Lucía Montiel Asensio

PRACTICA 7

Una tienda especializada en sistemas de seguridad monta dos tipos de sistemas de alarma para domicilios, sistemas de alarma de tipo X y sistemas de alarma de tipo Y (en adelante, cuando no se especifique, con SA nos referiremos a sistemas de alarma de cualquiera de los dos tipos). Los sistemas de alarma de tipo X (en adelante SAX) dejan un beneficio de 200 u.m., y necesitan la jornada de trabajo de dos empleados para montarlos en un día, y la jornada de trabajo de un técnico de seguridad. Los sistemas de alarma de tipo Y (en adelante SAY) dejan un beneficio de 125 u.m. y necesitan la jornada de un empleados para su montaje y tres técnicos de seguridad pueden supervisar dos SAY por día. Sabemos que no pueden instalarse más de diez SA al día y tampoco menos de siete SA al día, y que como mínimo instalarse tres SAX y dos SAY a diario. Así mismo, deben instalarse cada día como mínimo la mitad de SAX que de SAY.

Maximizar el beneficio.
Minimizar el número de jornadas de trabajadores que se necesitan.
Minimizar el número de técnicos de seguridad necesarios.

Para estudiar cómo lograr los objetivos anteriores se pide

a) Formular el problema
b) Encontrar el espacio de soluciones del problema
c) Calcular los valores que toman las funciones objetivo en los vértices de la frontera de la región dada en el apartado b)
d) Determinar la matriz de pagos
e) Aplicar el método de las ponderaciones (probar con distintos λ_1,λ_2, λ_3 tales que $\lambda_i \in [0,1]$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$)
f) Aplicar el método de las restricciones, teniendo en cuenta que se quiere alcanzar un beneficio máximo de 1500 u.m. y usar como máximo 14 jornadas de trabajo
g) Resolver el problema con programación compromiso

a) Las variables que tenemos son:

x = Alarmas tipo X

y = Alarmas tipo Y

Las funciones que tenemos son:

f1 = 200*x + 125*y (a maximizar los beneficios)

f2 = 2*x + y (minimizar los trabajadores)

f3 = x + 1,5*y (minimizar los técnicos de seguridad)

Las restricciones son:

$x + y \geq 7$

$x + y \leq 10$

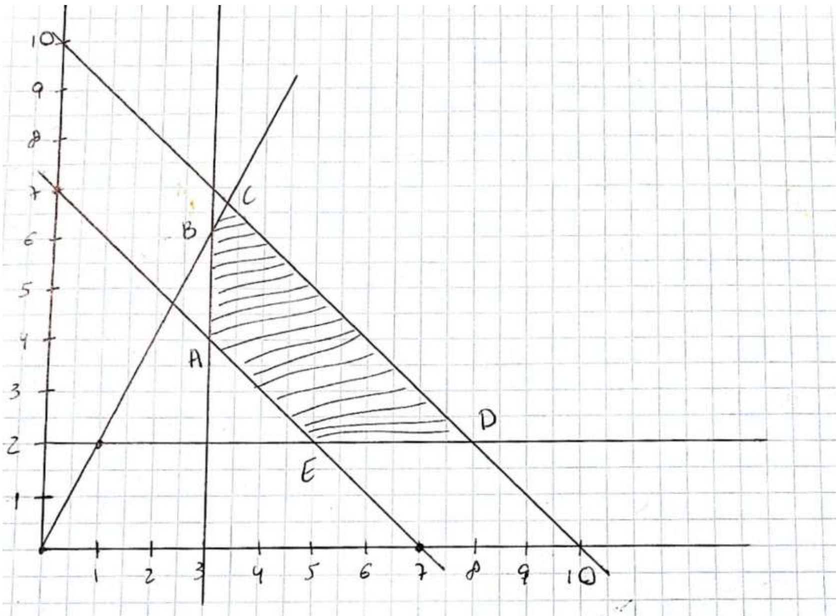
$x \geq 3$

$y \geq 2$

$2*x - y \geq 0$

$x, y \geq 0$

b) Espacio de soluciones



$x + y \geq 7$ | $x + y \leq 10$
$x = 0 \Rightarrow y \geq 7$ | $x = 0 \Rightarrow y \leq 10$
$y = 0 \Rightarrow x \geq 7$ | $y = 0 \Rightarrow x \leq 10$

