Obligatorio 3: Dualidad

Lucía Bouza - 4.289.797-0

Ejercicio 1

Ejercicio 1

$$\min_{x \in \mathbb{R}} x \quad \text{sujeto a} \quad x^2 - 1 \leq 0$$

Paso 1 : Lagrangeano

$$L(x, \mu) = x + \mu \cdot (x^2 - 1)$$

Paso 2 : Función dual

$$d(\mu) = \inf_{x \in \mathbb{R}} L(x, \mu) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \{ x + \mu (x^2 - 1) \}$$

Paso 3 : Problema dual

$$\sup_{\mu \geq 0} d(\mu)$$

a) Desarrollaremos el paso 1 y 2

$$\nabla L(x, \mu) = 1 + 2x\mu = 0 \longrightarrow \boxed{x^* = -\frac{1}{2\mu}}$$

$A(x) = \{ J : g_J(x) = 0 \}$ índices de restricciones activas

$g(x)$ está activa

$\longrightarrow$ por KKT $\mu^* \geq 0$.

$$g(x^*) = \left(-\frac{1}{2\mu} \right)^2 - 1 \leq 0$$

$$\frac{1}{4} \leq \mu^2 \longrightarrow \left. \begin{array}{l} \mu \leq -1/2 \\ \mu \geq 1/2 \\ \mu \geq 0 \end{array} \right\} \mu \geq 1/2$$

$f(x^*, \mu = \frac{1}{2}) = -1$

$f(x^*, \mu \to \infty) = 0$

Función dual

$$d(\mu) = \begin{cases} \\ -\frac{1}{2\mu} + \mu\left(\left(\frac{1}{2\mu}\right)^2 - 1\right) & \mu \end{cases}$$

b) Desarrollamos paso 3

$$\sup_{\mu \geq 0/2} \left\{ -\frac{1}{2\mu} + \mu \cdot \left(\frac{1}{4\mu^2} - 1\right) \quad \mu \neq 0 \right.$$

$$\sup_{\mu > 0} -\frac{1}{2\mu} + \frac{1}{4\mu} - \mu = \inf_{\mu > 0} + \frac{1}{2\mu} - \frac{1}{4\mu} + \mu$$

$$= \inf_{\mu > 0} \underbrace{\mu + \frac{1}{4\mu}}_{f'(\mu)}$$

$$\nabla f'(\mu) = 1 + \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{\mu^2}\right) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{4\mu^2} = 1 \longrightarrow \mu = \pm \frac{1}{2} \\ \qquad\qquad\quad \mu > 0 \end{array}\right\} \boxed{\mu = \frac{1}{2}}$$

$$\text{supremo} : -\frac{1}{2} - \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{2}} = -1$$

$$\boxed{\text{supremo} : -1}$$

c) condición de punto interior (Slater)

¿ $\exists \bar{x} / g(\bar{x}) < 0$? $g(x) = x^2 - 1$

sea por ejemplo $\bar{x} = \frac{1}{2} \rightarrow g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$

$-\frac{3}{4} < 0 \longrightarrow$ se cumple condición de Slater.

se cumple dualidad débil y fuerte

Justificación

$f(x^*) = -1$
supremo $d^* = -1$

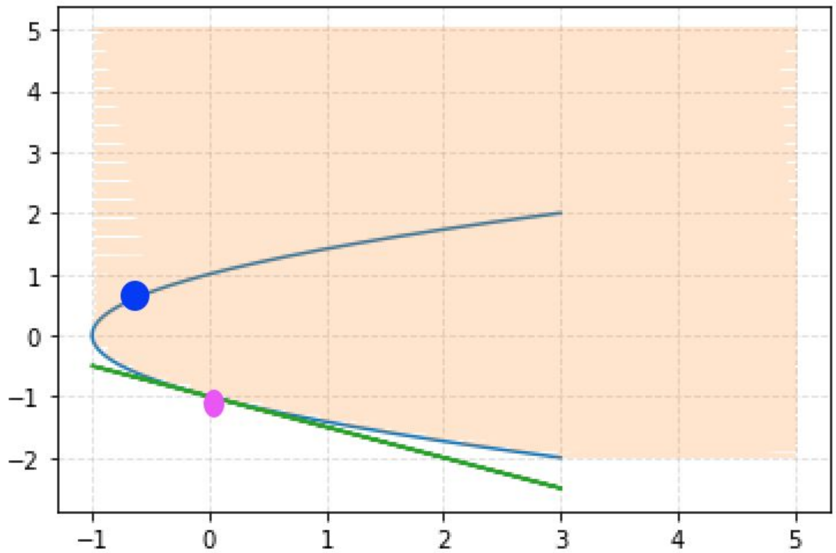
$$\underbrace{\text{supremo } d(\mu)}_{-1} \leq \underbrace{\inf f(x^*)}_{-1}$$

entonces se cumple dualidad débil y fuerte porque $d^* = f(x^*)$

$f(x)$ y $g(x)$ son convexas $\longrightarrow$ se cumple dualidad fuerte. La solución al problema dual sirve para hallar la solución al problema original. El duality gap se anula.

