

137525

50376
2001
123

N° d'ordre : 2990

ECOLE CENTRALE DE LILLE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

THESE

Présentée en vue
d'obtenir le grade de

DOCTEUR

en

Spécialité : Productique Automatique et Informatique Industrielle

par

FREDERIC GOUAISBAUT

DOCTORAT DELIVRE CONJOINTEMENT PAR L'ECOLE CENTRALE DE LILLE
ET L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE



SUR LA COMMANDE PAR MODES GLISSANTS
DES SYSTEMES A RETARDS

Soutenue le 8 octobre 2001 devant le jury d'examen :

M. Marcel STAROSWIECKI	<i>Président</i>	Professeur à l'Université de Lille I
M. Jean-Pierre BARBOT	<i>Rapporteur</i>	Professeur à l'ENSEA
M. Vladimir KOLMANOVSKII	<i>Rapporteur</i>	Directeur de Recherches au CINVESTAV, Mexico City
M. Jean-François LAFAY	<i>Rapporteur</i>	Professeur à l'Ecole Centrale de Nantes
M. Jean-Pierre RICHARD	<i>Directeur de thèse</i>	Professeur à l'Ecole Centrale de Lille
M. Michel DAMBRINE	<i>Directeur de thèse</i>	Maître de Conférence à l'Ecole Centrale de Lille
M. Silviu I. NICULESCU	<i>Examinateur</i>	Chargé de Recherches CNRS à l'HEUDYASIC
M. Wilfrid PERRUQUETTI	<i>Examinateur</i>	Maître de Conférence à l'Ecole Centrale de Lille
M. Michel SORINE	<i>Examinateur</i>	Directeur de Recherches à l'INRIA Rocquencourt

Thèse préparée dans le laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle de l'Ecole Centrale de Lille sous la direction du professeur Jean-Pierre Richard, et de Michel Dambrine maître de conférence à l'Ecole Centrale de Lille

Table des matières

Avant-propos	9
Notations	11
Introduction générale	13
I La Commande des Systèmes Héréditaires par Modes Glissants	17
I.1 Introduction	17
I.2 Modèles pour la commande des systèmes à retards	17
I.2.1 Présentation du modèle	21
I.2.2 Approche temporelle	22
I.2.3 Modélisation sur un anneau	27
I.2.4 Le placement de spectre fini.	29
I.2.5 Les opérateurs en dimension infinie	31
I.3 La commande par modes glissants des systèmes à retards	33
I.3.1 Exemples introductifs	34
I.3.2 Cas de systèmes à retards purs	36
I.3.3 Le problème du retard sur l'état	39
I.3.4 Conclusion	45
II Commandes par modes glissants des systèmes linéaires retardés	47
II.1 Formulation du problème et choix du modèle	48
II.2 La mise sous forme régulière.	49
II.2.1 Le cas général	49
II.2.2 Cas particulier : le rang de la matrice B est de rang plein	50
II.2.3 La commandabilité du premier sous-système.	52
II.3 Une première étude	54

II.3.1 Stabilité asymptotique pour des retards suffisamment faibles.	54
II.3.2 Elaboration de la commande par modes glissants.	55
II.4 Caractérisation de la surface par optimisation convexe	57
II.4.1 Cas du retard constant et connu	57
II.4.2 Le cas du retard à valeur inconnue et constant	62
II.5 Choix de la surface : approche par un complément orthogonal	64
II.5.1 Cas du retard connu et constant	64
II.5.2 Cas d'un retard constant à valeur inconnue	67
II.5.3 Cas du retard variable dans le temps	68
II.6 Choix d'une surface fonctionnelle	72
II.7 Exemples et comparaisons	76
II.8 Extensions possibles	83
II.8.1 Extension à des systèmes à plusieurs retards sur l'état	84
II.8.2 Extension à une classe de systèmes à retards distribués	85
II.9 Conclusion	97
 III Commande des systèmes non linéaires à retards.	 99
III.1 Introduction	99
III.2 Notations et formulation du problème	100
III.3 Reformulation du problème	101
III.3.1 Première étape : utilisation de la forme régulière généralisée	101
III.3.2 Deuxième étape : formulation polytopic	102
III.4 Le choix de la surface	103
III.5 Cas du retard constant	104
III.5.1 Stabilisation asymptotique	104
III.5.2 Spécification du taux de décroissance	109
III.5.3 Stabilisation asymptotique dépendante du retard	111
III.6 Cas du retard variant dans le temps	117
III.6.1 Stabilisation asymptotique	117
III.6.2 Spécification du taux de décroissance	120
III.6.3 Stabilisation asymptotique dépendante du retard	121
III.7 Exemples et comparaisons	125
III.8 Extension au cas général	131

III.8.1	Préliminaires et données du problème	131
III.8.2	Stabilisation asymptotique	133
III.8.3	Exemple	136
III.9	Conclusion	138
IV	Effet d'un retard pur sur un système commandé par modes glissants	139
IV.1	Cas des systèmes linéaires	139
IV.1.1	Modèle considéré et position du problème	139
IV.1.2	Estimation du domaine attracteur	142
IV.2	Cas des systèmes non linéaires	149
IV.2.1	Modèle considéré	149
IV.2.2	Estimation du domaine attracteur	150
IV.3	Exemples	153
IV.4	Conclusion	156
V	Conclusion générale et perspectives	157
A	Stabilité asymptotique d'un système polytopic à retards.	161
B	Forme régulière généralisée	163
B.0.1	A propos du rang de la matrice $g(x)$	163
B.0.2	La forme régulière généralisée dans le cas non perturbé	164
B.0.3	Le cas perturbé	165
C	Stabilité de systèmes à retards par la seconde méthode de Lyapunov	167
C.1	Approche par fonctionnelles de Krasovskii	167
C.2	Approche par fonctions de Razumikhin	168
D	Le formalisme des modes glissants	171
D.1	Définition du régime glissant	171
D.2	Etude de la dynamique glissante du système	173
D.2.1	Condition d'invariance de la surface.	173
D.2.2	Dynamiques du mode glissant idéal	175
D.2.3	Signification physique de la commande par modes glissants	176
D.3	Robustesse des commandes à structure variable	176
D.4	Le phénomène de réticence	177

D.5 Exemple	179
Bibliographie	194

Table des figures

I-1	Illustration des retards possibles	18
I-2	Effet du retard sur un suivi de trajectoires	19
I-3	Solution périodique de période 4	35
II-1	Exemple (II.1) : évolution du système en boucle fermée	77
II-2	Exemple (II.1) : évolution du système en boucle fermée : méthode de Ivanescu et al.	79
II-3	Exemple (II.1) : zoom du plan de phase (x_1, x_2) . Pour deux instants différents, deux trajectoires co-existent sur $s = 0$. L'une diverge (provisoirement), tandis que l'autre converge vers zéro.	79
II-4	Exemple (II.1) : évolution du système en boucle fermée pour des conditions initiales fixées à $\varphi(\theta) = [1; -1]$ pour $\theta \in [-\tau, 0]$	80
II-5	Exemple (II.2) : évolution du système en boucle fermée	81
II-6	Exemple II.5 : évolution de la trajectoire du système (II.70) (II.61) pour un retard de $\tau = 1.99$	92
II-7	Exemple II.5 : évolution des trajectoires de (II.70) (II.61) et un retard variant de valeur maximale $\tau = 0.83$	92
II-8	Exemple II.5 : retard variable	93
III-1	Exemple III.4 : taux de décroissance α en fonction du retard τ_{max}	129
III-2	Exemple III.4 : Simulation de (III.51), (III.13) avec $m_1 = 1, \Lambda = -1$, $\tau = 0.8$	130
III-3	Exemple III.4 : zoom de la commande $u(t)$	130
III-4	Exemple III.4 : Simulation de z_3 de (III.51), (III.13) avec $m_1 = 2, \Lambda = -1$, $\tau = 0.8$ et de la courbe exponentielle de taux 0.5.	131
III-5	Exemple III.5 : simulation de (III.58)(III.57) avec un retard de valeur constante égale à 1 seconde	137

III-6 Exemple III.5 : portrait de phase.	137
IV-1 Exemple (IV.1) : Simulation du système (IV.6)-(IV.5) avec $\tau = 0.2, m = 10$	142
IV-2 Estimation du domaine des conditions initiales et du domaine attracteur	143
IV-3 Exemple IV.2 : Simulation de $s(z)$ pour le système (IV.6)-(IV.5) avec $\tau = 0.1, m = 10$	153
IV-4 Exemple IV.2 : du système (IV.6)-(IV.5) avec $\tau = 0.1, m = 10$	154
IV-5 Modélisation d'un bloqueur d'ordre zéro pour $\tau_{ech} = 2$ secondes.	154
IV-6 Exemple IV.3 : Simulation de (IV.40)-(IV.5) avec $\tau = 0.2$ seconde, $k = 5$	155
D-1 Attractivité de la surface.	173
D-2 Illustration de la réticence	178
D-3 Exemple D.1 : le pendule inverse	179
D-4 Exemple D.1 : simulation du système (D.15) commandé par une commande (D.20) avec $k_1 = 2, m = 2$	181
D-5 Exemple D.1 : simulation du système (D.15) commandé par une commande approchée de (D.20) avec $k_1 = 2, m = 2, \varepsilon = 10^{-2}$	181

Liste des tableaux

I.1	Tableau récapitulatif	45
II.1	Tableau des différentes commandabilités	53
II.2	Tableau récapitulatif des différents résultats pour l'exemple (II.56)	77
II.3	Tableau récapitulatif des différentes commandes pour l'exemple (II.2)	80
II.4	Tableau récapitulatif des résultats de l'exemple (II.3)	83
II.5	Retard admissible en fonction de α pour l'exemple (II.3)	83
III.1	Récapitulatif des différents résultats pour l'exemple (III.49)	126
III.2	Récapitulatif des différents résultats pour l'exemple (III.50)	127

Avant-propos

Le travail que nous présentons dans ce mémoire a été effectué au laboratoire d'Automatique et d'Informatique industrielle de Lille (LAIL) sous la direction de Monsieur le professeur Jean-Pierre Richard et Michel Dambrine, maître de Conférence à L'Ecole Centrale de Lille.

Je tiens à remercier très vivement Monsieur Jean-Pierre Richard et Monsieur Michel Dambrine pour leurs conseils, leur enthousiasme pour la recherche ainsi que pour leur grande disponibilité qui m'ont permis d'achever dans les meilleures conditions les travaux entrepris.

Je suis très honoré que Monsieur Jean-Pierre Barbot, professeur à l'ENSEA, ait accepté de juger ce travail en tant que rapporteur. Qu'il me soit permis de le remercier pour ses nombreux commentaires instructifs qui ont permis à ce mémoire de gagner en rigueur.

Je tiens à assurer de ma reconnaissance monsieur Jean-François Lafay, professeur à l'Ecole Centrale de Nantes, et directeur de l'IRCYN, qui malgré ses lourdes tâches, a accepté de juger mon travail.

Je suis très reconnaissant à Monsieur Vladimir Kolmanovskii, directeur de recherches au CINVESTAV d'avoir accepté d'être rapporteur sur ce travail. Je le remercie également pour les nombreuses discussions fructueuses sur les systèmes à retards et les conseils judicieux qu'il m'a prodigué pendant ses séjours au LAIL.

C'est avec sympathie que j'aimerais témoigner ma reconnaissance sincère à Monsieur Wilfrid Perruquetti, maître de conférence à L'Ecole Centrale de Lille, pour l'intérêt qu'il porte à ce travail. Travailler avec lui fut un grand plaisir.

J'aimerai exprimer toute ma gratitude à Monsieur Marcel Staroswiecki, professeur à l'Université de Lille, et directeur du LAIL pour avoir accepter de présider le jury de thèse.

Mes remerciements vont également à Monsieur Silviu Niculescu, chargé de recherches à l'UTC de Compiègne, et à Monsieur Michel Sorine, directeur de recherches à l'INRIA, pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et pour leur implication en tant que membres du jury.

Je tiens aussi à remercier toute l'équipe du LAIL, et plus particulièrement l'ensemble des

doctorants pour l'ambiance de travail amicale qui se renouvelle chaque année.

Enfin, ces remerciements s'adressent aussi à l'ensemble de mes amis, ma famille, et mon amie.

