

# Aerodinámica del rotor en vuelo de avance

## Aeronaves de Ala Rotatoria

Álvaro Cuerva Tejero  
Cristóbal José Gallego Castillo  
Oscar López García

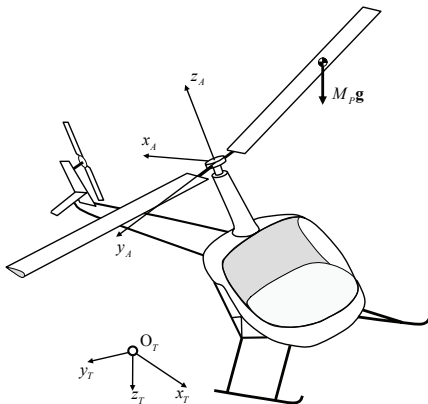
Universidad Politécnica de Madrid  
Curso 2020-2021

- TCM en vuelo de avance
  - Sistemas de referencia
  - Disco actuador
  - Modelo de Glauert
  - Primera forma adimensional
  - Vuelo en el plano del rotor
  - Segunda forma adimensional
- Rotor rígido
- Consideraciones sobre la potencia
- Método de la energía
- Referencia básica: Capítulo 3 de [CTEGLG<sup>+</sup>08]

- Para determinar las acciones aerodinámicas que aparecen en el rotor en el modo de vuelo axial se asumen las siguientes hipótesis
  - fuerzas másicas despreciables
  - flujo estacionario
  - flujo incompresible
  - flujo sin viscosidad
  - flujo uniforme transversalmente
  - flujo sin rotación de estela ni pérdidas de punta de pala

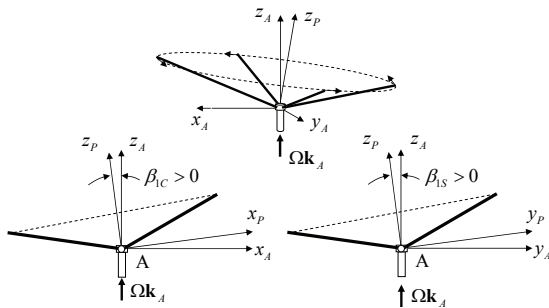
# Sistemas de referencia I

- Sistema de ejes árbol  $Ax_Ay_Az_A$  es un sistema de ejes cuerpo (ejes fijos a la aeronave) con origen en el eje del árbol del rotor,  $A$ , el eje  $z_A$  en la dirección del vector de rotación  $\boldsymbol{\Omega}^A = \Omega \mathbf{k}_A$  el eje  $x_A$  contenido en el eje de simetría de la aeronave y en la dirección del rotor antipar.



# Sistemas de referencia II

- Sistema de ejes del plano de puntas. Los ejes  $x_P$  e  $y_P$  de este sistema de referencia definen el plano que, en primera aproximación, describen las puntas de las palas al girar, con el eje  $z_P$  perpendicular a este plano y apuntando hacia el mismo semiespacio donde apunta la tracción.



- La orientación del sistema de ejes árbol con respecto al plano de puntas se define a partir de dos ángulos
  - ángulo  $\beta_{1C}$  en la dirección longitudinal  $x_A$  , ángulo de batimiento cíclico longitudinal
  - ángulo  $\beta_{1S}$  en la dirección lateral  $y_A$ , ángulo de batimiento cíclico lateral
- La matriz de transformación linealizada de ejes árbol al plano de puntas es:

$$[\mathbf{T}_{PA}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \beta_{1C} \\ 0 & 1 & \beta_{1S} \\ -\beta_{1C} & -\beta_{1S} & 1 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

- La determinación de los ángulos de batimiento es el objeto de estudio de la aeromecánica

- Las fuerzas en el sistema de ejes árbol son

$$\mathbf{F}^a = H_A \mathbf{i}_A + Y_A \mathbf{j}_A + T_A \mathbf{k}_A, \quad (2)$$

y en el plano de puntas

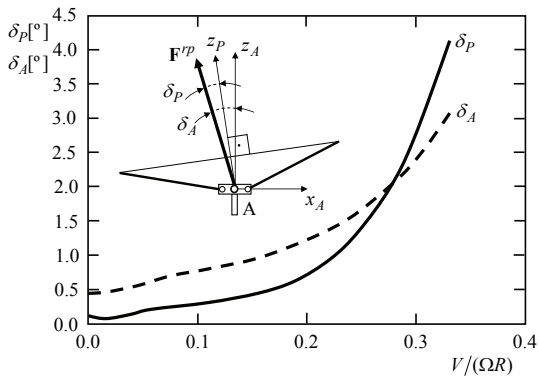
$$\mathbf{F}^a = H_P \mathbf{i}_P + Y_P \mathbf{j}_P + T_P \mathbf{k}_P, \quad (3)$$

- Tanto en el sistema de ejes árbol  $H_A, Y_A \ll T_A$  como en el plano de puntas  $H_P, Y_P \ll T_P$  pero además

$$H_P, Y_P \ll H_A, Y_A$$

por lo que es el plano de puntas el sistema adecuado para aplicar los conceptos en los que se basa la TCM (una fuerza perpendicular al disco actuador)

