Grafos IV

Joaquim Madeira

02/06/2020

Sumário

- Recap
- Determinação da Árvore Geradora de Custo Mínimo (MST – “Minimum Spanning Tree)
- O Algoritmo de Kruskal
- O Algoritmo de Prim
- Determinação de Circuitos Eulerianos (“Euler Tour”)
- O Algoritmo de Fleury
- Sugestões de leitura

Recapitulação

Caminho mais curto entre s e t

- Problema de otimização combinatória
- De todas as soluções possíveis, determinar a de menor custo/distância
- Podem existir soluções ótimas alternativas
  - Caminhos distintos com o mesmo custo/distância total

- Grafo / Grafo Orientado : contar o nº de arestas do caminho
- Rede : somar o valor de distância associado a cada aresta do caminho

Árvore dos caminhos mais curtos de s para t

- Associar um rótulo ("label") a cada vértice : (dist[v], pred[v])

- No final do algoritmo o que representa ?
- pred[v] : o predecessor no caminho mais curto a partir de s
- dist[v] : o custo/distância associado ao caminho mais curto a partir de s

- Fazer o "traceback" do caminho mais curto !!

Inicialização dos rótulos

- Para cada vértice v ≠ s

  dist[v] = +∞ pred[v] = -1

- Para o vértice s

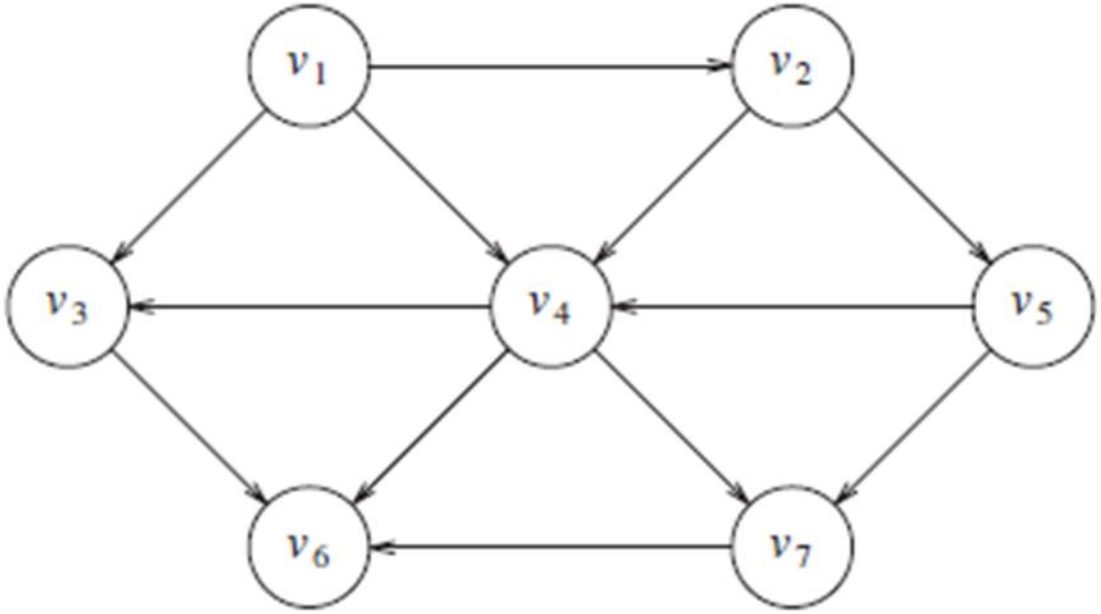
  dist[s] = 0 pred[s] = -1

Quando não há custos associados às arestas

```
queue = Criar FILA vazia
Enqueue(queue, s)
Enquanto NãoVazia(queue) fazer
        v = Dequeue(queue)
        Para cada vértice w adjacente a v
                Se dist[w] == +∞
                Então Enqueue(queue, w)
                        dist[w] = dist[v] + 1
                        pred[w] = v
```

Fizeram ?

- Qual é o caminho mais curto entre v1 e v5 ?
- E o caminho mais curto entre v1 e v6 ?
- Há caminhos ótimos alternativos ?
- De que depende a sua escolha ?



[Weiss]

Algoritmo de Bellman-Ford

```
Inicializar os rótulos dos vértices
Para i = 1 até (numVértices – 1) fazer          // (V–1) vezes
        Para cada aresta (u, v) fazer
                Se dist[u] + peso(u,v) < dist[v]    // Alternativa
                Então                               // Atualizar
                        dist[v] = dist[u] + peso(u,v)
                        pred[v] = u
```

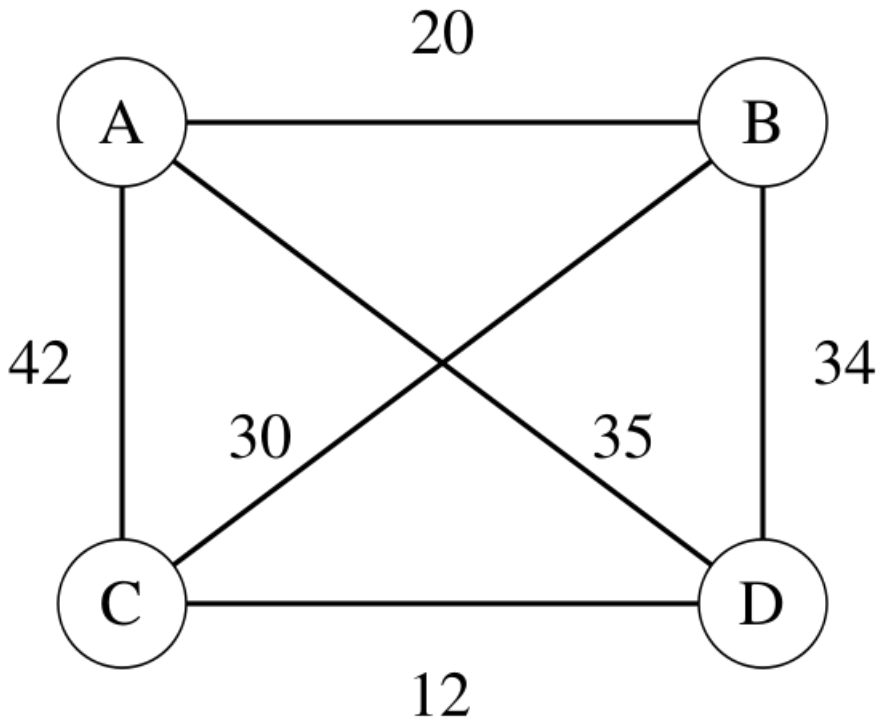
Como melhorar ?

- Em que condição pode o ciclo externo ser executado menos vezes ?
- A partir do instante em que há a certeza de que nenhum rótulo poderá vir a ser melhorado !!
- Como verificar ? -> Usar uma flag !!

Ordem de complexidade

- Nº de comparações
- Pior Caso: **O(V x E)**
- Melhor Caso: **O(V)**
- Como melhorar ?

Fizeram ?

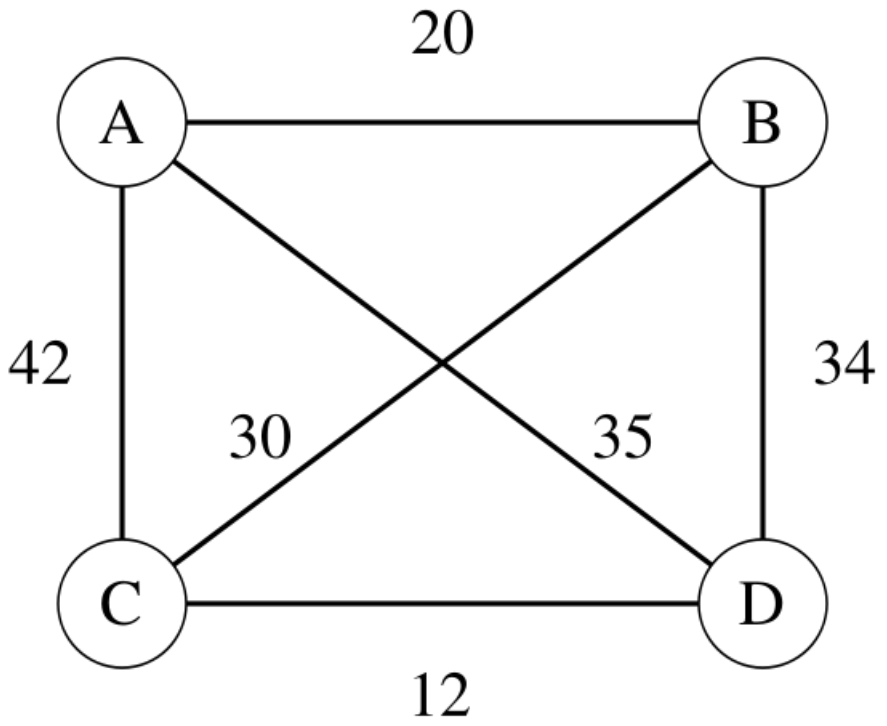


[Wikipedia]

Algoritmo usando QUEUE ou STACK

```
Inicializar os rótulos dos vértices
conjCandidatos = { s };
Enquanto conjCandidatos ≠ { } fazer
        u = próximoElemento(conjCandidatos);          // Depende da EDados
        conjCandidatos = conjCandidatos – {v};
        Para cada vértice v adjacente a u
                Se dist[u] + peso(u,v) < dist[v]      // Alternativa
                Então  dist[v] = dist[u] + peso(u,v);  // Atualizar
                       pred[v] = u;
                       Se v não pertence conjCandidatos
                       Então conjCandidatos = conjCandidatos U { v };
```

Fizeram ?