Notations

- Notations relatives aux ensembles
 - \mathbb{R} : ensemble des nombres réels
 - \mathbb{R}^+ : ensemble des réels positifs ou nuls
 - \mathbb{R}^n : espace vectoriel de dimension n construit sur le corps des réels
 - $[a, b]$: intervalle fermé de \mathbb{R} d'extrémités a et b
 - $]a, b[$: intervalle ouvert de \mathbb{R} d'extrémités a et b
 - $[a, b[$: intervalle semi-fermé de \mathbb{R} d'extrémités a et b
 - $I_r = \{1, \dots, r\}$, l'ensembles des r premiers nombres entiers positifs
 - $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$: espace d'état
 - $T_{\mathcal{S}_x}$ plan tangent à la variété \mathcal{S} au point x
 - $\mathcal{C} = \mathcal{C}([-h, 0]; \mathbb{R}^n)$ ou $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$: ensemble des fonctions continues de $[-h, 0]$ dans \mathbb{R}^n
(h éventuellement infini, dans ce cas $\mathcal{C} = \mathcal{C}(-\infty, 0]; \mathbb{R}^n)$
 - $x_t \in \mathcal{C}$ est définie par : $x_t(\theta) = x(t + \theta), \forall \theta \in [-h, 0]$ ou $x_t(\theta) = x(t + \theta) \forall \theta \leq 0$
 - $\mathcal{C}^1 = \mathcal{C}^1([-h, 0]; \mathbb{R}^n)$ ou $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$: ensemble des fonctions continûment différentiables de $[-h, 0]$ dans \mathbb{R}^n
 - \mathcal{D} : sous-ensemble de \mathbb{R}^n
 - $\mathcal{C}(\mathcal{D})$: sous-ensemble de \mathcal{C} défini par $\mathcal{C}(\mathcal{D}) = \{\varphi \in \mathcal{C} : \varphi(\theta) \in \mathcal{D}, \forall \theta \in [-h, 0]\}$
 - $|.|$: valeur absolue d'un nombre réel ou module d'un nombre complexe
 - $\|.\|$: une norme sur \mathbb{R}^n
 - $\|\cdot\|_{\mathcal{C}}$: norme sur \mathcal{C} définie par $\forall \varphi \in \mathcal{C} : \|\varphi\|_{\mathcal{C}} = \sup_{\theta \in [-h, 0]} \{\|\varphi(\theta)\|\}$
 - $\mathcal{L}_2([0, \infty[; \mathbb{R}^n)$: ensemble de fonctions de $[0, \infty[$ dans \mathbb{R}^n de carré de module sommable

- $t \in \mathbb{R}^+$: variable temporelle
- $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathcal{X}$: vecteur état instantanée
- $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ est la dérivée de la variable x par rapport au temps
- $x^{(i)}$: $i^{\text{ème}}$ dérivée de x par rapport au temps
- Vect $\{g_1, \dots, g_m\}$: ensemble désignant la distribution engendrée par les champs de vecteurs g_1, \dots, g_m
- Notations relatives aux vecteurs
 - x^T : transposé de x
 - $\|x\|$: norme euclidienne de x
- Notations relatives aux matrices
 - $[a_{ij}]$: matrice carrée dont le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne est a_{ij}
 - A^T : transposée de A
 - A^* : transposée conjuguée de A
 - $A < B$ (respect. $A > B$) : signifie que $A - B$ est une matrice définie négative (resp. définie positive).
 - $\|A\|$: norme euclidienne de la matrice A .
 - I_n : matrice identité de $\mathbb{R}^{n \times n}$

Introduction générale

La volonté de décrire le monde physique de plus en plus précisément conduit à des modèles de plus en plus complexes. Ainsi, le phénomène de retard est maintenant pris en compte dans de nombreux domaines tels que les sciences de l'ingénieur, les sciences de la vie ou l'économie. Or la commande de tels systèmes reste à l'heure actuelle un problème difficile car le retard peut occasionner des comportements tant complexes qu'inattendus : oscillations, dégradations des performances, mais aussi stabilisation d'orbites chaotiques [123].

Une des premières tentatives pour commander un système à retard (appelé aussi héréditaire) fut le fameux prédicteur de Smith [134]. Cette technique fréquentielle permet de rejeter le retard en dehors du dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée et permet de réaliser une synthèse de commande par des moyens classiques. Elle présente cependant plusieurs limites en terme de robustesse.

Dans les années qui suivirent, plusieurs méthodes furent proposées pour résoudre le problème de synthèse de lois de commande pour les systèmes à retards. Naturellement, les systèmes héritaires peuvent être vus comme des systèmes de dimension infinie, c'est-à-dire immersés dans des espaces fonctionnels [27, 32]. Cette description a conduit à de nombreuses contributions concernant les aspects structurels et la synthèse de lois de commandes (voir par exemple [92, 115, 143]). Par ailleurs, pour contourner certains problèmes inhérents à ce genre de modélisation (comme la reconstruction de la commande), d'autres mathématiciens et automaticiens [78, 86, 103, 128] ont modélisé les systèmes à retards sur des anneaux d'opérateurs. Cependant, ces techniques peuvent se révéler très limitées d'un point de vue pratique de part leur sensibilité importante vis-à-vis de la valeur du retard ou vis-à-vis d'incertitudes du modèle. Parallèlement, de nombreuses études concernant la stabilité et la stabilisation se sont développées, en utilisant des méthodes de type Lyapunov (voir [79, 109, 124]). Dans ce cas précis, comme pour les systèmes de dimension finie, la robustesse des systèmes en boucle fermée peut être évaluée (voir [2, 73, 82, 141] par exemple), mais bien souvent le conservatisme des lois de commande reste

encore important.

Bien sûr, la recherche sur les systèmes et les lois de commandes non linéaires s'est également étendue aux systèmes à retards. Parmi ces techniques de commande, la commande par structure variable initiée dans les années 50 par Anosov [34] et poursuivie par Utkin [142] montre une grande robustesse vis-à-vis d'une classe d'incertitudes sur le modèle et est d'une grande facilité de mise en œuvre. Il s'agit, par l'intermédiaire d'une commande discontinue, de contraindre le système à rejoindre et à rester au voisinage d'une surface de commutation. Le comportement du système en boucle fermée est alors complètement déterminé par le choix de la surface et reste insensible à une certaine classe de perturbations.

Dans le cadre de ce travail, nous nous sommes intéressés à la combinaison de la commande par modes glissants et des systèmes à retards.

Nous reviendrons de façon plus détaillée sur la littérature publiée sur ce thème lors du prochain chapitre. Mentionnons toutefois quelques problèmes ouverts : le choix des surfaces de commutation, la prise en compte des retards inconnus, ou variables dans le temps ; l'étude dans le cas de modèles non linéaires. Le mémoire s'intéresse à ces différents problèmes et est organisé de la manière suivante :

- Le premier chapitre nous permet de présenter brièvement les différents modèles pour la commande des systèmes à retards : approche algébrique, approche en dimension infinie, approche temporelle. Leurs avantages ainsi que leurs inconvénients y sont discutés. Enfin, nous présentons le formalisme des modes glissants appliqué aux systèmes héréditaires.
- Le second chapitre traite de la commande par modes glissants des systèmes linéaires à retards sur l'état. Deux types de surfaces sont proposés : l'un dépend des valeurs instantanées de l'état, tandis que le second dépend également des valeurs passées de l'état. Les équations décrivant les différentes surfaces sont alors résolues à l'aide d'algorithmes d'optimisation convexe. Ces techniques sont alors étendues dans le cas de systèmes à retard inconnu, variant dans le temps.
- Le troisième chapitre concerne l'extension de ces résultats à une classe de systèmes non linéaires à retards. Une fois le système mis sous une forme adéquate, nous réécrivons une partie du système comme une somme polytopic de modèles et sommes alors à même de déterminer systématiquement une surface de commutation et une commande par modes glissants. Enfin, ces résultats sont étendus dans un cadre plus général qui nous permet de choisir des surfaces plus complexes.
- Le quatrième et dernier chapitre porte sur le problème de la stabilisation par modes

glissants d'un système dont la commande est soumise à un retard pur pouvant varier dans le temps. Nous savons que, dans ce cas, la notion de surface de commutation ne peut plus s'appliquer. En effet, il se peut que l'attractivité de la surface ne soit plus assurée : nous nous attacherons alors à assurer que le système en boucle fermée converge vers un attracteur quantifiable centré sur la surface $s = 0$. Ces critères sont alors appliqués à la commande numérique par modes glissants, connue comme le problème du mode glissant "réel".

Chapitre I

La Commande des Systèmes Héréditaires par Modes Glissants

I.1 Introduction

Comme nous l'avons dit en introduction, ce mémoire concerne la commande par modes glissants des systèmes héréditaires. Ce premier chapitre s'articule autour de deux parties visant à situer nos travaux dans un cadre relativement général. La première partie s'intéresse à la modélisation de systèmes à retards en vue de la commande. Plusieurs approches dont nous explicitons les qualités et les limites sont présentées.

La deuxième partie expose plus particulièrement un type de commande, appelée commande par modes glissants. Nous effectuons un tour d'horizon des travaux concernant les commandes par modes glissants appliquées aux systèmes héréditaires, ainsi que des problèmes posés par cette double complexité : retards et discontinuité.

I.2 Modèles pour la commande des systèmes à retards

Le retard apparaît naturellement dans de nombreux modèles de processus physiques. La biologie [96], l'écologie [52], les sciences de l'ingénieur [79] ou les télécommunications [105] sont des domaines qui font intervenir des équations différentielles dont l'évolution dépend non seulement de leurs caractéristiques à l'instant t , mais aussi d'une partie de leur histoire. En outre, même si un processus à réguler ne contient pas de retard intrinsèque, bien souvent la boucle de commande, par l'intermédiaire des temps de calcul ou des temps de réaction des capteurs ou des actionneurs, introduit des retards (voir Figure I-1).

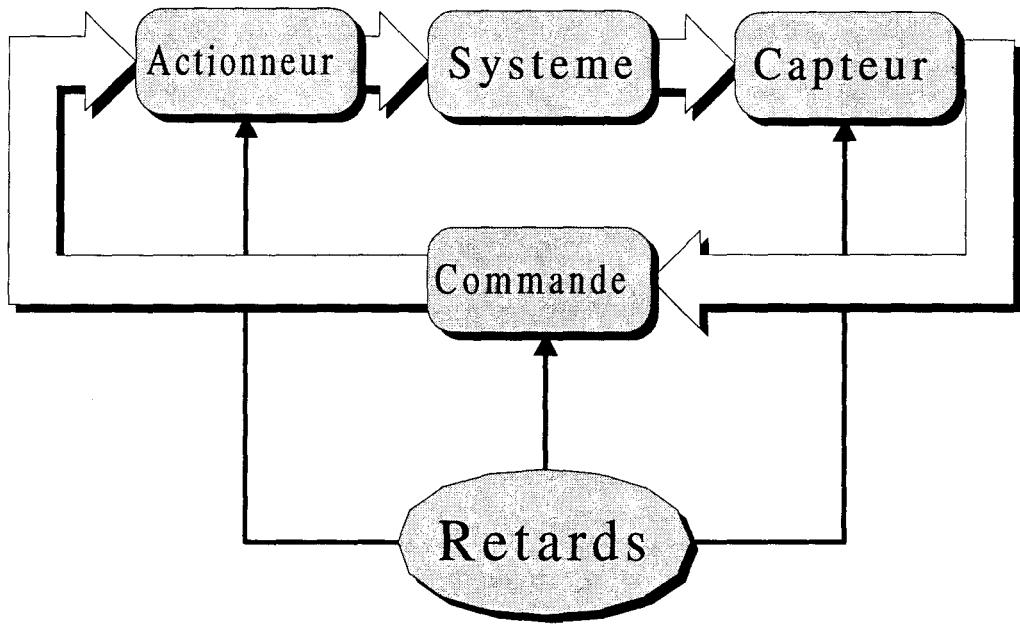


FIG. I-1: Illustration des retards possibles

Ils peuvent être alors la source d'une dépréciation générale des performances du système [113] et même conduire à l'instabilité [22].

Ainsi, l'expérience menée par [133] et décrite dans le livre [67] est caractéristique de la perte de performances pour un suivi de trajectoires. Un opérateur humain doit reproduire un motif donné (une étoile, et des mots) à l'aide de son stylo. Il ne voit pas directement sa main, mais un dispositif doté d'une caméra reliée à un écran de télévision lui permet de suivre sa trajectoire filmée. Grâce à un dispositif mécanique, un retard peut être appliqué entre l'enregistrement de la caméra et la reproduction du mouvement sur l'écran. Les résultats décrits par la Figure I-2 sont éloquents. La première colonne représente le dessin sans dispositif. La seconde colonne représente les résultats avec la télévision mais sans le retard. Enfin, la troisième série représente le dispositif décrit avec un retard de 0.5 seconde. Ce retard semble insurmontable pour le suivi de trajectoires...ce qui est inquiétant si l'on transpose cette situation à celle d'un pilote d'avion confronté à des instruments de vol fournissant des informations retardées !



FIG. I-2: Effet du retard sur un suivi de trajectoires

Toutefois, même si généralement ce n'est pas le cas, l'existence d'un retard peut être bénéfique en termes de performances [74] et être utile à la stabilisation [1].

Enfin, les systèmes à retards peuvent être une alternative intéressante pour la modélisation des systèmes complexes représentés par des équations différentielles partielles [79, 106].

