

Lógica de Enunciados Compuestos

Tabla de contenidos

1. Negaciones de Y y O: Leyes de De Morgan

1.1. Aplicación de las Leyes de De Morgan

1.2. Desigualdades y Leyes de De Morgan

1.3. Un ejemplo preventivo

2. Tautologías y Contradicciones

2.1. Ejemplo 1

2.2. Ejemplo 2

3. Resumen de Equivalencias Lógicas

4. Simplificación de Formas de Enunciados

1. Negaciones de Y y O: Leyes de De Morgan

Para que el enunciado “John es alto y Jim es pelirrojo” sea verdadero, ambos componentes deben ser verdaderos. Por lo que si el enunciado es falso, uno de los componentes o ambos deben ser falsos. Así pues, la negación se puede escribir como “John no es alto o Jim no es pelirrojo”. En general, la negación de la conjunción de los dos enunciados es lógicamente equivalente a la disyunción de sus negaciones. Es decir, las formas de enunciados $\sim(p \wedge q)$ y $\sim p \vee \sim q$ son lógicamente equivalentes. Compruebe esto utilizando tablas de verdad.

Solución

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p \vee \sim q$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

$\sim(p \wedge q)$ y $\sim p \vee \sim q$ siempre tienen los mismos valores de verdad, por lo que son lógicamente equivalentes

Simbólicamente,

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q.$$

En los ejercicios al final de esta sección se le pide que muestre que la ley análoga a la negación de la disyunción de dos enunciados es lógicamente equivalente a la conjunción de sus negaciones:

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q.$$

Leyes de De Morgan

La negación de un enunciado y es lógicamente equivalente al enunciado o en el que cada componente es negado.

La negación de un enunciado o es lógicamente equivalente al enunciado y en el que cada componente es negado.

1.1. Aplicación de las Leyes de De Morgan

Escriba negaciones para cada una de los siguientes enunciados:

- a. John tiene una altura de 6 pies y pesa por lo menos 200 libras.
- b. El autobús llegó tarde o el reloj de Tom estaba retrasado.

Solución

- a. John no tiene una altura de 6 pies o pesa menos de 200 libras.
- b. El autobús no llegó tarde y el reloj de Tom no estaba retrasado.

Ya que el enunciado “ni p ni q ” significa lo mismo que “ $\sim p$ y $\sim q$ ”, una respuesta alternativa para b) es “Ni el autobús llegó tarde, ni el reloj de Tom estaba retrasado.” ■

Si x es un número real dado, digamos que x no es menor a 2 ($x \not< 2$) significa que x no se encuentra a la izquierda de 2 en la recta numérica. Esto equivale a decir que $x = 2$, o que x se encuentra a la derecha de 2 en la recta numérica ($x = 2$ o $x > 2$). Por tanto,

$$x \not< 2 \text{ es equivalente a } x \geq 2.$$

Gráficamente,



Del mismo modo,

$$x \not> 2 \text{ es equivalente a } x \leq 2,$$

$$x \not\geq 2 \text{ es equivalente a } x > 2 \text{ y}$$

$$x \not\leq 2 \text{ es equivalente a } x < 2.$$

1.2. Desigualdades y Leyes de De Morgan

Utilice las leyes de De Morgan para escribir la negación de $-1 < x \leq 4$.

Solución El enunciado dado es equivalente a

$$-1 < x \text{ y } x \leq 4.$$

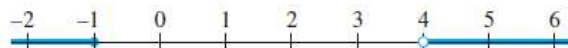
Por las leyes de De Morgan, la negación es

$$-1 \nless x \text{ o } x \nless 4,$$

lo que equivale a

$$-1 \geq x \text{ o } x > 4.$$

Gráficamente, si $-1 \geq x$ o $x > 4$, entonces x se encuentra en la región sombreada de la recta numérica, como se muestra a continuación.



Las leyes de De Morgan se utilizan con frecuencia al escribir programas de computadora. Por ejemplo, supongamos que quiere que su programa elimine todos los archivos modificados fuera de un rango dado de fechas, por ejemplo de la fecha 1 a la fecha 2 inclusive. Se podría utilizar el hecho que

$$\sim(\text{fecha1} \leq \text{modificación_archivo_fecha} \leq \text{fecha2})$$

es equivalente a

$$(\text{archivo_modificación_fecha} < \text{fecha1}) \text{ o } (\text{fecha2} < \text{archivo_modificación_fecha}).$$

1.3. Un ejemplo preventivo

De acuerdo a las leyes de De Morgan, la negación de

p : Jim es alto y Jim es delgado

es

$\sim p$: Jim no es alto o Jim no es delgado

porque la negación de un enunciado y es el enunciado o en el que los dos componentes son negados.

Por desgracia, puede surgir un aspecto potencialmente confuso del idioma español cuando se están tomando negaciones de este tipo. Considere que el enunciado p se puede escribir en forma más compacta como

p' : Jim es alto y delgado.

Cuando está así escrito, otra manera de negar esto, es

$\sim(p')$: Jim no es alto y delgado.

Pero en esta forma la negación se ve como un enunciado y . ¿No se violan las leyes de De Morgan?

En realidad no se violan. La razón es que en la lógica formal las palabras y y o sólo se permiten entre enunciados completos, no entre fragmentos de frases.

Una lección que aprender de este ejemplo es que cuando se aplican las leyes de De Morgan, se deben tener enunciados completos a cada lado de cada y en cualquier lado de cada o . ■

2. Tautologías y Contradicciones

Se ha dicho que toda la matemática se reduce a tautologías. Aunque esto es formalmente cierto, el mayor trabajo de los matemáticos es pensar que sus temas tienen sustancia y forma. Sin embargo, una comprensión intuitiva de las tautologías lógicas básicas es parte de las herramientas necesarias para cualquier persona que razone con matemáticas.