# Sistemas de referencia V

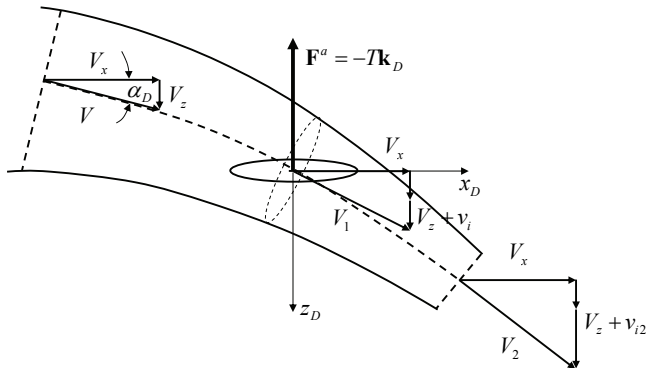




- Para modelar aerodinámicamente el rotor se recurre al disco actuador.
- El disco actuador sustituye al rotor y se caracteriza por
  - permitir el paso de masa por unidad de tiempo como un disco poroso
  - ser capaz de soportar diferencias de presión entre sus dos caras
  - poder inyectar energía por unidad de tiempo en el flujo
- Se considera que el rotor se encuentra en movimiento de avance y ascenso
- El disco actuador genera un incremento de cantidad de movimiento en la dirección perpendicular a su superficie (opuesto a la fuerza aerodinámica resultante)

- Se considera que el disco actuador coincide con el plano de puntas y por tanto  $H_p \approx Y_p \approx 0$  de forma que  $\mathbf{F}^a = -T\mathbf{k}_D = T\mathbf{k}_P$
- Por tanto la velocidad inducida se expresa como  $\mathbf{v}_i = -v_i\mathbf{k}_P = v_i\mathbf{k}_D$
- Además se tiene que  $V_x^2 = \left(u_{x_P}^A\right)^2 + \left(u_{y_P}^A\right)^2$  y  $V_z = u_{z_P}^A$

# Disco actuador III



- Conservación de masa

$$\dot{m} = \rho\pi R^2 \sqrt{V_x^2 + (V_z + v_i)^2}$$

- Ecuación de cantidad de movimiento en la dirección  $\mathbf{k}_D$

$$T = \dot{m}v_{i2} = \rho\pi R^2 v_{i2} \sqrt{V_x^2 + (V_z + v_i)^2} \quad (4)$$

- Ecuación de la energía mecánica

$$\begin{aligned} P_i &= \frac{1}{2}\dot{m} \left[ V_x^2 + (V_z + v_{i2})^2 - (V_x^2 + V_z^2) \right] \\ &= \frac{1}{2}\dot{m}v_{i2} [2V_z + v_{i2}] \end{aligned} \quad (5)$$

- Definición de la potencia inducida

$$P_i = T (V_z + v_i) \quad (6)$$

- Empleando la expresión (4) en (5) y junto con (6) se tiene que

$$T(V_z + v_i) = \frac{1}{2}T[2V_z + v_{i2}]$$

y se vuelve a obtener la ecuación de Froude-Fisterwalder

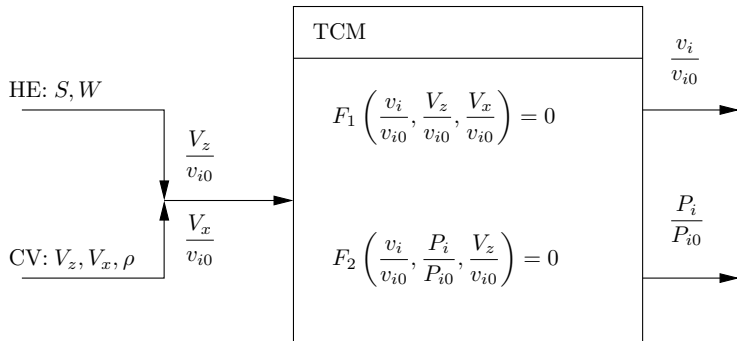
$$v_{i2} = 2v_i$$

- Por tanto, se obtiene nuevamente un sistema de 2 ecuaciones y que son

$$T = 2\rho\pi R^2 v_i \sqrt{V_x^2 + (V_z + v_i)^2} \quad (7)$$

$$P_i = T(V_z + v_i) \quad (8)$$

# Modelo de Glauert III



- La expresión (7) cuando se particulariza para el caso de vuelo en el plano del disco,  $V_z = 0$  y  $v_i \ll V_z$  se obtiene que

$$T \approx 2\rho\pi R^2 V_x v_i \quad (9)$$

Esta ecuación coincide con la expresión de la sustentación de un ala de sección circular.

- Recordatorio: el coeficiente de sustentación  $C_L$  es

$$C_L = \frac{\pi\Lambda A_1}{2}$$

donde  $\Lambda = b^2/S$  y  $A_1$  es el primer término del desarrollo en serie de senos de la distribución de circulación adimensional a lo largo de la envergadura, y es  $A_1 = 2v_i/U_\infty$ .

