



# Modelagem de Energia de Ondas em Zonas Costeiras

Luciano Garim Garcia<sup>1,2</sup>, Vinícius Lôndero<sup>1</sup>, Márcio Cardoso Junior<sup>1</sup> e Ariane Santos da Silveira<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Universidade do Vale do Rio dos Sinos, São Leopoldo/RS, Brasil*

<sup>2</sup> *Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre/RS, Brasil*

---

## Abstract

Neste trabalho apresentamos um modelo simplificado de ondas oceânicas baseado em teoria linear, com a finalidade de estimar a energia dessas ondas em ambientes costeiros. Para isto, utilizamos a equação de dispersão de Airy com aproximações para águas rasas e profundas. Como fatores de dissipação de energia, levamos em consideração fatores como quebra de ondas e velocidade orbital máxima de fundo. As equações abordadas são resolvidas numericamente em um grid obtido a partir de modelo digital de elevação (DEM) da Grande Barreira de Corais Australiana. A partir de uma simulação, constatamos que as atenuações de energia acompanharam a morfologia da área em estudo. Para evidenciar este fato, exibimos um corte na área simulada para analisar variação de altura ondas.

**Keywords:** Energia, Ondas, Dissipação, Airy.

---

## 1 INTRODUÇÃO

O comportamento de ondas em zonas costeiras têm sido amplamente discutido e modelado matematicamente pela comunidade científica. Tais zonas constituem regiões, entre os continentes e os oceanos, caracterizadas pela natureza geológica dos continentes (litologias e arcabouços tectônicos) e principalmente pela energia imposta pela variação do nível médio do mar. Por meio dos fenômenos de refração, difração e reflexão, as ondas tendem a amplificar e a transformar a dinâmica na zona costeira por meio da distribuição e dissipação de sua energia ao longo da costa, uma vez que estas respondem, sobretudo, pelo transporte de sedimentos litorâneos e pelos processos erosivos e deposicionais [6].

A forma mais comum de ondas são as geradas pela ação dos ventos sobre a superfície do oceano. A energia é transferida do vento para a água quando este atua sobre a superfície do oceano resultando na formação de ondas. Os modelos matemáticos utilizados

para a simulação de ondas geradas pelos ventos são divididos de acordo com a interação entre os componentes do espectro de energia. Os modelos de primeira ordem calculam os parâmetros de onda (altura, direção e período) de forma independente. Os de segunda ordem calculam a interação de forma parametrizada, impedindo o crescimento independente dos componentes do espectro [10]. Os modelos de terceira ordem não possuem nenhuma restrição da interação dos componentes do espectro e são baseados na equação do balanço de energia. Porém, modelos de segunda e terceira ordem demandam um processamento de dados muito maior em relação aos modelos de primeira ordem. Sendo assim, o uso de modelos simplificados e de bom desempenho se faz necessário.

A região em que as ondas são geradas pelo vento são chamadas de pistas de vento (fetch). Os primeiros cálculos de ondas geradas pelo vento foram realizados no projeto JONSWAP (Joint North Sea Wave Project)[8], em que, baseado em dados observacionais, foram desenvolvidas relações empíricas. O aumento da intensidade do vento e da pista produz maiores alturas de onda, mas existe um limite para o crescimento; este limite ocorre quando a velocidade de fase da onda atinge a velocidade do vento em superfície. Quando ambos propagam-se com a mesma velocidade, o vento não transfere mais energia para o oceano, atingindo o estágio de maturação (ou desenvolvimento total) [7]. Há diversas formulações para a altura significativa das ondas em estágio de maturação ou desenvolvimento total. Observações feita por [3] comprovam a existência do limite, ou seja, dado um valor de velocidade de vento, mesmo que a pista aumente, a altura significativa da onda (e o período) não ultrapassa o valor limite.

Baseado nas limitações de altura significativa de onda, apresentamos um modelo simplificado de propagação de ondas de primeira ordem para estimar a variação de energia superficial em zonas costeiras. A partir dessa altura limitante, a onda tende a se propagar em direção a regiões costeiras por meio de frentes de ondas, atenuando seu tamanho em função da morfologia da área simulada. Sendo assim, podemos estimar a variação de energia ao longo destas frentes.

