Apuntes U 1

Tema ***Análisis de Algoritmos***

"Los programadores malos se preocupan por el código.
Los buenos programadores se preocupan por las estructuras de datos y sus relaciones."
Linus Torvalds

Complejidad Algorítmica.

¿De qué hablamos cuando hablamos de complejidad? Resulta evidente que el tiempo real requerido por un computador para la ejecución de algoritmo es directamente proporcional al número de operaciones básicas que el computador debe realizar en su ejecución. Medir por lo tanto el tiempo real de ejecución equivale a medir el número de operaciones elementales realizadas. Desde ahora supondremos que todas las operaciones básicas se ejecutan en una unidad de tiempo. Por esta razón se suele llamar **tiempo de ejecución** no al tiempo real físico, sino al número de operaciones elementales realizadas. Otro de los factores importantes, en ocasiones decisivo, para comparar algoritmos es la cantidad de memoria del computador requerida para almacenar los datos durante el proceso. La cantidad de memoria utilizada durante el proceso se suele llamar **espacio** requerido por el algoritmo.
Al no ser única la manera de representar un algoritmo mediante un programa, y al no ser único el computador en el cual se ejecutará, resulta que la medida del tiempo será variable dependiendo fundamentalmente de los siguientes factores:

1) El lenguaje de programación elegido
2) El programa que representa
3) El computador que lo ejecuta

Por eso surge la necesidad de medir el tiempo requerido por un algoritmo independientemente de su representación y del computador que lo ejecute.

El análisis de algoritmos se encarga del estudio del tiempo y espacio requerido por un algoritmo para su ejecución. Ambos parámetros pueden ser estudiados con respecto al peor caso (también conocido como caso general) o respecto al caso probabilístico (o caso esperado).

En Ciencias de la Computación, el término **eficiencia algorítmica** es usado para describir aquellas propiedades de los algoritmos que están relacionadas con la cantidad de recursos utilizados por el algoritmo. Un algoritmo debe ser analizado para determinar el uso de los recursos que realiza. La eficiencia algorítmica puede ser vista como análogo a la ingeniería de productividad de un proceso repetitivo o continuo.
Con el objetivo de lograr una eficiencia máxima se quiere minimizar el uso de recursos. Sin embargo, varias medidas (complejidad temporal, complejidad espacial) no pueden ser comparadas directamente, luego, cual de dos algoritmos es considerado más eficiente, depende de cual medida de eficiencia se está considerando como prioridad; por ejemplo, la prioridad podría ser obtener la salida del algoritmo lo más rápido posible, o que minimice el uso de la memoria, o alguna otra medida particular.

Una diferencia significativa entre el **análisis de complejidad de algoritmos** y la **teoría de la complejidad computacional**, es que el primero se dedica a determinar la cantidad de recursos requeridos por un algoritmo en particular para resolver un problema, mientras que la segunda, analiza todos los posibles algoritmos que pudieran ser usados para resolver el mismo problema.

La importancia de la eficiencia con respecto a la complejidad temporal fue enfatizada por Ada Lovelace en 1843 como resultado de su trabajo con el motor analítico mecánico de Charles Babbage:

"En casi todo cómputo son posibles una gran variedad de configuraciones para la sucesión de un proceso, y varias consideraciones pueden influir en la selección de estas según el propósito de un motor de cálculos. Un objetivo esencial es escoger la configuración que tienda a minimizar el tiempo necesario para completar el cálculo."


Augusta Ada King, Condesa de Lovelace

Existen muchas maneras para medir la cantidad de recursos utilizados por un algoritmo: las dos medidas más comunes son la complejidad temporal y espacial; otras medidas a tener en cuenta podrían ser la velocidad de transmisión, uso temporal del disco duro, así como uso del mismo a largo plazo, consumo de energía, tiempo de respuesta ante los cambios externos, etc. Muchas de estas medidas dependen del tamaño de la entrada del algoritmo (Ej. la cantidad de datos a ser procesados); además podrían depender de la forma en que los datos están organizados (Ej. algoritmos de ordenación necesitan hacer muy poco en datos que ya están ordenados o que están ordenados de forma inversa).

En la práctica existen otros factores que pueden afectar la eficiencia de un algoritmo, tales como la necesidad de cierta precisión y/o veracidad. La forma en que un algoritmo es implementado también puede tener un efecto de peso en su eficiencia, muchos de los aspectos asociados a la implementación se vinculan a problemas de optimización.

La Teoría de la computabilidad:

Es la parte de la computación que estudia los problemas de decisión que pueden ser resueltos con un algoritmo o equivalentemente con la llamada máquina de Turing. La teoría de la computabilidad se interesa por cuatro preguntas:

¿Qué problemas puede resolver una máquina de Turing?
¿Qué otros formalismos equivalen a las máquinas de Turing?
¿Qué problemas requieren máquinas más poderosas?
¿Qué problemas requieren máquinas menos poderosas?

La teoría de la complejidad computacional clasifica las funciones computables según el uso que hacen de diversos recursos en diversos tipos de máquina.

Orden de complejidad.

Podemos decir que: **"el tiempo de ejecución del algoritmo es proporcional a una de las siguientes funciones y además cada jerarquía de orden superior tiene a las inferiores como subconjuntos."**

1- Algoritmos Polinomiales

N : tiempo de ejecución lineal, el tiempo es directamente proporcional a la cantidad de datos, ej. si N vale 100 tardara el doble que uno donde N vale 50.

logN : complejidad logarítmica, esto puede suceder en algoritmos con iteración o recursión no estructural, ejemplo: búsquedas binarias.

N-logN : complejidad cuasi-lineal, el tiempo de ejecución es N LogN. Si N se duplica, el tiempo de ejecución es ligeramente mayor del doble, un ejemplo es el quicksort.

$\mathbf{N^2}$: Complejidad cuadrática. Suele ser habitual cuando se tratan pares de elementos de datos, como por ejemplo un bucle anidado doble. Si N se duplica, el tiempo de ejecución aumenta cuatro veces.

