Linguagens Formais e Autómatos / Compiladores

Gramáticas independentes do contexto (GIC)

Artur Pereira <artur@ua.pt>,
Miguel Oliveira e Silva <mos@ua.pt>

DETI, Universidade de Aveiro

Sumário

Gramáticas
Definição

Uma gramática é um quádruplo $G = (T, N, P, S)$, onde

- T é um conjunto finito não vazio de símbolos terminais;
- N, com $N \cap T = \emptyset$, é um conjunto finito não vazio de símbolos não terminais;
- P é um conjunto de produções (ou regras de rescrita), cada uma da forma $\alpha \to \beta$;
- $S \in N$ é o símbolo inicial.

- α e β são designados por **cabeça da produção** e **corpo da produção**, respetivamente.
- No caso geral $\alpha \in (N \cup T)^* \times N \times (N \cup T)^*$ e $\beta = (N \cup T)^*$.

Gramáticas independentes do contexto – GIC

$\mathcal{D}$ Uma gramática $G = (T, N, P, S)$ diz-se **independente do contexto** se, para qualquer produção $(\alpha \to \beta) \in P$, as duas condições seguintes são satisfeitas

$$\begin{aligned} \alpha &\in N \\ \beta &\in (T \cup N)^* \end{aligned}$$

- A linguagem gerada por uma gramática independente do contexto diz-se independente do contexto
- as gramáticas regulares são independentes do contexto
- As gramáticas independentes do contexto são fechadas sob as operações de reunião, concatenação e fecho
  - mas não o são sob as operações de intersecção e complementação.

- Note que: se $\beta \in T^* \cup T^* N$, então $\beta \in (T \cup N)^*$

Derivação
Definições

$\mathcal{D}$ Dada uma palavra $\alpha A\beta$, com $A \in N$ e $\alpha, \beta \in (N \cup T)^*$, e uma produção $(A \to \gamma) \in P$, com $\gamma \in (N \cup T)^*$, chama-se **derivação direta** à rescrita de $\alpha A\beta$ em $\alpha\gamma\beta$, denotando-se

$$\alpha A\beta \Rightarrow \alpha\gamma\beta$$

$\mathcal{D}$ Dada uma palavra $\alpha A\beta$, com $A \in N$, $\alpha \in (N \cup T)^*$ e $\beta \in T^*$, e uma produção $(A \to \gamma) \in P$, com $\gamma \in (N \cup T)^*$, chama-se **derivação direta à direita** à rescrita de $\alpha A\beta$ em $\alpha\gamma\beta$, denotando-se

$$\alpha A\beta \overset{D}{\Rightarrow} \alpha\gamma\beta$$

$\mathcal{D}$ Dada uma palavra $\alpha A\beta$, com $A \in N$, $\alpha \in T^*$ e $\beta \in (N \cup T)^*$, e uma produção $(A \to \gamma) \in P$, com $\gamma \in (N \cup T)^*$, chama-se **derivação direta à esquerda** à rescrita de $\alpha A\beta$ em $\alpha\gamma\beta$, denotando-se

$$\alpha A\beta \overset{E}{\Rightarrow} \alpha\gamma\beta$$

- Note que, em $\alpha A\beta$, A é o símbolo não terminal mais à direita
- Note que, em $\alpha A\beta$, A é o símbolo não terminal mais à esquerda

Derivação
Definições

$\mathcal{D}$ Chama-se **derivação** a uma sucessão de zero ou mais derivações diretas, denotando-se

$$\alpha \Rightarrow^* \beta \qquad \equiv \qquad \alpha = \gamma_0 \Rightarrow \gamma_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \gamma_n = \beta$$

onde n é o comprimento da derivação.

$\mathcal{D}$ Chama-se **derivação à direita** a uma sucessão de zero ou mais derivações diretas à direita, denotando-se

$$\alpha \overset{D}{\Rightarrow}{}^* \beta \qquad \equiv \qquad \alpha = \gamma_0 \overset{D}{\Rightarrow} \gamma_1 \overset{D}{\Rightarrow} \cdots \overset{D}{\Rightarrow} \gamma_n = \beta$$

onde n é o comprimento da derivação.

$\mathcal{D}$ Chama-se **derivação à esquerda** a uma sucessão de zero ou mais derivações diretas à esquerda, denotando-se

$$\alpha \overset{E}{\Rightarrow}{}^* \beta \qquad \equiv \qquad \alpha = \alpha_0 \overset{E}{\Rightarrow} \alpha_1 \overset{E}{\Rightarrow} \cdots \overset{E}{\Rightarrow} \alpha_n = \beta$$

onde n é o comprimento da derivação.