O modelo será apresentado na Seção 2 e sua abordagem numérica será exibida na Seção 3. Finalmente, na Seção 4 apresentaremos uma simulação gerada a partir do modelo descrito.

## 2 MODELO DE ONDAS

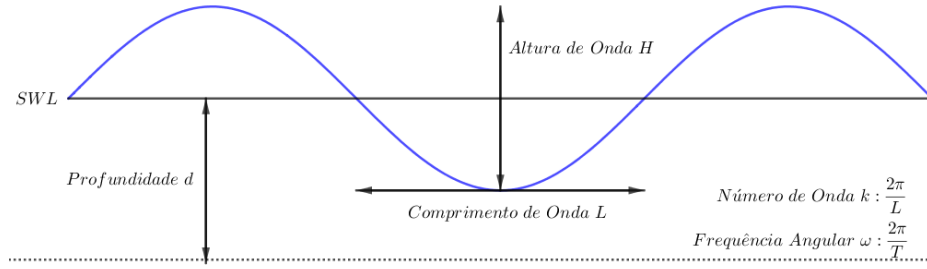
Uma descrição matemática simples de ondas é atribuída aos trabalhos de Airy em 1845 [1]. Sua teoria é aplicável a condições em que a altura da onda é pequena se comparada ao seu comprimento e a profundidade da água. É comumente referida como teoria linear ou de primeira ordem das ondas, devido às suposições simplificadoras feitas em sua derivação.

A Figura (1) mostra uma onda sinusoidal, de comprimento  $L$  e altura  $H$ . A frequência angular  $\omega$  e o número de onda  $k$  são descritos pelo período  $T$  e comprimento de onda  $L$ , respectivamente. A medida de profundidade  $d$  é tomada em função do nível de água calma  $SWL$  e o fundo oceânico.

A principal equação a ser utilizada para a modelagem de ondas será dada pela relação de dispersão para ondas lineares:

$$\omega^2 = gk \tanh(kd). \quad (1)$$

Esta equação trata da separação das ondas devido as diferenças de velocidade e de

**Fig. 1:** Modelo de onda linear.

direção, que particularmente decorrem de diferenças na frequência da onda. Além disso, ela expressa uma única relação entre  $\omega$ ,  $k$  e  $d$  (ou  $T$ ,  $L$  e  $d$ ). Se duas dessas variáveis são conhecidas, a terceira estará unicamente definida. Reescrevendo a Equação (1) em termos do comprimento e período de onda, temos:

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = g \frac{2\pi}{L} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right), \quad (2)$$

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right). \quad (3)$$

A velocidade de fase ou celeridade de ondas  $C$  é definida como a razão entre o comprimento de onda e seu período, então dividindo a Equação (3) por  $T$ , obtemos:

$$C = \frac{gT}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right). \quad (4)$$

Para valores dados de  $\omega$  e  $k$ , a onda se propagará mais rapidamente em águas profundas do que em águas rasas. Este fato explica porque ondas normalmente chegam com suas cristas paralelas à praia: uma onda em mar aberto com direção oblíqua à praia tenderá a dobrar-se, já que sua parte mais distante da praia, e portanto sujeita a profundidades maiores, será mais rápida, emparelhando com a parte da onda que estará em águas mais rasas e portanto, mais lenta. Este processo de mudança de direção de ondas chama-se refração [5].

Em teoria de ondas aquáticas é comum separar níveis de profundidade em função do comprimento de ondas, onde tais discretizações ocorrem para dois ou três níveis em geral. Essas restrições trazem simplificações no cálculo de funções hiperbólicas envolvidas no modelo físico e são utilizadas aqui.