$\mathbf{N^3}$: Complejidad cúbica. Como ejemplo se puede dar el de un bucle anidado triple. Si N se duplica, el tiempo de ejecución se multiplica por ocho.

$\mathbf{N^j}$: Complejidad polinómica (j>3). Al crecer la complejidad del programa es bastante mala.

2- Algoritmo Exponencial

$\mathbf{2^N}$: Complejidad exponencial. No suelen ser muy útiles en la práctica por el elevadísimo tiempo de ejecución. Se dan en sub- programas recursivos con dos o más llamadas interna

Ejecución de algoritmos y análisis asintótico.

El **Principio de Invarianza** nos permite deducir que no existe una unidad que se deba utilizar para expresar la eficiencia teórica de un algoritmo.
En su lugar, expresaremos solamente el tiempo requerido por el algoritmo, salvo una constante multiplicativa.
Por este principio, todas las implementaciones de un mismo algoritmo tienen las mismas características, aunque la constante multiplicativa pueda cambiar de una implementación a otra.

¿Cómo medimos el tiempo de ejecución de un algoritmo?:

- Por medio de un elemento físico (ej. Reloj)
- Considerando las instrucciones a ejecutar y afectándolas por el tiempo de ejecución de cada una.

Ahora bien, como cada programa puede contener diferentes sentencias condicionales, esto quiere decir que la dependencia del tiempo estará dada por las condiciones que indiquen los datos ingresados. Por lo que entendemos que según esas condiciones, con alguna combinación de datos tendremos el tiempo mínimo de ejecución, Tmin (N) y por otro lado tendremos que otra combinación de datos dando por resultado el tiempo máximo de ejecución, Tmax (N)
De lo cual identificamos que:

- Tmin(N) es el mejor caso que podríamos obtener.
- Tmax (N) es el peor caso que obtendríamos.

Ahora bien, existirán una serie mayoritaria de casos que estarán entre ambos extremos, definiendo un valor promedio o más frecuente.
Tmin(N) <= T(N) <= Tmax (N)

Además de los parámetros anteriores, también podemos ver que existen algunos factores "externos", como ser:

- Calidad del código que genera el compilador.
- Velocidad de ejecución del procesador

Si consideramos que es muy sencillo el cambio de compilador y que prácticamente la velocidad de procesamiento se duplica año a año *(Ley de Moore, que todo el mundo predice su fin)*; debemos realizar nuestro análisis independizándonos de estos factores.
Otro factor es que en aquellos problemas chicos, el impacto de su tiempo de ejecución no es un factor crítico de los mismos.

El análisis de la eficiencia algorítmica nos lleva a estudiar el comportamiento de los algoritmos frente a condiciones extremas. Matemáticamente hablando, cuando **N tiende al infinito ∞,** es un comportamiento asintótico.

¿Cuál es Mejor?

La idea principal del análisis asintótico en informática es la de comparar funciones reales de variable natural *f:* **N**->**R**, para poder decir cuál tiene mejor comportamiento asintótico, es decir, cuál es menor cuando la variable independiente es suficientemente grande.
Si sabemos hacer esto con dos funciones, se podrá utilizar el resultado para comparar las funciones tiempo de los algoritmos y así determinar cuál de ellos tiene mejor comportamiento asintótico.
Relaciones de Dominación:

Si ***f*** y ***g*** son dos funciones de **N** en **R**, es decir *f:* **N**->**R** y *g:* **N**->**R** , se dice que ***g*** domina asintóticamente a ***f*** (o simplemente que ***g*** domina a ***f***) si existen $k \geq 0$ y $m \geq 0$ donde $k, m \in Z$ tales que para todo entero $n \geq m$ se verifica la desigualdad $|f(n)| \leq k|g(n)|$

Si ***g*** domina a ***f*** y $g(n) \neq 0$, entonces $\left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| \leq k$ para casi todos los enteros ***n***, es decir, para todos, salvo una cantidad finita. En concreto, para todos los valores $n \geq m$ se verifica dicha desigualdad.

Teorema

La relación de dominación **<** definida por ***f < g*** sii ***g*** domina a ***f***, es una relación reflexiva y transitiva. Esto indica que dicha relación no es simétrica, es decir, si ***g*** domina a ***f***, no necesariamente ***f*** domina a ***g***.

f ≡ g sii ***f*** domina a *g* y *g* domina a *f*
[f] es la clase de equivalencia de ***f***

Analizando el Tiempo de Ejecución

Imaginemos problema de procesamiento de cálculo computacional científico, para el que se decide pedir a 4 equipos que diseñen e implementen un algoritmo de cálculo.
El primer equipo implementa un algoritmo de complejidad temporal **N**, el segundo **N^2**,el tercero **N^3** y el cuarto **2^n**.
Para evaluar los algoritmos se los somete a un N=10, 20, 30, 40, 50 y 60 (Tamaño de entradas)

Obteniendo el siguiente cuadro:

	10	20	30	40	50	60
N	0,00001	0,00002	0,00003	0,00004	0,00005	0,00006
N^2	0,0001	0,0004	0,0009	0,0016	0,0025	0,0036
N^3	0,001	0,008	0,027	0,064	0,125	0,216
2^n	0,001	1,0	17,90min	12,7dias	35,7años	366 sig

Saque sus propias conclusiones acerca de la problemática de la complejidad

Conceptos a tener en cuenta

- Un programa que se va a ejecutar muy pocas veces, hace que nuestro foco debe estar en la codificación y depuración del algoritmo, donde la complejidad no es el factor crítico a considerar.
- Un programa que se utilizara por mucho tiempo, seguramente será mantenido por varias personas en el curso de su vida útil, esto hace que los factores que debemos considerar

son los que se relacionan con su legibilidad, incluso si la mejora de ella impacta en la complejidad de los algoritmos empleados.

• Un programa que únicamente va a trabajar con datos pequeños (valores bajos de N), el orden de complejidad del algoritmo que usemos suele ser irrelevante, pudiendo llegar a ser incluso contraproducente.

• Un programa de baja complejidad en cuanto a tiempo de ejecución, suele demandar un alto consumo de memoria; y viceversa. Esto es una situación que debemos evaluar y entender como impactan ambos factores.