Parte d y e

En la imagen siguiente se puede ver en azul el conjunto S (parábola), en naranja el conjunto A, en verde la recta con pendiente u* y que pasa por (0,f*).
Luego en rosado el punto d* que coincide con f* y en azul el punto que verifica la condición de Slater, que podría ser cualquiera que cumpliera t<0 y perteneciente a S.



Observamos que se cumple dualidad débil y fuerte ya que d* y f* coinciden y no pertenecen al interior del conjunto A. También vemos que se cumple condición de Slater dado que podemos encontrar un punto con t=g(x)<0.

Observamos también que el lagrangiano más pequeño será u= 0.5, que coincide con los resultados analíticos.

Parte f

f)

$\min x \quad g(x) = x^2 \leq 0$

$L(x, \lambda) = x + \mu . x^2$

$\nabla_x L(x, \mu) = 1 + 2\mu x = 0 \longrightarrow x = -\frac{1}{2\mu}$

restricción : $x^2 = 0 \longrightarrow -\frac{1}{2\mu} = 0$

$f(x)_{\mu \to +\infty} = \lim_{\mu \to +\infty} f(x) = -\frac{1}{2\mu} = 0$

Función dual

$d(\mu) = \inf L(x, \mu) = \inf\{x + \mu . x^2\}$

$d(\mu) = \begin{cases} \nexists & \mu = 0 \\ -\frac{1}{2\mu} + \mu . \frac{1}{4\mu^2} & \mu \neq 0 \end{cases}$

problema dual

$\sup d(\mu) = \sup \begin{cases} \nexists & \mu = 0 \\ -\frac{1}{4\mu} & \mu \neq 0 \end{cases}$

no nos ocupamos del caso en que $\mu = 0$

el problema queda:

$\sup(d(\mu)) = \sup -\frac{1}{4\mu} = \inf_{\mu \neq 0} \underbrace{\frac{1}{4\mu}}_{f'}$

$\nabla_{\mu} f'(\mu) = \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{\mu^2}\right) = 0$

el gradiente no se anula $\mu \neq 0$

Para que $\nabla f'(\mu) \to 0$ $\mu \to \pm\infty$

sup $d(\mu) = 0$

μ^* no existe

dualidad débil

el único punto que cumple $g(x) \leq 0$ es $x = 0$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ \sup d(\lambda) = 0 \end{array}\right\} \quad 0 \geq 0 \checkmark$$

se cumple dualidad débil.

dualidad fuerte

$f(x)$ y $g(x)$ convexas y $d^* = f^* \to$

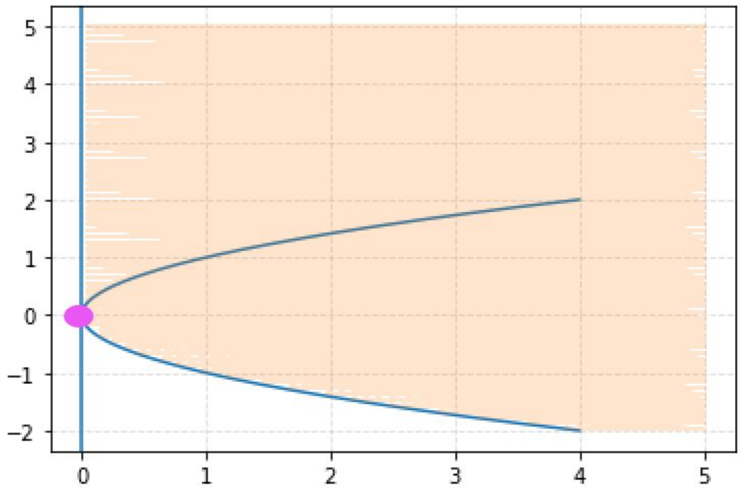
se cumple dualidad fuerte.

Aquí Slater no se cumple. ya que $\nexists \bar{x}$ /

$g(x) = x^2 < 0$

x^2 siempre positiva.