**Tabela 1:** DISCRETIZAÇÃO DA PROFUNDIDADE EM FUNÇÃO DO COMPRIMENTO DE ONDAS.

Profundidade	Restrição	$\tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)$	$C$
Águas Rasas	$\frac{d}{L} \leq \frac{1}{20}$	$\frac{2\pi d}{L}$	$\sqrt{gd}$
Águas Profundas	$\frac{d}{L} \geq \frac{1}{2}$	1	$\frac{gT}{2\pi}$

Na Tabela 1 são apresentadas duas restrições, uma para águas rasas e outra para águas profundas. Em ambas restrições a função tangente hiperbólica possui comportamento assintótico, fazendo que seja possível estabelecer uma simplificação da Equação (4) para esses níveis de profundidade. Observa-se que em situações de águas rasas, o comprimento de onda é uma função da profundidade e do período, decrescendo à medida que ambos diminuem. No entanto, a celeridade da onda  $C$  depende apenas da profundidade e independe do período. Por isso, verifica-se que as ondas diminuem e abrandam à medida que se aproximam do litoral. O comprimento de onda em águas profundas e a correspondente celeridade são funções apenas do período, ambas as grandezas crescendo à medida que o período aumenta. Por isso, verifica-se que as ondas aumentam e são mais rápidas à medida que estão mais afastadas do litoral [5]. A fim de formalizar essa dinâmica das ondas, recorreremos a definição de frentes de ondas.

Frente de onda é a região do espaço que reúne todos os pontos fonte da onda que estão em fase e a um mesmo número de comprimentos de onda da fonte. Segundo [4], cada ponto de uma frente de onda possui a funcionalidade de uma nova fonte pontual. O conhecimento da velocidade e do período das ondas permite calcular a trajetória da onda, para um determinado conjunto de fontes de ondas e distribuição de profundidade [14]. A direção de propagação é perpendicular a frente de ondas, implicando que uma deformação na frente de ondas gere uma variação de direção de propagação. Considerando a direção e o tempo de viagem das ondas é possível estimar a altura de onda, conhecendo a fonte inicial [9].

A energia carregada por uma onda no oceano é a soma das energias potencial e cinética, e é cotada como a energia total por unidade de área da superfície do mar. Pela teoria de Airy, a energia potencial  $E_p$  e cinética  $E_k$  são iguais. Portanto, a energia  $E$  por unidade de área do oceano é:

$$E = \frac{1}{8} \rho g H^2, \quad (5)$$

onde  $g$  é a constante gravitacional e  $\rho$  é a densidade da água. Deduzimos da Equação (5), que a variação de energia está diretamente relacionada com a altura de onda, sendo assim é necessário analisar quando acontecem mudanças nesse parâmetro. Estudos como de [12] apontam que em um mar plenamente desenvolvido, as ondas atingem sua altura máxima, e conforme aproximam-se da costa diminuem de tamanho devido a quebra de ondas, fator que está relacionado com a profundidade. O índice de quebra  $\gamma$ , pode ser expresso por:

$$\gamma = \frac{H}{d} = 0.78, \quad (6)$$

onde na prática  $0.4 < \gamma < 1.2$  [11]. Assim, quando  $\gamma > 0.78$  acontece a quebra de onda, causando diminuição no seu tamanho e, conseqüentemente, dissipando energia. Além desse fator de dissipação, existem outros fenômenos físicos que influenciam na atenuação de energia, principalmente fatores relacionados com o fundo oceânico.

Uma onda que se propaga em águas profundas tem suas partículas percorrendo uma trajetória circular quase fechada. Nesse caso, o diâmetro orbital da trajetória em superfície corresponde à altura da onda, decrescendo exponencialmente até uma profundidade equivalente à metade do comprimento da onda. A partir daí, desconsidera-se o diâmetro