• Un programa orientado al cálculo numérico hace que debamos tener en cuenta más factores que su complejidad o incluso su tiempo de ejecución; en estos casos debemos considerar la precisión del cálculo, el máximo error introducido en cálculos intermedios, la estabilidad del algoritmo, etc.

Cálculo de complejidad

Loa algoritmos bien estructurados combinan las sentencias de alguna de las formas siguientes:

1. sentencias sencillas
2. secuencia (;)
3. decisión (if)
4. bucles
5. llamadas a procedimientos

Sentencias sencillas

Son las indicadas al principio de esta unidad, como ser, entre otras:

• Sentencias de asignación
• Entrada/salida

Las mismas, siempre y cuando no trabajen sobre variables estructuradas cuyo tamaño esté relacionado con el tamaño N del problema.

La inmensa mayoría de las sentencias de un algoritmo requieren un tiempo constante de ejecución, siendo su complejidad O(1).

Secuencia

La complejidad de una serie de elementos de un programa es del orden de la suma de las complejidades individuales.

Decisión (si)

La condición suele ser de O(1), complejidad a sumar con la peor posible, bien en la rama ENTONCES, o bien en la rama SINO

En decisiones múltiples (SINO SI, SELECCIONAR), se tomará la peor de las ramas.

Bucles

En los bucles con contador explícito, podemos distinguir dos casos:

• Que el tamaño N forme parte de los límites

• Que el tamaño N no forme parte de los límites.
Si el bucle se realiza un número fijo de veces, independiente de N, entonces la repetición sólo introduce una constante multiplicativa que puede absorberse.

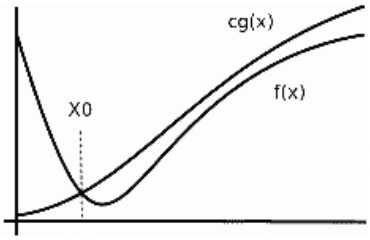
Llamadas a procedimientos
Su complejidad depende del contenido del procedimiento. Por ejemplo, el cálculo de la complejidad asociada a un procedimiento puede complicarse notablemente si se trata de procedimientos recursivos.
El costo de llamar no es sino una constante que podemos obviar inmediatamente dentro de nuestros análisis asintóticos.

Notación de Landau

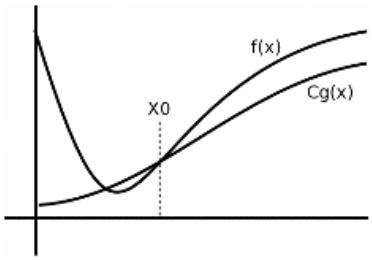

Edmund Georg Hermann Landau

En matemática, la Notación de **Landau**, también llamada "o minúscula" y "O mayúscula", es una notación para la comparación asintótica de funciones, lo que permite establecer la **cota inferior asintótica**, la **cota superior asintótica** y la **cota ajustada asintótica**.

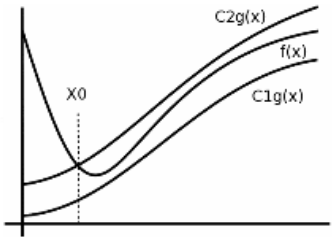
Una familia de funciones que comparten el mismo comportamiento asintótico será llamada un **Orden de complejidad.**



Cota superior asintótica



Cota inferior asintótica



Cota ajustada asintótica

• *Se adopta una notación especial llamada **O-grande** (big-Oh), por ejemplo **O(F(N))** para indicar que la cota superior del algoritmo es **F(N)**.*

• *En términos precisos, si **T(N)** representa el tiempo de ejecución de un algoritmo, y **F(N)** es alguna expresión para su cota superior, **T(N)** está en el conjunto **O(F(N))**, si existen dos constantes positivas* c *y* N_0 *tales que* $T(N) \leq c|F(N)|$ *para todo .*

• *El sólo saber que algo es **O(F(N)),** sólo nos dice que tan mal se pueden poner las cosas. Quizás la situación no es tan mala. De la definición podemos ver que si **T(N)** está en **O(N)**, también está en **O(N2)** y **O(N3)**, etc. (Por lo cual se trata en general de definir la mínima cota superior).*

La notación O, afirma que existe un punto N_0 tal que para todos los valores de N después de este punto, $T(N)$ está acotada por algún múltiplo de $F(N)$. Con el N lo suficientemente grande.

Por lo tanto, si el tiempo de ejecución $T(N)$ de un algoritmo es de $O(N^2)$, entonces **ignorando las constantes**, podemos garantizar que a partir de un punto se puede acotar el tiempo de ejecución mediante una función cuadrática.

Ejemplo: Consideremos el algoritmo de búsqueda secuencial para encontrar un valor especificado en un arreglo. Si el visitar y comparar contra un valor en el arreglo, requiere c_s pasos, entonces en el caso promedio $T(n) = c_s n/2$. Para todos los valores n>1 |cs n/2| ≤ cs|n|. Por lo tanto, por definición, T(n) está en O(n) para n0=1, y c=cs.

Existe una **notación** similar para indicar la mínima cantidad de recursos que un algoritmo necesita para alguna clase de entrada. La **cota inferior de un algoritmo**, denotada por el símbolo Ω, pronunciado "**Gran Omega**" u "**Omega**", tiene la siguiente definición:

• *T(n)* está en el conjunto *Ω(g(n))*, si existen dos constantes positivas *c* y *n0* tales que *|T(n)| ≥ c|g(n)|* para todo *n > n0*.

• Ejemplo: Si *T(n)=c1n2+c2n* para *c1* y *c2* > 0, entonces:
|c1n2+c2n| ≥ |c1 n2| ≥ c1|n2|
Por lo tanto, *T(n)* está en *Ω(n2)*.