Aquí podemos ver que no se cumple la condición de Slater ya que no hay punto en el semiplano negativo. Además vemos que la recta que sostiene los conjuntos es la vertical que pasa por el eje Z=0. En este caso no tenemos un multiplicador óptimo, tal como llegamos analíticamente. En el punto rosado vemos d* y f*, que es el único punto que cumple con la restricción g(x)<=0



5
4
3
2
1
0
−1
−2
0
1
2
3
4
5

Parte G

g) $\min x \quad \text{s to } |x| \leq 0$

$L(x,\mu) = x + \mu \cdot |x|$

$\nabla_x L(x,\mu) = 1 + \mu[-1,1] = 0 \longrightarrow \mu = \frac{1}{[-1,1]}$

restricción $|x| \leq 0 \longrightarrow x^* = 0$

Función dual

$d(\mu) = \inf L(x,\mu) = \inf\{x + |x| \cdot \mu\}$

$\mu \in (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$

Para el problema dual no consideramos el tramo $(-\infty,-1]$ ya que $\mu \geq 0$.

$d(\mu) = \inf\{x + |x| \cdot \mu\} \quad \mu \in [1,+\infty)$.

$x^* = 0$

$d(\mu) = \inf\{0\} \quad \mu \in [1,+\infty)$

PROBLEMA DUAL:

$$\sup_{\mu \in [1,+\infty)} 0 = 0$$

$f(x^*) = 0$

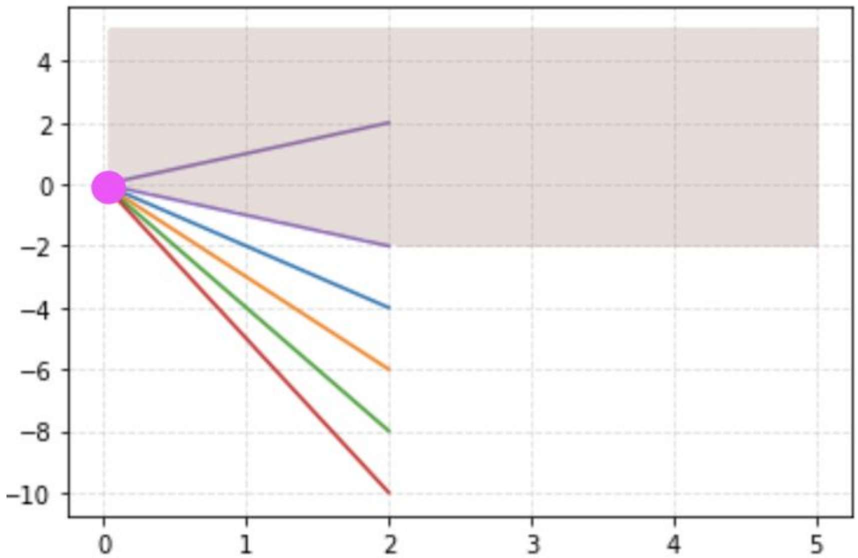
$\sup d(\mu) = 0$

$\longrightarrow f(x^*) = \sup d(\mu)$

se cumple dualidad fuerte y débil.

No se cumple Slater ya que $\nexists \bar{x} \,/\, |x| < 0$.

Aquí podemos ver que no se cumple la condición de Slater ya que no hay punto en el semiplano negativo. Además vemos que las rectas que sostienen el conjunto pueden ser varias, ya que en el óptimo, g no es diferenciable. En el dibujo se grafican solamente algunas, pero hay infinitas. En el punto rosado vemos d* y f*, que es el único punto que cumple con la restricción g(x)<=0 . El conjunto S es el representado por las líneas violetas dentro del conjunto A.



Parte H

h) $\min x^3$ s.to: $-x+1 \leq 0$

$L(x,\mu) = x^3 + \mu \cdot (-x+1)$

El problema no es convexo. verifiquemos entonces valores donde se anula el gradiente y también los valores a $+\infty$ y $-\infty$ para ver cual es el mínimo.

$\lim_{x \to \infty} x^3 + \mu(-x+1) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} x^3 + \mu(-x+1) = -\infty$ ⟸ Aquí se da el mínimo.

pero $x \geq 1$

$L(1,\mu) = 1 + \mu . 0 = 1$

$\min L(x,\mu) = 1$

1 cumple con complementary slackness

1 cumple con las restricciones

entonces 1 es mínimo global de $f(x) = x^3$.

