

Índice general

1. Introducción

1.1 Theoretical Background

A crystal is defined as a solid material whose atoms are arranged in an orderly repeating pattern extending in all three spatial dimensions [1]. The study of crystal structures is fundamental in materials science, as the arrangement of atoms directly influences the physical and chemical properties of materials [2].

The periodic order of the atoms is evident in different directions around each atom. The directions are non-coplanar and originate at each atom of the crystal. The axes are chosen by symmetry criteria. Once the axes are defined, the unit cell is established as the smallest portion of the crystal that, when repeated in space through translations along the axes, can recreate the entire crystal structure. Its geometry is defined by reticular parameters: the lengths of the edges (a, b, c) and the angles between them (α, β, γ).

There are seven crystal systems based on the relationships between the unit cell parameters: cubic, tetragonal, orthorhombic, hexagonal, trigonal, monoclinic, and triclinic. Each system is characterized by specific constraints on the lengths and angles of the unit cell.

Table 1: Crystal systems and their unit cell parameters.

System	Dimensions	Angles
Cubic	$a = b = c$	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
Tetragonal	$a = b \neq c$	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
Orthorhombic	$a \neq b \neq c$	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
Hexagonal	$a = b \neq c$	$\alpha = \beta = 90^\circ, \gamma = 120^\circ$
Rhombohedral	$a = b = c$	$\alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ$
Monoclinic	$a \neq b \neq c$	$\alpha = \gamma = 90^\circ, \beta \neq 90^\circ$
Triclinic	$a \neq b \neq c$	$\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90^\circ$

The arrangement of atoms within the unit cell defines 14 distinct Bravais lattices, categorized into seven crystal systems. These lattices are distinguished by their centering: primitive (P), body-centered (I), face-centered (F), and base-centered (C).

In primitive (P) lattices, atoms are located exclusively at the corners of the unit cell. Body-centered (I) lattices feature atoms at the corners plus an additional atom at the geometric center of the cell. Face-centered (F) lattices have atoms positioned at the corners and at the center of each face, whereas base-centered (C) lattices contain atoms at the corners and at the centers of two opposite faces.

The 14 Bravais lattices are illustrated in Figure ??.

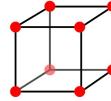
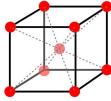
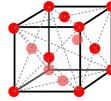
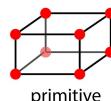
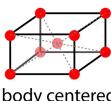
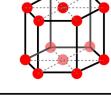
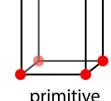
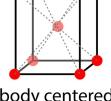
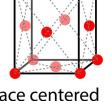
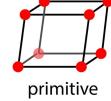
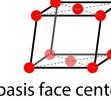
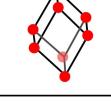
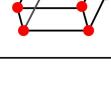
14 Bravais lattices			
cubic	 primitive	 body centered	 face centered
tetragonal	 primitive	 body centered	
hexagonal	 primitive		
orthorhombic	 primitive	 body centered	 face centered
monoclinic	 primitive		 basis face centered
trigonal	 primitive		
triclinic	 primitive		

Figure 1: Bravais Lattices representing the 14 distinct lattice types in three-dimensional space.

Lattice planes are defined by Miller indices (hkl), which are a set of three integers that denote the orientation of the planes in the crystal lattice. These indices are derived from the reciprocals of the fractional intercepts that the plane makes with the crystallographic axes.

Symmetry operations are transformations that map a crystal structure onto itself, preserving its overall arrangement. These operations include rotations, reflections, inversions, and translations. The combination of these symmetry operations defines the space group of a crystal, which

provides a comprehensive description of its symmetry properties.

- Rotations:
 - Rotational axes (n) are the ones around which the crystal can be rotated by specific angles and still appear unchanged. Common rotation axes include 2-fold (180°), 3-fold (120°), 4-fold (90°), and 6-fold (60°) rotations.
 - Rotation-reflection combined symmetry operations involve a rotation followed by a reflection across a plane. These operations can create complex symmetry elements in crystals.
- Reflections:
 - Mirror planes (m) are planes that divide the crystal into two symmetrical halves, where one half is the mirror image of the other.
- Inversions:
 - Inversion centers ($\bar{1}$ or i). Inversion through a central point maps every point (x, y, z) to $(-x, -y, -z)$.
 - Rotoinversion axes (\bar{n}) involve a rotation followed by an inversion through a point. Common rotoinversion axes include $\bar{3}$ (rotation + inversion) and $\bar{4}$.
- Translations: represent a shift of the entire crystal lattice by a specific vector.
 - Helicoidal axes (Screw axes) represent a combined rotation and translation along the axes. X_n where $n < X$. Types of screw axes include:
 - * 2_1 : 180° rotation + translation of $1/2$ along the axes.
 - * 3_1 : 120° rotation + translation of $1/3$ along the axes.
 - * 3_2 : 240° rotation + translation of $2/3$ along the axes.
 - Glide planes combine reflection with translation parallel to the plane. Common types include a -, b -, and c - glides (translation $1/2$ along the corresponding axis), the n -glide ($1/2$ along face diagonal), and d -glide (diamond glide, $(1/4)$ translation along the face diagonal).

Platonic solids are highly symmetrical, three-dimensional shapes with identical faces, edges, and angles. In crystallography, the five Platonic solids (tetrahedron, cube, octahedron, dodecahedron, and icosahedron) can be used to describe the coordination environments of atoms within a crystal structure.

Point groups classify the symmetry of objects based on their rotational and reflectional symmetries, excluding translations. There are 32 distinct point groups in three-dimensional space, each characterized by a unique combination of symmetry elements. Hermann-Mauguin notation is a symbolic system used to describe the symmetry elements of crystals, including point groups and space groups. This notation provides a concise way to represent the symmetry operations present in a crystal structure.

The 230 space groups classify the symmetry of crystal structures, combining translational and point symmetries. Each space group is identified by a unique number and symbol, providing a comprehensive description of the symmetry operations that can be applied to the crystal lattice.

International crystallographic tables indicate for each atom the following information:

- Coordinates indicate the position within the unit cell, expressed as fractions of the cell parameters (a , b , c).
- Occupancy factors represent the proportion of a specific atomic site that is occupied, ranging from 0 (completely unoccupied) to 1 (fully occupied).
- Isotropic thermal parameters (U) describe the average displacement of atoms from their mean positions due to thermal vibrations, assuming uniform movement in all directions.
- Wyckoff positions describe the specific locations of atoms within a unit cell based on the symmetry of the space group. Each Wyckoff position is associated with a multiplicity (the number of equivalent positions generated by symmetry operations) and a letter (such as a , b , c , etc.) that indicate the symmetry of the site, a corresponding to the highest symmetry site in the unit cell. For example, $4a$ indicates four equivalent positions with the highest symmetry.
- Symmetry indicates whether there is or not (1) a symmetry element with its symbol.

1.2 State of Art

The study of the crystal structures presented above is particularly relevant when analyzing lanthanide orthophosphates (LnPO_4), a class of materials with rich structural chemistry and diverse technological applications. These compounds are fundamental in fields such as photonics, catalysis, radioactive waste management, and biomedical imaging [14]. The selection of the specific crystalline structures—whether the anhydrous form (Monazite, Xenotime) or the hydrated form (Rhabdophane, Churchite)—is critical, as the crystal structure dictates key properties such as luminescence intensity, chemical stability, and magnetic behavior [5, 15].

The inclusion of the Zircon (ZrSiO_4) structure in this study is fundamental for two crystallographic and comparative reasons:

1. Structural Prototype: Zircon serves as the crystallographic aristotype for the Xenotime phase. Both compounds are isostructural, crystallizing in the same tetragonal system with the $I4_1/amd$ space group [3]. Understanding the arrangement of ZrO_8 and SiO_4 polyhedra in Zircon is a prerequisite for analyzing the geometry of heavy lanthanide phosphates (HREEPO_4), where Ln^{3+} and P^{5+} occupy the positions of Zr^{4+} and Si^{4+} , respectively.
2. Stability Benchmark: Zircon is widely recognized as a benchmark material for evaluating radiation resistance in nuclear wasteforms [14]. Comparative studies have demonstrated that under irradiation, silicate minerals with the Zircon structure undergo amorphization and lack structural recovery mechanisms [3]. In contrast, the analogous phosphate structures (Xenotime and Monazite) exhibit “self-healing” capabilities and superior resistance to amorphization at lower temperatures, justifying the specific interest in phosphates over silicates for the long-term storage of actinides [3].

Polymorphism and Stability Domains The crystallization of these phosphates into a specific structure depends primarily on the ionic radius of the lanthanide cation (Ln^{3+}) and synthesis conditions, such as temperature and pH [4]. There is a distinct structural dependence based on the contraction of the lanthanide series:

- Light Lanthanides (LREE), e.g., La-Gd: Tend to crystallize in the monoclinic Monazite type structure or its hexagonal hydrated form, Rhabdophane ($\text{LnPO}_4 \cdot n\text{H}_2\text{O}$) [3].
- Heavy Lanthanides (HREE, e.g., Tb-Lu): Mainly crystallize in the tetragonal Xenotime phase or the monoclinic hydrated Churchite phase ($\text{LnP}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$) [3].
- Transition Zone: Intermediate elements such as Gadolinium (Gd), Terbium (Tb), or Dysprosium (Dy) can adopt multiple structures depending on conditions. A “critical radius” exists for the transition between monazite and xenotime structures, typically located between the ionic radii of Tb and Gd [9].
- Recent thermodynamic studies have indicated that rhabdophane phases are generally metastable with respect to the corresponding monazite plus water at all temperatures under ambient pressure; however, rhabdophane often precipitates first due to kinetic controls [16].
- Phase Transformations and Dehydration There is a direct transformation relationship between low-temperature hydrated phases and high-temperature stable anhydrous phases.

For instance, the Rhabdophane structure is metastable and, upon heating, loses its structural water (zeolitic water in the channels) to irreversibly transform into the Monazite structure. This transformation typically occurs between 500 and 600 °C, although the dehydration process can begin at lower temperatures [6, 16]. Similarly, the Churchite phase is stable at low temperatures (typically synthesized via precipitation), but upon heating above 300 °C, it dehydrates and transforms directly into the Xenotime structure [15]. Controlling these transformations is vital, as the presence of water and the symmetry of the lanthanide ion's environment drastically affect properties such as photoluminescent efficiency; for example, the removal of –OH defects during the transition to the tetragonal phase significantly improves emission intensity in Tb-doped systems[5].

