

Aeromecánica del rotor

Aeronaves de Ala Rotatoria

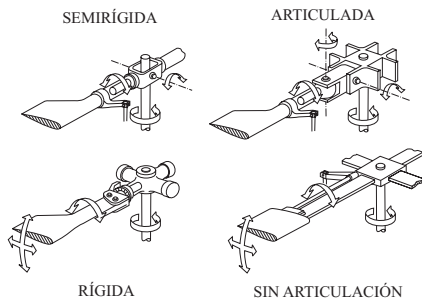
Álvaro Cuerva Tejero
Cristóbal José Gallego Castillo
Oscar López García

Universidad Politécnica de Madrid
Curso 2020-2021

- Definición del problema aeromecánico
- Descripción del paso, arrastre y batimiento.
- El problema de batimiento.
- Parámetros que definen el diseño aeromecánico.
- Respuesta al mando y control.
- Referencia básica: Capítulo 5 [CTEGLG⁺08]

Definición de problema aeromecánico I

- El estudio de la aeromecánica permite establecer las dependencias entre la condición de vuelo, el mando y los movimientos de las palas.



Esquemas de los distintos tipos de cabezas de rotor.

Definición de problema aeromecánico II



El rotor del Bölkov Bo-105, de características muy próximas al rotor rígido puro.

Definición de problema aeromecánico III



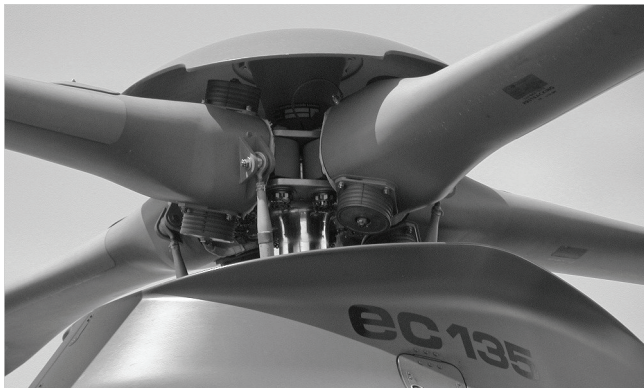
El rotor del Bell 204, UH-1M Iroquois, de tipo balancín (see-saw).

Definición de problema aeromecánico IV



El rotor del Mil 8 con características muy similares al rotor articulado puro.

Definición de problema aeromecánico V



El rotor del EC-135 con cabeza flexible.

Descripción de paso, arrastre y batimiento I

(a)



(b)

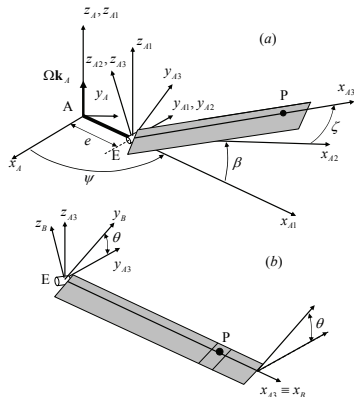


(c)



Tres ejemplos de diferente ordenación de las posiciones de los acoplamientos de batimiento β , arrastre ζ y paso θ desde la conexión de la pala al árbol. (a) Caso $\beta - \zeta - \theta$ (Mi-6-HOOK), (b) caso $\beta - \theta - \zeta$ (Boeing Vertol Chinook) y (c) caso $\zeta - \beta - \theta$ (Westland Sea King).

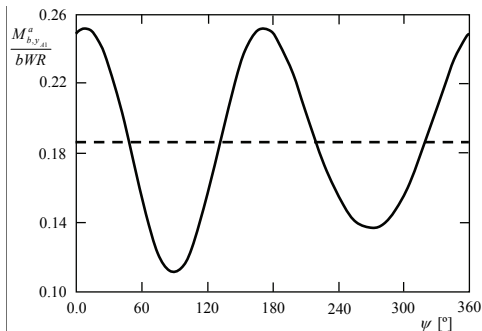
Descripción de paso, arrastre y batimiento II



Definición de los sistemas de ejes empleados en el problema del acoplamiento de batimiento β , arrastre ζ (a) y paso θ (b). Se considera que los tres acoplamientos se sitúan en el punto E y que la pala no tiene torsión geométrica.

