GEOMETRIA ANALÍTICA

Todas as ideias matemáticas relacionam-se entre si, num dado momento ou em outro, porém o fato é que existe uma relação explícita ou implícita entre elas. Foi dessa forma, que o matemático e filósofo francês René Descartes concebeu a geometria analítica. Como à época álgebra e geometria eram cartas do mesmo baralho, mas tratadas como disjuntas, Descartes se dedicou a união dessas duas áreas do conhecimento matemático, para ele claramente correlacionáveis.

Em seu livro, o discurso do método, publicado em 1637, Descartes mostra que as ciências deveriam ser guiadas pela matemática, isso devido a sua exatidão e possibilidades de experimentação. Foi nesse mesmo livro que René demonstrou o grande campo de aplicabilidades da geometria analítica. Porém, as indicações sobre quem possivelmente seria o patrono da G.A. (Geometria Analítica) não formam um senso comum. Muitos historiadores dão crédito também ao matemático Pierre de Fermat, vistos os seus estudos no campo das equações que representavam curvas no plano. Além disso, outros estudiosos apontam esse conhecimento como advindo, ora dos egípcios, ora dos gregos ou romanos.

Geometria analítica ou geometria de coordenadas ou geometria cartesiana é a área da Matemática responsável pelo estudo das geometrias plana e espacial usando processos algébricos. Por meio da geometria analítica, os conceitos da geometria clássica puderam ser compreendidos de uma forma inteiramente nova, com novos métodos para a demonstração, uso e criação de propriedades ainda não imaginadas.

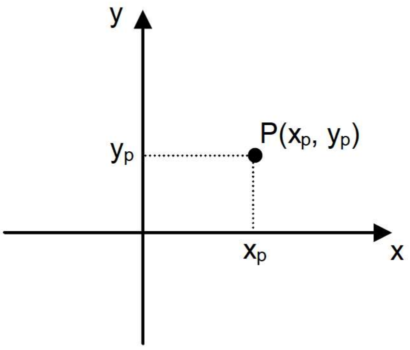
O estudo da geometria analítica no ensino médio é centrado na geometria analítica plana e dividido em: estudo analítico do ponto, estudo analítico da reta, estudo analítico da circunferência, vetores e cônicas. O Enem e o seriado da UPE focam apenas no estudo analítico do ponto, estudo analítico da reta e estudo analítico da circunferência.

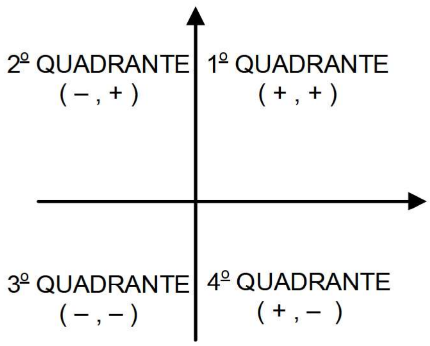
Na geometria analítica, qualquer equação envolvendo coordenadas(x e y) descreve um subconjunto do plano, isto é, o conjunto de soluções para a dada equação, ou o lugar geométrico (locus). Por exemplo, a equação $y = x$ corresponde ao conjunto de todos os pontos no plano cuja coordenada-x é igual à coordenada-y. Estes pontos formam uma linha, portanto, dizemos que $y = x$ representa a equação desta linha. No geral, equações lineares envolvendo x e y descrevem retas, equações quadráticas especificam seções cônicas, e equações mais complicadas resultam em figuras mais complexas.

1 Estudo do Ponto

1) SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS

É uma relação biunívoca entre pares ordenados de números reais e pontos de um plano.



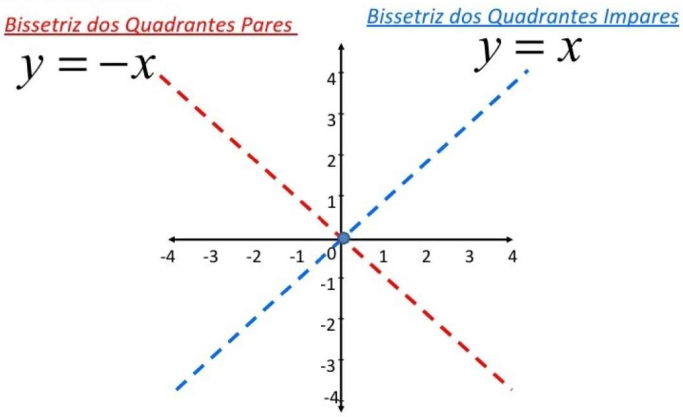


x → EIXO DAS ABSCISSAS

y → EIXO DAS ORDENADAS

$$\begin{cases} (x,0) \in \text{eixo } x \\ (0,y) \in \text{eixo } y \end{cases}$$