• Definición

Una **tautología** es una forma de enunciado que siempre es verdadera, independientemente de los valores de verdad de los enunciados individuales sustituidos por sus enunciados variables. Un enunciado cuya forma es una tautología es un **enunciado tautológico**.

Una **contradicción** es una forma de enunciado que siempre es falso, independientemente de los valores de verdad de los enunciados individuales de los enunciados variables sustituidos. Un enunciado cuya forma es una contradicción es un **enunciado contradictorio**.

De acuerdo con esta definición, lo verdadero de un enunciado tautológico y la falsedad de un enunciado contradictorio se deben a la estructura lógica de los propios enunciados y son independientes de los significados de los enunciados.

2.1. Ejemplo 1

Demuestre que el enunciado de la forma $p \vee \sim p$ es una tautología y que el enunciado de la forma $p \wedge \sim p$ es una contradicción.

Solución

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$	$p \wedge \sim p$
V	F	V	F
F	V	V	F

↑
todas V así
que $p \vee \sim p$ es
una tautología,

↑
todas F así
que $p \wedge \sim p$ es
una contradicción



2.2. Ejemplo 2

Si t es una tautología y c es una contradicción, demuestre que $p \wedge t \equiv p$ y $p \wedge c \equiv c$.

Solución

p	t	$p \wedge t$	p	c	$p \wedge c$
V	V	V	V	F	F
F	V	F	F	F	F

↑ ↑ ↑ ↑
valores iguales, valores iguales,
por tanto por tanto
 $p \wedge t \equiv p$ $p \wedge c \equiv c$



3. Resumen de Equivalencias Lógicas

En cualquier enunciado variable dado p , q y r , con una tautología t y una contradicción c , son válidas las siguientes equivalencias lógicas.

- | | | |
|---------------------------------------|---|---|
| 1. <i>Leyes conmutativas:</i> | $p \wedge q \equiv q \wedge p$ | $p \vee q \equiv q \vee p$ |
| 2. <i>Leyes asociativas:</i> | $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ | $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ |
| 3. <i>Leyes distributivas:</i> | $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ | $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ |
| 4. <i>Leyes de la identidad:</i> | $p \wedge t \equiv p$ | $p \vee c \equiv p$ |
| 5. <i>Leyes de negación:</i> | $p \vee \sim p \equiv t$ | $p \wedge \sim p \equiv c$ |
| 6. <i>Ley de la doble negación:</i> | $\sim(\sim p) \equiv p$ | |
| 7. <i>Leyes de idempotencia:</i> | $p \wedge p \equiv p$ | $p \vee p \equiv p$ |
| 8. <i>Leyes universales acotadas:</i> | $p \vee t \equiv t$ | $p \wedge c \equiv c$ |
| 9. <i>Leyes de De Morgan:</i> | $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ | $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ |
| 10. <i>Leyes de absorción:</i> | $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ | $p \wedge (p \vee q) \equiv p$ |
| 11. <i>Negaciones de t y c:</i> | $\sim t \equiv c$ | $\sim c \equiv t$ |

4. Simplificación de Formas de Enunciados

Utilice lo explicado en el capítulo 3, para comprobar la equivalencia lógica:

$$\sim(\sim p \wedge q) \wedge (p \vee q) \equiv p.$$

Solución Use las leyes del teorema 2.1.1 para reemplazar la forma de enunciado de la izquierda, por expresiones lógicamente equivalentes. Cada vez que haga esto, obtiene una forma de enunciado lógicamente equivalente. Continúe haciendo reemplazos hasta obtener la forma de enunciado de la derecha.

$$\begin{aligned}\sim(\sim p \wedge q) \wedge (p \vee q) &\equiv (\sim(\sim p) \vee \sim q) \wedge (p \vee q) && \text{por las leyes de De Morgan} \\ &\equiv (p \vee \sim q) \wedge (p \vee q) && \text{por la ley de doble negación} \\ &\equiv p \vee (\sim q \wedge q) && \text{por la ley distributiva} \\ &\equiv p \vee (q \wedge \sim q) && \text{por la ley conmutativa para } \wedge \\ &\equiv p \vee c && \text{por la ley de negación} \\ &\equiv p && \text{por la ley de identidad.} \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Es útil tener habilidad en la simplificación de formas de enunciado para la construcción lógicamente eficiente de programas de computadora y en el diseño de circuitos lógicos digitales.

Aunque las propiedades del capítulo 3 se pueden utilizar para demostrar la equivalencia lógica de dos formas de enunciado, no se pueden utilizar para demostrar formas de enunciado que no son lógicamente equivalentes. Por otra parte, las tablas de verdad siempre se pueden utilizar para determinar tanto equivalencia como no equivalencia y las tablas de verdad son fáciles de programar en una computadora. Sin embargo, cuando se utilizan tablas de verdad, la comprobación de equivalencia siempre requiere de 2^n pasos, donde n es el número de variables. A veces se puede ver rápidamente que hay dos formas de enunciado que son equivalentes por las propiedades del Capítulo 3, mientras que se necesitaría un poco de cálculo para mostrar su equivalencia con tablas de verdad. Por ejemplo, se deduce inmediatamente de la ley asociativa para \wedge que $p \wedge (\sim q \wedge \sim r) \equiv (p \wedge \sim q) \wedge \sim r$, mientras que la comprobación de la tabla de verdad requiere construir una tabla de ocho renglones.