Apuntes

Tema ***Arboles Binarios de Búsqueda Autobalanceados***

"Cuando leo comentarios de propuestas sobre a donde debe ir el lenguaje C, a menudo vuelvo la vista atrás y doy gracias de que no se haya desarrollado bajo el asesoramiento de multitudes de todo el mundo" — Dennis Ritchie

Arboles auto-balanceados AA

Arboles AA (Arne Andersson)

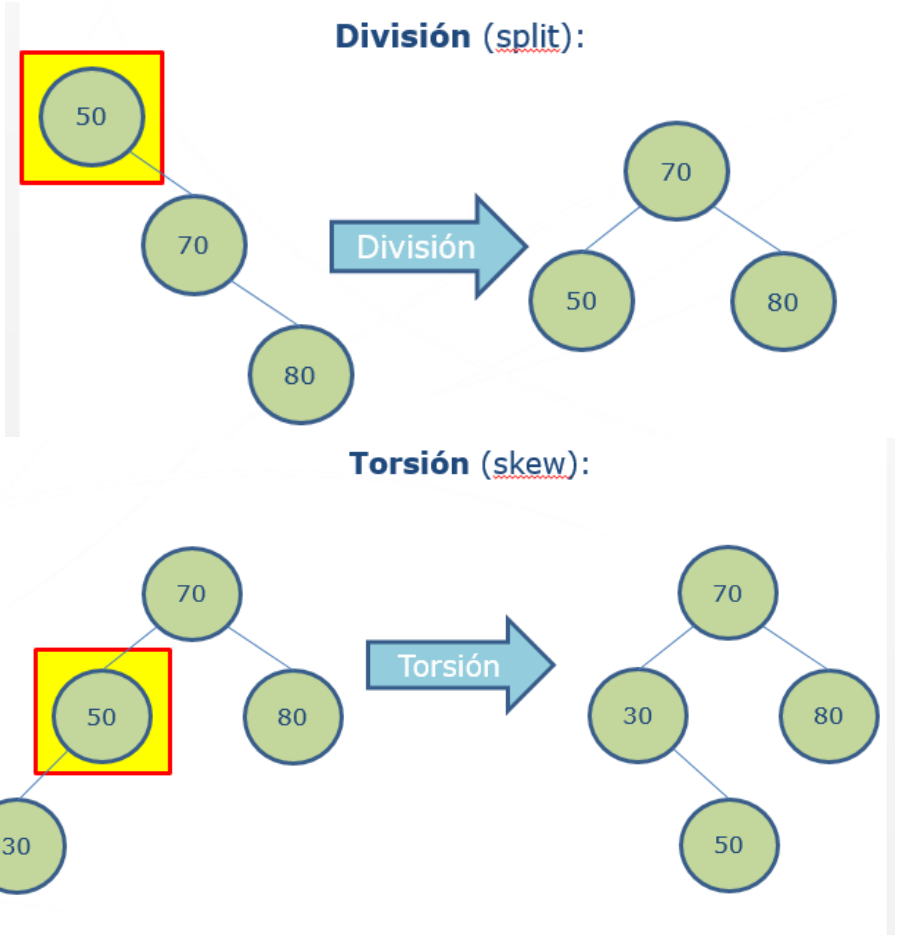
En ciencias de la computación un árbol AA es un tipo de árbol binario de búsqueda auto-balanceable utilizado para almacenar y recuperar información ordenada de manera eficiente. Los árboles AA reciben el nombre de su inventor, **Arne Andersson**.
Los árboles **AA** son una variación del árbol rojo-negro. A diferencia de los árboles rojo-negro, los nodos rojos en un árbol AA sólo pueden añadirse como un hijo derecho. En otras palabras, **ningún** nodo rojo puede ser un hijo izquierdo.
El rendimiento de un árbol AA es equivalente al de un árbol rojo-negro. Un árbol AA realiza más rotaciones que un árbol rojo-negro, pero la mayor sencillez de sus algoritmos tiende a hacerlos más rápidos, y estos factores se compensan resultando en un rendimiento similar. Un árbol rojo-negro es más constante en su rendimiento que un árbol AA, pero un árbol AA tiende a ser más llano lo que produce unos tiempos de búsqueda ligeramente más pequeños.