Bissetrizes



Questão 01

Determine as coordenadas dos pontos simétricos ao ponto P(3, 2) em relação:

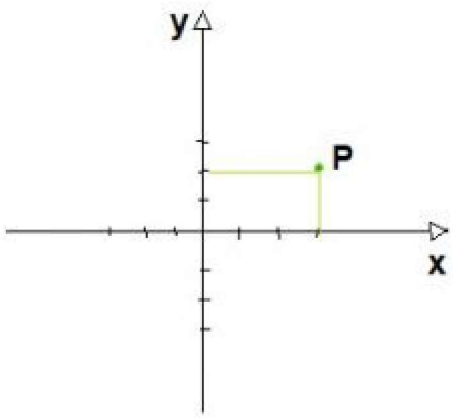
A) ao eixo das abscissas.

B) ao eixo das ordenadas.

C) à origem do sistema cartesiano.

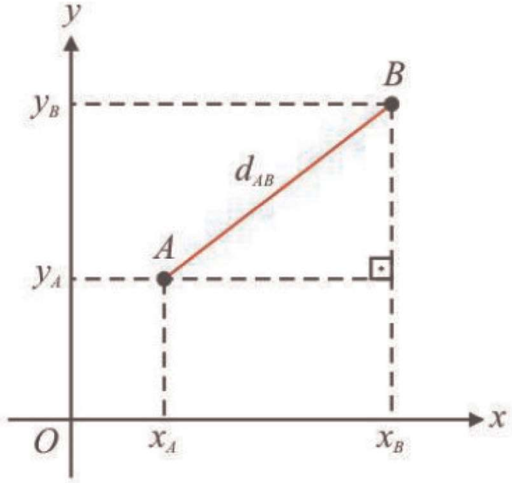
D) à bissetriz dos quadrantes ímpares.

E) à bissetriz dos quadrantes pares.



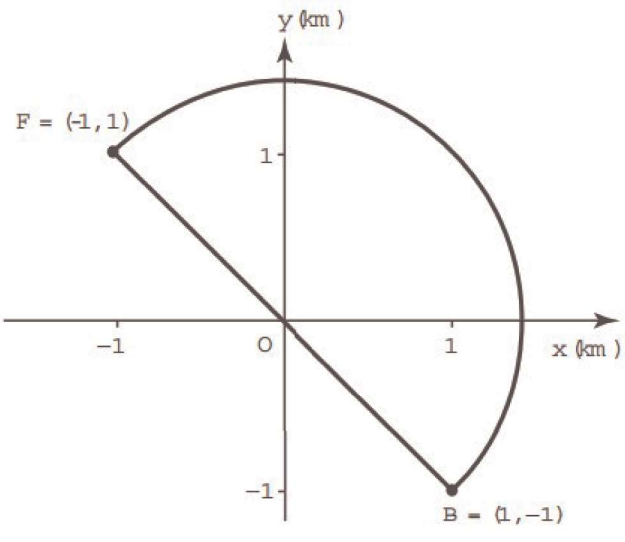
2) DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

No plano cartesiano, sejam os pontos A(x_A; y_A) e B(x_B; y_B). Calculemos a distância entre eles.



Questão 02

(ENEM 2016) Em uma cidade será construída uma galeria subterrânea que receberá uma rede de canos para o transporte de água de uma fonte (F) até o reservatório de um novo bairro (B). Após avaliações, foram apresentados dois projetos para o trajeto de construção da galeria: um segmento de reta que atravessaria outros bairros ou uma semicircunferência que contornaria esses bairros, conforme ilustrado no sistema de coordenadas xOy da figura, em que a unidade de medida nos eixos é o quilômetro.