Dans la partie qui suit, nous nous sommes attachés à présenter plusieurs modélisations des systèmes à retards, qui permettent de traiter divers problèmes de commandes (comme la stabilisation robuste, le rejet de perturbations, ou encore le découplage entrée-sortie).

La première partie concerne l'approche temporelle et surtout la notion de stabilisation, dont l'étude est effectuée grâce à la seconde méthode de Lyapunov [79]. En effet, de cette dernière découlent de très nombreuses commandes pour les systèmes à retards, et dont la robustesse est généralement évaluable.

La deuxième partie privilégie l'approche algébrique, c'est-à-dire la modélisation sur des anneaux [23, 103]. Elle permet d'appréhender, dans le cadre des systèmes linéaires à retards, un grand nombre de propriétés structurelles du système comme la commandabilité ou l'observabilité ainsi que certains problèmes de commande.

La troisième partie s'intéresse à la commande de placement de spectre fini qui est un champ d'étude particulièrement fécond pour les systèmes linéaires à retards. Seule la méthode proposée par Fiagbedzi et Pearson [41] est exposée, car celle-ci est à la base de nombreuses commandes

par modes glissants.

Enfin, nous finissons cette présentation par la modélisation des systèmes linéaires par l'approche en dimension infinie [8, 27].

I.2.1 Présentation du modèle

Les systèmes héréditaires sont des systèmes dynamiques régis par une équation différentielle portant sur des valeurs passées du temps. Elles sont aussi appelées équations différentielles à arguments différés. Si nous supposons que la dérivée peut être explicitée à chaque instant t , de tels systèmes sont régis par des équations différentielles de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), x_t, u_t), \\ x_{t_0}(\theta) = \varphi(\theta) \text{ pour } \theta \in [-\tau, 0], \\ u_{t_0}(\theta) = \xi(\theta) \text{ pour } \theta \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

où $\tau > 0$ et les fonctions x_t et u_t sont définies par la notation de Shimanov [130] :

$$x_t : \begin{cases} [-\tau, 0] \longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ \theta \longmapsto x_t(\theta) = x(t + \theta), \end{cases} \quad (\text{I.2})$$

$$u_t : \begin{cases} [-\tau, 0] \longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ \theta \longmapsto u_t(\theta) = x(t + \theta), \end{cases} \quad (\text{I.3})$$

x_t représente l'état du système à l'instant t et est une fonction de $[-\tau, 0]$ dans \mathbb{R}^n , $u(t)$ est la commande du système. Les conditions initiales à l'instant t_0 sont des fonctions de $[-\tau, 0]$ dans \mathbb{R}^n continues par morceaux.

Les systèmes héréditaires appartiennent donc à la classe des systèmes de dimension infinie.

Remarque I.1 *Nous n'avons pas fait mention des systèmes neutres, c'est-à-dire des systèmes dont l'évolution dépend non seulement des valeurs passées de x mais aussi d'une partie du passé de $\dot{x}(t)$. Pour plus de détails sur la nature de ces systèmes héréditaires, on se référera utilement à [81, 141].*

Remarque I.2 *Nous n'exposerons pas le problème de Cauchy associé à (I.1), initialement étudié par Myshkis [107]. Le lecteur se référera aux ouvrages généraux [7, 79] sur les conditions d'existence et d'unicité des solutions aux problèmes de Cauchy pour l'équation (I.1). Enfin, nous ne rappellerons pas les notions et les propriétés relatives à la notion de point d'équilibre, de stabilité asymptotique des systèmes à retards (voir [28, 79]). Les théorèmes de Lyapunov concernant les systèmes héréditaires sont par contre exposés dans l'annexe C.*

I.2.2 Approche temporelle

L'approche temporelle s'appuie sur la théorie de la stabilité formulée à l'aide des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii ou des fonctions de Lyapunov-Razumikhin (voir Annexe C). Deux cas sont considérés ici : le premier cas concerne le problème de la commande des systèmes linéaires à retard. Ensuite, dans le deuxième cas, nous décrivons les résultats connus pour la stabilisation pour les systèmes non linéaires à retards.

I.2.2.1 Cas d'un système linéaire

De nombreux résultats existent pour la stabilisation des systèmes linéaires à retards. Dans cette partie, nous n'entendons pas les présenter tous, mais plutôt donner une idée des principes généraux qui les sous-tendent. On en trouvera de nombreuses références dans [33, 109, 124]. C'est pourquoi, nous considérons le système linéaire à retards suivant, sans retard sur l'entrée, et avec un retard unique et constant sur l'état :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - \tau) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \\ x_{t_0}(\theta) = \varphi(\theta) \text{ pour } \theta \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (\text{I.4})$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^p$, $A, A_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times m}$, τ est un retard constant. $u(t)$ est la commande appliquée au système (I.4).

Une hypothèse assez intuitive consiste à supposer que le système (I.4) est commandable pour $\tau = 0$. Deux situations concernant la commandabilité du système sont alors possibles [109] :

- (A, B) est une paire de matrices commandable :

Ce premier cas mène à des critères de stabilisation indépendants de la taille du retard : nous cherchons une loi de commande qui stabilise le système quelle que soit la valeur du retard.

- $(A + A_d, B)$ est une paire de matrices commandable, sans que (A, B) ne le soit :

Les calculs aboutissent à des critères qui dépendent de la taille du retard. Le système (I.4) est stabilisé pour tout retard τ compris entre 0 et une borne maximale τ_{max} . Toute l'habileté réside alors dans la manière d'élaborer une loi de commande qui assurera la stabilité du système en boucle fermée pour la plus grande valeur τ_{max} possible.

Si l'on suppose que le retard est inconnu, les lois de commande sont choisies généralement de la forme :

$$u(t) = Kx(t). \quad (\text{I.5})$$

Le système (I.4) (I.5) en boucle fermée est alors régi par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + A_d x(t - \tau). \quad (\text{I.6})$$

Etant donnée une commande (I.5), le but est alors de construire une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii, ou une fonction de Lyapunov-Razumikhin candidate, qui nous assurera que le système (I.6) est asymptotiquement stable.

Choix d'une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii. Comme le système (I.4) est linéaire et par analogie aux conditions nécessaires et suffisantes de stabilité basées, pour le cas non retardé, sur des fonctions de Lyapunov quadratiques, il est naturel de choisir des fonctionnelles de la forme [83] :

$$\begin{aligned} V(x_t) &= x_t^T(0)Px_t(0) + x_t(0) \int_{-\tau}^0 Q(w)x_t(w)dw \\ &\quad + \int_{-\tau}^0 x_t(w)S(w)x_t(w)dw + \int_{-\tau}^0 \int_w^0 x_t(s)R(w, s)x_t(s)ds dw, \end{aligned} \quad (\text{I.7})$$

avec $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice définie positive, $P = P^T$, et Q, S, R des fonctions définies comme suit :

$$\begin{aligned} P &\in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad P = P^T, \\ Q &: [-\tau, 0] \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, \\ S &: [-\tau, 0] \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, \quad S = S^T, \\ R &: [-\tau, 0] \times [-\tau, 0] \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times n}. \end{aligned}$$

Cette fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii est très générale, mais elle reste inapplicable en pratique. Pour des raisons de calcul, les fonctions Q, S, R sont généralement supposées constantes ou constantes par morceaux [68].

Ce choix, relativement restrictif, permet alors de déterminer des critères de stabilisation, quelles que soient les conditions structurelles imposées par le système. Ces conditions s'expriment généralement en termes d'équations de Riccati (voir [80]) ou de LMI (inégalités matri-

cielles linéaires) (voir [82, 109]).

Choix d'une fonction de Lyapunov-Razumikhin. Le retard est ici une fonction du temps bornée, continue par morceaux. Le modèle (simple) que nous considérons est le système d'équations différentielles (I.4).

En ce qui concerne l'utilisation d'une fonction de Lyapunov-Razumikhin, la littérature est moins abondante, car le critère est souvent plus conservateur que celui élaboré par l'intermédiaire d'une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii. De plus, certaines hypothèses (voir équation C.3 en Annexe C) étant difficiles à vérifier, les auteurs sont amenés à choisir des fonctions quadratiques très simples du type

$$V(x) = x^T Px, \quad (\text{I.8})$$

où P est une matrice définie positive.

Suivant l'approche proposée par Razumikhin, supposons que l'inégalité

$$V(x(t + \theta)) < qV(x(t)), \quad (\text{I.9})$$

avec $q > 1$ est vérifiée pour tout $\theta \in [-\tau, 0]$.

Il vient donc :

$$x(t + \theta)^T Px(t + \theta) < qx^T(t)Px(t).$$

Cette dernière inégalité est à la base des calculs menant à des critères indépendants du retard, ou dépendants du retard [109].

I.2.2.2 Généralisations

Les deux approches temporelles basées sur le second théorème de Lyapunov combinées avec des méthodes d'optimisation convexe appelées inégalités linéaires matricielles (voir les ouvrages généraux [14, 35]) permettent d'établir des critères systématiques pour la construction d'une loi de commande. De nombreuses extensions ont été proposées.

- Dans le cas d'une commande élaborée grâce à une approche fonctionnelle, des retards variant dans le temps peuvent être pris en compte dans le modèle (I.4), si $\left| \frac{d\tau(t)}{dt} \right| \leq \beta < 1$

[111].

- Les deux méthodes sont généralisables aux cas de systèmes possédant plusieurs retards sur l'état (voir les critères de stabilité [80, 82]).
- Le problème de la commande robuste vis-à-vis d'incertitudes paramétriques sur le modèle peut être traitée d'une manière analogue, en considérant des systèmes comme (I.4) avec $A = A_0 + \Delta A$, et $A_d = A_{d_0} + \Delta A_d$.
- Le cas de la commande H_∞ , traité en fréquentiel [147], peut être étudié dans un cadre temporel. Une loi de commande est construite pour assurer la stabilité robuste avec un certain taux d'atténuation des perturbations exogènes [89, 108, 110].
- Des résultats similaires ont été établis pour des systèmes de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - \tau) + Bu(t) + B_d u(t - \rho), \\ x_{t_0}(\theta) = \varphi(\theta) \text{ pour } \theta \in [-\tau, 0], \\ u_{t_0} = \psi(\theta) \text{ pour } \theta \in [-\rho, 0]. \end{cases} \quad (\text{I.10})$$

Cependant, la finesse de ces critères suffisants est largement dépendante du choix des fonctionnelles ou des fonctions de Lyapunov. Même si de nombreux efforts ont été menés pour comprendre le degré de conservatisme introduit lors des calculs [70, 69, 149], ou sur la discréétisation des fonctionnelles de Lyapunov [68], les théorèmes rencontrés peuvent être conservateurs.

I.2.2.3 Cas des systèmes non linéaires

A l'instar de leurs homologues en dimension finie, les formes des fonctionnelles ou des fonctions de Lyapunov ne sont pas connues a priori pour les systèmes non linéaires à retards. Deux approches systématiques ont alors été proposées, mais conduisant cependant à des conditions seulement suffisantes. La première consiste en la construction de fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii vectorielles. La seconde cherche à transformer le système originel en une forme plus adaptée à la commande.

Les systèmes de comparaison Ces lois de commande s'appuient sur la construction de fonctions de Lyapunov vectorielles [28, 79]. On cherche, par l'intermédiaire de normes vectorielles à déterminer un système (appelé système de comparaison) plus simple à étudier. Ce principe permet de traiter les problèmes de stabilisation pour des systèmes non linéaires, non stationnaires et à retards variables [64, 66]. Ces approches ont été étendues pour traiter des problèmes de commande comme la stabilisation robuste, la commande sous contrainte (sur l'état et

sur la commande) [30, 65]. Toutefois, même si les critères obtenus en stabilité sont relativement efficaces [28], le problème de la synthèse en utilisant les normes vectorielles reste ardu.

La linéarisation entrée-sortie Considérons le système à retards commensurables, monoentrée et monosortie :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), x(t-l), \dots, x(t-kl)), +g(x(t), x(t-l), \dots, x(t-ml))u(t), \\ y(t) = h(x(t)), \\ x_{t_0}(\theta) = \varphi(\theta) \text{ pour } \theta \in [-kl, 0]. \end{cases} \quad (\text{I.11})$$

où l est un retard constant et supposé connu, $x \in \mathbb{R}^n$, m et k sont des nombres entiers positifs. f (resp. g) est une fonction de $(\mathbb{R}^n)^{k+1}$ dans \mathbb{R}^n (resp. de $(\mathbb{R}^n)^{l+1}$ dans \mathbb{R}^n) que nous supposons suffisamment dérivable par rapport à ses variables.

