Forma Lógica y Equivalencia Lógica

Descripción

El concepto central de la lógica deductiva es el concepto de forma de argumento. Un argumento es una secuencia de enunciados destinados a demostrar la verdad de una frase. La frase al final de la secuencia se llama la conclusión y los enunciados anteriores se llaman premisas. Para tener confianza en la conclusión que obtiene de un argumento, debe asegurarse de que las premisas sean aceptables por sus propios méritos o que son consecuencia de otros enunciados que se sabe que son verdaderos.

En lógica, la forma de un argumento se distingue de su contenido. El análisis lógico no le ayudará a determinar el valor intrínseco del contenido de un argumento, pero le ayudará a analizar la forma de un argumento para determinar si la verdad de la conclusión se desprende necesariamente de la verdad de las premisas. Por esta razón, la lógica a veces se define como la ciencia de la inferencia necesaria o la ciencia del razonamiento.

Considere los siguientes dos argumentos, por ejemplo. Aunque su contenido es muy diferente, su forma lógica es la misma. Ambos argumentos son válidos en el sentido de que si sus premisas son verdaderas, entonces sus conclusiones también deben ser verdaderas.

Tabla de contenidos

1. Argumentos

Argumento 1
Si la sintaxis del programa es defectuosa o si los resultados de la ejecución del programa dan como resultado una división entre cero, la computadora va a generar un mensaje de error. Por tanto, si la computadora no genera un mensaje de error, entonces, la sintaxis del programa es correcta y la ejecución del programa no da como resultado una división entre cero.

Argumento 2

Si x es un número real tal que x <-2 o x > 2, entonces x^2> 4. Por lo tanto, si $x^2 \not> 4$ entonces $x \not< -2$ y $x \not> 2$

Para mostrar la forma lógica de estos argumentos, utilizamos letras del alfabeto (tal como p, q y r) para representar las frases componentes y la expresión “no p” se refiere a la frase “Este no es el caso que p”. Entonces, la forma lógica común de ambos argumentos anteriores es la siguiente:

Si p o q, entonces r.

Por tanto, si no r, entonces no p y no q.

2. Identificación de forma lógica

Complete los espacios en blanco para que el argumento *b*) tenga que la misma forma que el argumento *a*). Después represente la forma más común de los argumentos usando letras para presentar los enunciados compuestos.

a. Si Jane es una estudiante de la carrera de matemáticas o Jane es una estudiante de la carrera de ciencia computacional, entonces, Jane tendrá 150 en matemáticas.
   Jane es una estudiante de ciencia computacional.
   Por tanto, Jane tendrá 150 en matemáticas.

b. Si la lógica es fácil o ___1)___, entonces ___2)___.
   Voy a estudiar mucho.
   Por tanto, voy a obtener una A en este curso.

2.1. Enunciados

La mayoría de las definiciones de la lógica formal se han desarrollado de acuerdo con la lógica natural o intuitiva utilizada por personas que han sido educadas para pensar con claridad y utilizar el lenguaje con cuidado. Las diferencias que existen entre la lógica formal e intuitiva son necesarias para evitar la ambigüedad y obtener consistencia.

En cualquier teoría matemática, se definen nuevos términos usando los que se han definido previamente. Sin embargo, este proceso tiene que comenzar en alguna parte. Unos pocos términos iniciales permanecen necesariamente indefinidos. En lógica, las palabras, *enunciado*, *verdadero* y *falso* son términos iniciales indefinidos.

• Definición

Un **enunciado** (o **proposición**) es una frase que es verdadera o falsa, pero no ambas.

Por ejemplo, "Dos más dos son cuatro" y "Dos más dos son cinco", ambos son enunciados, el primero porque es verdad y el segundo porque es falso. Por otro lado, lo verdadero o lo falso de "Él es un estudiante universitario" depende de la referencia para el pronombre *él*. Para algunos valores de *él* la frase es verdadera, para otros es falsa. Si la frase estuviera precedida de otros enunciados que hacen referencia clara al pronombre, entonces la frase sería un enunciado. Considerada en sí mismo, sin embargo, la frase no es ni verdadera ni falsa, por lo que no es un enunciado. En la sección 3.1, analizaremos la forma de transformar las frases de esta forma en enunciados.