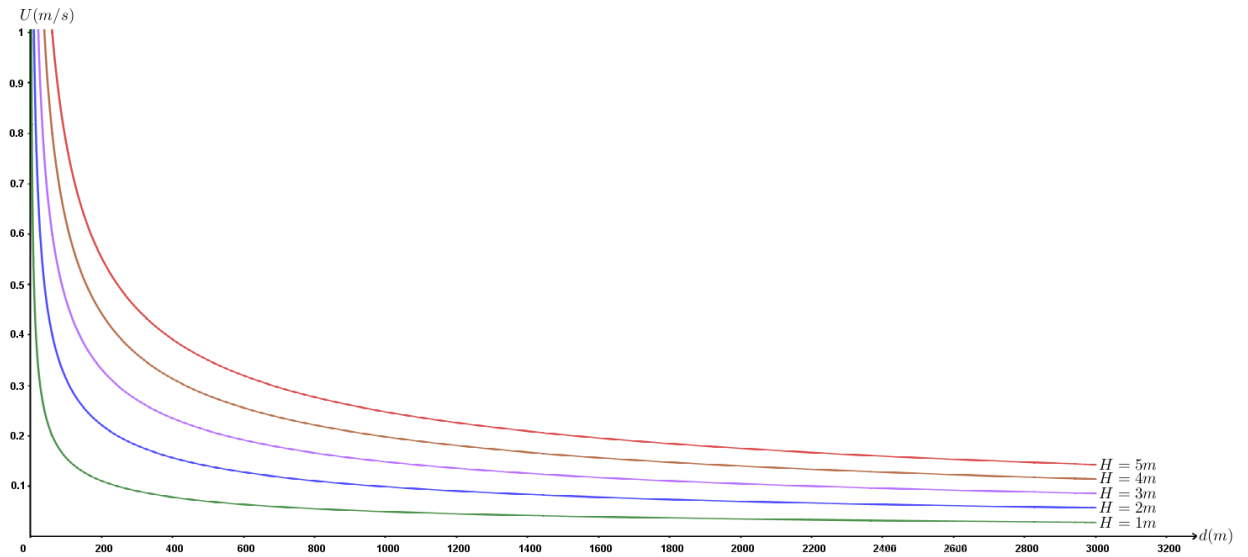


orbital, e considera-se que o deslocamento das partículas da água deixa de existir. Em águas com profundidades menores que a metade do comprimento da onda, águas rasas, a onda interage com o fundo oceânico e as órbitas se tornam cada vez mais achatadas, tomando forma de elipse.

Ondas que fluem em águas rasas produzem uma velocidade oscilatória no fundo do mar denominada velocidade orbital de fundo. Usando a aproximação para águas rasas e a teoria de Airy, temos a velocidade orbital máxima de fundo dada por:

$$U = \frac{H}{2} \sqrt{\frac{g}{d}} \quad (7)$$

Para o nosso modelo de ondas usaremos  $U$  como um parâmetro de atenuação de energia levando em consideração seu comportamento em relação a altura de onda. Na Figura (2), podemos ver o comportamento assintótico de  $U$  para diferentes alturas  $H$  e profundidades  $d$ . Note que quanto maior a profundidade da lâmina d'água menor será o valor de  $U$ , tendo o comportamento de uma função monótona decrescente. Vemos este mesmo decaimento para outros valores de  $H$  variando de 1 m a 5 m. Para um valor de  $H$  de 2 m,  $U$  depende apenas de  $d$ , tendo um comportamento assintótico ao se aproximar de zero. A fim de analisar com mais detalhe essas relações, consideramos uma normalização de  $U$  de modo que  $U \in [0, 1]$ .



**Fig. 2:** Velocidade orbital máxima de fundo para 5 alturas de ondas.

Com o auxílio de limites de funções de duas variáveis escrevemos a Tabela 2, a qual retrata que a altura de onda é máxima quando a profundidade é grande (usando  $\infty$  como abuso de notação), assim como a altura é mínima quando a onda se aproxima da costa. Essa relação nos permite entender a altura da onda, não somente em função da profundidade mas também da velocidade orbital máxima. Suponha que tenhamos uma altura significativa inicial onda  $H_0$  que é máxima para uma dada região do oceano. A fim de atenuar sua magnitude consideramos a Equação:

$$H = H_0(1 - U), \quad (8)$$

**Tabela 2:** RELAÇÕES ASSINTÓTICAS ENTRE  $U$ ,  $d$  E  $H$ 

$U$	$d$	$H$
$\approx 0$	$\approx \infty$	$H_{\max}$
$\approx 1$	$\approx 0$	$H_{\min}$