Derivação
Exemplo

$\mathcal{Q}$ Considere, sobre o alfabeto $T = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$, a gramática seguinte

$$\begin{aligned} S &\to \varepsilon \mid \mathtt{a}\ B \mid \mathtt{b}\ A \mid \mathtt{c}\ S \\ A &\to \mathtt{a}\ S \mid \mathtt{b}\ A\ A \mid \mathtt{c}\ A \\ B &\to \mathtt{a}\ B\ B \mid \mathtt{b}\ S \mid \mathtt{c}\ B \end{aligned}$$

Determine as derivações à direita e à esquerda da palavra $\mathtt{aabcbc}$

$\mathcal{R}$

à direita

$$S \Rightarrow \mathtt{a}B \Rightarrow \mathtt{aa}BB \Rightarrow \mathtt{aa}B\mathtt{b}S \Rightarrow \mathtt{aa}B\mathtt{bc}S$$
$$\Rightarrow \mathtt{aa}B\mathtt{bc} \Rightarrow \mathtt{aab}S\mathtt{bc} \Rightarrow \mathtt{aabc}S\mathtt{bc} \Rightarrow \mathtt{aabcbc}$$

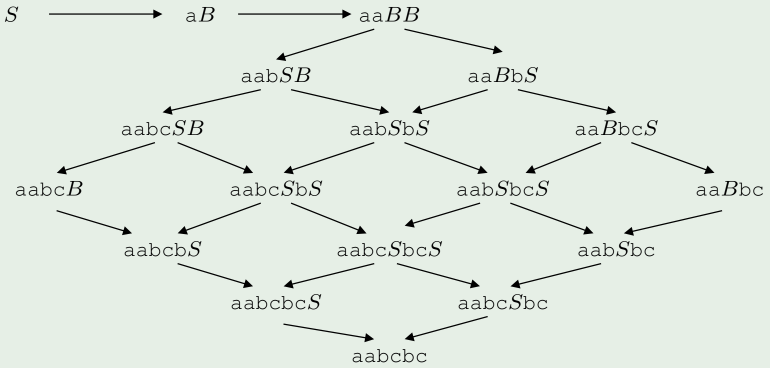
à esquerda

$$S \Rightarrow \mathtt{a}B \Rightarrow \mathtt{aa}BB \Rightarrow \mathtt{aab}SB \Rightarrow \mathtt{aabc}SB$$
$$\Rightarrow \mathtt{aabc}B \Rightarrow \mathtt{aabcb}S \Rightarrow \mathtt{aabcbc}S \Rightarrow \mathtt{aabcbc}$$

- Note que se usou $\Rightarrow$ em vez de $\overset{D}{\Rightarrow}$ e $\overset{E}{\Rightarrow}$

Derivação
Alternativas de derivação

- O grafo seguinte capta as alternativas de derivação. Considera-se novamente a palavra `aabcbc` e a gramática anterior

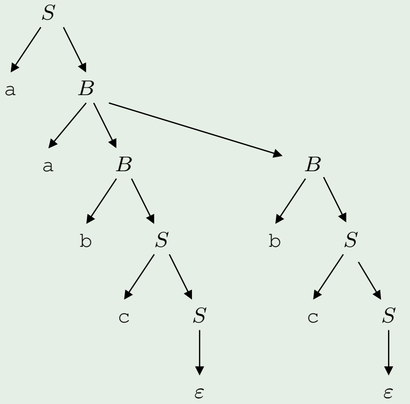


- Identifique os caminhos que correspondem às derivações à direita e à esquerda

Derivação
Árvore de derivação

$\mathcal{D}$ Uma **árvore de derivação** (*parse tree*) é uma representação de uma derivação onde os nós-ramos são elementos de N e os nós-folhas são elementos de T.

- A árvore de derivação da palavra `aabcbc` na gramática anterior é



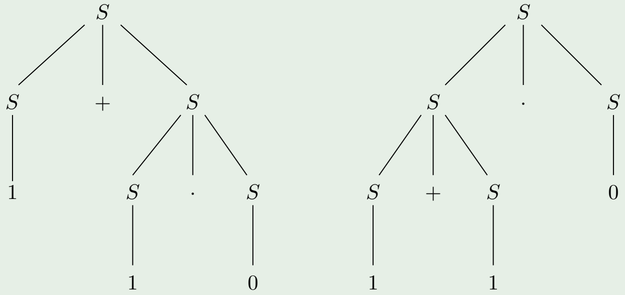
Ambiguidade
Ilustração através de um exemplo

- Considere a gramática

$$S \rightarrow S \texttt{ + } S \mid S \texttt{ . } S \mid \neg\, S \mid \texttt{(} \; S \; \texttt{)} \mid \texttt{0} \mid \texttt{1}$$

e desenhe a árvore de derivação da palavra $\texttt{1+1}\cdot\texttt{0}$.

