Método de Diferencias Finitas

caso de estudio: caída exponencial

Introducción

- El *método de diferencias finitas* nos permite "resolver numéricamente" una ecuación diferencial
- Resolver numéricamente quiere decir: ir encontrando aproximaciones de los valores que va tomando la función que verifica la ecuación
- El método define una recurrencia, es decir: calcula los valores nuevos a partir de los valores conocidos (Ej.: Fibonacci es una recurrencia)

Caso de estudio: caída exponencial

- $u'(t) = -au(t)$ (donde t es: tiempo)
- Ecuacion diferencial ordinaria de orden 1
- Solución exacta: $u(t) = Ce^{-at}$ (donde C es una constante arbitaria), verificar!
- La constante C queda fijada si fijamos una *condición inicial*: $u(0) = I$ (¿qué quiere decir esto?)
- Este tipo de ecuaciones aparece en diversos fenómenos. Ej.: ley de enfriamiento de Newton, caída de presión atmosférica, cálculo de inflación acumulada

Método de Diferencias Finitas

Dado un problema completo:

- Ecuación: $u'(t) = -au(t)$ (con $t \in (0, T]$)
- Condición inicial: $u(0) = I$

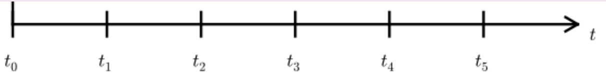
El método consiste en:

1. Discretizar el dominio
2. Reemplazar las derivadas por diferencias finitas
3. Formular una recurrencia

Paso 1: Discretizar el dominio

En nuestro ejemplo "discretizar el dominio" quiere decir que vamos a representar el tiempo (la única variable independiente del problema) por un conjunto de $N+1$ valores en el intervalo $[0, T]$:

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = T$$



Paso 1: Discretizar el dominio (cont.)

El método nos va a permitir calcular los valores aproximados de la función en esos puntos

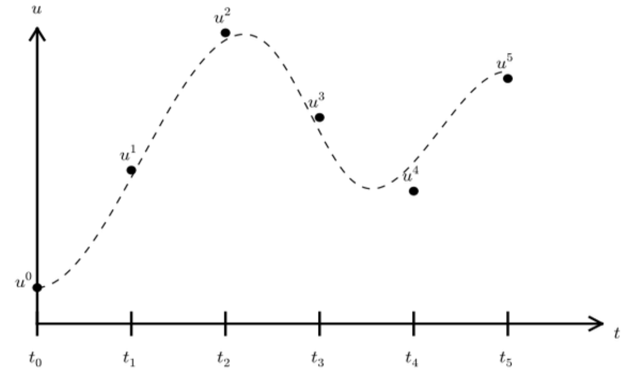


Fig. 1.1 Time mesh with discrete solution values at *points* and a *dashed line* indicating the true solution

Paso 2: Reemplazar las derivadas por diferencias finitas

Concretamente la idea esencial del método es reemplazar (en la ecuación) la derivada $u'(t)$ por una versión aproximada basada en los puntos de la discretización. Vamos a analizar tres formas distintas:

- *Forward-Euler*
- *Backward-Euler*
- *Crank-Nicholson*

Paso 2: Esquema Forward-Euler

En *Forward-Euler* aproximamos la derivada en t_n considerando el punto siguiente

$$u'(t_n) \sim \frac{u^{n+1} - u^n}{t_{n+1} - t_n}$$

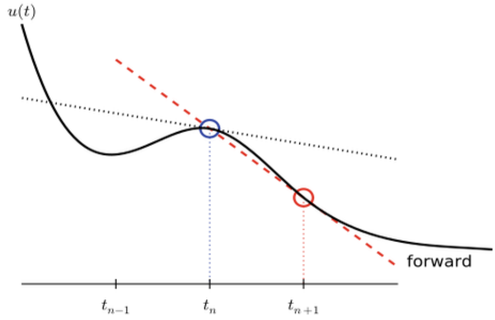


Fig. 1.3 Illustration of a forward difference

Paso 2: Esquema Backward-Euler

En *Backward-Euler* aproximamos la derivada en t_n considerando el punto anterior

$$u'(t_n) \sim \frac{u^n - u^{n-1}}{t_n - t_{n-1}}$$

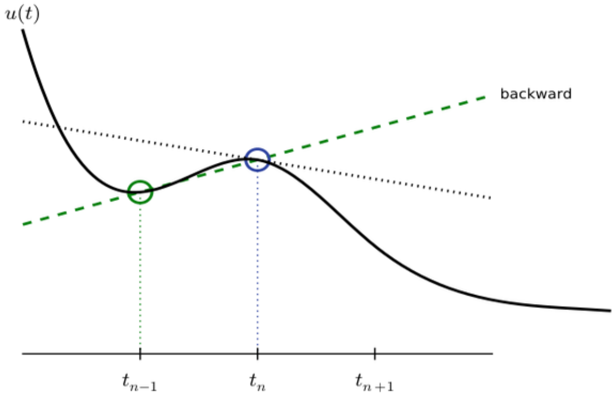


Fig. 1.4 Illustration of a backward difference

Paso 2: Esquema Crank-Nicholson

En *Crank-Nicholson* aproximamos la derivada en un punto intermedio entre t_n y t_{n+1} (esto es más preciso)

$$u'(t_{n+\frac{1}{2}}) \sim \frac{u^{n+1} - u^n}{t_{n+1} - t_n}$$

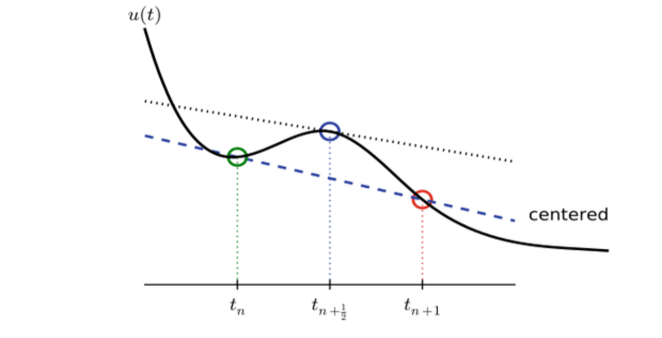


Fig. 1.5 Illustration of a centered difference

Paso 3: Formular una recurrencia

Una recurrencia nos permite calcular el valor siguiente de la función. Para eso hay que reemplazar la aproximación de la derivada en la ecuación y despejar u^{n+1}. Cada esquema induce una recurrencia distinta:

- *Forward-Euler*: $u^{n+1} = u^n - a(t_{n+1} - t_n)u^n$
- *Backward-Euler*: $u^{n+1} = \frac{1}{1+a(t_{n+1}-t_n)}u^n$
- *Crank-Nicholson*: $u^{n+1} = \frac{1-\frac{1}{2}a(t_{n+1}-t_n)}{1+\frac{1}{2}a(t_{n+1}-t_n)}u^n$

Paso 3: Regla θ

La regla θ permite unificar los tres esquemas introduciendo un parámetro.

$$u^{n+1} = \frac{1-(1-\theta)a(t_{n+1}-t_n)}{1+\theta a(t_{n+1}-t_n)} u^n$$

- *Forward-Euler*: $\theta = 0$
- *Backward-Euler*: $\theta = 1$
- *Crank-Nicholson*: $\theta = \frac{1}{2}$

Bibliografía

- Finite Difference Computing with Exponential Decay Models (Hans Peter Langtangen, Springer, 2016)