

VERIFICACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DE DISTRIBUCIONES NORMALES

DE BORTOLI, LUCIANO ¹ - FREIDKES, JONATHAN ²
PEPINO, LEONARDO ³ - TRICHARD, ELOUAN ⁴

¹ Universidad Nacional de Tres de Febrero, Buenos Aires, Argentina

luciano.nicolas.de.bortoli@gmail.com

² Universidad Nacional de Tres de Febrero, Buenos Aires, Argentina

jonifreidkes@gmail.com

³ Universidad Nacional de Tres de Febrero, Buenos Aires, Argentina

l-pepino@hotmail.com

⁴ Universidad Nacional de Tres de Febrero, Buenos Aires, Argentina

elouan.trichard.etu@univ-lemans.fr

RESUMEN Este trabajo intenta verificar el teorema fundamental de distribuciones normales analizando la distribución muestral de la amplitud discreta de un archivo de audio. Esto se realiza para un total de 10 canciones que pertenecen a distintos géneros musicales. Los resultados obtenidos verifican el teorema fundamental de distribuciones normales al presentar histogramas significativamente representativos de una distribución normal.

INTRODUCCIÓN

En el campo de la estadística, se puede comprobar que la suma de un gran número de variables aleatorias se distribuye de forma gaussiana según el teorema central del límite aplicable a todas las distribuciones estadísticas. El teorema fundamental de distribuciones normales demuestra que el desvío de una señal compuesta de la suma de otras señales será equivalente a la combinación de los desvíos de cada señal.

Este trabajo intenta verificar el teorema fundamental de distribuciones normales analizando la distribución muestral de una serie de archivos de audio pertenecientes a canciones de diversos artistas. Se desarrolla un código que permite obtener los desvíos e histogramas de cada uno de los audios y representarlos gráficamente para luego verificar su similaridad con la curva normal. Asimismo, se analizan las variaciones entre resultados para distintos audios, considerando el género musical y rango dinámico de los mismos.

MARCO TEÓRICO

Distribución Normal

En estadística, se conoce como distribución normal o gaussiana a una distribución de variable continua.

La gráfica de función de densidad es acampanada y simétrica para un determinado parámetro estadístico, siendo la moda y mediana equivalentes a la media. La distribución permite modelar tanto fenómenos naturales como sociales. Una distribución normal presenta un máximo de probabilidad para la media muestral, siendo la densidad de distribución decreciente a medida que se toman valores con mayor diferencia a la media.

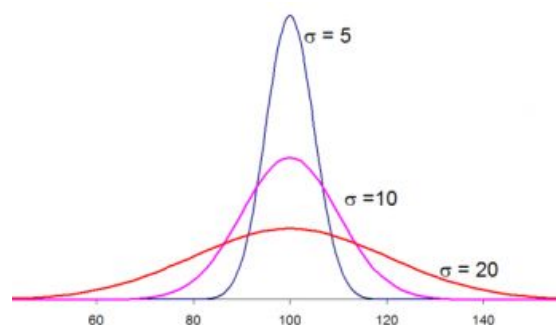


Figura 1: Distribución normal según el desvío.

La forma de la campana, ejemplificada en la Figura 1, depende del desvío muestral, el cual se obtiene al hacer la raíz del cociente entre la suma del

cuadrado de la resta de cada muestra con el de la media muestral, dividiendo por el número de muestras, como se muestra en la ecuación (1).

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{N-1}} \quad (1)$$

Teorema central del límite

El teorema del límite central [1] establece que la suma de un gran número de variables aleatorias bajo las condiciones de independencia e idénticamente distribuidas, se distribuye aproximadamente de forma gaussiana.

La distribución muestral de las medias muestrales es aproximadamente normal aún cuando la distribución de la población de la cual son extraídas no tenga una distribución normal.

Tests de normalidad

Los tests de normalidad se aplican a conjuntos de muestras para determinar la similitud de su distribución con una distribución normal. Esto consiste en considerar una hipótesis nula asociada a la magnitud del p-valor. El P-valor es la probabilidad de obtener el valor observado en una prueba estadística, o un valor de rechazo a la hipótesis nula, siendo ésta la hipótesis verdadera. En este caso, un p-valor pequeño indica alta similaridad con una distribución normal.

Teorema de las distribuciones normales

El teorema fundamental de las distribuciones normales [2] muestra que el desvío de la suma de un número de señales es equivalente a la combinación de los desvíos de las señales, como se muestra en la ecuación (2).

$$\sigma_{comb} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \dots + \sigma_n^2} \quad (2)$$

METODOLOGÍA

Audios seleccionados

Se utiliza un total de 10 archivos de audio, obtenidos a través de descargas de internet. Se consideró seleccionar 2 géneros musicales con rangos dinámicos diametralmente distintos de forma que sea posible visualizar el efecto en su distribución muestral.

