

# Cantorov dijagonalni argument:

Dino Žagar   Lucia Labinjan

<sup>F</sup>akultet informatike Pula   <sup>T</sup>ehnički fakultet

**Sažetak**

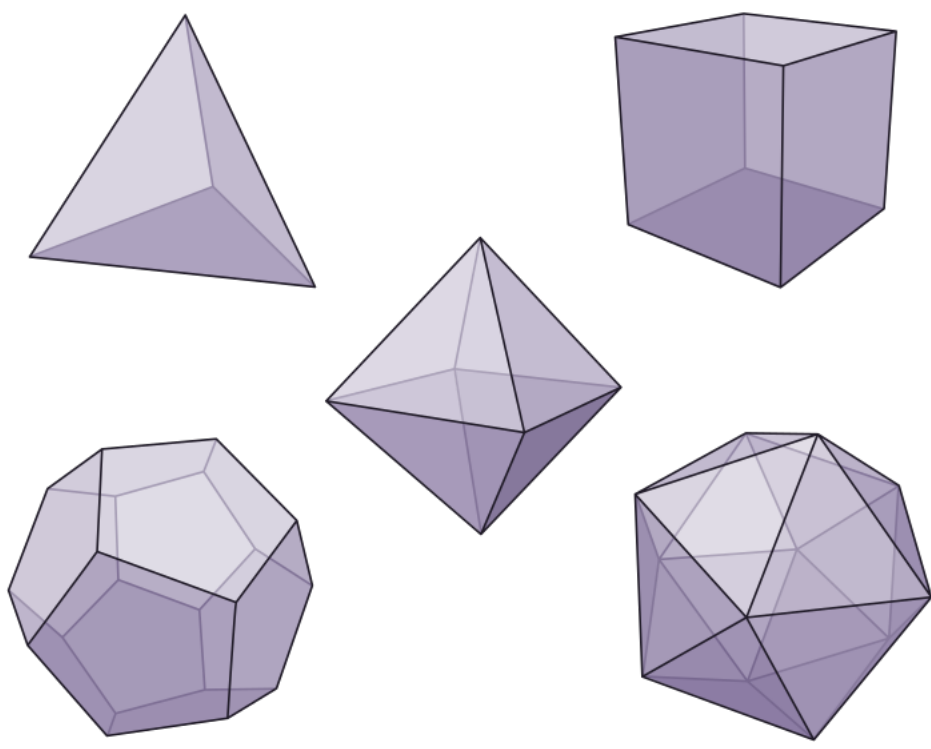
Georg Cantorov revolucionarni rad u teoriji skupova predstavio je svijetu koncept različitih veličina beskonačnosti. U središtu ovog otkrića nalazi se Cantorov dijagonalni argument, dokaz kontradikcijom koji pokazuje neizbrojivost skupa realnih brojeva. Ovaj projekt proučava složenosti Cantorovog dokaza, pružajući korak po korak objašnjenje argumenta i ističući njegovu važnost u razvoju suvremene matematike. Istražit ćemo osnovne koncepte teorije skupova, kardinaliteta, brojivih i nebrojivih skupova te implikacije Cantorovog dijagonalnog argumenta na razne grane matematike kao što su analiza, topologija i temelji matematike. Nadalje, raspravljat ćemo o početnom prihvatanju i kritikama Cantorovih ideja te njihovom dugotrajnom utjecaju na naše razumijevanje beskonačnosti. Projekt također povezuje Cantorov dijagonalni argument s povezanim konceptima i generalizacijama, kao što su Hilbertov hotel, problem zaustavljanja i Gödelovi teoremi o nepotpunosti, pokazujući svestranost dijagonalizacije kao matematičkog alata. Ovo sveobuhvatno istraživanje Cantorovog dijagonalnog argumenta nastoji razjasniti duboke uvide koje nudi u prirodu beskonačnosti i njegov trajni utjecaj na matematičku misao.

