

Manifiesto de inutilidad

Holis.

Ayer me achicharré la espalda, y cada vez que salgo al sol mi piel me pide a gritos que me meta en casa.

Así que voy a hacerle caso y de paso intento poner mi cacao y mis bucles mentales en formato agradable, y así Yago tiene que joderse y leerlo.

Si

$$\mathbb{S} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} a \equiv d \equiv 1 \pmod{4} \\ b \equiv c \equiv 0 \pmod{2} \end{array} \right\},$$

φ es el homomorfismo sobreyectivo

$$\begin{aligned} \varphi: SL_2(\mathbb{Z}) &\longrightarrow SL_2(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} a \bmod 4 & b \bmod 4 \\ c \bmod 4 & d \bmod 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y ϕ es la función

$$\begin{aligned} \phi: SL_2(\mathbb{Z}) &\longrightarrow SL_2(\mathbb{Z}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} a \bmod 4 & b \bmod 2 \\ c \bmod 2 & d \bmod 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(Qué feo queda escrito lo de los módulos. D:)

Por cierto, $\mathbb{S} = \text{Ker}(\phi)$

- **Objetivo:** Entender $SL_2(\mathbb{Z})/\mathbb{S}$
- **Primer intento:** Parecía que las clases de equivalencia de $SL_2(\mathbb{Z})/\mathbb{S}$ tenían algo que ver, dada una matriz \mathcal{M} , con $\phi(\mathcal{M})$ (yo diría que dependen únicamente de $\phi(\mathcal{M})$, pero no con la boca muy llena...) Por ejemplo,

$$\begin{aligned}\phi(\mathcal{M}) = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 1 & n \end{pmatrix} &\implies \phi(\overline{\mathcal{M}}) = \phi(\mathcal{MS}) = \left\{ \begin{pmatrix} m & 0 \\ 1 & n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} m & 0 \\ 1 & n+2 \end{pmatrix} \right\} \\ &\implies \overline{\mathcal{M}} \subseteq \phi^{-1} \left(\begin{pmatrix} m & 0 \\ 1 & n \end{pmatrix} \right) \cup \phi^{-1} \left(\begin{pmatrix} m & 0 \\ 1 & n+2 \end{pmatrix} \right)\end{aligned}$$

Esta unión de conjuntos también ha quedado feísima.

¿Es porque las ϕ son demasiado pequeas al lado de los paréntesis? Yo qué sé. Estética.

En fin.

El caso es que ese \subseteq es un $=$, ya que para ninguna $\mathcal{N} \in \overline{\mathcal{N}} \neq \overline{\mathcal{M}}$, se cumple que $\phi(\mathcal{N}) \in \phi(\overline{\mathcal{M}})$

E igual que hemos hecho con esta \mathcal{M} , para todos los posibles $\phi(\mathcal{N})$ podemos ver que $\overline{\mathcal{N}} = \phi^{-1}$ (algún subconjunto de $SL_2(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$)

Problema: No tiene por qué ser cierto que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ para todos los $a, b, c, d \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Abandonamos ϕ un ratito y usamos φ .

- **Next step:** Necesitamos saber quién es $SL_2(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$, y una hermosa manera sería utilizando que

$$SL_2(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) = \text{Im}(\varphi) \cong SL_2(\mathbb{Z}) / \text{Ker}(\varphi)$$

Así que volvemos a tener el problema de estudiar un cociente. Pero, antes de eso, tenemos el problema de no tener ni puñetera idea de quién es $\text{Ker}(\varphi)$.

Ojalá poder meter emojis en latex. A los emojis se les da bien describir sentimientos. Voy a ver si hay algún paquete para eso.

This is what I wanted. Mi cara al darme cuenta de que no tengo ni pajolera idea de quién es $\text{Ker}(\varphi)$:



- **Cosas random antes de mirar el núcleo:**

$$\varphi(\mathbb{S}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

Por otro lado, parece que $\frac{1}{4}$ de los elementos de \mathbb{S} están en $Ker(\varphi)$. Que no sé si es $\frac{1}{4}$ de verdad, pero vaya. Aquellos donde los coeficientes b y c no son sólo pares, sino también múltiplos de 4.

Creo que esta observación es completamente inútil, pero me ha parecido curiosa.