Los audios utilizados para esta experiencia son las canciones en formato mp3 que se listan a continuación:

1. Aberinkula - Mars Volta
2. Metatron - Mars Volta
3. Ilyena - Mars Volta
4. Wax Simulacra - Mars Volta
5. Goliath - Mars Volta
6. Obertura_I Acto - Tchaikovsky
7. Comienzo - Tchaikovsky
8. Drosse (mayor nodriza) - Tchaikovsky
9. Sueno Clarita - Tchaikovsky
10. Batalla - Tchaikovsky

Procesamiento de señales

Se desarrolló un código en la plataforma Matlab, que permite cargar los archivos de audio, convertirlos a vectores que representen la variación de amplitud en el tiempo, para luego cortarlos de forma que sean todos de la misma dimensión. Se realizan los cálculos para comprobar si el desvío de la suma de las señales es equivalente a la combinación de los desvíos de cada señal.

Finalmente, se aplica la función “*histogram*” nativa de matlab para realizar los gráficos de histograma y posteriormente compararlos.

RESULTADOS & DISCUSIÓN

Histogramas

Mediante el procedimiento desarrollado en metodología, se obtuvieron los histogramas. En la Figura 2 se muestra la distribución muestral para la canción “*Wax Simulacra*” de Mars Volta, mientras que en la Figura 3, se muestra el concierto “*Sueno Clarita*” de Tchaikovsky.

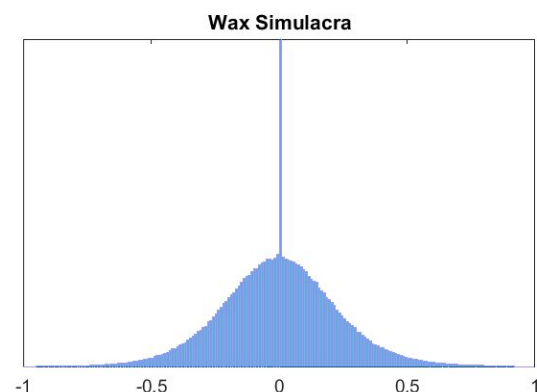


Figura 2: Distribución muestral
Audio: Wax Simulacra - Mars Volta

En principio se puede observar que para el valor de la media hay un pico en densidad muestral. Al tratarse de una señal de audio, el nivel de amplitud alcanzará valores distintos para cada ciclo, sin embargo, para completar cada ciclo debe cruzar por cero necesariamente. Este será el caso de los valores cercanos a cero también. A medida que se toman amplitudes cada vez más distintas de cero, la probabilidad de obtener el dicho nivel disminuye. Solo se alcanzarán amplitudes máximas para determinados instantes. Si el archivo de audio presenta componentes en altas frecuencias, los cruces por cero se incrementarán. Esto es dado ya que la alta frecuencia presenta gran cantidad de ciclos completados por segundo, llevando a que los cruces por cero correspondientes a cada ciclo aumenten la cantidad total de cruces del archivo. A partir de la forma de la campana es posible entonces obtener información respecto del rango dinámico del audio y del balance tonal del mismo.

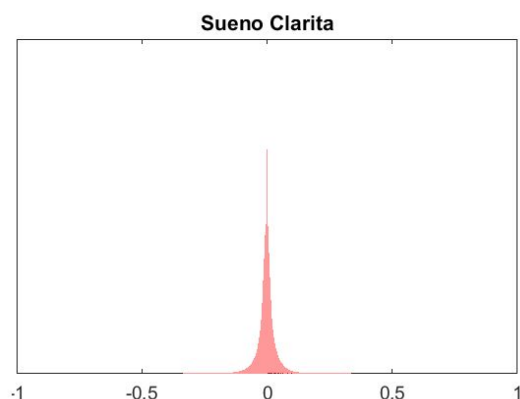


Figura 3: Distribución muestral
Audio: Sueño Clarita - Tchaikovsky

Suma de señales

Al computar la suma de todas las señales asociadas a los audios de Mars Volta paralelamente a las de Tchaikovsky, se obtiene un histograma para ambos géneros, mostrados en la Figura 4.

Se observa que la forma de la campana de la suma de los audios de Mars Volta mantiene su aspecto gaussiano característico, aunque los valores de amplitud cercanos a la media muestral se ven incrementados, transformando el gráfico en una forma de copa invertida. Por otro lado, para el caso de Tchaikovsky, la la distribución de la suma también presenta mayor triangularidad.

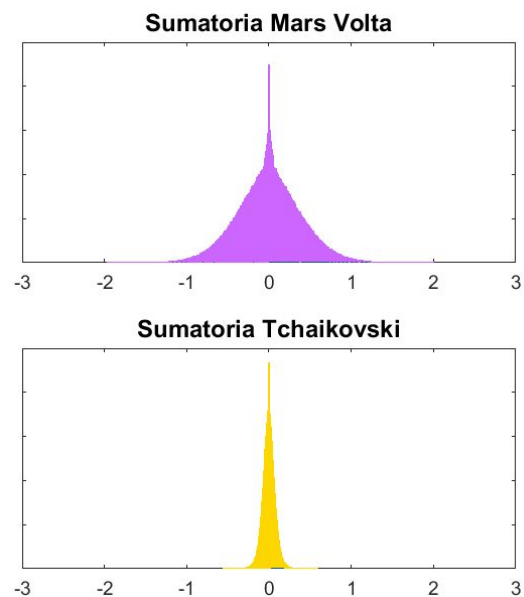


Figura 4: Histograma de suma de señales para audios de Mars Volta en contraste con los de Tchaikovski.

