

Aerodinámica del rotor aislado en vuelo axial

Aeronaves de Ala Rotatoria

Álvaro Cuerva Tejero
Cristóbal José Gallego Castillo
Oscar López García

Universidad Politécnica de Madrid
Curso 2020-2021

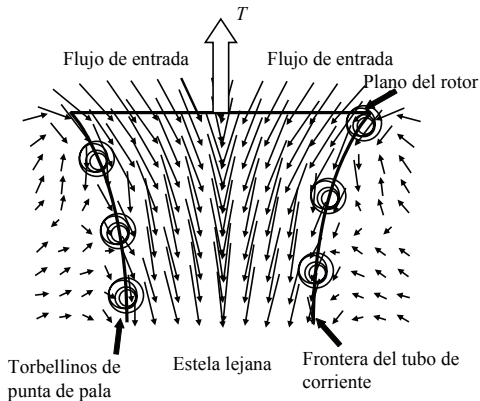
Introducción I

- Vuelo axial
- Flujo en el vuelo axial
- Teoría cantidad de movimiento
 - Ecuaciones en el volumen de control
 - Vuelo a punto fijo
 - Primera forma adimensional
 - Segunda forma adimensional
 - Vuelo axial descendente
 - Modelos fenomenológicos
 - Molinete frenante
- Teoría del elemento de pala (TEP)
 - TCM y TEP
 - Sistemas de referencia
 - TEP
- Rotores de velocidad inducida constante
- Referencia básica: Capítulo 2 de [CTEGLG⁺08]
- Referencia adicional: [Lei00]

- Aeronave de ala fija: el ala es el elemento responsable de producir la sustentación para equilibrar el peso. Los sistemas propulsores producen el empuje necesario para conseguir que la aeronave avance en el aire. (funcionalidad sustentadora y propulsora separada en diferentes elementos)
- Aeronave de alas rotatorias: el sistema de alas rotatorias, rotor, es el elemento responsable de producir no solo la sustentación para equilibrar el peso sino que además produce la fuerza propulsora para conseguir que la aeronave avance en el aire. (funcionalidades sustentadora y propulsora localizada en un único elemento)

- El modo de vuelo axial de un rotor es un modo de vuelo vertical y que es particular de este tipo de aeronaves. El modo de vuelo axial cuando es estacionario respecto ejes tierra, velocidad vertical nula, se denomina vuelo a punto fijo.

Flujo en el vuelo axial I

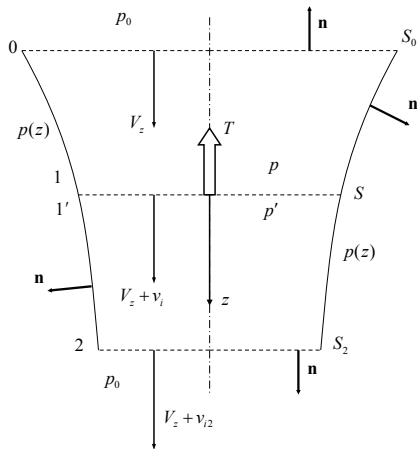


Campo de velocidades en las proximidades de un rotor en vuelo a punto fijo obtenido de ensayos en túnel aerodinámico de un rotor a escala; de [Lei00].

- Para determinar las acciones aerodinámicas que aparecen en el rotor en el modo de vuelo axial se asumen las siguientes hipótesis
 - fuerzas másicas despreciables
 - flujo incompresible
 - simetría azimutal
 - flujo estacionario
 - flujo sin viscosidad
 - flujo uniforme transversalmente

- La Teoría de Cantidad de Movimiento (TCM) es la teoría aerodinámica más sencilla con la se modela el rotor de una AAR.
- Para modelar aerodinámicamente el rotor se recurre al disco actuador.
- El disco actuador sustituye al rotor y se caracteriza por
 - permitir el paso de masa por unidad de tiempo como un disco poroso
 - ser capaz de soportar diferencias de presión entre sus dos caras
 - poder inyectar energía por unidad de tiempo en el flujo

Ecuaciones en el volumen de control I



Definición del volumen de control y de las magnitudes físicas empleadas en la formulación de modelo de la teoría de cantidad de movimiento en vuelo axial ascendente ($V_z \geq 0$).

Ecuaciones en el volumen de control II

- Conservación de la masa

$$\iint_{S(z)} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \dot{m} = \rho S (V_z + v_i) = \rho S_2 (V_z + v_{i2}) = \rho S_0 V_z. \quad (1)$$

- Ecuación de la cantidad de movimiento

$$\iint_{S_0} \rho V_z (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\sigma + \iint_{S_2} \rho (V_z + v_{i2}) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\sigma = - \iint_{S_1} p \mathbf{n} d\sigma - \iint_{S_{1'}} p' \mathbf{n} d\sigma. \quad (2)$$

donde se considera que

$$- \iint_{S_1} p \mathbf{n} d\sigma - \iint_{S_{1'}} p' \mathbf{n} d\sigma = T$$

siendo T la acción que el rotor ejerce sobre el flujo. El flujo entrante es

$$\begin{aligned} \iint_{S_0} \rho V_z (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\sigma &= - \iint_{S_0} \rho V_z^2 d\sigma \\ &= -\dot{m} V_z \end{aligned}$$