Del mismo modo, "$x + y > 0$" no es un enunciado, porque para algunos valores de x y y la frase es verdadera, mientras que para otros es falsa. Por ejemplo, si $x = 1$ y $y = 2$, la frase es verdadera, si $x = -1$ y $y = 0$, la frase es falsa.

2.2. Enunciados Compuestos

Ahora introducimos tres símbolos que se utilizan para construir expresiones lógicas más complicadas a partir de otras más simples. El símbolo $\sim$ denota *no*, $\wedge$ denota *y* y $\vee$ denota *o*. Dado un enunciado p, la frase "$\sim p$" se lee "no p" o "No es el caso que p" y se llama **negación de p**. En algunos lenguajes de programación se utiliza el símbolo $\neg$ en lugar de $\sim$. Dado otro enunciado q, la frase "$p \wedge q$" se lee "p y q" y se llama **conjunción de p y q**. La frase "$p \vee q$" se lee "p o q" y se llama **disyunción de p y q**.

En las expresiones que incluyen al símbolo $\sim$, así como a $\wedge$ o a $\vee$, el **orden de las operaciones** especifica que $\sim$ se realiza primero. Por ejemplo, $\sim p \wedge q = (\sim p) \wedge q$. En expresiones lógicas, como en las expresiones algebraicas ordinarias, el orden de las operaciones se pueden controlar usando paréntesis. Así $\sim(p \wedge q)$ representa la negación de la conjunción de p y q. En esto, como en la mayoría de los tratamientos de lógica, los símbolos $\wedge$ y $\vee$ se consideran iguales en orden de operación y una expresión tal como $p \wedge q \vee r$ se considera ambigua. Esta expresión se debe escribir como $(p \wedge q) \vee r$ o como $p \wedge (q \vee r)$ para tener sentido.

Muchas palabras en español se traducen en lógica como $\wedge$, $\vee$ o $\sim$. Por ejemplo, la palabra, *pero* se traduce como *y* cuando vincula dos cláusulas independientes, como en "Jim es alto pero él no es pesado". En general, la palabra, *pero* se utiliza en lugar de *y* cuando la parte de la frase que sigue es, en cierta forma, inesperada. Otro ejemplo es el de las palabras *"ni-ni"*. Cuando Shakespeare escribió: "Ni un prestatario ni el prestamista son", significaba que, "No es un prestatario y no es un prestamista". Así que si p y q son enunciados, entonces,

p pero q	significa	p y q
ni p ni q	significa	$\sim p$ y $\sim q$.

3. Y, O y desigualdades

La notación de las desigualdades involucra los enunciados *y* y *o*. Por ejemplo, si x, a y b son números reales dados, entonces,

$x \leq a$	significa	$x < a$	o	$x = a$
$a \leq x \leq b$	significa	$a \leq x$	y	$x \leq b$.

Observe que la desigualdad $2 \leq x \leq 1$ no la satisface ningún número real, ya que

$$2 \leq x \leq 1 \qquad \text{significa} \qquad 2 \leq x \quad \text{y} \quad x \leq 1,$$

y es falsa, para cualquier número x. Por la forma, el punto dado x, a y b son números reales *particulares*, que aseguran que las frases tales como "$x < a$" y "$x \geq b$" son ya sea verdaderas o falsas y por tanto se trata de enunciados.

Supongamos que x es un número real particular. Sea que p, q y r, simbolicen "$0 < x$", "$x < 3$" y "$x = 3$", respectivamente. Escriba las siguientes desigualdades simbólicamente:

a. $x \leq 3$ b. $0 < x < 3$ c. $0 < x \leq 3$

Solución

a. $q \vee r$ b. $p \wedge q$ c. $p \wedge (q \vee r)$ ■

4. Valores de Verdad

En los ejemplos anteriores construimos frases compuestas de enunciados compuestos y los términos *no*, *y* y *o*. Sin embargo, si esas frases son enunciados, deben tener valores de verdad bien definidos —que deben ser ya sea verdaderos o falsos. Ahora definimos dichas frases compuestas como enunciados especificando sus valores de verdad en términos de los enunciados que los componen.