Notación O grande (Big O)

Def. Sean f y g dos funciones no negativas sobre los enteros positivos.
Escribimos:

$$f(n)=O(g(n)) \text{ para toda } n \geq n_0$$

y decimos que $f(n)$ es de orden "a lo más" u orden
big O de $g(n)$ si existen constantes $c > o$ y n_o tales que:

$$f(n) \leq cg(n) \text{ para toda } n \geq n_0$$

La notación O, afirma que existe un punto N_0 tal que para todos los valores de N después de este punto, $T(N)$ está acotada por algún múltiplo de $F(N)$. Con el N lo suficientemente grande.
Por lo tanto, si el tiempo de ejecución $T(N)$ de un algoritmo es de $O(N^2)$, entonces **ignorando las constantes**, podemos garantizar que a partir de un punto se puede acotar el tiempo de ejecución mediante una función cuadrática.

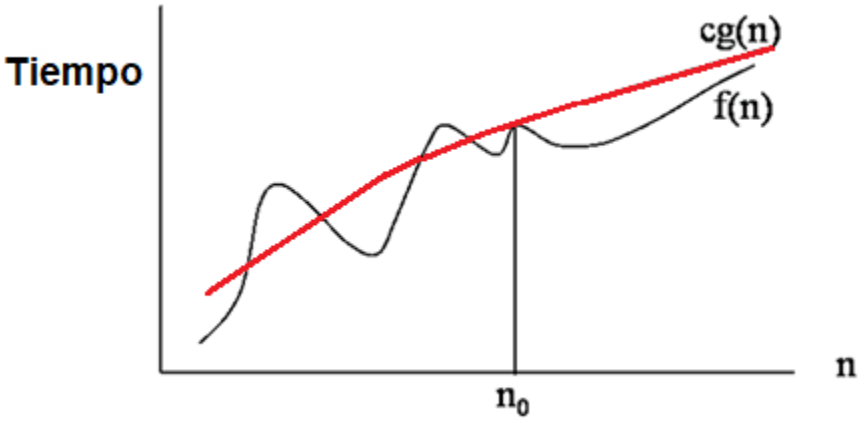
Ejemplo: Consideremos el algoritmo de búsqueda secuencial para encontrar un valor especificado en un arreglo. Si el visitar y comparar contra un valor en el arreglo, requiere c_s pasos, entonces en el caso promedio $T(n) = c_s n/2$. Para todos los valores n>1 |cs n/2| ≤ cs|n|. Por lo tanto, por definición, T(n) está en O(n) para n0=1, y c=cs.

- *Se adopta una notación especial llamada **O-grande** (big-O), por ejemplo **O(f(n))** para indicar que la cota superior del algoritmo es **f(n)**.*

- *En términos precisos, si **T(n)** representa el tiempo de ejecución de un algoritmo, y **f(n)** es alguna expresión para su cota superior, **T(n)** está en el conjunto **O(f(n))**, si existen dos constantes positivas c y n_0 tales que $T(n) \leq c|f(n)|$ para todo $n \geq n_0$.*

- *El sólo saber que algo es **O(f(n))**, sólo nos dice que tan mal se pueden poner las cosas. Quizás la situación no es tan mala. De la definición podemos ver que si **T(n)** está en **O(n)**, también está en **O(n2)** y **O(n3)**, etc. (Por lo cual se trata en general de definir la mínima cota superior).*

Decir que f(n) es de orden O(g(n)), significa:



Con otras palabras:

Def. Decimos que

$$f(n) \leq cg(n) \text{ para toda n} \geq n_0$$

Si y solo si,

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \left(\frac{f(n)}{g(n)}\right) = c$$

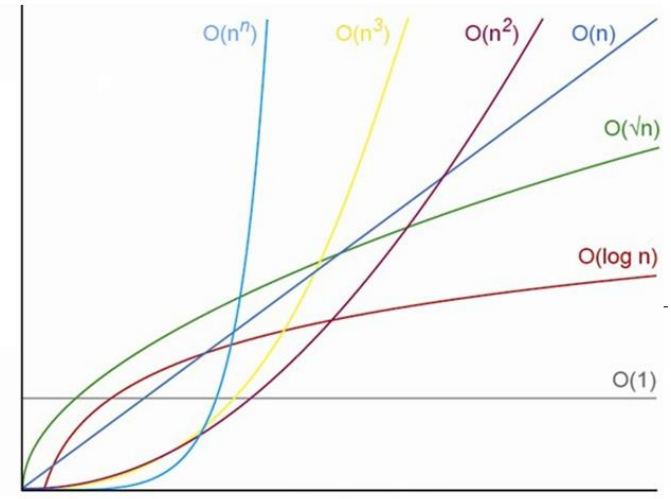
Ordenes de complejidad algorítmica usuales

O(**1**): Complejidad constante. Cuando las instrucciones se ejecutan una vez.

O(**log n**): Complejidad logarítmica. Esta suele aparecer en determinados algoritmos con iteración o recursión no estructural, ejemplo la búsqueda binaria.

O(**n**): Complejidad lineal. Es una complejidad buena y también muy usual. Aparece en la evaluación de bucles simples siempre que la complejidad de las instrucciones interiores sea constante.

O(**n log n**): Complejidad cuasi-lineal. Se encuentra en algoritmos de tipo divide y vencerás como por ejemplo en el método de ordenación quicksort y se considera una buena complejidad. Si n se duplica, el tiempo de ejecución es ligeramente mayor del doble.



O(**n^2**): Complejidad cuadrática. Aparece en bucles o ciclos doblemente anidados. Si n se duplica, el tiempo de ejecución aumenta cuatro veces. O(n^3): Complejidad cúbica. Suele darse en bucles con triple anidación. Si n se duplica, el tiempo de ejecución se multiplica por ocho. Para un valor grande de n empieza a crecer dramáticamente.

O(n^p): Complejidad polinómica (a > 3). Si a crece, la complejidad del programa es bastante mala.
O(c^n): Complejidad exponencial. No suelen ser muy útiles en la práctica por el elevadísimo tiempo de ejecución. Se dan en subprogramas recursivos que contengan dos o más llamadas internas.