Technological Interest and Applications Each of these structures offers specific advantages for industrial and scientific applications:

Nuclear Waste Management: Monazite and Xenotime are considered excellent matrices for the long-term confinement of high-level nuclear waste (actinides) due to their high radiation resistance, thermal stability, and low solubility [3, 14]. Monazite ceramics have demonstrated the ability to incorporate significant amounts of tetravalent and trivalent actinides, mimicking natural minerals that have retained radionuclides over geological timescales [16].

Structural Ceramics and Coatings: Due to their high melting points (>2000 °C), chemical stability, and compatibility with other oxides, anhydrous phases are investigated as fiber coatings in Ceramic Matrix Composites (CMCs) to improve fracture toughness and prevent oxidation [3].

Nanotechnology and Catalysis: The Rhabdophane structure is of significant interest due to its morphology. It has been reported that rhabdophane nanoparticles synthesized by hydrothermal methods can form single-crystal rods with internal mesoporosity or cavities, which is attractive for catalytic and adsorption applications [4].

Biomedical Imaging: Recent investigations highlight the potential use of Churchite materials as contrast agents in Magnetic Resonance Imaging (MRI). Magnetic susceptibility measurements have shown that these hydrated phases exhibit effective magnetic moments similar to free lanthanide ions, making them suitable candidates for such applications [14].

2. Objetivo

El objetivo principal de este trabajo es el estudio detallado de las estructuras cristalinas de varios compuestos inorgánicos, específicamente el Zircón ($ZrSiO_4$), el Xenótimo ($LnPO_4$, $Ln = Y, Tb-Lu$), la Monacita ($LnPO_4$, $Ln = La-Gd$), el Rhabdofano ($LnPO_4 \cdot nH_2O$, $Ln = La-Gd$) y la Churchita ($LnPO_4 \cdot 2 H_2O$, $Ln = Tb-Lu$). Analizando estas estructuras utilizando el software VESTA para la visualización y análisis cristalográfico. Además, se explorarán las modificaciones de simetría en estas estructuras y su relación con las propiedades físicas y químicas de los materiales estudiados.

3. Resultados y Discusión

Empleando el software de visualización y análisis cristalográfico VESTA [10], se generaron las representaciones gráficas de las estructuras cristalinas de los compuestos estudiados. A continuación, se detallan las características estructurales de cada uno de los materiales analizados, incluyendo sus parámetros de celda, coordenadas atómicas, factores de ocupación y parámetros térmicos isotrópicos.

3.1 Zircón (ZrSiO_4)

Los parámetros cristalográficos del Zircón ZrSiO_4 se obtienen de “Materials Data on ZrSiO_4 by Materials Project”¹ [8].

La estructura del Zircón, se caracteriza por un sistema cristalino tetragonal con grupo espacial $I4_1/amd$ (No. 141), I indica un átomo centrado en la celda, 4_1 indica un eje de 90° de rotación con una traslación de $1/4$ de la altura de la celda unitaria, a indica un plano de simetría perpendicular al eje principal, m indica un plano de simetría y d indica un plano de simetría diagonal. El grupo puntual $4/mmm$, $4/m$ indica un eje de rotación de 90° con un plano de simetría horizontal perpendicular al eje principal c . La segunda m indica un plano de simetría vertical al eje principal pasando por los ejes a y b . La tercera m indica un plano de simetría vertical al eje principal pasando por las diagonales del plano ab . Con $Z = 4$ unidades de fórmula por celda unitaria.

Las coordenadas atómicas, factores de ocupación y parámetros térmicos isotrópicos para la estructura del Zircón se presentan en la Tabla ??.

Tabla 2: Coordenadas atómicas, factores de ocupación y parámetros térmicos isotrópicos para la estructura del Zircón.

Átomo	x	y	z	Ocup	U	Pos. Wyckoff	Sim.
Zr	0.0000	0.7500	0.1250	1	0.002	4a	$\bar{4}m2$
Si	0.0000	0.7500	0.6250	1	0.004	4b	$\bar{4}m2$
O	0.0000	0.0661	0.1953	1	0.007	16h	.m.

¹<https://next-gen.materialsproject.org/materials/mp-4820>

Los parámetros de la celda unitaria son $a = b \neq c$ con $a = b = 6.62$, $c = 6.00$ Å y los ángulos $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$. El volumen de la celda unitaria es 286.533 Å³. Cada celda unitaria contiene 4 unidades de fórmula ($Z = 4$), por lo tanto la fórmula empírica es Zr₄Si₄O₁₆. La celda unitaria se muestra en las proyecciones a lo largo de los ejes a , b y c en la Figura ??.

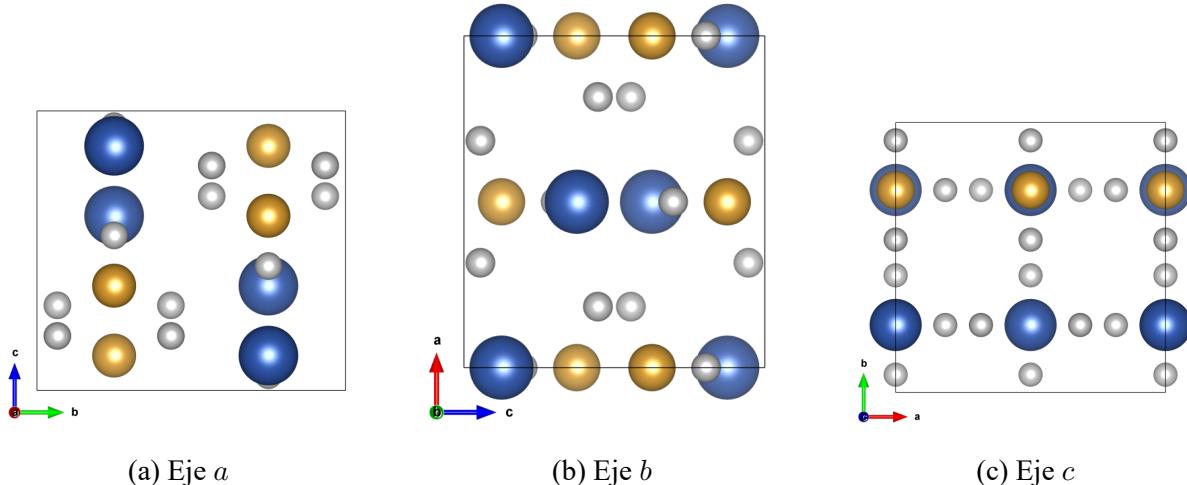
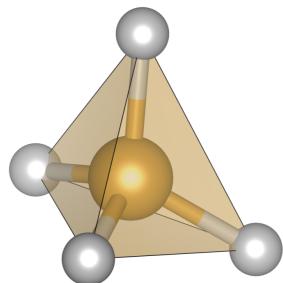
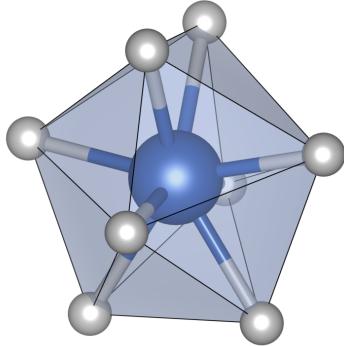


Figura 2: Proyecciones de la celdilla unidad

El entorno de coordinación del silicio conforma un tetraedro SiO₄ aislado y cristalográficamente perfecto en cuanto a sus distancias de enlace, presentando cuatro enlaces Si–O idénticos de 1.626 Å. Esta uniformidad se refleja en un índice de distorsión de la longitud de enlace nulo (0.0000).

Sin embargo, el poliedro no es un tetraedro geométrico ideal. El análisis de los ángulos de enlace revela una varianza angular de $(97.71^\circ)^2$ y un alargamiento cuadrático de 1.0238, valores que indican una compresión significativa del poliedro a lo largo del eje c (ver Figuras ?? y ??). El volumen calculado para este poliedro es de 2.13 Å³.

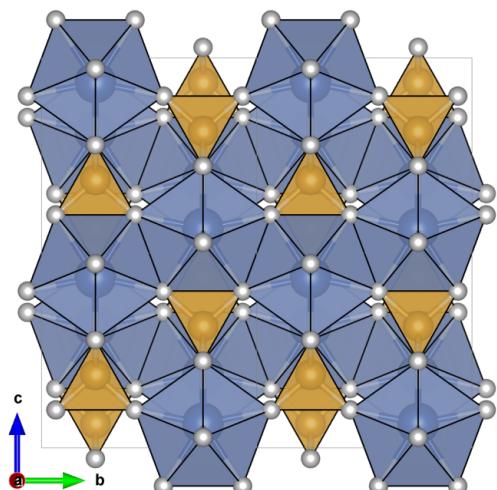




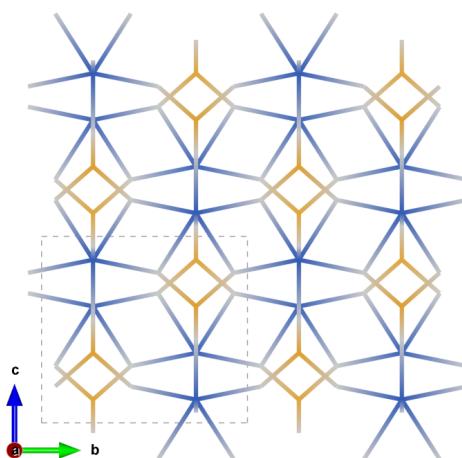
Por su parte, el catión Zr^{4+} presenta un número de coordinación 8, conformando un dodecaedro ZrO_8 con una geometría más distorsionada que el tetraedro de silicio. A diferencia de este último, el entorno del zirconio no es equidistante: exhibe dos conjuntos de longitudes de enlace diferenciados, con cuatro enlaces más cortos de 2.135 Å y otros cuatro más largos de 2.275 Å.

Esta disparidad se refleja en un índice de distorsión de la longitud de enlace de 0.0318 (frente al valor nulo observado para el Si). La distancia media de enlace Zr–O resultante es de 2.205 Å, y el poliedro ocupa un volumen considerablemente mayor, de 19.18 Å³, consistente con el mayor radio iónico del zirconio (ver Figuras ?? y ??).

En esta estructura, los iones Zr^{4+} están coordinados por ocho átomos de oxígeno, formando poliedros ZrO_8 que se disponen alrededor de los tetraedros SiO_4 . Los tetraedros SiO_4 están orientados de manera que sus vértices apuntan hacia los centros de los poliedros ZrO_8 , creando una red tridimensional interconectada. Esta disposición resulta en una estructura robusta y estable, característica del Zircón. Las representaciones de los poliedros ZrO_8 y SiO_4 , así como del esqueleto de la estructura, se muestran en las Figuras ??, ?? y ??.