[Wikipedia]

Algoritmo de Dijkstra

```
Inicializar os rótulos dos vértices
conjCandidatos = { s };
Enquanto conjCandidatos ≠ { } fazer
        u = removerMenor(conjCandidatos);        // Reordenação implícita
        Para cada vértice v adjacente a u que ainda não pertence à solução
            Se dist[u] + peso(u,v) < dist[v]
            Então  dist[v] = dist[u] + peso(u,v);
                   pred[v] = u;
                   Se v não pertence conjCandidatos
                   Então conjCandidatos = conjCandidatos U { v };
                   Senão reposicionar v no conjunto ordenado de candidatos
```

Estrutura de dados

- Como manter ordenado o conjunto dos vértices candidatos ?
- Ordem parcial vs Ordem total

- Usar um MIN-HEAP / PRIORITY QUEUE
- Obter o próximo vértice candidato sem grande esforço computacional

- Há outras estruturas de dados que se podem usar
- A ordem de complexidade do algoritmo depende da estrutura de dados escolhida

Priority Queue

```
// CREATE/DESTROY

PriorityQueue* PriorityQueueCreate(int capacity, compFunc compF, printFunc printF) ;

void PriorityQueueDestroy(PriorityQueue** pph) ;
```

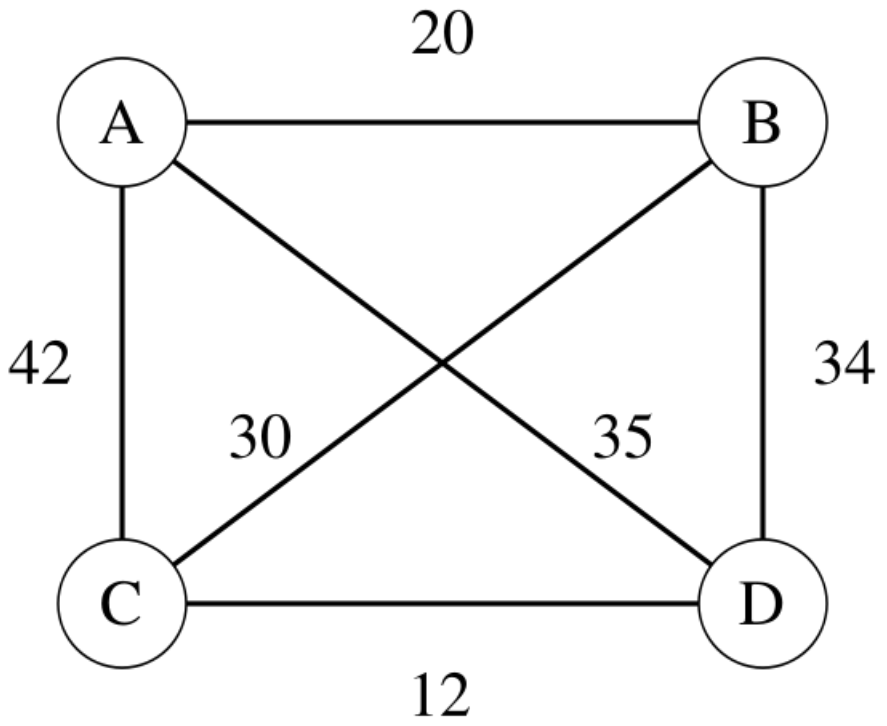
```
// MODIFY

void PriorityQueueInsert(PriorityQueue* ph, void* item) ;

void PriorityQueueRemoveMin(PriorityQueue* ph) ;

void PriorityQueueDecreasePriority(PriorityQueue* ph, void* item) ;
```

Fizeram ?

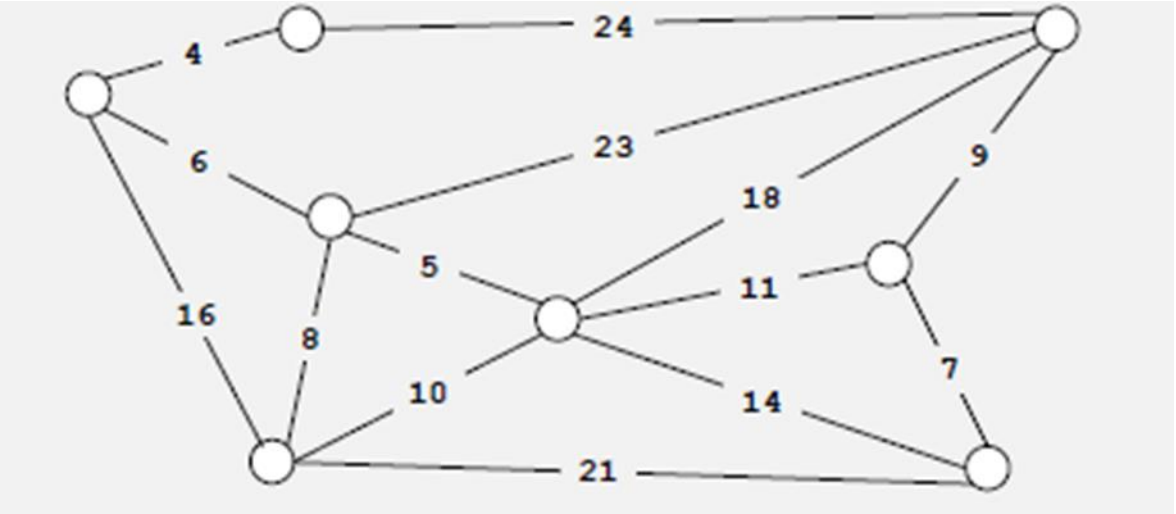


[Wikipedia]

MST - Minimum Spanning Tree

Árvore Geradora

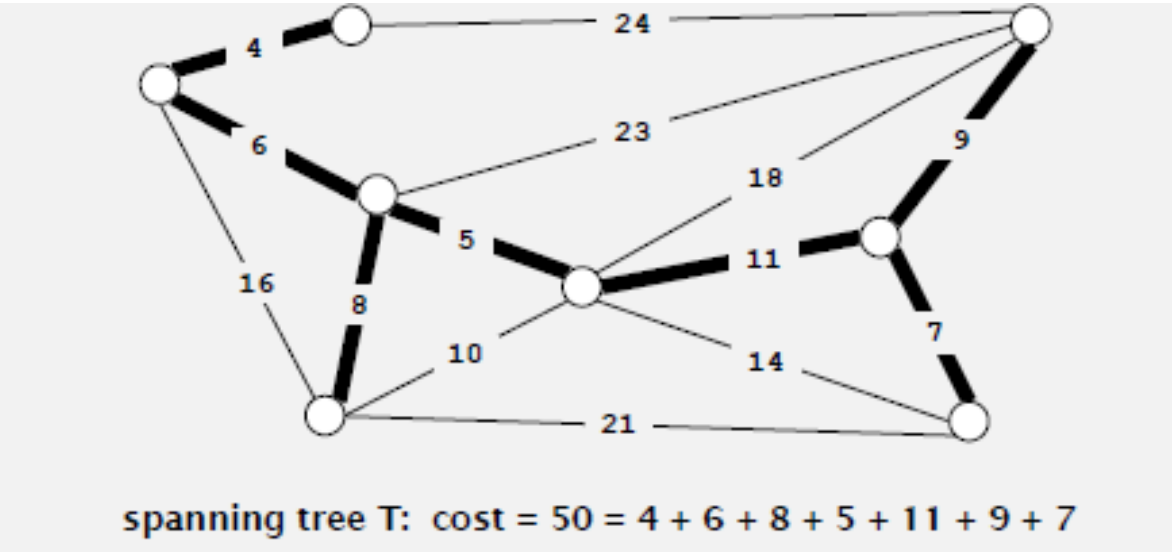
- Dado : um grafo não orientado e conexo G(V,E), com custos positivos associados às arestas
- Definição : uma árvore geradora de G é um seu subgrafo conexo e acíclico, com V vértices e (V – 1) arestas



[Sedgewick & Wayne]

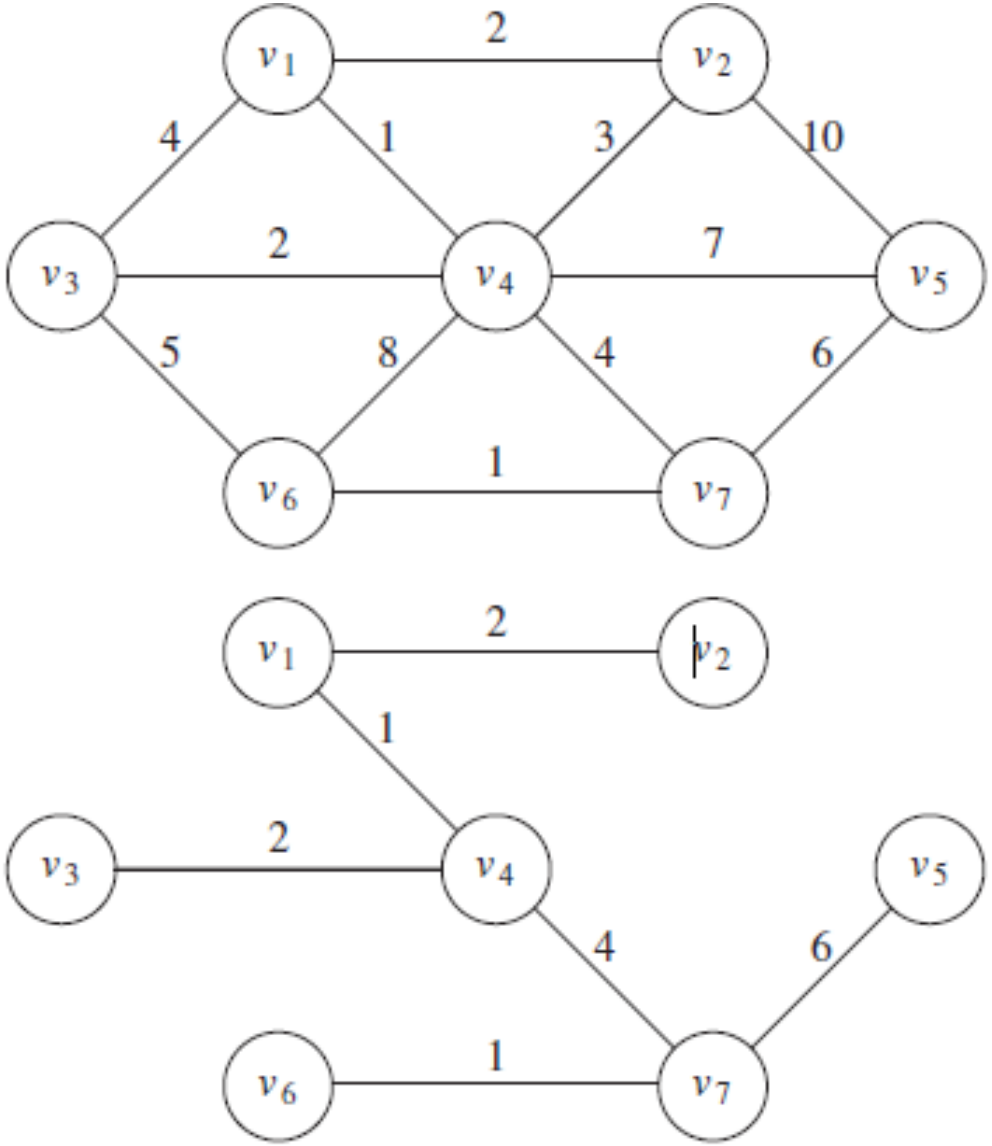
Árvore Geradora de Custo Mínimo

- Problema de otimização combinatória
- Determinar a (uma) árvore geradora de custo total mínimo
  - Soma dos pesos associados às arestas da árvore
  - Assegurar a conectividade entre qualquer par de nós com o menor custo