Arboles AA - Rotaciones de balanceo

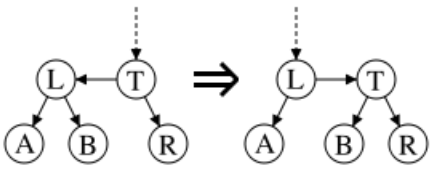
En general, los árboles AA se implementan con la idea de un nivel en lugar de la de un color, a diferencia de los árboles rojo-negro. Cada nodo tiene un **campo nivel** y se deben cumplir las siguientes condiciones para que el árbol sea válido:

1) El nivel de un nodo hoja es uno.
2) El nivel de un **hijo izquierdo** es estrictamente **menor** que el de su padre.
3) El nivel de un **hijo derecho** es **menor o igual** que el de su padre.
4) El nivel de un **nieto derecho** es estrictamente **menor** que el de su abuelo.
5) Cada nodo de nivel mayor que uno debe tener **dos hijos**.

Sólo se necesitan dos operaciones para mantener el equilibrio en un árbol AA. Estas operaciones se llaman **torsión** (skew) y **división** (split). La *torsión* es una rotación derecha que se realiza cuando una inserción o un borrado genera un enlace horizontal izquierdo, puede pensarse como un enlace rojo izquierdo en el contexto del árbol rojo-negro. La *división* es una rotación izquierda condicional que tiene lugar cuando una inserción o un borrado crea dos enlaces horizontales derechos, lo que de nuevo se corresponde con dos enlaces rojos consecutivos en el contexto de los árboles rojo-negro.



Arboles AA - Torsión

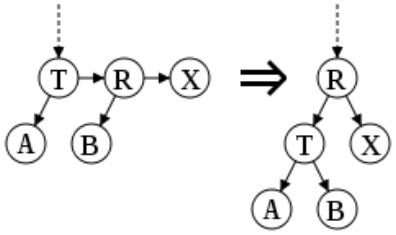


Torsión (Skew): La torsión es una **rotación derecha** que se realiza cuando una inserción o un borrado genera un enlace horizontal izquierdo *(puede pensarse como un enlace rojo izquierdo en el contexto del árbol rojo-negro)*.

función torsión es
    entrada: T, un nodo que representa un árbol AA que requiere ser rebalanceado.
    salida: Otro nodo que representa el árbol AA rebalanceado.
    si nil(T) entonces
        devuelve Nil
    si no si nivel(izquierda(T)) == nivel(T) entonces

```
        Cambia los apuntadores de los enlaces horizontales a la izquierda.
        L = izquierda(T)
        izquierda(T) := derecha(L)
        derecha(L) := T
        devuelve L
    si no
        devuelve T
    fin si
fin de la función
```

Arboles AA - División



División (Split): La división es una **rotación izquierda** condicional que tiene lugar cuando una inserción o un borrado crea dos enlaces horizontales derechos *(lo que de nuevo se corresponde con dos enlaces rojos consecutivos en el contexto de los árboles rojo-negro)*.

```
función división es
    entrada: T, un nodo que representa un árbol AA que requiere ser rebalanceado.
    salida: Otro nodo que representa el árbol AA rebalanceado.
    si nil(T) entonces
        devuelve Nil
    si no si nivel(T) == nivel(derecha(derecha(T))) entonces
        Tenemos dos enlaces horizontales a la derecha. Toma el de en medio, elévalo, y
devuélvelo.
        R = derecha(T)
        derecha(T) := izquierda(R)
        izquierda(R) := T
        nivel(R) := nivel(R) + 1
        devuelve R
    si no
        devuelve T
    fin si
fin de la función
```

Arboles AA - Inserción

La **inserción** comienza con la búsqueda normal en un árbol binario y su procedimiento de inserción. Después, a medida que se desenrolla la pila de llamadas (interna), es fácil comprobar la validez del árbol y realizar las rotaciones que se precisen. Si aparece un enlace horizontal

izquierdo, se realiza una torsión, y si aparecen dos enlaces horizontales derechos, se realiza una división, posiblemente incrementando el nivel del nuevo nodo raíz del subárbol correspondiente. Todos los nodos inicialmente se insertan como nodos hoja utilizando el estándar del árbol de búsqueda binaria.
Enlaces horizontales en los árboles AA:

- Las cinco condiciones de árboles AA imponen restricciones a los enlaces horizontales
- Si alguno de las condiciones se violan el árbol debe ser modificado hasta que, una vez más cumple con las cinco condiciones
- Sólo dos casos deben ser considerados y corregidos para mantener el equilibrio de un árbol AA