$\mathcal{R}$ Podem-se obter duas árvores diferentes



- Pode-se por isso dar duas interpretações diferentes à palavra

Ambiguidade
Definição

- $\mathcal{D}$ Diz-se que uma palavra é derivada **ambiguamente** se possuir duas ou mais árvores de derivação distintas
- $\mathcal{D}$ Diz-se que uma gramática é **ambígua** se possuir pelo menos uma palavra gerada ambiguamente

- Frequentemente é possível definir-se uma gramática não ambígua que gera a mesma linguagem que uma ambígua
- No entanto, há gramáticas **inerentemente ambíguas**

  Por exemplo, a linguagem

  $$L = \{\mathrm{a}^i\mathrm{b}^j\mathrm{c}^k \mid i = j \lor j = k\}$$

  não possui uma gramática não ambígua que a represente.

Ambiguidade
Remoção da ambiguidade

$\mathcal{R}$ Considere-se novamente a gramática

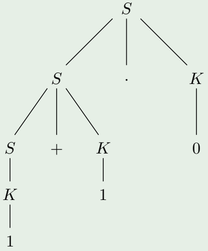
$$S \rightarrow S \texttt{ + } S \mid S \texttt{ . } S \mid \neg\, S \mid \texttt{ (} S \texttt{) } \mid \texttt{0} \mid \texttt{1}$$

e obtenha-se uma gramática não ambígua equivalente

$\mathcal{R}$

$$\begin{aligned} S &\rightarrow K \mid S \texttt{ + } K \mid S \texttt{ . } K \mid \neg\, S \\ K &\rightarrow \texttt{0} \mid \texttt{1} \mid \texttt{ (} S \texttt{) } \end{aligned}$$

$\mathcal{Q}$ Desenhe a árvore de derivação da palavra `1+1.0` na nova gramática



Projeto de gramáticas
Exemplo #1, solução #1

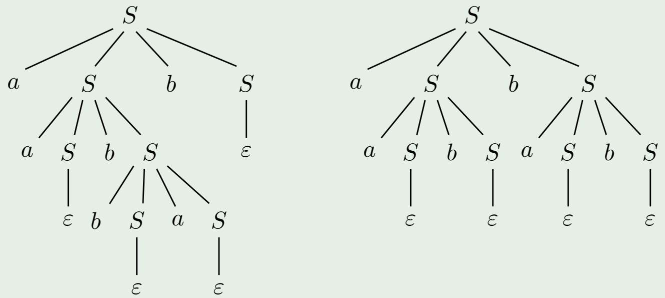
$\mathcal{Q}$ Sobre o conjunto de terminais $T = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$, determine uma gramática independente do contexto que represente a linguagem

$$L_1 \ = \{\omega \in T^* \ : \ \#(\mathtt{a}, \omega) = \#(\mathtt{b}, \omega)\}$$

$\mathcal{R}_1$

$$S \to \varepsilon \mid \mathtt{a} \ S \ \mathtt{b} \ S \mid \mathtt{b} \ S \ \mathtt{a} \ S$$

$\mathcal{Q}$ A gramática é ambígua? Analise a palavra $\mathtt{aabbab}$.



Projeto de gramáticas
Exemplo #1, solução #2

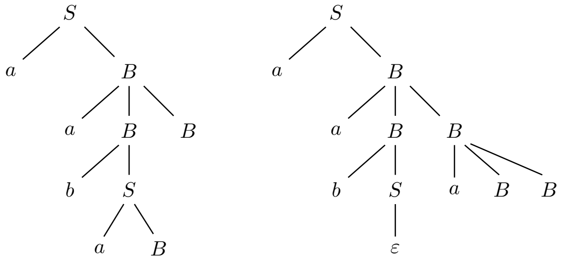
$\mathcal{Q}$ Sobre o conjunto de terminais $T = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$, determine uma gramática independente do contexto que represente a linguagem

$$L_1 = \{\omega \in T^* \;:\; \#(\mathtt{a}, \omega) = \#(\mathtt{b}, \omega)\}$$

$\mathcal{R}_2$

$$\begin{aligned} S &\to \varepsilon \mid \mathtt{a}\ B \mid \mathtt{b}\ A \\ A &\to \mathtt{a}\ S \mid \mathtt{b}\ A\ A \\ B &\to \mathtt{a}\ B\ B \mid \mathtt{b}\ S \end{aligned}$$

$\mathcal{Q}$ A gramática é ambígua?
Analise a palavra `aababb`.



- Falta expandir alguns nós.