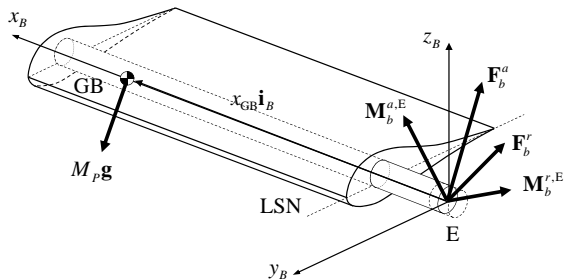
El problema de batimiento I

- Necesidad de la articulación de batimiento.



Variación con la posición azimutal ψ del momento aerodinámico adimensional $M_{b,y_{A1}}^a / (bWR)$ para un rotor con $a = 5.73$, $\sigma = 0.0753$, $C_W = 0.007$ y $b = 2$ en vuelo horizontal, $\gamma_T = 0$. La velocidad de vuelo adimensional es $V/\Omega R = 0.35$. En este ejemplo, la solución del problema de equilibrado básico del rotor predice unos valores $\lambda = -0.0131$, $\alpha_A = \Theta_A = -0.51^\circ$ y ángulos de control $\theta_0 = 8.404^\circ$ y $\theta_{1S} = -6.182^\circ$.

El problema de batimiento II



Definición de las magnitudes que intervienen en las ecuaciones de Newton-Euler de la pala. Se ha considerado que el centro de gravedad de la pala se sitúa en el eje de paso, siendo $\mathbf{EGB} = x_{GB} \mathbf{i}_B$. LSN significa línea de sustentación nula.

- Ecuaciones de Newton-Euler de la pala

$$\mathbf{F}_b^a + \mathbf{F}_b^r + M_P \mathbf{g} = M_P \frac{d\mathbf{V}^{GB}}{dt},$$

$$\mathbf{M}_b^{a,E} + \mathbf{M}_b^{r,E} + \mathbf{EGB} \times M_P \mathbf{g} = \frac{d\mathbf{h}_B}{dt} + \mathbf{EGB} \times M_P \frac{d\mathbf{V}^E}{dt},$$

El problema de batimiento IV

- En un caso general

$$\mathbf{h}_B = [\mathbf{I}_B] \boldsymbol{\omega}_B,$$

$$\boldsymbol{\omega}_B = \boldsymbol{\omega}_A(t) + \Omega \mathbf{k}_{A1} - \frac{d\beta}{dt} \mathbf{j}_{A2} + \frac{d\zeta}{dt} \mathbf{k}_{A3} + \frac{d\theta}{dt} \mathbf{i}_B.$$

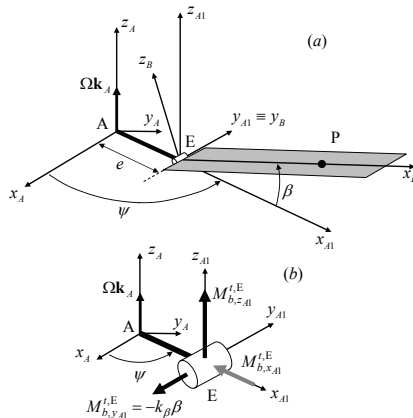
$$[\mathbf{I}_B] \cong \begin{bmatrix} I_\theta & 0 & 0 \\ 0 & I_\beta & 0 \\ 0 & 0 & I_\zeta \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{V}^E = \mathbf{V}^A(t) + \boldsymbol{\omega}_A(t) \times e\mathbf{i}_{A1} + \Omega \mathbf{k}_{A1} \times e\mathbf{i}_{A1},$$

$$\mathbf{V}^{GB} = \mathbf{V}^E + \left(\boldsymbol{\omega}_A(t) + \Omega \mathbf{k}_{A1} - \frac{d\beta}{dt} \mathbf{j}_{A2} + \frac{d\zeta}{dt} \mathbf{k}_{A3} + \frac{d\theta}{dt} \mathbf{i}_B \right) \times \mathbf{EGB}$$

$$\mathbf{EGB} = x_{GB} \mathbf{i}_B$$

El problema de batimiento V



Esquema del problema de batimiento en vacío para una pala acoplada elásticamente (a) y componentes del momento $\mathbf{M}_b^{t,E}$ transmitido por la pala al acoplamiento en ejes $[x_{A1}, y_{A1}, z_{A1}]$ (b). En la figura se muestran los momentos para el caso $\beta > 0$ y $d\beta/dt > 0$. Se ha considerado $g = 0$.

