 2007. Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra.
- [4] Bruno Buchberger and Manuel Kauers (2011) Buchberger's algorithm. Scholarpedia, 6(10)
- [5] Dubé, T. (1990). The Structure of Polynomial Ideals and Gröbner Bases. SIAM J. Comput., 19, 750-773.
- [6] Arnold, Elizabeth & Lucas, Stephen & Taalman, Laura. (2010). Gröbner Basis Representations of Sudoku. The College Mathematics Journal.