Projeto de gramáticas
Exemplo #1, solução #3

$\mathcal{Q}$ Sobre o conjunto de terminais $T = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$, determine uma gramática independente do contexto que represente a linguagem

$$L_1 = \{\omega \in T^* \; : \; \#(\mathtt{a}, \omega) = \#(\mathtt{b}, \omega)\}$$

$\mathcal{R}_3$

$$S \to \varepsilon \mid \mathtt{a} \; B \; S \mid \mathtt{b} \; A \; S$$

$$A \to \mathtt{a} \mid \mathtt{b} \; A \; A$$

$$B \to \mathtt{a} \; B \; B \mid \mathtt{b}$$

$\mathcal{Q}$ A gramática é ambígua? Analise a palavra `aababb`.

Projeto de gramáticas
Exemplo #2

$\mathcal{Q}$ Sobre o conjunto de terminais $T = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$, determine uma gramática independente do contexto que represente a linguagem

$$L_2 = \{\omega \in T^* \ : \ \#(\mathtt{a}, \omega) = \#(\mathtt{b}, \omega)\}$$

$\mathcal{R}$

$$S \rightarrow \varepsilon \mid \mathtt{a}\ B\ S \mid \mathtt{b}\ A\ S \mid \mathtt{c}\ S$$
$$A \rightarrow \mathtt{a} \mid \mathtt{b}\ A\ A \mid \mathtt{c}\ A$$
$$B \rightarrow \mathtt{a}\ B\ B \mid \mathtt{b} \mid \mathtt{c}\ B$$

$\mathcal{Q}$ A gramática é ambígua?

Projeto de gramáticas
Exemplo #3, solução #1

$\mathcal{Q}$ Sobre o conjunto de terminais $T = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$, determine uma gramática independente do contexto que represente a linguagem

$$\begin{aligned} L_3 = \{\omega \in T^* \ : \ & \#(\mathtt{a},\omega) = \#(\mathtt{b},\omega) \wedge \\ & \forall_{i \leq |\omega|} \ \#(\mathtt{a}, \text{prefix}(i,\omega)) \geq \#(\mathtt{b}, \text{prefix}(i,\omega))\} \end{aligned}$$

$\mathcal{R}_1$

$$S \rightarrow \varepsilon \ | \ \mathtt{a} \ S \ \mathtt{b} \ S \ | \ \mathtt{c} \ S$$

$\mathcal{Q}$ A gramática é ambígua? (Analise a palavra $\mathtt{aababb}$.)

- Esta linguagem faz-vos lembrar algo que conheçam?
- Solução inspirada na do exemplo 1.1 removendo a produção $S \rightarrow \mathtt{b} \ S \ \mathtt{a} \ S$

Projeto de gramáticas
Exemplo #3: solução #2

$\mathcal{Q}$ Sobre o conjunto de terminais $T = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$, determine uma gramática independente do contexto que represente a linguagem

$$L_3 = \{\omega \in T^* \ : \ \#(\mathtt{a}, \omega) = \#(\mathtt{b}, \omega) \wedge \\ \forall_{i \leq |\omega|} \ \#(\mathtt{a}, \mathsf{prefix}(i, \omega)) \geq \#(\mathtt{b}, \mathsf{prefix}(i, \omega))\}$$

$\mathcal{R}_2$

$$S \to \varepsilon \ | \ \mathtt{a} \ B \ | \ \mathtt{c} \ S$$

$$B \to \mathtt{a} \ B \ B \ | \ \mathtt{b} \ S \ | \ \mathtt{c} \ B$$

$\mathcal{Q}$ A gramática é ambígua? (Analise a palavra $\mathtt{aababb}$.)

- Solução inspirada na do exemplo 1.2 removendo a produção $S \to \mathtt{b} \ A$ e as começadas por A

Projeto de gramáticas
Exemplo #3: solução #3

$\mathcal{Q}$ Sobre o conjunto de terminais $T = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$, determine uma gramática independente do contexto que represente a linguagem

$$\begin{aligned} L_3 = \{\omega \in T^* \ : \ & \#(\mathtt{a}, \omega) = \#(\mathtt{b}, \omega) \wedge \\ & \forall_{i \leq |\omega|} \ \#(\mathtt{a}, \text{prefix}(i, \omega)) \geq \#(\mathtt{b}, \text{prefix}(i, \omega))\} \end{aligned}$$

$\mathcal{R}_3$

$$S \to \varepsilon \mid \mathtt{a} \ B \ S \mid \mathtt{c} \ S$$

$$B \to \mathtt{a} \ B \ B \mid \mathtt{b} \mid \mathtt{c} \ B$$

$\mathcal{Q}$ A gramática é ambígua? (Analise a palavra $\mathtt{aababb}$.)