Caso #1: ***Enlace horizontal izquierda no se les permite***

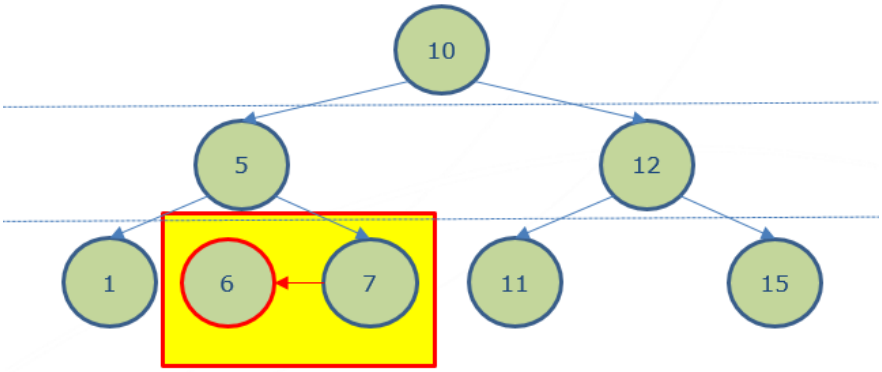
- Violar la condición # 2, el nivel de un hijo izquierdo es estrictamente menor que la de su padre
- Se usa una operación de torsión (sesgo o inclinación) para manejar este caso

Caso #2: ***Dos enlaces horizontales correctas consecutivas no se les permite***

- Violar la condición # 4, el nivel de un nieto derecha es estrictamente menor que el de su abuelo
- Se usa una operación de división introducido para manejar este caso

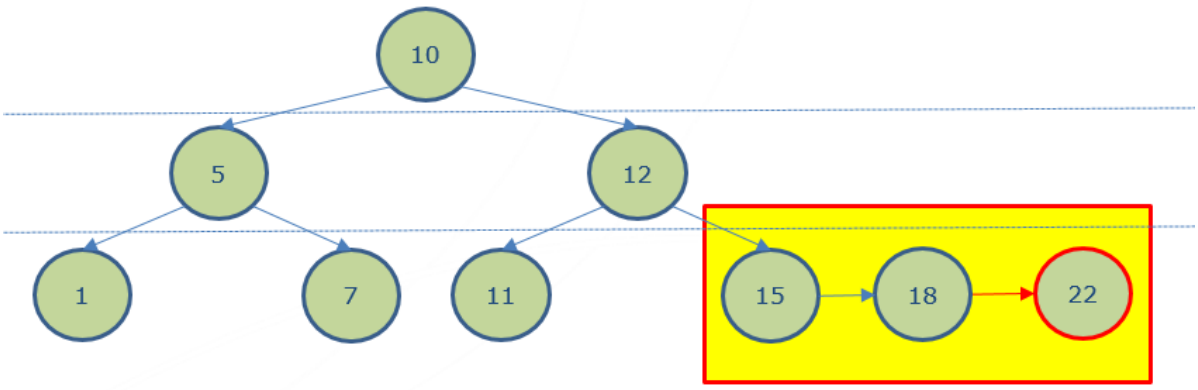
Caso #1: ***Enlace horizontal izquierda no se les permite***

- Violar la condición # 2, el nivel de un hijo izquierdo es estrictamente menor que la de su padre
- Se usa una operación de torsión para manejar este caso



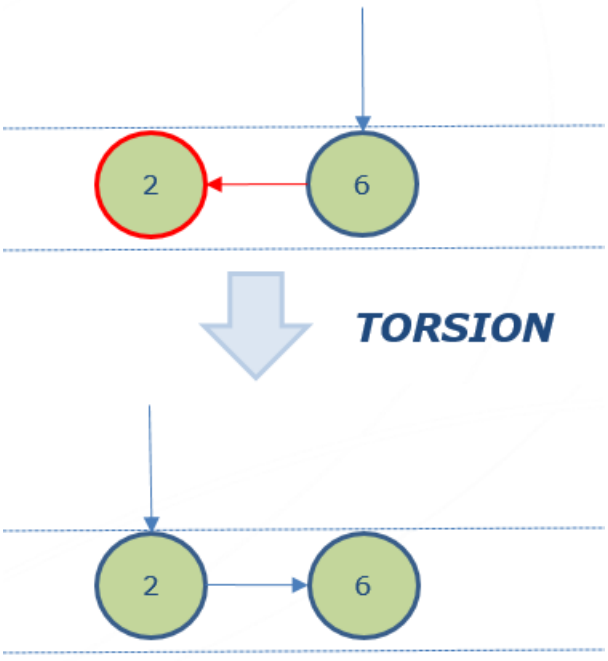
Caso #2 ***Dos enlaces horizontales correctas consecutivas no se les permite***

- Violar la condición # 4, el nivel de un nieto derecha es estrictamente menor que el de su abuelo
- Se usa una operación de división para manejar este caso