Estudos de viabilidade técnica mostraram que, pelas características do solo, a construção de 1 m de galeria via segmento de reta demora 1,0 h, enquanto que 1 m de construção de galeria via semicircunferência demora 0,6 h. Há urgência em disponibilizar água para esse bairro.
Use 3 como aproximação para π e 1,4 como aproximação para $\sqrt{2}$.
O menor tempo possível, em hora, para conclusão da construção da galeria, para atender às necessidades de água do bairro, é de

Ⓐ 1260
Ⓑ 2520
Ⓒ 2800
Ⓓ 3600
Ⓔ 4000

Questão 03

(ENEM 2016) Observou-se que todas as formigas de um formigueiro trabalham de maneira ordeira e organizada. Foi feito um experimento com duas formigas e os resultados obtidos foram esboçados em um plano cartesiano no qual os eixos estão graduados em quilômetros. As duas formigas partiram juntas do ponto O, origem do plano cartesiano xOy. Uma delas caminhou horizontalmente para o lado direito, a uma velocidade de 4 km/h. A outra caminhou verticalmente para cima, à velocidade de 3 km/h. Após 2 horas de movimento, quais as coordenadas cartesianas das posições de cada formiga?

Ⓐ (8;0) e (0;6).
Ⓑ (4;0) e (0;6).
Ⓒ (4;0) e (0;3).
Ⓓ (0;8) e (6;0).
Ⓔ (0;4) e (3;0).

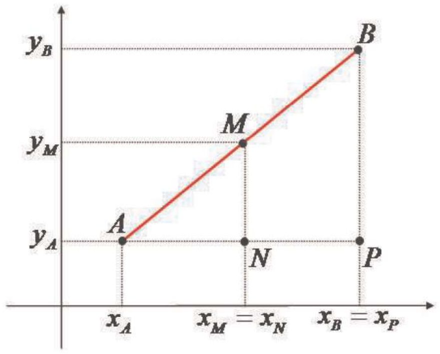
Questão 04

Dados um plano α, uma reta d e um ponto F fora dela, a parábola é o lugar geométrico dos pontos de α equidistantes de d e de F. No plano cartesiano, se F tem coordenadas (5, 7) e d tem equação y = 3, então, a equação da parábola associada ao ponto F e à reta d é

Ⓐ $y = 0{,}25x^2 - 1{,}2x + 8{,}1$
Ⓑ $y = 0{,}125x^2 - 1{,}25x + 8{,}125$
Ⓒ $y = 0{,}25x^2 - 1{,}25x + 8{,}1$
Ⓓ $y = 1{,}25x^2 - 0{,}25x + 8{,}25$
Ⓔ $y = 0{,}225x^2 - 0{,}125x + 8$

3) COORDENADAS DO PONTO MÉDIO

Se $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ são pontos distintos, então o ponto médio $M(x_M; y_M)$ do segmento AB é:

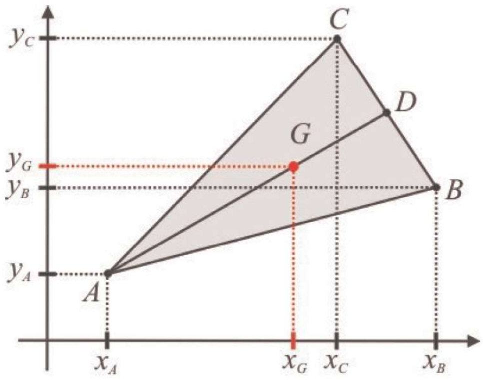


Questão 05

(ENEM 2017) Foi utilizado o plano cartesiano para a representação de um pavimento de lojas. A loja A está localizada no ponto A(1; 2). No ponto médio entre a loja A e a loja B está o sanitário S, localizado no ponto S(5; 10). Determine as coordenadas do ponto de localização da loja B.

Ⓐ (-3, -6)
Ⓑ (-6, -3)
Ⓒ (3, 6)
Ⓓ (9, 18)
Ⓔ (18, 9)

4) COORDENADAS DO BARICENTRO DO TRIÂNGULO



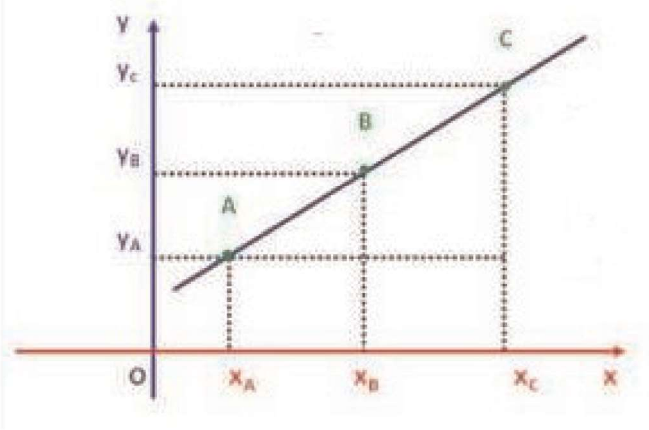
Questão 06

O baricentro de um triângulo ABC é o ponto G(3,-1). Sabendo que dois de seus vértices são os pontos A(2,6) e B(5, 0), podemos afirmar que o vértice C é o ponto