- Solução inspirada na do exemplo 1.3 removendo a produção $S \to \mathtt{b} \ A \ S$ e as começadas por A

Projeto de gramáticas
Exercícios

$\mathcal{Q}$ Sobre o conjunto de terminais $T = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{(}, \mathtt{)}, +, \star\}$, determine uma gramática independente do contexto que represente a linguagem

$$L = \{\, \omega \in T^* \;:\; \omega \text{ é uma expressão regular sobre o alfabeto } \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}\}$$

Operações sobre GICs
Reunião

$\mathcal{D}$ Sejam $G_1 = (T_1, N_1, P_1, S_1)$ e $G_2 = (T_2, N_2, P_2, S_2)$ duas gramáticas independentes do contexto quaisquer, com $N_1 \cap N_2 = \emptyset$.

A gramática $G = (T, N, P, S)$ onde

$$\begin{aligned} T &= T_1 \cup T_2 \\ N &= N_1 \cup N_2 \cup \{S\} \quad \text{com} \quad S \notin (N_1 \cup N_2) \\ P &= \{S \to S_1, S \to S_2\} \cup P_1 \cup P_2 \end{aligned}$$

é independente do contexto e gera a linguagem $L = L(G_1) \cup L(G_2)$.

- As novas produções $S \to S_i$, com $i = 1, 2$, permitem que G gere a linguagem $L(G_i)$
- Esta definição é idêntica à que foi dada para a operação de reunião nas gramáticas regulares

Reunião de GIC
Exemplo

$\mathcal{Q}$ Sobre o conjunto de terminais $T = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$, determine uma gramática independente do contexto que represente a linguagem

$$L_4 = \{ \omega \in T^* : \#(\mathtt{a}, \omega) = \#(\mathtt{b}, \omega) \vee \#(\mathtt{a}, \omega) = \#(\mathtt{c}, \omega) \}$$

$\mathcal{R}$

- Para $X_1 = \{ \omega \in T^* : \#(\mathtt{a}, \omega) = \#(\mathtt{b}, \omega) \}$ tem-se

$$S_1 \rightarrow \varepsilon \mid \mathtt{a}\ S_1\ \mathtt{b}\ S_1 \mid \mathtt{b}\ S_1\ \mathtt{a}\ S_1 \mid \mathtt{c}\ S_1$$

- Para $X_2 = \{ \omega \in T^* : \#(\mathtt{a}, \omega) = \#(\mathtt{c}, \omega) \}$ tem-se

$$S_2 \rightarrow \varepsilon \mid \mathtt{a}\ S_2\ \mathtt{c}\ S_2 \mid \mathtt{c}\ S_2\ \mathtt{a}\ S_2 \mid \mathtt{b}\ S_2$$

- Finalmente, para $L_4 = X_1 \cup X_2$ tem-se

$$\begin{aligned} S &\rightarrow S_1 \mid S_2 \\ S_1 &\rightarrow \varepsilon \mid \mathtt{a}\ S_1\ \mathtt{b}\ S_1 \mid \mathtt{b}\ S_1\ \mathtt{a}\ S_1 \mid \mathtt{c}\ S_1 \\ S_2 &\rightarrow \varepsilon \mid \mathtt{a}\ S_2\ \mathtt{c}\ S_2 \mid \mathtt{c}\ S_2\ \mathtt{a}\ S_2 \mid \mathtt{b}\ S_2 \end{aligned}$$

- Mesmo que as gramáticas de X_1 e X_2 fossem não ambíguas, a de L_4 seria ambígua. Porquê?

Operações sobre gramáticas:
Concatenação

$\mathcal{D}$ Sejam $G_1 = (T_1, N_1, P_1, S_1)$ e $G_2 = (T_2, N_2, P_2, S_2)$ duas gramáticas independentes do contexto quaisquer, com $N_1 \cap N_2 = \emptyset$.

A gramática $G = (T, N, P, S)$ onde

$$\begin{aligned} T &= T_1 \cup T_2 \\ N &= N_1 \cup N_2 \cup \{S\} \quad \text{com} \quad S \notin (N_1 \cup N_2) \\ P &= \{S \to S_1 S_2\} \cup P_1 \cup P_2 \end{aligned}$$

é independente do contexto e gera a linguagem $L = L(G_1) \cdot L(G_2)$.