Clasificación

Clasificación por su Naturaleza

Los problemas de naturaleza algorítmica que no admiten solución por algoritmo son llamados no - computables.
Los problemas de decisión y no-computables son llamados de indecidíbles.
Los problemas para los cuales existen algoritmos de complejidad polinomial para resolverlos son llamados de tratables.
Los problemas que admiten solución y para los cuales comprobadamente no pueden ser resueltos por algoritmos de complejidad polinomial son rotulados de intratables.

Clasificación por el tipo de Respuesta

Problemas de Decisión: Su bbjetivo es responder SI o NO a una determinada indagación

Problemas de Localización: Su objetivo es encontrar, caso exista, una estructura que verifique las restricciones del problema, dicha estructura es denominada de solución viable .

Problemas de Optimización: Su objetivo es encontrar una estructura que verifique las restricciones del problema y optimice un criterio pre del problema y optimice un criterio pre-definido. Esto es, definido. Esto es, encontrar una solución viable que optimice un criterio pre encontrar una solución viable que optimice un criterio predeterminadoexponencial.

Clasificación por su Tratabilidad

La Clase P (Polynomial-time): Está constituida por todos los problemas comprobadamente tratables, esto es, problemas que pueden ser resueltos por algoritmos de complejidad polinomial. O dicho de otra forma, son problemas resolubles en tiempo polinómico con una máquina de Turing determinística.
P es conocido por contener muchos problemas naturales, incluyendo las versiones de decisión de programa lineal, cálculo del máximo común divisor, y encontrar una correspondencia máxima.
¿Se pueden resolver todos los problemas en tiempo polinomial?
– **No**. Existen muchos problemas que no se pueden resolver, no importa el tiempo involucrado

Ej:

- Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales
- Contabilidad (registrar y/o modificar transacciones)
- Ordenar números, buscar palabras en un texto
- Juntar Archivos

• En general los sistemas operacionales (facturación, control de almacenes, planillas, ventas, etc.)
• Cualquier problema de la Programación Lineal
• Sistemas de transacciones bancarias
• En general los sistemas de información gerencial
• Programación de Tareas

La Clase NP (Non-Deterministic Polynomial-time): Está constituido por todos los problemas que pueden ser resueltos por algoritmos enumerativos, cuya búsqueda en el espacio de soluciones es realizada en un árbol con profundidad limitada por una función polinomial respecto al tamaño de la instancia del problema y con ancho eventualmente exponencial. O dicho de otra forma, son problemas resolubles en tiempo polinómico con una máquina de Turing no determinística.
La clase NP está compuesta por los problemas que tienen un certificado sucinto (también llamado testigo polinómico) para todas las instancias cuya respuesta es un SÍ. La única forma de que tengan un tiempo polinomial es realizando una etapa aleatoria, incluyendo el azar de alguna manera para elegir una posible solución, y entonces en etapas posteriores comprueba si esa solución es correcta.

Algunos Problemas
• Clique
• Camino Máximo (Dados dos vértices de un grafo encontrar el camino (simple) máximo),
• Ciclo Hamiltoniano(Ciclo simple que contiene cada vértice del grafo).
• Cobertura de Vértices y Aristas
• Coloración de Grafos
• Mochila Lineal y Cuadrática
• Optimización de Desperdicios
• Agente Viajero
• Gestión Optima de cortes
• Programación de Tareas

La Clase NP-Completa: Para abordar la pregunta de si P=NP, el concepto de la completitud de NP es muy útil. Informalmente, los problemas de NP-completos son los problemas más difíciles de NP, en el sentido de que son los más probables de no encontrarse en P. Los problemas de NP-completos son esos problemas NP-duros que están contenidos en NP, donde los problemas NP-duros son estos que cualquier problema en NP puede ser reducido a complejidad polinomial.

¿P=NP?

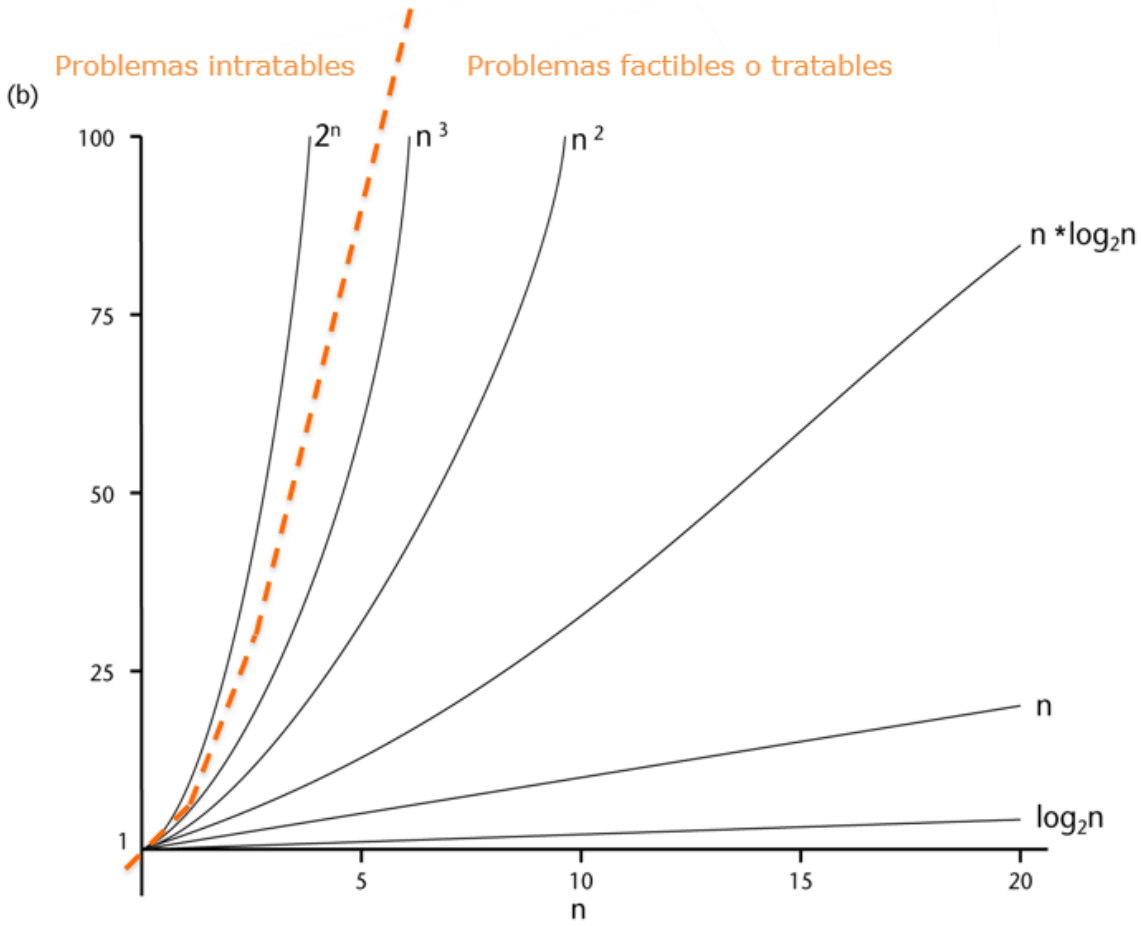
La cuestión de la inclusión estricta entre las clases de complejidad P y NP es uno de los problemas abiertos más importantes de las matemáticas. El Instituto Clay de Matemáticas (Cambridge, Massachusetts) (http://www.claymath.org/millennium-problems/p-vs-np-problem) premia con un millón de dólares a quién sea capaz de lograr la resolución de esta conjetura.
En algunos problemas, el comprobar la solución es más eficiente que calcularla. La complejidad de la función “elevar al cuadrado” es más simple que calcular la raíz cuadrada. ¿Qué tiene que ver todo esto