Ⓐ (1, 8)
Ⓑ (2, -9)
Ⓒ (2, 8)
Ⓓ (1, -9)
Ⓔ (-1, -8)

5) CONDIÇÃO DE ALINHAMENTO DE TRÊS PONTOS

Dados três pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, a condição de alinhamento é dada por:



Note que:

$$\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} = \frac{x_C - x_B}{y_C - y_B} \quad \Leftrightarrow \quad D = \begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \\ x_C & y_C \\ x_A & y_A \end{vmatrix} = 0$$

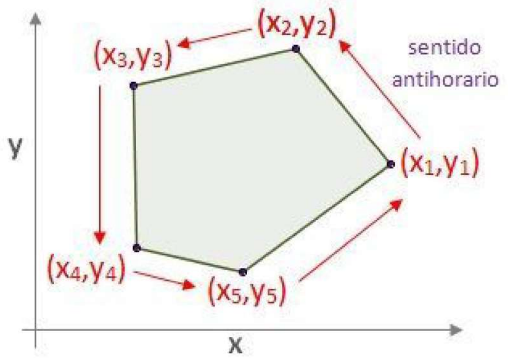
Questão 07

Num plano cartesiano, sabe-se que os pontos A, B(1, 2) e C(2, 3) pertencem a uma mesma reta, e que o ponto A está sobre o eixo Oy. O valor da ordenada de A é

Ⓐ 0
Ⓑ 3
Ⓒ -1
Ⓓ 2
Ⓔ 1

6) ÁREA DE UM POLÍGONO

Dados "n" pontos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$, ..., $P_n(x_n, y_n)$, vértices consecutivos de um polígono, podemos afirmar que a área do polígono formado por esses "n" pontos é dada por:



$$A = \frac{1}{2}|D|, \text{ onde } D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ \dots & \dots \\ x_n & y_n \end{vmatrix}$$

Questão 08

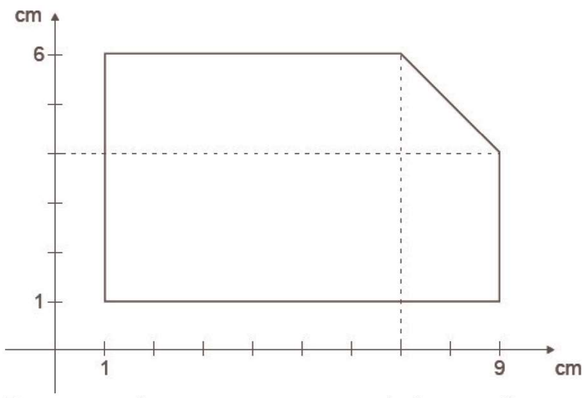
Calcule a área S do triângulo de vértices A(5, 7), B(2, 3) e C(9, 2). Considerando o plano cartesiano, temos:

Ⓐ 7,8
Ⓑ 15,5
Ⓒ 16,6
Ⓓ 31
Ⓔ 60,5

Exercícios Propostos

Questão 01

(ENEM 2014) Um construtor pretende murar um terreno e, para isso, precisa calcular o seu perímetro. O terreno está representado no plano cartesiano, conforme a figura, no qual foi usada a escala 1 : 500. Use 2,8 como aproximação para $\sqrt{8}$.



De acordo com essas informações, o perímetro do terreno, em metros, é

Ⓐ 110
Ⓑ 120
Ⓒ 124
Ⓓ 130
Ⓔ 144

Questão 02

A palavra "perímetro" vem da combinação de dois elementos gregos: o primeiro, perí, significa "em torno de", e o segundo, metron, significa "medida". O perímetro do trapézio cujos vértices têm coordenadas (-1, 0), (9, 0), (8, 5) e (1, 5) é:

Ⓐ $10 + \sqrt{29} + \sqrt{26}$
Ⓑ $16 + \sqrt{29} + \sqrt{26}$
Ⓒ $22 +$
Ⓓ $17 + 2\sqrt{26}$
Ⓔ $17 + \sqrt{29} + \sqrt{26}$