Récemment, le problème de la linéarisation entrée-sortie a été traité en introduisant une dérivée de Lie retardée [50, 112]. Elle permet dans le cadre temporel d'étendre aux systèmes à retards les travaux d'Isidori [72] sur les systèmes non linéaires de dimension finie. Le but est alors de trouver un changement de coordonnées $z(t) = \Phi(x_t)$ et une commande $u(t) = \alpha(x_t) + \beta(x_t)v(t)$, qui transforment le système (I.11) en un système de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = z_2(t), \\ \dot{z}_2(t) = z_3(t), \\ \vdots \\ \dot{z}_p(t) = v(t), \\ y(t) = z_1(t). \end{cases} \quad (\text{I.12})$$

Le système est ainsi linéarisé et “recalé temporellement”, et la loi de commande $v(t) = -\sum_{i=1}^p a_i x_i$, où les a_i sont les coefficients d'un polynôme de Hurwitz, stabilise le système (I.12). Toutefois, les conditions pour trouver un changement de coordonnées $\Phi(x_t)$ sont très difficiles à vérifier.

Pour finir cette partie, notons que récemment le concept de “Control Lyapunov function” a été introduit par Jankovic [77, 75, 76], généralisant ainsi les travaux d'Artstein et de Sontag [135] aux systèmes à retards.

I.2.3 Modélisation sur un anneau

L'approche fonctionnelle semble être une technique puissante pour résoudre les problèmes de commande des systèmes héréditaires grâce à la seconde méthode de Lyapunov. Toutefois, lorsque le système est linéaire et à retard constant, l'approche algébrique peut être une alternative intéressante. Les coefficients du système héréditaire n'évoluent plus sur un corps, mais sur un anneau polynomial en l'opérateur retard [26, 78]. Le modèle ainsi obtenu permet l'utilisation d'outils performants pour étudier les propriétés du système comme la commandabilité [3, 85, 104, 120], l'observabilité [86, 120, 122] et certains problèmes de commande [25].

Considérons le système linéaire à retards commensurables suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=0}^r A_i x(t - i\tau) + \sum_{i=0}^d B_i u(t - i\tau), \\ y(t) = \sum_{i=0}^l C_i x(t - i\tau), \\ x_{t_0}(\theta) = \varphi(\theta), \text{ pour } \theta \in [-r\tau, 0], \\ u_{t_0}(\theta) = \psi(\theta), \text{ pour } \theta \in [-d\tau, 0], \end{cases} \quad (\text{I.13})$$

avec $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i \in \{0, \dots, r\}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $i \in \{0, \dots, d\}$, $C_i \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $i \in \{0, \dots, l\}$. La condition initiale φ (resp. ψ) est une fonction continue par morceaux de $[-r\tau, 0]$ (resp. $[-d\tau, 0]$) dans \mathbb{R}^n (resp. \mathbb{R}^m).

Nous définissons l'opérateur retard comme :

$$\nabla \begin{cases} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ x(t) \longmapsto \nabla x(t) = x(t - \tau). \end{cases} \quad (\text{I.14})$$

La composée de l'opérateur ∇ par lui-même est notée $\nabla^i = \overbrace{\nabla \circ \nabla \dots \nabla}^{i \text{ fois}}$, tandis que son inverse, noté ∇^{-1} est défini par $\nabla^{-1}x(t) = x(t + \tau)$. Elle correspond à une prédiction parfaite sur l'état x , ce qui est en principe impossible.

Cet opérateur possède les propriétés de linéarité. L'ensemble des polynômes en ∇ à coefficients réels définit donc un anneau pour les opérations usuelles des polynômes.

Nous pouvons alors réécrire le système (I.13) en un système différentiel sur l'anneau $\mathbb{R}[\nabla]$:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\nabla)x(t) + B(\nabla)u(t), \\ y(t) = C(\nabla)x(t), \end{cases} \quad (\text{I.15})$$

où $x \in \mathbb{R}[\nabla]^n$, $u(t) \in \mathbb{R}[\nabla]^m$, $y \in \mathbb{R}[\nabla]^p$ et

$$\begin{aligned} A(\nabla) &= \sum_{i=0}^r \nabla^i A_i, \\ B(\nabla) &= \sum_{i=0}^d \nabla^i B_i, \\ C(\nabla) &= \sum_{i=0}^l \nabla^i C_i. \end{aligned}$$

Les matrices $A(\nabla)$, $B(\nabla)$, $C(\nabla)$ sont des matrices polynomiales à coefficients sur $\mathbb{R}[\nabla]$.

Lors de la synthèse de la loi de commande, une application inconsidérée de tels modèles peut conduire à des termes avancés (du type $u(t) = F(\nabla^{-1})x(t)$). De plus, cette représentation se limite aux retards ponctuels (non distribués). C'est pourquoi les concepts d'anneau de fractions rationnels réalisables [120, 121], puis d'anneaux de pseudo-polynômes en s et $e^{-\tau s}$, ont été introduits [15]. Ces nouvelles approches permettent alors de considérer de plus grandes classes de systèmes et de commandes.

Les principaux avantages d'une telle modélisation sont les suivants :

- la manipulation des modèles est relativement simple et peut faire appel à des logiciels de calcul formel sur des anneaux commutatifs ;
- des nombreux problèmes de commande ont été résolus comme :
 - le rejet de perturbations [24]
 - le découplage [128, 129]
 - la réalisation de précompensateur [121]
 - le placement de spectre fini [15, 16, 93].

Toutefois, ces méthodes supposent la connaissance parfaite du modèle. Il n'existe pas d'étude de la robustesse vis-à-vis des paramètres du système (I.15). De plus la construction des lois de commande nécessite de connaître la valeur du retard τ supposée constante. En pratique, ce retard peut varier dans le temps, et ne pas être connu avec exactitude. Enfin, la réalisation numérique des lois de commandes faisant intervenir des retards distribués peut poser quelques problèmes de stabilité [40, 101, 144].

Notons que le formalisme des anneaux pour les systèmes à retards a été étendu au cas des systèmes non linéaires à retards par [98]. Ces résultats sont à la base de la résolution de deux problèmes de commande : le rejet de perturbation [102] et la linéarisation entrée-sortie [99].

I.2.4 Le placement de spectre fini.

Lorsque nous voulons commander un système linéaire et imposer certaines spécifications, il est naturel d'essayer de placer ses pôles. Or, dans le cas des systèmes linéaires à retards, ceux-ci sont, en général, en nombre infini. La tâche devient beaucoup plus ardue...

Le prédicteur de Smith [134] a été la première solution pour contourner le problème. Un modèle est placé en parallèle du système à réguler. En utilisant une prédiction sur l'état estimé, cette technique parvient à factoriser le retard en dehors du dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée, c'est-à-dire de l'équation caractéristique. Le système en boucle fermée admet alors un nombre fini de pôles.

Cette idée est à la base de nombreuses méthodes appelées "commandes à placement de spectre fini" (en anglais "Finite Spectrum Assignment") dont le but est de réduire le spectre infini à un nombre fini de pôles [15, 97, 145, 146]. L'approche introduite par Pearson [41, 117], développée ci-après, résoud ce problème à l'aide d'une équation caractéristique matricielle transcendante.

Soit le système héréditaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + A_d x(t-\tau) + Bu(t) + B_d u(t-h), \\ x_0(\theta) = \varphi(\theta), \text{ pour } \theta \in [-\tau, 0], \\ u_0(\theta) = \psi(\theta), \text{ pour } \theta \in [-h, 0]. \end{cases} \quad (\text{I.16})$$

Nous supposons que :

A I.1 *Le système est spectralement commandable, c'est-à-dire que :*

$$\text{rang}(sI - A - A_d e^{-\tau s} \mid B + B_d e^{-hs}) = n, \forall s \in \mathbb{C}.$$

Cette hypothèse garantit que tous les pôles du système peuvent être placés.

A I.2 *Le retard est connu et constant.*

L'idée de base de cette méthode est de transformer (I.16) en une équation différentielle sans retard, grâce à la transformation linéaire de dimension infinie suivante :

$$z(t) = x(t) + \int_{t-h}^t e^{A_m(t-h-s)} B_d u(s) ds + \int_{t-\tau}^t e^{A_m(t-\tau-s)} A_d x(s) ds. \quad (\text{I.17})$$

Si nous dérivons par rapport au temps cette équation, il vient :

$$\dot{z}(t) = A_m z(t) + (e^{-A_m h} B_d + B) u(t) + (A + e^{-A_m \tau} A_d - A_m) x(t).$$

S'il existe une matrice A_m telle que

$$A + e^{-A_m \tau} A_d - A_m = 0, \quad (\text{I.18})$$

alors le système en la variable z est régi par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{z}(t) = A_m z(t) + (e^{-A_m h} B_d + B) u(t). \quad (\text{I.19})$$

Cette équation est une équation différentielle de dimension finie.

Nous rappelons ci-après les principaux théorèmes :

Théorème I.1 [41] *Soit l'équation (I.18), suivant certaines hypothèses, il est possible de calculer une matrice A_m qui possède le spectre instable du système (I.16).*

Théorème I.2 [41] *La commandabilité spectrale du système (I.16) implique la commandabilité du système (I.19).*

D'après ce dernier théorème, il est alors possible de calculer une loi de commande :

$$u(t) = -K z(t), \quad (\text{I.20})$$

qui stabilise le système réduit, c'est-à-dire de trouver K tel que $A_m - (e^{-A_m h} B_d + B)K$ soit une matrice de Hurwitz.

Théorème I.3 [41] *La loi de commande (I.20) stabilise le système linéaire à retard (I.16).*

Remarque I.3 *Lorsque le système n'admet pas de retard sur l'état, l'équation est très facile à résoudre car $A_m = A$. Nous obtenons alors une caractérisation simple pour le placement de pôles d'un système linéaire soumis à un retard pur en entrée. La variable $z(t)$ joue alors le rôle d'un prédicteur et vaut $x(t + h)$.*

Cette méthode permet de placer les pôles du système linéaire à retard et ainsi d'imposer la dynamique voulue au système en boucle fermée. Cette méthode est généralisable aux retards distribués sur l'état et sur la commande. Cependant, comme les commandes issues de la modélisation sur un anneau, cette méthode ne s'applique pas si le retard varie dans le temps. De plus,

l'équation matricielle (I.18) est une équation transcendante et est très difficile à résoudre dans le cas général. Bien souvent, nous sommes contraints à calculer numériquement la solution.

I.2.5 Les opérateurs en dimension infinie

Dans un souci de clarté, nous nous limiterons ici aux systèmes linéaires avec un seul retard sur l'état. Toutefois, la démarche est généralisable si les retards sont multiples et commensurables ou s'il existe des retards sur les entrées et les sorties (voir par exemple [8, 27, 31, 32]).

Soit un système à retard modélisé par l'équation différentielle (I.4). Considérons la variable

$$\bar{x}(t) = [x(t), x_t], \quad (\text{I.21})$$

où x_t représente l'état du système. \bar{x} appartient à l'espace de Hilbert : $\mathcal{M}_2 = \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}_2$.

Nous pouvons alors réécrire le système (I.4) à l'aide de la nouvelle variable \bar{x} de la manière suivante :

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}(t)}{dt} = \tilde{A}\bar{x}(t) + \tilde{B}u(t), \\ y(t) = \tilde{C}\bar{x}(t), \end{cases} \quad (\text{I.22})$$

où \tilde{A} , \tilde{B} , \tilde{C} sont des opérateurs de dimension infinie définis de la façon suivante :

– \tilde{A} est un opérateur linéaire, non borné, fermé, de domaine

$$D(\tilde{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} x(t) \\ x_t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2, f \text{ est abs.continue}, \frac{dx_t(\theta)}{d\theta} \in \mathcal{L}_2, \text{ et } x_t(0) = x(t) \right\}$$

dense dans \mathcal{M}_2 , défini par la relation suivante :

$$\begin{cases} \tilde{A} : \mathcal{M}_2 \longrightarrow \mathcal{M}_2, \\ \bar{x} \longmapsto \tilde{A}\bar{x}(t) = [Ax(t) + A_dx_t(-\tau), \frac{dx_t(\theta)}{d\theta}], \end{cases}$$

– \tilde{B} est un opérateur linéaire borné de \mathbb{R}^m dans \mathcal{M}_2 :

$$\begin{cases} \tilde{B} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathcal{M}_2, \\ u \longmapsto \tilde{B}u(t) = [Bu(t), 0]. \end{cases}$$

– \tilde{C} est un opérateur linéaire borné défini de \mathcal{M}_2 dans \mathbb{R}^p :

$$\begin{cases} \tilde{C} : \mathcal{M}_2 \longrightarrow \mathbb{R}^p, \\ \bar{x} \longmapsto \tilde{C}\bar{x}(t) = Cx(t). \end{cases}$$

Pour toute condition initiale $\bar{x}_0 \in \mathcal{M}_2$, ce modèle admet une solution unique, absolument continue dans \mathcal{M}_2 . De plus si nous prenons comme condition initiale $\bar{x}_0 = [x(0), \varphi]$, alors la solution du système (I.22) coïncide avec celle du système (I.4).

Cette représentation nous permet d'utiliser le formalisme des équations différentielles de dimension infinie pour déterminer la forme des solutions générales de (I.22).