Ecuaciones en el volumen de control III

El flujo saliente

$$\begin{aligned}\iint_{S_2} \rho (V_z + v_{i2}) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\sigma &= \iint_{S_2} \rho (V_z + v_{i2})^2 d\sigma \\ &= \dot{m} (V_z + v_{i2})\end{aligned}$$

Resultando

$$T = \dot{m} v_{i2}$$

- Ecuación de la energía cinética

$$\frac{1}{2} \rho S_2 (V_z + v_{i2})^3 - \frac{1}{2} \rho S_0 V_z^3 = P_i \quad (3)$$

siendo P_i la potencia inducida en el flujo resultando que

$$\begin{aligned}P_i &= \frac{1}{2} \dot{m} [(V_z + v_{i2})^2 - V_z^2] \\ &= \frac{1}{2} \dot{m} v_{i2} (v_{i2} + 2V_z)\end{aligned}$$

Ecuaciones en el volumen de control IV

- La potencia comunicada al flujo es por definición:

$$P_i = T (V_z + v_i)$$

donde el término TV_z representa la potencia asociada a la energía potencial gravitatoria (ascender) y el término Tv_i es la potencia aerodinámica consumida para acelerar el flujo.

- Resumiendo las ecuaciones de las que se dispone son:

$$\dot{m} = \rho S (V_z + v_i)$$

$$T = \dot{m} v_{i2}$$

$$P_i = \frac{1}{2} \dot{m} v_{i2} (v_{i2} + 2V_z)$$

$$P_i = T (V_z + v_i)$$

De estas ecuaciones se elimina el gasto másico \dot{m} resultando

$$T = \rho S (V_z + v_i) v_{i2}$$

$$P_i = \frac{1}{2} \rho S (V_z + v_i) v_{i2} (v_{i2} + 2V_z) = \frac{T}{2} (2V_z + v_{i2})$$

$$P_i = T (V_z + v_i)$$

y a continuación se elimina la velocidad en la estela, v_{i2} , igualando las dos expresiones de la potencia inducida se obtiene la relación de Froude-Finsterwalder

$$\begin{aligned}2(V_z + v_i) &= V_z + v_i \\ v_{i2} &= 2v_i\end{aligned}$$

es decir la velocidad inducida en la estela es el doble de la velocidad inducida en el plano del rotor.

- Por tanto, el problema queda reducido a las siguientes dos ecuaciones

$$T = 2\rho S v_i (V_z + v_i) \quad (4)$$

$$P_i = T (V_z + v_i) \quad (5)$$

Vuelo a punto fijo I

- Caso particular del vuelo a punto fijo, $V_z = 0$, la ecuaciones (6) y (7) se reducen a

$$T = 2\rho S v_i^2 \quad (6)$$

$$P_i = T v_i \quad (7)$$

- En el vuelo a punto fijo la tracción debe compensar el peso de la aeronave, $T = W$ y por tanto la solución del problema básico de actuaciones es

$$v_{i0} = \sqrt{\frac{W}{2\rho S}}$$

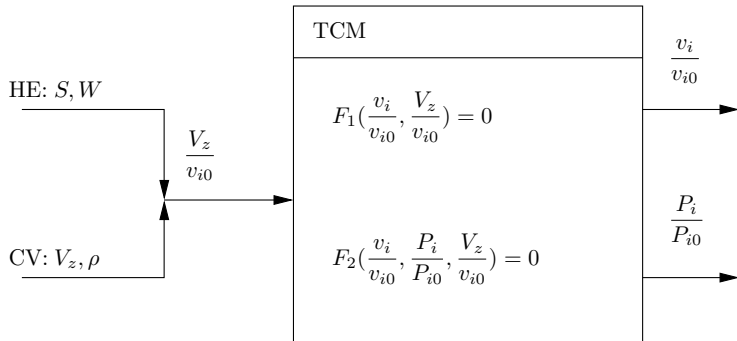
$$P_{i0} = \sqrt{\frac{W^3}{2\rho S}}$$

donde v_{i0} es la velocidad inducida en el vuelo a punto fijo y P_{i0} la potencia inducida en el vuelo a punto fijo.

Vuelo a punto fijo II

- Dada una especificación de peso de la aeronave fija que interesa: ¿que el rotor induzca velocidad alta o baja?
 - $v_{i0} \uparrow \rightarrow S \downarrow \rightarrow P_{i0} \uparrow$
 - $v_{i0} \downarrow \rightarrow S \uparrow \rightarrow P_{i0} \downarrow$
- La potencia inducida es una potencia que hay que comunicar al flujo para poder acelerarlo y poder generar fuerzas de tracción. Esta potencia no incluye otras pérdidas como
 - 1 resistencia aerodinámica de las palas (viscosidad y fricción sobre las palas) $\sim 30\%$
 - 2 rotación de la estela como consecuencia del intercambio de cantidad de movimiento angular entre rotor y flujo $\sim 2\% - 4\%$
 - 3 generación y transporte de torbellinos de punta de pala corriente abajo $\sim 2\% - 4\%$
 - 4 velocidad inducida real (distribución de velocidad inducida uniforme implica potencia inducida mínima) $\sim 5\% - 7\%$

- La resistencia aerodinámica de las palas se contabiliza extendiendo la teoría, por ejemplo empleando la TEP
- La rotación de estela, torbellinos de punta de pala y velocidad inducida no uniforme se contabilizan
 - extendiendo la teoría para incluir dichos efectos (TCM diferencial)
 - factores de corrección de potencia inducida κ