onde  $H$  é a nova altura de onda obtida em função de  $U$ . Note que quando  $U \rightarrow 1 \Rightarrow H \rightarrow 0$  e quando  $U \rightarrow 0 \Rightarrow H \rightarrow H_0$ . Definindo a variação de altura como  $\Delta H = H_0 - H$ , temos:

$$\Delta H \approx \begin{cases} 0 & , \text{ quando } U \rightarrow 0 \\ H_0 & , \text{ quando } U \rightarrow 1 \end{cases} \quad (9)$$

A partir da definição de  $\Delta H$  vemos que as variações na altura das onda acontecem quando a velocidade orbital máxima atinge seus maiores valores, ocorrendo em regiões rasas. Já em regiões de maior profundidade a altura de onda se mantém quase constante, variando muito pouco. Como a energia de ondas é proporcional a altura de onda ao quadrado, então essa variação dada por  $\Delta H$  implica em uma atenuação de energia. Sendo assim, para o nosso modelo de ondas os fatores de dissipação de energia serão dados a partir da quebra de ondas e da velocidade orbital máxima no fundo. Na próxima seção será abordado o método numérico a ser utilizado no modelo.

### 3 MODELO NUMÉRICO

Para a caracterização do modelo numérico considere um grid de tamanho  $n \times m$  com  $n$  linhas e  $m$  colunas. Considere cada nó do grid dado por uma entrada  $(i, j)$ , onde  $i = 1, \dots, n$  e  $j = 1, \dots, m$ . A distância a cada dois nós adjacentes possui valor 1, e em relação a nós não-adjacentes pode ser obtida via teorema de Pitágoras. A distância física entre dois nós do grid será dada em função do tamanho célula  $cell_{size}$ . Por exemplo, se o nó  $(i, j)$  é a adjacente ao nó  $(i + 1, j)$  sua distância no grid será 1 e sua distância física será  $1 \times cell_{size}$ .

Para a inicialização do método é fornecido uma altura significativa de onda  $H_0$  e uma direção inicial  $\alpha$  de propagação. Desse modo, inicializamos os seguintes parâmetros:

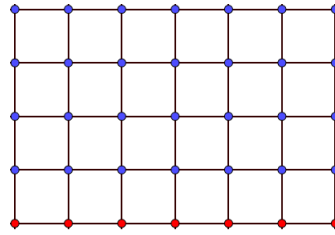
$$T_0 = \max \left\{ 0.47H_0 + 6.76, \pi^2 \sqrt{\frac{H_0}{g}} \right\}, \quad (10)$$

$$L_0 = \frac{gT_0^2}{\pi}, \quad f_0 = \frac{2\pi}{T_0}, \quad k_0 = \frac{2\pi}{L_0}, \quad c_0 = \frac{gT_0}{2\pi}. \quad (11)$$

Com base nesta direção de propagação os pontos fonte das ondas são inicializados.

Na Figura 3 os pontos em vermelho representam as fontes iniciais de ondas, formando uma frente de ondas linear. Os pontos em azul não possuem atribuição, e conforme as ondas se propagam estes pontos vão recebendo os tempos de viagem das ondas. Cada ponto azul que é alcançado por uma frente de ondas torna-se uma nova fonte de ondas de acordo com o princípio de Huygens.

Para calcular o tempo de viagem das ondas parte-se do conhecimento da altura significativa inicial e de aproximações para o cálculo de seu período e comprimento. Com



**Fig. 3:** Inicialização dos pontos fontes com direção de propagação de baixo para cima

isso, é possível obter a celeridade de ondas e atualizar os tempos de viagem em função deste parâmetro. Essa atualização dos tempos é feita de maneira local, considerando o ponto fonte e uma vizinhança de ordem  $\sqrt{5}$ , ou seja, tomando-se 8 direções e 20 vizinhos. Se o tempo do nó fonte mais o tempo de viagem entre os nós é menor do que o tempo já atribuído a um nó vizinho, então o nó vizinho recebe um tempo menor. As atualizações terminam quando não há mais modificações nos tempos. A altura de onda é então calculada ao longo das frentes de propagação.