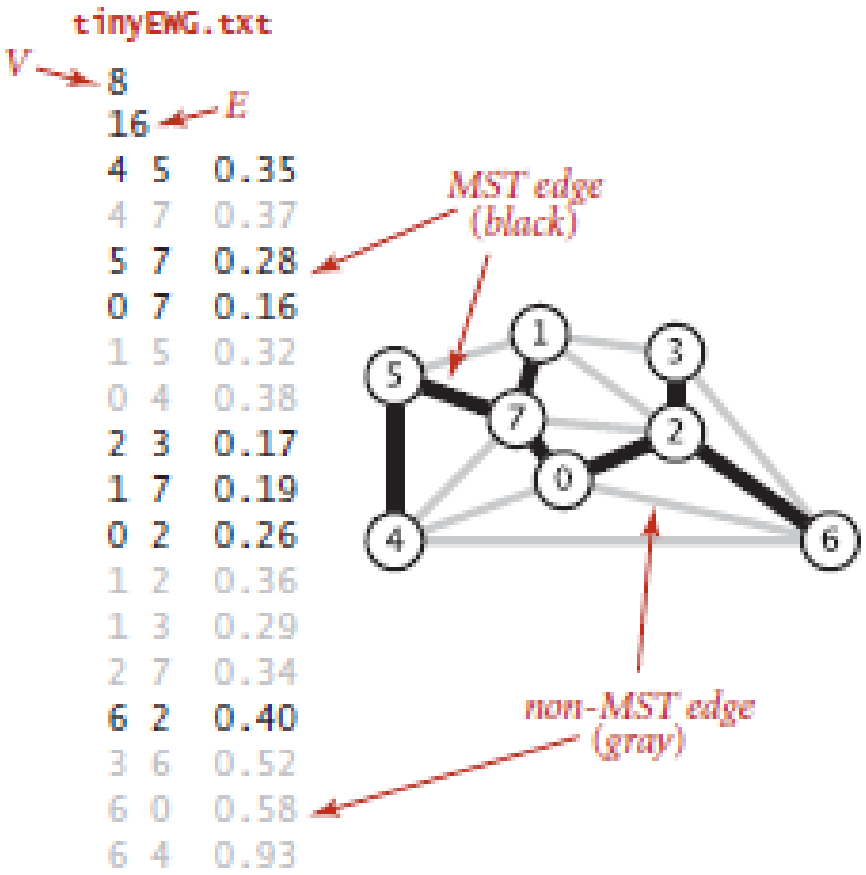
[Sedgewick & Wayne]

Exemplo



[Weiss]

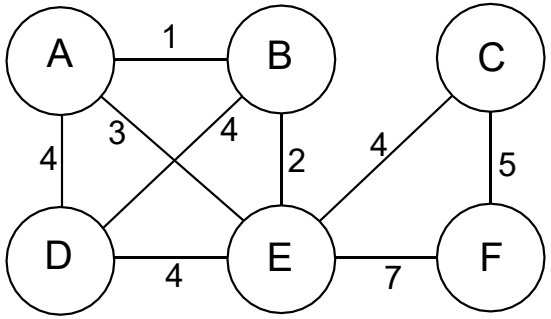
Outro exemplo

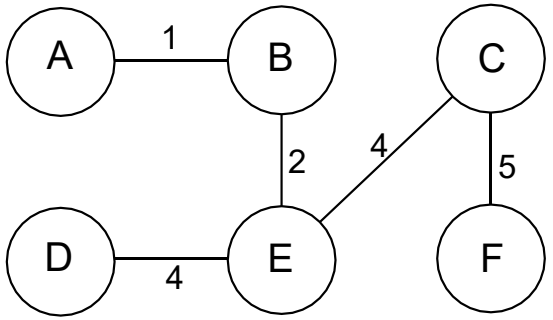


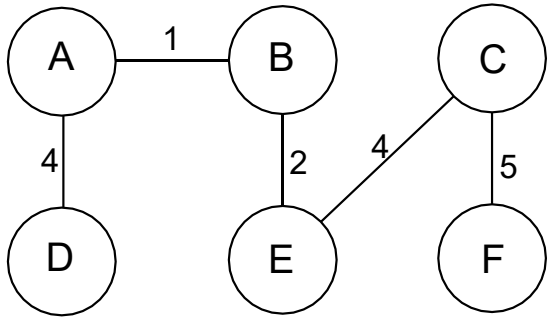
[Sedgewick & Wayne]

Soluções ótimas alternativas

- A solução é única se cada um das arestas de G tiver um custo distinto
- Se todas as arestas tiverem o mesmo custo, cada uma das árvores geradoras é ótima
- Soluções ótimas alternativas: mais do que uma árvore geradora de custo mínmo







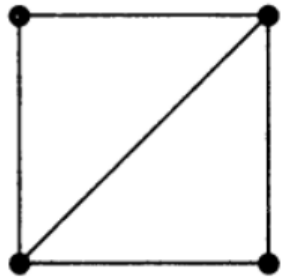
[Wikipedia]

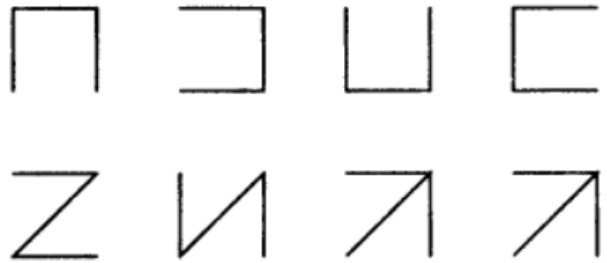
Aplicações

- Projeto de redes de comunicações, elétricas, etc.
- Encaminhamento em redes de computadores
- Deteção de redes viárias em imagens de satélite
- Registo e segmentação de imagens
- Verificação facial em tempo-real
- Modelação de mercados financeiros
- …

Como fazer ?

- Estratégia exaustiva : gerar todas as possíveis árvores geradoras
  escolher a (uma) árvore de custo mínimo
- Para um dado grafo G(V, E), quantas árvores geradoras existem ?
- Ordem de complexidade ?





- Alternativas ?
- Usar uma estratégia voraz (“greedy”)

[Adam Sheffer]

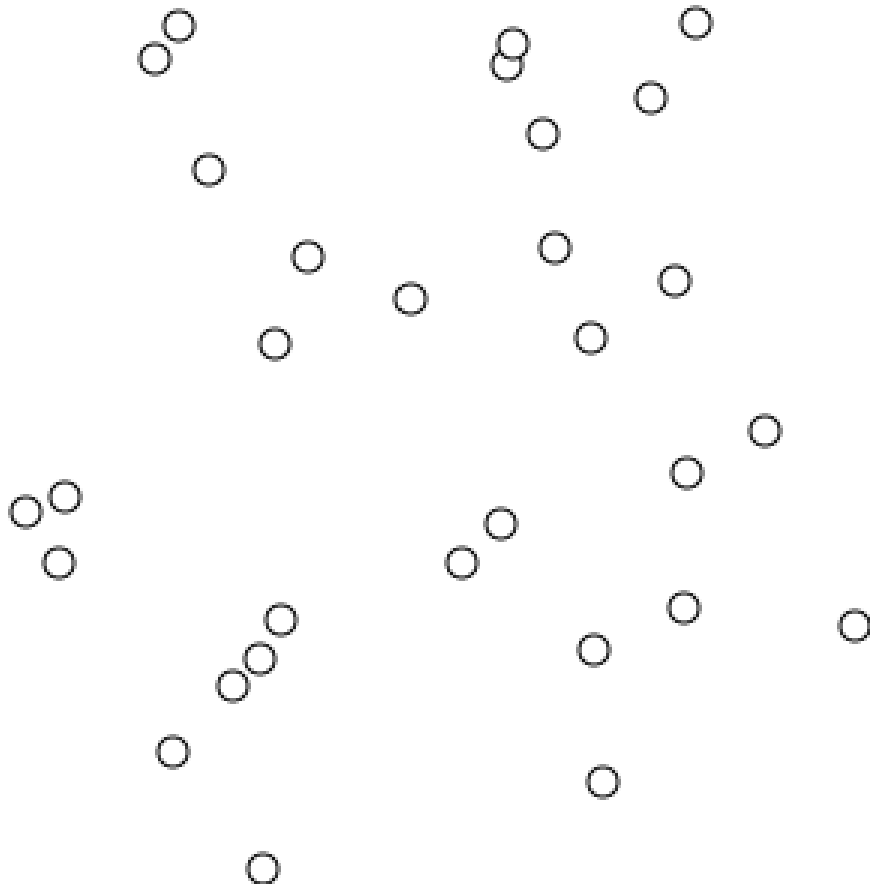
O Algoritmo de Kruskal

Algoritmo de Kruskal

- Começar com uma floresta de árvores, cada uma com um só vértice
- Sucessivamente adicionar uma aresta de menor custo que não origina um ciclo
  - Reunião de duas árvores
  - Como verificar que não se forma um ciclo ?