Primera forma adimensional I

- Velocidad característica: la velocidad inducida en vuelo a punto fijo v_{i0}
- Potencia característica: potencia inducida en vuelo a punto fijo $P_{i0} = W v_{i0}$
- Empleando la condición $T = W$ y adimensionalizando las ecuaciones (4) y (5) se tiene

$$\frac{v_i}{v_{i0}} \left(\frac{V_z}{v_{i0}} + \frac{v_i}{v_{i0}} \right) = 1, \quad (8)$$

$$\frac{P_i}{P_{i0}} = \frac{v_i}{v_{i0}} \left(\frac{V_z}{v_{i0}} + \frac{v_i}{v_{i0}} \right)^2, \quad (9)$$

Segunda forma adimensional I

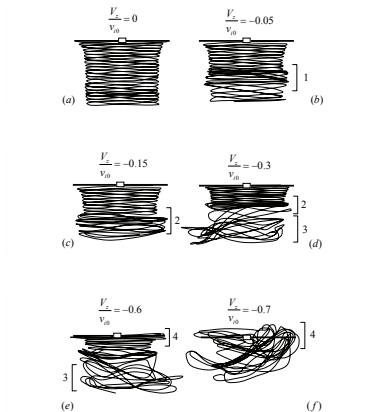
- Velocidad característica: la velocidad debida a la rotación en la punta de la pala ΩR
- Tracción característica: $T_u = \rho S (\Omega R)^2$, $C_T = T/T_u$
- Potencia característica: $P_u = \rho S (\Omega R)^3$,
 $C_P = C_Q = P/P_u = Q/Q_u$
- Adimensionalizando las ecuaciones (4) y (5) se tiene

$$C_T = 2 \frac{v_i}{\Omega R} \left(\frac{V_z}{\Omega R} + \frac{v_i}{\Omega R} \right), \quad (10)$$

$$C_{Q_i} = 2 \frac{v_i}{\Omega R} \left(\frac{V_z}{\Omega R} + \frac{v_i}{\Omega R} \right)^2, \quad (11)$$

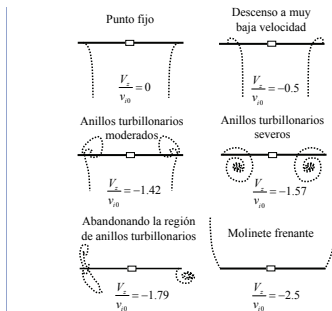
- En el vuelo de descenso la topología del flujo sobre el rotor está alejada de la configuración del flujo descrito en vuelo de ascenso.
- Aparecen regiones en el plano del rotor, y en la estela en general, con flujos axiales de diferente signo, lo que provoca la distorsión de la geometría helicoidal de la misma, de forma que la simplificación basada en un tubo de corriente que se estrecha corriente abajo del rotor deja de ser realista.
- La hipótesis de unidimensionalidad (magnitudes constantes en planos paralelos al rotor) resulta ahora inaceptable, ya que aparecen zonas de flujo invertido originando corrientes de recirculación.

Vuelo axial descendente II



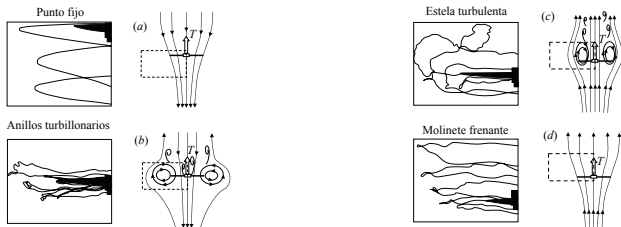
Trayectorias del torbellino de punta de pala en el caso de un rotor en vuelo a punto fijo (a), y para un rotor en vuelo de descenso a velocidades moderadas y cada vez más negativas (b, c, d, e y f). 1 identifica la región de la estela donde se producen emparejamientos de torbellinos, 2 la región donde se produce la unión de varios torbellinos y la formación de anillos, 3 la región de la estela donde de inicia la ruptura de anillos y la convección lejos del rotor, 4 la región de rotor donde los torbellinos de punta de pala se sitúan en la parte superior del mismo.

Vuelo axial descendente III



Intersección del torbellino de punta con un plano vertical para un rotor que pasa de la situación de vuelo a punto fijo a la situación de molinete frenante.

Vuelo axial descendente IV



Esquemas del flujo axial en el entorno de un rotor para los distintos estados de operación. (a) estado de operación normal, que corresponde a vuelo axial ascendente o a punto fijo, $V_z \geq 0$; (b) estado de anillos turbillonarios, $-v_i < V_z < 0$ (la frontera entre este estado y el de estela turbulenta se conoce como autorrotación ideal, $V_z + v_i = 0$); (c) estado de estela turbulenta, $-2v_i < V_z < -v_i$; (d) molinete frenante, $V_z < -2v_i$; de [Lei00]. En los recuadros de la izquierda se han representado las trayectorias de los torbellinos de punta de pala en las regiones próximas al rotor señaladas en los esquemas de la derecha.