- A nova produção $S \to S_1 S_2$ justapõe palavras de $L(G_2)$ às de $L(G_1)$
- Esta definição é **diferente** da que foi dada para a operação de concatenação nas gramáticas regulares

Concatenação de GIC
Exemplo

$\mathcal{Q}$ Sobre o conjunto de terminais $T = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$, determine uma gramática independente do contexto que represente a linguagem

$$\begin{aligned} L_5 \ = \ \{\omega_1\omega_2 \ : \ & \omega_1, \omega_2 \in T^* \\ & \wedge \#(\mathtt{a},\omega_1) = \#(\mathtt{b},\omega_1) \ \wedge \ \#(\mathtt{a},\omega_2) = \#(\mathtt{c},\omega_2)\} \end{aligned}$$

$\mathcal{R}$ Atendendo a que $L_5 = X_1 \cdot X_2$ (gramáticas do exemplo anterior)

- Para $X_1 = \{\, \omega \in T^* \ : \ \#(\mathtt{a},\omega) = \#(\mathtt{b},\omega) \,\}$ tem-se

$$S_1 \rightarrow \varepsilon \mid \mathtt{a}\ S_1\ \mathtt{b}\ S_1 \mid \mathtt{b}\ S_1\ \mathtt{a}\ S_1 \mid \mathtt{c}\ S_1$$

- Para $X_2 = \{\, \omega \in T^* \ : \ \#(\mathtt{a},\omega) = \#(\mathtt{c},\omega) \,\}$ tem-se

$$S_2 \rightarrow \varepsilon \mid \mathtt{a}\ S_2\ \mathtt{c}\ S_2 \mid \mathtt{c}\ S_2\ \mathtt{a}\ S_2 \mid \mathtt{b}\ S_2$$

- Finalmente, para $L_4 = X_1 \cdot X_2$ tem-se

$$\begin{aligned} & S \rightarrow S_1\ S_2 \\ & S_1 \rightarrow \varepsilon \mid \mathtt{a}\ S_1\ \mathtt{b}\ S_1 \mid \mathtt{b}\ S_1\ \mathtt{a}\ S_1 \mid \mathtt{c}\ S_1 \\ & S_2 \rightarrow \varepsilon \mid \mathtt{a}\ S_2\ \mathtt{c}\ S_2 \mid \mathtt{c}\ S_2\ \mathtt{a}\ S_2 \mid \mathtt{b}\ S_2 \end{aligned}$$

Operações sobre gramáticas
Fecho de Kleene

Seja $G_1 = (T_1, N_1, P_1, S_1)$ uma gramática independente do contexto qualquer. A gramática $G = (T, N, P, S)$ onde

$$\begin{aligned} T &= T_1 \\ N &= N_1 \cup \{S\} \quad \text{com} \quad S \notin N_1 \\ P &= \{S \to \varepsilon, S \to S_1 S\} \cup P_1 \end{aligned}$$

é independente do contexto e gera a linguagem $L = (L(G_1))^*$.

- A produção $S \to \varepsilon$, per si, garante que $L^0(G_1) \subseteq L(G)$
- As produções $S \to S_1 S$ e $S \to \varepsilon$ garantem que $L^i(G_1) \subseteq L(G)$, para qualquer $i > 0$
- Esta definição é **diferente** da que foi dada para a operação de fecho nas gramáticas regulares

Fecho de Kleene de GIC
Exemplo

$\mathcal{Q}$ Sobre o conjunto de terminais $T = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$, determine uma gramática independente do contexto que represente a linguagem

$$L_6 = \{\omega \in T^* \; : \; \#(\mathtt{a}, \omega) \geq \#(\mathtt{b}, \omega)\}$$

$\mathcal{R}$ Considere-se as linguagens A e X, dadas por

$$A = \{\omega \in T^* \; : \; \#(\mathtt{a}, \omega) = \#(\mathtt{b}, \omega) + 1\}$$
$$X = \{\omega \in T^* \; : \; \#(\mathtt{a}, \omega) = \#(\mathtt{b}, \omega)\}$$

Tem-se que $L_6 = A^* \cup X$. Donde

$$S_6 \rightarrow \varepsilon \mid A \; S_6 \mid X$$

com

$$\begin{aligned} X &\rightarrow \varepsilon \mid \mathtt{a} \; B \mid \mathtt{b} \; A \mid \mathtt{c} \; X \\ A &\rightarrow \mathtt{a} \; X \mid \mathtt{b} \; A \; A \mid \mathtt{c} \; A \\ B &\rightarrow \mathtt{a} \; B \; B \mid \mathtt{b} \; X \mid \mathtt{c} \; B \end{aligned}$$

- O fecho de A inclui a palavra vazia mas não as outras palavras com $\#_a = \#_b$

