Parte 2

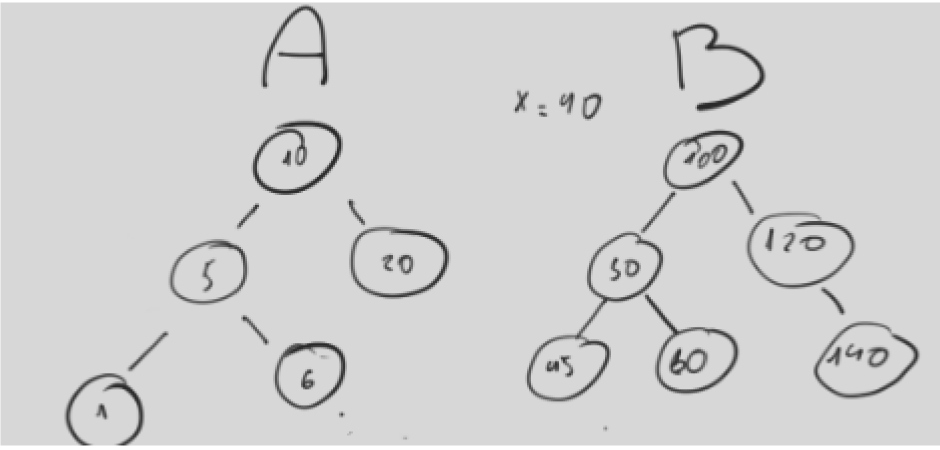
Ejercicio 6:

1. Responder V o F y justificar su respuesta:
    a. F. En un AVL el penúltimo nivel tiene que estar completo
    No necesariamente ya que las alturas de los subárboles izquierdos y derechos pueden diferir en una unidad.
    b. V. Un AVL donde todos los nodos tengan factor de balance 0 es completo
    Esto es verdadero ya que al estar todos los niveles completos, todos los subárboles son de igual altura y por lo tanto la diferencia entre ambos (balance factor) es nula.
    c. F. En la inserción en un AVL, si al actualizarle el factor de balance al padre del nodo insertado éste no se desbalanceó, entonces no hay que seguir verificando hacia arriba porque no hay cambios en los factores de balance.
    Es necesario recorrer el camino desde el nodo insertado hacia la raíz ya que el nodo desbalanceado no es necesariamente el padre del nodo insertado.

    d. V En todo *AVL* existe al menos un nodo con factor de balance 0.
    El último nivel siempre va a tener balance factor=0 para todos los nodos.

Ejercicio 7:

Sean *A* y *B* dos *AVL* de *m* y *n* nodos respectivamente y sea *x* un key cualquiera de forma tal que para todo key $a \in A$ y para todo key $b \in B$ se cumple que $a < x < b$. Plantear un algoritmo $O(\log n + \log m)$ que devuelva un *AVL* que contenga los key de *A*, el key *x* y los key de *B*.



Primero se debe calcular la altura de A y la altura de B, comparamos ambas y elegimos la de mayor valor. Supongamos que es el árbol A, entonces calculamos un bh= altura de A - altura de B, este sería el nivel del árbol B. En el nodo derecho de A correspondiente al nivel bh, vamos a insertar el nodo X como padre de éste, y la raíz de B como hijo izquierdo de X. Al ser ambos subárboles de misma altura el balance factor de X será 0 y el desbalance que genere X será a lo sumo de -2, y esto se puede arreglar con simples rotaciones.

Ejercicio 8:

Considere una rama truncada en un AVL como un camino simple desde la raíz hacia un nodo que tenga una referencia None (que le falte algún hijo). Demuestre que la mínima longitud (cantidad de aristas) que puede tener una rama truncada en un AVL de altura h es h/2 (tomando la parte entera por abajo).

Cualquier camino desde la raíz hasta un nodo que no esté completo puede ser una rama truncada según la definición del ejercicio. Dicho nodo puede no ser necesariamente un nodo hoja.

1. En un AVL, la altura de un subárbol izquierdo y un subárbol derecho de cualquier nodo difiere en como máximo 1.
2. En un árbol AVL de altura h, la mínima cantidad de nodos que puede tener es 2^(h-1) y la máxima cantidad de nodos que puede tener es 2^h - 1.

Ahora, consideremos una rama truncada en un AVL de altura h. Supongamos que esta rama truncada tiene la mínima longitud posible. Denotemos L como la longitud de esta rama.

La rama truncada puede comenzar en la raíz y terminar en un nodo hoja, o puede comenzar en algún nodo interno y terminar en un nodo hoja.

1. Si la rama truncada comienza en la raíz y termina en un nodo hoja, entonces la longitud de esta rama será igual a la altura del árbol. Por lo tanto, L = h.
2. Si la rama truncada comienza en un nodo interno y termina en un nodo hoja, entonces la longitud de esta rama será menor que la altura total del árbol.

- Supongamos que la rama truncada comienza en un nodo interno en algún nivel i (donde i < h).
- Como la rama es truncada, uno de los hijos de este nodo interno debe ser None.
- Dado que este nodo interno no es una hoja, debe tener al menos un hijo no None.
- El hijo no None debe estar en un nivel inferior al nivel i para cumplir con la definición de un AVL.
- Por lo tanto, la rama truncada puede continuar sólo por uno de los subárboles del hijo no None.
- Esto implica que la longitud de la rama truncada será menor que la altura total del árbol.

Ahora, consideremos la altura de este subárbol. Dado que el árbol es AVL, la diferencia de altura entre los subárboles izquierdo y derecho de cualquier nodo no debe ser mayor que 1. Por lo tanto, la altura de este subárbol debe ser al menos (h - i - 1).

Por lo tanto, la longitud mínima de una rama truncada que comienza en un nodo interno en algún nivel i (con i < h) y termina en un nodo hoja es (h - i - 1) + 1 = h - i.

La longitud mínima posible de una rama truncada en un AVL de altura h ocurre cuando la rama truncada comienza en un nodo interno en el nivel más bajo posible (nivel h/2, tomando la parte entera por abajo) y termina en un nodo hoja. En este caso, la longitud mínima será h - h/2 = h/2.