- Teniendo en cuenta que para un sección circular  $\Lambda = 4R^2/(\pi R^2) = 4/\pi$  se obtiene que

$$C_L = \frac{4v_i}{U_\infty}$$

y por tanto la sustentación del ala circular es

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 \pi R^2 \frac{4v_i}{U_\infty} \\ &= 2\rho U_\infty \pi R^2 v_i \end{aligned}$$

y que coincide con la expresión (9) cuando se identifica  $U_\infty \rightarrow V_x$



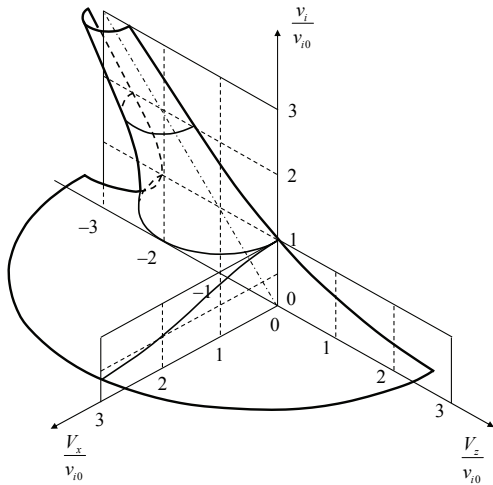
- Variables características:
  - Velocidad: velocidad en vuelo a punto fijo (se asume que  $T = W$ )  $v_{i0} = \sqrt{W/(2\rho S)}$
  - Potencia: potencia inducida en vuelo a punto fijo  $P_{i0} = W v_{i0} = \sqrt{W^3/(2\rho S)}$
- El sistema de ecuaciones (7) y (8) se reescribe

$$\frac{v_i}{v_{i0}} \left[ \left( \frac{V_x}{v_{i0}} \right)^2 + \left( \frac{V_z}{v_{i0}} + \frac{v_i}{v_{i0}} \right)^2 \right]^{1/2} = 1 \quad (10)$$

$$\frac{P}{P_{i0}} = \frac{V_z}{v_{i0}} + \frac{v_i}{v_{i0}} \quad (11)$$

- La ecuación (10) se denomina superficie de velocidad inducida.

# Primera forma adimensional II



- La ecuación de velocidad inducida (10) se reescribe como

$$\left(\frac{v_i}{v_{i0}}\right)^4 + \left(\frac{V_x}{v_{i0}}\right)^2 \left(\frac{v_i}{v_{i0}}\right)^2 - 1 = 0$$

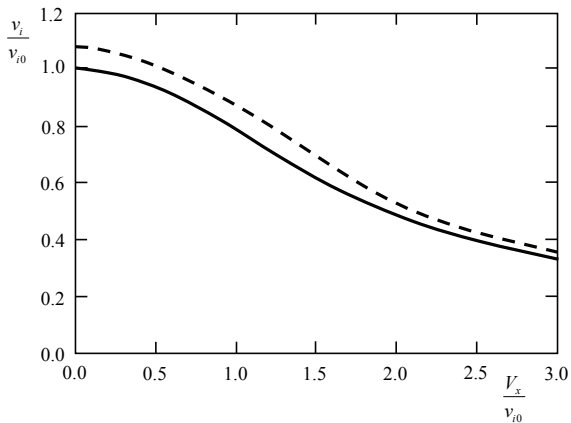
cuya solución es

$$\frac{v_i}{v_{i0}} = \left[ -\frac{1}{2} \left(\frac{V_x}{v_{i0}}\right)^2 + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{V_x}{v_{i0}}\right)^4 + 1} \right]^{1/2}$$

- La ecuación de la potencia, expresión (11) se reduce por tanto a

$$\frac{P}{P_{i0}} = \frac{v_i}{v_{i0}} = \left[ -\frac{1}{2} \left(\frac{V_x}{v_{i0}}\right)^2 + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{V_x}{v_{i0}}\right)^4 + 1} \right]^{1/2}$$

# Vuelo en el plano del rotor $V_z = 0$ II



# Segunda forma adimensional I

- Variables características
  - Unidad de fuerza  $U_F = \rho S (\Omega R)^2$
  - Unidad de potencia  $U_P = \rho S (\Omega R)^3$
- Se divide la ecuación (7) por la unidad de fuerza y la ecuación (8) por la unidad de potencia obteniéndose que

$$C_T = 2 \frac{v_i}{\Omega R} \sqrt{\left(\frac{V_x}{\Omega R}\right)^2 + \left(\frac{V_z}{\Omega R} + \frac{v_i}{\Omega R}\right)^2} \quad (12)$$

$$C_Q = C_T \left(\frac{V_z}{\Omega R} + \frac{v_i}{\Omega R}\right) \quad (13)$$

donde el coeficiente de tracción,  $C_T$ , y el de potencia,  $C_Q$ , se definen como

$$C_T = \frac{T}{\rho S (\Omega R)^2}$$

$$C_Q = \frac{P}{\rho S (\Omega R)^3}$$

## Segunda forma adimensional II

- La velocidad de translación del árbol,  
 $\mathbf{V}^A = u_{x_P}^A \mathbf{i}_P + u_{y_P}^A \mathbf{j}_P + u_{z_P}^A \mathbf{k}_P$  y la velocidad aerodinámica del árbol se expresa mediante los parámetros adimensionales  $\mu_{x_P}$ ,  $\mu_{y_P}$  y  $\mu_{z_P}$  de la forma:

$$\mathbf{V}^{air,A} = \Omega R (\mu_{x_P} \mathbf{i}_P + \mu_{y_P} \mathbf{j}_P + \mu_{z_P} \mathbf{k}_P)$$

y como  $\mathbf{V}^A = -\mathbf{V}^{air,A}$ , por lo que

$$\begin{aligned}\mu_{x_P} &= -\frac{u_{x_P}^A}{\Omega R} \\ \mu_{y_P} &= -\frac{u_{y_P}^A}{\Omega R} \\ \mu_{z_P} &= -\frac{u_{z_P}^A}{\Omega R}\end{aligned}$$

