MAT233 – MATEMÁTICA DISCRETA A

PROBLEMA	RELAÇÃO DE RECORRÊNCIA	FORMA FECHADA OU SOLUÇÃO
F_n determina o número de casal de coelhos no mês n, começando com um casal recém-nascido e sabendo que com dois meses de idade cada casal gera um novo casal.	<u>Sequência de Fibonacci:</u> $F_0 = 0$ $F_1 = 1$ Para n≥ 2: $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$	Para n ≥ 0: $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$
r_n determina o número de regiões criadas num plano por um conjunto de n retas concorrentes, onde a intersecção de qualquer subconjunto de 3 retas é vazio.	$r_0 = 1$ $r_n = r_{n-1} + n$, para n≥ 1	Para n ≥ 0: $r_n = \frac{n^2+n+2}{2}$
$r_{k,n}$ determina o número de regiões criadas num plano por um conjunto de k retas paralelas e n retas concorrentes(com a mesma condição anterior)	Para k ≥ 1, n ≥ 0 $r_{k,n} = r_{k-1,n} + n + 1$ Ou para k ≥ 0, n ≥ 1 $r_{k,n} = r_{k,n-1} + k + n$	Para k ≥ 0, n ≥ 0: $r_{k,n} = \frac{n^2+n}{2} + k\,(n+1)$
T_n determina o menor número de movimentos para transpor n discos de um eixo para outro, movendo um disco de cada vez e não podendo sobrepor um disco maior sobre um menor.	<u>Torre de Hanoi:</u> $T_1 = 1$ $T_n = 2\,T_{n-1} = 1$, para n≥ 2	Para n ≥ 1: $T_n = 2^n - 1$
D_n conta o número de permutações caóticas dos números positivos de 1 a n	$D_1 = 0$ $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$, n≥ 2	Para n ≥ 0: $D_n = n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$
P_n determina de quantas maneiras é possível dividir um polígono convexo em triângulos por meio de diagonais que não se interceptam.	$P_2 = 1$ (por definição) $P_n = \sum_{k=2}^{n-1} P_k P_{n+1-k}$, n≥3	$P_n = \frac{(2n-4)!}{(n-1)!\,(n-2)!}$
a_n determina o número de sequências de n dígitos, usando 0, 1 e 2, que possuem número par de 0's e de 1's.	<u>Sequências Ternárias:</u> $a_1 = 1, b_1 = 1, c_1 = 1$ $a_n = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1}$ $b_n = 3^{n-1} - c_{n-1}$ $c_n = 3^{n-1} - b_{n-1}$	$a_n = \frac{2 + (-1)^n + 3^n}{4}$
M_n determina o número de alocações distintas de n pares ao redor de um círculo de forma que cada par não fique em posições adjacentes. N_n: número de alocações de n pares distintos com exatamente um par que não pode ficar junto O_n: número de alocações de n pares distintos com exatamente dois pares que não podem ficar juntos.	<u>Cavaleiros da Távola Redonda:</u> $M_1 = 0, N_1 = 1, O_1 = 1$ $M_2 = 2, N_2 = 0, O_2 = 4$ Para n≥3: $M_n = 2(2n-3)[(n-1)M_{n-1} + N_{n-1}] + 2O_{n-1}$ $N_n = 2n[2(n-1)M_{n-1} + N_{n-1}]$ $O_n = 2n[(n-1)M_{n-1} + N_{n-1}]$	

PROBLEMA	RELAÇÃO DE RECORRÊNCIA	FORMA FECHADA OU SOLUÇÃO
t_n determina o número de triân-gulos não-semelhantes de lados inteiros e perímetro inteiro n	$t_0 = 0, t_1 = 0, t_2 = 0$ $\begin{cases} t_{n-3}, & se\ n\ é\ par, n \geq 4 \\ \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rceil + t_{n-3}, & se\ né\ ímpar, n \geq 3 \end{cases}$	
<u>Problema de Josephus:</u> J_n determina a posição n da pessoa que no final não será eliminada	$J_1 = 1$ $J_{2k} = 2J_k - 1, para\ k \geq 1$ $J_{2k+1} = 2J_k + 1, para\ k \geq 1$	Para n≥ 1: $J_n = 2\left(n - 2^{\lfloor log_2 n \rfloor}\right) + 1$
$S_{n,k}$ determina o número de maneiras de distribuir n objetos distintos em k caixas idênticas, com nenhuma caixa vazia	<u>Número de Stirling do 2º tipo:</u> $S_{n,1} = 1$; $S_{n,n} = 1$ Para 1 < k < n e n > 2: $S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + S_{n-1,k}$	
$S_{n,k}$ determina o número de maneiras de distribuir n objetos distintos em k ciclos	<u>Número de Stirling do 1º tipo:</u> $S_{n,1} = (n-1)!$; $S_{n,n} = 1$ Para 1 < k < n: $S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + (n-1)S_{n-1,k}$	

SOLUÇÃO DE RELAÇÕES DE RECORRÊNCIAS

<table>
<tr><td>Relação de Recorrência Linear de ordem k</td><td colspan="2">Uma relação de recorrência linear de ordem k com coeficientes constantes em uma variável é da forma
$$f_n = c_1 f_{n-1} + c_2 f_{n-2} + \cdots + c_k f_{n-k} + g(n)$$
Se $g(n) = 0 \Rightarrow$ relação homogênea
Se $g(n) = 0 \Rightarrow$ relação não-homogênea</td></tr>
<tr><td>Solução de uma relação de recorrência linear homogênea</td><td colspan="2">1. Substitui-se $f_n = \alpha^n$
2. Divide-se a equação por $\propto^{n-k}$
3. Resolve-se a equação característica resultante, determinando-se as k raízes.
4. Escreve-se a solução geral, para k raízes distintas:
$f_n = A \propto_1^n + B \propto_2^n + \cdots + K \propto_k^n$
Se uma raiz i tem multiplicidade m, então a esta raiz estão associadas m soluções: $\propto_i^n,\ n \propto_i^n,\ n^2 \propto_i^n, \ldots, n^{m-1} \propto_i^n$
5. Aplica-se as condições iniciais para se obter um sistema linear que determina as constantes A, B,..., K.</td></tr>
<tr><td>Solução de uma relação de recorrência linear não- homogênea</td><td colspan="2">Resolve-se primeiramente a relação homogênea, encontrando-se
$h(n) = A \propto_1^n + B \propto_2^n + \cdots + K \propto_k^n.$
De acordo com a forma do termo $g(n)$, conforme tabela abaixo, determina-se uma solução particular $p(n)$ e escreve-se a solução geral
$f_n = h(n) + p(n).$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Resumo das soluções particulares</td><td rowspan="2">Se $g(n) = c.q^n$
onde c, q são constantes</td><td>Se q não é raiz da equação característica
$p(n) = Aq^n$</td></tr>
<tr><td>q é raiz de multiplicidade m da equação característica:
$p(n) = An^m q^n$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Se $g(n) = c.n^l$
onde c é constante</td><td>Se 1 não é raiz da equação característica
$p(n) = A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + \cdots + A_k n^l$</td></tr>
<tr><td>Se 1 é raiz da equação característ.
$p(n) = A_0 n^m + A_1 n^{m+1} + A_2 n^{m+2} + \cdots + A_l n^{m+l}$</td></tr>
</table>