$2x - y \geq 0$

$x = 1 \Rightarrow y \geq 2$

$y = 0 \Rightarrow x \geq 0$

c) Espacio de objetivos

Los vértices del espacio de soluciones son:

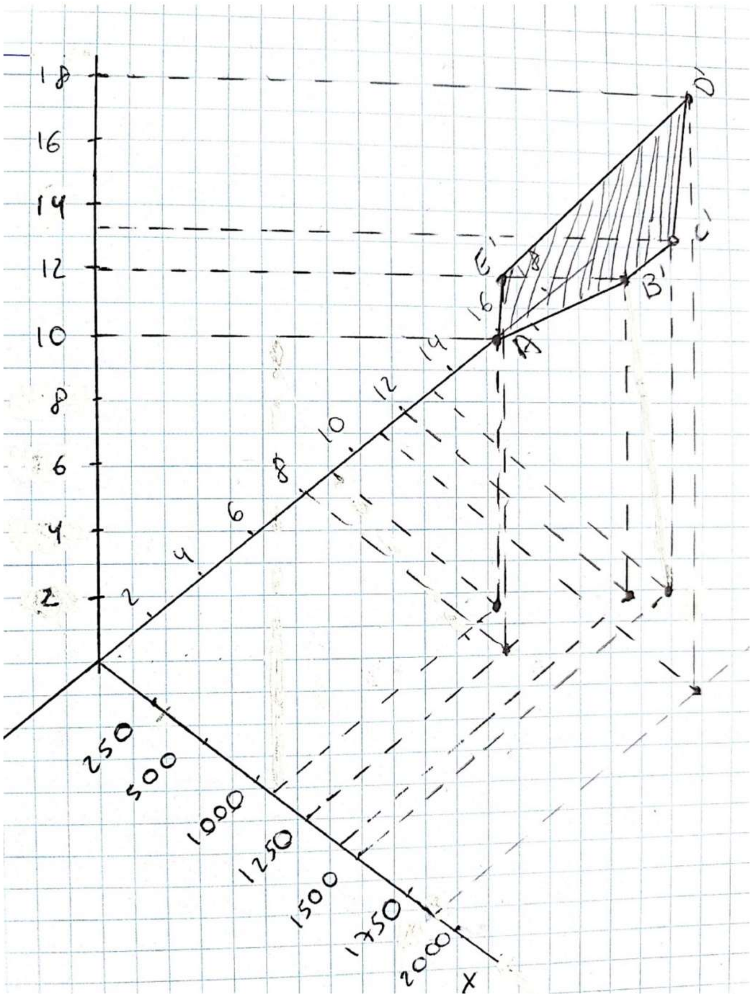
A = (3, 4)
A’ = (f1(3, 4), f2(3, 4), f3(3, 4))
A’ = (1100, 10, 9)

B = (3, 6)
B’ = (f1(3, 6), f2(3, 6), f3(3, 6))
B’ = (1350, 12, 12)

C = (10/3, 20/3)
C’ = (f1(10/3, 20/3), f2(10/3, 20/3), f3(10/3, 20/3))
C’ = (1500, 13.33, 13.33)

D = (8, 2)
D’ = (f1(8, 2), f2(8, 2), f3(8, 2))
D’ = (1850, 18, 11)

