Mis rayadas con los generadores

Tenemos unos hermosos potenciales generadores de $SL(2,\mathbb{Z})$, que son :

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Caso base

Como me siento generosa, vamos ver que las matrices de norma 1 realmente están generadas por x e y.

Asumimos que $\|A\|_\infty = a_{11} = 1$, y los casos $\|A\|_\infty = \pm a_{ij}$ nos vienen de regalo. Y si no te lo crees, pues te lees la inducción o te jodes. As you wish, oye. Estamos en un documento libre.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = y$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x^{-1}$

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = yx^{-1}$

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = y^{-1}$

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = y^{-1}x$

Por último, para poder generalizar estos casos a $\|A\|_\infty = \pm a_{ij}$ como se hará en la inducción, dejo caer que $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = yx^{-1}y \in \langle x, y \rangle$, y que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \left(yx^{-1}y\right)^{-1}$. Así que no me vengas luego con tonterías.

2. Antiquebraderos de cabeza

Es conveniente, por el bien de tu mollera, que antes de seguir observes que las siguientes afirmaciones son ciertas si $\|A\|_\infty = a_{11} > 1$:

$$|a_{11}| > |a_{ij}| \text{ para } ij \neq 11 \tag{1}$$

¿Por qué?
Si $\quad a_{12} = a_{11}$ (el caso $a_{21} = a_{11}$ es idéntico),
$\quad 1 = |A| = |a_{11}(a_{22} - a_{21})| \geq 2|a_{22} - a_{21}|$, pero entonces $\frac{1}{2} \geq |a_{22} - a_{21}|$ y caca porque $a_{ij} \in \mathbb{Z}$.
Si $\quad a_{22} = a_{11}(\implies a_{12}, a_{21} < a_{11}, \quad \text{porque si no} \quad |A| \geq a_{11} > 1)$,
$\quad 1 = |A| = |a_{11}^2 - a_{12}a_{21}| \geq |a_{11}^2 - (a_{11} - 1)^2| = |2a_{11} - 1| > 1$, caca.

$$|a_{22}| \leq |a_{12}| \text{ ó } |a_{22}| \leq |a_{21}| \tag{2}$$

¿Por qué?
$|a_{22}| > |a_{12}|, |a_{21}| \quad$ y utilizando que por (1), $\quad |a_{11}| > |a_{22}|$,
$\quad 1 = |A| = |a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})| > |a_{22}(a_{11} - a_{22})| \geq |1(2-1)| > 1$, caca.

$$a_{11}a_{22} \geq 0 \iff a_{12}a_{21} \geq 0, \text{ para } a_{22} \neq 0 \tag{3}$$

¿Por qué?
Si $\quad a_{11}a_{22} > 0, (\implies a_{11}a_{22} > 1, \quad \text{porque} \quad a_{11} > 1, a_{22} \neq 0)$
$\quad 1 = |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 1 - a_{12}a_{21} \quad \implies \quad a_{12}a_{21} > 0$
Si $\quad a_{11}a_{22} < 0(\implies a_{11}a_{22} < -1, \quad \text{porque} \quad a_{11} > 1, a_{22} \neq 0)$
$\quad 1 = |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} < -1 - a_{12}a_{21} \quad \implies \quad a_{12}a_{21} < -2 < 0$

Hating LaTeX learning curve.

Más te vale apreciar que haya escrito esas demostraciones, aunque estén mal. Porque estoy llenando el documento de chapuzas para ello. -.-"

En fin. Con esto, la vida es más fácil. Y con lo que dijo Yago de las traspuestas, pues todavía más.

3. Inducción

Si asumimos que x, y generan todas las $M \in SL(2,\mathbb{Z})$ con $\|M\|_\infty < a_{11}$, ¿podemos demostrar que $\langle x, y\rangle = SL(2,\mathbb{Z})$? Veamos que sí, y chachi pistachi. Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}),$$

con $\|A\|_\infty = a_{11} > 1$

Estudiamos A en función de a_{22}, del orden relativo de los $|a_{ij}|$ y de sus signos.