## Segunda forma adimensional III

- Los parámetros de velocidad empleados son  $V_x$  y  $V_z$  y que en función de las velocidades del árbol en el sistema del plano de puntas son  $V_x^2 = \left(u_{x_P}^A\right)^2 + \left(u_{y_P}^A\right)^2$  y  $V_z = u_{z_P}^A$
- Normalmente se emplean los parámetros adimensionales  $\mu_{x_P}$ ,  $\mu_{z_P}$  y  $\lambda_i$  en el sistema de plano de puntas.
- El parámetro de velocidad vertical  $\mu_z$  se define como

$$\mu_z = -\frac{V_z}{\Omega R}$$

ya que  $V_z$  es positivo según  $z_D$

- El parámetro de velocidad de avance  $\mu_x$  se define como

$$\mu_x = \frac{V_x}{\Omega R}$$

ya que  $V_x$  es positivo según  $x_D$

## Segunda forma adimensional IV

- El parámetro de velocidad inducida adimensional  $\lambda_i$ , se define como

$$\lambda_i = -\frac{v_i}{\Omega R}$$

ya que  $v_i$  es positivo según  $z_D$

- Las ecuaciones adimensionales (12) y (13) empleando los parámetros adimensionales del sistema disco son

$$\begin{aligned}C_T &= -2\lambda_i \sqrt{\mu_x^2 + (\mu_z + \lambda_i)^2} \\C_Q &= -C_T (\mu_z + \lambda_i)\end{aligned}$$

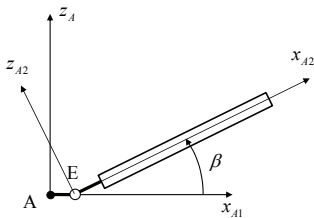
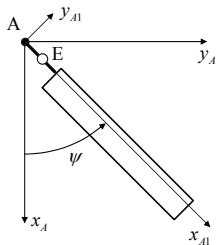
- Las ecuaciones adimensionales (12) y (13) empleando el sistema de referencia plano de puntas son

$$\begin{aligned}C_T &= -2\lambda_i \sqrt{\mu_{x_P}^2 + \mu_{y_P}^2 + (\mu_{z_P} + \lambda_i)^2} \\C_Q &= -C_T (\mu_{z_P} + \lambda_i)\end{aligned}$$

donde se ha empleado que  $\mu_x^2 = \mu_{x_P}^2 + \mu_{y_P}^2$ .

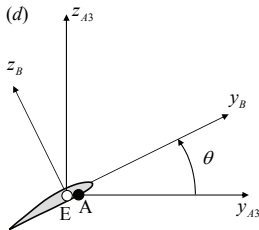
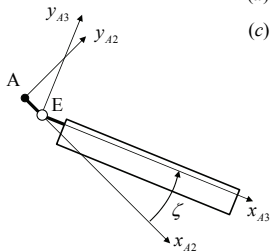


# Rotor rígido I



(a) (b)

(c) (d)



- Las palas del rotor experimentan desplazamientos tanto fuera (batimiento) como dentro (arrastre) del plano de rotación así como rotaciones a lo largo de su eje longitudinal (torsión) y son consecuencia de
  - la flexibilidad de las palas
  - las características constructivas del árbol del rotor (articulado, rígido o flexible)
- Rotor rígido: es un rotor ideal que por su simplicidad permite
  - obtener resultados sencillos
  - abordar el problema de actuaciones por el método de la energía

# Rotor rígido III

- Las hipótesis en las que se basa el rotor rígido son
  - se desprecia el batimiento,  $\beta = 0$  y  $\frac{d\beta}{dt} = 0$
  - se desprecia el arrastre,  $\zeta = 0$  y  $\frac{d\zeta}{dt} = 0$
  - condición de vuelo sin cambio de actitud  $\omega^A = \mathbf{0}$  y vuelo sin componente lateral de velocidad,  $\mu_{y_A} = 0$ , es decir  $\mathbf{V}^{air,A} = \Omega R [\mu_{x_A}, 0, \mu_{z_A}]$  (lo cual implica que  $\Phi_A = 0$ )
  - Articulación de arrastre y batimiento con excentricidad nulas
  - cuerda constante (solidez constante)
  - torsión geométrica lineal  $\theta_G(x) = \theta_1 x$
  - resistencia aerodinámica constante,  $c_{d0}$
  - sustentación lineal de coeficiente  $a$
  - velocidad inducida adimensional uniforme  $\lambda_i = \text{constante}$
  - control del piloto:  $\theta_0 + \theta_{1s} \sin \psi$  (se ha demostrado en el equilibrado del rotor rígido que para que la fuerza lateral  $Y$  y el momento de picado  $M_{y_A}$  sean nulos se debe cumplir  $\theta_{1c} = 0$ )