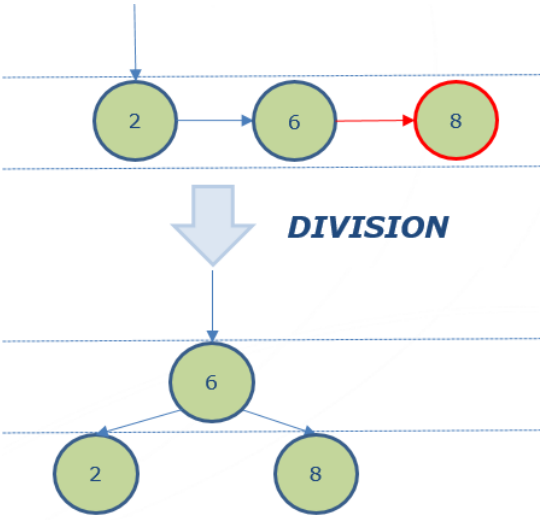


Ejemplo de ejecución

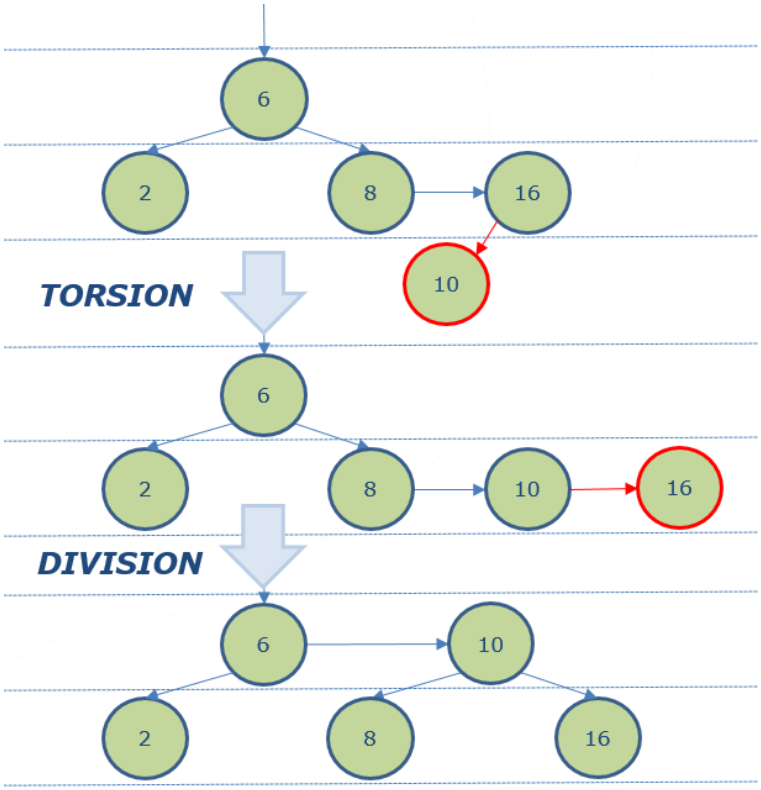
- Creamos el árbol con el 6 y luego insertamos el 2