4.1. Negación

La negación de un enunciado es un enunciado que expresa exactamente lo que significa que el enunciado sea falso.

• Definición

Si p es un enunciado variable, la **negación** de p es "no p" o "No es el caso que p" y se denota $\sim p$. Tiene valores de verdad opuestos a p: si p es verdadera, $\sim p$ es falsa, si p es falsa, $\sim p$ es verdadera.

Los valores de verdad para la negación se resumen en una *tabla de verdad*.

Tabla de verdad para $\sim p$

p	$\sim p$
V	F
F	V

4.2. Conjunción

En el lenguaje común la frase "Hace calor y hay sol" se entiende que es verdadera cuando se satisfacen ambas condiciones —que hace calor y que está soleado. Si hace calor, pero no hay sol, o si está soleado pero no hace calor, o si ni hace calor ni está soleado, se entiende que la frase es falsa. La definición formal de los valores de verdad para un enunciado *y* concuerda con este razonamiento general.

• Definición

Si p y q son enunciados variables, la **conjunción** de p y q que es "p y q" se denota por $p \wedge q$. Es verdadera cuando y sólo cuando, tanto p como q son verdaderos. Si ya sea p o q es falso, o si ambas son falsos, entonces $p \wedge q$ es falso.

Los valores de verdad para la conjunción también se pueden resumir en una tabla de verdad. La tabla se obtiene considerando las cuatro combinaciones posibles de los valores de verdad de p y q. Cada combinación se presenta en un renglón de la tabla, el correspondiente valor de verdad para todo el enunciado se coloca en la columna que está en el extremo derecho en ese renglón. Observe que el único renglón que contiene una *V* es el primero ya que la única forma de que un enunciado *y* sea verdadero es que ambos enunciados componentes sean verdaderos.

Tabla de verdad para $p \wedge q$

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

4.3. Disyunción

En el caso de los enunciado de disyunción de la forma "p o q" —la lógica intuitiva ofrece dos interpretaciones alternativas. En el lenguaje común *o* a veces se utiliza en un sentido exclusivo (p o q pero no ambas) y, a veces en un sentido inclusivo (p o q o ambas). Un camarero que le dice que puede ser "café, té, o leche" utiliza la palabra *o* en un sentido exclusivo: Generalmente hay que pagar más si desea más de una bebida. Por otra parte, un camarero que ofrece "crema o azúcar" utiliza la palabra *o* en un sentido inclusivo: Tiene derecho a crema y a azúcar si lo desea.

Los matemáticos y lógicos evitan la posible ambigüedad acerca del significado de la palabra *o* en el entendimiento de lo que significa "y/o" inclusivo. El símbolo $\vee$ proviene de la palabra latina *vel*, que significa *o* en un sentido inclusivo. Para expresar *o* exclusivo; se utiliza la frase p o q, *pero no ambos*.

• Definición

Si p y q son enunciados variables, la **disyunción** de p y q es "p o q", que se denota por $p \vee q$. Es verdadera cuando ya sea que p sea verdad, o que q sea verdad, o que ambas p y q sean verdaderas; es falsa sólo cuando p y q son falsas.

La tabla de verdad para la disyunción es:

Tabla de verdad para $p \vee q$

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

5. Evaluando la verdad de los enunciados compuestos más generales

• Definición

Una **forma de enunciado** (o **forma proposicional**) es una expresión formada por enunciados variables (tales como p, q y r) y conectores lógicos (por ejemplo, $\sim$, $\wedge$ y $\vee$) que se convierten en un enunciado cuando los enunciados reales se sustituyen por enunciados compuestos variables. La **tabla de verdad** para un enunciado dado presenta los valores de verdad que corresponden a todas las posibles combinaciones de los valores de verdad de sus enunciados compuestos variables.

Para calcular los valores de verdad para una forma de enunciado, se siguen reglas similares a las utilizadas para evaluar expresiones algebraicas. Para cada combinación de valores de verdad para los enunciados variables, primero se evalúan las expresiones dentro de los paréntesis más internos, después se evalúan las expresiones dentro del siguiente conjunto de paréntesis hacia el exterior y así sucesivamente hasta tener los valores de verdad de la expresión completa.