- Mediante la TEP se determinan las acciones en el sistema de ejes árbol según

$$\mathbf{F}^a = \begin{bmatrix} H \\ Y \\ T \end{bmatrix} = \frac{b}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 dF_b^a d\psi$$
$$\mathbf{M}^a = \begin{bmatrix} M_{x_A} \\ M_{y_A} \\ M_{z_A} \end{bmatrix} = \frac{b}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 dM_b^a d\psi$$

donde

$$d\mathbf{F}_b^a = [\mathbf{T}_{AA_1}] \begin{bmatrix} 0 \\ -dF_{Tb} \\ dT_b \end{bmatrix}$$
$$d\mathbf{M}_b^a = -r [\mathbf{T}_{AA_1}] \begin{bmatrix} 0 \\ dT_b \\ dF_{Tb} \end{bmatrix}$$

siendo  $[\mathbf{T}_{AA_1}]$  la matriz de transformación azimutal,  $\psi$  que permite pasar del sistema de ejes móvil a la pala al sistema de ejes árbol y que es

$$[\mathbf{T}_{AA_1}] = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y las fuerzas elementales linealizadas son

$$\begin{aligned} dT_b &\approx \frac{1}{2} \rho U_T c dr a (\theta U_T + U_P) \\ dF_{Tb} &= -\frac{1}{2} \rho U_P c dr a (\theta U_T + U_P) \\ &\quad + \frac{1}{2} \rho U_T^2 c dr c_{d0} \end{aligned}$$

donde las componentes de velocidad en el plano  $U_T$  y normal al plano son para la condición de vuelo definida

$$\begin{aligned} U_T &= \Omega R (\mu_{x_A} \sin \psi + x) \\ U_P &= \Omega R (\mu_{z_A} + \lambda_i) \end{aligned}$$

- Los coeficientes de fuerzas y momentos son

$$C_T = \frac{\sigma a}{4} \left[ \theta_0 \left( \frac{2}{3} + \mu_{x_A}^2 \right) + \frac{\theta_1}{2} (1 + \mu_{x_A}^2) + \theta_{1S} \mu_{x_A} + \lambda \right], \quad (14)$$

$$C_H = -\frac{\sigma a}{4} \left[ \mu_{x_A} \left( \theta_0 + \frac{\theta_1}{2} \right) + \frac{1}{2} \theta_{1S} \right] \lambda + \frac{\sigma c_{d0}}{4} \mu_{x_A} \quad (15)$$

$$C_Y = \frac{\sigma a}{8} \lambda \theta_{1C}, \quad (16)$$

$$C_{M_{x_A}}^a = \frac{\sigma a}{4} \left[ \frac{2}{3} \theta_0 \mu_{x_A} + \left( \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \mu_{x_A}^2 \right) \theta_{1S} + \frac{\lambda}{2} \mu_{x_A} + \frac{\theta_1}{2} \mu_{x_A} \right], \quad (17)$$

$$C_{M_{y_A}}^a = -\frac{\sigma a}{4} \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \mu_{x_A}^2 \right) \theta_{1C}, \quad (18)$$

$$C_{M_{z_A}}^a = \frac{\sigma a}{4} \left( \frac{2}{3} \theta_0 + \frac{1}{2} \mu_{x_A} \theta_{1S} + \lambda + \frac{\theta_1}{2} \right) \lambda - \frac{\sigma c_{d0}}{8} (1 + \mu_{x_A}^2). \quad (19)$$

- Relaciones cinemáticas. La matriz de transformación de los ejes árbol a tierra es ( $\Phi_A = 0$ )

$$[\mathbf{T}_{AT}] = \begin{bmatrix} -\cos \Theta_A & 0 & \sin \Theta_A \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \Theta_A & 0 & -\cos \Theta_A \end{bmatrix}. \quad (20)$$

por lo que los parámetros adimensionales de velocidad en ejes árbol son

$$\begin{bmatrix} \mu_{x_A} \\ \mu_{y_A} \\ \mu_{z_A} \end{bmatrix} = \frac{V}{\Omega R} \begin{bmatrix} -\cos \Theta_A & 0 & \sin \Theta_A \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \Theta_A & 0 & -\cos \Theta_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos \gamma_T \\ 0 \\ \sin \gamma_T \end{bmatrix}$$

- Las ecuaciones de equilibrio en fuerzas y momentos adimensionales se escriben como

$$C_W \sin \Theta_A + C_H = 0, \quad (21)$$

$$C_Y = 0, \quad (22)$$

$$C_T - C_W \cos \Theta_A = 0, \quad (23)$$

$$C_{M_{x_A}}^a = 0, \quad (24)$$

$$C_{M_{y_A}}^a = 0, \quad (25)$$

$$C_{M_{z_A}}^a + C_Q = 0, \quad (26)$$

- Empleando la ecuación (22) implica que  $\theta_{1C} = 0$ , y este resultado hace que la ecuación (25) no aporte información adicional ya que se cumple idénticamente (es una combinación lineal del resto de ecuaciones).