FUNCIÓN DUAL:

$d(\mu) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \{ x^3 + \mu \cdot (1-x) \}$

$\lim_{x \to \infty} d(\mu) = \infty$

$\lim_{x \to -\infty} d(\mu) = -\infty$

cuando $x = 0$ $d(\mu) = \mu$

$d(\mu) = -\infty$

No se puede hacer tangente por f^* con ninguna pendiente. Se da porque x^3 no es convexa el duality gap $= \infty$

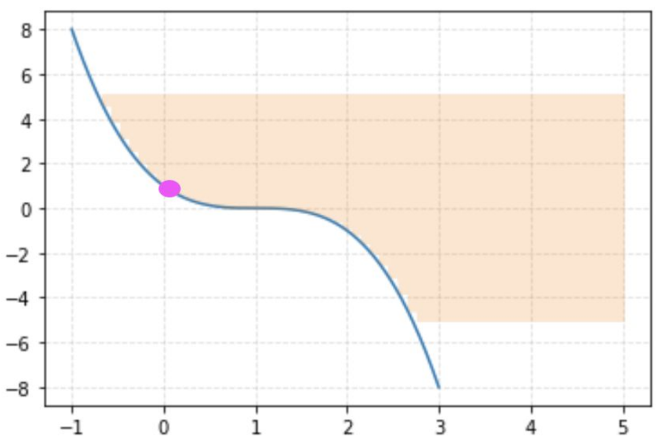
Se cumple codición de slater?

$\exists \bar{x} \,/\, g(\bar{x}) < 0$ $\underline{\underline{\text{Si}}}$: $\bar{x} = 2 \longrightarrow g(\bar{x}) = -2+1 = -1 < 0$

$$\left.\begin{aligned} d^* &= -\infty \\ f^* &= 1 \end{aligned}\right\} \; -\infty < 1$$

se cumple dualidad débil pero no fuerte.

Se puede observar que el conjunto S no es convexo. También vemos en el punto rosado f*. Se observa que por dicho punto no es posible construir una recta tangente al conjunto S. El duality gap es infinito.



Ejercicio 2

Ejercicio 2

KKT

si $(\bar{x}, \bar{\mu})$ cumplen que:
- $\bar{x} = \min L(x, \bar{\mu})$
- $\bar{x}$ cumple restricciones
- se cumple complementary slackness

entonces se cumple dualidad fuerte y $\bar{x}$ es solución del problema primario.

$$L(x, y, z, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6) =$$
$$\alpha_1 \cdot x^2 + \alpha_2 \cdot y^2 + \alpha_3 \cdot z^2 + \beta_1 xy + \beta_2 xz + \beta_3 yz + \gamma_1 x +$$
$$\gamma_2 y + \gamma_3 z + \mu_1 \cdot (x-1) + \mu_2 (y-1) + \mu_3 (z-1) +$$
$$\mu_4 (-x) + \mu_5 (-y) + \mu_6 (-z)$$

complementary slackness

La solución óptima (x^*, μ^*) cumple que:

si $\mu_i^* > 0 \rightarrow g_i(x^*) = 0$ (Restricción activa)

si $g(x^*) < 0$ (Restricción no activa) $\rightarrow \mu_i^* = 0$

geométricamente las restricciones representan el interior del cubo.

AFIRMACIÓN 1

si hipótesis min interior del cubo → las restricciones g_i no están activas → por complementary slackness todos los multiplicadores de lagrange deben ser cero.

ese punto cumple con las restricciones.
Además por complementary slackness
$L(\bar{x}, \mu) = f(\bar{x})$ (los términos relacionados a las restricciones en el lagrangiano se anulan)

$f(x) = L(x, \mu)$ convexa → mínimo se da cuando $\nabla f(x) = 0$
en dicho punto $\bar{x}$ se cumplen todas las condiciones de KKT → dicho punto es solución del problema primario.

si el punto no pertenece al interior del cubo → no se cumplen las restricciones → no se puede usar KKT.

AFIRMACIÓN 2

cada una de las restricciones representan una cara geométricamente. Si se pone como hipótesis que el mínimo se da en una cara, entonces una de las restricciones se activa, mientras que las otras no.

en este caso tenemos 6 restricciones, por lo que 5 permanecerán inactivas y una se activará.

Para las 5 que permanecen inactivas por complementary slackness el multiplicador debe ser cero.

$$\nabla_x L = 2\alpha_1 x + \beta_1 y + \beta_2 z + \gamma_1 + \mu_i$$

(suponiendo i es la restricción activa con variable x).

$$\nabla_y L = 2\alpha_2 y + \beta_1 x + \beta_3 z + \gamma_2$$

$$\nabla_z L = 2\alpha_3 z + \beta_2 x + \beta_3 y + \gamma_3$$

si anulo $\nabla_y L$ y $\nabla_z L$ puedo despejar z e y, ya que si la restricción activa es para x, yo sabré el valor de x correspondiente porque sé que esté en una cara del cubo.

con x, y, z se la posición del punto. Si el punto no pertenece al interior de la cara $\rightarrow$ no se cumplen las restricciones $\rightarrow$ no se puede usar KKT.