5.1. O-exclusivo

Construya la tabla de verdad para la forma de enunciado $(p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$. Considere que cuando se utiliza *o* en su sentido exclusivo, el enunciado "p o q" significa "p o q pero no ambos" o "p o q y no ambos p y q", que se traduce en símbolos como $(p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$. Esto a veces se abrevia como $p \oplus q$ o p XOR q.

Solución Etiquete columnas tituladas p, q, $p \vee q$, $p \wedge q$, $\sim(p \wedge q)$ y $(p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$. Llene las columnas p y q con todas las posibles combinaciones lógicas de V y F. Después, utilice las tablas de verdad para $\vee$ y $\wedge$ para completar las columnas $p \vee q$ y $p \wedge q$ con los valores de verdad correspondiente. Después llene la columna $\sim(p \wedge q)$ tomando los opuestos de los valores de verdad de $p \wedge q$. Por ejemplo, la entrada de $\sim(p \wedge q)$ en el primer renglón es F, ya que en el primer renglón el valor de verdad de $p \wedge q$ es V. Por último, llene la columna $(p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$ considerando la tabla de verdad para un enunciado *y* junto con los valores de verdad calculados para $p \vee q$ y $\sim(p \wedge q)$. Por ejemplo, la entrada en el primer renglón es F ya que la entrada para $p \vee q$ es V, la entrada de $\sim(p \wedge q)$ es F y un enunciado *y* es falso a menos que ambos componentes sean verdaderos. La entrada en el segundo renglón es V ya que ambos componentes son verdaderos en este renglón.

Tabla de verdad para *O Exclusiva*: $(p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$(p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$
V	V	V	V	F	F
V	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	V
F	F	F	F	V	F

■

5.2. Tabla de Verdad para $(p \wedge q)\tilde{}r$

Construya una tabla de verdad para la forma de enunciado $(p \wedge q) \vee \sim r$.

Solución Titule columnas con p, q, r, $p \wedge q$, $\sim r$ y $(p \wedge q) \vee \sim r$. Introduzca las ocho combinaciones lógicas posibles de valores de verdad para p, q, r y en las tres columnas más hacia la izquierda. Después, llene los valores de verdad para $p \wedge q$ y para $\sim r$. Complete la tabla considerando los valores de verdad de $(p \wedge q)$ y para $\sim r$ y la definición de un enunciado *o*. Puesto que un enunciado *o* es falso sólo cuando ambos componentes son falsos, los únicos renglones con entrada F son los renglones tercero, quinto y séptimo, porque esos son los únicos renglones en los que las expresiones $p \wedge q$ y $\sim r$ son falsas. La entrada de todos los otros renglones es V.

p	q	r	$p \wedge q$	$\sim r$	$(p \wedge q) \vee \sim r$
V	V	V	V	F	V
V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	F	F
V	F	F	F	V	V
F	V	V	F	F	F
F	V	F	F	V	V
F	F	V	F	F	F
F	F	F	F	V	V

■

El punto esencial de asignación de valores de verdad a los enunciados compuestos es que le permite —usando sólo la lógica— juzgar la verdad de un enunciado compuesto en base a su conocimiento de la verdad de sus partes componentes. La lógica no ayuda a determinar la verdad o falsedad de los enunciados compuestos. Más bien, la lógica ayuda a enlazar estas piezas de información separadas en un todo coherente.

6. Equivalencia Lógica

Los enunciados

6 es mayor que 2 y 2 es menor que 6

son dos maneras diferentes de decir la misma cosa. ¿Por qué? Debido a la definición de las frases *mayor que* y *menor que*. Por el contrario, aunque los enunciados

1) Los perros ladran y los gatos maúllan y 2) Los gatos maúllan y los perros ladran

son dos maneras diferentes de decir lo mismo, la razón no tiene que ver con la definición de las palabras. Tiene que ver con la forma lógica de los enunciados. Cualquiera de los dos enunciados cuyas formas lógicas se relacionan en la misma forma como 1) y 2) bien podría ser ambos verdaderos o ser ambos falsos. Puede ver esto examinando la tabla de verdad siguiente, donde las variables de enunciado p y q se sustituyen por los enunciados compuestos "Los perros ladran" y "Los gatos maúllan", respectivamente. La tabla muestra que para cada combinación de valores de verdad de p y q, $p \wedge q$ es verdadera cuando y sólo cuando, $p \wedge q$ es verdadera. En tal caso, las formas de enunciado se llaman *lógicamente equivalentes* y decimos que 1) y 2) son *enunciados lógicamente equivalentes*.