Questão 03

O triângulo ABC formado pelos vértices A(7, 3), B(-4, 3) e C(-4, 2) é

Ⓐ escaleno
Ⓑ isósceles
Ⓒ equiângulo
Ⓓ obtusângulo
Ⓔ acutângulo

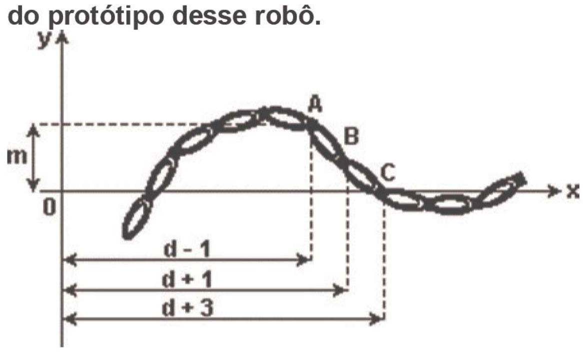
Questão 04

Sejam A(-3, 3), B(3, 1), C(5, -3) e D(-1, -2) vértices de um quadrilátero convexo. A medida de uma de suas diagonais é

Ⓐ 15
Ⓑ 13
Ⓒ 12
Ⓓ 10
Ⓔ 9

Questão 05

"Cientistas europeus, baseados na forma de locomoção de anelídeos, desenvolveram um robô para engatinhar através do intestino humano. Esse robô será útil para médicos diagnosticarem, por meio de micro câmeras, doenças e infecções."
Na figura abaixo, é apresentado um esquema do protótipo desse robô.



Quais devem ser as coordenadas do ponto B, de modo que os pontos A, B e C sejam colineares?

Ⓐ $\left(\dfrac{d+2}{2}, \dfrac{m}{3}\right)$
Ⓑ $\left(\dfrac{d+2}{2}, \dfrac{m}{2}\right)$
Ⓒ $\left(d+1, \dfrac{m}{3}\right)$
Ⓓ $\left(d+1, \dfrac{m}{2}\right)$
Ⓔ $\left(d+1, \dfrac{m}{4}\right)$

Questão 06

(UPE SSA 3 2018 2019) Os pontos (3,2), (5,2) e (3,6) são vértices de um triângulo retângulo. Quais são os valores das medidas da hipotenusa e da área desse triângulo nessa ordem?

Ⓐ 2 e $2\sqrt{2}$
Ⓑ 2 e $2\sqrt{3}$
Ⓒ $2\sqrt{5}$ e 4
Ⓓ $\sqrt{5}$ e 2
Ⓔ 5 e $5\sqrt{3}$

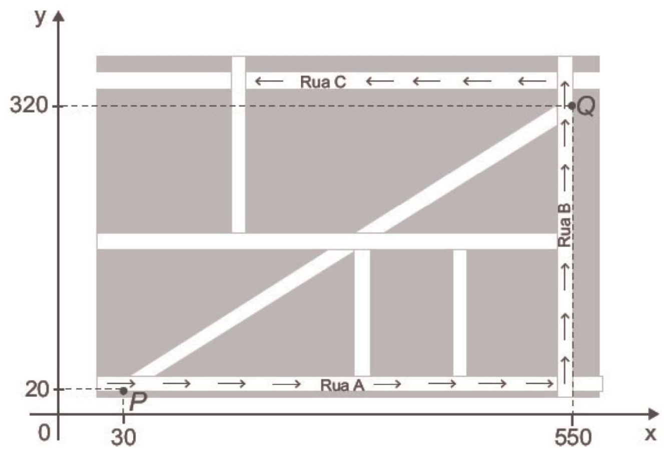
Questão 07

(UPE SSA 3 2017 2018) Qual é a medida da área e do perímetro do losango cujos vértices são A(2,3); B(1,0); C(0,3) e D(1,6)?

Ⓐ Área = 6 e perímetro = 12,8
Ⓑ Área = 6 e perímetro = 10,4
Ⓒ Área = 12 e perímetro = 22,3
Ⓓ Área = 12 e perímetro = 25,9
Ⓔ Área = 18 e perímetro = 27,1

Questão 08

(ENEM 2015) Devido ao aumento do fluxo de passageiros, uma empresa de transporte coletivo urbano está fazendo estudos para a implantação de um novo ponto de parada em uma determinada rota.