**Uvod**

Georg Cantor, njemački matematičar rođen 1845. godine, dao je značajan doprinos matematici, posebno u teoriji skupova. Jedan od njegovih najinovativnijih rezultata bio je Cantorov dijagonalni argument, dokazivanje proturječjem koji je pokazao postojanje različitih veličina beskonačnosti. Dijagonalni argument pokazao je da je skup realnih brojeva neprebrojiv i stoga veći od skupa prirodnih brojeva. Ovo otkriće izazvalo je dugogodišnja uvjerenja o prirodi beskonačnosti i imalo duboke posljedice na različita područja matematike, uključujući analizu, topologiju i temelje matematike. Ovaj projekt ima za cilj istražiti Cantorov dijagonalni argument, njegove implikacije i veze s drugim matematičkim konceptima.

Osnovni koncepti
<ul style="list-style-type: none"><li><b>1:</b> skupovi i kardinalnost</li><li><b>2:</b> Prebrojivi i neprebrojivi skupovi</li><li><b>3:</b> Beskonačni skupovi i različite veličine beskonačnosti</li></ul>

**1.** U matematici, skup je zbir različitih objekata. Veličina skupa naziva se kardinalitet skupa, što predstavlja broj elemenata u skupu.



slika 1.1 “Skup S svih platonskih tijela ima 5 elemenata. Dakle, kardinalnost skupa S je 5 ili u simbolima, |S|=5.

**2.** Prebrojivi skup je onaj koji se može staviti u jedan prema jedan odnos s prirodnim brojevima, dok neprebrojivi skup, s druge strane, ne može se staviti u jedan prema jedan odnos s prirodnim brojevima.

**3** . Beskonačni skupovi su skupovi s neograničenim brojem elemenata. Beskonačni skupovi mogu imati različite kardinalitet. Cantorov dijagonalni argument pokazuje da postoje različite veličine beskon-ačnosti, posebno uspoređivanjem kardinaliteta skupa prirodnih brojeva i skupa realnih brojeva

Kod
<pre>import random  def generate_random_decimal(digits=10):     return [random.randint(0, 9) for _ in range(digits)]  def create_list_of_decimals(n, digits=10):     decimals = [generate_random_decimal(digits) for _ in range(n)]     return decimals  def cantors_diagonal_argument(decimals):     diagonal = [decimals[i][i] for i in range(len(decimals))]     new_number = [(digit + 1) % 10 for digit in diagonal]     return new_number  def main():     n = 10     decimals = create_list_of_decimals(n)      print("List of decimals:")     for decimal in decimals:         print(f"0.{ ''.join(map(str, decimal))}")      new_decimal = cantors_diagonal_argument(decimals)     print(f"\nNew decimal constructed using Cantor's Diagonal Argument: 0.{ ''.join(map(str, new_decimal))}")  if __name__ == "__main__":     main()</pre>

- Jezik – Python
- Opis – Kod ilustrira koncept dijagonalnog argumenta. Kod generira n listu random decimala, svaku sa 10 decimala. Onda koristi Cantorov dijagonalni argument za konstrukciju novog decimalnog broja, koji se razlikuje od svih decimala u listi.

Teorem i dokaz
<b>Teorem</b>
Skup realnih brojeva je neprebrojiv, što znači da ne postoji jedan prema jedan odnos između skupa realnih brojeva i skupa prirodnih brojeva.
<b>Dokaz</b>
Cantorov dijagonalni argument je dokaz proturječnosti. Pretpostavimo, radi argumenta, da je skup realnih brojeva između 0 i 1 sabrojiv. Ako bi to bilo istinito, mogli bismo sve realne brojeve u ovom rasponu navesti kao niz, pri čemu svaki broj odgovara jedinstvenom prirodnom broju:

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow r_1 = 0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\dots \\ 2 &\rightarrow r_2 = 0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\dots \\ 3 &\rightarrow r_3 = 0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\dots \\ 4 &\rightarrow r_4 = 0.a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}\dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ovdje je svaki  $r_i$  realni broj između 0 i 1,  $a_i$  predstavlja  $j$ -tu decimalnu znamenku  $i$ -itog broja u nizu. Sada ćemo konstruirati novi realni broj  $R$ , tako da uzmemo dijagonalu liste i promijenimo svaku znamenku:

$$R = 0.b_1b_2b_3b_4\dots$$

gdje se  $b_i$  je određuje prema :

$$b_i = \begin{cases} a_{ii} + 1, & \text{if } a_{ii} \neq 9 \\ 0, & \text{if } a_{ii} = 9 \end{cases}$$

Konstrukcijom se,  $R$  razlikuje od svakog broja u nizu barem za jednu znamenku. Drugim riječima, $R$  nije jednak nijednom  $r_i$  u našem nizu. Budući da smo pretpostavili da naš niz sadrži sve realne brojeve između 0 i 1, došli smo do proturječnosti. To znači da je naša početna pretpostavka da je skup realnih brojeva između 0 i 1 prebrojiv je netočna.

Primjene i implikacije
<ul style="list-style-type: none"><li><b>utjecaj na teoriju skupova</b> - postojanje različitih veličina beskonačnosti dovelo je do razvoja naprednijih koncepata u teoriji skupova, poput pojma kardinalnih brojeva, koji se koriste za uspoređivanje veličina beskonačnih skupova.</li><li>The <b>Veze s analizom i topologijom</b> - u topologiji je koncept različitih veličina beskonačnosti utjecao na proučavanje svojstava kompaktnosti i povezanosti topoloških prostora.</li><li><b>Kontinuum hipoteza i veza s Cantorovim dijagonalnim argumentom</b> - hipoteza tvrdi da ne postoji skup s kardinalitetom strogo između prirodnih brojeva i realnih brojeva.Dijagonalni argument dokazuje da je kardinalitet realnih brojeva veći od kardinaliteta prirodnih brojeva, on ne rješava Kontinuum hipotezu izravno.</li></ul>

Kritike i kontroverze
<ul style="list-style-type: none"><li>kritike Leopolda Kroneckera i Henria Poincaréa</li><li>Moderni pogledi na Cantorov rad</li></ul>

Povezani koncepti i generalizacije
<ul style="list-style-type: none"><li>Hilbertov hotel</li><li>Halting Problem</li><li>Gödelovi teoremi nepotpunosti</li></ul>

Zaključak
<ul style="list-style-type: none"><li>Cantorov dijagonalni argument je revolucionarni dokaz koji pokazuje postojanje različitih veličina beskonačnost. pokazujući da je skup realnih brojeva neprebrojiv i veći od skupa prirodnih brojeva.</li><li>Pokazuje da je skup realnih brojeva neprebrojiv i veći od skupa prirodnih brojeva.</li><li>Dokaz je utjecao na različita područja matematike, uključujući teoriju skupova, analizu, topologiju i temelje matematike</li></ul>

Reference
<ul style="list-style-type: none"><li>1.1 <a href="https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/22/Ford/Gray819-832.pdf">https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/22/Ford/Gray819-832.pdf</a></li><li>1.2 <a href="https://books.google.hr/books?id=wEj3Spept0ACpg=PA20redir_esc=yv=onepageqf=false">https://books.google.hr/books?id=wEj3Spept0ACpg=PA20redir_esc=yv=onepageqf=false</a></li><li>1.3 <a href="https://jlmartin.ku.edu/courses/math410-S09/cantor.pdf">https://jlmartin.ku.edu/courses/math410-S09/cantor.pdf</a></li><li>1.4 Uvod u teoriju skupova – Pavle Papić</li><li>2.1 <a href="https://en.wikipedia.org/wiki/Cardinality/media/File:Platonic_solids Transparent.svg#2.2">https://en.wikipedia.org/wiki/Cardinality/media/File:Platonic_solids Transparent.svg#2.2</a></li></ul>