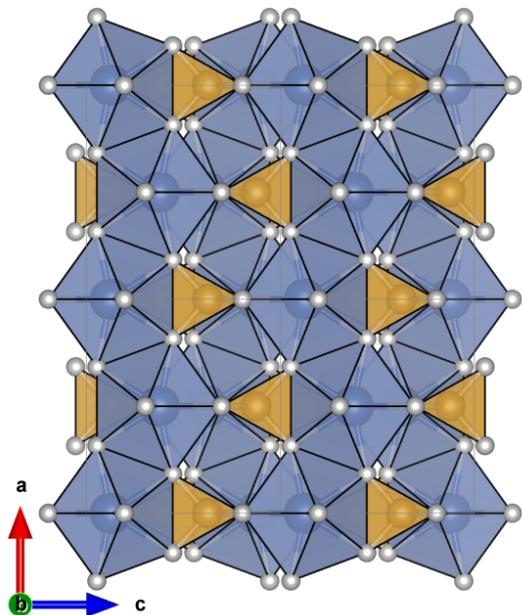


(a) Proyección de los poliedros

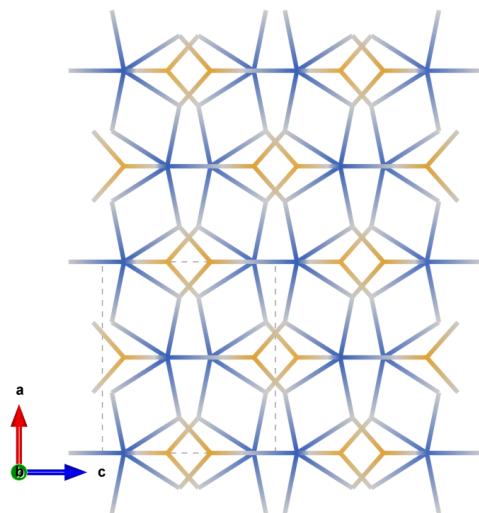


(b) Proyección del esqueleto

Figura 3: Representaciones de los poliedros y del esqueleto en la celdilla unitaria del Zircón a lo largo del eje *a*.

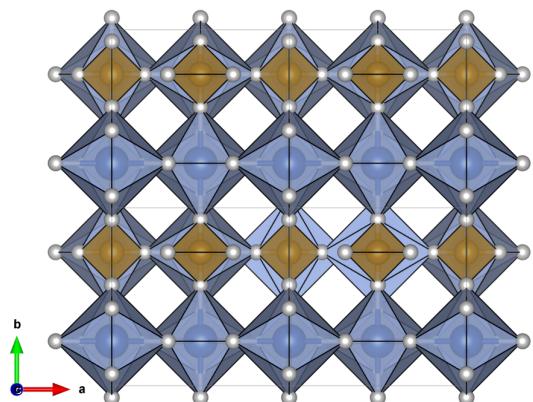


(a) Proyección a lo largo del eje *b*.

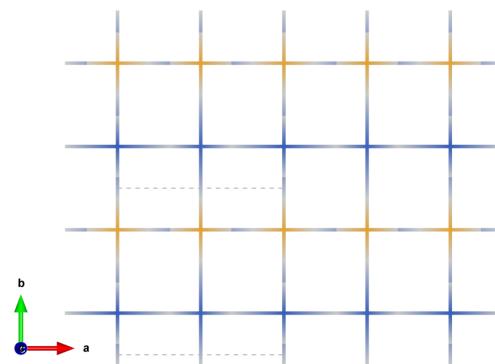


(b) Proyección a lo largo del eje *b*.

Figura 4: Representaciones apliadas de los poliedros y esqueletos del Zircón a lo largo del eje *b*.



(a) Proyección de los poliedros



(b) Proyección del esqueleto

Figura 5: Representaciones de los poliedros y del esqueleto en la celdilla unitaria del Zircón a lo largo del eje *c*.

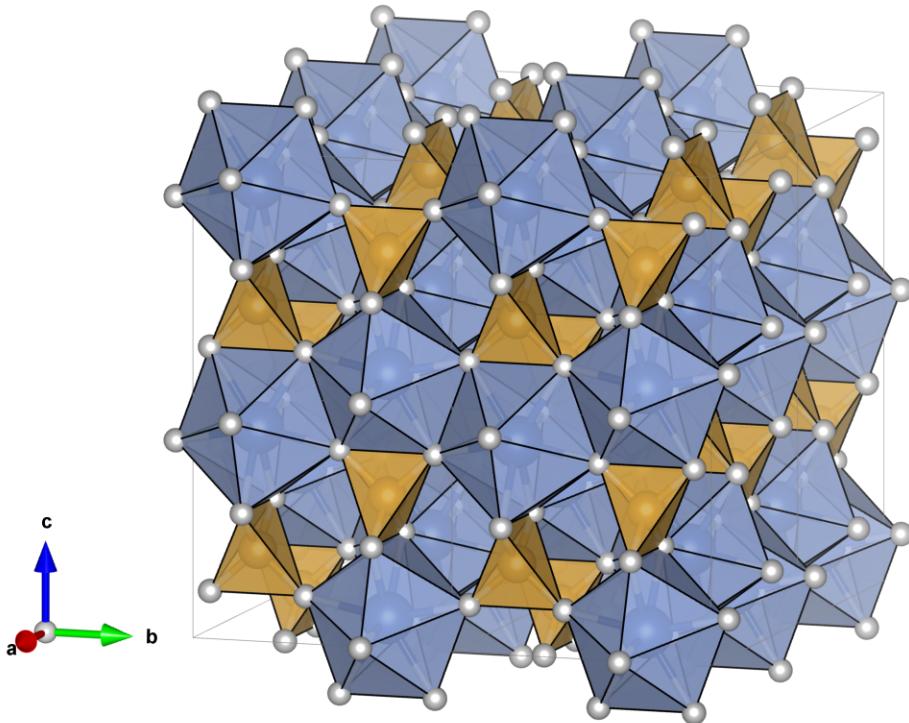


Figura 6: Representación de los poliedros en perspectiva del Zircón.

3.2 Xenótimo (LnPO_4 , $\text{Ln} = \text{Y, Tb-Lu}$)

Los parámetros cristalográficos del Xenótimo YPO_4 se obtienen de “Mindat.org”² [13].

Los fosfatos de tierras raras pesados (Tb-Lu, Y, Sc) cristalizan en la estructura del Xenótimo, isoesstructural con el Zircón [3].

La estructura del Xenótimo, isoesstructural con el Zircón, se caracteriza por un sistema cristalino tetragonal con grupo espacial $I4_1/\text{amd}$ (No. 141), I indica un átomo centrado en la celda, 4_1 indica un eje de 90° de rotación con una traslación de $1/4$ de la altura de la celda unitaria, a indica un plano de simetría perpendicular al eje principal, m indica un plano de simetría y d indica un plano de simetría diagonal. El grupo puntual $4/mmm$, $4/m$ indica un eje de rotación de 90° con un plano de simetría horizontal perpendicular al eje principal c . La segunda m indica un plano de simetría vertical al eje principal pasando por los ejes a y b . La tercera m indica un plano de simetría vertical al eje principal pasando por las diagonales del plano ab . Con $Z = 4$ unidades de fórmula por celda unitaria.

Las coordenadas atómicas, factores de ocupación y parámetros térmicos isotrópicos para la estructura del Xenótimo se presentan en la Tabla ??.

²<https://www.mindat.org/min-4333.html>

Tabla 3: Coordenadas atómicas, factores de ocupación y parámetros térmicos isotrópicos para la estructura del Xenótimo.

Átomo	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>	Ocup	<i>U</i>	Pos. Wyckoff	Sim.
Y	0.0000	0.7500	0.1250	1	0.004	4 <i>a</i>	$\bar{4}m2$
P	0.0000	0.2500	0.3750	1	0.005	4 <i>b</i>	$\bar{4}m2$
O	0.0000	0.0764	0.2175	1	0.008	16 <i>h</i>	. <i>m.</i>

Los parámetros de la celda unitaria son $a = b \neq c$ con $a = b = 6.8947$, $c = 6.0276$ Å y los ángulos $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$. La presencia de átomos de Y en vez de Zr provoca un aumento en el volumen de la celda unitaria respecto al Zircón, que en este caso es 286.533 Å³. Cada celda unitaria contiene 4 unidades de fórmula ($Z = 4$), por lo tanto la fórmula empírica es Y₄P₄O₁₆. La celda unitaria se muestra en las proyecciones a lo largo de los ejes *a*, *b* y *c* en la Figura ??.

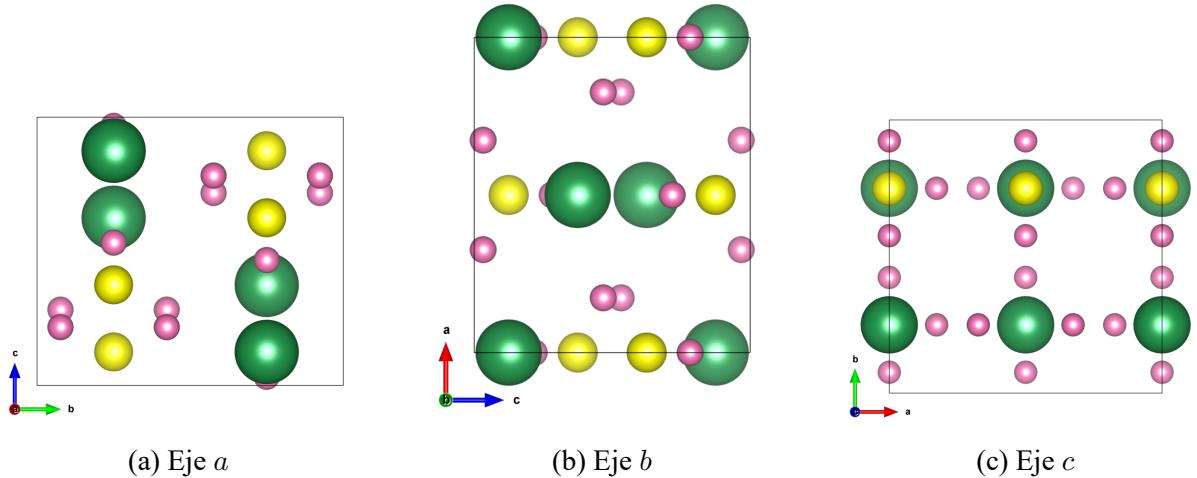
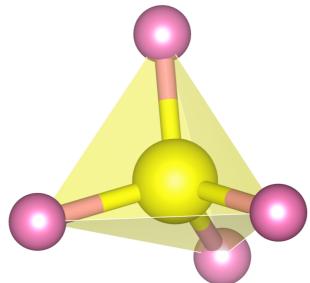
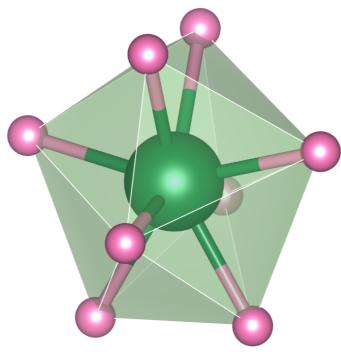