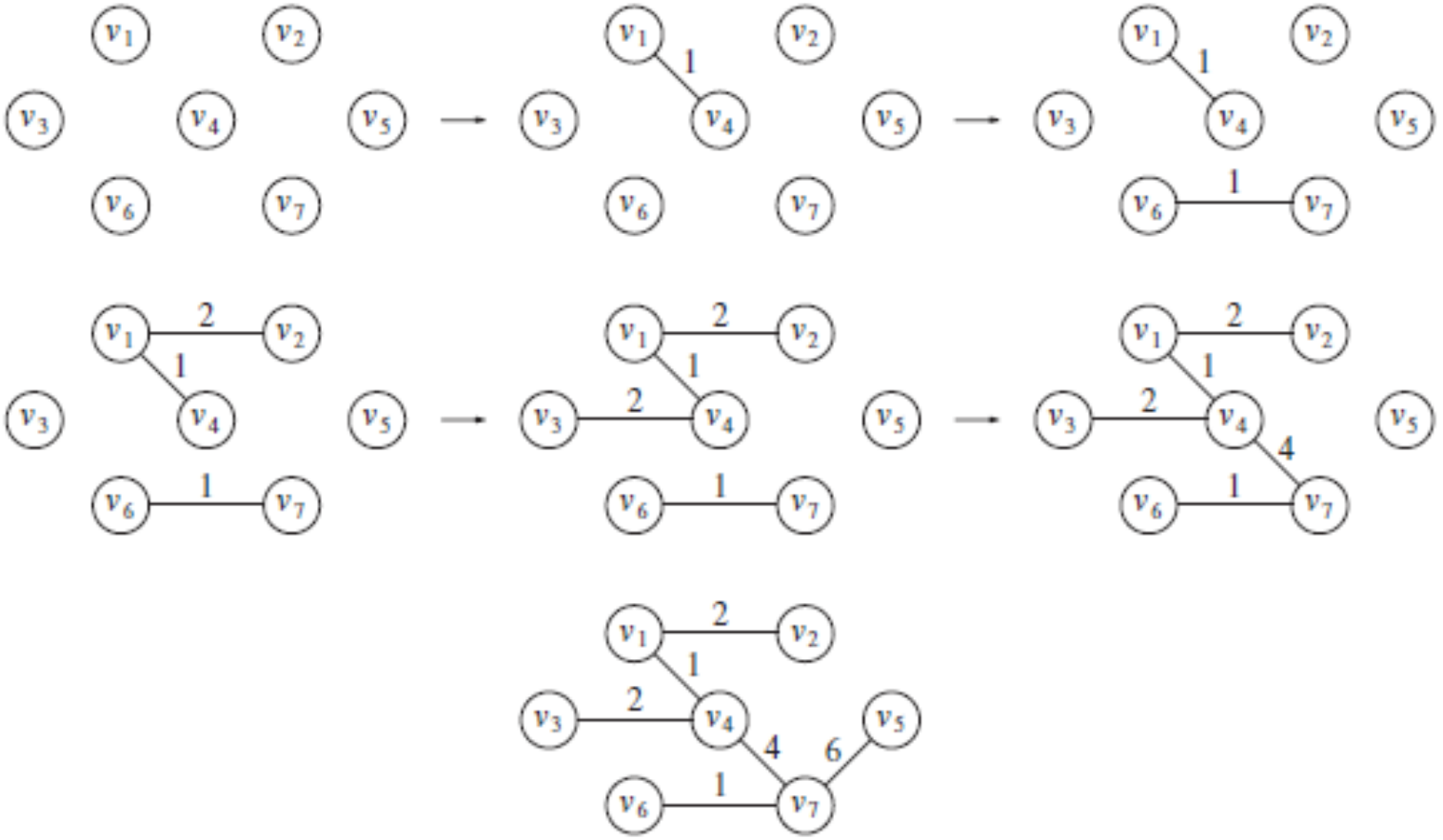
- Pré-processamento : construir a lista ordenada de arestas
  - **O(E log E)**
- Ordem de complexidade : O(E log E) + ? = **?**

Exemplo – Distância Euclideana



[Wikipedia]

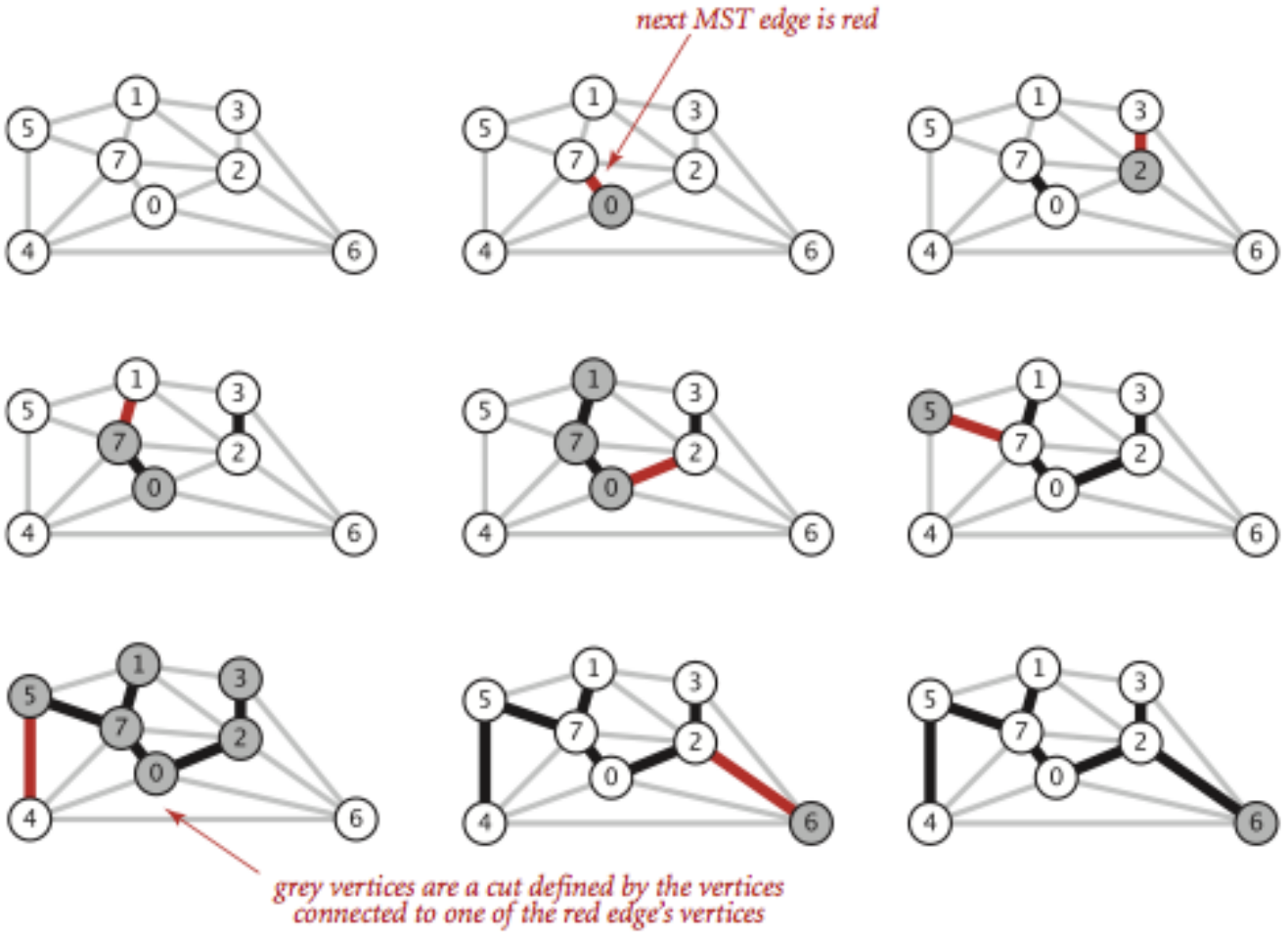
Exemplo

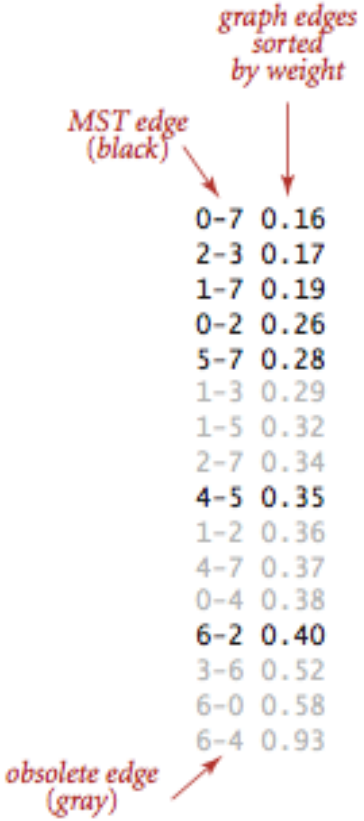


Edge	Weight	Action
(v_1, v_4)	1	Accepted
(v_6, v_7)	1	Accepted
(v_1, v_2)	2	Accepted
(v_3, v_4)	2	Accepted
(v_2, v_4)	3	Rejected
(v_1, v_3)	4	Rejected
(v_4, v_7)	4	Accepted
(v_3, v_6)	5	Rejected
(v_5, v_7)	6	Accepted

[Weiss]

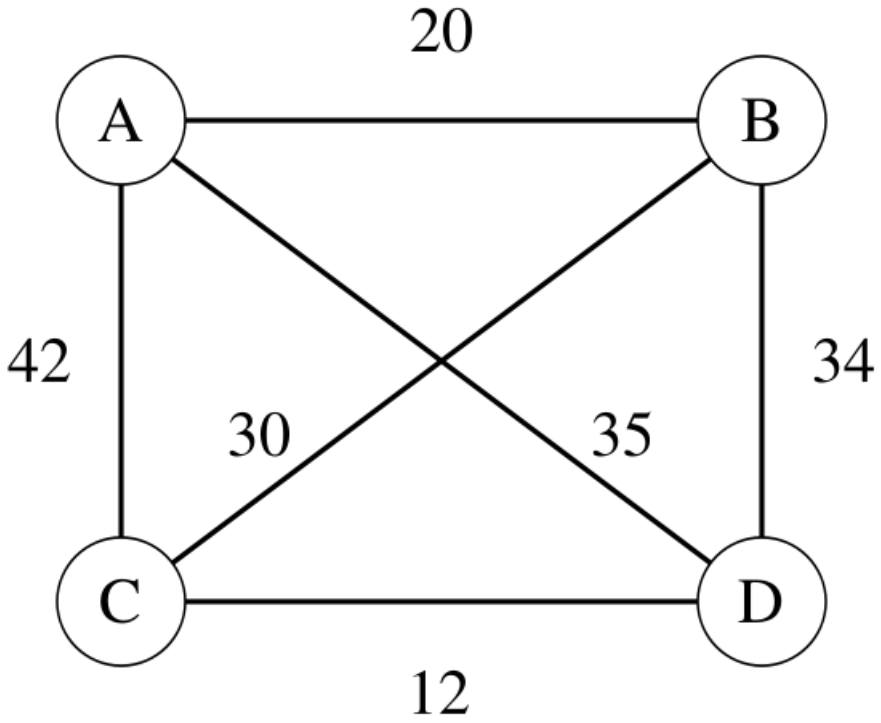
Algoritmo de Kruskal





[Sedgewick & Wayne]