con P=NP? Pues bien, P es la clase de complejidad que contiene problemas de decisión que se pueden resolver en un tiempo polinómico. P contiene a la mayoría de problemas naturales, algoritmos de programación lineal, funciones simples,... Por ejemplo la suma de dos números naturales se resuelven en tiempo polinómico (para ser más exactos es de orden 2n). Entre los problemas que se pueden resolver en tiempo polinómico nos encontramos con diversas variedades como los logarítmicos (log(n)), los lineales (n), los cuadráticos (n^2), los cúbicos (n^3),... Volviendo al ejemplo principal llegamos a la conclusión que la función de elevar al cuadrado está contenida en la clase P.
La clase de complejidad NP contiene problemas que no pueden resolverse en un tiempo polinómico. Cuando se dice que un algoritmo no puede obtener una solución a un problema en tiempo polinómico siempre se intenta buscar otro procedimiento que lo consiga mejorar. Frente a los problemas contenidos en P tienen métodos de resolución menos eficaces. Podemos ver que la operación de calcular la raíz cuadrada se encuentra contenida en esta clase.
Si nos resulta sencillo encontrar una solución para un determinado problema, sabemos comprobar si la solución es cierta (simplemente comparar), por lo que P es un subconjunto de la clase NP. La gran cuestión es si ocurre lo mismo a la inversa, es decir, si tengo un problema que sé comprobar fácilmente si un resultado es una solución, ¿sé calcular una solución sencillamente? ¿Todo problema se puede resolver en tiempo polinómico? Si alguien conoce la respuesta que se dirija al Instituto Clay y reclame su millón de dólares.

Problemas Tratables e intratables

Problemas Tratables: Son aquellos que se pueden resolver por un algoritmo en tiempo polinomial. La cota superior (upper bound) es polinomial.
Problemas Intratables: No se puede resolver por un algoritmo en tiempo polinomial. La cota inferior (lower bound) es exponencial.

constant	$O(1)$
logarithmic	$O(\log n)$
linear	$O(n)$
n-log-n	$O(n \times \log n)$
quadratic	$O(n^2)$
cubic	$O(n^3)$
exponential	$O(k^n)$, e.g. $O(2^n)$
factorial	$O(n!)$
super-exponential	e.g. $O(n^n)$



Ciertos problemas son tan difíciles que no existen algoritmos que los resuelvan. Un programa para el que no existirá nunca un algoritmo que lo resuelva es llamado ***irresoluble*** (*unsolvable*) o **no computable**. Un gran número de problemas son reconocidos como irresolubles.

Uno de los primeros problemas que se demostró son irresolubles es el *Halting problem o problema de Paro*: "Dado un programa arbitrario y un conjunto de entradas, ¿el programa eventualmente parará?"

Un número grande de problemas ***resolubles***, mantienen un estado indeterminado; se considera que son intratables, pero esto no se ha podido demostrar para ninguno de ellos.

La mayoría de estos problemas pertenecen a la clase de los **NP**-completos.

Muchos problemas prácticos se han identificado como **NP**-completos.

Un ejemplo de programa NP-Completo es el siguiente:
Dada una formula arbitraria de la lógica proposicional, verificar si existe una asignación de valores de verdad a sus variables, que la vuelva verdadera.
Este es el llamado *problema de satisfacibilidad*.

Problemas Decidibles: Son problemas computables y existe al menos un algoritmo capaz de resolverlos. Estos problemas a pesar de llevar mucho tiempo para su resolución son computables.
Dentro de esta categoría se encuentran los **Problemas Tratables** y los **Problemas Intratables**.

Problemas NO Decidibles: Son problemas que no son factibles obtener su solución. Aquí distinguimos dos subgrupos.

Problemas NO Computables: Un ejemplo de problema NO Computable lo constituye el famoso problema de Las Torres de Hanoi

Problemas Fuertemente No Computables: Un ejemplo de este lo constituye La Aritmética de PestBurger. Y cualquier algoritmo criptográfico como RSA, DES ...

Problemas Deterministas y No deterministas

Problemas Deterministas: En cualquier paso del algoritmo, sólo hay un siguiente paso posible.
Problemas No Deterministas: Puede existir más de un paso a elegir y no siempre se elegirá el mismo.