Símbolos produtivos e improdutivos
Exemplo de ilustração

$\mathcal{Q}$ Sobre o conjunto de terminais $T = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$, considere a gramática

$$
\begin{aligned}
S &\to \mathtt{a}\ A\ \mathtt{b} \mid \mathtt{b}\ B \\
A &\to \mathtt{c}\ C \mid \mathtt{b}\ B \mid \mathtt{d} \\
B &\to \mathtt{d}\ D \mid \mathtt{b} \\
C &\to A\ C \mid B\ D \mid S\ D \\
D &\to A\ D \mid B\ C \mid C\ S \\
E &\to \mathtt{a}\ A \mid \mathtt{b}\ B \mid \varepsilon
\end{aligned}
$$

- Tente expandir (através de uma derivação) o símbolo não terminal A para uma sequência apenas com símbolos terminais ($S \Rightarrow^* u$, com $u \in T^*$)
  - $A \Rightarrow \mathtt{d}$
- Faça o mesmo com o símbolo C
  - Não consegue
- A é um símbolo **produtivo**; C é um símbolo **improdutivo**

Símbolos produtivos e improdutivos
Definição

- Seja $G = (T, N, P, S)$ uma gramática qualquer
- Um símbolo não terminal A diz-se **produtivo** se for possível expandi-lo para uma expressão contendo apenas símbolos terminais
- Ou seja, A é produtivo se

$$A \Rightarrow^+ u \quad \wedge \quad u \in T^*$$

- Caso contrário, diz-se que A é **improdutivo**
- Uma gramática é improdutiva se o seu símbolo inicial for improdutivo
- Na gramática

$$S \to \texttt{a b} \mid \texttt{a } S \texttt{ b} \mid X$$
$$X \to \texttt{c } X$$

  - S é produtivo, porque $S \Rightarrow \texttt{ab} \quad \wedge \quad \texttt{ab} \in T^*$
  - X é improdutivo, porque $X \Rightarrow \texttt{c}X \Rightarrow \texttt{cc}X \Rightarrow^* \texttt{c} \cdots \texttt{c}X$

Símbolos produtivos
Algoritmo de cálculo

- O conjunto dos símbolos produtivos, N_p, pode ser obtido por aplicação sucessiva das seguintes regras construtivas

$$\textbf{if } (A \to \alpha) \in P \textbf{ and } \alpha \in T^* \textbf{ then } A \in N_p$$
$$\textbf{if } (A \to \alpha) \in P \textbf{ and } \alpha \in (T \cup N_p)^* \textbf{ then } A \in N_P$$

- A 1ª regra é um caso particular da 2ª, pelo que poderia ser retirada
- Algoritmo de cálculo:

```
let Np := ∅, Pp := P          # Np – símbolos produtivos
repeat
    nothingAdded := true
    foreach (A → α) ∈ Pp do
        if α ∈ (T ∪ Np)* then
            if A ∉ Np then
                Np := Np ∪ {A}
                nothingAdded := false
            Pp := Pp − {A → α}
until nothingAdded or Np = N
```

Símbolos acessíveis e inacessíveis
Exemplo de ilustração

$\mathcal{Q}$ Sobre o conjunto de terminais $T = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$, considere a gramática

$$\begin{aligned}
S &\to \mathtt{a}\ A\ \mathtt{b} \mid \mathtt{b}\ B \\
A &\to \mathtt{c}\ C \mid \mathtt{b}\ B \mid \mathtt{d} \\
B &\to \mathtt{d}\ D \mid \mathtt{b} \\
C &\to A\ C \mid B\ D \mid S\ D \\
D &\to A\ D \mid B\ C \mid C\ S \\
E &\to \mathtt{a}\ A \mid \mathtt{b}\ B \mid \varepsilon
\end{aligned}$$

- Tente alcançar (através de uma derivação) o símbolo não terminal C a partir do símbolo inicial (S) ($S \Rightarrow^* \alpha\, C\, \beta$, com $\alpha, \beta \in (T \cup N)^*$)
  - $S \Rightarrow \mathtt{b}\, B \Rightarrow \mathtt{b}\, \mathtt{d}\, D \Rightarrow \mathtt{b}\, \mathtt{d}\, B\, C$
- Faça o mesmo com o símbolo E
  - Não consegue
- C é um símbolo **acessível**; E é um símbolo **inacessível**

Símbolos acessíveis e inacessíveis
Definição

- Seja $G = (T, N, P, S)$ uma gramática qualquer
- Um símbolo terminal ou não terminal x diz-se **acessível** se for possível expandir S (o símbolo inicial) para uma expressão que contenha x
- Ou seja, x é acessível se

$$S \Rightarrow^* \alpha\, x\, \beta$$

- Caso contrário, diz-se que x é **inacessível**
- Na gramática

$$\begin{aligned} &S \rightarrow \varepsilon \mid \texttt{a}\ S\ \texttt{b} \mid \texttt{c}\ C\ \texttt{c} \\ &C \rightarrow \texttt{c}\ S\ \texttt{c} \\ &D \rightarrow \texttt{d}\ X\ \texttt{d} \\ &X \rightarrow C\ C \end{aligned}$$