# Consideraciones sobre la potencia I

- Para el caso de un rotor rígido los coeficientes de tracción,  $C_T$ , de par inducido  $C_{Q_i}$  de forma  $C_{Q_0}$  y fuerza horizontal inducida  $C_{H_i}$  y de forma  $C_{H_0}$  son:

$$C_T = \frac{\sigma a}{4} \left[ \theta_0 \left( \frac{2}{3} + \mu_{x_A}^2 \right) + \frac{\theta_1}{2} (1 + \mu_{x_A}^2) + \theta_{1S} \mu_{x_A} + \lambda \right] \quad (27)$$

$$-C_{Q_i} = \frac{\sigma a}{4} \left( \frac{2}{3} \theta_0 + \frac{1}{2} \mu_{x_A} \theta_{1S} + \lambda + \frac{\theta_1}{2} \right) \lambda \quad (28)$$

$$-C_{Q_0} = -\frac{\sigma c_{d0}}{8} (1 + \mu_{x_A}^2) \quad (29)$$

$$C_{H_i} = -\frac{\sigma a}{4} \left[ \mu_{x_A} \left( \theta_0 + \frac{\theta_1}{2} \right) + \frac{1}{2} \theta_{1S} \right] \lambda, \quad (30)$$

$$C_{H_0} = \frac{\sigma c_{d0}}{4} \mu_{x_A} \quad (31)$$

# Consideraciones sobre la potencia II

- La TCM establece que  $C_{Q_i} = -\lambda C_T$  y a partir de las ecuaciones de equilibrio simplificadas,  $C_T \simeq C_W$  por lo que se puede establecer que

$$C_{Q_i} = -\lambda C_W$$

y a partir del peso de la aeronave se puede estimar la potencia inducida.

- En cambio la TEP cuando comparamos  $\lambda C_T$  y  $C_{Q_i}$  se observa que

$$-\lambda C_T|_{TEP} \neq C_{Q_i}|_{TEP}$$

# Consideraciones sobre la potencia III

- Si se suma la ecuación (28) mas la expresión (27) multiplicada por  $\lambda$  se obtiene que

$$\begin{aligned}\lambda C_T|_{TEP} + C_{Q_i}|_{TEP} &= \frac{\sigma a}{4} \left[ \mu_{x_A}^2 \theta_0 + \frac{\theta_1}{2} \mu_{x_A}^2 + \frac{1}{2} \theta_{1S} \mu_{x_A} \right] \lambda, \\ &= \frac{\sigma a}{4} \left[ \mu_{x_A} \theta_0 + \frac{\theta_1}{2} \mu_{x_A} + \frac{1}{2} \theta_{1S} \right] \lambda \mu_{x_A},\end{aligned}$$

y que se puede comprobar que el término de la derecha coincide con  $-C_{H_i} \mu_{x_A}$  por lo que se puede escribir

$$-\lambda C_T|_{TEP} = C_{Q_i}|_{TEP} + \mu_{x_A} C_{H_i}|_{TEP} \quad (32)$$

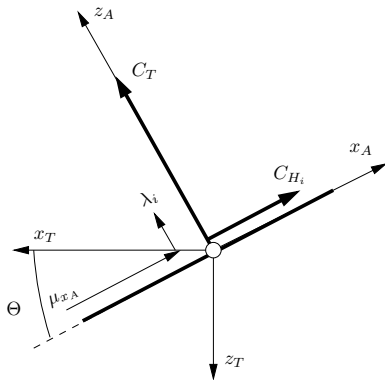
Este resultado es completamente diferente del obtenido por la TCM y el modelo de Glauert que es

$$-\lambda C_T|_{TCM} = C_{Q_i}|_{TCM} \quad (33)$$

# Consideraciones sobre la potencia IV

- Interpretación de la paradoja:
  - El resultado de la TEP, ecuación (32) se ha obtenido en el sistema de ejes árbol. En este sistema de ejes las fuerzas aerodinámicas inducidas sobre el rotor tienen componentes perpendicular al plano rotación,  $C_T$ , y contenidas en el plano de rotación  $C_{H_i}$  por lo que la potencia inducida debe contabilizar ambas componentes.
  - El resultado de la TCM, ecuación (33) se ha obtenido mediante el modelo de Glauert que está basado en el disco actuador. Se ha identificado el disco actuador como el plano de puntas y la hipótesis para poder aplicar el razonamiento de la TCM es que en este sistema de ejes la única acción aerodinámica inducida es la tracción,  $C_T$ , y perpendicular al plano de puntas.

# Consideraciones sobre la potencia $V$



$$-\lambda C_T|_{TEP} = C_{Q_i}|_{TEP} + \mu_{x_A} C_{H_i}|_{TEP}$$

- Dada una condición de vuelo y un helicóptero se desea determinar el consumo de potencia para dicha maniobra, potencia necesaria, para poder compararla con la potencia de los motores, potencia disponible, y poder decidir si dicha maniobra es factible
- En las etapas previas de diseño se carece de datos detallados de la configuración del helicóptero. Por tanto, se requieren modelos simplificados para poder realizar estimaciones iniciales de las actuaciones del helicóptero con la menor cantidad posible de datos. De esta manera se debe retener la parte física más importante y simplificar la complejidad matemática del problema.