Théorème I.4 *La solution unique est définie par :*

$$\bar{x}(t, \bar{x}_0, u) = S(t)\bar{x}_0 + \int_0^t S(t-w)\tilde{B}u(w)dw, \quad (\text{I.23})$$

où la famille $\{S(t), t \geq 0\}$ est un semi-groupe continu d'opérateurs engendré par \tilde{A} . Ce semi-groupe vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} S(0) &= I, \\ S(t+w) &= S(t)S(w), \quad \forall (t, s) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}, \\ \frac{dS(t)\bar{x}_0}{dt} &= \tilde{A}S(t)\bar{x}_0, \quad \forall \bar{x}_0 \in \mathcal{D}(\tilde{A}). \end{aligned}$$

Pour $t \geq 0$, l'application $S(t)$ est continue.

Nous avons considéré dans notre présentation un système avec un retard sur l'état. Cependant, cette modélisation en dimension infinie peut être utilisée pour représenter des retards distribués. Seule la forme des opérateurs \tilde{A} , \tilde{B} , \tilde{C} change. Ceci permet d'utiliser plusieurs travaux sur la commande développés dans le cadre de la théorie des semi-groupes : commande par modes glissants [114, 115], commande adaptative [92]... Cependant, ces techniques peuvent être assez lourdes à mettre en œuvre. Par ailleurs, lors de la synthèse d'une loi de commande en dimension infinie, il est impossible de distinguer a priori les retards ponctuels des retards distribués. Les lois de commande sont donc des opérateurs de l'espace \mathcal{M}_2 dans \mathbb{R}^m de la

forme :

$$u(t) = \int_{-\tau}^0 F(w)x(t+w)dw. \quad (\text{I.24})$$

Elles contiennent des retards distribués, ce qui peut poser des problèmes de réalisation pratique (problème de l'approximation numérique).

Dans cette première section, nous avons exposé plusieurs manières de modéliser des systèmes à retards. Ces modèles conduisent à des structures de commandes différentes qui ont chacune leurs inconvénients et leurs qualités.

Dans la seconde section, nous allons présenter une commande générale, appelée commande par modes glissants, et montrer comment celle-ci a été utilisée dans le cadre des systèmes à retards.

I.3 La commande par modes glissants des systèmes à retards

Le concept de structure variable est né dans les années 50-80 en URSS des travaux de Anosov [34], Emel'yanov [37], Utkin [142] sur les équations différentielles à second membre discontinu. Un système commandé par modes glissants est caractérisé par une commande discontinue qui oscille à très hautes fréquences entre deux structures de commande. Elle contraint les solutions du système à évoluer au voisinage d'une surface choisie au préalable. Cette surface est appelée surface de commutation ou de glissement car idéalement, lorsque la commande peut osciller à une fréquence infinie, les trajectoires du système sont astreintes à glisser sur la surface.

On montre que la dynamique du système (appelée aussi régime de glissement) est alors déterminée par le choix de la surface et est complètement insensible à une certaine classe d'incertitudes paramétriques et de perturbations exogènes.

La synthèse d'une commande par modes glissants s'effectue donc en deux étapes :

- Caractériser une surface qui tient compte des spécifications fixées (stabilité asymptotique, stabilité exponentielle, surface optimale vis-à-vis d'un critère).
- Déterminer une commande qui assure la convergence du système vers la surface en temps fini.

Nous ne nous étendrons pas sur la théorie et les techniques des commandes à structures variables, et nous enjoignons le lecteur intéressé par le formalisme des modes glissants à se reporter à l'annexe D pour de plus amples explications.

Cette partie a pour but d'esquisser un tour d'horizon des commandes à structure variable qui ont été développées dans le cadre des systèmes héréditaires. Même si les résultats ne sont pas nombreux, il nous est impossible de les présenter de manière détaillée. Nous les avons classés en deux grandes classes : les systèmes à retards sur l'entrée, et les systèmes à retards sur l'état. Avant de les présenter, quelques exemples permettront de mettre en relief certaines difficultés et les besoins liés aux systèmes à second membre discontinue en présence de retards.

I.3.1 Exemples introductifs

I.3.1.1 Un nombre infini de solutions périodiques

Soit un système dynamique commandé par modes glissants, représenté par l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t), \\ y(t) = x(t - 1), \\ u(t) = -\text{signe}(y(t)). \end{cases} \quad (\text{I.25})$$

$x(t) \in \mathbb{R}$, $u(t) \in \mathbb{R}$ est la commande, y représente la sortie du processus. Il existe un retard $\tau = 1$ au niveau de la mesure de l'état x .

Théorème I.5 [45, 46] Pour une classe bien choisie de conditions initiales, le système admet une solution périodique de période 4 (voir Figure I-3)

$$g_0(t) = g_0(t + 4k) = \begin{cases} t & \text{pour } -1 \leq t \leq 1, \\ 2 - t & \text{pour } 1 \leq t \leq 3, \end{cases} \quad (\text{I.26})$$

et admet aussi des solutions périodiques de période $\frac{4}{4n+1}$, pour tout n entier naturel :

$$g_n(t) = \frac{4}{4n+1} g_0((4n+1)t).$$

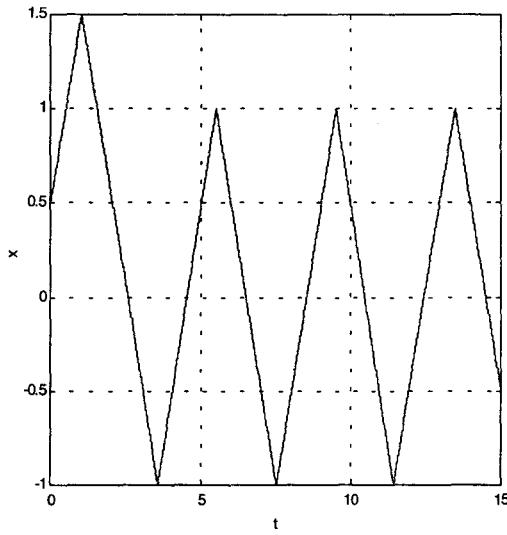


FIG. I-3: Solution périodique de période 4

Ce système dynamique, simple en apparence, présente donc une infinité (dénombrable) de solutions périodiques. De plus, il n'est pas si anodin d'un point de vue pratique. Effectivement, il est d'un grand intérêt pour la commande du ralenti des moteurs à combustion [13, 11, 21] : en effet, une voiture consomme 30% de son carburant à rouler au pas. Le but de la commande est de maintenir la vitesse constante et ceci malgré les variations de charges (l'allumage des phares, la mise en route de l'air conditionné par exemple), tout en minimisant la consommation d'essence. Lors de la modélisation du moteur, il apparaît que le capteur¹ de débit d'air sortant de la chambre de combustion est pratiquement binaire et est soumis à un retard variable. Nous pouvons donc modéliser son comportement par l'équation héréditaire suivante :

$$y(t) = \text{signe}(x(t - \tau)),$$

où x représente le débit d'air, y est la sortie du capteur et τ est le retard de mesure. La commande par retour de sortie sera alors de la forme $u(t) = Ky(t)$ et introduira naturellement des cycles limites [11, 46].

I.3.1.2 Identification

Un autre exemple intéressant d'un système bouclé sur un contrôleur discontinu de la forme : $u(t) = -msigne(x(t - h))$ est la création de cycles limites qui permettent l'identification en

¹appelé sonde lambda

ligne du système initial.

Effectivement, pour des systèmes simples représentés par une fonction de transfert de la forme² :

$$G(s) = \frac{e^{-\tau s}}{1 + ks},$$

l'amplitude ainsi que la période des oscillations induites par une commande discontinue sont connues et fonctions de k et τ . Provoquer des oscillations permet alors de déterminer graphiquement les paramètres du modèle. Cette méthode simple d'identification donne de bons résultats en pratique [139].

Sur ces exemples apparaît de manière évidente le problème fondamental de la convergence du système sur la surface choisie. Effectivement, si nous choisissons une commande classique discontinue, le système ne converge pas sur la surface mais dans un voisinage de celle-ci [29, 46]. C'est pourquoi, il nous a paru naturel de classer les diverses commandes discontinues en deux classes suivant le type de systèmes à commander, c'est-à-dire les systèmes avec un retard sur l'entrée ou les systèmes avec des retards sur l'état.

I.3.2 Cas de systèmes à retards purs

La technique principale mise en œuvre pour élaborer une commande à structure variable pour des systèmes à retard sur l'entrée est basée sur la technique du prédicteur [41]. Il transforme le modèle de dimension infinie en un modèle de dimension finie admettant les mêmes propriétés de stabilisation que le processus retardé. Le modèle ainsi créé permet de réaliser une commande discontinue qui sera par la suite implantée sur le processus retardé.

I.3.2.1 Description du système

Nous considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - \tau), \\ x(0) = x^0, \\ u_{t_0} = \zeta, \end{cases} \quad (I.27)$$

² De nombreux systèmes chimiques sont représentées par la mise en série d'un système du premier ordre et d'un retard pur.

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $\tau \in \mathbb{R}^+$ est un retard connu, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, ζ est une fonction continue par morceaux de $[-\tau, 0]$ dans \mathbb{R}^m .

I.3.2.2 La méthode du prédicteur [127]

Les hypothèses sur le système (I.27) sont les suivantes :

A I.3 *Nous supposons que le système (I.27) est spectralement commandable.*

Le prédicteur est choisi de la manière suivante :

$$z(t) = x(t) + \int_{-\tau}^0 e^{A(-w-\tau)} Bu(t+w) dw. \quad (\text{I.28})$$

Nous choisissons une variété qui dépend du prédicteur :

$$\sigma(x, u) = Sz = 0, \quad (\text{I.29})$$

où $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et est choisie de telle manière que la matrice (SB) soit régulière.

Remarque I.4 *La surface (I.29) est une surface fonctionnelle qui dépend des valeurs passées de $u(t)$.*

Choix du contrôle

Le nouvel état z vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\dot{z} = Az(t) + e^{-A\tau} Bu(t). \quad (\text{I.30})$$

Théorème I.6 *La commande discontinue :*

$$u(t) = -(SB)^{-1} SAz(t) - m(SB)^{-1} \frac{\sigma(x)}{\|\sigma(x)\|}, \quad (\text{I.31})$$

assure la convergence en temps fini du système (I.30) vers la variété (I.29).

Preuve. Soit la fonction suivante :

$$V = \frac{1}{2} \sigma^T \sigma.$$

La dérivée de V le long des trajectoires de (I.30)-(I.31) satisfait une inégalité du type $\dot{V} < m\sqrt{V}$.

La preuve de la convergence en temps fini de (I.30) (I.31) en découle aisément [143]. ■

Dynamique du système réduit

Proposition I.1 [142] *Comme la matrice B est de rang plein, il existe une transformation linéaire $w = Tz$ telle que $TB = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix}$ où B_2 est une matrice carrée régulière.*

Le système (I.30) est transformé par T en

$$\begin{cases} \dot{w}_1(t) = A_{11}w_1(t) + A_{12}w_2(t), \\ \dot{w}_2(t) = A_{21}w_1(t) + A_{22}w_2(t) + B_2u(t), \end{cases} \quad (\text{I.32})$$

où $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$, $w_1 \in \mathbb{R}^{n-m}$, $w_2 \in \mathbb{R}^m$ et :

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

Dans la nouvelle base, la variété σ s'écrit :

$$\sigma(w) = \tilde{S}w = 0,$$

où

$$\tilde{S} = ST^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{S}_1 & \tilde{S}_2 \end{bmatrix}.$$

Lemme I.1 [143] *Si (A, B) est une paire de matrices commandable, alors (A_{11}, A_{12}) est une paire de matrices commandable.*

Théorème I.7 [127] *En choisissant les composantes de \tilde{S} de la manière suivante :*

- \tilde{S}_2 est une matrice non singulière,
- $(A_{11} - A_{12}\tilde{S}_2^{-1}\tilde{S}_1)$ est une matrice de Hurwitz, la commande (I.31) assure la stabilité asymptotique du système (I.27).

Robustesse de la commande

Soit le système (I.27) soumis à une perturbation additive p :

$$\dot{z} = Az(t) + e^{-At}Bu(t) + p. \quad (\text{I.33})$$

Théorème I.8 [127] *Le système en régime glissant est robuste à une classe de perturbations*

additives p vérifiant

$$p \in \text{Im}(e^{-A\tau} B).$$

Le problème de l'implantation numérique de la commande

Pour réaliser pratiquement une telle commande, il est nécessaire de discréteriser l'intégrale c'est-à-dire le retard distribué $\int_{t-\tau}^t e^{A(t-\tau-w)} Bu(w)dw$. Or récemment, certains travaux [40, 101, 144] ont montré que le choix d'une méthode d'approximation, ainsi que la période d'échantillonnage choisie, pouvaient introduire des dynamiques instables.

Le problème de la robustesse

Pour calculer le prédicteur, il est nécessaire de connaître parfaitement la matrice A et le retard τ , ce qui n'est pas très réaliste. Ainsi, de faibles variations du retard peuvent mener à l'instabilité du processus commandé par un prédicteur.

