No sé muy bien ni qué quiero hacer.

Voy a estudiar $SL_2(\mathbb{Z}) /_{\mathbb{S}}$, donde

$$\mathbb{S} = \langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} a \equiv d \equiv 1 \mod 4 \\ b \equiv c \equiv 0 \mod 2 \end{matrix} \right\}$$

Para ello, voy a hacer un estudio exhaustivo y nada agradable de la clase de equivalencia donde acabaría cierta matriz $\mathcal{M}$ en función de sus coeficientes módulo 2 y módulo 4.

A lo mejor no la hago taaaan exhaustiva, y sólo hago unos pocos casos.

1. Las clases de equivalencia

Sea $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

1. Si $b \equiv c \equiv 0 \mod 2$:

$$\begin{aligned} \phi(\mathcal{M}) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} &\implies \phi(\overline{\mathcal{M}}) = \phi(\mathcal{M}\mathbb{S}) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \\ &\implies \varphi(\overline{\mathcal{M}}) = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & 0 \\ 2 & t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & 2 \\ 0 & t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & 2 \\ 2 & t \end{pmatrix} \right\} \\ &\implies \overline{\mathcal{M}} \subseteq \varphi^{-1} \left(\left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \;\middle|\; (y,z) \in \{0,2\} \right\} \right) \end{aligned}$$

Lo chuliguay es que $\subseteq$ es un $=$, ya que ninguna clase $\overline{\mathcal{N}} \neq \overline{\mathcal{M}}$ tiene un representante $\mathcal{N} \in \overline{\mathcal{N}}$ tal que $\varphi(\mathcal{N}) \in \varphi(\overline{\mathcal{M}})$. No voy a repetir ese argumento, y a partir de ahora pondré siempre los $=$.

El caso es que $\overline{\mathcal{M}} = \varphi^{-1} \left(\left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \;\middle|\; (y,z) \in \{0,2\} \right\} \right)$ y que como $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$, sabemos que $(x,t) = (1,1)$ o $(x,t) = (3,3)$.

1.1. Si $(x,t)=(1,1)$, tenemos una clase de equivalencia

$$\overline{\mathcal{M}_1}=\varphi^{-1}\left(\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix},\right\}\right)$$

1.2. Si $(x,t)=(3,3)$, tenemos una clase de equivalencia

$$\overline{\mathcal{M}_2}=\varphi^{-1}\left(\left\{\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&0\\2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&2\\0&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&2\\2&3\end{pmatrix},\right\}\right)$$

2. Si $b\equiv 0 \mod 2, c\equiv 1 \mod 2$:

$$\phi(\mathcal{M})=\begin{pmatrix}x&0\\1&t\end{pmatrix}\implies\phi(\overline{\mathcal{M}})=\phi(\mathcal{M}\mathbb{S})=\left\{\begin{pmatrix}x&0\\1&t\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x&0\\1&t+2\end{pmatrix},\right\}$$
$$\implies\varphi(\overline{\mathcal{M}})=\left\{\begin{pmatrix}x&y\\z&n\end{pmatrix}\;\middle|\;\begin{matrix}n\in\{t,t+2\}\\y\in\{0,2\}\\z\in\{1,3\}\end{matrix}\right\}$$

En este caso, tenemos que $\overline{\mathcal{M}}=\varphi^{-1}\left(\left\{\begin{pmatrix}x&y\\z&n\end{pmatrix}\;\middle|\;\begin{matrix}n\in\{t,t+2\}\\y\in\{0,2\}\\z\in\{1,3\}\end{matrix}\right\}\right)$ y que como $\begin{pmatrix}x&y\\z&n\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$, sabemos que $(x,t)=(1,1),(1,3),(3,1)$ o $(3,3)$.
Según esto:

2.1. Si $(x,t)=(1,1)$ o $(x,t)=(1,3)$, tenemos una clase de equivalencia

$$\overline{\mathcal{M}_3}=\varphi^{-1}\left(\left\{\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\3&3\end{pmatrix},\right\}\right)$$

2.2. Si $(x,t)=(3,1)$ o $(x,t)=(3,3)$, tenemos una clase de equivalencia

$$\overline{\mathcal{M}_4}=\varphi^{-1}\left(\left\{\begin{pmatrix}3&2\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&2\\3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&0\\1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&0\\3&3\end{pmatrix},\right\}\right)$$

3. Si $b\equiv 1 \mod 2, c\equiv 0 \mod 2$:

$$\phi(\mathcal{M})=\begin{pmatrix}x&0\\1&t\end{pmatrix}\implies\phi(\overline{\mathcal{M}})=\phi(\mathcal{M}\mathbb{S})=\left\{\begin{pmatrix}x&0\\1&t\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x+2&1\\0&t\end{pmatrix},\right\}$$
$$\implies\varphi(\overline{\mathcal{M}})=\left\{\begin{pmatrix}m&y\\z&t\end{pmatrix}\;\middle|\;\begin{matrix}m\in\{x,x+2\}\\y\in\{1,3\}\\z\in\{0,2\}\end{matrix}\right\}$$

En este caso, tenemos que $\overline{\mathcal{M}} = \varphi^{-1}\left(\left\{\begin{pmatrix} m & y \\ z & t \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} m \in \{x, x+2\} \\ y \in \{1,3\} \\ z \in \{0,2\} \end{matrix}\right\}\right)$ y que como $\begin{pmatrix} m & y \\ z & t \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$, sabemos que $(x,t) = (1,1), (1,3), (3,1)$ o $(3,3)$.
Según esto:

3.1. Si $(x,t) = (1,1)$ o $(x,t) = (3,1)$, tenemos una clase de equivalencia

$$\overline{\mathcal{M}_5} = \varphi^{-1}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\right\}\right)$$

3.2. Si $(x,t) = (1,3)$ o $(x,t) = (3,3)$, tenemos una clase de equivalencia

$$\overline{\mathcal{M}_6} = \varphi^{-1}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\right\}\right)$$

4. Si $b \equiv c \equiv 1 \mod 2$:

$$\phi(\mathcal{M}) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & t \end{pmatrix} \implies \phi(\overline{\mathcal{M}}) = \phi(\mathcal{M}\mathbb{S}) = \left\{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 1 & t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & 0 \\ 1 & t+2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x+2 & 0 \\ 1 & t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x+2 & 0 \\ 1 & t+2 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\implies \varphi(\overline{\mathcal{M}}) = \left\{\begin{pmatrix} m & y \\ z & n \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} m \in \{x, x+2\} \\ n \in \{t, t+2\} \\ y, z \in \{1,3\} \end{matrix}\right\}$$

Ahora, tenemos que $\overline{\mathcal{M}} = \varphi^{-1}\left(\left\{\begin{pmatrix} m & y \\ z & n \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} m \in \{x, x+2\} \\ n \in \{t, t+2\} \\ y, z \in \{1,3\} \end{matrix}\right\}\right)$ y que como $\begin{pmatrix} m & y \\ z & t \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$, sabemos que $(x,t) = (1,1), (1,3), (3,1)$ o $(3,3)$.