

---

Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia  
do Norte de Minas Gerais - IFNMG  
Bacharelado em Ciência da Computação

Disciplina de Pesquisa Operacional

## Problema da degeneração

Bárbara Santos Freitas

Débora Liliane Oliveira Borges

Yoskolowich Fernandes

Última atualização: 9 de novembro de 2018

---

# Sumário

1	Descrição	1
2	Solução Gráfica	2
3	Resolução pelo simplex	4

# Capítulo 1

## Descrição

Um Problema de Programação Linear (PL) é degenerado se há pelo menos uma solução básica viável com uma variável básica com valor zero. Essa solução é dita degenerada.

Ao longo do Simplex, a degenerescência surge quando há empate na seleção da variável que sairá da base. Dessa forma, a iteração seguinte pode ser uma iteração degenerada.

Se um Problema de Programação Linear possui muitas soluções degeneradas, o método Simplex pode demorar mais iterações do que o usual para chegar na solução ótima. Em certos casos extremamente raros, pode ocorrer ciclagem, o Simplex pode visitar uma sequência de soluções degeneradas (todas de mesmo custo) que se repetem infinitamente. Nesse caso, o método não chegaria na solução ótima.

Em um PL com  $m$  restrições e  $n$  variáveis, se uma solução tiver exatamente  $(n - m)$  variáveis nulas, estaremos perante uma solução básica não degenerada; se, pelo contrário, o número de variáveis nulas exceder  $(n - m)$ , estaremos perante uma solução básica degenerada.

# Capítulo 2

## Solução Gráfica

Usaremos o seguinte problema para exemplificar o problema da degeneração.

Maximizar  $Z = 3x_1 + 9x_2$

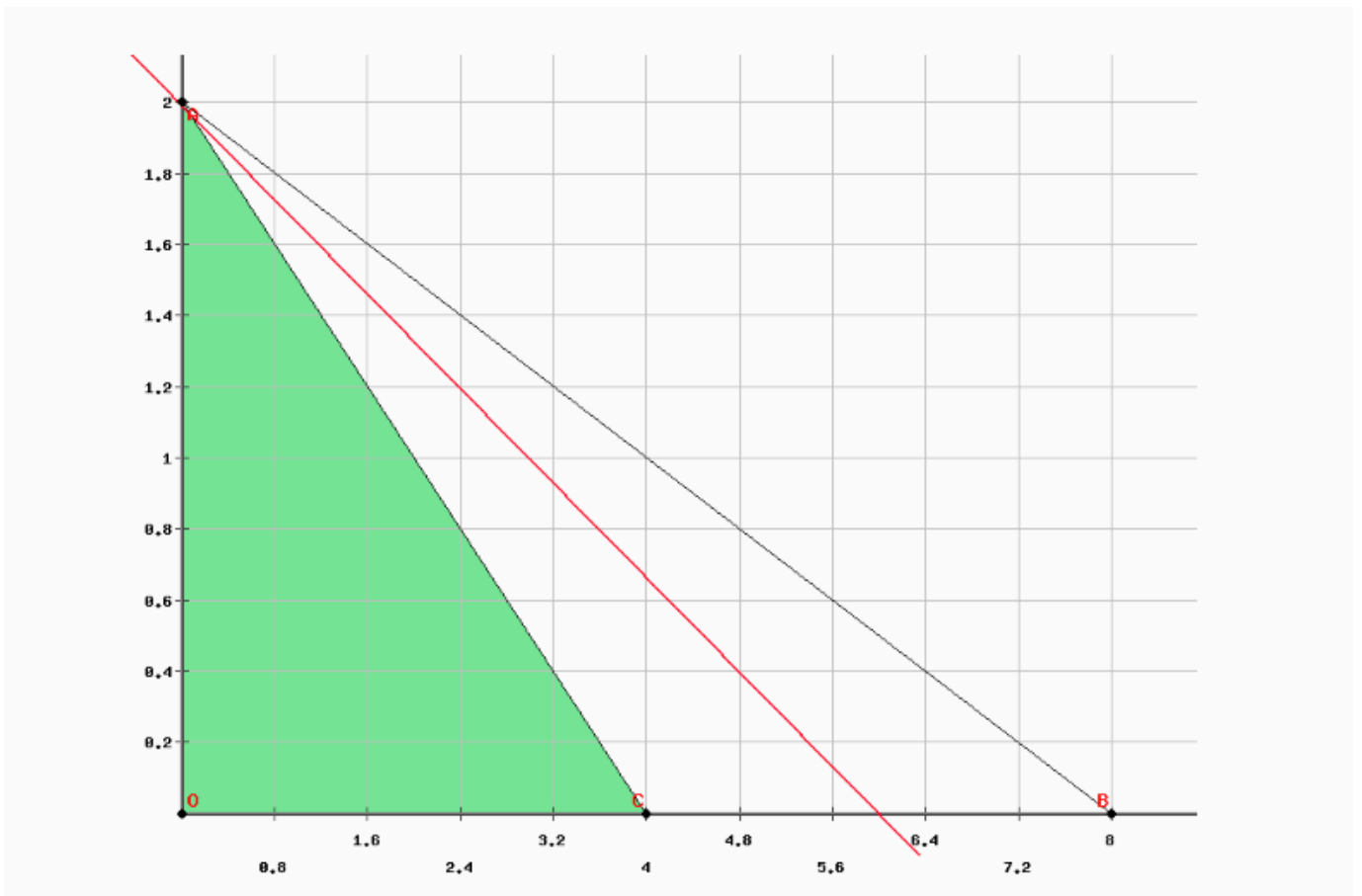
Sujeito a :