Propiedades de O grande (se pueden usar para simplificar)

1. Transitividad: Si *f(n)* está en *O(g(n))* y *g(n)* está en *O(h(n))*, entonces *f(n)* está en *O(h(n))*.
Esta regla nos dice que si alguna función *g(n)* es una cota superior para una función de costo, entonces cualquier cota superior para *g(n)*, también es una cota superior para la función de costo.
Nota: Hay una propiedad similar para la **notación** Ω y Θ**.**
2. Si *f(n)* está en *O(k g(n))* para cualquier constante *k>0*, entonces *f(n)* está *O(g(n))*
El significado de la regla es que se puede ignorar cualquier constante multiplicativa en las ecuaciones, cuando se use **notación** de **O-grande**.
3. Regla del valor máximo: Si *f1(n)* está en *O(g1(n))* y *f2(n)* está en *O(g2(n))*, entonces *f1(n) + f2(n)* está en *O(max(g1(n),g2(n)))*.
La regla expresa que dadas dos partes de un programa ejecutadas en secuencia, sólo se necesita considerar la parte más cara.
4. Si *f1(n)* está en *O(g1(n))* y *f2(n)* está en *O(g2(n))*, entonces *f1(n)f2(n)* está en *O(g1(n)g2(n))*.
Esta regla se emplea para simplificar ciclos simples en programas. Si alguna acción es repetida un cierto número de veces, y cada repetición tiene el mismo costo, entonces el costo total es el costo de la acción multiplicado por el número de veces que la acción tuvo lugar.
5. Igualdad de logaritmos: En la notación O la expresión

$$O(\log_a n) = O(\log_b n)$$

que, claramente es incorrecto en las matemáticas, pero es correcta en la notación O.

Esto se demuestra aplicando la propiedad de los logaritmos para el cambio de base $\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$.
Notamos que el denominador es una constante y como en la notación O no se escriben las constantes queda demostrado.
6.Reflexiva: Es reflexiva dado que

$f(n) \epsilon O(f(n))$

La notación Ω, Gran Omega (Big Omega).

Def. Sean f y g dos funciones no negativas sobre los enteros positivos.
Escribimos:

$$f(n) = \Omega(g(n))$$

y decimos que $f(n)$ es de orden de "al menos" o orden *omega* de $g(n)$
si existen constantes $c > o$ y a tales que:

$$f(n) \geq c\ g(n) \quad \text{para toda} \quad n \geq a$$

Se adopta una notación especial llamada **Gran Omega** (Big- Ω), por ejemplo **Ω (f(n))** para indicar que la cota inferior del algoritmo es **f(n)**.

La notación Θ, Gran Theta (Big Theta).

Def. Sean f y g dos funciones no negativas sobre los enteros positivos.
Escribimos:

$$f(n) = \Theta(g(n))$$

y decimos que $f(n)$ es de orden de $g(n)$ o de orden *teta* de $g(n)$:

$$\text{si } f(n) = O(g(n)) \text{ y } f(n) = \Omega(g(n))$$

Se adopta una notación especial llamada Gran Theta (Big- Theta), por ejemplo Θ(f(n)) para indicar que la cota asintóticamente ajustada del algoritmo es f(n).

Notación o pequeña, o minúscula (Small o).

Def. Sean f y g dos funciones no negativas sobre los enteros positivos.
Escribimos:

$$f(n)=o(g(n)) \text{ para toda } n > n_0$$

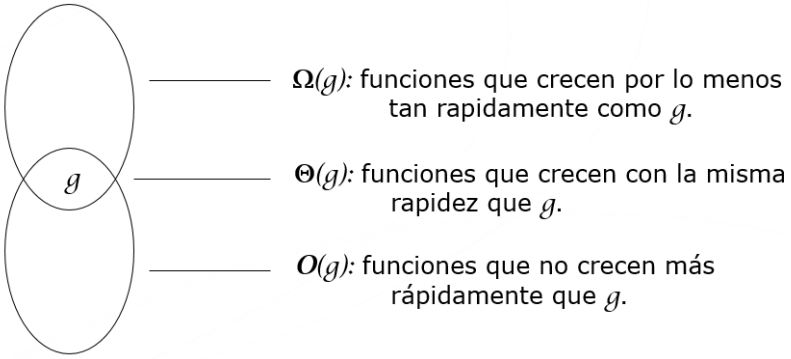
y decimos que $f(n)$ es de orden ***small o*** de $g(n)$
si existen constantes $c > 0$ y n_o tales que:

$$f(n) < cg(n) \text{ para toda } n \geq n_0$$

Limitaciones del análisis asintótico

- **No es apropiado para pequeñas cantidades de datos.**
- **La constante implícita puede resultar demasiado grande en la práctica, independientemente de la tasa de crecimiento.**
  - Se da cuando un algoritmo es demasiado complejo
  - Se puede dar también porque nuestro análisis no diferencia los accesos de memoria de los accesos a disco. Nuestro análisis presupone memoria infinita.

Clasificación de funciones por su tasa de crecimiento asintótico



Reglas de cálculo

- ***Regla 1. Ciclos***
  El tiempo de ejecución de un ciclo es a lo más el tiempo de ejecución de las instrucciones que están en el interior del ciclo (incluyendo las condiciones) por el número de iteraciones.

- ***Regla 2. Ciclo anidados***
  Analizarlos de dentro hacia fuera. El tiempo de ejecución total de proposición dentro de un grupo de ciclos anidados es el tiempo de ejecución de la proposición multiplicado por los tamaños de entrada de todos los ciclos.

- ***Regla 3. Proposiciones consecutivas***
  Simplemente se suman, lo que significa que el máximo es el único que cuenta

- ***Regla 4. Condiciones***
  El tiempo de ejecución de una condición nunca es más grande que el tiempo de ejecución de la condición más en mayor de todos los tiempos de las proposiciones internas, ya sea cuando sea verdadera o falsa la condición.

Las reglas 1 y 2 parecen ser relativamente fáciles, y de hecho lo son hasta cierto punto, el problema se presenta cuando no se conoce a ciencia cierta la cantidad de iteraciones que tiene que ejecutar el algoritmo pueda llegar a su fin, en este caso primero hay que calcular primeramente la supuesta cantidad de iteraciones y luego aplicar las reglas 1 y 2.