AFIRMACIÓN 3

Si se pone como hipótesis que el mínimo se da en una arista entonces 2 de las restricciones se activan (una por cara) mientras que las otras no. En este caso permanecerán 4 de las 6 inactivas, y por complementary slackness esos 4 multiplicadores serán 0.

Suponiendo que las caras que conocemos son las referidas a las restricciones x e y, $\nabla_z L$ tendrá solamente una variable (z) por lo que igualando a cero se puede encontrar dicha variable y determinar el punto en la arista.

Si el punto $\notin$ al interior de la arista $\rightarrow$ no se cumplen las restricciones $\rightarrow$ no se puede usar KKT.

AFIRMACIÓN 4

Si el mínimo no se da en el interior, ni en el interior de una cara ni en el interior de una arista, los únicos puntos que cumplen las restricciones y son candidatos a mínimos son los vértices.

$\min \; 3x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xz - 10x - 2y - 2z$

s.to $x \in [0,1] \quad y \in [0,1] \quad z \in [0,1]$.

$L(x, y, z, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6) =$

$3x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xz - 10x - 2y - 2z + \mu_1(x-1) +$
$\mu_2(y-1) + \mu_3(z-1) + \mu_4(x) + \mu_5 y + \mu_6 z$.

supongo mínimo se da en el interior:

$\nabla_x L = 6x - 2z - 10 = 0 \longrightarrow 3x - 5 = z$

$\nabla_y L = 4y - 2 = 0 \longrightarrow \boxed{y = 1/2}$

$\nabla_z L = 6z - 2x - 2 = 0 \longrightarrow 6 \cdot (3x-5) - 2x - 2 = 0$

$18x - 30 - 2x - 2 = 0$

$16x = 32$

$\boxed{x = 2} \longrightarrow \boxed{z = 1}$

el punto no pertenece al interior del cubo $\rightarrow$ descarto hipótesis.

supongo mínimo se da en cara $\boxed{x=0}$

$\nabla_y L = 4y - 2 = 0 \longrightarrow \boxed{y = 1/2}$

$\nabla_z L = 6z - 2 = 0 \longrightarrow \boxed{z = 1/3}$

la hipótesis es válida.

$f(0, 1/2, 1/3) = 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{9} - 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{3} = -5/6$

supongo mínimo se da en la cara $\boxed{x=1}$

$\nabla_y L = 4y - 2 = 0 \quad \boxed{y = 1/2} \longrightarrow$ hipótesis válida

$\nabla_z L = 6z - 2 - 2 = 0 \quad \boxed{z = 2/3}$

$f(1, 1/2, 2/3) = 3 + 1/2 + \cancel{4/3} - \cancel{4/3} - 10 - 1 - 4/3 = -8\ 5/6$

Supongo que el mínimo se da en la cara $\boxed{y=0}$

$\nabla_x L = 6x - 2z - 10 = 0$ $\boxed{\begin{matrix} x=2 \\ z=1 \end{matrix}}$

$\nabla_z L = 6z - 2x - 2 = 0$

hipótesis inválida. ocurrirá igual para $y=1$.

Supongo mínimo se da en la cara $\boxed{z=0}$

$\nabla_x L = 6x - 10 = 0 \rightarrow \boxed{x = 1\,^2/_3}$

$\nabla_y L = 4y - 2 = 0 \rightarrow \boxed{y = 1/2}$

hipótesis inválida.

Supongo mínimo se da en la cara $\boxed{z=1}$

$\nabla_x L = 6x - 12 = 0 \rightarrow \boxed{x = 2}$

$\nabla_y L = 4y - 2 \rightarrow \boxed{y = 1/2}$

hipótesis inválida.

Supongo mínimo en arista $\boxed{x=0}$ $\boxed{y=0}$

$\nabla_x L = -2z - 10 + \mu_1$

$\nabla_y L = 4y - 2 + \mu_2$

$\nabla_z L = 6z - 2x - 2 = 0 \rightarrow \boxed{z = 1/3}$

hipótesis válida

$f(0,0,1/3) = 1/3 - 2 \cdot 1/3 = -1/3$

Supongo mínimo en arista $\boxed{x=0}$ $\boxed{y=1}$

$\boxed{z = 1/3}$. hipótesis válida

$f(0,1,1/3) = \cancel{2} + 1/3 - \cancel{2} - 2/3 = -1/3$

supongo mínimo en arista $\boxed{x=1}$ $\boxed{y=0}$

$6 \cdot z - 2 - 2 = 0 \rightarrow \boxed{z = 2/3}$ hipótesis válida.