- Modelo Rand. En el intervalo $-2 \leq V_z/v_{i0} \leq 0$ la velocidad inducida es

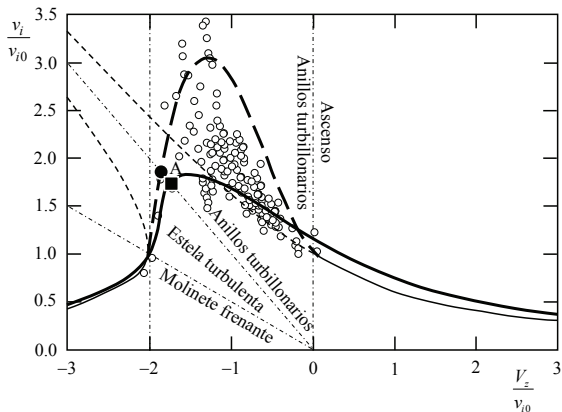
$$\frac{v_i}{v_{i0}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{V_z}{v_{i0}} + \frac{25}{12} \left(\frac{V_z}{v_{i0}} \right)^2 + \frac{7}{6} \left(\frac{V_z}{v_{i0}} \right)^3, \quad (12)$$

- Modelo de las constantes A y B

$$A \frac{v_i}{v_{i0}} \sqrt{B^2 \left(\frac{V_z}{v_{i0}} \right)^2 + \left(\frac{V_z}{v_{i0}} + \frac{v_i}{v_{i0}} \right)^2} - 1 = 0, \quad (13)$$

con $A = 0.745$ y $B = 0.447$.

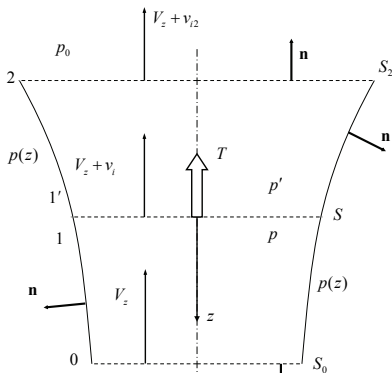
Vuelo axial descendente. Modelos fenomenológicos II



Velocidad inducida adimensional v_i/v_{i0} en función de la velocidad axial adimensional de vuelo V_z/v_{i0} ; en el gráfico se delimitan los distintos estados (vuelo axial ascendente, anillos turbulentos, estela turbulenta y molinete frenante). El tipo de línea indica donde la solución de la teoría de cantidad de movimiento es válida (línea delgada continua) y donde no lo es (línea de trazos cortos), también se ha representado la solución de Rand para descenso a velocidad moderada (línea de trazos largos) y la solución de las constantes A y B para el rango completo de velocidades (línea continua gruesa). Los círculos con fondo blanco representan datos experimentales de [Lei00]. El círculo negro representa el estado de autorrotación ideal según el modelo de Rand, y el cuadrado negro representa el estado de autorrotación ideal según el modelo de las constantes A y B.

Vuelo axial descendente. Molinete frenante I

- En el régimen de molinete frenante $V_z < -2v_i$, el flujo presenta un volumen de control suficientemente definido para poder emplear los principios de la mecánica de fluidos a dicho volumen de control.



Esquema del volumen de control p_0 que contiene al rotor idealizado como un disco actuador en el caso de vuelo axial descendente en la condición de molinete frenante ($V_z < -2v_i$).

Vuelo axial descendente. Molinete frenante II

- Conservación de masa

$$\dot{m} = -\rho S (V_z + v_i) = -\rho S_2 (V_z + v_{i2}) = -\rho S_0 V_z. \quad (14)$$

- Balance de la cantidad de movimiento resulta

$$T = -\rho S_2 (V_z + v_{i2})^2 + \rho S_0 V_z^2, \quad (15)$$

y teniendo en cuenta (14) se obtiene

$$T = \dot{m} v_{i2}. \quad (16)$$

- Balance de energía

$$P_i = \frac{1}{2} \dot{m} (V_z + v_{i2})^2 - \frac{1}{2} \dot{m} V_z^2 = \frac{1}{2} \dot{m} v_{i2} (2V_z + v_{i2}). \quad (17)$$

Primera forma adimensional

$$\frac{v_i}{v_{i0}} \left(\frac{V_z}{v_{i0}} + \frac{v_i}{v_{i0}} \right) = -1, \quad (18)$$

$$\frac{P_i}{P_{i0}} = -\frac{v_i}{v_{i0}} \left(\frac{V_z}{v_{i0}} + \frac{v_i}{v_{i0}} \right)^2 = \frac{V_z}{v_{i0}} + \frac{v_i}{v_{i0}}, \quad (19)$$

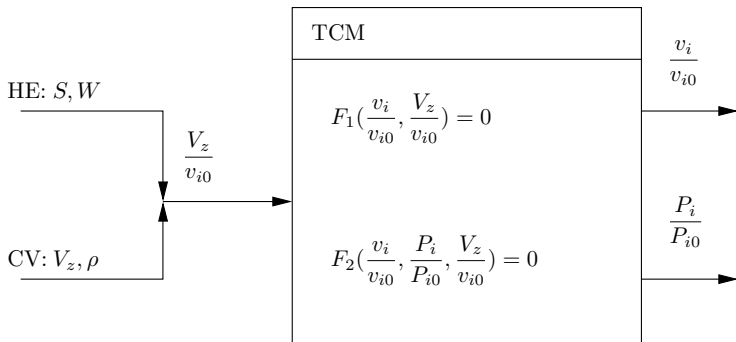
Segunda forma adimensional

$$C_T = -2 \frac{v_i}{\Omega R} \left(\frac{V_z}{\Omega R} + \frac{v_i}{\Omega R} \right), \quad (20)$$

$$C_{Q_i} = -2 \frac{v_i}{\Omega R} \left(\frac{V_z}{\Omega R} + \frac{v_i}{\Omega R} \right)^2 = C_T \left(\frac{V_z}{\Omega R} + \frac{v_i}{\Omega R} \right). \quad (21)$$