## Método de la energía II

- Observando las ecuaciones (27), (28), (29), (30) y (31) se tienen las siguientes dependencias funcionales

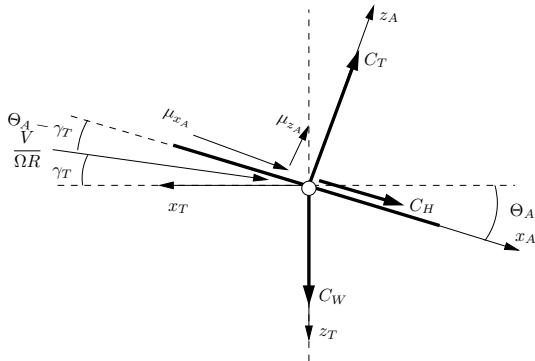
$$\begin{aligned}C_T &= f_T(\sigma, a, \theta_1; \mu_{x_A}; \theta_{1s}, \theta_0; \lambda) \\C_{H_i} &= f_{H_i}(\sigma, a, \theta_1; \mu_{x_A}; \theta_{1s}, \theta_0; \lambda) \\C_{H_0} &= f_{H_0}(\sigma, c_{d0}; \mu_{x_A}) \\C_{Q_i} &= f_{Q_i}(\sigma, a, \theta_1; \mu_{x_A}; \theta_{1s}, \theta_0; \lambda) \\C_{Q_0} &= f_{Q_0}(\sigma, c_{d0}; \mu_{x_A})\end{aligned}$$

- $C_{H_0}$  y  $C_{Q_0}$  son fáciles de determinar a partir de estimaciones iniciales de  $\sigma$  y  $c_{d0}$ .
- $C_T$ ,  $C_{Q_i}$  y  $C_{H_i}$  necesitan mas datos del rotor,  $\theta_1$  pero sobre todo necesitan información del control del helicóptero,  $\theta_0$  y  $\theta_{1s}$  por lo que se necesitan ecuaciones adicionales para obtenerlos

- ¿Cómo se puede mejorar la situación para poder obtener un modelo simplificado?
- La idea es incorporar ecuaciones de equilibrio simplificadas que permitan eliminar la mayor parte de los términos con información sobre el control.
- Ecuaciones de equilibrio:



# Método de la energía IV



$$C_T - C_W \cos \Theta_A = 0 \quad (34)$$

$$C_W \sin \Theta_A + C_H = 0 \quad (35)$$

- Si se considera  $\Theta_A \ll 1$  se tienen las siguientes ecuaciones de equilibrio simplificadas

$$\begin{aligned}C_T &\approx C_W \\ \Theta_A &\approx -\frac{C_H}{C_T}\end{aligned}$$

- Relaciones cinemáticas

$$\begin{aligned}\mu_{x_A} &= \frac{V}{\Omega R} \cos(\Theta_A - \gamma_T) \\ \lambda &= \mu_{z_A} + \lambda_i \\ &= \frac{V}{\Omega R} \sin(\Theta_A - \gamma_T) + \lambda_i\end{aligned}$$

- Expresión del coeficiente de potencia en ejes árbol (TEP):

$$\begin{aligned}C_Q &= C_{Q_i} + C_{Q_0} \\ &= C_{Q_i} + C_{Q_0} + \mu_{x_A} C_{H_i} + \mu_{x_A} C_{H_0} - \mu_{x_A} C_H\end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que

$\mu_{x_A} C_H = \mu_{x_A} C_{H_i} + \mu_{x_A} C_{H_0}$ . Ahora empleando la relación (32) se obtiene que

$$C_Q = -\lambda C_T + C_{Q_0} + \mu_{x_A} C_{H_0} - \mu_{x_A} C_H$$

- Empleando las ecuaciones de equilibrio (34) y (35) en la expresión de la potencia se tiene que

$$C_Q = -C_W \cos \Theta_A \lambda + C_{Q_0} + \mu_{x_A} C_{H_0} + \mu_{x_A} C_W \sin \Theta_A$$

Ahora se introducen las relaciones cinemáticas en la expresión de la potencia y se obtiene que

$$\begin{aligned} C_Q = & - \left[ \frac{V}{\Omega R} \sin(\Theta_A - \gamma_T) + \lambda_i \right] C_W \cos \Theta_A + C_{Q_0} \\ & + \frac{V}{\Omega R} \cos(\Theta_A - \gamma_T) (C_{H_0} + \sin \Theta_A C_W) \end{aligned}$$

y se observa que la estimación de potencia solo depende de los términos  $C_{Q_0}$  y  $C_{H_0}$  que son los que menos información sobre el rotor y el control necesitan. A pesar de que aparece el ángulo de asiento del rotor,  $\Theta_A$  y para poder determinarlo se necesita resolver ecuaciones de equilibrio (ver caso del rotor rígido) se sabe que el ángulo de asiento es muy pequeño y en primera aproximación (etapas de diseño conceptual) se puede considerar que  $\Theta_A \simeq 0$

# Método de la energía VIII

- Por tanto, empleando esta simplificación de ángulo de asiento del rotor prácticamente nulo, se tiene que la potencia se puede expresar como

$$C_Q = - \left[ \lambda_i - \frac{V}{\Omega R} \sin(\gamma_T) \right] C_W + C_{Q_0} + \frac{V}{\Omega R} \cos(\gamma_T) C_{H_0}$$