E = (5, 2)
E’ = (f1(5, 2), f2(5, 2), f3(5, 2))
E’ = (1250, 12, 8)



d) La matriz de pagos se calcula aplicando el algoritmo simplex a cada una de las ecuaciones.
Para f1 = 200*x + 125*y, la solución óptima es: Z = **1850** (elem 1x1), x = 8, y = 2
Si sustituimos en las dos ecuaciones restantes (f2 y f3), tenemos los valores:
f2(8, 2) = 16 + 2 = **18** (elem 1x2)
f3(8, 2) = 8 + 3 = **11** (elem 1x3)

Para f2 = 2*x + y, la solución óptima es: Z = **10** (elem 2x1), x = 3, y = 4
Si sustituimos en las dos ecuaciones restantes (f1 y f3), tenemos los valores:
f1(3, 4) = 600 + 500 = **1100** (elem 2x2)
f3(3, 4) = 3 + 6 = **9** (elem2x3)

Para f3 = x + 1,5*y, la solución óptima es: Z = **8** (elem1x3), x = 5, y = 2
Si sustituimos en las dos ecuaciones restantes (f1 y f2), tenemos los valores:
f1(5, 2) = 1000 + 250 = **1100** (elem2x3)
f2(5, 2) = 5 + 3 = **8** (elem3x3)

La matriz de pesos tiene tres filas y tres columnas, la cantidad de ecuaciones que tiene el problema:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1850} & \mathbf{18} & \mathbf{11} \\ \mathbf{1100} & \mathbf{10} & \mathbf{9} \\ \mathbf{1250} & \mathbf{12} & \mathbf{8} \end{pmatrix}$$

e) Para el método de las ponderaciones asignamos a cada lambda un valor tal que las tres juntas sumen 1.
$\lambda_1 = 0{,}4$
$\lambda_2 = 0{,}3$
$\lambda_3 = 0{,}3$
Queremos que la función resultante sea a maximizar, por lo que λ_2 y λ_3 se cambiarían de signo. La función a maximizar sería:
0,4*f1 - 0,3*f2 - 0,3*f3 → 79,1*x + 49,25*y sujeto a:
x + y ≥ 7
x + y ≤ 10
x ≥ 3
y ≥ 2
2*x - y ≥ 0
x, y ≥ 0

La solución óptima que nos da el simplex es: **Z = 731.3, x = 8, y = 2**

f) El enunciado nos indica los valores máximos de f1 y f2, por lo que las debemos transformar en restricciones.
El problema que debemos resolver es:
Minimizar x + 1,5*y, sujeto a:
200*x + 125*y ≤ 1500 (f1)
2*x + y ≤ 14 (f2)
x + y ≥ 7
x + y ≤ 10
x ≥ 3
y ≥ 2
2*x - y ≥ 0
x, y ≥ 0

La solución del simplex es: Z = 8, **x = 5, y = 2**

g) Para resolver el problema por programación compromiso vamos a utilizar la matriz de pagos:

$$\begin{pmatrix} 1850 & 18 & 11 \\ 1100 & 10 & 9 \\ 1250 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

Vamos a maximizar:

$$\frac{1850 - 200 * x - 125 * y}{1850 - 18 - 11} + \frac{10 + 2 * x + y}{-10 + 1100 + 9} + \frac{8 \ + x + 1{,}5 * y}{-8 + 1250 + 12}$$

$$\frac{1850 - 200 * x - 125 * y}{1821} + \frac{10 + 2 * x + y}{1099} + \frac{8 \ + x + 1{,}5 * y}{1254}$$

$$459382 * (1850 - 200 * \mathrm{x} - 125 * \mathrm{y}) + 761178 * (10 + 2 * \mathrm{x} + \mathrm{y}) + 667093 * (8 \ + \mathrm{x} + 1{,}5 * \mathrm{y}) / _{836534622}$$

$$(836908176 - 89686951 * x - 55660932{,}5 * y) / _{836534622}$$

La solución óptima por el algoritmo del simplex es: **x = 3, y = 4**