Mis rayadas con los generadores

Tenemos unos hermosos potenciales generadores de $SL(2,\mathbb{Z})$, que son :

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si asumimos que x, y generan todas las $M \in SL(2,\mathbb{Z})$ con $\|M\|_\infty \leq 1$, ¿podemos demostrar que $\langle x, y\rangle = SL(2,\mathbb{Z})$?

Veamos que sí, y chachi pistachi. Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}),$$

con $\|A\|_\infty = a_{11} > 1$

Lo primero para ahorrarnos quebraderos de cabeza es darnos cuenta de que, con las hipótesis anteriores,

$$|a_{11}| > |a_{ij}| \text{ para } ij \neq 11 \tag{1}$$

$$|a_{22}| \leq |a_{12}| \text{ ó } |a_{22}| \leq |a_{21}| \tag{2}$$

$$a_{11}a_{22} \geq 0 \iff a_{12}a_{21} \geq 0, \text{ para } a_{22} \neq 0 \tag{3}$$

Con esto, la vida es más fácil. Y con lo que dijo Yago de las traspuestas, pues todavía más.

Estudiamos A en función de a_{22}, del orden relativo de los $|a_{ij}|$ y de sus signos.

Sean $|a_{11}| = a, |a_{12}| = b, |a_{21}| = c, |a_{22}| = d$.

1. $a_{22} \neq 0$

1.1. $|a_{11}| > |a_{12}| \geq |a_{21}, \geq |a_{22}| \equiv a > b \geq c, d$

Obs.

Como $a > b, |a-b| < a$

Si $c \geq d, |c-d| = |d-c| \leq |c| < a$

Si $d \geq c, |c-d| = |d-c| \leq |d| < a$

i. $a_{11} > 2, a_{12} \geq 0, a_{21} \geq 0, a_{22} > 0$

$$AR = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & b \\ c-d & d \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} |a-b| < a \\ |c-d| < a \end{matrix}$$

ii. $a_{11} > 2, a_{12} \geq 0, a_{21} \leq 0, a_{22} < 0$

$$AR = \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & b \\ d-c & -d \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} |a-b| < a \\ |d-c| < a \end{matrix}$$

iii. $a_{11} > 2, a_{12} \leq 0, a_{21} \geq 0, a_{22} < 0$

$$AR = \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & b \\ c-d & -d \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} |a-b| < a \\ |c-d| < a \end{matrix}$$

iv. $a_{11} > 2, a_{12} \leq 0, a_{21} \leq 0, a_{22} > 0$

$$AR = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & b \\ d-c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} |a-b| < a \\ |d-c| < a \end{matrix}$$

En los cuatro casos, $\|AR\|_\infty < \|A\|_\infty$

1.2. $|a_{11}| > |a_{21}| \geq |a_{12}|, |a_{22}| \equiv a > c \geq b, d$

Obs.

Si $|a_{21}| \geq |a_{12}|$, $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ está en las hipótesis de **1a**.

Por tanto, $\|A^T R\|_\infty < \|A\|_\infty$, y entonces, $\|R^T A\|_\infty = \| \left(A^T R\right)^T \|_\infty = \|A^T R\|_\infty < \|A\|_\infty$.

2. $a_{22} = 0$

2.1. $a_{12} \geq 0$

$$AR = \begin{pmatrix} a & b \\ \pm c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & b \\ \pm c & 0 \end{pmatrix} \qquad |a-b| < a$$

2.2. $a_{12} \leq 0$

$$AR = \begin{pmatrix} a & b \\ \pm c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & b \\ \pm c & 0 \end{pmatrix} \qquad |a-b| < a$$

Además, $\|R\|_\infty = \|R^T\|_\infty = \|R^{-1}\|_\infty = 1$, así que podemos expresar A como el producto de 2 matrices de norma $< a_{11}$.

Y con esto y un bizcocho, hasta mañana a las 8 gracias a la magnífica inducción.

Vale, no. ¿Y si $a_{11} < 0$? ¿Y si $\|A\|_\infty \neq |a_{11}|$? ¿Eh? ¿EH? ¿Qué patrañas me está contando?

Mantenga usted la calma, señor. Ahora vamos.

Si $\|A_2\|_\infty = a_{22}$, entonces en A_2 es la inversa de alguna de las matrices A de arriba, y listo.

Si $\|A_3\|_\infty = a_{12}$, entonces A_3 es el producto de alguna de las matrices A por $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, y también está listo.

Y si $\|A_4\|_\infty = a_{21}$, entonces A_4 es el producto de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ por alguna de las matrices A.

Por último, si $\|A_{caca}\|_\infty = |a_{ij}|$, con $a_{ij} < 0$... Pues mira, chico. Tanta exhaustividad acaba con mi paciencia. A_{caca} es el producto de alguna de las A_i por $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Que aunque a mí me costó mucho, el ordenador me dijo en un plis plas que sí estaba generada por x e y.

Lo que hay que aguantar, ¿eh?

Como me siento generosa, vamos ver que las matrices de norma 1 realmente están generadas por x e y. Como somos así de originales, repetimos método: asumimos que $\|A\|_\infty = a_{11}$, y los casos $\|A\|_\infty = \pm a_{ij}$ nos vienen de regalo.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = y$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x^{-1}$

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = yx^{-1}$

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = y^{-1}$

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = y^{-1}x$

Por último, para poder usar el argumento de “Si $\|A\|_\infty = a_{ij}$, entonces A es el producto de bla, bla, bla...”, hace falta ver que $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = yx^{-1}y \in \langle x, y \rangle$

Ahora tengo sueño. Pero me hace ilu terminar esto, así que vamos a demostrar las observaciones anti quebraderos de cabeza del principio. Hating LaTeX learning curve.

(1)

Si $a_{12} = a_{11}$ (el caso $a_{21} = a_{11}$ es idéntico)

$1 = |A| = |a_{11}(a_{22} - a_{21})| \geq 2|a_{22} - a_{21}|$, pero entonces $\frac{1}{2} \geq |a_{22} - a_{21}|$ y caca porque $a_{ij} \in \mathbb{Z}$.

Si $a_{22} = a_{11}$

$1 = |A| = |a_{11}^2 - a_{12}a_{21}| \geq |a_{11}^2 - (a_{11} - 1)^2| = |2a_{11} - 1| > 1$, caca.

(2)

Si $|a_{22}| > |a_{12}|, |a_{21}|$ y utilizando que por (1), $|a_{11}| > |a_{22}|$,

$1 = |A| = |a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})| > |a_{22}(a_{11} - a_{22})| \geq |1(2 - 1)| > 1$, caca.

(3)

Si $a_{11}a_{22} > 0$,

$(\implies a_{11}a_{22} > 1,$ porque $a_{11} > 1, a_{22} \neq 0)$

$1 = |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 1 - a_{12}a_{21} \implies a_{12}a_{21} > 0$

Si $a_{11}a_{22} < 0$,

$(\implies a_{11}a_{22} < -1,$ porque $a_{11} > 1, a_{22} \neq 0)$

$1 = |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} < -1 - a_{12}a_{21} \implies a_{12}a_{21} < -2 < 0$

Jo. Seguro que hay algo mal, pero es que estoy muerta :c

En fin... A dormir.