- Esta expresión es extremadamente simplificada y para el caso del problema de actuaciones, condición de vuelo y helicóptero dados, solo tiene una incógnita que es la velocidad inducida adimensional,  $\lambda_i$ .
- Por tanto se necesita completar el modelo de actuaciones con la ecuación del modelo de Glauert para el caso de rotor rígido  $\beta_0 = \beta_{1s} = \beta_{1c} = 0$ , velocidad inducida adimensional uniforme,  $\lambda = \text{constante}$ , y condición de vuelo  $\mu_{y_A} = 0$ , es decir que

$$C_T = -2\lambda_i \sqrt{\mu_{x_A}^2 + (\lambda_i + \mu_{z_A})^2}$$

# Método de la energía IX

- Empleando las ecuaciones de equilibrio simplificadas con  $\Theta_A \simeq 0$  y las relaciones cinemáticas se tiene que

$$C_W \simeq -2\lambda_i \sqrt{\left(\frac{V}{\Omega R} \cos(\gamma_T)\right)^2 + \left(\lambda_i - \frac{V}{\Omega R} \sin(\gamma_T)\right)^2}$$

- Por tanto el modelo de actuaciones basado en el consumo de potencia, denominado método de la energía, se basa en la resolución de un sistema algebraico de dos ecuaciones con dos incógnitas que son  $C_Q$  y  $\lambda_i$  y cuyas expresiones son

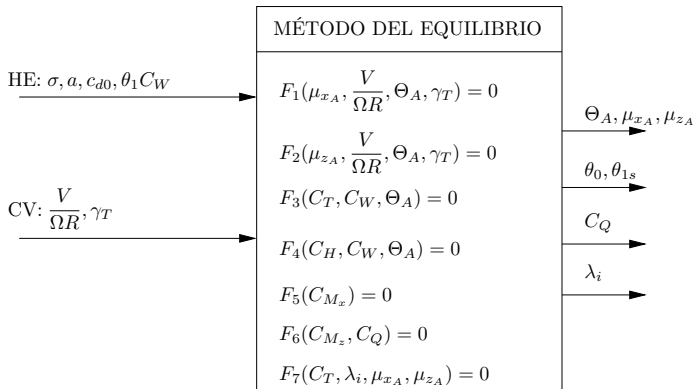
$$\begin{aligned} C_W &\simeq -2\lambda_i \sqrt{\left(\frac{V}{\Omega R} \cos(\gamma_T)\right)^2 + \left(\lambda_i - \frac{V}{\Omega R} \sin(\gamma_T)\right)^2} \\ C_Q &= -\left[\lambda_i - \frac{V}{\Omega R} \sin(\gamma_T)\right] C_W + \frac{\sigma c_{d0}}{8} \left(1 + 3\left(\frac{V}{\Omega R}\right)^2 \cos^2(\gamma_T)\right) \end{aligned}$$

donde se han empleado las expresiones (29) y (31).

- Desde el punto de vista de las actuaciones de un helicóptero se necesita incorporar a la formulación dos componentes adicionales cuyo consumo de potencia justifica que en etapas iniciales de diseño deban de ser contabilizados. Estos componentes son
  - Fuselaje. La forma no esbelta del fuselaje hace que aparezcan importantes zonas con flujo desprendido por lo que la componente de resistencia aerodinámica de este componente representa una buena parte de la potencia consumida especialmente a altas velocidades de vuelo.
  - Rotor antipar. El consumo de potencia necesario para hacer funcionar el rotor antipar no es despreciable y debe de ser contabilizado. Para incluir el rotor antipar en el método de la energía se puede emplear la ecuación de equilibrio en torno al eje  $z_A$  del helicóptero o bien emplear estimaciones de la potencia consumida por el rotor antipar.

# Método de la energía XI

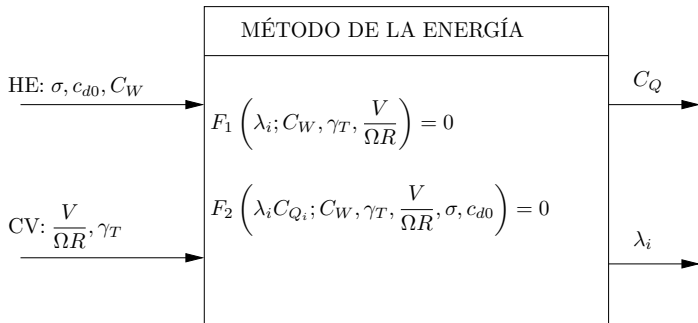
- El método del equilibrado para el caso de vuelo simétrico y rotor rígido conceptualmente se resume de la siguiente forma





# Método de la energía XII

- El método de la energía conceptualmente se resume de la siguiente forma



- [CTEGLG<sup>+</sup>08] Alvaro Cuerva Tejero, José Luis Espino Granado, Oscar López García, José Meseguer Ruiz, and Angel Sanz Andrés, *Teoría de los helicópteros*, Serie de Ingeniería y Tecnología Aeroespacial, Universidad Politécnica de Madrid, 2008.