El problema de batimiento VI

- En este caso se va a resolver un caso simplificado en cuanto a:

- Características inerciales de la pala

$$I_{\zeta} \simeq I_{\beta}, I_{\theta} \simeq 0$$

- Condición de vuelo

$$\boldsymbol{\omega}_A = 0$$

$$\mathbf{V}^A = 0$$

- Grados de libertad de la pala

$$\zeta = 0$$

- Simplificaciones adicionales

$$\frac{|\mathbf{EGB} \times M_P \mathbf{g}|}{|\mathbf{M}_b^{a,E}|} \approx 0, \frac{|\mathbf{EGB} \times M_P \mathbf{g}|}{\left| \frac{d\mathbf{h}_B}{dt} \right|} \approx 0$$

- En estas condiciones, los términos que aparecen en las ecuaciones de Euler son, en ejes pala $[x_B, y_B, z_B]$

$$\boldsymbol{\omega}_B = \Omega \sin \beta \mathbf{i}_B - \frac{d\beta}{dt} \mathbf{j}_B + \Omega \cos \beta \mathbf{k}_B,$$

$$\mathbf{h}_B = I_\beta \left(-\frac{d\beta}{dt} \mathbf{j}_B + \Omega \cos \beta \mathbf{k}_B \right),$$

$$\mathbf{V}^E = \Omega e \mathbf{j}_B$$

$$\mathbf{EGB} = x_{GB} \mathbf{i}_B$$

El problema de batimiento VIII

- La derivada absoluta del momento cinético resulta

$$\frac{d\mathbf{h}_B}{dt} = -I_\beta \left(\frac{d^2\beta}{dt^2} + \Omega^2 \cos \beta \sin \beta \right) \mathbf{j}_B - 2I_\beta \Omega \frac{d\beta}{dt} \sin \beta \mathbf{k}_B,$$

- Mientras que el término de momentos de la aceleración absoluta del acoplamiento E resulta

$$\mathbf{EGB} \times M_P \frac{d\mathbf{V}^E}{dt} = -x_{GB} M_P \Omega^2 e \sin \beta \mathbf{j}_B,$$

- Finalmente se va a considerar que el acoplamiento es un muelle de torsión de forma que $M_{b,x_B}^{r,E} = k_\beta \beta$

- De este modo las tres ecuaciones de Euler en ejes pala resultan

$$M_{b,x_B}^{a,E} + M_{b,x_B}^{r,E} = 0,$$

$$M_{b,y_B}^{a,E} + k_\beta \beta + I_\beta \left(\frac{d^2 \beta}{dt^2} + \Omega^2 \cos \beta \sin \beta \right) + x_{GB} M_P \Omega^2 e \sin \beta = 0$$

$$M_{b,z_B}^{a,E} + M_{b,z_B}^{r,E} + 2I_\beta \Omega \frac{d\beta}{dt} \sin \beta = 0$$

- Las ecuaciones anteriores proyectadas en ejes A1 resultan

$$M_{b,x_{A1}}^{a,E} + M_{b,x_{A1}}^{r,E} - 2I_\beta \Omega \frac{d\beta}{dt} \sin^2 \beta = 0,$$

$$M_{b,y_{A1}}^{a,E} + k_\beta \beta + I_\beta \left(\frac{d^2 \beta}{dt^2} + \Omega^2 \cos \beta \sin \beta \right) + x_{GB} M_P \Omega^2 e \sin \beta = 0$$

$$M_{b,z_{A1}}^{a,E} + M_{b,z_{A1}}^{r,E} + 2I_\beta \Omega \frac{d\beta}{dt} \cos \beta \sin \beta = 0$$