Búsqueda Estática

Interna: Cuando los elementos entre los que buscamos están almacenados en memoria (array).

Externa: Cuando los datos entre los que buscamos están almacenados en un dispositivo externo; en este caso la búsqueda se realiza a partir de un determinado campo denominado campo clave.

- **Secuencial o lineal**
- **Binaria o dicotómica**
- **Por transformación de claves o HASHING**

Búsqueda secuencial y secuencial con centinela

Búsqueda secuencial : Sea A un vector con N elementos, para localizar el valor del elemento buscado dentro de A se comparará dicho valor con los diferentes miembros de A hasta encontrar el valor buscado o bien llegar hasta el final del vector, en el caso de que el elemento no se encuentre en dicho vector.

Búsqueda secuencial con centinela: Es una mejora del anterior en cuanto a que evita que tengamos que estar preguntando constantemente si hemos llegado al final del array.

El método consiste en asignar el valor buscado a la posición N+1 del array siendo N el número de elementos del array, cuando acabemos si LUG que es la variable que nos indica la posición del elemento es igual a N+a significará que el elemento no se encuentra en dicho array.
El inconveniente de este método es que para poder aplicarlo el array tiene que tener la capacidad suficiente para almacenar N+1 elementos.
Este método se llama centinela, porque al elemento que metemos en la posición N+1 se llama así.

Búsqueda binaria o dicotómica

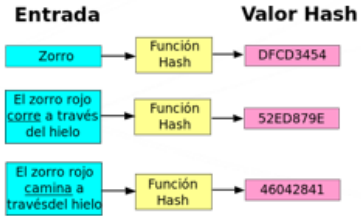
El problema de la búsqueda secuencial es que cuando el número de elementos es muy grande, el proceso de búsqueda se hace muy lento, por eso vamos a ver este método, que se basa en dividir el espacio de búsqueda o array en sucesivas mitades hasta encontrar el elemento buscado.
El inconveniente es que ***exige que el array esté ordenado*** para poder aplicarlo por ello el primer paso será ordenarlo.
La metodología es: se compara el elemento buscado con el de la mitad de la lista y si no es igual se decide en qué parte de la lista se seguirá buscando. Luego se vuelve a comparar con el valor medio de la sub-lista seleccionada (*y así sucesivamente*).
En el peor de los casos la complejidad sería aquella en la que el elemento no estuviera en la lista o estuviera en la última mitad a analizar, por tanto, como máximo haré tantas comparaciones como el número de mitades máximo en el que puedo dividir la lista.
Si N fuera el número máximo de elementos del array, K sería el número máximo de comparaciones sí
2 k = N + 1.
K = log 2 (N + 1)
El caso más favorable sería aquel en el que sólo tuviera que hacer una comparación, porque el elemento buscado coincidiese con la primera mitad del array
A + log 2 (N + 1) = log 2 (N + 1)

Búsqueda por conversión de claves: HASHING

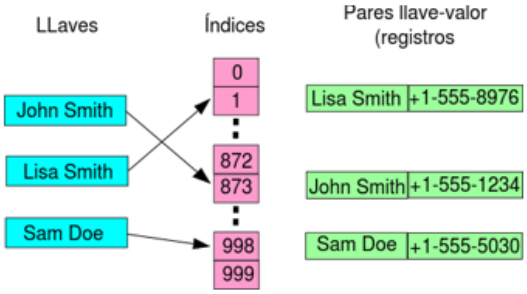
El término *hash* proviene, aparentemente, de la analogía con el significado estándar de dicha palabra en el mundo real: *picar y mezclar*. Donald Knuth cree que H. P. Luhn, empleado de IBM, fue el primero en utilizar el concepto en un memorándum fechado en enero de 1953. Su utilización masiva no fue hasta después de 10 años.
Un ejemplo práctico para ilustrar que es una tabla hash es el siguiente: Se necesita organizar los periódicos que llegan diariamente de tal forma que se puedan ubicar de forma rápida, entonces se hace de la siguiente forma - se hace una gran caja para guardar todos los periódicos (una tabla), y se divide en 31 contenedores (ahora es una "hash table" o tabla fragmentada), y la clave para guardar los periódicos es el día de publicación (índice). Cuando se requiere buscar un periódico se busca por el día que fue publicado y así se sabe en qué zócalo (bucket) está. Varios periódicos quedarán guardados en el mismo zócalo (es decir colisionan al ser almacenados), lo que implica buscar en la sub-lista que se guarda en cada zócalo. De esta forma se reduce el tamaño de las búsquedas de O(n) a - En el mejor de los casos O(1) y en el peor de los casos O(log(n)).

Para utilizar este método tampoco hace falta que el array esté ordenado pero si exige que cada elemento del array tenga asociada una clave.

Entonces, dado un array de N posiciones y dado un elemento a buscar en dicho array, se trata de convertir la clave de ese elemento a una de las N posiciones del array *(función hash)* y en esa posición será la que investigaremos si está o no el elemento.
Esta búsqueda exige la existencia de una función de direccionamiento o conversión de claves *(función hash)* que establezca la correspondencia entre claves y posiciones del array.
El inconveniente de este método es que si el rango de claves es muy grande no sería eficiente reservar espacio para todo el rango de claves (*a veces no sería ni posible*). Teniendo en cuenta que cada elemento puede tener cualquier clave del rango, si reservo menos posiciones de las que tiene ese rango puede darse el caso de que a más de un elemento la función de conversión le haga corresponder la misma posición en el array; esto se conoce como colisión. A cada una de las partes que colisionan se denominan SINÓNIMOS. La función de conversión tiene que ser tal que produzca el mínimo número de colisiones posibles.



Ejemplo de función Hash



Ejemplo de tabla Hash

Conclusión

Comprobar la eficiencia de un algoritmo equivale a medir la complejidad del tiempo asintótico en el peor caso **T(n)** de éste; o lo que es lo mismo, de qué orden es el número de operaciones elementales que requiere el algoritmo cuando el tamaño de la entrada de datos es suficientemente grande, en el peor caso.