I.3.3 Le problème du retard sur l'état

De prime abord, élaborer une commande discontinue pour des systèmes à retard en l'état apparaît moins compliqué, car la convergence en temps fini du système peut être assurée par une commande astucieusement choisie.

Trois grands types de commandes ont été proposés dans la littérature, le premier consiste à choisir un modèle de prédicteur basé sur une transformation linéaire de dimension infinie [41]. Le deuxième adapte le formalisme des modes glissants pour créer des surfaces linéaires $\sigma(x) = Sx = 0$. Le troisième prend explicitement en compte le caractère infini du système à retard et élabore des surfaces fonctionnelles tenant compte de la taille du retard.

I.3.3.1 La méthode du prédicteur [95]

Le fil conducteur de cette méthode de commande est identique à celui proposé au paragraphe précédent. Elle s'appuie sur la transformation linéaire de dimension infinie (I.17) présentée au paragraphe I.2.4. Une surface, incorporant cette équation considérée comme une prédition, est alors élaborée. Notons que l'implantation numérique de la loi de commande ne pose pas de problème. Effectivement, la commande $u(t)$ ne dépend que de l'état x_t et non plus de u_t . Toutefois, cette méthode reste difficile à mettre en œuvre en pratique, car il faut résoudre des équations transcendantes en termes de matrices. Par ailleurs, la connaissance complète du modèle est nécessaire.

Remarque I.5 Le cas général [150] d'une commande par modes glissants d'un système à retard sur l'état et sur l'entrée a été traité en utilisant le prédicteur défini par [41]. Il n'est pas présenté, mais il procède de la même méthodologie, et souffre des mêmes problèmes que les commandes citées à savoir le problème de robustesse de l'implantation numérique et le problème de la résolution de l'équation caractéristique matricielle.

I.3.3.2 Le cas d'une surface classique

Dans les paragraphes suivants, nous considérons le cas des systèmes à retard régis par l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_dx(t - \tau) + Bu(t) + f_1(x_t), \\ x_{t0}(\theta) = \varphi(\theta) \text{ pour } \theta \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (\text{I.34})$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$; A et $A_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ est une matrice constante, $u \in \mathbb{R}^m$ représente la commande, f_1 est un terme qui représente les non-linéarités négligées et les perturbations exogènes.

Les hypothèses sur le système (I.34) sont les suivantes :

A I.4 la paire (A, B) est commandable.

A I.5 La perturbation f_1 satisfait les conditions de recouvrement :

$$f_1(x_t) = Bf(x_t), \quad (\text{I.35})$$

et est bornée par

$$\|f\| < \Psi(x_t), \quad (\text{I.36})$$

où Ψ est une fonctionnelle connue.

A I.6 la matrice B est de rang plein.

Le problème essentiel d'une commande à structure variable est de caractériser la construction des variétés de discontinuité. Deux méthodes générales existent, qui ont donné lieu à des commandes discontinues. La première méthode consiste à transformer le système en une forme dite "régulière", et faisant apparaître deux sous-ensembles. l'un dépendant directement des

commandes, et l'autre autonome. La forme de la surface est obtenue directement de ce changement de coordonnées [20, 36].

La deuxième méthode caractérise la surface grâce à la forme des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii qui assurent la convergence asymptotique du système en boucle fermée (I.34) [17, 136].

1) Utilisation de la forme régulière En utilisant la proposition I.1, le système est mis sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{w}_1(t) = \sum_{i=1}^2 (A_{1i}w_i(t) + A_{d1i}w_i(t-\tau)), \\ \dot{w}_2(t) = \sum_{i=1}^2 (A_{2i}w_i(t) + A_{d2i}w_i(t-\tau)) + B_2u(t) + B_2f(x(t), t), \end{cases} \quad (\text{I.37})$$

où $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$, $w_1 \in \mathbb{R}^{n-m}$, $w_2 \in \mathbb{R}^m$ et

$$\begin{aligned} TAT^{-1} &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \\ TA_dT^{-1} &= \begin{pmatrix} A_{d11} & A_{d12} \\ A_{d21} & A_{d22} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La fonction de commutation est naturellement introduite de la manière suivante :

$$s(w) = w_2 + Kw_1, \quad K \in \mathbb{R}^{m \times n-m} \quad (\text{I.38})$$

Etude de l'attractivité de la surface

Théorème I.9 [20, 36] *La loi de commande :*

$$\begin{aligned} u(t) &= u_{eq} - mB_2^{-1}\text{sign}(s), \\ u_{eq} &= -B_2^{-1} \left(\sum_{i=1}^2 (A_{2i}w_i(t) + A_{d2i}w_i(t-\tau)) + K(A_{1i}w_i(t) + A_{d1i}w_i(t-\tau)) \right), \end{aligned}$$

où $m > \|B_2\| \Psi(x_t)$, rend la surface $s(w) = 0$ globalement attractive en temps fini.

Etude de la stabilité du système réduit

Une fois sur la surface, le système réduit est régi par l'équation suivante :

$$\dot{w}_1(t) = (A_{11} - A_{12}K)w_1(t) + (A_{d11} - A_{d12}K)w_1(t - \tau), \quad (\text{I.39})$$

dont il faut étudier la stabilité asymptotique.

Plusieurs méthodes, basées sur les mesures matricielles [36], sur les fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii [20], ont été étudiées pour caractériser la stabilité asymptotique du système (I.39).

2) La commande vectorielle unité [17, 136] Contrairement à la méthode précédente, cette technique n'est pas basée sur une décomposition du système. Le but de cette méthode est de rechercher une fonctionnelle de Lyapunov globale qui va assurer la stabilité du système (I.34) nominal (sans perturbation) commandé par un retour d'état $u(t) = Kx(t)$ fictif. Cette fonctionnelle, si elle existe, définira à son tour une surface de glissement.

Lemme I.2 *Comme la paire (A, B) est commandable, il existe un retour d'état fictif $u(t) = Kx(t)$, qui stabilise le système nominal de (I.34), c'est à dire de telle manière que le système*

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + A_dx(t - \tau),$$

soit asymptotiquement stable pour toute valeur du retard $\tau > 0$.

Dans ce cas, nous pouvons trouver une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii

$$V = x^T(t)Px(t) + \int_{t-\tau}^t x^T(w)Sx(w)dw,$$

P et $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ définies positives, telle que sa dérivée le long des trajectoires de (I.34) soit négative :

$$\dot{V} = V_1 < 0$$

La surface choisie est de la forme

$$s(x) = B^TPx = 0, \quad (\text{I.40})$$

Le système (I.34) se réécrit de la manière suivante :

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + A_d x(t - \tau) + B(u(t) - Kx(t)) + f(x_t),$$

Lemme I.3 [17]

$$u(t) = -\gamma \frac{s}{\|s\|},$$

où $\gamma > \|Kx(t)\| + \Psi(x_t)$ est une fonction de x_t , rend la surface localement attractive en temps fini.

Preuve. omise ■

Lemme I.4 En régime de glissement, le système (I.34) est asymptotiquement stable quel que soit le retard $\tau > 0$.

Preuve. Soit la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii définie ci-dessus. La dérivée de V le long des trajectoires nous donne :

$$\dot{V} = V_1 + 2x^T P B(u(t) - Kx(t) + f(x_t)).$$

Or, sur la surface, nous avons la propriété $B^T Px = 0$ ou $x^T PB = 0$. La dérivée de V est donc réduite à $\dot{V} = V_1$. En régime de glissement, le système (I.34) est donc asymptotiquement stable quel que soit le retard $\tau > 0$. ■

Conclusion

Ces méthodes qui sont des extensions de méthodes élaborées dans le cadre des systèmes de dimension finie, ne sont pas satisfaisantes d'un point de vue méthodologique. Effectivement, le système retardé est astreint à glisser sur une surface du type $s(x_t) = Cx(t) = Cx_t(0) = 0$ et ces surfaces ne dépendent donc pas de tout l'état x_t . Toutefois, leur avantage réside dans leur insensibilité vis-à-vis du paramètre retard (qui pourrait être inconnue).

I.3.3.3 Le retard est connu : choix d'une surface fonctionnelle.

Une solution a été proposée par [131] en construisant une surface fonction de x_t . Cette méthode générique a ouvert un vaste champ d'étude pour la stabilisation des systèmes linéaires à retards [2, 6, 131]. Nous présenterons dans ce paragraphe la structure générale de la loi de commande et la surface de discontinuité. Soit le système (I.34) dont nous supposons le retard connu et constant.

La fonction de commutation choisie est la suivante [131] :

$$s(t) = Cx(t) - \int_0^t CA_0x(w)dw - \int_0^t CA_1x(w - \tau)dw, \quad (\text{I.41})$$

où A_0 et A_1 sont définies par

$$\begin{cases} A_0 = A - BF_0, \\ A_1 = A_d - BF_1, \end{cases}$$

avec F_0 et $F_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}$

La commande discontinue est alors choisie de la forme [131] :

$$u(t) = u_{eq} - m(CB)^{-1} \frac{s}{\|s\|}, \quad (\text{I.42})$$

où u_{eq} est la commande équivalente

$$u_{eq} = -F_0x(t) - F_1x(t - \tau).$$

Théorème I.10 [131] *Sous les hypothèses AI.4-AI.6, la commande (I.42) avec*

$$m = \Psi(x_t) + \varepsilon, \varepsilon > 0,$$

assure un régime de glissement pour le système (I.34) en boucle fermée.

Preuve. La preuve découle de l'analyse de la dérivée de la fonction $V = \frac{1}{2}s^T s$ le long des trajectoires de (I.34) en boucle fermée. ■

Théorème I.11 [131] *Le système en régime de glissement est régi par l'équation suivante :*

$$\dot{x}(t) = (A - BF_0)x(t) + (A_d - BF_1)x(t - \tau). \quad (\text{I.43})$$

Preuve. La preuve utilise la définition de la commande équivalente et le fait que la perturbation appartient à l'espace engendré par B . ■

Il reste maintenant à assurer la convergence du système réduit. De nombreuses méthodes (méthodes de comparaison, méthodes des mesures de matrices [131], méthode basée sur une fonctionnelle de Lyapunov [2]) peuvent alors être mises en œuvre pour déterminer la stabilité

du système réduit et ainsi calculer les gains F_0 et F_1 de la surface.

En outre, la structure de la loi de commande a été affinée pour étudier le cas de perturbations évanescentes qui ne satisfont pas le principe de recouvrement [131] ou pour réduire le phénomène de réticence introduit par la fonction $\frac{s}{\|s\|}$ [6].

I.3.3.4 Conclusion et tableau récapitulatif

Il apparaît que la présence d'un retard en entrée induit de nombreux problèmes qui restent ouverts à l'heure actuelle. Les méthodes proposées, dans la littérature souffrent de nombreux problèmes quant au calcul des transformations et à l'implantation numérique de la commande.

Pour les systèmes linéaires à retard en l'état, trois grands types de structures de commandes ont été proposées dans la littérature : la première est une extension du principe du prédicteur, les deux suivantes élaborent des surfaces (de dimension finie ou infinie) et ont les caractéristiques communes suivantes :

- le retard est constant, connu ou inconnu.
- la stabilisation est indépendante du retard considéré.
- le système nominal est linéaire.

Le tableau suivant récapitule les différents champs d'application des commandes par modes glissants appliquées aux systèmes héréditaires.

TAB. I.1: Tableau récapitulatif

Système		retards sur l'entrée	retards sur l'état
linéaire	retard constant et connu	[18, 11, 91] [127, 150]	[2, 17, 20] [36, 84] [136, 116, 150]
	retard constant et inconnu	?	?
	retard variant	?	?
	non linéaire	?	?

I.3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté diverses approches de la commande des systèmes héréditaires : approches temporelles, modélisation sur des anneaux, modélisation sous forme d'équations abstraites. Leurs avantages et leurs limites ont été exposés. Dans un second temps, nous avons passé en revue les différentes commandes discontinues (peu nombreuses) employées pour stabiliser les systèmes à retards. Il apparaît que les modèles choisis sont tous linéaires, et

que la stabilisation est indépendante de la taille du retard, ce qui peut être assez conservateur. De plus, aucune commande ne permet de traiter le cas d'un retard inconnu et variant dans le temps.