El problema de batimiento XI

- Considerando que el ángulo de batimiento es pequeño,
 $|\beta| \ll 1$

$$M_{b,x_{A1}}^{a,E} + M_{b,x_{A1}}^{r,E} - 2I_\beta \Omega \frac{d\beta}{dt} \beta^2 = 0 \quad (1)$$

$$M_{b,y_{A1}}^{a,E} + k_\beta \beta + I_\beta \left(\frac{d^2\beta}{dt^2} + \Omega^2 \beta \right) + x_{GB} M_P \Omega^2 e \beta = 0 \quad (2)$$

$$M_{b,z_{A1}}^{a,E} + M_{b,z_{A1}}^{r,E} + 2I_\beta \Omega \frac{d\beta}{dt} \beta = 0 \quad (3)$$

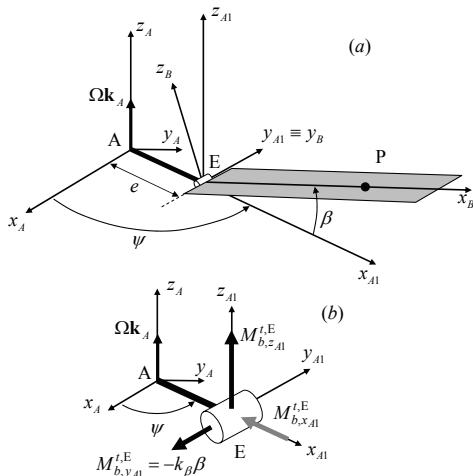
- Considerando los momentos transmitidos al acoplamiento resultan

$$M_{b,x_{A1}}^{t,E} = M_{b,x_{A1}}^{a,E} - 2I_\beta \Omega \frac{d\beta}{dt} \beta^2$$

$$M_{b,y_{A1}}^{t,E} = -k_\beta \beta$$

$$M_{b,z_{A1}}^{t,E} = M_{b,z_{A1}}^{a,E} + 2I_\beta \Omega \frac{d\beta}{dt} \beta$$

El problema de batimiento XIII



Esquema del problema de batimiento en vacío para una pala acoplada elásticamente (a) y componentes del momento $\mathbf{M}_b^{t,E}$ transmitido por la pala al acoplamiento en ejes $[x_{A1}, y_{A1}, z_{A1}]$ (b). En la figura se muestran los momentos para el caso $\beta > 0$ y $d\beta/dt > 0$. Se ha considerado $q = 0$.

El problema de batimiento XIV

- Limitación del movimiento de arrastre



Acoplamiento elástico-viscoso en arrastre de la pala del Chinook CH-47.

- La ecuación de batimiento es la ecuación ((2))

El problema de batimiento XV

$$\frac{1}{\Omega^2} \frac{d^2\beta}{dt^2} + \frac{M_{b,yA1}^{a,E}}{I_\beta \Omega^2} + \left(1 + \frac{x_{GB} M_{Pe}}{I_\beta} + \frac{k_\beta}{I_\beta \Omega^2} \right) \beta = 0$$

- Considerando el caso de velocidad angular constante, $\Omega dt = d\psi$ de forma que

$$\frac{d^2\beta}{d\psi^2} + \frac{M_{b,yA1}^{a,E}}{I_\beta \Omega^2} + \left(1 + \frac{x_{GB} M_{Pe}}{I_\beta} + \frac{k_\beta}{I_\beta \Omega^2} \right) \beta = 0 \quad (4)$$

- Se define la frecuencia natural no amortiguada adimensional en batimiento como

$$\lambda_\beta = \sqrt{1 + \frac{x_{GB} M_{Pe}}{I_\beta} + \frac{k_\beta}{I_\beta \Omega^2}}.$$

El problema de batimiento XVI

- El momento aerodinámico $M_{b,y_{A1}}^{a,E}$ resulta para un rotor con palas sin torsión, despreciando los términos proporcionales a la excentricidad de batimiento y considerando un modelo de velocidad inducida uniforme:

$$M_{b,y_{A1}}^{a,E} = \rho a c \Omega^2 R^4 \left(-\frac{1}{6} \lambda_{i0} + \frac{1}{8} \frac{1}{\Omega} \frac{d\beta}{dt} - \frac{1}{8} \theta \right)$$