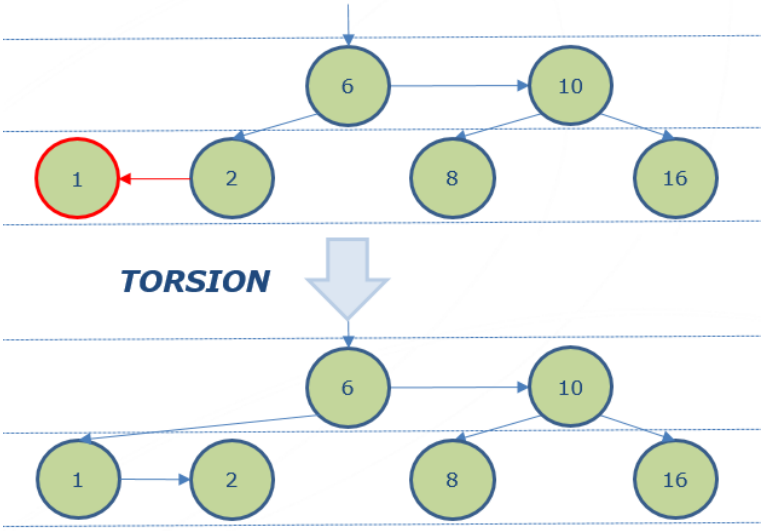
* insertamos el 8



- insertamos el 16 y luego el 10



- insertamos el 1



Observe que el código de muestra realiza un incremento de nivel(T). Lo que hace necesario continuar comprobando la validez del árbol a medida que las modificaciones suben desde las hojas.

```
función insertar es
    entrada: X, el valor a ser insertado, y T, la raíz del árbol en el cual se insertará.
    salida: Una versión balanceada de T que incluye a X.
    Haz el procedimiento normal de inserción de un árbol de búsqueda binario.
    Asigna al hijo correcto el resultado de la llamada recursiva en caso de que
    un nodo nuevo fue creado o la raíz del subárbol cambió.
    si nil(T) entonces
        Crea una nueva hoja con X.
        devuelve nodo(X, 1, Nil, Nil)
    si no si X < valor(T) entonces
        izquierda(T) := insertar(X, izquierda(T))
    si no si X > valor(T) entonces
        derecha(T) := insertar(X, derecha(T))
    fin si
    Note que el caso X == valor(T) no está especificado. En esta implementación,
    no tendrá ningún ejemplo. Se puede cambiar el comportamiento dependiendo de
    la implementación.
    Haz la torsión y luego la división. Las condiciones de si serán hechas ambas
    acciones están dentro de los procedimientos ya descritos arriba.
    T := torsión(T)
    T := división(T)
    devuelve T
fin de la función
```

Arboles AA - Borrado

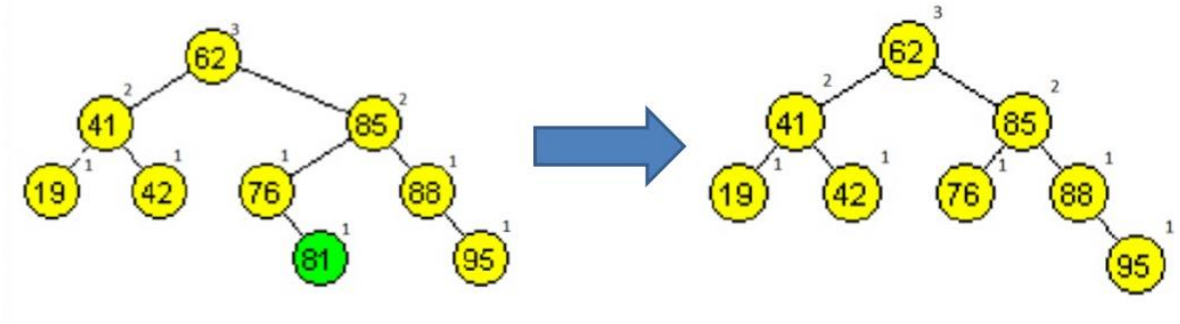
Como en la mayoría de árboles binarios balanceados, el borrado de un nodo interno puede convertirse en el borrado de un nodo hoja al intercambiar el nodo interno bien con su predecesor o sucesor más próximo, dependiendo del que esté en el árbol o de los deseos del implementador. Para recuperar un predecesor símplemente se debe seguir un enlace izquierdo y después todos los enlaces derechos restantes. De forma similar, el sucesor se puede encontrar al ir una vez a la derecha y una vez a la izquierda hasta que se encuentre un puntero nulo. Dada la propiedad de los árboles AA de que todos los nodos de un nivel superior a uno tienen dos hijos, el nodo sucesor o predecesor tendrá nivel 1, haciendo que su eliminado sea trivial.
Para re-equilibrar un árbol existen diferentes aproximaciones. La que describió Andersson en su publicación original es la más simple, y se describirá aquí, aunque implementaciones reales pueden optar por un enfoque más optimizado. Tras un borrado, el primer paso para mantener la validez es reducir el nivel de todos los nodos cuyos hijos están dos niveles por debajo de ellos, o a los que les faltan hijos. Después, todo el nivel debe ser torsionado y dividido. Esta aproximación se ha visto favorecida por el hecho de que se basa en tres pasos independientes y fáciles de entender:
Decrementar el nivel, si es necesario.
Torsionar el nivel.
Dividir el nivel.
Sin embargo, debemos torsionar y dividir todo el nivel en lugar de un solo nodo lo que complica nuestro código.

A la hora de eliminar un nodo pueden presentarse 3 casos:

- Eliminar una hoja.
- Eliminar un nodo con un hijo.
- Eliminar un nodo interno

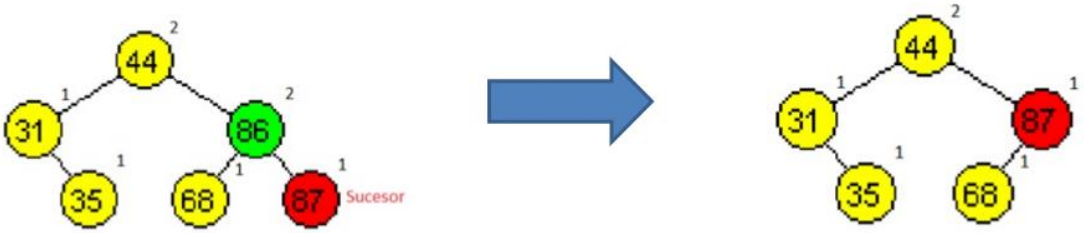
Caso I: Eliminar una hoja Para eliminar una hoja (nodo sin hijos), basta con borrarla
Caso II: Eliminar un nodo con un hijo En este caso, se reemplaza el nodo a eliminar con su hijo. Por ser un árbol AA, un hijo único siempre será derecho.
Caso III: Eliminar nodo interno Cuando el nodo a eliminar tiene 2 hijos, este se sustituye por el sucesor o antecesor inmediato.

