Percolación

18 de abril de 2012

1. Descripción

1. Consideramos el "retículo" L formado por los puntos de coordenadas enteras, a los que llamamos **nodos** de L, en el plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ junto con los segmentos que unen cada uno de esos puntos a los adyacentes. Cada nodo (n, m) tiene cuatro adyacentes, o vecinos, $(n-1, m), (n, m-1), (n+1, m)$ y $(n, m+1)$.
2. Fijamos un número real $p \in (0, 1)$ y para cada uno de los cuatro vecinos del origen $(0, 0)$ lanzamos una moneda trucada con probabilidad p de obtener cara y, en caso de obtener cara, decimos que un líquido que se genera en el origen ha "percolado" al nodo en cuestión.
3. Este proceso se repite para cada nodo al que el líquido ha percolado, y SE TRATA DE ANALIZAR LOS VALORES DE p PARA LOS QUE EL LÍQUIDO "PERCOLA HASTA INFINITO".
4. Se puede considerar que éste es un modelo de un líquido que se filtra a través de un sólido poroso, con "porosidad" controlada por la probabilidad p, y tratamos de averiguar si el líquido "transpasa" o no. Por supuesto es un modelo matemático muy idealizado y, por ejemplo, en "la realidad" el sólido no será infinito.
5. También puede verse como un modelo de la transmisión de una enfermedad contagiosa, que comienza en $(0, 0)$ y cuya probabilidad de contagio de una persona enferma a sus "próximas" es p.
6. ¿Se podría estudiar mediante un modelo similar la propagación de los incendios forestales? La dificultad radicaría en que la probabilidad de propagación de un punto a los próximos debería depender de las condiciones locales (existencia de material combustible, viento en cada momento, orografía, etc.) en el punto, y no parece fácil determinarla.

2. Programación

1. Debemos mantener dos listas que irán variando a lo largo del proceso, que podemos suponer que se desarrolla en instantes de tiempo sucesivos:

   a) Una de todos los nodos a los que el líquido ha percolado hasta ese momento, a la que podemos llamar `nodos_visitados`.

   b) Otra de los nodos alcanzados en el instante anterior, a la que podemos llamar `nodos_alcanzados`.

2. Inicialmente, `nodos_visitados=nodos_alcanzados=[(0,0)]`, pero, por ejemplo, puede ocurrir que en el siguiente instante tengamos `nodos_visitados=[(0,0),(1,0),(0,-1)]` y, por tanto, `nodos_alcanzados=[(1,0),(0,-1)].`
3. Entonces, la moneda se lanza, en cada instante, desde cada uno de los `nodos_alcanzados` en el instante previo y, según el resultado, se actualiza la otra lista añadiéndole los nodos a los que el líquido ha percolado y que no estaban ya en ella.
4. El proceso para "naturalmente" si en un instante no hay percolación desde ninguno de los `nodos_alcanzados`, pero para valores de p altos debemos esperar que el líquido siga percolando indefinidamente y debemos parar el proceso nosotros.
5. Podemos pararlo limitando el número veces que se va a repetir el intento de percolar desde cada uno de los `nodos_alcanzados`, o bien parando el programa cuando se obtengan puntos con coordenadas mayores que un límite prefijado. Es claro que no podemos determinar, usando el ordenador, si se va a producir "percolación hasta infinito" o no, pero variando estos límites podemos hacernos una muy buena idea.
6. Una variante del programa permitiría visualizar el resultado:

   a) Definimos una matriz M, de tamaño $(2N+1) \times (2N+1)$ con filas y columnas idexadas por enteros entre 0 y $2N$ (ambos inclusive) que va a consistir únicamente de ceros o unos.

   b) Cada vez que se "visita" un nodo (n, m) hacemos que la entrada $M[n+N, m+N]$ de la matriz sea un 1, y los nodos no visitados quedan representados por un cero en la matriz.

   c) En este caso, para parar la percolación, NO añadimos a la lista de `nodos_alcanzados` aquellos nodos que, aunque el líquido hubiera percolado a ellos, estén fuera del cuadrado $[-N, N] \times [-N, N]$.

   d) Podemos visualizar el resultado usando la instrucción `matrix_plot(M).`