Chapitre II

Commandes par modes glissants des systèmes linéaires retardés

Le premier chapitre nous a permis de montrer que la commande par modes glissants est une alternative intéressante pour la commande de systèmes incertains. Le but de ce deuxième chapitre est d'étendre l'approche par structures variables aux systèmes linéaires à retards incertains. Ce chapitre s'articule autour de trois axes. Le premier axe rappelle les résultats essentiels pour la mise sous la forme régulière d'un système linéaire à retards. Le second axe (qui regroupe les parties II.3, II.4, II.5) s'intéresse au développement de surfaces de glissement constantes pour plusieurs cas suivant que le retard est constant (de valeur connue ou inconnue), ou variant dans le temps. Dans un troisième temps (partie II.6), nous considérons que les retards sont constants et connus, afin de caractériser des surfaces fonctionnelles, c'est-à-dire des surfaces dépendant explicitement du retard. La partie II.7 est consacrée à l'étude d'exemples académiques qui permettent de montrer les différentes possibilités de ces commandes en comparaison avec d'autres approches rencontrées dans la littérature. Enfin, une dernière partie présente quelques extensions possibles de ces commandes pour d'autres systèmes : les systèmes à plusieurs retards sur l'état et les systèmes à retards distribués.

II.1 Formulation du problème et choix du modèle

Reprenons le système régi par l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - \tau) + Bu(t) + f_1(x_t), \\ x_{t0}(\theta) = \varphi(\theta) \text{ pour } \theta \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, A et $A_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ sont des matrices constantes ; $u \in \mathbb{R}^m$ représente le vecteur commande ; φ est la condition initiale supposée continue par morceaux sur $[-\tau, 0]$; f_1 est un terme qui représente les non-linéarités négligées et les perturbations exogènes.

Les hypothèses sur le système (II.1) sont les suivantes :

A II.1 *La paire de matrices $(A + A_d, B)$ est commandable.*

A II.2 *La perturbation f_1 satisfait les conditions de recouvrement*

$$f_1(x_t) = Bf(x_t),$$

et est bornée par

$$\|f\| < \xi(x_t),$$

où ξ est une fonctionnelle connue de l'état x_t .

A II.3 *rang(B) = $r \leq m (\leq n)$.*

Remarque II.1 *L'hypothèse AII.1 correspond au fait que tous les critères qui seront développés par la suite dans ce chapitre dépendront de la taille du retard. Ceci est un choix a priori visant à réduire le conservatisme des résultats.*

Remarque II.2 *La notion de commandabilité employée ici correspond à celle classique du système non retardé obtenu en posant $\tau = 0$.*

Afin de construire simplement une commande par modes glissants, nous transformons le système (II.1) en un système qui admet une forme régulière. La méthode est directement inspirée des transformations des systèmes linéaires non retardés en forme régulière (voir [94]).

II.2 La mise sous forme régulière.

La mise sous forme régulière s'effectue par l'intermédiaire des deux lemmes suivants. Par un changement de variables d'entrée adéquat, le premier lemme permet de se ramener au cas d'un système (II.1) avec une matrice B de rang plein et de ne considérer que ce cas par la suite. Le second lemme, quant à lui, présente le résultat principal.

II.2.1 Le cas général

Pour faciliter la lecture, cette partie reprend des résultats présentés au chapitre I.

Lemme II.1 [61, 94] *Si l'hypothèse AII.3 est vérifiée alors il existe de nouvelles entrées $\tilde{v} \in \mathbb{R}^m$ et une matrice non singulière $W \in \mathbb{R}^{m \times m}$ telles que $u = W\tilde{v}$ et*

$$BW = \begin{pmatrix} B' & 0 \\ N & 0 \end{pmatrix},$$

où $B' \in \mathbb{R}^{r \times r}$ est une matrice de rang plein, $N \in \mathbb{R}^{(n-r) \times r}$ et $\tilde{v} = (v_1, \dots, v_m)^T$.

Preuve. Nous décomposons B sous la forme de smith, c'est-à-dire il existe $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inversible et $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ telles que

$$PBQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Nous choisissons $W = Q$, et nous obtenons

$$BW = P^{-1} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

■

Lemme II.2 [94] *Si les hypothèses AII.2, AII.3 sont vérifiées, alors il existe une transformation non singulière $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ qui transforme le système (II.1) de la façon suivante, appelée forme régulière :*

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = \sum_{i=1}^2 (A_{1i}z_i(t) + A_{d1i}z_i(t-\tau)), \\ \dot{z}_2(t) = \sum_{i=1}^2 (A_{2i}z_i(t) + A_{d2i}z_i(t-\tau)) + B_2v(t) + B_2\tilde{f}, \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

avec $z = (z_1, z_2)^T = Tx(t)$, $z_1 \in \mathbb{R}^{(n-r)}$, $z_2 \in \mathbb{R}^r$, $v = (v_1, \dots, v_r)^T$, $B_2 \in \mathbb{R}^{r \times r}$ est une matrice inversible et \tilde{f} représente les perturbations dans la nouvelle base.

Puisque l'hypothèse AII.2 est vérifiée, $B_2 \tilde{f}$ est bornée par une fonction de z_t que nous noterons Ψ :

$$\|\tilde{f}\| < \Psi(z_t).$$

Preuve. Voir [94]. ■

Afin de déterminer la loi de commande par modes glissants, nous choisissons une variété S définie par :

$$s(z) = z_2 + Kz_1, \quad (\text{II.3})$$

où $K \in \mathbb{R}^{r \times (n-r)}$ représente le gain de glissement.

En introduisant la nouvelle variable $s(z)$, nous transformons le système (II.2) de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = (A_{11} - A_{12}K)z_1(t) + (A_{d11} - A_{d12}K)z_1(t-\tau) \\ \quad + A_{12}s(z) + A_{d12}s(z(t-\tau)), \\ \dot{s}(z(t)) = \Phi(t) + B_2v(t) + B_2\tilde{f}, \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

avec

$$\Phi(t) = (A_{21} + KA_{11})z_1(t) + (A_{22} + KA_{12})z_2(t) + (A_{d21} + KA_{d11})z_1(t-\tau) + (A_{d22} + KA_{d12})z_2(t-\tau).$$

Le système est mis sous forme régulière, c'est-à-dire un premier sous-système “autonome”, tandis que le second sous-système dépend directement des entrées.

II.2.2 Cas particulier : le rang de la matrice B est de rang plein

Nous supposons désormais que :

A II.4 $\text{rang}(B) = m$. La matrice B est de rang plein.

Lorsque la matrice B est de rang plein, nous pouvons directement transformer le système (II.1) en une forme analogue à (II.4). La forme obtenue nous sera très utile pour relaxer les critères obtenus en utilisant la forme (II.4) (voir la partie II.4).

La surface de glissement est choisie de la manière suivante :

$$s(x) = Sx = B^T X^{-1} x = 0, \quad (\text{II.5})$$

où $S \in \mathbb{R}^{(n-m) \times n}$ et $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice définie positive.

La mise sous forme régulière s'effectue par le changement de variable suivant :

$$z(t) = Mx(t), \quad \det M \neq 0, \quad (\text{II.6})$$

avec

$$M = \begin{bmatrix} \tilde{B}^T \\ S \end{bmatrix},$$

où \tilde{B} est un complément orthogonal de la matrice B .

Remarque II.3 M est une matrice régulière car $\begin{bmatrix} \tilde{B} & B \end{bmatrix}$ est de rang plein [14].

Nous obtenons alors le lemme suivant.

Lemme II.3 [19] Le système original (II.1) est équivalent à

$$\dot{z}(t) = \hat{A}z(t) + \hat{A}_d z(t - \tau) + \hat{B}(u(t) + f), \quad (\text{II.7})$$

où

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \begin{pmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{B}^T A X \tilde{B} (\tilde{B}^T X \tilde{B})^{-1} & \tilde{B}^T A B (S B)^{-1} \\ S A X \tilde{B} (\tilde{B}^T X \tilde{B})^{-1} & S A B (S B)^{-1} \end{pmatrix}, \\ \hat{A}_d &= \begin{pmatrix} \hat{A}_{d11} & \hat{A}_{d12} \\ \hat{A}_{d21} & \hat{A}_{d22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{B}^T A_d X \tilde{B} (\tilde{B}^T X \tilde{B})^{-1} & \tilde{B}^T A_d B (S B)^{-1} \\ S A_d X \tilde{B} (\tilde{B}^T X \tilde{B})^{-1} & S A_d B (S B)^{-1} \end{pmatrix}, \\ \hat{B} &= \begin{pmatrix} 0 \\ S B \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

avec $\hat{A}_{11}, \hat{A}_{d11} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$, $\hat{A}_{12}, \hat{A}_{d12} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times m}$, $\hat{A}_{21}, \hat{A}_{d21} \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$, $\hat{A}_{22}, \hat{A}_{d22} \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

De la même manière, le vecteur z est partitionné en $z = [z_1 \ z_2]^T$, où $z_1 \in \mathbb{R}^{n-m}$, $z_2 \in \mathbb{R}^m$.

II.2.3 La commandabilité du premier sous-système.

Comme nous l'avons vu au premier chapitre, la variable z_2 agit comme une nouvelle commande pour le premier sous-système en la variable z_1 . Elaborer une surface de glissement revient alors à déterminer une commande pour le premier sous-système avec comme nouvelle entrée z_2 . Il nous faut donc étudier si l'hypothèse de commandabilité AII.1 du système (II.1) est vérifiée pour le premier sous-système commandé par z_2 .

Lemme II.4 *Si la condition AII.1 est vérifiée alors la paire de matrices $(A_{11} + A_{d11}, A_{12} + A_{d12})$ est commandable.*

Preuve. Puisque B_2 est une matrice inversible, alors :

$$\begin{aligned} \text{rang} \left(\begin{bmatrix} sI - A - A_d, & B \end{bmatrix} \right) &= \text{rang} \left(\left[\begin{array}{cc|c} sI - A_{11} - A_{d11} & -A_{12} - A_{d12} & 0 \\ -A_{21} & sI - A_{22} & B_2 \end{array} \right] \right), \\ &= \text{rang} \left[\begin{bmatrix} sI - A_{11} - A_{d11}, & A_{12} + A_{d12} \end{bmatrix} \right] + r, \quad \forall s \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Ainsi, si nous supposons que

$$\text{rang} \left[\begin{bmatrix} sI - A - A_d, & B \end{bmatrix} \right] = n,$$

alors nous avons :

$$\text{rang} \left[\begin{bmatrix} sI - A_{11} - A_{d11}, & A_{12} + A_{d12} \end{bmatrix} \right] = n - r.$$

La preuve découle alors de l'application du critère de Hautus. ■

D'après le lemme (II.4), la paire de matrices $(A_{11} + A_{d11}, A_{12} + A_{d12})$ est commandable. Naturellement, nous pouvons alors dégager plusieurs possibilités pour la commandabilité du système réduit. On trouvera dans le tableau suivant les types de stabilisation possibles selon la nature de la commandabilité rencontrée.

TAB. II.1: Tableau des différentes commandabilités

sous-paire commandable	type de stabilisation
(A_{11}, A_{12})	indépendante du retard
$(A_{11} + A_{d11}, A_{12})$	dépendante du retard
$(A_{11}, A_{12} + A_{d12})$	dépendante du retard
$(A_{11} + A_{d11}, A_{12} + A_{d12})$	dépendante du retard

Le premier cas correspond à une stabilisation indépendante du retard et a été traité très largement [2, 17, 20, 36, 84, 116]. Nous n'y reviendrons pas. Les deux cas suivants sont intéressants car, de part la meilleure connaissance de la commandabilité du modèle, ils pourraient permettent de relaxer les conditions suffisantes obtenues à l'aide des fonctionnelles de Lyapunov. Il serait par ailleurs intéressant de développer des commandes spécifiques pour ce genre de modèle. Cependant, dans la suite de notre mémoire, nous ne considérerons que le cas le plus général, c'est-à-dire la commandabilité de la paire $(A_{11} + A_{d11}, A_{12} + A_{d12})$.

Concernant le problème de la stabilisation du système (II.7), le lemme II.4 s'adapte directement de la manière suivante :

Lemme II.5 *Si la condition AII.1 est vérifiée, alors il existe une matrice $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ définie positive et un réel positif τ_{\max} tels que le sous-système issu de (II.7)*

$$\dot{z}_1(t) = \hat{A}_{11}z_1(t) + \hat{A}_{d11}z_1(t - \tau),$$

est asymptotiquement stable pour $\tau \leq \tau_{\max}$.

Preuve. [19] La preuve découle de l'hypothèse de commandabilité AII.1 ■

Cette première partie nous a montré comment transformer le système original (II.1) en une forme régulière. Différents points concernant la commandabilité du premier sous-système y ont été discutés. Dans la suite du mémoire nous considérerons ainsi les systèmes linéaires mis sous la forme régulière, c'est-à-dire la forme (II.4) ou la forme (II.7).

II.3 Une première étude

Cette première partie part d'un principe très intuitif. Si un système héréditaire, pour un retard nul, est asymptotiquement stabilisable, alors ce système héréditaire le sera aussi pour un retard suffisamment petit. Mais encore faut-il quantifier le "suffisamment petit" ? D'après le lemme II.4, il existe une matrice $K \in \mathbb{R}^{r \times (n-r)}$ telle que, avec $z_2(t) = -Kz_1(t)$, le premier sous-système pour un retard nul soit asymptotiquement stable. Ce retour d'état se génère à partir d'une surface $s(z) = z_2 + Kz_1 = 0$. L'application des théorèmes généraux concernant la commande par modes glissants montre qu'il existe donc une commande $v(t) = -\lambda \text{signe}(s(z(t))), \lambda > 0$ qui stabilise le système (II.4) pour un retard nul. Nous montrerons que cette commande stabilise le système (II.4) pour des retards "suffisamment petits", ceci pouvant bien sûr être quantifiés.