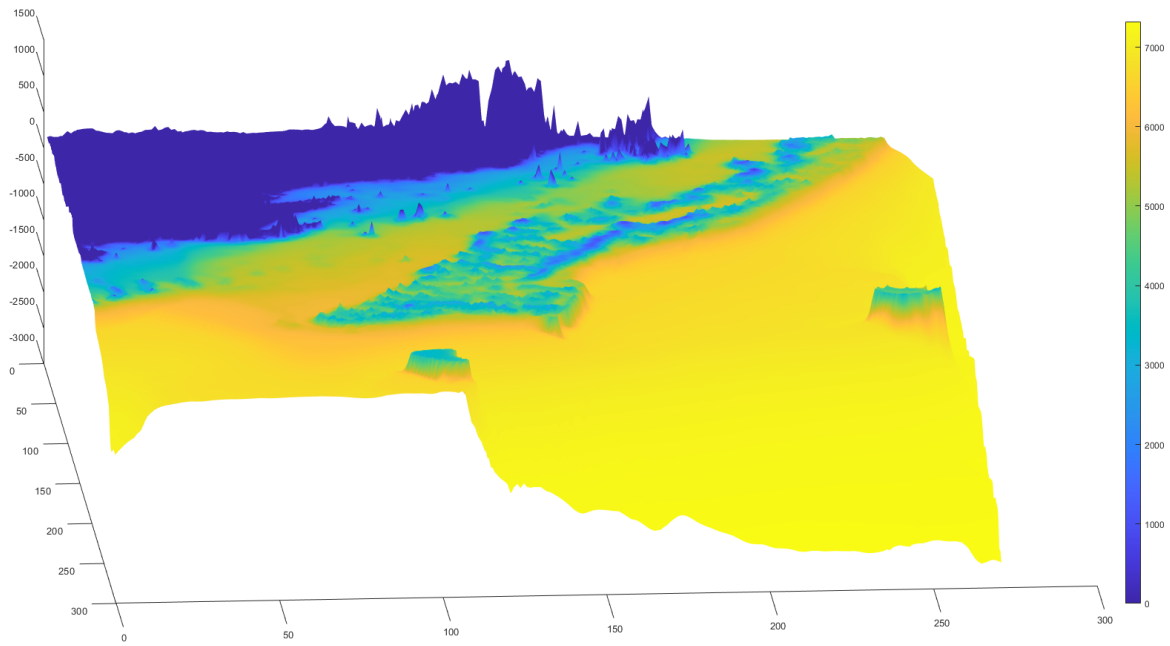
Considerando o ajuste na altura da onda dada pela sua quebra, podemos então calcular a velocidade orbital máxima no fundo. Normalizando  $U$  e calculando  $\Delta H$ , atualizamos o valor de altura e enfim obtemos a energia final do modelo de ondas.

#### 4 SIMULAÇÃO

A área de estudo para aplicação do modelo de energia é a Grande Barreira de Coral Australiana, composta por cerca de 2900 recifes, 600 ilhas continentais e 300 atóis de coral, situada entre as praias do nordeste da Austrália e Papua-Nova Guiné. Para proceder com a simulação utilizamos um Modelo Digital de Elevação (DEM) disponibilizado pelo projeto 3DGBR [2]. O grid utilizado possui formato retangular com  $272 \times 282$  células, onde cada par de células vizinhas estão a uma distância real de  $2 \text{ km}$ , compreendendo uma área total de  $306816 \text{ km}^2$ . A profundidade máxima na área é de  $2865 \text{ m}$ , com morfologia de rampa entre  $150 \text{ m}$  e  $2865 \text{ m}$  de profundidade, e plataforma com extensão até a costa. Para fins de implementação usamos o software MATLAB (2019b) e plugin TopoToolbox [13] em um computador com processador Intel(R) Core(TM) i9-9900K CPU @ 3.60 GHz.