- Considerando $\Omega dt = d\psi$ y reorganizando, el término aerodinámico de (4) resulta

$$\frac{M_{b,y_{A1}}^{a,E}}{I_\beta \Omega^2} = \frac{\rho a c R^4}{I_\beta} \left(-\frac{1}{6} \lambda_{i0} + \frac{1}{8} \frac{d\beta}{d\psi} - \frac{1}{8} \theta \right)$$

El problema de batimiento XVII

- Número de Lock: Se define el número de Lock como

$$\gamma = \frac{\rho a c R^4}{I_\beta}$$

- Con lo que la ecuación de batimiento se puede escribir

$$\frac{d^2\beta}{d\psi^2} + \frac{\gamma}{8} \frac{d\beta}{d\psi} + \lambda_\beta^2 \beta - \frac{\gamma}{6} \lambda_{i0} - \frac{\gamma}{8} \theta = 0. \quad (5)$$

- Donde será preciso conocer la ley de control $\theta(\psi)$ y un modelo para λ_{i0} . La ecuación (5) es una EDOL 2º orden y de coeficientes constantes, y requerirá condiciones iniciales en el valor del ángulo de batimiento para el ángulo que consideramos origen $\beta(0)$ y $d\beta/d\psi|_{\psi=0}$.

El problema de batimiento XVIII

- Como modelo de velocidad inducida podemos considerar, aunque es una aproximación severa, el modelo TCM en vuelo a punto fijo, $\lambda_{i0} = -\sqrt{C_T/2}$, que combinado con la expresión de la TEP para el C_T resulta

$$2\lambda_{i0}^2 = \frac{\sigma a}{2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^1 x^2 \left[\theta(\psi) - \frac{\lambda_{i0}}{x} \right] dx \right\} d\psi$$

- Resultando el parámetro de velocidad inducida como solución de la ecuación de 2º grado

$$\lambda_{i0}^2 + \frac{\sigma a}{8} \lambda_{i0} - \frac{\sigma a}{8\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\theta(\psi)}{3} d\psi = 0 \quad (6)$$

- En vista de las ecuaciones (5) y (6) los parámetros adimensionales que determinan cual es la respuesta de batimiento $\beta(\psi)$ a una determinada ley de control, $\theta(\psi)$ son

$$\gamma = \frac{\rho a c R^4}{I_\beta}$$

$$\lambda_\beta = \sqrt{1 + \frac{x_{GB} M_{Pe}}{I_\beta} + \frac{k_\beta}{I_\beta \Omega^2}}$$

σa

- Si se hubiesen retenido los términos del momento aerodinámico proporcionales a e/R también aparecería este parámetro de forma independiente. Alternativamente, veremos inmediatamente que el parámetro λ_β puede ser sustituido en el conjunto de parámetros que definen el comportamiento aeromecánico de un rotor por el denominado número de rigidez, S_β , cuya expresión es

$$S_\beta = \frac{8}{\gamma}(\lambda_\beta^2 - 1)$$

- La EDOL no homogénea que describe el problema de batimiento (5) puede ser analizada con las herramientas matemáticas estándar para cualquier tipo de ley de control $\theta(\psi)$, admitiendo la validez del modelo de velocidad inducida propuesto en (6).
- Desde el punto de vista de la mecánica del vuelo del helicóptero nos interesa
 - La respuesta estacionaria a una actuación de mando. Esto es la respuesta de batimiento pasados tiempos grandes comparadas con los tiempos característicos de la dinámica de batimiento, pero pequeños comparados con los tiempos característicos de la dinámica del vehículo.
 - Respuesta estacionaria a leyes de control $\theta(\psi)$ armónicas de la forma

$$\theta(\psi) = \theta_0 + \theta_{1C} \cos \psi + \theta_{1S} \sin \psi. \quad (7)$$