$f(1, 0, 2/3) = 3 + \cancel{4/3} - 2 \cancel{2/3} - 10 - 4/3 = -8\ 1/3$

supongo mínimo en arista $\boxed{x=1}$ $\boxed{y=1}$

$z = 2/3$ hip. válida

$f(1, 1, 2/3) = 3 + 2 + \cancel{4/3} - \cancel{4/3} - 10 - 2 - 4/3 = -8\ 1/3$

simplificaremos notación a partir de aquí:

pruebas aristas:

$x=0,\ z=0 \rightarrow y = 1/2 \quad f = -1/2$

$x=0,\ z=1 \rightarrow y = 1/2 \quad f = -1\ 1/2$

$x=1,\ z=0 \rightarrow y = 1/2 \quad f = -7\ 1/2$

$x=1,\ z=1 \rightarrow y = 1/2 \quad f = -8\ 1/2$

$$\left.\begin{array}{l} y=1,\ z=0 \rightarrow x = 5/3 \\ y=0,\ z=0 \rightarrow x = 5/3 \\ y=1,\ z=1 \rightarrow x = 2 \\ y=0,\ z=1 \rightarrow x = 2 \end{array}\right\} \text{hipótesis no válidas.}$$

el valor mínimo en f se da en el interior de una cara $x=1$ $y=1/2$ $z=2/3$.

el valor de la función en dicho punto es $-8\ 5/6$

Problema 3

$$\min \frac{1}{2}\cdot\|a\|^2 \quad \text{sto: } 1-y_J\,(a^T\cdot x_J+b)\leq 0$$

Paso 1:

$$L(a,b,\mu)=\frac{1}{2}\cdot\|a\|^2+\mu\cdot\left(1-y\;(a^T\cdot x+b)\right)$$

$$\nabla_a L(a^*,\mu^*)=a^*-\mu^*\cdot y\cdot x=0\longrightarrow \boxed{a^*=\mu^*\cdot y\cdot x}$$

$$\boxed{\sum_J \mu_J\cdot y_J\cdot x_J}$$

f y g convexa → el problema es convexo y tiene mínimo global.

$$f^*=\frac{1}{2}\|\mu^*\cdot y\cdot x\|^2$$

Función dual:

$$d(\mu)=\inf L(a,b,\mu)=$$

$$\frac{1}{2}\cdot\|\mu_J\,y_J\cdot x_J\|^2+\mu_J\left(1-y_J\cdot\left(\mu_J\,y_J\cdot x_J\right)^T\cdot x_J+b\right)$$

Problema dual

$$\sup_{\mu\geq 0} d(\mu)=\frac{1}{2}\cdot\mu_J^2\cdot y_J^2(x_J^T\cdot x_J)+\mu_J-\mu_J^2\cdot y_J^2\cdot(x_J^T x_J)$$
$$-\mu_J\cdot y_J\cdot b$$
$$=\mu_J\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot y_J^2\cdot x_J^T\cdot x_J\right)\cdot\mu_J+$$
$$\mu_J\cdot\left(-y_J^2\cdot x_J^T\cdot x_J\right)\cdot\mu_J+$$
$$\mu_J\cdot(1-y_J\cdot b)$$

$$= \mu_J \cdot \left(-\frac{1}{2} y_J^2 \cdot x_J^T \cdot x_J\right) \cdot \mu_J + (1 - y_J \cdot b) \cdot \mu_J$$

$$\sup_{\mu \geq 0} d(\mu) = \inf_{\mu \geq 0} -d(\mu) =$$

$$= \mu_J \cdot \left(\frac{1}{2} y_J^2 \cdot x_J^T \cdot x_J\right) \cdot \mu_J - 1 \cdot \mu_J + y_J \cdot \mu_J \cdot b$$

$$= \mu^T \cdot Q \cdot \mu - 1^T \cdot \mu + y^T \cdot \mu \cdot b \quad / \quad Q = \frac{1}{2} \cdot y^2 \cdot x^2$$

si ponemos como restricción $y^T \cdot \mu = 0$ el problema se puede escribir como:

$$\min_{\mu \geq 0} \mu^T \cdot Q \cdot \mu - 1^T \cdot \mu \quad \text{sujeto a: } y^T \cdot \mu = 0$$

$$Q = \frac{1}{2} \cdot y^2 \cdot x^2$$

entonces la solución óptima es $a^* = \sum_{J=1}^{m} \mu_J \cdot y_J \cdot x_J$

donde μ es la solución al problema dual del original.

b) Los puntos que están sobre el borde de la banda son aquellos que tienen la restricción activa $\rightarrow$
por complementary slackness para dichas reestricciones $\mu_i > 0$.

