Classificação de Árvores e Matrizes Bottleneck

Teorema 2.7. *[Teorema 2 (GRONE & MERRIS, 1987)] Seja T uma árvore de Tipo I e m a multiplicidade de $\lambda_2 = a(T)$ como um autovalor de $L(T)$. Então existem exatamente $m + 1$ ramos ativos em T.*

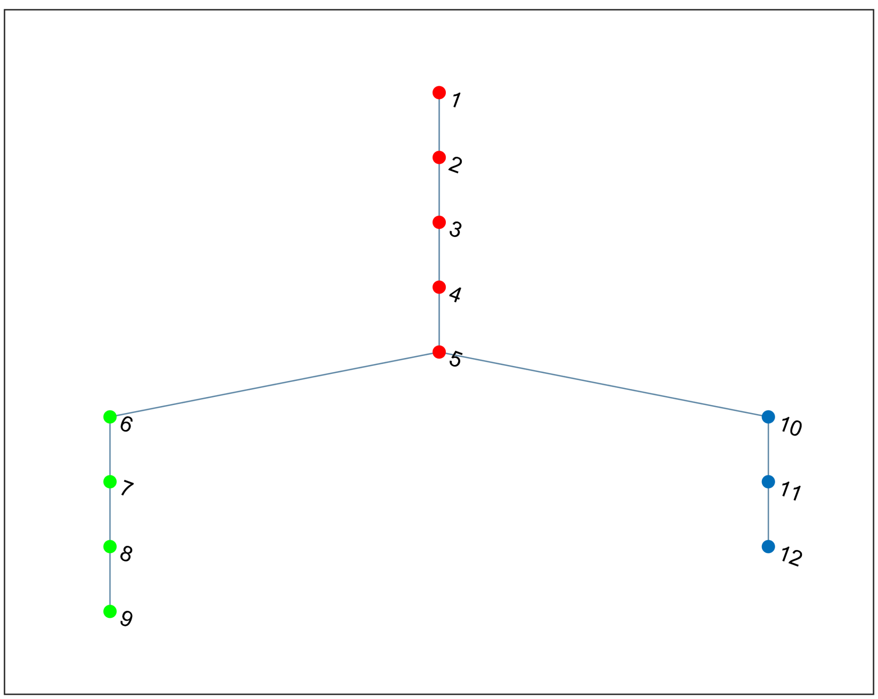
Definindo uma árvore do Tipo I e obtendo seu espectro

```
s=[1 3 3 5 5 7 7 9 5 10 12];
t=[2 2 4 4 6 6 8 8 10 11 11];
G=graph(s,t);

L=laplacian(G);
L=full(L);
[u,v]=eigs(L,size(L,1));
```

Note que a multiplicidade algébrica de a(T)=1, logo temos m+1 ramos ativos em T.

```
p=plot(G);
highlight(p, [1:5], 'NodeColor', 'r')
highlight(p, [6:9], 'NodeColor', 'g')
```



Os ramos em vermelho e verde são ativos, e o ramo em azul é passivo.

Proposição 2.8. *[Proposição 1 (KIRKLAND et al., 1996)] Seja T uma árvore, e L_k a submatriz principal da matriz Laplaciana $L(T)$, obtida eliminando a k-ésima linha e a k-ésima coluna. A entrada (i, j) da matriz L_k^{-1} é igual ao número de arestas de T que estão em ambos os caminhos, do vértice i até o k, como do vértice j até o vértice k.*

Definindo uma árvore do Tipo II e obtendo seu espectro:

```
s=[1 3 4 5 5 7 7 7 9 11];
t=[2 2 2 2 6 5 8 9 10 9];
G=graph(s,t);
h=plot(G);
L=laplacian(G);
L=full(L);
[u,v]=eigs(L,size(L,1));
```

Vamos escolher a linha e a coluna correspondente ao vértice k e inverter a matriz L:

```
k=5
```

```
k = 5
```

```
L(k,:)=[];
L(:,k)=[];
```

```
Linverse=inv(L);
```