Rango Dinámico

Se puede observar que el género de música clásica orquestal tiene un desvío muestral considerablemente menor al del género musical popular. Esto se debe a que el rango dinámico de la obra se encuentra acotado a valores con amplitudes menores en el género clásico, alcanzando los picos de amplitud en menor proporción. El rango dinámico representativo de estas canciones en particular se muestran a través de su forma de onda en las Figuras 5 y 6 respectivamente

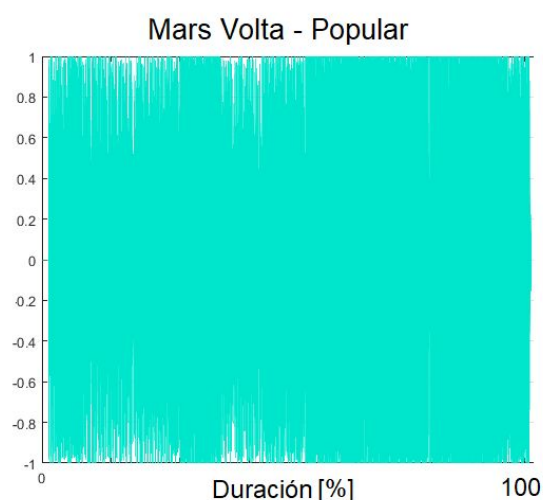


Figura 5: Rango dinámico de música popular,
Audio: Wax Simulacra - Mars Volta

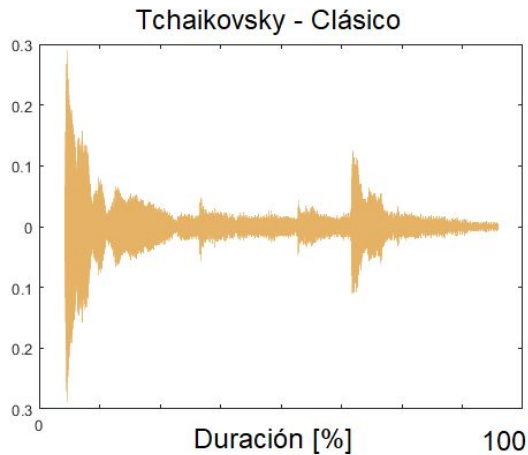


Figura 6: Rango dinámico de música clásica
Audio: Sueno Clarita - Tchaikovsky

Por un lado, se puede observar que el factor de cresta en el audio de música clásica es mayor, ya que su pico es significativamente más alto al de su valor rms. No es el caso de la música popular, que presenta picos con valores más cercanos al valor rms de la señal. En el anexo se muestran los histogramas obtenidos para los 10 archivos de audio estudiados.

Combinación de desvíos

Mediante el código de matlab se compararon los desvíos obtenidos para la suma de las señales de cada género, tanto como el del desvío combinado. Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1: Desvío de suma vs desvío combinado

DESVÍO	DE SUMA	COMBINADO
Mars Volta	0.38679	0.38597
Tchaikovsky	0.075568	0.075224

Se puede comprobar observando los resultados que la diferencia entre los desvíos de la suma de las señales y el desvío combinado es menor al 0.22% para el caso de Mars Volta, mientras que es menor al 0.46% para el caso de Tchaikovsky. Mediante estos resultados se verifica el teorema fundamental de las distribuciones muestrales para los casos analizados. El desvío obtenido para Mars Volta es mayor que el obtenido para Tchaikovsky, como era de esperarse al analizar los histogramas comparativos, ya que por simple inspección visual se verifica que las distribuciones de probabilidad en

las canciones de Mars Volta se asemejan más a normales que en las de Tchaikovsky, que tienden a ser triangulares con una mayor curtosis.

CONCLUSIONES

A partir de los resultados gráficos obtenidos, se puede concluir que se verifica el teorema fundamental de las distribuciones normales. El desvío de la suma de las señales muestra ser equivalente al del desvío combinado para ambos casos estudiados en un grado superior al 99%.

Los gráficos muestran una similitud significativa con la distribución normal. Se puede apreciar que ante diferentes géneros musicales, el desvío muestral es diferente, modificando la forma de la campana de gauss. Esto se debe a las diferencias en el factor de cresta y rango dinámico de las mismas, presentando desvíos mayores las canciones asociadas al género popular.

REFERENCIAS

- [1] Grinstead, Charles M.; Snell, J. Laurie (1997) "Central Limit Theorem. Introduction to Probability". AMS Bookstore. pp. 325-360.
- [2] Apuntes de clase, Instrumentos y Mediciones Acústicas, Ingeniería en sonido, Untref. 2017, 2C.

ANEXO