Figura 7: Proyecciones de la celdilla unidad

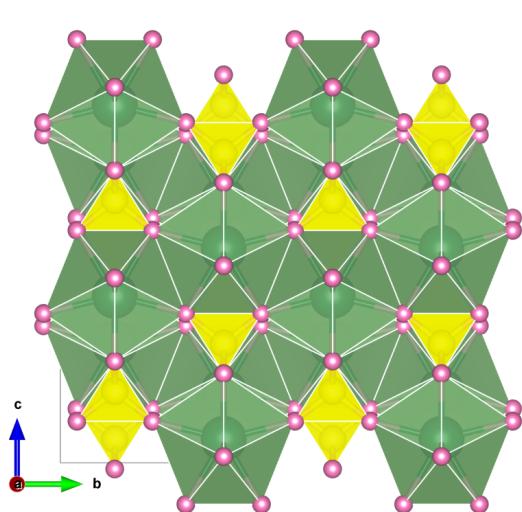
En cuanto al entorno de coordinación del fósforo, este forma un tetraedro PO₄ con cuatro longitudes de enlace idénticas de 1.533 Å, lo que resulta en un índice de distorsión de la longitud de enlace de 0.0000. Aunque mantiene la simetría local del sitio 4*b* ($\bar{4}m2$) al igual que el silicio en el Zircón, el tetraedro de fosfato es notablemente menos distorsionado angularmente: presenta una varianza del ángulo de enlace de 21.48 °² (frente a los 97.71 °² del silicato) y un volumen más reducido de 1.84 Å³, consistente con el menor radio iónico del P⁵⁺.



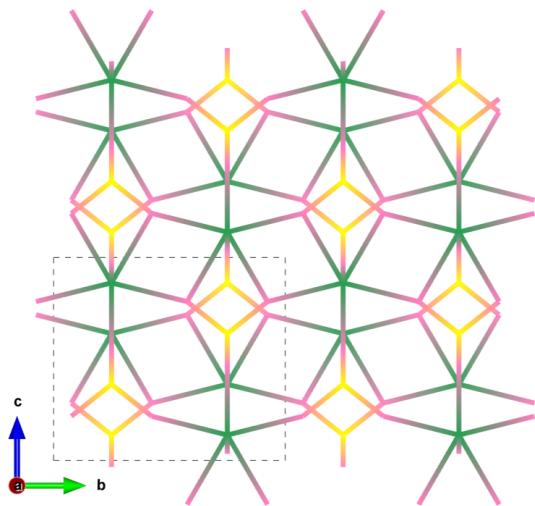


Por otro lado, el catión Y^{3+} se encuentra en una coordinación 8 formando un dodecaedro YO_8 . Este poliedro exhibe dos conjuntos de distancias de enlace, con cuatro enlaces más cortos de 2.311 Å y cuatro más largos de 2.391 Å, resultando en una distancia media de 2.351 Å. El índice de distorsión de la longitud de enlace es de 0.0169, un valor inferior al observado para el Zr^{4+} en la estructura del Zircón (0.0318), lo que indica un entorno ligeramente más regular para el itrio. Debido al mayor tamaño del catión trivalente, el volumen del poliedro es significativamente mayor, alcanzando los 23.30 Å³ (ver Figuras ?? y ??).

En esta estructura, los iones Y^{3+} están coordinados por ocho átomos de oxígeno, formando poliedros YO_8 que se disponen alrededor de los tetraedros PO_4 . Los tetraedros PO_4 están orientados de manera que sus vértices apuntan hacia los centros de los poliedros YO_8 , creando una red tridimensional interconectada. Esta disposición resulta en una estructura robusta y estable, característica del Xenótimo. Las representaciones de los poliedros YO_8 y PO_4 , así como del esqueleto de la estructura, se muestran en las Figuras ??, ?? y ??.

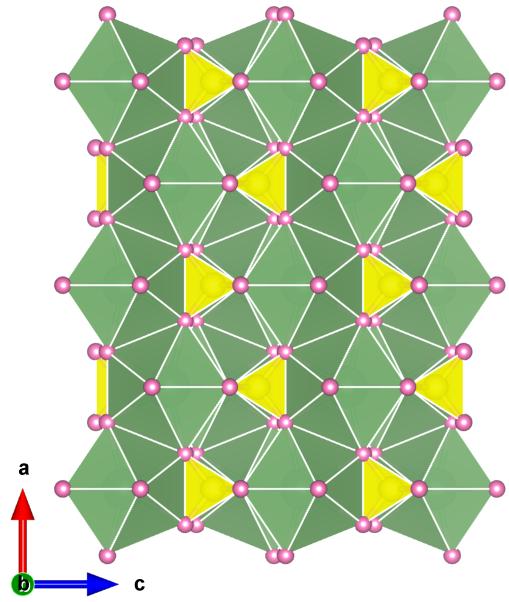


(a) Proyección de los poliedros

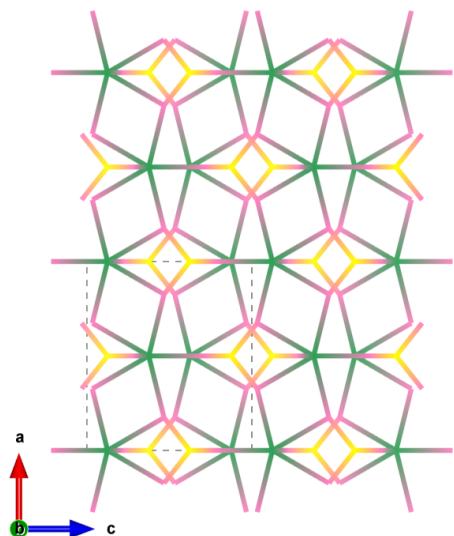


(b) Proyección del esqueleto

Figura 8: Representaciones de los poliedros y del esqueleto en la celdilla unitaria del Xenótimo a lo largo del eje a .

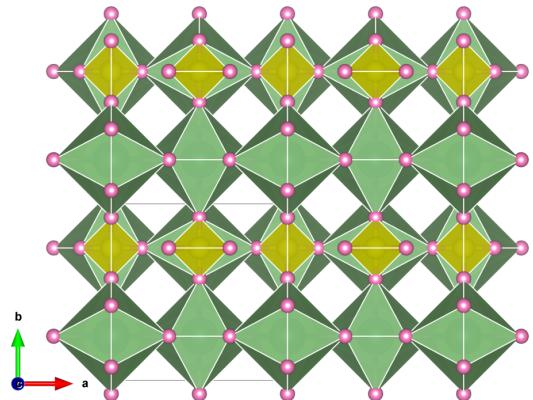


(a) Proyección a lo largo del eje b .

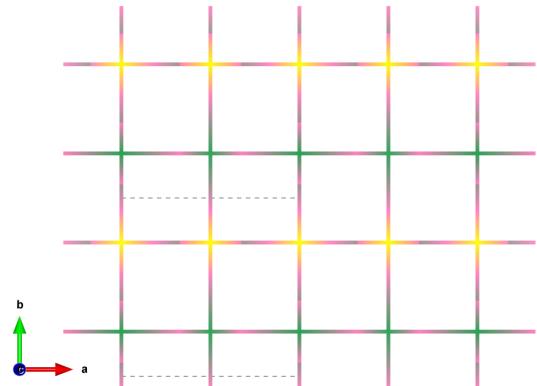


(b) Proyección a lo largo del eje b .

Figura 9: Representaciones apliadas de los poliedros y esqueletos del Xenótimo a lo largo del eje b .



(a) Proyección de los poliedros



(b) Proyección del esqueleto

Figura 10: Representaciones de los poliedros y del esqueleto en la celdilla unitaria del Xenótimo a lo largo del eje c .

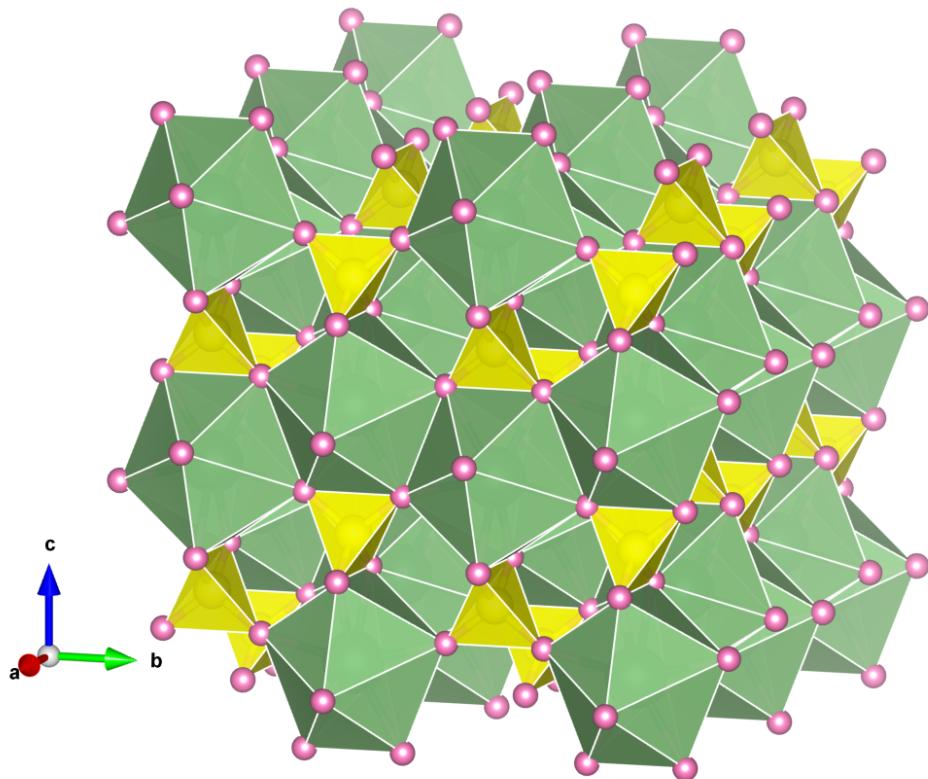


Figura 11: Representación de los poliedros en perspectiva del Xenótimo.