Caso I: Para eliminar una hoja (nodo sin hijos), basta con borrarla.
Ejemplo: Se quiere eliminar el nodo 81.



Caso II: Eliminar un nodo con un hijo En este caso, se reemplaza el nodo a eliminar con su hijo. Por ser un árbol AA, un hijo único siempre será derecho.
Ejemplo: Se quiere eliminar el nodo 88.

Caso III: Eliminar nodo interno Cuando el nodo a eliminar tiene 2 hijos, este se sustituye por el sucesor o antecesor inmediato.
Ejemplo: Eliminar nodo 86.



Luego de eliminar un nodo, puede ser necesario rebalancear el árbol. Para esto se deben recorrer los nodos desde la posición del nodo eliminado hasta la raíz revisando que sus niveles cumplan con las reglas. Al encontrarse una anomalía, se ejecutan las siguientes operaciones:

#1 Se debe decrementar el nivel de un nodo cuando:
- Alguno de los hijos está mas de un nivel más abajo.
- Un nodo hoja es hijo de otro nodo cuyo nivel ha sido decrementado.

#2 Torsionar el nivel de un nodo cuyo nivel fue disminuido

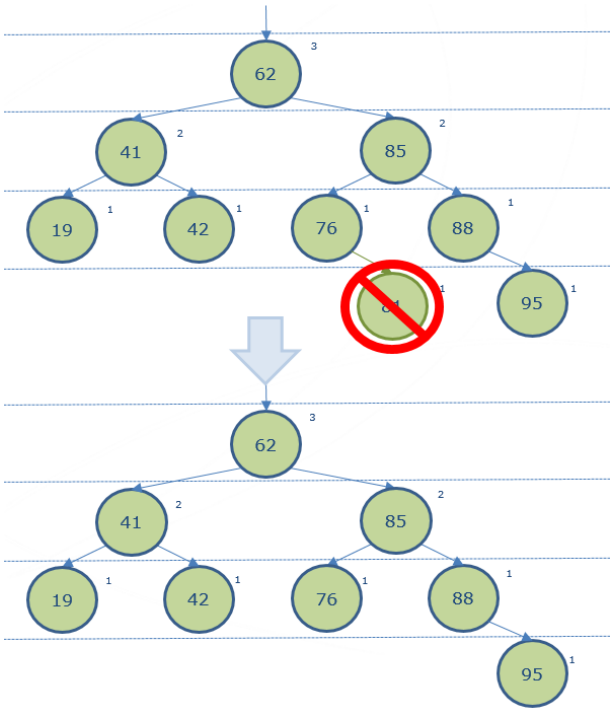
- Torsionar el sub-árbol desde la raíz, donde el nodo decrementado es la raíz.
- Torsionar el hijo derecho de la raíz.
- Torsionar el hijo derecho del hijo derecho de la raíz.