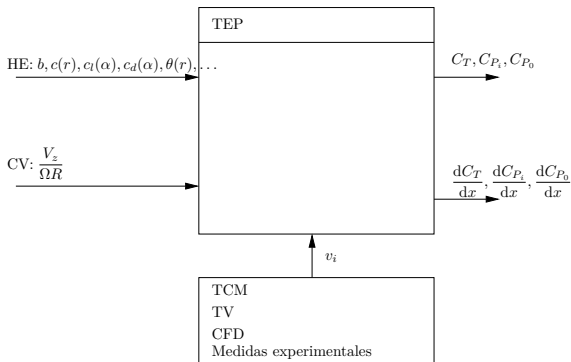
- La TCM es una teoría de naturaleza global en el sentido en el que al imponer hipótesis de uniformidad transversal en las variables fluidodinámicas del tubo de corriente describe el flujo de forma promediada tanto a lo largo de la envergadura de las palas como en la posición de las mismas en el plano del rotor.
- Además se basa en que el flujo se adapta a un volumen de control claramente definido en torno al rotor.
- La ventaja de la TCM está en su simplicidad, por la que con pocos parámetros es capaz de proporcionar estimaciones aproximadas de las variables de interés, en concreto v_i y P_i .
- La desventaja de la TCM es que proporciona estimaciones promediadas y solamente válidas para etapas muy iniciales del diseño en las que se sacrifica precisión por simplicidad.

- La desventaja de la TCM está en que las hipótesis en las que se apoya no son lo bastante realistas como para proporcionar información detallada y precisa de las distribuciones locales del flujo y acciones aerodinámicas.



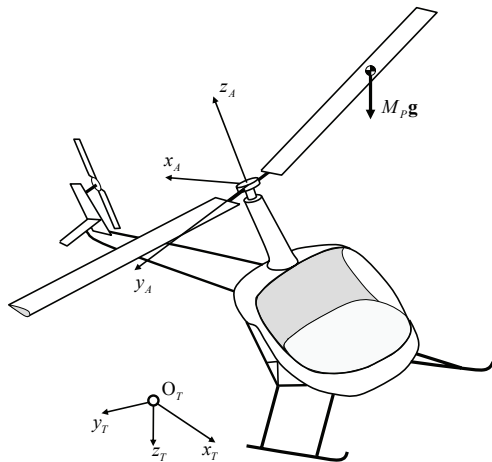
- Se requiere de una teoría que permita incorporar a la formulación que describe el comportamiento aerodinámico del rotor información referente a la definición concreta del rotor como por ejemplo
 - perfiles aerodinámicos de las palas
 - número de palas
 - distribución a lo largo de la pala de las cuerdas de los perfiles
 - distribución a lo largo de la pala de la torsión de los perfiles
- La Teoría del Elemento de Pala (TEP) se basa en dividir cada pala en segmentos, elementos de pala, en los que se analiza cual es el flujo local y a partir de ahí se obtienen las fuerzas aerodinámicas locales a dicho elemento obteniéndose de esta forma distribuciones a lo largo de la envergadura de las acciones aerodinámicas.

- La integración a lo largo de la envergadura permite obtener las acciones aerodinámicas globales que actúan sobre el rotor.



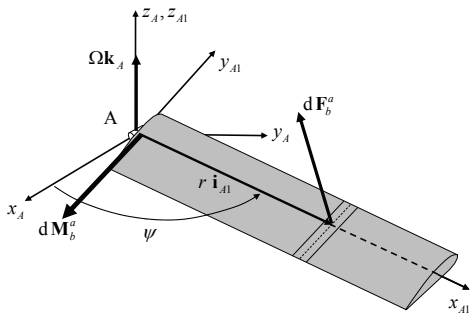
- Desde el punto de vista de la mecánica del vuelo del helicóptero la TEP es la herramienta más sencilla con la que obtener estimaciones de las acciones aerodinámicas que el rotor ejerce sobre la aeronave, \mathbf{F}^{rp} y \mathbf{M}^{rp} .
- En general la aeronave y en particular el rotor realiza una maniobra de forma que el árbol del rotor tiene una velocidad de translación \mathbf{V}^A y el sistema de ejes cuerpo cambia de orientación con respecto a un sistema de ejes fijo a tierra $\boldsymbol{\omega}^A$.
- Sistema de ejes árbol $Ax_Ay_Az_A$ es un sistema de ejes cuerpo (ejes fijos a la aeronave) con origen en el eje del árbol del rotor, A , el eje z_A en la dirección del vector de rotación $\boldsymbol{\Omega}^A = \Omega \mathbf{k}_A$ el eje x_A contenido en el eje de simetría de la aeronave y en la dirección del rotor antipar.