3.3 Monacita (LnPO_4 , $\text{Ln} = \text{La-Gd}$)

Los parámetros cristalográficos para la representación de la Monacita CePO_4 se obtienen de “Crystallography Open Database”³ [12].

La estructura de la Monacita se caracteriza por un sistema cristalino monoclinico con grupo espacial $P2_1/n$ (No. 14). Lo que indica una celda de tipo primitiva (P), 2_1 indica un eje helicoidal de 180° con una traslación de $1/2$ de la altura de la celda unitaria y n indica un plano de simetría diagonal. El grupo puntual $2/m$, 2 indica un eje de rotación de 180° y m indica un plano de simetría perpendicular al eje principal b .

Las coordenadas atómicas, factores de ocupación y parámetros térmicos isotrópicos para la estructura de la Monacita se presentan en la Tabla ??.

³<https://www.crystallography.net/cod/9016405.html>

Tabla 4: Coordenadas atómicas, factores de ocupación y parámetros térmicos isotrópicos para la estructura de la Monacita.

Átomo	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>	Ocup	<i>U</i>	Pos. Wyckoff	Sim.
Ce	0.292	0.156	0.083	1	0.000	4e	1
P	0.292	0.156	0.581	1	0.000	4e	1
O1	0.211	0.990	0.423	1	0.000	4e	1
O2	0.374	0.323	0.464	1	0.000	4e	1
O3	0.467	0.086	0.765	1	0.000	4e	1
O4	0.116	0.235	0.680	1	0.000	4e	1

Los parámetros de la celda unitaria son $a = 6.76$, $b = 7.00$, $c = 6.44 \text{ \AA}$ y los ángulos $\alpha = \gamma = 90^\circ$, $\beta \neq 90^\circ$. El volumen de la celda unitaria es 296.158629 \AA^3 . Cada celda unitaria contiene 4 unidades de fórmula ($Z = 4$), por lo tanto la fórmula empírica es $\text{Ce}_4\text{P}_4\text{O}_{16}$. La celda unitaria se muestra en las proyecciones a lo largo de los ejes a , b y c en la Figura ??.

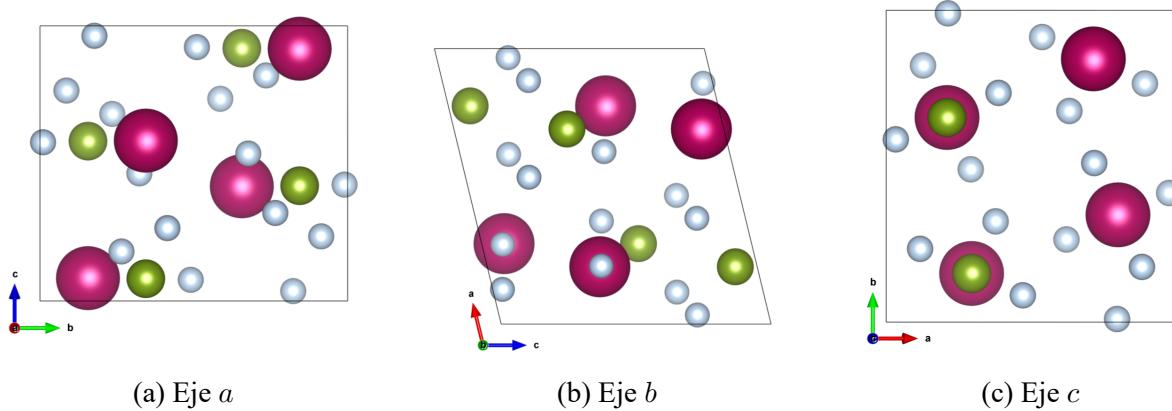
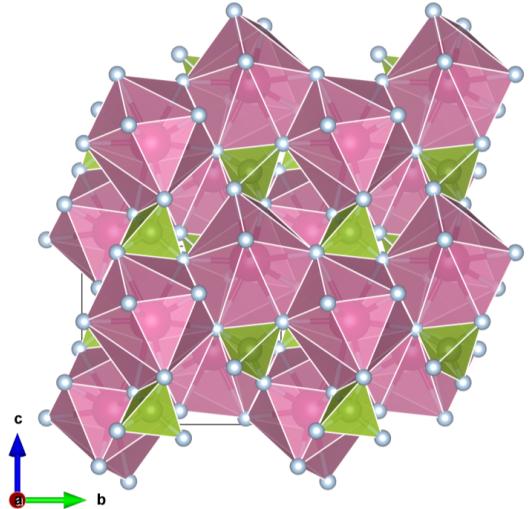


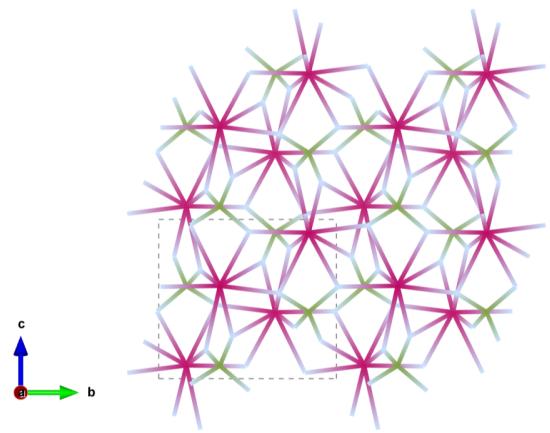
Figura 12: Proyecciones de la celdilla unidad

En esta estructura, los iones Ln^{3+} están coordinados por nueve átomos de oxígeno, formando poliedros LnO_9 que se disponen alrededor de los tetraedros PO_4 .

Las representaciones de los poliedros LnO_9 y PO_4 , así como del esqueleto de la estructura, se muestran en las Figuras ??, ?? y ??.

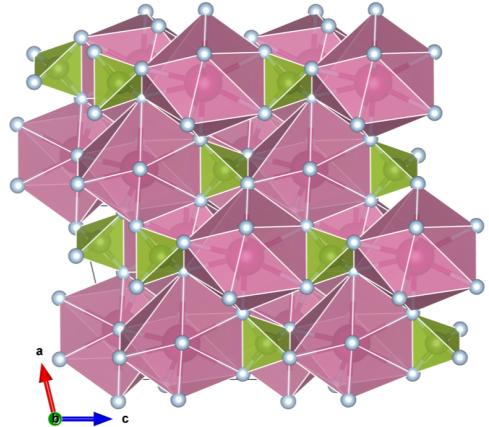


(a) Proyección de los poliedros

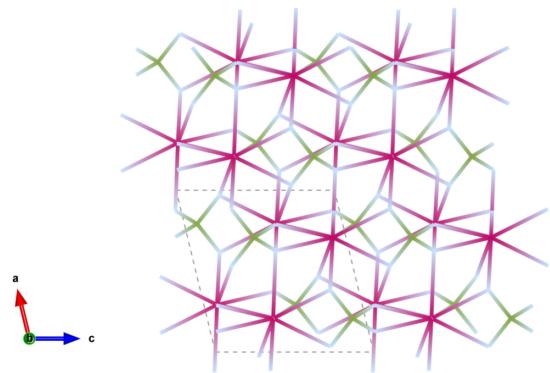


(b) Proyección del esqueleto

Figura 13: Representaciones de los poliedros y del esqueleto en la celdilla unitaria del Monacita a lo largo del eje *a*.

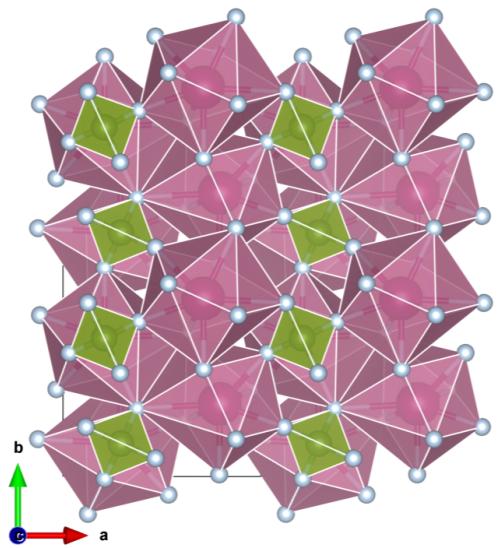


(a) Proyección a lo largo del eje *b*.

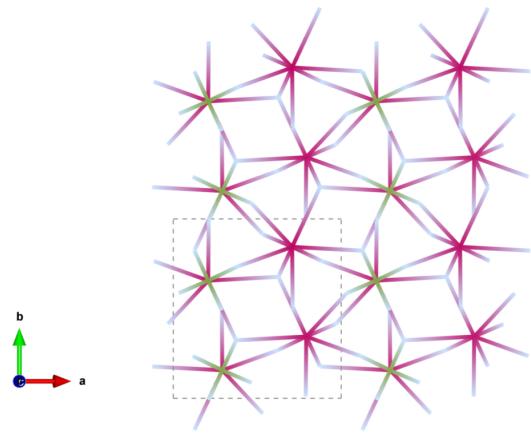


(b) Proyección a lo largo del eje *b*.

Figura 14: Representaciones apliadas de los poliedros y esqueletos del Monacita a lo largo del eje *b*.



(a) Proyección de los poliedros



(b) Proyección del esqueleto

Figura 15: Representaciones de los poliedros y del esqueleto en la celdilla unitaria del Monacita a lo largo del eje c .