Vamos escolher i e j:

```
i=6
```

```
i = 6
```

```
j=6
```

```
j = 6
```

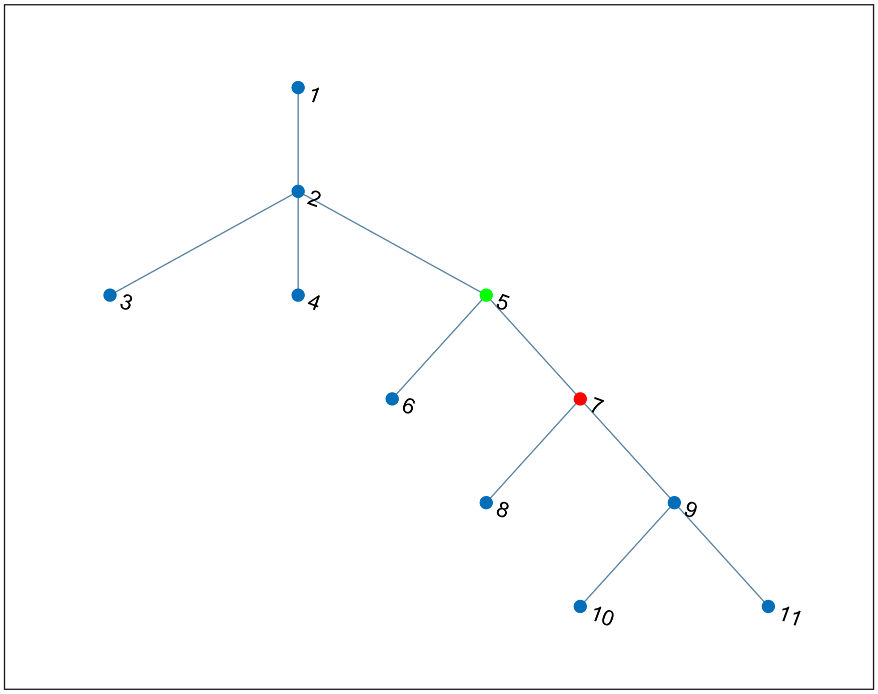
```
disp(['Número de arestas de T que estão em ambos os caminhos, ' ...
    'do vértice i até k, e do vértice j até k.'])
```

```
Número de arestas de T que estão em ambos os caminhos, do vértice i até k, e do vértice j até k.
```

```
display(Linverse(i,j))
```

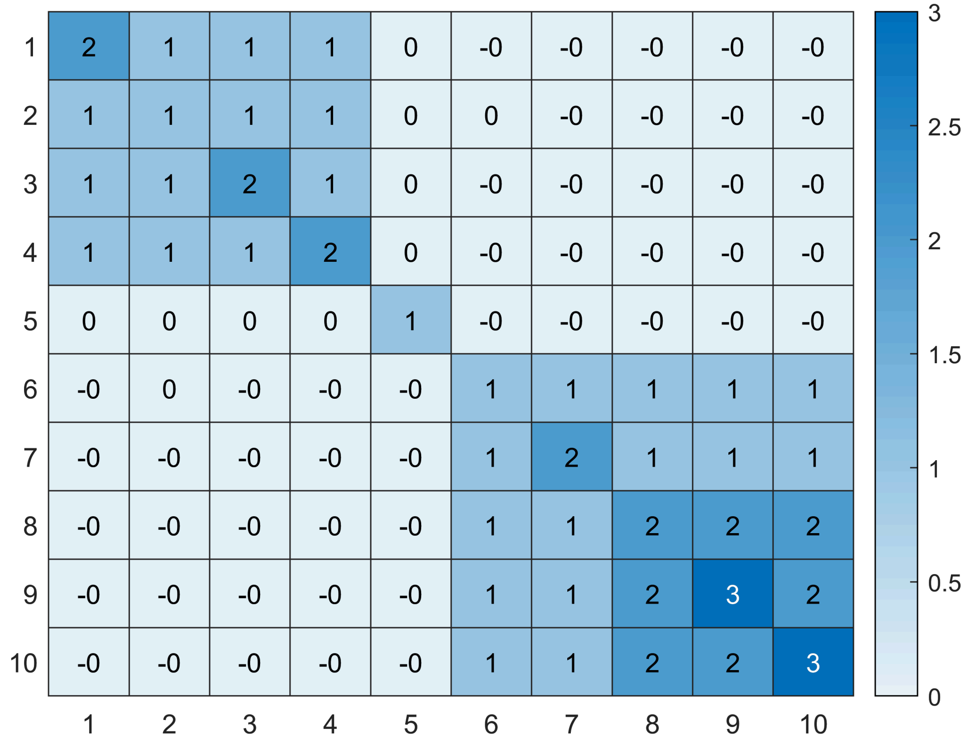
```
     1
```

```
highlight(h, [i+1,j+1], 'NodeColor', 'r')
highlight(h, k, 'NodeColor', 'g')
```



Definição 2.9. *[Definição 6.2.6 (MOLITIERNO, 2012)] A matriz L_k^{-1} é chamada matriz bottleneck da árvore T no vértice k e pode ser descrita como uma matriz diagonal por blocos, onde cada bloco diagonal corresponde a um ramo de T no vértice k, e é chamado de matriz bottleneck para aquele ramo em k.*

```
heatmap(Linverse)
```




```
ans =
  HeatmapChart with properties:

        XData: {10×1 cell}
        YData: {10×1 cell}
    ColorData: [10×10 double]

  Show all properties
```