Mis rayadas con los generadores

Tenemos unos hermosos potenciales generadores de $SL(2,\mathbb{Z})$, que son :

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si asumimos que x, y generan todas las $M \in SL(2,\mathbb{Z})$ con $\|M\|_\infty \leq 2$, ¿podemos demostrar que $\langle x, y\rangle = SL(2,\mathbb{Z})$?

Veamos que sí, y chachi pistachi. Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}),$$

con $\|A\|_\infty = a_{11} > 2$

Lo primero para ahorrarnos quebraderos de cabeza es darnos cuenta de que, con las hipótesis anteriores, $|a_{11}| \neq |a_{ij}|$ para todo $ij \neq 11$, y que no puede ser que $|a_{22}| > |a_{12}|, |a_{21}|$. También es cierto que $a_{11}a_{22} \geq 0 \iff a_{12}a_{21} \geq 0$.

Con esto, la vida es más fácil.

O yo hago las cosas mal y me creo que es más fácil. Ya veremos.

Se abren ante nosotros 4 fantásticos caminos en función del orden relativo de los $|a_{ij}|$, cada uno subdividido en otros 4 según el signo de los a_{ij}. No son 8 porque hacemos la trampa de que $a_{11} > 0$.

Además, pa no repetirlo 16 veces, que quede claro que $|a_{11}| = a, |a_{12}| = b, |a_{21}| = c, |a_{22}| = d$.

1. $|a_{11}| > |a_{12}| \geq |a_{21}| \geq |a_{22}| \equiv a > b \geq c \geq d$

Obs.

Como $a > b, |a - b| < a$

Como $c \geq d, |c - d| = |d - c| \leq |c| < a$

1.1. $a_{11} > 2, a_{12} \geq 0, a_{21} \geq 0, a_{22} \geq 0$

$$AR = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & b \\ c-d & d \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} |a-b| < a \\ |c-d| < a \end{matrix}$$

1.2. $a_{11} > 2, a_{12} \geq 0, a_{21} \leq 0, a_{22} \leq 0$

$$AR = \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & b \\ d-c & -d \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} |a-b| < a \\ |d-c| < a \end{matrix}$$

1.3. $a_{11} > 2, a_{12} \leq 0, a_{21} \geq 0, a_{22} \leq 0$

$$AR = \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & b \\ c-d & -d \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} |a-b| < a \\ |c-d| < a \end{matrix}$$

1.4. $a_{11} > 2, a_{12} \leq 0, a_{21} \leq 0, a_{22} \geq 0$

$$AR = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & b \\ d-c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} |a-b| < a \\ |d-c| < a \end{matrix}$$

2. $|a_{11}| > |a_{12}| \geq |a_{22}| \geq |a_{21}| \equiv a > b \geq d \geq c$

Obs.

Como $a > b, |a-b| < a$

Como $d \geq c, |c-d| = |d-c| \leq |d| < a$

2.1. $a_{11} > 2, a_{12} \geq 0, a_{21} \geq 0, a_{22} \geq 0$

$$AR = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & b \\ c-d & d \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} |a-b| < a \\ |c-d| < a \end{matrix}$$

2.2. $a_{11} > 2, a_{12} \geq 0, a_{21} \leq 0, a_{22} \leq 0$

$$AR = \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & b \\ d-c & -d \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} |a-b| < a \\ |d-c| < a \end{matrix}$$

2.3. $a_{11} > 2, a_{12} \leq 0, a_{21} \geq 0, a_{22} \leq 0$

$$AR = \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & b \\ c-d & -d \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} |a-b| < a \\ |c-d| < a \end{matrix}$$

2.4. $a_{11} > 2, a_{12} \leq 0, a_{21} \leq 0, a_{22} \geq 0$

$$AR = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & b \\ d-c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} |a-b| < a \\ |d-c| < a \end{matrix}$$

3. $|a_{11}| > |a_{21}| \geq |a_{12}| \geq |a_{22}| \equiv a > c \geq b \geq d$

Obs.

Como $a > c, |a - c| < a$

Como $b \geq d, |b - d| = |d - b| \leq |b| < a$

3.1. $a_{11} > 2, a_{12} \geq 0, a_{21} \geq 0, a_{22} \geq 0$

$$RA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - c & b - d \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} |a - c| < a \\ |b - d| < a \end{matrix}$$

3.2. $a_{11} > 2, a_{12} \geq 0, a_{21} \leq 0, a_{22} \leq 0$

$$RA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - c & b - d \\ c & -d \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} |a - c| < a \\ |b - d| < a \end{matrix}$$

3.3. $a_{11} > 2, a_{12} \leq 0, a_{21} \geq 0, a_{22} \leq 0$

$$RA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - c & d - b \\ c & -d \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} |a - c| < a \\ |d - b| < a \end{matrix}$$

3.4. $a_{11} > 2, a_{12} \leq 0, a_{21} \leq 0, a_{22} \geq 0$

$$RA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - c & d - b \\ -c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} |a - c| < a \\ |d - b| < a \end{matrix}$$

4. $|a_{11}| > |a_{21}| \geq |a_{22}| \geq |a_{12}| \equiv a > c \geq d \geq b$

Obs.

Como $a > c, |a - c| < a$

Como $d \geq b, |b - d| = |d - b| \leq |b| < a$

4.1. $a_{11} > 2, a_{12} \geq 0, a_{21} \geq 0, a_{22} \geq 0$

$$RA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - c & b - d \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} |a - c| < a \\ |b - d| < a \end{matrix}$$

4.2. $a_{11} > 2, a_{12} \geq 0, a_{21} \leq 0, a_{22} \leq 0$

$$RA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - c & b - d \\ c & -d \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} |a - c| < a \\ |b - d| < a \end{matrix}$$

4.3. $a_{11} > 2, a_{12} \leq 0, a_{21} \geq 0, a_{22} \leq 0$

$$RA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - c & d - b \\ c & -d \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} |a - c| < a \\ |d - b| < a \end{matrix}$$

4.4. $a_{11} > 2, a_{12} \leq 0, a_{21} \leq 0, a_{22} \geq 0$

$$RA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & d-b \\ -c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} |a-c| < a \\ |d-b| < a \end{matrix}$$

En todo caso, la matriz R tiene $\|R\|_\infty = \|R^{-1}\|_\infty = 1$

Así que podemos expresar A como el producto de 2 matrices de norma $< a_{11}$, y con esto y un bizcocho, hasta mañana a las 8.

Ah, bueno. Si $\|A_2\|_\infty = a_{22}$, entonces en A_2 es la inversa de alguna de las matrices A de arriba, y listo. Si $\|A_3\|_\infty = a_{12}$, entonces A_3 es el producto de alguna de las matrices A por $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, y también está listo. Y si $\|A_4\|_\infty = a_{21}$, entonces A_4 es el la inversa del producto de alguna de las matrices A por $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Y si $\|A_{caca}\|_\infty = |a_{ij}|$, con $a_{ij} < 0$, pues mira, chico. Me estoy hartando. Pero A_{caca} es el producto de alguna de las A_i por $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Que aunque a mí me costó mucho, el ordenador me dijo en un plis plas que sí estaba generada por x e y.

Menuda pesadilla. Que las matrices de norma 1 y 2 están generadas por x e y, te lo vas a creer porque sí.

PORQUE YO PASO DE LA LIFE :D