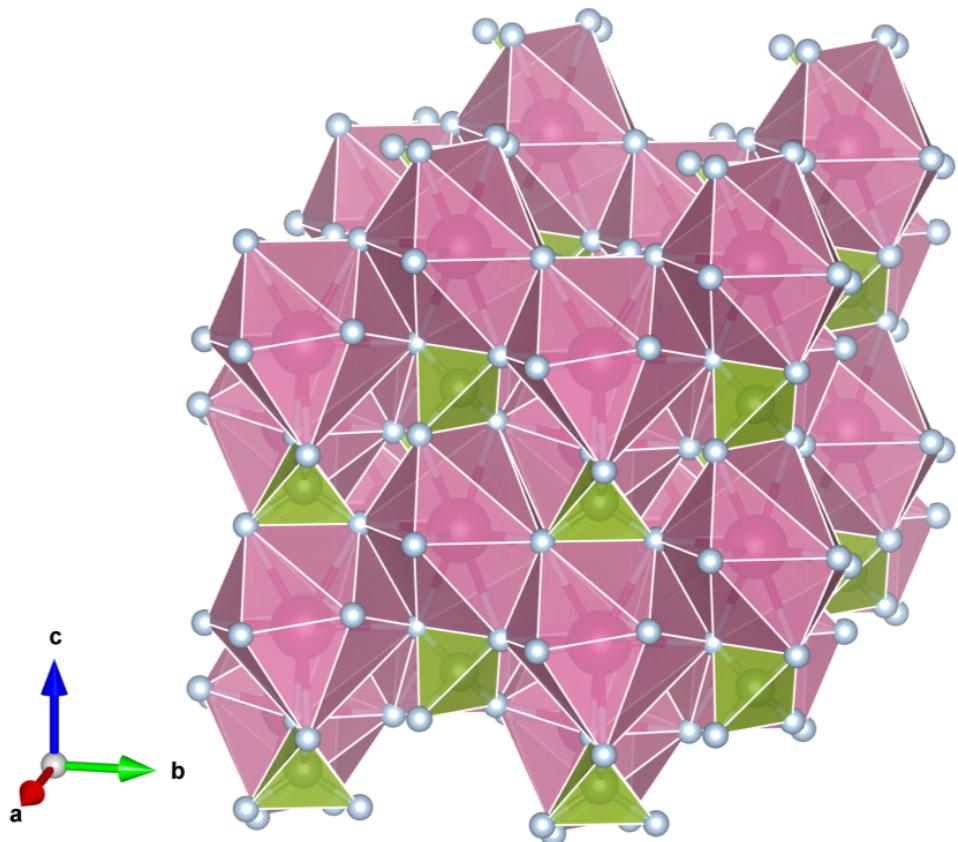


Figura 16: Representación de los poliedros en perspectiva del Monacita.

3.4 Churchita ($\text{LnPO}_4 \cdot n\text{H}_2\text{O}$, Ln= Y, Tb-Lu)

Los parámetros cristalográficos para la representación de la Churchita $\text{YPO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ se obtienen de “Crystallography Open Database”⁴ [Kohlmann_na1039].

La estructura de la Churchita se caracteriza por un sistema cristalino monoclinico con grupo espacial $C2/c$ (No. 15). Lo que indica una celda de tipo centrada en el cuerpo (C), 2 indica un eje de rotación de 180° y c indica un plano de simetría diagonal. El grupo puntual $2/m$, 2 indica un eje de rotación de 180° y m indica un plano de simetría perpendicular al eje principal b .

Las coordenadas atómicas, factores de ocupación y parámetros térmicos isotrópicos para la estructura de la Churchita se presentan en la Tabla ??.

Tabla 5: Coordenadas atómicas, factores de ocupación y parámetros térmicos isotrópicos para la estructura de la Churchita.

Átomo	x	y	z	Ocup	U	Pos. Wyckoff	Sim.
Y	0.2500	0.8289	0.0000	1	0.007	4e	2
P	0.2500	0.3307	0.0000	1	0.014	4e	2
O1	0.3020	0.3857	0.2240	1	0.022	8f	1
O2	0.5060	0.2714	0.0840	1	0.018	8f	1
Ow	0.6300	0.0680	0.2180	1	0.021	8f	1

Los parámetros de la celda unitaria son $a \neq b \neq c$, con $a = 5.5780$, $b = 15.0060$, $c = 6.2750$ Å y los ángulos $\alpha = \gamma = 90^\circ$, $\beta = 117.83^\circ$. El volumen de la celda unitaria es 464.488323 Å³. Cada celda unitaria contiene 4 unidades de fórmula ($Z = 4$), por lo tanto la fórmula empírica es $\text{Y}_4\text{P}_4\text{O}_{16} \cdot 8\text{H}_2\text{O}$. La celda unitaria se muestra en las proyecciones a lo largo de los ejes a , b y c en la Figura ??.

⁴<https://www.mindat.org/min-1047.html>

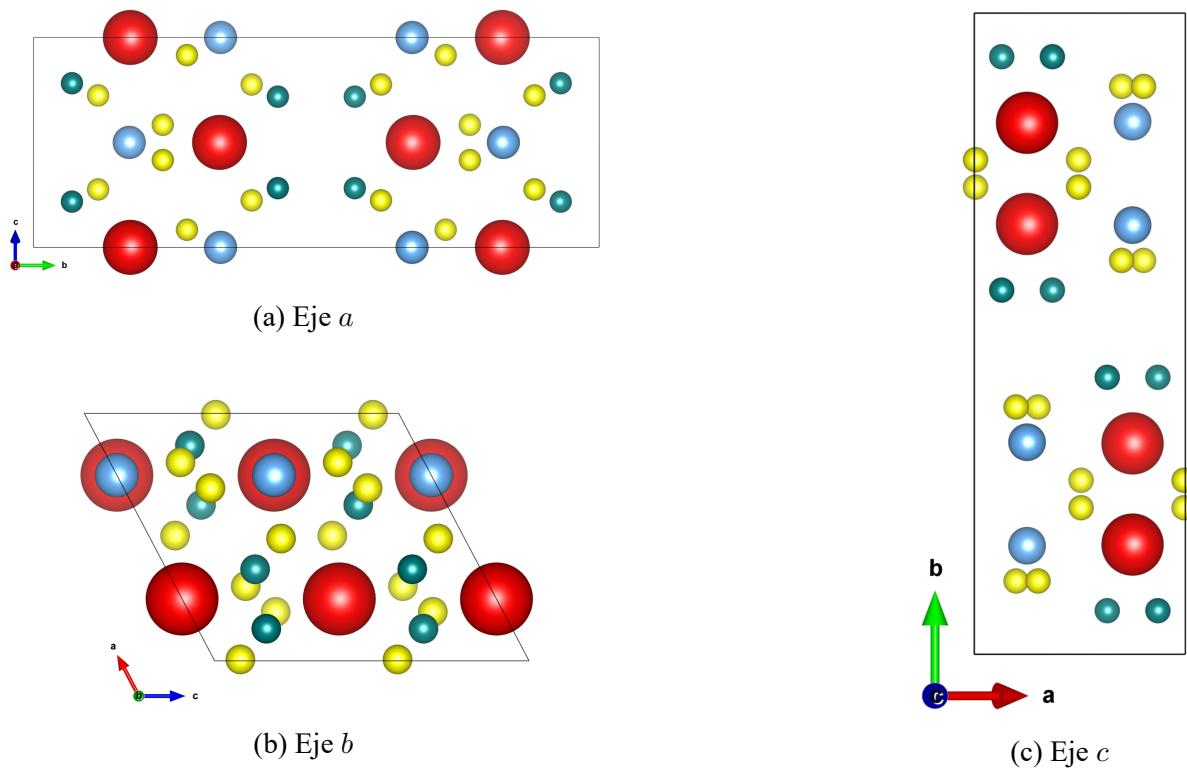


Figura 17: Proyecciones de la celdilla unidad

En esta estructura, los iones Y^{3+} están coordinados por ocho átomos de oxígeno y moléculas de agua, formando poliedros $\text{YPO}_4 \cdot n\text{H}_2\text{O}$ que se disponen alrededor de los tetraedros PO_4 .

Las representaciones de los poliedros $\text{YPO}_4 \cdot n\text{H}_2\text{O}$ y PO_4 , así como del esqueleto de la estructura, se muestran en las Figuras ??, ?? y ??.

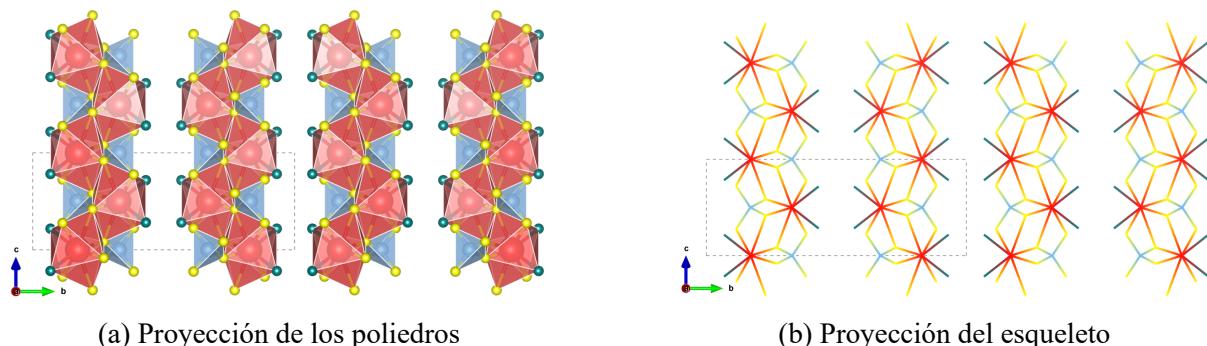
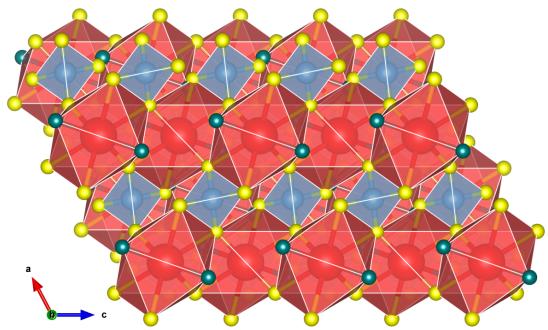
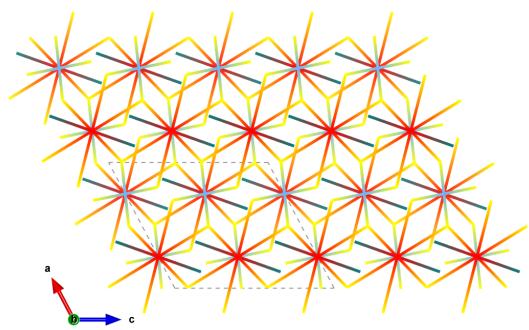


Figura 18: Representaciones de los poliedros y del esqueleto en la celdilla unitaria del Churchita a lo largo del eje *a*.