  - D, $\texttt{d}$, e X são inacessíveis
  - Os restantes são acessíveis

Símbolos acessíveis
Algoritmo de cálculo

- O conjunto dos seus símbolos acessíveis, V_A, pode ser obtido por aplicação das seguintes regras construtivas

$$S \in V_A$$
$$\texttt{\textbf{if}}\ \ A \to \alpha B \beta \in P\ \ \texttt{\textbf{and}}\ \ A \in V_A\ \ \texttt{\textbf{then}}\ \ B \in V_A$$

- Algoritmo de cálculo:

```
let V_A := {S}          # V_A – símbolos acessíveis
let N_A := {S}          # N_A – não terminais a processar
repeat
    let A := element-of N_A
    N_A := N_A \ {A}
    foreach (A → α) ∈ P do
        foreach x in α do
            if x ∉ V_A then
                V_A := V_A ∪ {x}
                if x ∈ N then
                    N_A := N_A ∪ {x}
until N_A = ∅
```

Gramáticas limpas
Algoritmo de limpeza

- Numa gramática, os símbolos inacessíveis e os símbolos improdutivos são **símbolos inúteis**
- Se tais símbolos forem removidos obtém-se uma gramática equivalente
- Diz-se que uma gramática é **limpa** se não possuir símbolos inúteis
- Para limpar uma gramática deve-se:
  - começar por a expurgar dos símbolos improdutivos
  - só depois remover os inacessíveis

Gramáticas limpas
Exemplo #1

$\mathcal{Q}$ Sobre o conjunto de terminais $T = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$, determine uma gramática limpa equivalente à seguinte

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow \mathtt{a}\ A\ \mathtt{b} \mid \mathtt{b}\ B \\
A &\rightarrow \mathtt{c}\ C \mid \mathtt{b}\ B \mid \mathtt{d} \\
B &\rightarrow \mathtt{d}\ D \mid \mathtt{b} \\
C &\rightarrow A\ C \mid B\ D \mid S\ D \\
D &\rightarrow A\ D \mid B\ C \mid C\ S \\
E &\rightarrow \mathtt{a}\ A \mid \mathtt{b}\ B \mid \varepsilon
\end{aligned}
$$

- Cálculo dos símbolos produtivos
  1. Inicialmente $N_p = \emptyset$
  2. $A \rightarrow \mathtt{d} \ \wedge\ \mathtt{d} \in T^* \quad \Longrightarrow \quad N_p = N_p \cup \{A\}$
  3. $B \rightarrow \mathtt{b} \ \wedge\ \mathtt{b} \in T^* \quad \Longrightarrow \quad N_p = N_p \cup \{B\}$
  4. $E \rightarrow \varepsilon \ \wedge\ \varepsilon \in T^* \quad \Longrightarrow \quad N_p = N_p \cup \{E\}$
  5. $S \rightarrow \mathtt{a}\,A\,\mathtt{b} \ \wedge\ \mathtt{a}, S, \mathtt{b} \in (T \cup N_p)^* \quad \Longrightarrow \quad N_p = N_p \cup \{S\}$
  6. Nada mais se consegue acrescentar a N_p

Gramáticas limpas
Exemplo #1, cont.

- Gramática após a remoção dos símbolos improdutivos

$$
\begin{aligned}
S &\to \mathtt{a}\ A\ \mathtt{b} \mid \mathtt{b}\ B \\
A &\to \mathtt{b}\ B \mid \mathtt{d} \\
B &\to \mathtt{b} \\
E &\to \mathtt{a}\ A \mid \mathtt{b}\ B \mid \varepsilon
\end{aligned}
$$

- Cálculo dos símbolos não terminais acessíveis sobre a nova gramática
    1. S é acessível, porque é o inicial
    2. sendo S acessível, de $S \to \mathtt{a}\ A\ \mathtt{b}$, tem-se que A é acessível
    3. sendo S acessível, de $S \to \mathtt{b}\ B$, tem-se que B é acessível
    4. de A só se chega a B, que já foi marcado como acessível
    5. de B não se chega a nenhum não terminal
    6. Logo E não é acessível, pelo que a gramática limpa é

$$
\begin{aligned}
S &\to \mathtt{a}\ A\ \mathtt{b} \mid \mathtt{b}\ B \\
A &\to \mathtt{b}\ B \mid \mathtt{d} \\
B &\to \mathtt{b}
\end{aligned}
$$