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	F	F

$p \wedge q$ y $q \wedge p$ siempre tiene el mismo valor de verdad, por lo que son lógicamente equivalentes

• Definición

Dos *formas de enunciado* se llaman **lógicamente equivalentes** si y sólo si, tienen los mismos valores de verdad para cada posible sustitución de enunciados por sus enunciados de variables. La equivalencia lógica de las formas de enunciado P y Q se denota escribiendo $P \equiv Q$.

Dos *enunciados* se llaman **lógicamente equivalentes** si y sólo si, tienen formas lógicas equivalentes cuando componentes idénticos de enunciados variables se utilizan para reemplazar los enunciados compuestos idénticos.

Prueba de si dos formas de enunciado P y Q son lógicamente equivalentes

1. Se construye una tabla de verdad con una columna para los valores de verdad de P y otra columna para los valores de verdad de Q.
2. Compruebe cada combinación de valores de verdad de enunciado de variables para ver si el valor de verdad de P es igual que el valor de verdad de Q.
   a. Si en cada renglón el valor de verdad de P es el igual al valor de verdad de Q, entonces P y Q son lógicamente equivalentes.
   b. Si en algún renglón P tiene un valor de verdad diferente de Q, entonces P y Q no son lógicamente equivalentes.

6.1. Propiedad Doblemente Negativa: ˜(˜p)≡ p

Construya una tabla de verdad para demostrar que la negación de la negación de un enunciado es lógicamente equivalente al enunciado, anotando en la tabla con una frase de explicación.

Solución

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
V	F	V
F	V	F

p y $\sim(\sim p)$ siempre tienen los mismos valores de verdad, por lo que son lógicamente equivalentes

Hay dos maneras de mostrar que las formas de enunciado de P y Q *no* son lógicamente equivalentes. Como se indicó anteriormente, una es utilizar una tabla de verdad para buscar renglones para que sus valores de verdad sean diferentes. La otra forma es encontrar enunciados concretos para cada una de las dos formas, una de las cuales es verdadera y la otra es falsa. El siguiente ejemplo muestra estas dos maneras.

6.2. Demostración de la No Equivalencia

Demuestre que las formas de enunciado $\sim(p \wedge q)$ y $\sim p \wedge \sim q$ no son lógicamente equivalentes.

Solución

a. Este método utiliza una tabla de verdad con una frase de explicación.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$		$\sim p \wedge \sim q$
V	V	F	F	V	F		F
V	F	F	V	F	V	$\neq$	F
F	V	V	F	F	V	$\neq$	F
F	F	V	V	F	V		T

$\sim(p \wedge q)$ y $\sim p \wedge \sim q$ tienen valores de verdad diferentes en los renglones 2 y 3 por lo que no son lógicamente equivalentes

b. Este método utiliza un ejemplo para mostrar que $\sim(p \wedge q)$ y $\sim p \wedge \sim q$ no son lógicamente equivalentes. Sea p el enunciado "$0 < 1$" y sea q el enunciado "$1 < 0$". Entonces,

$$\sim(p \wedge q) \quad \text{es} \quad \text{"Este no es el caso de que } 0 < 1 \text{ y } 1 < 0\text{"},$$

lo cual es verdadero. Por otra parte,

$$\sim p \wedge \sim q \quad \text{es} \quad \text{"}0 \not< 1 \quad \text{y} \quad \text{"}1 \not< 0\text{"}.$$

que es falso. Este ejemplo muestra que hay enunciados concretos que pueden sustituirse por p y q para hacer una de las formas de enunciado verdadera y la otra falsa. Por tanto, las formas de enunciado no son lógicamente equivalentes. ■