A representação da simulação é apresentada na Figura 4, com altura significativa de onda inicial de  $H_0 = 2.5 \text{ m}$  e direção de propagação de ondas da direita para esquerda, conforme orientação da Figura 4. Os valores na barra lateral representam densidade de energia por unidade de área da superfície do mar  $E$  com unidade em  $(J/m^2)$ . Note que na borda da área de simulação temos a energia máxima do modelo devido ao valor de  $H_0$  informado; e conforme as ondas propagam-se em direção ao continente dissipam energia em profundidades menores, como é possível ver nos dois montes submarinos e quando as ondas alcançam a barreira de corais a qual situa-se entre  $1 \text{ m}$  e  $50 \text{ m}$  de profundidade. Quando as ondas passam pela barreira de corais já transportam uma energia menos acentuada, que é dissipada novamente pelos fatores de quebra de ondas, e atenuação devido a velocidade máxima orbital de fundo.

Para analisar a variação de altura de ondas, foi feito um corte vertical na posição  $j = 129$  do grid, apresentado na Figura 5. Note que a altura diminui devagar até encontrar a barreira, tendo uma diminuição expressiva na posição  $i = 150$ . Logo após, recupera-se



**Fig. 4:** Modelo de energia de ondas simulado na Grande Barreira de Corais Australiana. A região em azul forte representa a costa Australiana (área de terra); as demais cores representam a intensidade de energia de ondas simulada. Cores em escala de amarelo representam as energias mais altas, e as cores em escala de verde e azul claro representam as energias intermediárias e baixas, respectivamente.

parte da energia devido ao tempo que a onda viaja, e novamente, próximo à costa ocorre um decréscimo acentuado após os 40 *m* de profundidade, devido aos fatores de dissipação.

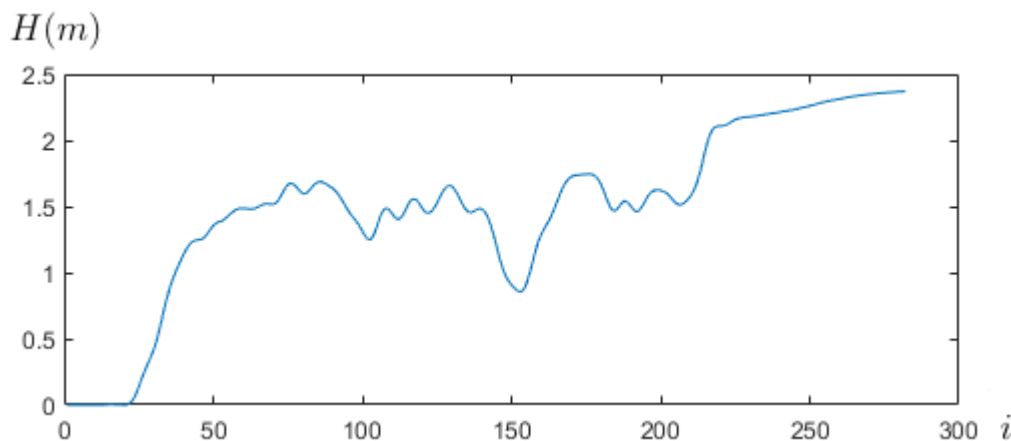
A partir dessa simulação, verificamos que a energia diminui ao se aproximar da zona costeira, ou quando a onda passa por rampas ou picos submarinos. Destacamos também a eficiência do modelo computacional que obtém o mapa de energia em aproximadamente 5 segundos para as dimensões de grid descrito anteriormente. Ressaltamos que é interessante fazer simulações para maiores dimensões e estabelecer uma correlação entre os valores de altura de ondas simulados com alturas medidas, se disponíveis.