Para el resto de las restricciones que no están activas $\rightarrow \mu_i = 0$.

$$a^* = \sum_{1}^{n} \mu_J \cdot y_J \cdot x_J$$

Para los puntos que no están sobre la banda $\mu_j = 0 \rightarrow a^*$ es una combinación lineal de los x_J que se encuentran sobre la banda ya que esos términos no se anulan.

Problema 4

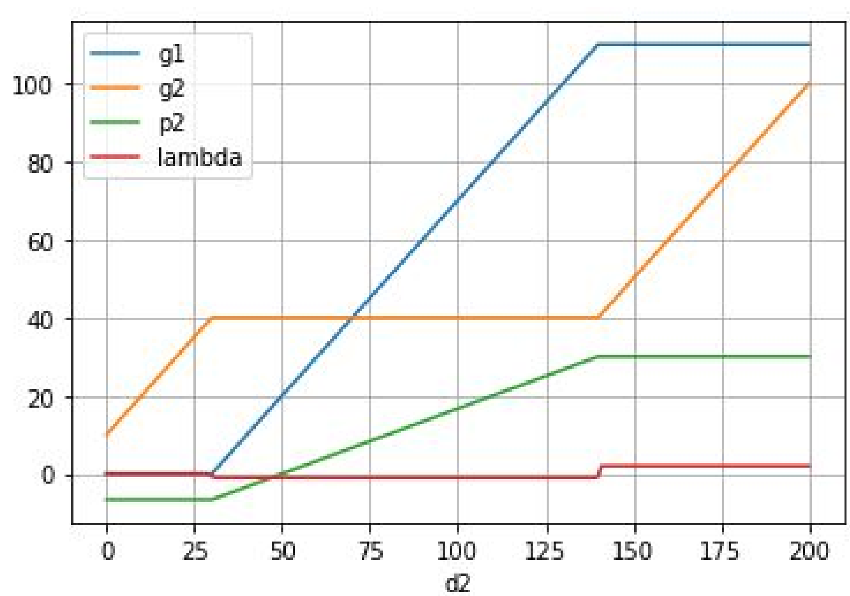
Ejercicio 4

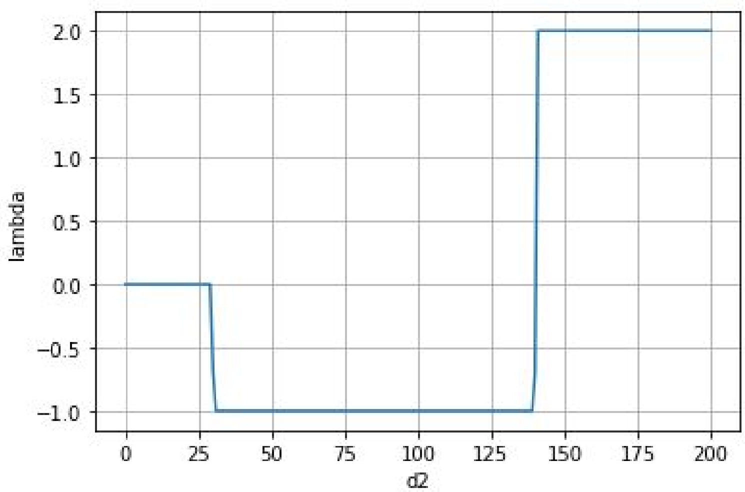
a) se incorpora la variable lineal t para convertir el problema en un LP.

$$\min\ C_1(g_1)+t \quad \text{s.t. a:} \quad t \geq 0$$
$$t \geq 4\cdot(g_2 - 40\ MW)$$
$$p_1 + p_3 = g_1$$
$$g_2 + p_3 + p_2 = d_2$$
$$p_1 - p_2 = 10\ MW$$
$$p_3 - p_1 - p_2 = 0$$
$$|p_2| \leq 30\ MW$$

Parte b

Puede encontrarse la implementación de la parte b en el archivo ej4.py.
Las gráficas obtenidas de g1, g2, d2 y el multiplicador lambda de la restricción (p1-p2 = 10) en función de d2 son las siguientes:





Parte c: Interpretación de la gráfica

Puntos de inflexión
Los primeros MW consumidos por d2 se consumen del generador g2, que es más barato. Cuando alcanzo los 40 MW de consumo por parte de g2, en ese punto ya me es más conveniente comenzar a consumir del generador g1, que es más económico. Puede apreciarse que en ese mismo punto comienza a utilizarse la línea P2, ya que el tráfico de energía utiliza las líneas P3 y P1-P2 para abastecer d2.
P2 comienza con un valor negativo (-6) debido a las diferencias de voltaje de la red que generan flujos de energía por donde hay canales habilitados. El valor negativo representa flujo de energía en sentido contrario, para abastecer d2 desde g2 utilizando el camino P2-P1-P3.