Sistemas de referencia II



Sistemas de referencia III

- Sistemas de ejes móviles en la pala $Ax_{A1}y_{A1}z_{A1}$ es un sistema que rota con respecto al sistema de ejes árbol a una velocidad angular Ω y el eje x_{A1} se encuentra fijo a una de las palas de manera que se define la posición azimutal de la pala mediante el ángulo de azimut, ψ , medido desde el eje x_A (para el caso habitual de $\Omega = \text{constante}$, $\psi = \Omega t$)



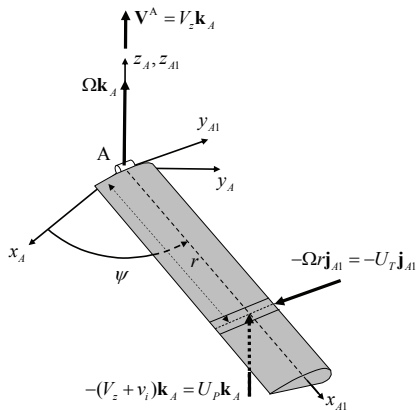
- La posición azimutal de la pala, ψ define la matriz de transformación del sistema de ejes árbol $Ax_Ay_Az_A$ al sistema de ejes móviles $Ax_{A1}y_{A1}z_{A1}$.

$$[\mathbf{T}_{A1A}] = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

- La TEP se expresa de forma natural en este sistema de ejes porque permite definir las condiciones locales del flujo de forma sencilla.

- En el caso del vuelo axial se tiene que $\boldsymbol{\omega}^A = \mathbf{0}$ y $\mathbf{V}^A = V_z \mathbf{k}_A$
- Dada la simetría azimutal existente en el vuelo axial la matriz de transformación (22) no se emplea en la formulación ni la posición azimutal que ocupa la pala aparece explícitamente.
- Solamente en el caso del vuelo de avance en el que las condiciones del flujo cambian dependiendo de la posición azimutal, la diferencia entre el sistema de ejes árbol $Ax_Ay_Az_A$ y el sistema de ejes móviles $Ax_{A1}y_{A1}z_{A1}$ se hace explícita.

Teoría del elemento de pala I



Sistema de ejes árbol $[x_A, y_A, z_A]$ y ejes ligados a la pala $[x_{A1}, y_{A1}, z_{A1}]$. En el esquema se ha representado una situación de vuelo ascensional, $V_z > 0$.

Teoría del elemento de pala II

- El campo de velocidades local que experimenta un elemento de pala está compuesto de dos componentes
 - En la dirección normal al plano de rotación ($U_P \mathbf{k}_{A1}$) y que corresponde a la velocidad de axial y a la velocidad inducida, siendo

$$U_P = -(V_z + v_i)$$

- En el plano de rotación ($U_T \mathbf{j}_{A1}$) y que corresponde a la velocidad de rotación como sólido rígido de la pala, siendo

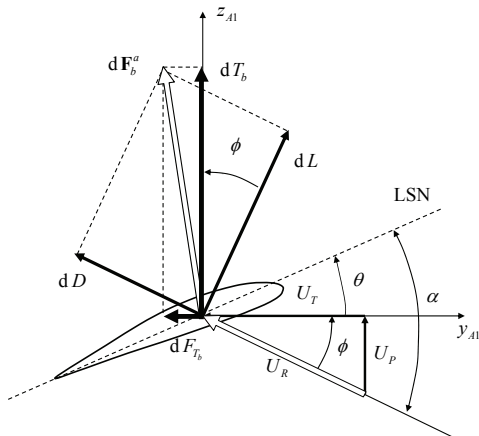
$$U_T = \Omega r$$

- La velocidad resultante sobre el elemento de pala, U_R , se define como

$$U_R = \sqrt{U_P^2 + U_T^2}$$

- La TEP no considera ninguna componente de velocidad a lo largo del eje de la pala, es decir en la dirección \mathbf{i}_{A1} . Por este motivo se dice que esta teoría es bidimensional.

Teoría del elemento de pala III



Esquema de las velocidades relativas al perfil y de las fuerzas que actúan sobre el mismo en el sistema de ejes $[x_{A1}, y_{A1}, z_{A1}]$. En una situación normal de vuelo axial (a punto fijo o ascensional) la componente de velocidad normal U_P incide de arriba a abajo sobre el plano x_A, y_A .

- Se define el ángulo de entrada de la corriente, ϕ , como el ángulo que forma la velocidad incidente al elemento de pala con el plano de rotación y se expresa como

$$\begin{aligned}\phi &= \arctan\left(\frac{U_P}{U_T}\right) \\ &= -\arctan\left(\frac{V_z + v_i}{\Omega r}\right)\end{aligned}$$

- El ángulo de ataque, α , es el ángulo que forma la corriente incidente con respecto la LSN del elemento de pala y es

$$\alpha = \phi + \theta$$

siendo θ el ángulo de paso.

- El ángulo de paso se descompone en
 - Ángulo de torsión geométrica $\theta_G(x)$ y que representa la posible torsión con la que se fabrica la pala
 - Ángulo de paso de control θ_C y que representa la acción del sistema de control de vuelo de la aeronave y la acción del piloto sobre los mandos. En general, el ángulo de paso, se descompone a su vez en dos componentes
 - Ángulo de paso colectivo: θ_0
 - Ángulo de paso cíclico longitudinal θ_{1S} y lateral θ_{1C}
- El ángulo de paso se escribe como

$$\theta = \theta_G(x) + \theta_0 + \theta_{1C} \cos \psi + \theta_{1S} \sin \psi$$

Teoría del elemento de pala VI

- Definido el perfil aerodinámico del elemento de pala se conocen los coeficientes de sustentación y resistencia $c_l(\alpha)$ y $c_d(\alpha)$ bidimensionales de forma que las fuerzas aerodinámicas elementales de sustentación y resistencia, dL y dD son

$$\begin{aligned}dL &= \frac{1}{2}\rho U_R^2 c(r) dr c_l(\alpha) \\dD &= \frac{1}{2}\rho U_R^2 c(r) dr c_d(\alpha)\end{aligned}$$

- Estas fuerzas elementales se proyectan en el sistema de ejes móviles en la pala de forma que se obtiene

$$\begin{aligned}dT_b &= dL \cos \phi + dD \sin \phi \\dF_{Tb} &= -dL \sin \phi + dD \cos \phi\end{aligned}$$

siendo dT_b la tracción diferencial, y dF_{Tb} la fuerza tangencial diferencial que generan el elemento de pala.