#3 Dividir el nivel del nodo cuyo nivel fue decrementado

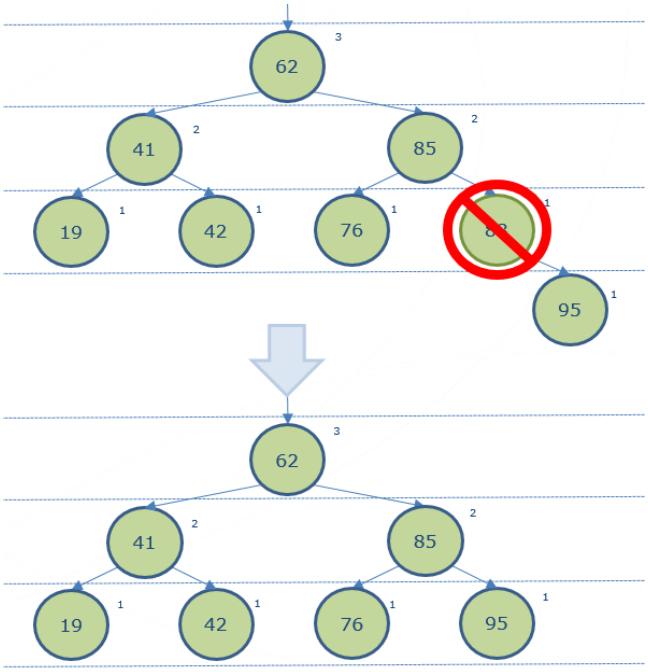
- Dividir la raíz del sub-árbol.
- Dividir el hijo derecho de la raíz.

```
función borrar es
    entrada: X, el valor a ser borrado, y T, la raíz del árbol del que se debe borrar.
    salida: T, balanceado, sin el valor X.
    si X > valor(T) entonces
        derecha(T) := borrar(X, derecha(T))
    si no si X < valor(T) entonces
        izquierda(T) := borrar(X, izquierda(T))
    si no
        si somos una hoja es fácil, si no, hay que reducir ese caso.
        si hoja(T) entonces
            regresa Nil
        si no si nil(izquierda(T)) entonces
            L := sucesor(T)
            derecha(T) := borrar(L, derecha(T))
            valor(T) := L
        si no
            L := predecesor(T)
            izquierda(T) := borrar(L, izquierda(T))
            valor(T) := L
        fin si
    fin si
    Rebalancea el árbol. Decrementa el nivel de los nodos en este nivel si es necesario, y
    después torsiona y divide todos los nodos en el nuevo nivel.
    T := decrementa_nivel(T)
    T := torsión(T)
    derecha(T) := torsión(derecha(T))
    derecha(derecha(T)) := torsión(derecha(derecha(T)))
    T := división(T)
    derecha(T) := división(derecha(T))
    regresa T
```

Caso 1 Eliminar una Hoja.
Ejemplo de ejecución:

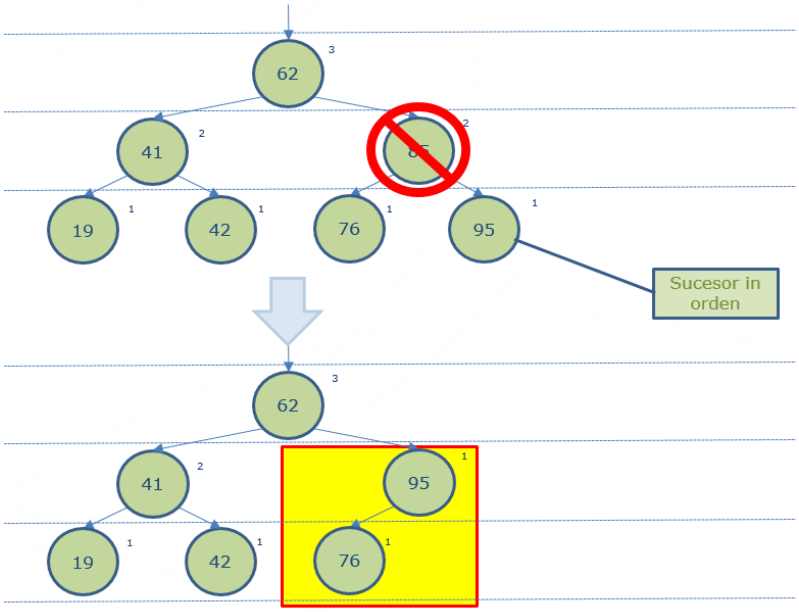


Caso 2 Eliminar un nodo con un hijo
Ejemplo de ejecución:



Caso 3 Eliminar un nodo con 2 hijos

Ejemplo de ejecución:




```
función decrementa_nivel es
    entrada: T, un árbol del que queremos quitar enlaces que se saltan niveles.
    salida: T con sus niveles decrementados.
    debe_ser = min(nivel(izquierda(T)), nivel(derecha(T))) + 1
    si debe_ser < nivel(T) entonces
        nivel(T) := debe_ser
        si debe_ser < nivel(derecha(T)) entonces
            nivel(derecha(T)) := debe_ser
        fin si
    fin si
    regresa T
fin de la función
```

Arboles AA - Rebalanceo

Luego de eliminar un nodo, puede ser necesario rebalancear el árbol. Para esto se deben recorrer los nodos desde la posición del nodo eliminado hasta la raíz revisando que sus niveles cumplan con las reglas. Al encontrarse una anomalía, se ejecutan las siguientes operaciones:

#1 Se debe decrementar el nivel de un nodo cuando

- Alguno de los hijos está mas de un nivel más abajo.
- Un nodo hoja es hijo de otro nodo cuyo nivel ha sido decrementado.

#2 Torsionar el nivel de un nodo cuyo nivel fue disminuido

- Torsionar el sub-árbol desde la raíz, donde el nodo decrementado es la raíz.
- Torsionar el hijo derecho de la raíz.
- Torsionar el hijo derecho del hijo derecho de la raíz.