$$x_1 + 4x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Temos para este problema a seguinte solução gráfica:



Podemos observar que 3 retas passam pelo ponto da solução ótima, (ponto A). Como esse é um problema de duas variáveis(bidimensional)o ponto está super determinado e uma das restrições está "sobrando", o que quer dizer que uma das restrições pode ser removida sem afetar a região de soluções viáveis. Portanto, esse problema tem solução ótima degenerada.

Na grande maioria das vezes isso acontece porque algumas das restrições do problema são combinação linear uma das outras, e podem ser escritas como uma só, por isso uma delas pode ser eliminada.

# Capítulo 3

## Resolução pelo simplex

Maximizar  $Z = 3x_1 + 9x_2$

Sujeito a :

$$x_1 + 4x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Maximizar  $Z = 3x_1 + 9x_2 + 0s_1 + 0s_2$

Sujeito a :

$$x_1 + 4x_2 + s_1 = 8$$

$$x_1 + 2x_2 + s_2 = 4$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

Dada as variáveis de folga  $s_1$  e  $s_2$ , as tabelas seguintes dão as iterações simplex do problema.

Tabela 1:

$c_j$	v.b.	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	b	b/a
0	$s_1$	1	4	1	0	8	2
0	$s_2$	1	2	0	1	4	2
	z	0	0	0	0		
	c-z	3	9	0	0		

Linha que entra:  $x_2$

Linha que sai:  $s_1$

Tabela 2:

		3	9	0	0		
$c_j$	v.b.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	b	b/a
9	$x_2$	1/4	1	1/4	0	2	8
0	$s_2$	1/2	0	-1/2	1	0	0
	$z$	9/4	9	9/4	0	18	
	c-z	3/4	0	-9/4	0		

Linha que entra:  $x_1$

Linha que sai:  $s_2$

Tabela 3:

$c_j$	v.b.	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	b
9	$x_2$	0	1	1/2	-1/2	2
3	$x_1$	1	0	-1	2	0
	$z$	3	9	3/2	3/2	18
	c-z	0	0	-3/2	-3/2	

Solução final:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 2$ ,  $s_1 = 0$ ,  $s_2 = 0$ ,  $z = 18$

Na Tabela 1,  $s_1$  e  $s_2$  empatam no critério que determina a variável a variável que sai, o que leva à degeneração na próxima iteração (Tabela 2), já que a variável básica  $s_2$  assume valor igual a zero. A solução ótima é alcançada em uma iteração adicional.

A degeneração tem duas implicações. A primeira é a ciclagem ou retorno cíclico. Examinando as iterações 1 e 2 do simplex (Tabelas 2 e 3), o valor da função objetivo não melhora ( $z = 18$ ). Assim, é possível que o método o método simplex entre em um sequência de iterações sem nunca melhorar o valor da função objetivo e nunca satisfazer a condição de otimalidade. Embora haja métodos para eliminar a ciclagem, eles resultam em uma drástica redução na velocidade dos cálculos. Por essa razão, grande parte dos códigos em PL não inclui provisões para ciclagem, além de sua ocorrência se rara na prática. O segundo ponto teórico sugere no exame das iterações 1 e 2 (Tabelas 2 e 3). Ambas as iterações, embora diferentes na categorização de suas variáveis como básicas e não básicas, resultam em valores idênticos para o valor da função objetivo, ou seja

$$x_1 = 0, x_2 = 2, s_1 = 0, s_2 = 0, z = 18$$

No entanto, os cálculos não podem ser interrompidos na iteração 1 (Tabela 2), quando a degeneração aparece pela primeira vez, pois o problema pode ser temporariamente degenerado.

# Referências Bibliográficas

- [1] UCHOA Eduardo. *Degenerescência, ciclagem e eficiência do Simplex*. 2013. Disponível em:  
<<http://www.logis.uff.br/~uchoa/2s2012/POI-Uchoa-7.pdf>>.
- [2] TAHA Hamdy A. *Pesquisa Operacional*. 8 edition, 2008.

[1] [2]