También me gustaría saber si sabiendo que b y c son pares, las matrices con b y c múltiplos de 4 son realmente $\frac{1}{4}$ de \mathbb{S} . Estudiando índices hasta el ∞ y más allá.

Inciso: Lunes por la mañana, repasando esto antes de enviarlo. Acabo de decidir que no es que “ $\frac{1}{4}$ de los elementos de \mathbb{S} estén en $Ker(\varphi)$ ”, sino que $\frac{1}{4}$ de los elementos de \mathbb{S} ¡son $Ker(\varphi)$! Porque

$$\varphi(\mathcal{M}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \phi(\mathcal{M}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \mathcal{M} \in \mathbb{S}$$

Por qué es como la quinta vez que me pongo a mirar $Ker(\varphi)$ y hasta ahora no veo algo tan tonto como eso, ¿eh?



- **Siguiente, un intento de ver el núcleo:** Imponiendo que $\mathcal{M} \in SL_2(\mathbb{Z})$, y que $\varphi(\mathcal{M}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, lo más medianamente bonito que vi fue (después de hacer mal los numeritos quince mil veces, por lo que nada me asegura que esto esté bien) que

$$Ker(\varphi) = \left\{ \begin{pmatrix} 4x+1 & 4y \\ \frac{4xt+x+t}{4y} & 4t+1 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} x, t \in \mathbb{Z} \\ y \mid mcd(x, t) \\ 4 \mid x+t \end{array} \right. \right\}$$

Problema: Si $Ker(\varphi)$ ya es raro, ¡me puedo morir mirando el cociente! Lo intenté de manera fugaz, pero acababa encerrada en la misma línea de mirarlo todo en función de las clases de los coeficientes módulo 4... Y si no me había funcionado antes, no tenía mucha pinta de que fuera a funcionar ahora.

- **Haciendo caso a Yago:** En algún momento, Yago me dijo algo así como que podía conocer los elementos de $SL_2(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ usando el ordenador.

A mi me parece que no, porque puedo sacar φ de todas las matrices hasta cierta longitud de palabra, pero no tengo manera de saber si he terminado (si cojo matrices de mayor longitud, podría ser que $\varphi(\mathcal{M})$ fuera un nuevo elemento de $SL_2(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ que no me hubiera salido todavía).

Aun así, si $\mathcal{C}_n = \{\text{matrices con longitud de palabra} \leq n \text{ según mis generadores} \}$

$$|\varphi(\mathcal{C}_1)| = 4$$

$$|\varphi(\mathcal{C}_2)| = 15$$

$$|\varphi(\mathcal{C}_3)| = 31$$

$$|\varphi(\mathcal{C}_4)| = 43$$

$$|\varphi(\mathcal{C}_5)| = 47$$

$$|\varphi(\mathcal{C}_6)| = 48$$

$$|\varphi(\mathcal{C}_7)| = 48$$

$$|\varphi(\mathcal{C}_8)| = 48$$

$$|\varphi(\mathcal{C}_9)| = 48$$

Por lo que tiene pinta de que $|SL_2(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})| = 48$, pero vaya. Que tampoco sé de qué me sirve eso si no puedo estar segura.

- **A otra cosa, mariposa:** En una de mis desesperaciones de “Esto es terrible, no llego a ningún lado. Me aburro, así que voy a ver si aprendo algo guay leyendo cosas por internet” encontré una dibujín muy bonito. Saltando de link en link, llegué [aquí](#). Evidentemente lo leo todo por encima porque si de paso me pongo a entenderlo, lo mismo me hago vieja. El caso es que daban una presentación de $PSL_2(\mathbb{Z})$... ¡¡con movimientos del señor Farey!! Y ver eso, con animación incluida, pues mola. Eso sí, ni puñetera idea de por qué esa era una presentación. Y justo después, hablan de trenzas. Y después, de tu plano. Y yo, leyendo medio dormida, me encuentro todas esas cosas juntas, y me emociono :))

Por cierto, el tal $PSL_2(\mathbb{Z})$ está en tos laos.

Espero haber transmitido adecuadamente mi inutilidad.

Help.

Y así, queda consumido mi Domingo.

El día que escriba en L^AT_EX, la mitad de rápido que escribo en papel, me daré un premio.