Tarefa : aplicar o algoritmo de Kruskal

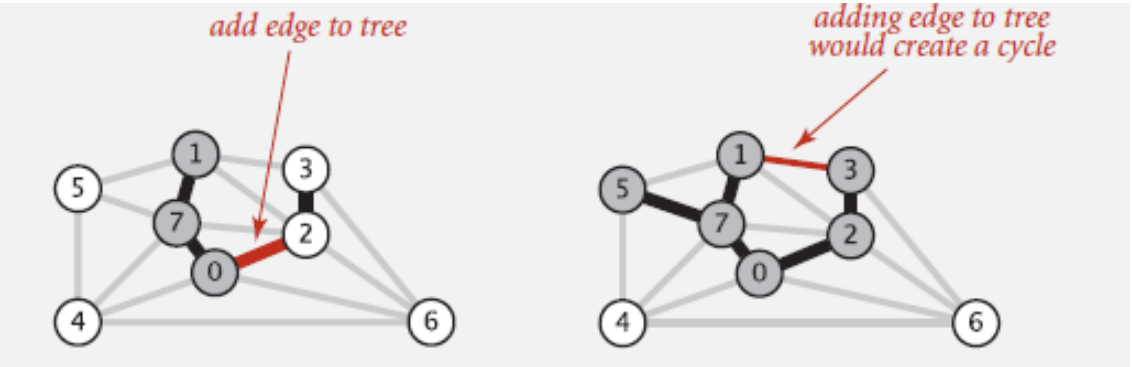


[Wikipedia]

- Qual é a solução ?

Como verificar que não se forma um ciclo ?

- Adicionar a aresta (v, w) forma um ciclo ?



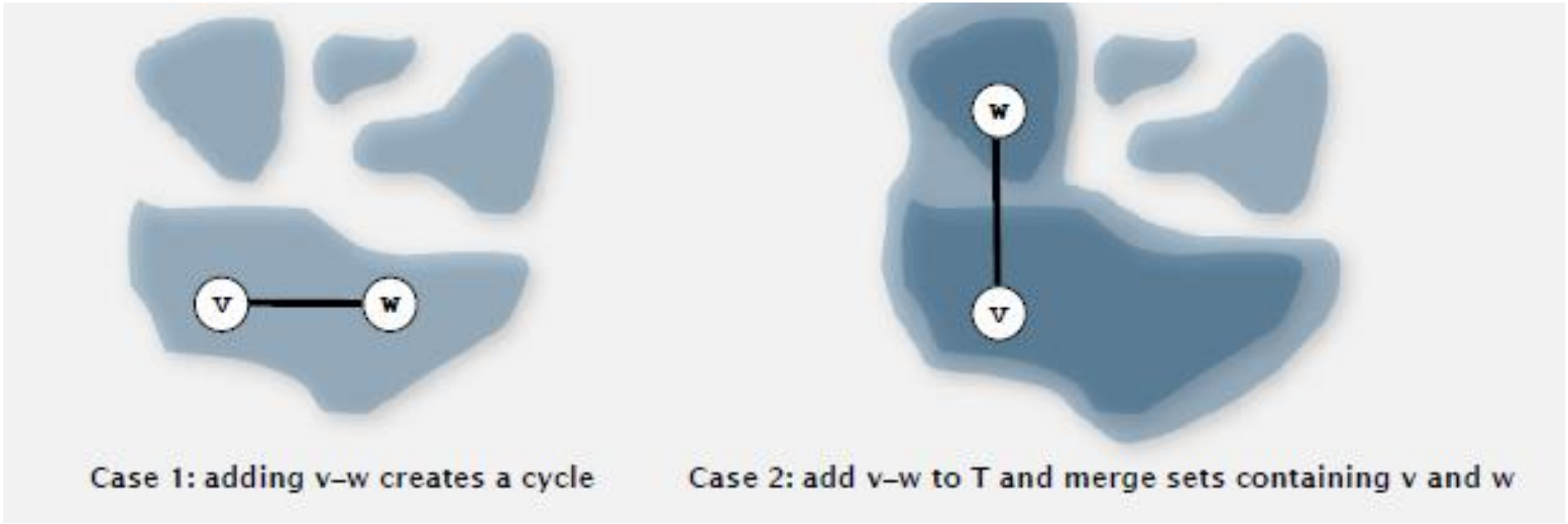
[Sedgewick & Wayne]

- Ver se w é alcançável a partir de v, na árvore T que contém v
- Executar a travessia em profundidade !!
- T tem, quando muito V vértices -> O(V)

A estrutura de dados UNION-FIND

- Alternativa mais eficiente
- Usar a estrutura de dados UNION-FIND
  - Rápida reunião de conjuntos de elementos
  - Fácil verificação da pertença
- Manter um conjunto de vértices para cada árvore da floresta
- Se v e w pertencem ao mesmo conjunto, não considerar a aresta !!
- Se pertencem a conjuntos distintos, efetuar a sua reunião

A estrutura de dados UNION-FIND



[Sedgewick & Wayne]

Esforço computacional

operation	frequency	time per op
build pq	1	E
del min	E	log E
union	V	log* V †
find	E	log* V †

† amortized bound using weighted quick union with path compression

[Sedgewick & Wayne]

- Usar uma PRIOTIY-QUEUE para manter o conjunto de arestas
- O algoritmo de Kruskal determina a MST em O(E log E)
- Se as arestas já estiverem ordenadas, obtém-se O(E log V)

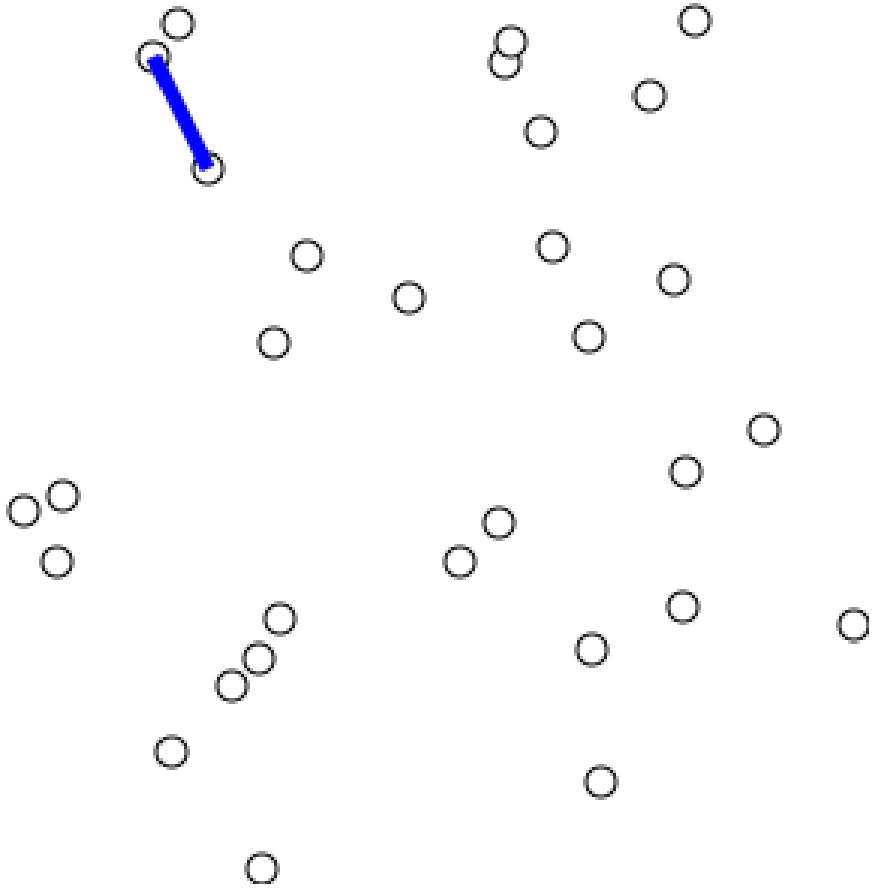
O Algoritmo de Prim

Algoritmo de Prim

- Começar com uma árvore T, com um só vértice de G
- Sucessivamente adicionar uma aresta a T : a aresta mais curta com (apenas) um dos seus vértices em T
  - Não se cria um ciclo !!