- Al ser (5) una EDOL, la respuesta estacionaria a una excitación periódica en 2π como lo es (7) es periódica en 2π y por tanto puede ser expresada de forma exacta mediante una serie de Fourier, de la cual nos quedamos con los términos constante, en $\cos \psi$ y en $\sin \psi$, esto es consideramos una solución de la forma

$$\beta(\psi) = \beta_0 + \beta_{1C} \cos \psi + \beta_{1S} \sin \psi. \quad (8)$$

- Sustituyendo (7) y (8) en (5), aparecen términos constantes, términos en $\cos \psi$ y términos en $\sin \psi$, resultando la ecuación en la forma

$$F_0 + F_{1C} \cos \psi + F_{1S} \sin \psi = 0,$$

Respuesta al mando y control III

- Debiendo ser por tanto

$$\begin{aligned}F_0(\beta_0) &= 0 \\F_{1C}(\beta_{1C}, \beta_{1S}) &= 0 \\F_{1S}(\beta_{1C}, \beta_{1S}) &= 0\end{aligned}$$

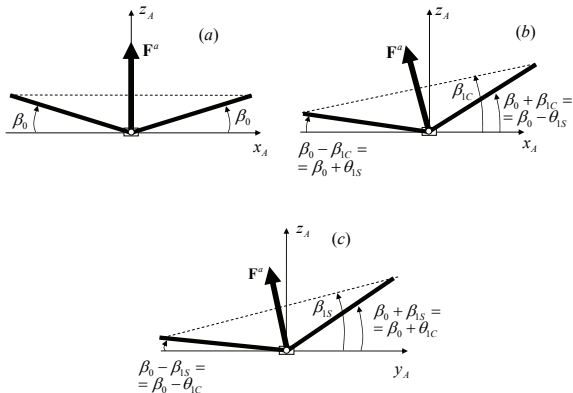
Estas tres ecuaciones se pueden reescribir

$$\begin{aligned}\beta_0 &= \frac{\theta_0 + \frac{4}{3}\lambda_{i0}}{\left(S_\beta + \frac{8}{\gamma}\right)} \\ \begin{bmatrix} \beta_{1C} \\ \beta_{1S} \end{bmatrix} &= \frac{1}{S_\beta^2 + 1} \begin{bmatrix} S_\beta & -1 \\ 1 & S_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{1C} \\ \theta_{1S} \end{bmatrix};\end{aligned}$$

- Obsérvese que el parámetro λ_{i0} se obtiene de (6) fácilmente como solución de

$$\lambda_{i0}^2 + \frac{\sigma a}{8}\lambda_{i0} - \frac{\sigma a}{12}\theta_0 = 0$$

Plano de puntas I



Representación del plano de puntas (línea punteada), ángulo de conicidad, β_0 , (a), batimiento longitudinal β_{1C} , (b), y batimiento lateral, β_{1S} , (c), para un rotor puramente articulado y sin excentricidad de batimiento. En los esquemas (b) y (c) se presentan las relaciones entre β_{1C} y β_{1S} y θ_{1C} y θ_{1S} .

- Una hipótesis de uso habitual en la modelización de la fuerza aerodinámica \mathbf{F}^a generada por el rotor, es que es perpendicular al plano de puntas.
- Además es $C_H \leq C_T$ y $C_Y \leq C_T$ con lo que

$$|\mathbf{F}^a| \simeq \rho S (\Omega R)^2 \left(C_H^2 + C_Y^2 + C_T^2 \right)^{1/2} \simeq \rho S (\Omega R)^2 C_T.$$

- De modo que

$$\begin{bmatrix} C_H \\ C_Y \\ C_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\beta_{1C} \\ 0 & 1 & -\beta_{1S} \\ \beta_{1C} & \beta_{1S} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ C_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta_{1C} C_T \\ -\beta_{1S} C_T \\ C_T \end{bmatrix}$$

- [CTEGLG⁺08] Alvaro Cuerva Tejero, José Luis Espino Granado, Oscar López García, José Meseguer Ruiz, and Angel Sanz Andrés, *Teoría de los helicópteros*, Serie de Ingeniería y Tecnología Aeroespacial, Universidad Politécnica de Madrid, 2008.