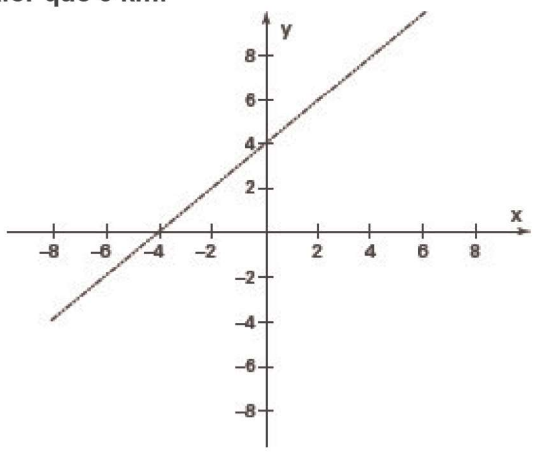


A figura mostra o percurso, indicado pelas setas, realizado por um ônibus nessa rota e a localização de dois de seus atuais pontos de parada, representados por P e Q.
Os estudos indicam que o novo ponto T deverá ser instalado, nesse percurso, entre as paradas já existentes P e Q, de modo que as distâncias percorridas pelo ônibus entre os pontos P e T e entre os pontos T e Q sejam iguais. De acordo com os dados, as coordenadas do novo ponto de parada são

Ⓐ (290 ; 20).
Ⓑ (410 ; 0).
Ⓒ (410 ; 20).
Ⓓ (440 ; 0).
Ⓔ (440 ; 20).

Questão 09

(ENEM 2011) Um bairro de uma cidade foi planejado em uma região plana, com ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho. No plano de coordenadas cartesianas ao lado, esse bairro localiza-se no segundo quadrante, e as distâncias nos eixos são dadas em quilômetros. A reta de equação y = x + 4 representa o planejamento do percurso da linha do metrô subterrâneo que atravessará o bairro e outras regiões da cidade. No ponto P = (–5, 5), localiza-se um hospital público. A comunidade solicitou ao comitê de planejamento que fosse prevista uma estação do metrô de modo que sua distância ao hospital, medida em linha reta, não fosse maior que 5 km.



Atendendo ao pedido da comunidade, o comitê argumentou corretamente que isso seria automaticamente satisfeito, pois já estava prevista a construção de uma estação no ponto

Ⓐ (–5, 0).
Ⓑ (–3, 1).
Ⓒ (–2, 1).
Ⓓ (0, 4).
Ⓔ (2, 6).

Questão 10

Um bairro foi representado em um plano cartesiano onde uma farmácia (F), um supermercado (S) e uma escola (E) são pontos de uma rua retilínea. Determine o valor de k sabendo que as coordenadas dos pontos são F(6, 2k), S(1,5) e E(2,8).

Ⓐ 5
Ⓑ 10
Ⓒ 15
Ⓓ 20
Ⓔ 30

Questão 11

João possui um terreno em forma de um triângulo cuja representação no plano cartesiano possui vértices (1,2), (3,5) e (4,-1), com todas as medidas em km. A área do terreno de João vale, em km^2:

Ⓐ 4,5
Ⓑ 6
Ⓒ 7,5
Ⓓ 9
Ⓔ 5

Questão 12

Um segmento de reta de comprimento 8 movimenta-se no plano mantendo suas extremidades P e Q apoiadas nos eixos 0x e 0y, respectivamente. Entre os pontos do lugar geométrico descrito pelo ponto médio de PQ, o de maior ordenada possui abscissa:

Ⓐ -2
Ⓑ -1
Ⓒ 0
Ⓓ 1
Ⓔ 2

Questão 13

Sabe-se que os pontos A(0; 0), B(1; 4) e C(3; 6) são vértices consecutivos do paralelogramo ABCD. Nessas condições, o comprimento da BD é:

Ⓐ $\sqrt{2}$
Ⓑ $\sqrt{3}$
Ⓒ $2\sqrt{2}$
Ⓓ $\sqrt{5}$
Ⓔ 5

Questão 14

Seja Q (-1, a) um ponto do 3º quadrante. O valor de a, para que a distância do ponto P (a,1) ao ponto Q seja igual a 2, é:

Ⓐ $-1-\sqrt{2}$
Ⓑ $1-\sqrt{2}$
Ⓒ $1+\sqrt{2}$
Ⓓ $-1+\sqrt{2}$
Ⓔ -1

Questão 15

Sabendo que P(a, b), A(0, 3) e B(1, 0) são colineares e P, C(1, 2) e D(0, 1) também são colineares, determine as coordenadas de P.

Ⓐ $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$
Ⓑ $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$
Ⓒ $\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$
Ⓓ $\left(-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$
Ⓔ $\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$

Gabarito:

01. C
02. E
03. A
04. D
05. D
06. C
07. A
08. E
09. B
10. B
11. C
12. C
13. D
14. E
15. A