Sean $|a_{11}| = a, |a_{12}| = b, |a_{21}| = c, |a_{22}| = d$.

1. $a_{22} \neq 0$

1.1. $|a_{11}| > |a_{12}| \geq |a_{21}|, |a_{22}| \equiv a > b \geq c, d$

Obs.

Como $a > b, |a - b| < a$

Si $c \geq d, |c - d| = |d - c| \leq |c| < a$

Si $d \geq c, |c - d| = |d - c| \leq |d| < a$

i. $a_{11} > 2, a_{12} \geq 0, a_{21} \geq 0, a_{22} > 0$

$$AR = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & b \\ c-d & d \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} |a-b| < a \\ |c-d| < a \end{matrix}$$

ii. $a_{11} > 2, a_{12} \geq 0, a_{21} \leq 0, a_{22} < 0$

$$AR = \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & b \\ d-c & -d \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} |a-b| < a \\ |d-c| < a \end{matrix}$$

iii. $a_{11} > 2, a_{12} \leq 0, a_{21} \geq 0, a_{22} < 0$

$$AR = \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & b \\ c-d & -d \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} |a-b| < a \\ |c-d| < a \end{matrix}$$

iv. $a_{11} > 2, a_{12} \leq 0, a_{21} \leq 0, a_{22} > 0$

$$AR = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & b \\ d-c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} |a-b| < a \\ |d-c| < a \end{matrix}$$

En los cuatro casos, $\|AR\|_\infty < \|A\|_\infty$

1.2. $|a_{11}| > |a_{21}| \geq |a_{12}|, |a_{22}| \equiv a > c \geq b, d$

Obs.

Si $|a_{21}| \geq |a_{12}|$, $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ está en las hipótesis de **1.1.**

Por tanto, $\|A^T R\|_\infty < \|A\|_\infty$, y entonces, $\|R^T A\|_\infty = \| \left(A^T R\right)^T \|_\infty = \|A^T R\|_\infty < \|A\|_\infty$.

2. $a_{22} = 0$

2.1. $a_{12} \geq 0$

$$AR = \begin{pmatrix} a & b \\ \pm c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & b \\ \pm c & 0 \end{pmatrix} \qquad |a-b| < a$$

2.2. $a_{12} \leq 0$

$$AR = \begin{pmatrix} a & -b \\ \pm c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & b \\ \pm c & 0 \end{pmatrix} \qquad |a-b| < a$$

Además, $\|R\|_\infty = \|R^T\|_\infty = \|R^{-1}\|_\infty = \| \left(R^T\right)^{-1} \|_\infty = 1$, así que podemos expresar A como el producto de 2 matrices de norma $< a_{11}$.

Y con esto y un bizcocho, hasta mañana a las 8 gracias a la magnífica inducción.

Vale, no. ¿Y si $a_{11} < 0$? ¿Y si $\|A\|_\infty \neq |a_{11}|$? ¿Eh? ¿EH? ¿Qué patrañas me está contando?

Mantenga usted la calma, viejo loco. Ahora vamos.

Si $\|A_2\|_\infty = a_{22}$, entonces A_2 es la inversa de alguna de las matrices A de arriba, y listo.

Si $\|A_3\|_\infty = a_{12}$, entonces A_3 es el producto de alguna de las matrices A por $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, y también está listo.

Y si $\|A_4\|_\infty = a_{21}$, entonces A_4 es el producto de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ por alguna de las matrices A.

Por último, si $\|A_{caca}\|_\infty = |a_{ij}|$, con $a_{ij} < 0$... Pues mira, chico. Tanta exhaustividad acaba con mi paciencia. A_{caca} es el producto de alguna de las A_i por $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Que aunque a mí me costó mucho, el ordenador me dijo en un plis plas que sí estaba generada por x e y. Lo que hay que aguantar, ¿eh?

Jo. Estoy muerta :c... A dormir.