## 5 CONCLUSÃO

Apresentamos um modelo de ondas baseado em teoria linear para estimar a energia superficial de ondas. Consideramos fatores físicos como quebra de ondas e velocidade orbital máxima de fundo para atenuação de energia. A partir da implementação de um método numérico, usamos a Grande Barreira de Corais da Austrália como área de simulação. Os resultados obtidos foram apresentados graficamente em uma superfície gerada em MATLAB com os níveis de energia apresentados em escala de cores. Com base em um corte vertical na superfície em estudo, verificamos a variação de altura de ondas em relação a zona de propagação.

Para trabalhos futuros esperamos que o presente estudo possa nos guiar a obter modelos genéricos para caracterização de ambientes costeiros em função de parâmetros oceanográficos. A teoria de ondas de segunda e terceira ordem é uma alternativa de modelagem





**Fig. 5:** Corte vertical do grid para exibir a variação da altura de ondas.

a ser considerada, pois descreve mais precisamente as assimetrias das velocidades orbitais, propiciando um modelo de energia mais conciso. Neste sentido, o uso de técnicas de modelagem numérica será essencial para obter soluções que demandem um custo computacional reduzido do que se conhece para estes modelos atualmente.

## 6 Agradecimentos

Esta pesquisa foi realizada dentro do termos do Acordo de Cooperação e Assistência Técnica assinada pela Universidade do Vale do Rio dos Sinos (UNISINOS) e pelo Petróleo Brasileiro S.A (PETROBRAS).

## Referências

- [1] G. B. Airy. *Tides and waves*. B. Fellowes, 1845.
- [2] R. Beaman. 3dgr: A high-resolution depth model for the great barrier reef and coral sea. *Marine and Tropical Sciences Facility (MTSRF) Project*, 2:13, 2010.
- [3] D. Carter. Prediction of wave height and period for a constant wind velocity using the jonswap results. *Ocean Engineering*, 9(1):17–33, 1982.
- [4] F. J. Dijksterhuis. *Lenses and waves: Christiaan Huygens and the mathematical science of optics in the seventeenth century*, volume 9. Springer Science & Business Media, 2004.
- [5] L. Farina. Ondas oceânicas de superfície. *Notas em Matemática Aplicada, SBMAC*, 25, 2006.
- [6] G. Griggs and A. Trenhaile. *Coastal cliffs and platforms*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1994.
- [7] J. Harari and R. de Camargo. Numerical simulation of the tidal propagation in the coastal region of santos (brazil, 24 s 46 w). *Continental Shelf Research*, 23(16):1597–1613, 2003.

- [8] K. Hasselmann, T. P. Barnett, E. Bouws, H. Carlson, D. E. Cartwright, K. Enke, J. Ewing, H. Gienapp, D. Hasselmann, P. Kruseman, et al. Measurements of wind-wave growth and swell decay during the joint north sea wave project (jonswap). *Ergänzungsheft 8-12*, 1973.
- [9] J. Hill, D. Tetzlaff, A. Curtis, and R. Wood. Modeling shallow marine carbonate depositional systems. *Computers & Geosciences*, 35(9):1862–1874, 2009.
- [10] M. d. F. A. d. Matos, C. J. E. Fortes, V. E. Amaro, and A. C. Scudelari. Análise comparativa da agitação obtida com o modelo numérico (swan) na modelagem de ondas do litoral setentrional do rio grande do norte, brasil e dados de campo. *Revista de Gestão Costeira Integrada*, 13(3):283–299, 2013.
- [11] C. B. Rachman et al. *Two Dimensional (2D) Experimental of Piling Up Behind Submerged Breakwater*. PhD thesis, [Yogyakarta]: Universitas Gadjah Mada, 2012.
- [12] O. Sato. Ondas e marés. *Universidade de São Paulo*, 2010.
- [13] W. Schwanghart and D. Scherler. Topotoolbox 2—matlab-based software for topographic analysis and modeling in earth surface sciences. *Earth Surface Dynamics*, 2(1):1–7, 2014.
- [14] D. M. Tetzlaff and M.-T. Schafmeister. Interaction among sedimentation, compaction, and groundwater flow in coastal settings. *Coastline Changes: Interrelation of Climate and Geological Processes*, 426:65, 2007.