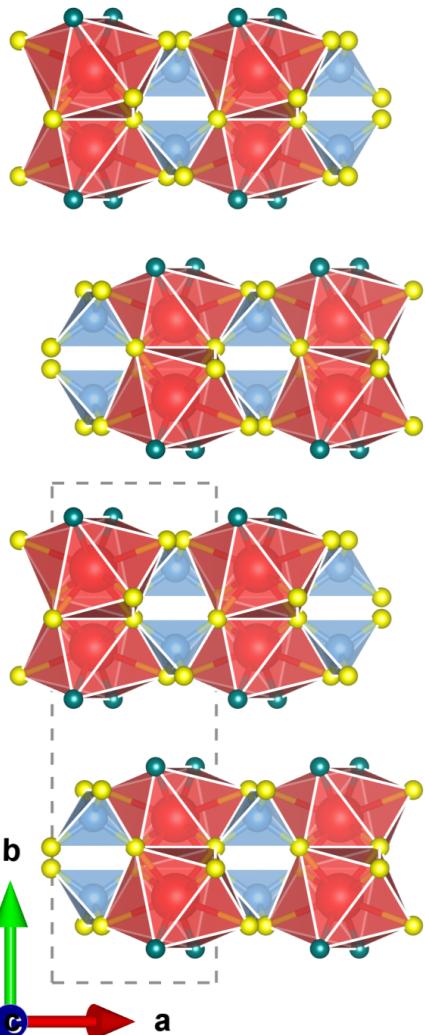


(a) Proyección a lo largo del eje b .

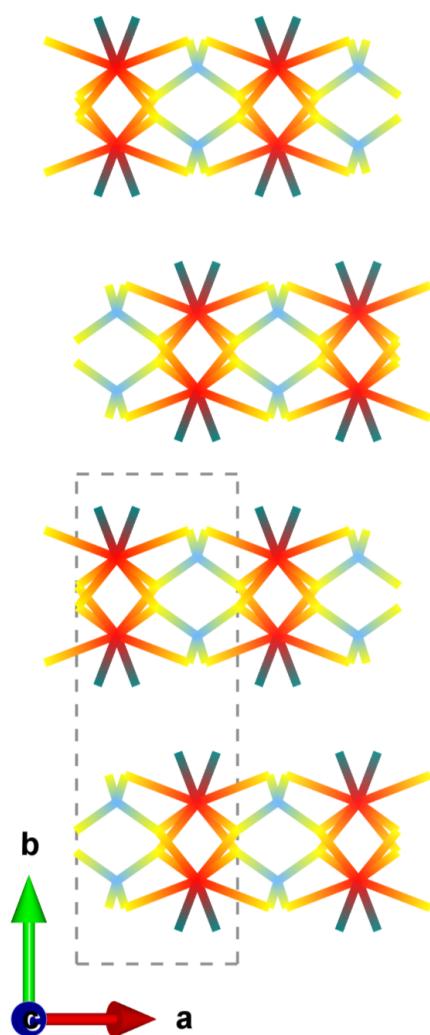


(b) Proyección a lo largo del eje b .

Figura 19: Representaciones apliadas de los poliedros y esqueletos del Churchita a lo largo del eje b .



(a) Proyección de los poliedros



(b) Proyección del esqueleto

Figura 20: Representaciones de los poliedros y del esqueleto en la celdilla unitaria del Churchita a lo largo del eje c .

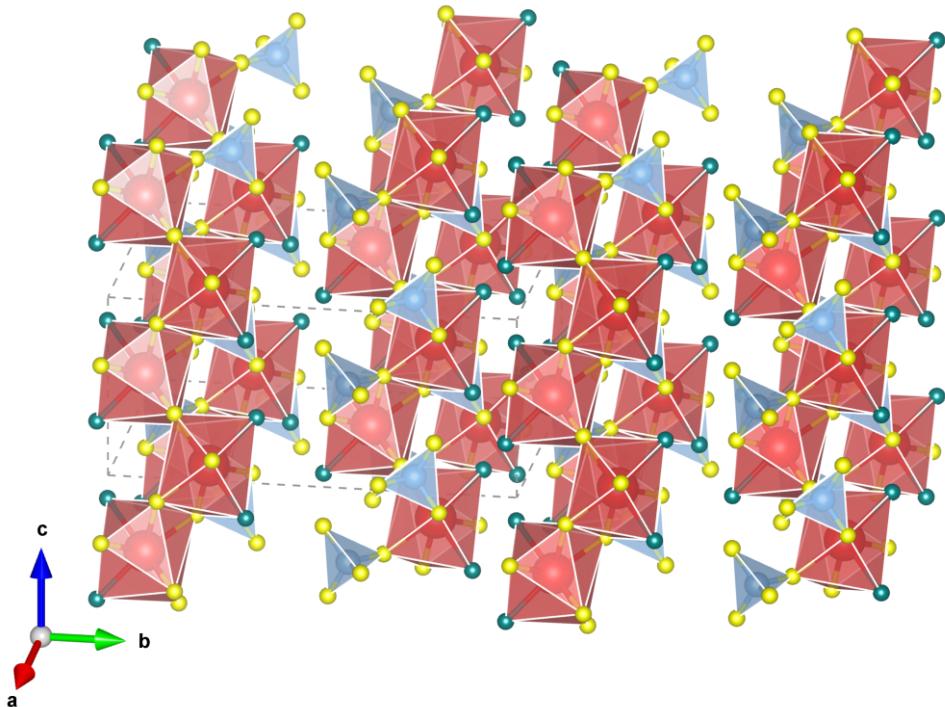


Figura 21: Representación de los poliedros en perspectiva del Churchita.

3.5 Rhabdofano ($\text{LnPO}_4 \cdot n\text{H}_2\text{O}$, Ln= Y, Tb-Lu)

Los parámetros cristalográficos para la representación del Rhabdofano con $\text{CePO}_4 \cdot 0.67\text{H}_2\text{O}$ se obtienen de “Mindat.org”⁵ [11].

La estructura del Rhabdofano se caracteriza por un sistema cristalino hexagonal con grupo espacial $P6_222$ (No. 180). Lo que indica una celda de tipo primitiva (P), 6_2 indica un eje helicoidal de 60° con una traslación de $2/6$ de la altura de la celda unitaria, y los dos 2 indican ejes de rotación de 180° perpendiculares al eje principal c . El grupo puntual $6mm$, 6 indica un eje de rotación de 60° y las dos m indican planos de simetría verticales al eje principal c , uno pasando por los ejes a y b y otro pasando por las diagonales del plano ab .

Las coordenadas atómicas, factores de ocupación y parámetros térmicos isotrópicos para la estructura del Rhabdofano se presentan en la Tabla ??.

⁵<https://www.mindat.org/min-3397.html>

Tabla 6: Parámetros estructurales

Átomo	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>	Ocup.	<i>U</i>	Pos. Wyckoff	Sim.
Ce	0.500	0.000	0.000	1	0.000	3c	222
P	0.500	0.000	0.500	1	0.000	3d	222
O	0.446	0.147	0.360	1	0.000	12k	1
Ow	0.000	0.000	0.000	1	0.000	3a	222

Los parámetros de la celda unitaria son $a = b \neq c$ con $a = 7.0550\text{\AA}$ y los ángulos $\alpha = \beta = 90^\circ$, $\gamma = 120^\circ$. El volumen de la celda unitaria es 277.551182 \AA^3 . Cada celda unitaria contiene 3 unidades de fórmula ($Z = 3$), por lo tanto la fórmula empírica es $\text{Ce}_3\text{P}_3\text{O}_{12} \cdot 2 \text{ H}_2\text{O}$. La celda unitaria se muestra en las proyecciones a lo largo de los ejes a , b y c en la Figura ??.

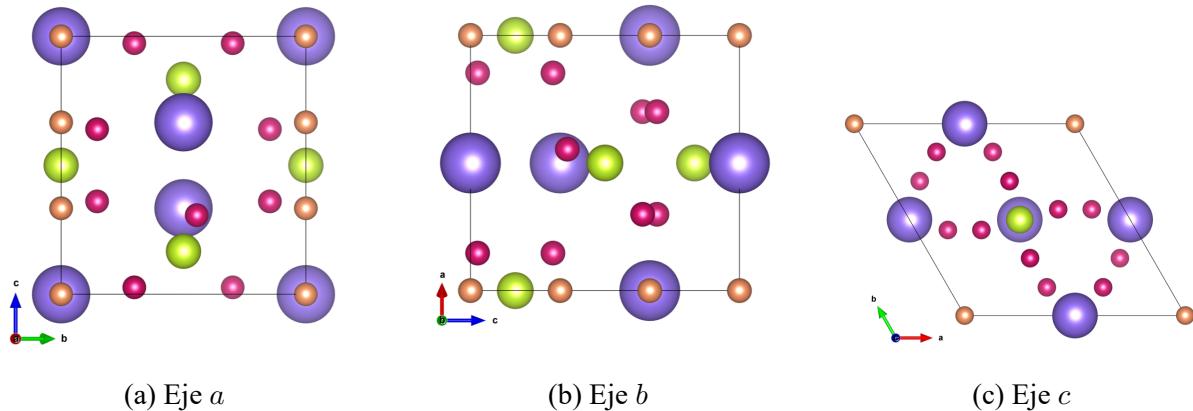
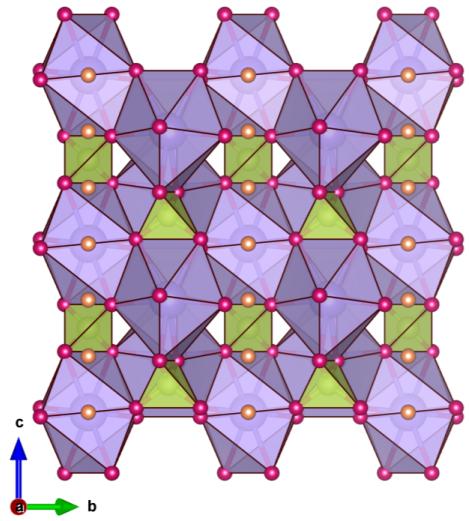


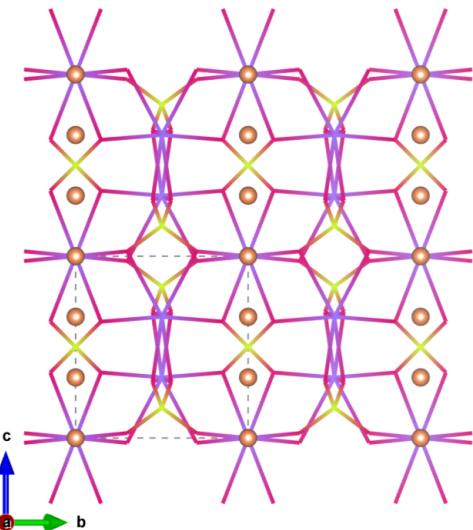
Figura 22: Proyecciones de la celdilla unidad

En esta estructura, los iones Ce^{3+} están coordinados por ocho átomos de oxígeno y moléculas de agua, formando poliedros $\text{CeO}_8 \cdot 0.67 \text{ H}_2\text{O}$ que se disponen alrededor de los tetraedros PO_4 .