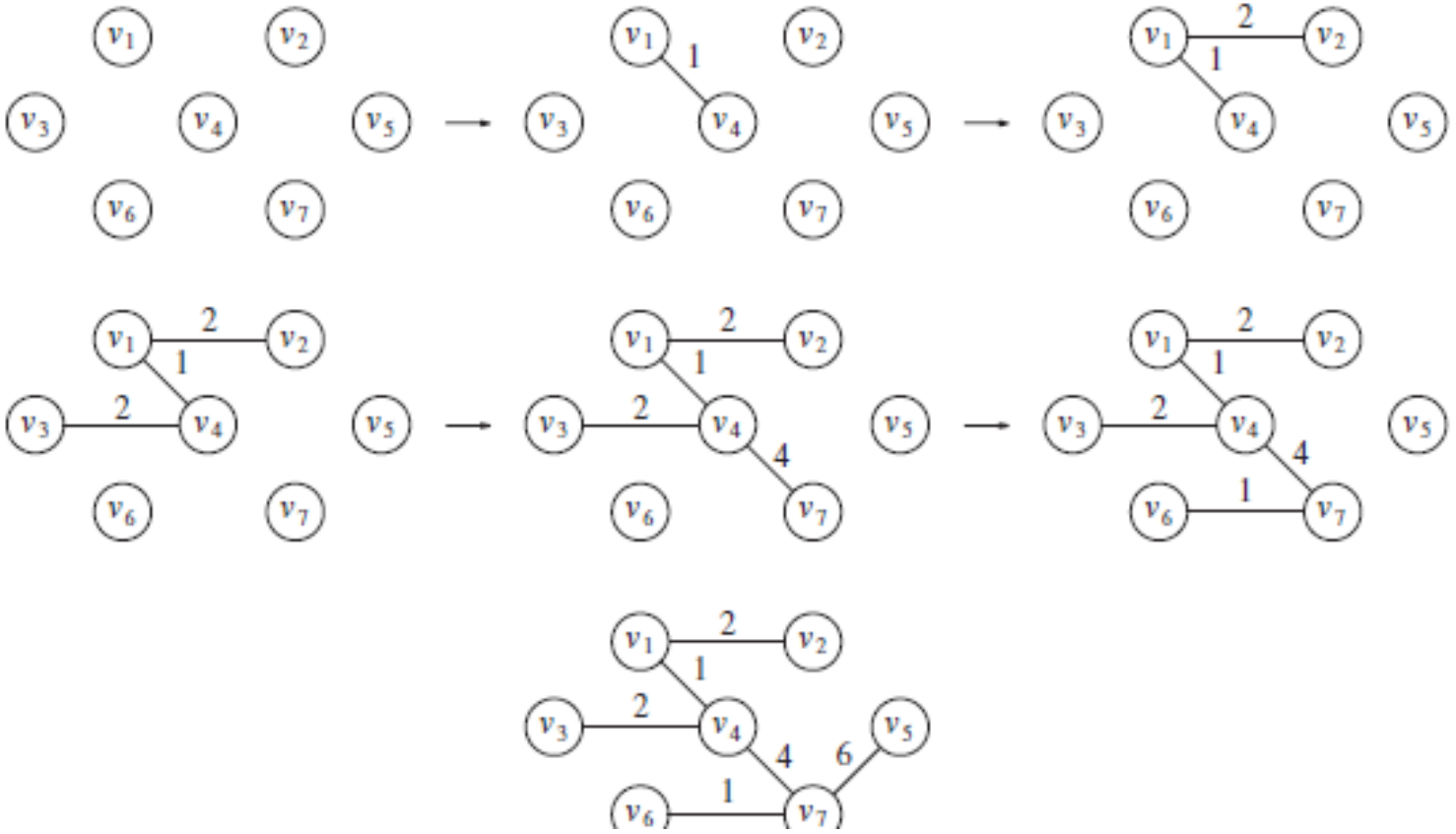
- Manter o conjunto de arestas candidatas
- Usar uma PRIORITY-QUEUE
- Semelhanças com o Algoritmo de Dijkstra ?

Exemplo – Distância euclideana



[Wikipedia]

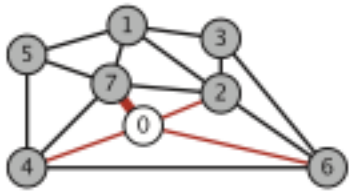
Exemplo



v	*known*	d_v	p_v
v_1	T	0	0
v_2	T	2	v_1
v_3	T	2	v_4
v_4	T	1	v_1
v_5	T	6	v_7
v_6	T	1	v_7
v_7	T	4	v_4

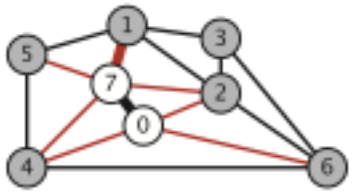
[Weiss]

Algoritmo de Prim

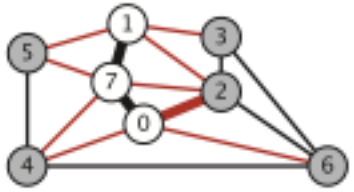


0-7 0.16
0-2 0.26
0-4 0.38
6-0 0.58

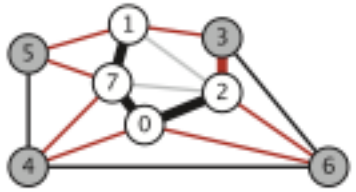
edges with exactly one endpoint in T (sorted by weight)



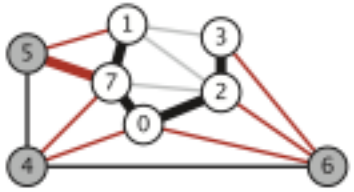
1-7 0.19
0-2 0.26
5-7 0.28
2-7 0.34
4-7 0.37
0-4 0.38
6-0 0.58



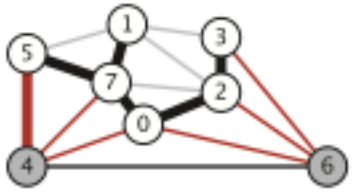
0-2 0.26
5-7 0.28
1-3 0.29
1-5 0.32
2-7 0.34
1-2 0.36
4-7 0.37
0-4 0.38
0-6 0.58



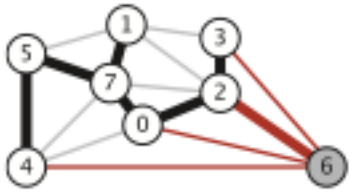
2-3 0.17
5-7 0.28
1-3 0.29
1-5 0.32
4-7 0.37
0-4 0.38
6-2 0.40
6-0 0.58



5-7 0.28
1-5 0.32
4-7 0.37
0-4 0.38
6-2 0.40
3-6 0.52
6-0 0.58



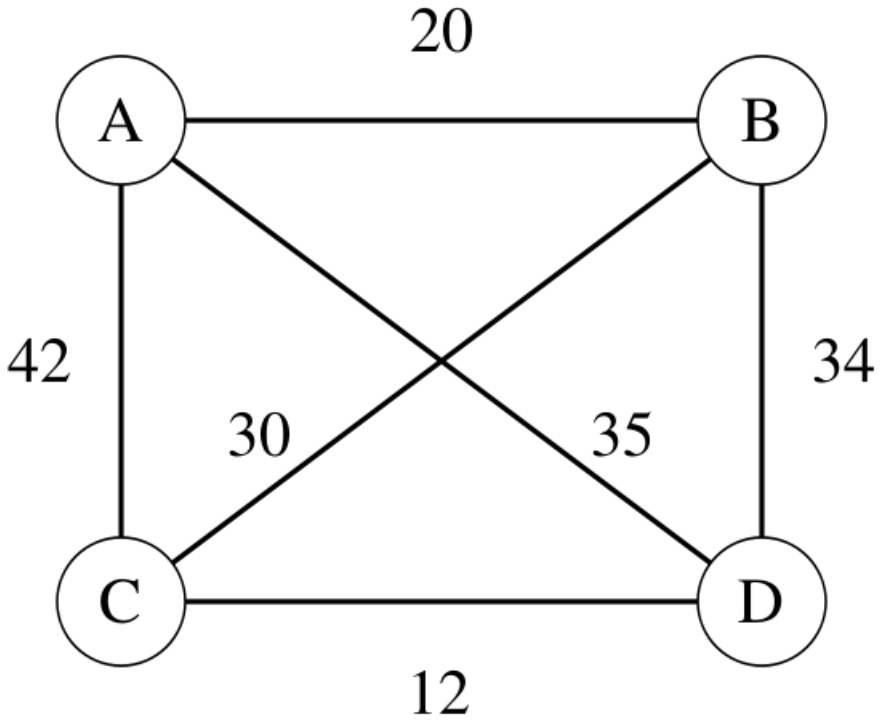
4-5 0.35
4-7 0.37
0-4 0.38
6-2 0.40
3-6 0.52
6-0 0.58



6-2 0.40
3-6 0.52
6-0 0.58
6-4 0.93

[Sedgewick & Wayne]

Tarefa : aplicar o algoritmo de Prim

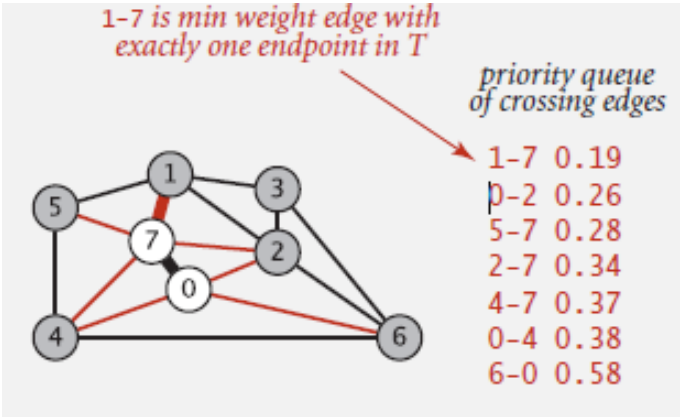


[Wikipedia]

- Qual é a solução ?

Como encontrar a próxima aresta ?

- Aresta (v, w) de menor custo com um vértice em T ?