Llegada la máxima capacidad de la línea P2 (30 MW), alcanzo a un tope en la energía que puedo consumir de g1, por lo que a partir de ese valor, para mayores necesidades de d2, se requiere volver a consumir desde g2.

Valores de lambda
Con respecto al multiplicador lambda de la restricción (p1-p2 = 10), la restricción al inicio no está activa (teorema de sensibilidad) por lo que lambda es 0 hasta que la restricción se activa. El valor del multiplicador me da una intuición del costo de tener la restricción. Vemos que para consumos mayores a 138 MW en d2, la restricción tiene un costo importante. Y si d3 pudiese ser mayor? Sería el caso que vamos a estudiar en el siguiente punto.

¿Para qué valores de d2 conviene regalar energía en la barra 3?
Para valores de d2 mayores a 138 (punto de inflexión 2) necesariamente tengo que iniciar a consumir del generador g2, que es más caro. Si quisiera inyectar más energía a d2 desde g1, podría regalar energía en d3, para así poder pasar más energía de forma directa desde g1 hacia d2. La potencia P2 será 30, pero P3 aumentará así como también P1 (pero la energía sobrante de P1 que no puede pasar por P2 se regalará en el punto d3.

Problema 5

Ejercicio 5

PB $\min x^T P_0 . x + 2q_0^T . x + r_0$ s to $x_i^2 = 1$ $i=1..n$

con $P_0 > 0$

a) se escribirá la restricción $x_i^2 = 1$ como

$x^T . P_i . x + 2q_i^T . x + r_i = 0$

siendo P_i matriz $n \times n$ de ceros con $P_{ii} = 1$

$$P_i = \begin{bmatrix} 0_0 & & & \\ & 1 & 0 & \\ 0 & & 0 & \\ & & & \ddots 0 \end{bmatrix}$$

$q_i = 0$ y $r_i = -1$

entonces para el caso i $\underbrace{x^T . P_i . x}_{x_i^2} + \underbrace{2q_i^T . x}_{0} + \underbrace{r_i}_{-1}$

$x_i^2 - 1 = 0$ lo cual es la restricción original.

Por las notas del apéndice A para problemas cuadráticos no convexos, el problema dual queda:

$$\max_{\lambda, P, q, r, t, X} t \qquad (DB)$$

sujeto a: $X = \begin{bmatrix} P & q \\ q^T & r-t \end{bmatrix} \geq 0$ $\quad P = P_0 + \sum_1^m \lambda_i . P_i$

$q = q_0 + \sum_1^m \lambda_i . q_i$

$r = r_0 + \sum_1^m \lambda_i . r_i$

b) Llamemos a x^*_{PC} a la solución del problema PC

entonces como la restricción de PC implica
$x_i^2 \leq 1 \longrightarrow x_i \in [-1,1]$

Para hallar la solución al problema PB original aproximamos x_i^* de PB como el signo de x_i de PC. Esta solución NO es la óptima.

$$\tilde{x}_{i\,PB} = \text{signo}(x^*_{i\,PC}) = x^*_{i\,PA}$$

c) el mínimo de PB llamémosle $f^* = f(x^*_{PB})$
Por definición el máximo del dual d^* es siempre menor o igual a $f^* \longrightarrow d^* \leq f^*$

Por otro lado tenemos x^*_{PA} el cual cumple la restricción $x_i^2 = 1$, por lo que es un punto factible del problema PB.
entonces $f^* \leq f(x)$ para todo x factible,
en particular para $x = x^*_{PA}$.

entonces: $d^* \leq f^* \leq f(x^*_{PA})$

Parte d y e

En el archivo ejercicio5.py podrán verse el código realizado para resolver estos ejercicios.
Se obtiene que el valor óptimo del problema dual es d* = 67.987 y el valor óptimo de PA es pa* = 73. Vemos que se respeta el orden definido en la parte c.

Luego, realizamos la búsqueda de la mejor solución al problema original PB mediante fuerza bruta, encontrando el valor óptimo en la variable x= [-1 1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1] y alcanzando el mínimo en f* = 69.0.

Nuevamente observamos que el orden d* <= f* <= pa* (67.987 <= 69 <= 73) es el hallado en la parte C, determinando cotas al problema original el problema dual y el relajado.

```
valores fuerza bruta PB x= [-1  1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1] , f* = 69.0
valor problema dual  d* = 67.9896690822547
valor problema PA  PA* = [[73.]]
```