- Se define la resultante de las fuerzas aerodinámicas sobre una pala $d\mathbf{F}_b^a$ como

$$d\mathbf{F}_b^a = dT_b \mathbf{k}_A - dF_{Tb} \mathbf{j}_{A1}$$

- La fuerza de tracción es la fuerza que equilibra el peso de la aeronave y produce el ascenso o descenso en el vuelo axial
- La fuerza tangencial produce un par aerodinámico resistente que es el que la potencia del motor debe compensar para mantener el rotor en rotación.
- La fuerza tangencial tiene dos componentes:
 - la fuerza tangencial inducida $dF_{Tbi} = -dL \sin \phi$
 - la fuerza tangencial parásita $dF_{Tb0} = dD \cos \phi$

- En el caso de vuelo axial ascendente: $dF_{Tbi} > 0$ y $dF_{Tb0} > 0$ y por tanto $dF_{Tb} > 0$ y que representa un par aerodinámico resistente que se traduce en que el rotor consume potencia que proviene de la planta motora.
- En el caso de vuelo axial descendente: dependiendo de la velocidad inducida y la velocidad de descenso se puede tener
 - $dF_{Tb} > 0$ representa el caso de descenso con consumo de potencia
 - $dF_{Tb} = 0$ representa el caso de descenso sin consumir ni generar potencia (autorrotación)
 - $dF_{Tb} < 0$ representa el caso de descenso con generación de potencia

- La situación de vuelo axial y la condición de simetría axial asociada al problema aerodinámico del rotor permiten considerar la contribución de los distintos elementos de pala situados en la misma posición radial en las diversas palas simplemente multiplicando por el número de palas, b , y así, el diferencial total de tracción es $dT = b dT_b$, es decir:

$$dT = b (dL \cos \phi + dD \sin \phi)$$

y la tracción resultante se obtiene como

$$\begin{aligned} T &= \int_0^1 dT \\ &= \int_0^1 \frac{b}{2} \rho U_R^2 c(r) [c_l(\alpha) \cos \phi + c_d(\alpha) \sin \phi] dr \end{aligned}$$

- Análogamente para la fuerza tangencial resulta, $dF_T = b dF_{Tb}$, es decir:

$$dF_{Tb} = -dL \sin \phi + dD \cos \phi$$

y la fuerza tangencial resultante es

$$\begin{aligned} F_T &= \int_0^1 dF_T \\ &= \int_0^1 \frac{b}{2} \rho U_R^2 c(r) [-c_l(\alpha) \sin \phi + c_d(\alpha) \cos \phi] dr \end{aligned}$$

- Conocida la contribución de cada perfil a la fuerza tangencial, es inmediato calcular el diferencial de momento aerodinámico en torno al eje z_A , $dM_{z_A}^a = -r dF_T$, y por tanto el diferencial de par, $dQ = -dM_{z_A}^a = dQ_i + dQ_0$ (también descompuesto en sus componentes inducida y parásita), que es necesario aplicar al eje para equilibrar el efecto de la mencionada fuerza.
- El diferencial de potencia que es necesario aplicar al eje del rotor para mantener una velocidad de rotación constante es, por tanto

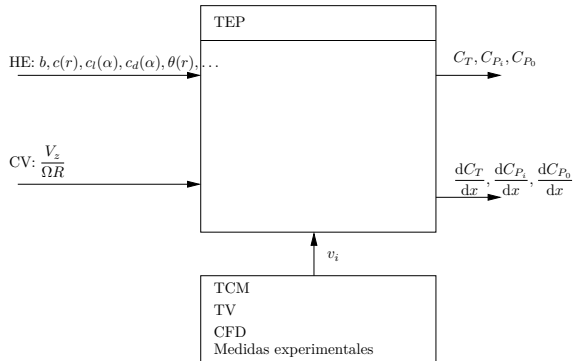
$$\begin{aligned} dP &= \Omega dQ = \Omega (dQ_i + dQ_0) \\ &= \Omega r dF_T = \Omega r (dF_{Ti} + dF_{T0}) \\ &= dP_i + dP_0 \end{aligned}$$

- La potencia inducida

$$P_i = - \int_0^1 \frac{b}{2} \rho U_R^2 \Omega r c(r) c_l(\alpha) \sin \phi dr$$