[Sedgewick & Wayne]

- Verificar todas as arestas ? -> O(E)
- Usar uma PRIORITY-QUEUE -> O(log E)

Esforço computacional

operation	frequency	binary heap
delete min	E	log E
insert	E	log E

[Sedgewick & Wayne]

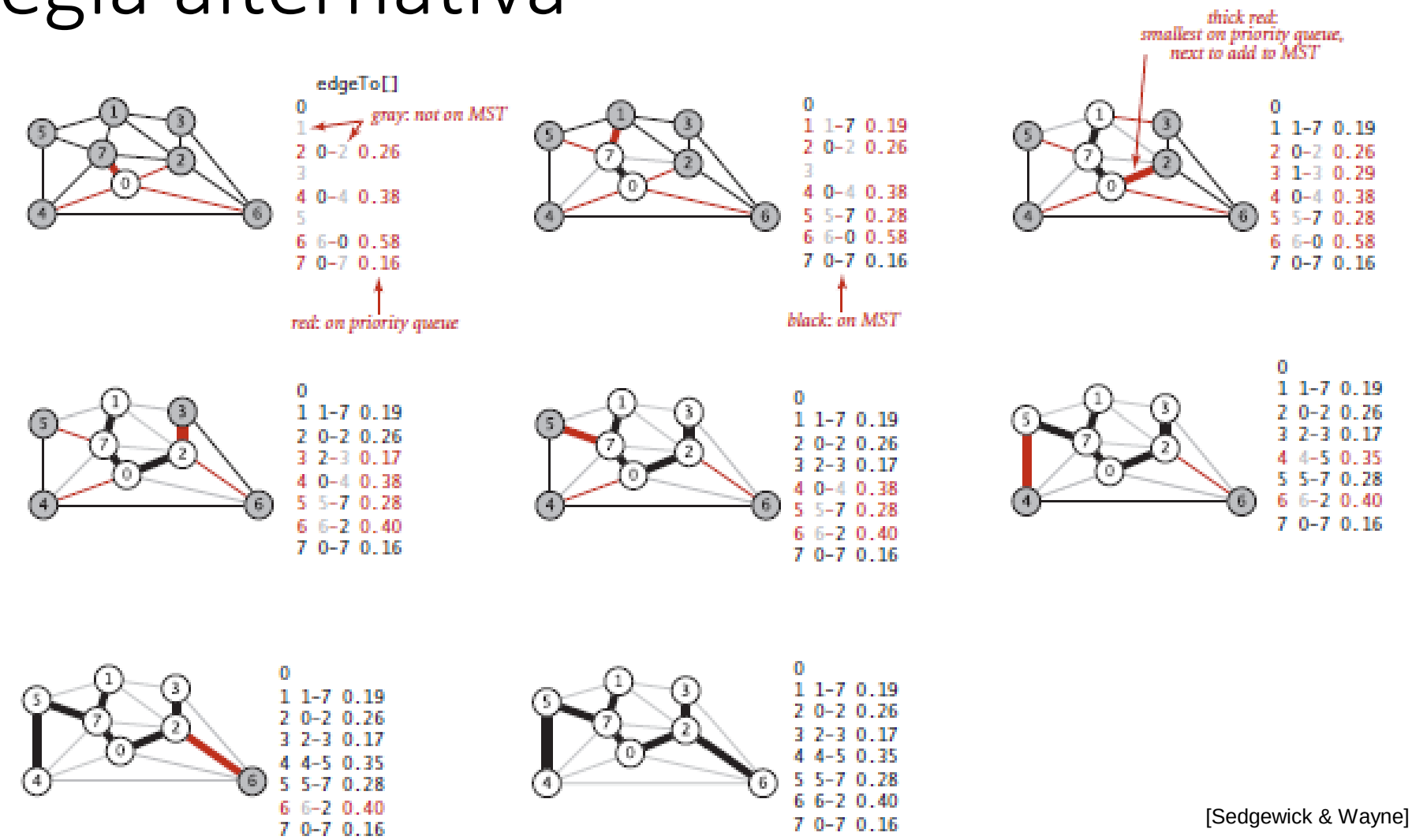
- Usar uma PRIORITY-QUEUE para manter o conjunto de arestas
- O algoritmo de Prim determina a MST em O(E log E)

Alternativa : conjunto de vértices candidatos

- Começar com uma árvore T, com um só vértice de G
- Sucessivamente adicionar um novo vértice e uma nova aresta a T : o vértice mais próximo de qualquer um dos vértices em T
  - Não se cria um ciclo !!

- Manter o conjunto de vértices candidatos
- Usar uma PRIORITY-QUEUE
  - Que custo associar a cada vértice ?
- Semelhanças com o Algoritmo de Dijkstra ?

Estratégia alternativa



[Sedgewick & Wayne]

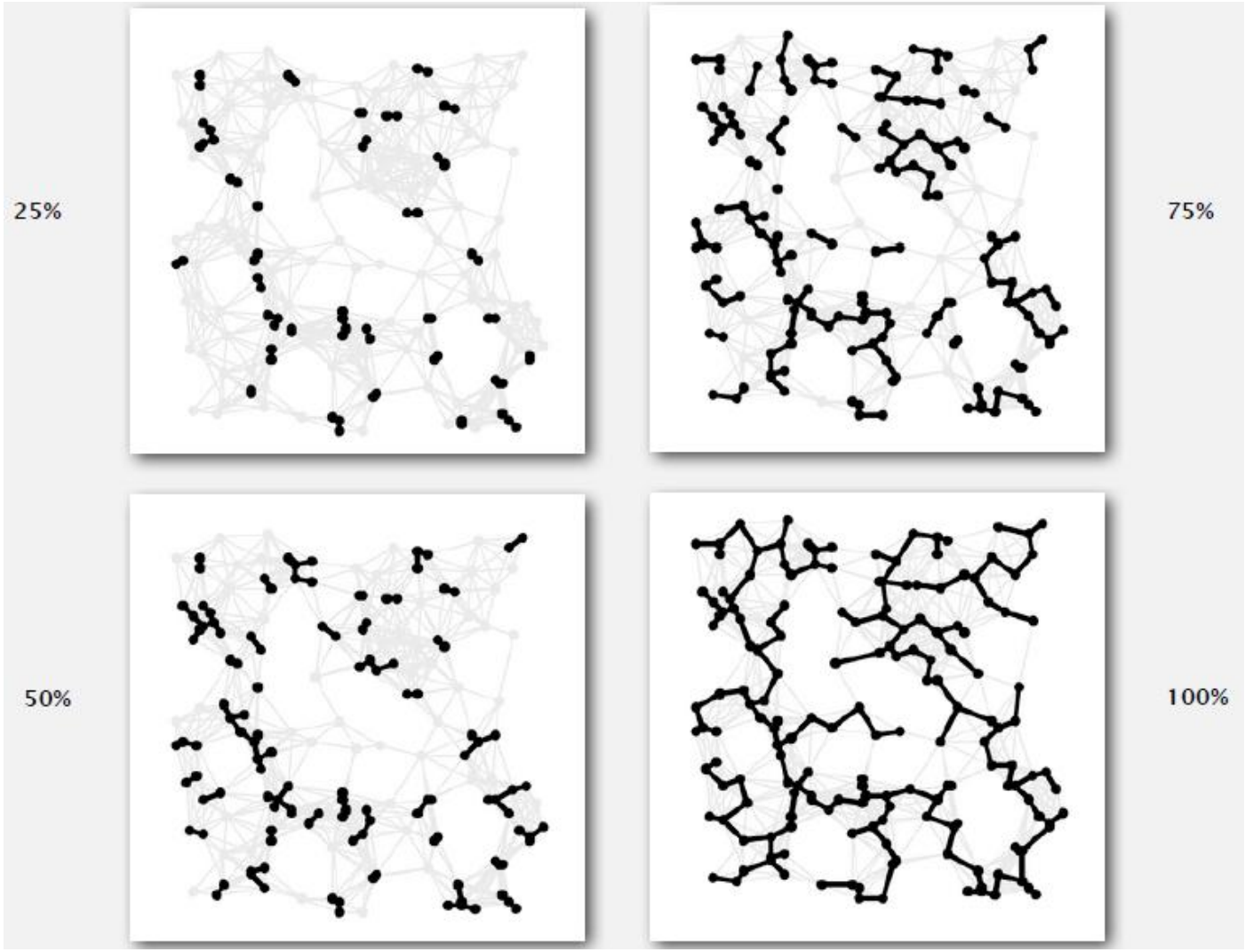
Esforço computacional

PQ implementation	insert	delete-min	decrease-key	total
array	1	V	1	V^2
binary heap	log V	log V	log V	E log V

[Sedgewick & Wayne]

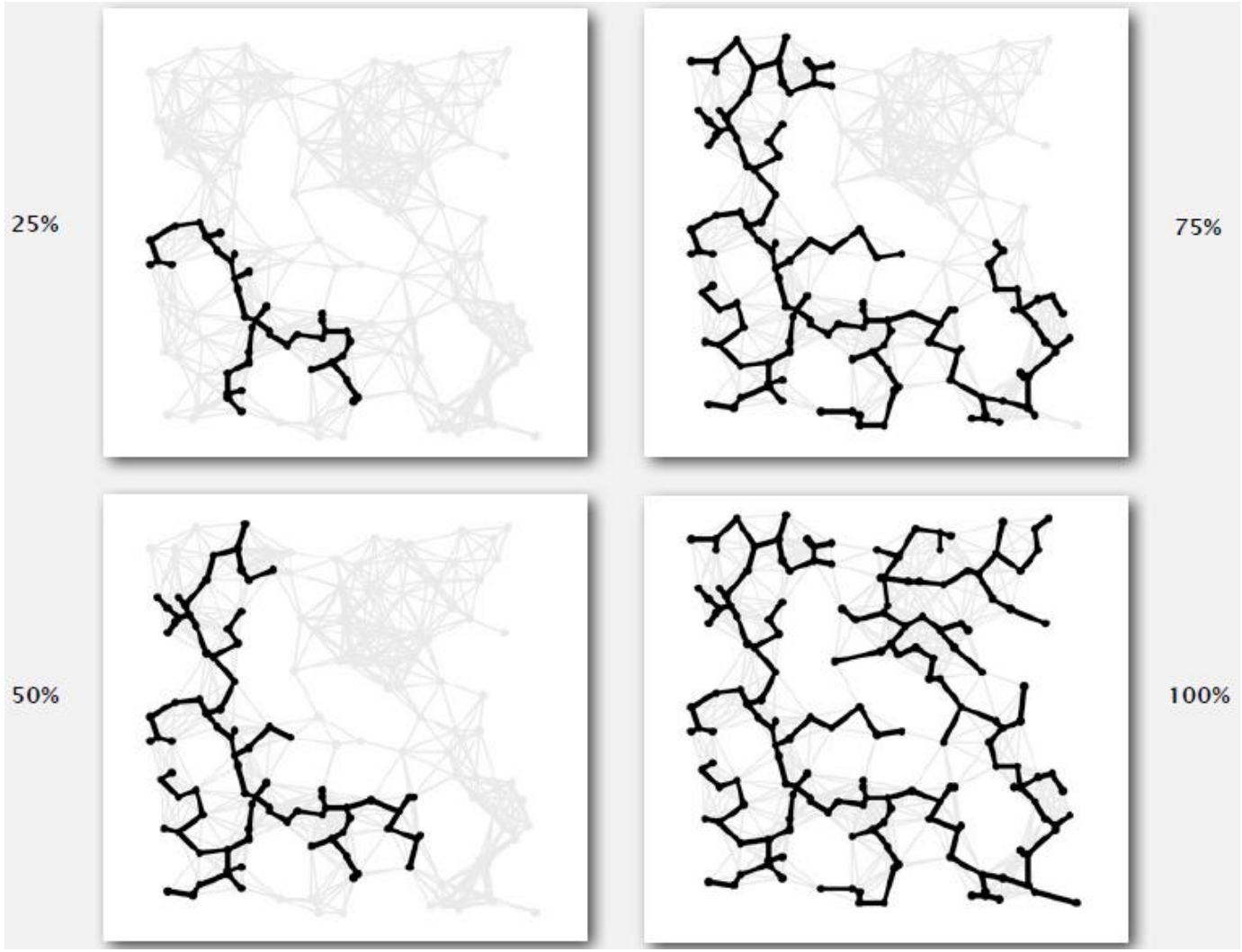
- Grafo denso : array
- Grafo esparso : heap binária

Prim ou Kruskal ?