Las representaciones de los poliedros $\text{CeO}_8 \cdot 0.67 \text{ H}_2\text{O}$ y PO_4 , así como del esqueleto de la estructura, se muestran en las Figuras ??, ?? y ??.

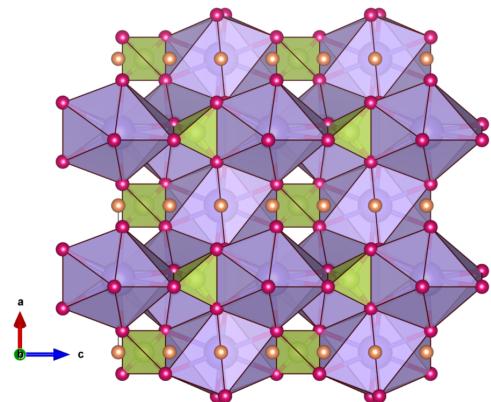


(a) Proyección de los poliedros

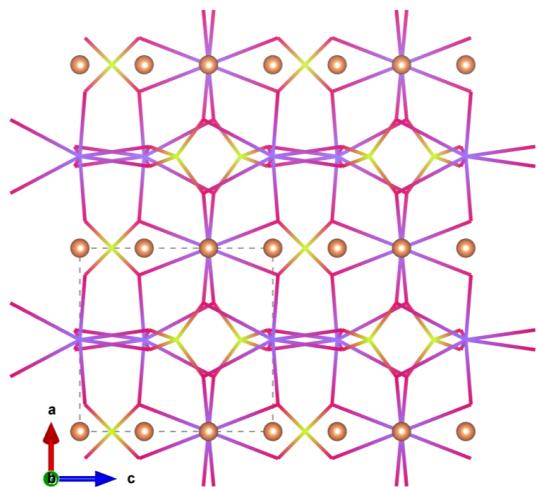


(b) Proyección del esqueleto

Figura 23: Representaciones de los poliedros y del esqueleto en la celdilla unitaria del Rhabdofano a lo largo del eje *a*.

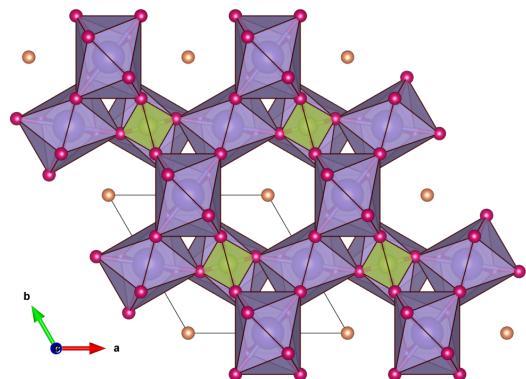


(a) Proyección a lo largo del eje *b*.

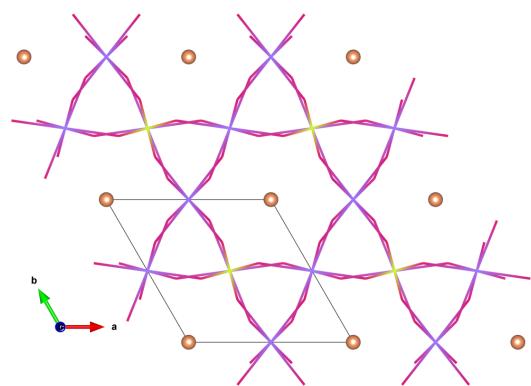


(b) Proyección a lo largo del eje *b*.

Figura 24: Representaciones apliadas de los poliedros y esqueletos del Rhabdofano a lo largo del eje *b*.



(a) Proyección de los poliedros



(b) Proyección del esqueleto

Figura 25: Representaciones de los poliedros y del esqueleto en la celdilla unitaria del Rhabdofano a lo largo del eje c .

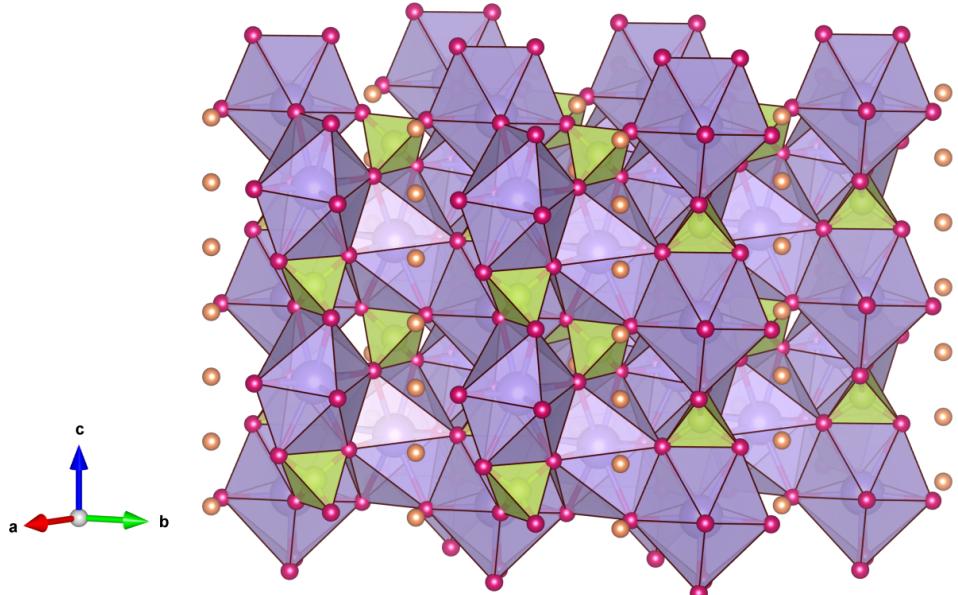


Figura 26: Representación de los poliedros en perspectiva del Rhabdofano.

4. Conclusiones

Resumen de hallazgos.

Bibliografía

- [1] Ashcroft, N. W., & Mermin, N. D. (1976). Solid state. *Physics (New York: Holt, Rinehart and Winston) Appendix C, 1.*
- [2] Callister Jr, W. D., & Rethwisch, D. G. (2020). *Materials science and engineering: an introduction*. John wiley & sons.
- [3] Chong, S., Riley, B. J., Lu, X., Du, J., Mahadevan, T., & Hegde, V. (2024). Synthesis and properties of anhydrous rare-earth phosphates, monazite and xenotime: a review. *RSC Advances*, 14(27), 18978-19000. <https://doi.org/10.1039/D4RA01142B>
- [4] Enikeeva, M. O., Proskurina, O. V., Levin, A. A., Smirnov, A. V., Nevedomskiy, V. N., & Gusarov, V. V. (2023). Structure of $\text{Y}_{0.75} \text{La}_{0.25} \text{PO}_4 \cdot 0.67\text{H}_2\text{O}$ rhabdophane nanoparticles synthesized by the hydrothermal microwave method. *Journal of Solid State Chemistry*, 319, 123829. <https://doi.org/10.1016/j.jssc.2022.123829>
- [5] Garrido Hernández, A., García Murillo, A., Carrillo Romo, F. D. J., Boyer, D., Potdevin, A., Chadeyron, G., & Miranda, J. R. (2016). Photoluminescence behavior of $\text{YPO}_4 : \text{Tb}_3^+$ crystallized in monoclinic, hexagonal or tetragonal phase obtained by hydrothermal process. *Materials Research Bulletin*, 84, 225-231. <https://doi.org/10.1016/j.materresbull.2016.08.021>
- [6] Kenges, K. M., Proskurina, O. V., Danilovich, D. P., Aldabergenov, M. K., & Gusarov, V. V. (2017). Synthesis and properties of nanocrystalline materials based on LaPO_4 . *Russian Journal of Applied Chemistry*, 90(7), 1047-1054. <https://doi.org/10.1134/S1070427217070047>
- [7] Kohlmann, M., Sowa, H., Reithmayer, K., Schulz, H., Krüger, R.-R., & Abriel, W. (1994). Structure of a $\text{Y}_{1-x}(\text{Gd}, \text{Dy}, \text{Er})_x\text{PO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ microcrystal using synchrotron radiation. *Crystal Structure Communications*, 50(11), 1651-1652.

- [8] Materials Data on ZrSiO₄ by Materials Project. (2020). <https://doi.org/10.17188/1208424>
- [9] Mogilevsky, P. (2007). On the miscibility gap in monazite–xenotime systems. *Physics and Chemistry of Minerals*, 34(3), 201-214. <https://doi.org/10.1007/s00269-006-0139-1>
- [10] Momma, K., & Izumi, F. (2011). VESTA3 for three-dimensional visualization of crystal, volumetric and morphology data. *Journal of Applied Crystallography*, 44(6), 1272-1276. <https://doi.org/10.1107/S0021889811038970>
- [11] Mooney, R. C. L. (1950). X-ray diffraction study of cerous phosphate and related crystals. I. Hexagonal modification. *Acta Crystallographica*, 3(5), 337-340. <https://doi.org/10.1107/S0365110X50000963>
- [12] Mooney, R. C. (1948). *Crystal structures of a series of rare earth phosphates* (Vol. 2118). US Atomic Energy Commission, Technical Information Division.
- [13] Ni, Y., Hughes, J. M., & Mariano, A. N. (1995). Crystal chemistry of the monazite and xenotime structures. *American Mineralogist*, 80(1-2), 21-26.
- [14] Rafiuddin, M. R., Donato, G., McCaughey, S., Mesbah, A., & Grosvenor, A. P. (2022). Review of Rare-Earth Phosphate Materials for Nuclear Waste Sequestration Applications. *ACS Omega*, 7(44), 39482-39490. <https://doi.org/10.1021/acsomega.2c03271>
- [15] Rafiuddin, M. R., Guo, S., Donato, G., Grosvenor, A. P., Dacheux, N., Cava, R. J., & Mesbah, A. (2022). Structural and magnetic properties of churchite-type REPO₄·2 H₂O materials. *Journal of Solid State Chemistry*, 312, 123261. <https://doi.org/10.1016/j.jssc.2022.123261>
- [16] Shelyug, A., Mesbah, A., Szenknect, S., Clavier, N., Dacheux, N., & Navrotsky, A. (2018). Thermodynamics and Stability of Rhabdophanes, Hydrated Rare Earth Phosphates REPO₄ · n H₂O. *Frontiers in Chemistry*, 6, 604. <https://doi.org/10.3389/fchem.2018.00604>