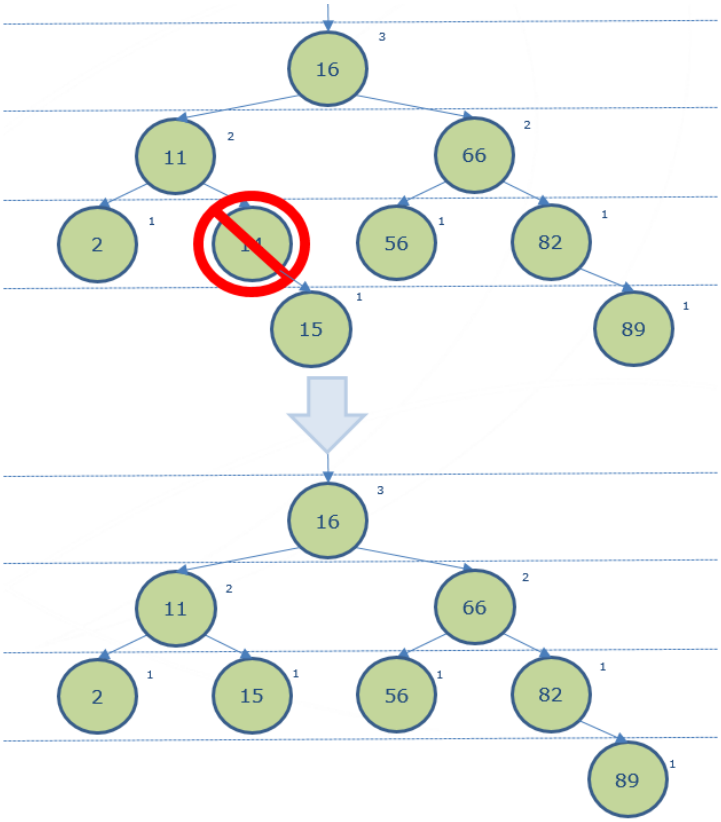
#3 Dividir el nivel del nodo cuyo nivel fue decrementado

- Dividir la raíz del sub-árbol.

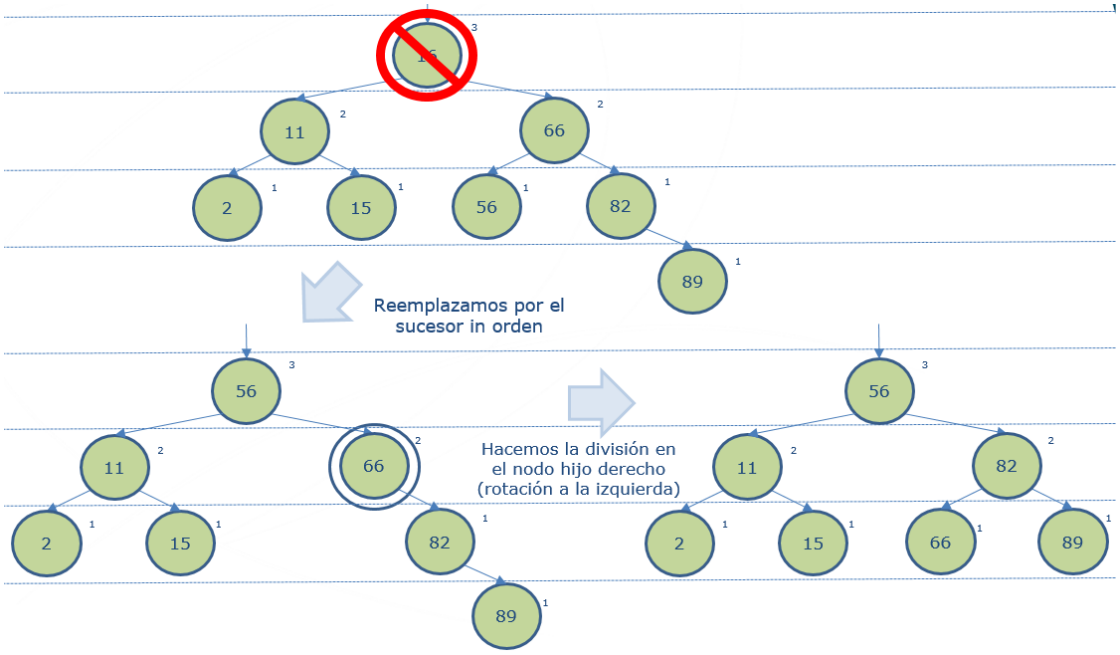
- Dividir el hijo derecho de la raíz.

Ejemplo de ejecución:

- Borramos el 14



- Luego Borramos el 16



- Si a esta árbol le agregamos el 22 y luego Borramos el 2