[Sedgewick & Wayne]

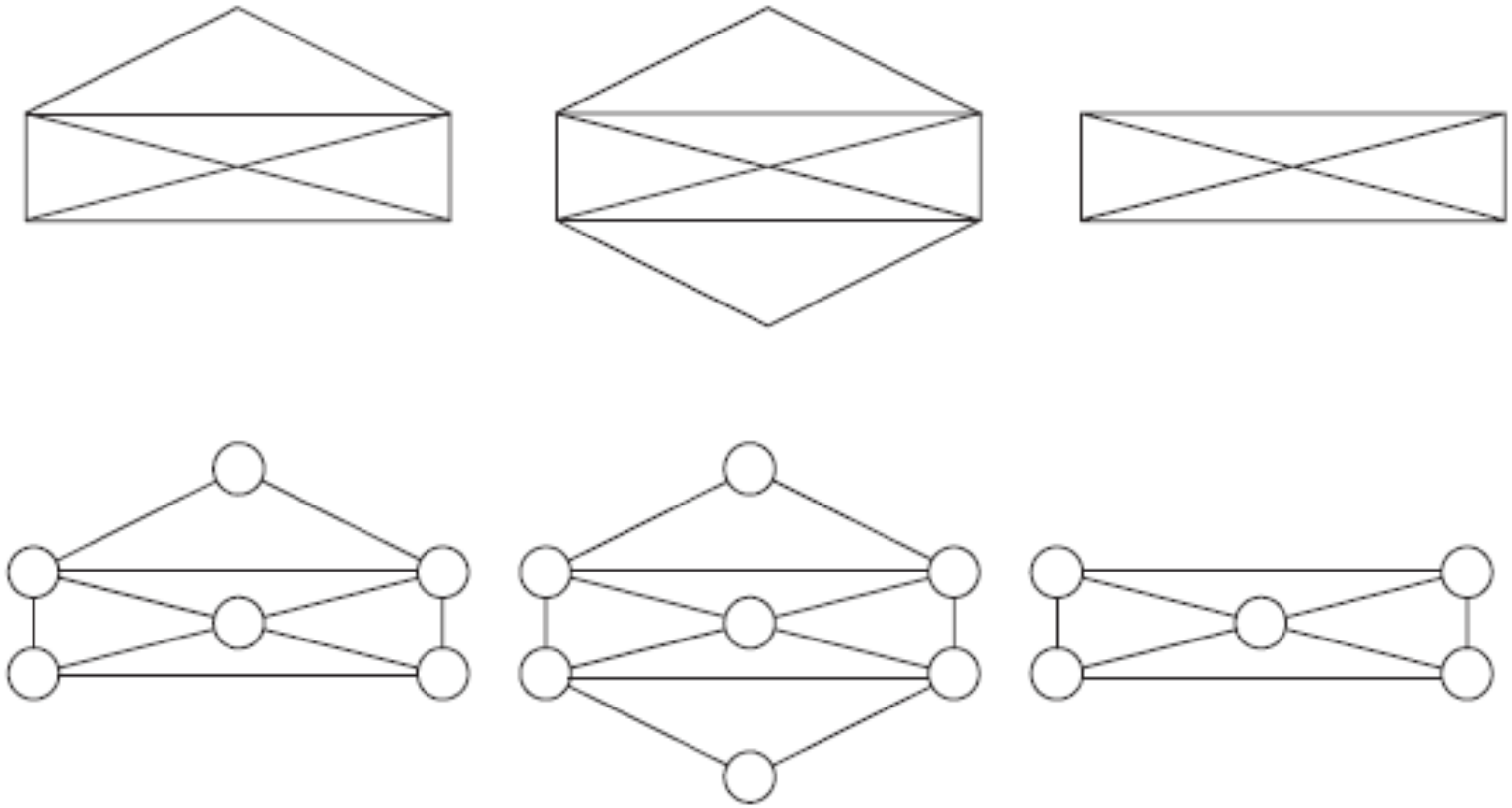
Prim ou Kruskal ?



[Sedgewick & Wayne]

Caminhos e Circuitos Eulerianos

Desenhar sem levantar a ponta do lápis ?



[Weiss]

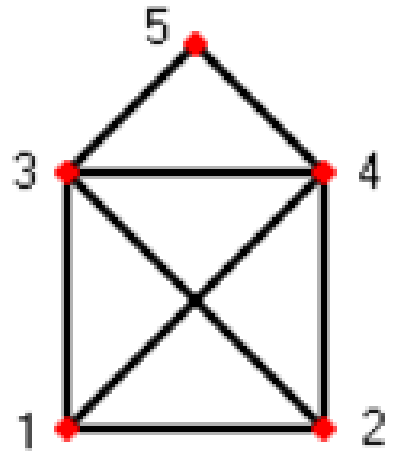
Problema das Pontes de Koenigsberg (1736)

[Wikipedia]

Caminho Euleriano / Circuito Euleriano

- Grafo / Grafo orientado
- Caminho que contém uma única vez cada uma das arestas de um grafo
- Circuito que contém uma única vez cada uma das arestas de um grafo
- Qual é a sequência de arestas ?

- Há algum caminho Euleriano ?
- Há algum circuito Euleriano ?



[Wikipedia]

Propriedades – Tarefas : exemplos ?

- Grafo conexo
- Um grafo tem um circuito Euleriano sse cada vértice for um vértice de grau par
- Um grafo tem um caminho Euleriano sse exatamente zero ou dois vértices tiverem grau impar

Propriedades – Tarefas : exemplos ?

- Grafo orientado fortemente conexo
- Um grafo orientado tem um circuito Euleriano sse cada vértice tiver o mesmo in-degree e out-degree
- Um grafo orientado tem um caminho Euleriano sse quando muito um vérice tem out-degree – in-degree = 1, quando muito um vértice tem in-degree – out-degree = 1, e cada um dos outros vértices tem o mesmo in-degree e out-degree

Aplicações

- Projeto de circuitos CMOS
- Reconstrução de sequências de DNA
- …

Circuitos Eulerianos – O Algoritmo de Fleury

Algoritmo de Fleury (1883)

- Assegurar que cada vértice tem grau par
- v = escolher um qualquer vértice inicial
- Em v, escolher a próxima a próxima aresta (v, w) da solução

Condição : a escolha de (v, w) não torna o grafo desconexo, a menos que seja a única escolha possível – ponte / istmo ?

Adicionar (v, w) à solução

v = w

Apagar (v, w)

Apagar v, se é agora um vértice isolado

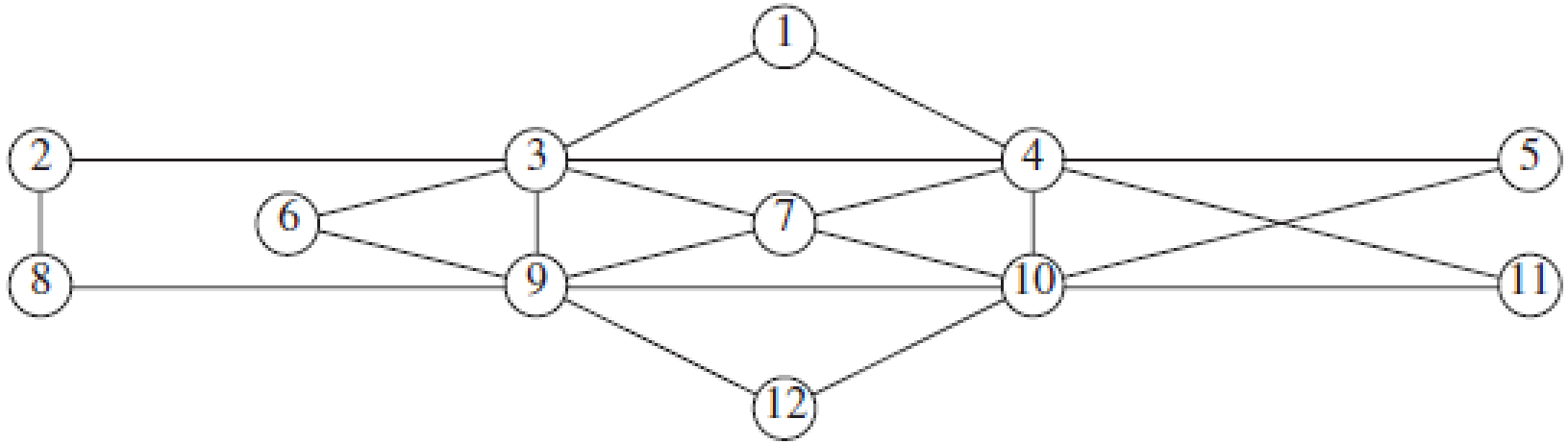
Problemas ?

- Trabalhar sobre uma cópia do grafo dado

- Como verificar se uma aresta é um isto / ponte e não pode ser apagada sem tornar o grafo desconexo ?
- Remover tentativamente a aresta e verificar se os outros vértices continuam a ser alcançáveis
  - Sucessivas travessias em profundidade, por exemplo
- **O(E x E)**

- Há algoritmos alternativos mais eficientes…

Tarefa : aplicar o algoritmo



[Weiss]

Sugestões de Leitura

Sugestões de leitura

- M. A. Weiss, *"Data Structures and Algorithm Analysis in C++"*, 4th. Ed., Pearson, 2014
  - Chapter 9

- R. Sedgewick and K. Wayne, "*Algorithms"*, 4th. Ed., Addison-Wesley, 2011
  - Chapter 4