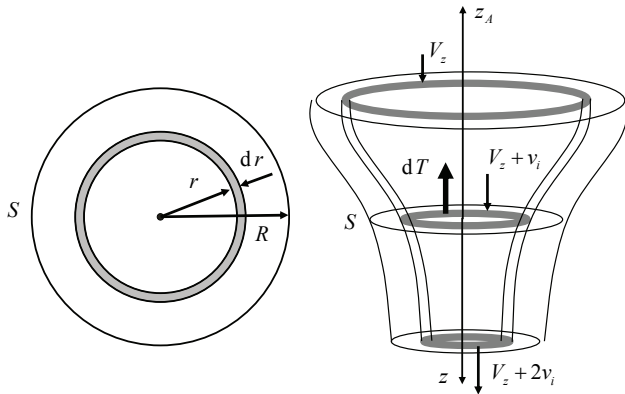
- La potencia parásita

$$P_0 = \int_0^1 \frac{b}{2} \rho U_R^2 \Omega r c(r) c_d(\alpha) \cos \phi dr$$



- La hipótesis de que la velocidad inducida es uniforme en planos transversales al tubo de corriente no es realista (bordes marginales de las palas el flujo local no es uniforme).
- La combinación de TCM-TEP es un modelo simplificado que permite obtener distribuciones de velocidad inducida no uniformes.
 - Se basa en aplicar a un tubo de corriente de espesor diferencial los principios básicos de la mecánica de fluidos
 - Se impone que no existe interacción fluidodinámica entre los tubos de corriente diferenciales (flujo 2D)

Rotores de velocidad inducida constante II



Esquema del tubo de corriente de espesor diferencial al que se aplican las leyes de conservación de masa, cantidad de movimiento y energía en la combinación de la teoría de cantidad de movimiento y elemento de pala.

Rotores de velocidad inducida constante III

- La ecuación que permite determinar la distribución de velocidad inducida se basa en igualar los diferenciales de tracción que predicen la TCM y la TEP.
- La tracción diferencial (TCM) es

$$dT = 2v_i d\dot{m} = 4\pi\rho r v_i (V_z + v_i) dr, \quad (23)$$

- La tracción diferencial (TEP) es

$$dT = \frac{b}{2}\rho (\Omega r)^2 c_l c dr, \quad (24)$$

- Igualando ambos diferenciales de tracción, se tiene

$$4\pi\rho r v_i (V_z + v_i) dr = \frac{b}{2}\rho (\Omega r)^2 c_l c dr, \quad (25)$$

y adimensionalizando

$$\left(\frac{v_i}{\Omega R}\right)^2 + \left(\frac{V_z}{\Omega R} + \frac{a\sigma}{8}\right) \frac{v_i}{\Omega R} + \frac{a\sigma}{8} \left(\frac{V_z}{\Omega R} - x\theta\right) = 0, \quad (26)$$

Rotores de velocidad inducida constante IV

- Un rotor de velocidad inducida constante (uniforme a lo largo de la envergadura) tiene la propiedad de que minimiza la potencia inducida.
- Se pretende determinar la distribución de cuerda y torsión necesarias para conseguir una distribución de velocidad inducida uniforme y minimizar por tanto la potencia inducida.
- Para conseguir velocidad inducida uniforme, según (25) se debe cumplir que $r c_l(r) c(r) = \text{constante}$ o en forma adimensional

$$x a(x) \alpha(x) \sigma(x) = \text{constante}. \quad (27)$$

Si se simplifica la situación fijando que las palas del rotor se fabriquen con un solo tipo de perfil, $a(x) = \text{constante}$ se tiene que

$$x \alpha(x) \sigma(x) = \text{constante}. \quad (28)$$

Rotores de velocidad inducida constante V

- Rotor de torsión ideal (RTI) es un rotor de cuerda constante, $\sigma = \sigma_0$ y que para satisfacer (28) debe de cumplir que

$$\alpha(x) = \frac{\alpha_t}{x}$$

donde α_t es una constante y representa el ángulo de ataque en la punta de la pala. Como $\alpha = \theta + \phi$ se tiene que

$$\theta(x) = \frac{\alpha_t}{x} + \frac{V_z + v_i}{\Omega R} \frac{1}{x}$$

- Rotor óptimo (RO) es un rotor que funciona con un ángulo de ataque constante e igual al que maximiza la eficiencia aerodinámica, α_{op} . Para satisfacer (28) se debe cumplir que

$$\sigma(x) = \frac{\sigma_t}{x}$$

donde σ_t es una constante y representa la solidez en la punta de la pala. Además como $\alpha = \theta + \phi$ se tiene que

$$\theta(x) = \alpha_{op} + \frac{V_z + v_i}{\Omega R} \frac{1}{x}$$

Actuaciones RTI

$$C_T = \frac{\sigma a}{4} \alpha_t, \quad (29)$$

$$C_{Q_i} = (\theta_t - \alpha_t) C_T, \quad (30)$$

$$C_{Q_0} = \frac{\sigma}{8} \left(\delta_0 + \frac{4}{3} \delta_1 \alpha_t + 2 \delta_2 \alpha_t^2 \right). \quad (31)$$

Actuaciones RO

$$C_T = \frac{\sigma_t}{4} c_l, \quad (32)$$

$$C_{Q_i} = C_T \sqrt{\frac{C_T}{2}}, \quad (33)$$

$$C_{Q_0} = \frac{\sigma_t c_d}{6}. \quad (34)$$

- [CTEGLG⁺08] Alvaro Cuerva Tejero, José Luis Espino Granado, Oscar López García, José Meseguer Ruiz, and Angel Sanz Andrés, *Teoría de los helicópteros*, Serie de Ingeniería y Tecnología Aeroespacial, Universidad Politécnica de Madrid, 2008.
- [Lei00] J. Gordon Leishman, *Principles of helicopter aerodynamics*, Cambridge Aerospace Series, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2000.