Cette première partie s'articule de la manière suivante : dans un premier temps, nous présentons des résultats concernant la stabilité asymptotique d'un système linéaire à retards. Ces théorèmes servent de base à l'élaboration d'une commande par modes glissants qui stabilise le système (II.4) pour un retard inférieur à une borne spécifiée.

II.3.1 Stabilité asymptotique pour des retards suffisamment faibles.

Considérons le système autonome suivant :

$$\dot{z}(t) = Az(t) + A_dz(t - \tau), \quad (\text{II.8})$$

où $z(t) \in \mathbb{R}^n$; A et $A_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont des matrices constantes et $\tau \geq 0$ un retard constant.

Nous supposerons que le système :

$$\dot{z}(t) = Ez(t), \quad E = A + A_d, \quad (\text{II.9})$$

est asymptotiquement stable. Le but de ce paragraphe est de trouver une borne maximale $\tau_{\max} > 0$ du retard telle que le système (II.8) reste asymptotiquement stable pour tous les retards $\tau \in [0, \tau_{\max}]$.

Théorème II.1 [61]/[62] *Supposons que (II.9) est asymptotiquement stable, soit P la solution de l'équation de Lyapunov suivante :*

$$(A + A_d)^T P + P(A + A_d) = -Q, \quad (\text{II.10})$$

avec $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice définie positive et Q_1 sa racine carrée ($Q_1 Q_1^T = Q$).

Si l'opérateur

$$D(\varphi) = \varphi(0) + \int_{-\tau}^0 A_d \varphi(\theta) d\theta$$

est stable alors le système (II.8) est asymptotiquement stable pour $\tau \leq \tau_i$, $i = \{1, 4\}$ où

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \frac{1}{\|I + (A + A_d)^T P A_d A_d^T P (A + A_d)\|}, \quad P \text{ solution de (II.10) pour } Q = I_n, \\ \tau_2 &= \frac{1}{2\sqrt{\lambda_{\max}((A + A_d)^T P A_d A_d^T P (A + A_d))}}, \quad P \text{ solution de (II.10) pour } Q = I_n, \\ \tau_3 &= \frac{1}{2\sqrt{\lambda_{\max}(Q_1^{-T} (A + A_d)^T P^2 (A + A_d) Q_1^{-1})}}, \quad P \text{ solution de (II.10) pour } Q = A_d A_d^T \\ &\quad \text{et } A_d \text{ de rang plein,} \\ \tau_4 &= \frac{1}{2\sqrt{\lambda_{\max}(Q_1^{-T} A_d^T P^2 A_d Q_1^{-1})}}, \quad P \text{ solution de (II.10) pour } Q = E E^T,\end{aligned}$$

Preuve. Elle repose sur l'utilisation d'une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii dégénérée (voir [61, 62]) de la forme :

$$V = x^T P x + \int_{t-\tau}^t \int_s^t z^T(\theta) Q z(\theta) d\theta ds,$$

avec $x(t) = z(t) + \int_{t-\tau}^t A_d z(\theta) d\theta$. ■

II.3.2 Elaboration de la commande par modes glissants.

Nous considérons la surface (II.3) et nous choisissons un gain de glissement K qui stabilise le système réduit sans retard $\dot{z}_1(t) = (A_{11} + A_{d11} - (A_{12} + A_{d12})K)z_1(t)$. Ce gain existe car $(A + A_d, B)$ est une paire de matrices commandable. Ce gain peut être calculé à l'aide de diverses techniques comme le placement de pôles ou la commande optimale (voir [143]) et nous permet alors d'élaborer une commande par modes glissants comme suit :

Théorème II.2 *Si les hypothèses AII.1 et AII.2 sont vérifiées, alors la commande :*

$$v(t) = -B_2^{-1}(\Phi + g \text{sign}(s)), \quad (\text{II.11})$$

avec $g = g_1 + \|B_2\| \Psi$, $g_1 > 0$ rend la surface $s(z) = 0$ (Eq. (II.3)) attractive en temps fini. Le

système (II.4) (II.11) est alors asymptotiquement stable pour $\tau \leq \tau_{\max}$, où

$$\tau_{\max} = \max_{i \in \{1, \dots, 4\}} \tau_i.$$

Preuve. Considérons la fonction suivante :

$$V = \frac{s^T(z(t))s(z(t))}{2}.$$

La dérivation de $V(t)$ le long des trajectoires de (II.4) (II.11) nous donne :

$$\begin{aligned}\dot{V} &= s^T(z(t))(\Phi + B_2v + B_2\tilde{f}), \\ &\leq -g_1 \|s(z(t))\| \leq 0,\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité garantit la convergence du système (II.4) sur la surface $s(z) = 0$ en temps fini. Une fois sur la surface, le système est régi par

$$\dot{z}_1(t) = (A_{11} - A_{12}K)z_1(t) + (A_{d11} - A_{d12}K)z_1(t - \tau). \quad (\text{II.12})$$

D'après le théorème II.1, le système (II.12) est donc asymptotiquement stable pour $\tau \leq \tau_{\max}$.

■

Remarque II.4 (A propos de la convergence en temps fini) Reprenons le système dynamique suivant :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (\text{II.13})$$

où x , le vecteur état, appartient à $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, f et g sont des champs de vecteurs dépendant de x que nous considérons suffisamment différentiables, $u : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ est la commande du système. Il est bien connu que l'inégalité suivante :

$$s\dot{s} < -\eta |s|,$$

assure la convergence en temps fini d'un système sans retard sur la surface $s = 0$.

Effectivement, en intégrant cette inégalité, nous obtenons :

$$|s(t)| - |s(0)| < -\eta t.$$

Le temps t_s mis pour atteindre la surface est borné par :

$$t_s < \frac{|s(0)|}{\eta}.$$

Dans le cas des systèmes à retards, le problème de la convergence en temps fini s'explique de la manière suivante : appelons t_s le temps d'arrivée de la surface (II.3) pour le système (II.2) commandé par (II.11) alors, entre $[t_s, t_s + \tau]$, le système réduit est régi par :

$$\dot{z}_1(t) = (A_{11} - A_{12}K)z_1(t) + (A_{d11} - A_{d12}K)z_1(t - \tau) + A_{d12}s(z(t - \tau)). \quad (\text{II.14})$$

Le système (II.14) n'est donc pas à proprement parler en régime glissant. Par contre, pour $t > t_s + \tau$, $s(z(t - \tau))$ sera nul, et le système sera régi par l'équation différentielle (II.12). Le temps d'établissement du régime glissant est donc de $t_s + \tau$ ¹.

Le problème de l'approche précédente réside dans la difficulté de caractériser la surface $s(z) = z_2 + Kz_1(t) = 0$ qui assurera que le système (II.4) est asymptotiquement stable pour la plus grande borne τ_{\max} possible. En effet, choisir une surface $s(x) = 0$ a priori nous garantit la stabilité asymptotique du système réduit et donc du système en entier, mais il est très difficile de trouver la meilleure surface possible qui nous assurerait la stabilité asymptotique pour un grand retard τ . L'idée que nous allons développer dans les deux parties qui suivent est d'obtenir des critères permettant de choisir le gain K de la surface, tout en optimisant la borne du retard τ .

Plusieurs cas seront envisagés suivant que :

- le retard est constant et connu
- le retard est constant et à valeur inconnue
- le retard est variant dans le temps et à valeur inconnue

II.4 Caractérisation de la surface par optimisation convexe

II.4.1 Cas du retard constant et connu

Le théorème suivant permet de déterminer la surface en optimisant son choix par un critère convexe.

¹A l'instar de son homologue en dimension finie, les systèmes linéaires à retards ne peuvent pas s'échapper en temps fini. La démonstration s'effectue en appliquant la méthode pas-à-pas au système (II.2).

Théorème II.3 [60, 56] Considérons le système (II.4) avec τ constant, et soit $m = m_1 + \|B_2\| \Psi(z)$, $m_1 > 0$ et $X \in \mathbb{R}^{r \times r}$ une matrice stable. Si les conditions AII.1, AII.2, AII.3 sont vérifiées, alors la commande

$$v(t) = -B_2^{-1}(\Phi + m \frac{P_2 s(z)}{\|P_2 s(z)\|} - X s(z)), \quad (\text{II.15})$$

où $P_2 \in \mathbb{R}^{r \times r}$ est une matrice définie positive qui satisfait l'équation de Lyapunov suivante :

$$X^T P_2 + P_2 X = -I_{r \times r}, \quad (\text{II.16})$$

rend la surface $s(z) = 0$ (Eq. (II.3)) attractive et asymptotiquement stable en temps fini. Si l'opérateur

$$D(\varphi) = \varphi(0) + \int_{-\tau_{\max}}^0 (A_{d11} - A_{d11}K)\varphi(\theta)d\theta$$

est stable, alors le point d'équilibre $z_t = 0$ est alors asymptotiquement stable pour tout retard $\tau \in [0, \tau_{\max}]$, où τ_{\max} est le résultat de l'optimisation suivante :

$$\tau_{\max}^{-1} = \min_{S, W} \tau^{-1}, \quad (\text{II.17})$$

sous les contraintes

$$\begin{pmatrix} \Gamma & SA_{d11}^T & W^T A_{d12}^T & \Delta^T \\ A_{d11}S & -S & 0 & 0 \\ A_{d12}W & 0 & -S & 0 \\ \Delta & 0 & 0 & -\frac{S}{2} \end{pmatrix} < 0, \quad (\text{II.18})$$

avec

$$\Gamma = \tau^{-1} (S(A_{11} + A_{d11})^T - W^T(A_{12} + A_{d12})^T + (A_{11} + A_{d11})S - (A_{12} + A_{d12})W),$$

$$\Delta = (A_{11} + A_{d11})S - (A_{12} + A_{d12})W,$$

$S \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$ est une matrice définie positive et $W \in \mathbb{R}^{r \times (n-r)}$.

Le gain de glissement K est alors donné par $K = WS^{-1}$.

Remarque II.5 La matrice stable X permet de “choisir” les dynamiques de s lorsque le système est loin de la surface glissante $s(z) = 0$.

La preuve du théorème s’effectue en deux temps : premièrement, nous prouvons que le système converge en temps fini sur la surface $s(z) = 0$. Ensuite, nous étudions la stabilité asymptotique du système réduit.

II.4.1.1 Attractivité de la surface

Lemme II.6 Soit $m = m_1 + \|B_2\| \Psi$, $m_1 > 0$ et $X \in \mathbb{R}^{r \times r}$ une matrice définie positive, la commande (II.15) rend la surface $s(z) = 0$ attractive et asymptotiquement stable en temps fini.

Preuve. Choisissons la fonctionnelle suivante :

$$V = \frac{1}{2}s(z)^T P_2 s(z), \quad (\text{II.19})$$

où $P_2 \in \mathbb{R}^{r \times r}$ est une matrice définie positive qui satisfait l’équation de Lyapunov suivante :

$$X^T P_2 + P_2 X = -I_{r \times r}. \quad (\text{II.20})$$

La dérivée de (II.19) le long des solutions de (II.4)-(II.15) s’écrit :

$$\dot{V} = s(z)^T P_2 (\Phi + B_2 v(t) + B_2 f).$$

Si nous choisissons $v(t) = -B_2^{-1}(\Phi + m \frac{P_2 s(z)}{\|P_2 s(z)\|} - X s(z))$ avec $m = m_1 + \|B_2\| \Psi(z_t)$, alors nous obtenons l’inégalité suivante :

$$\dot{V} < -s(z)^T s(z) - 2m_1 \sqrt{\lambda_{\min}(P_2)} \sqrt{V} < -2m_1 \sqrt{\lambda_{\min}(P_2)} \sqrt{V}.$$

Ceci garantit la convergence du système (II.4) sur la surface $s(z) = 0$ en temps fini. ■

II.4.1.2 Stabilité asymptotique du système réduit

Sur la surface ($s(z) = \dot{s}(z) = 0$), le système réduit est régi par :

$$\dot{z}_1(t) = (A_{11} - A_{12}K)z_1(t) + (A_{d11} - A_{d12}K)z_1(t - \tau). \quad (\text{II.21})$$

Lemme II.7 *Le système (II.21) est asymptotiquement stable pour tout $\tau \in [0, \tau_{\max}]$, où τ_{\max} est la solution du problème d'optimisation (II.17) (II.18).*

Preuve. Pour prouver la stabilité du système réduit (II.21), choisissons la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii suivante :

$$\begin{aligned} V = & y^T P y + \int_{t-\tau}^t \int_s^t z_1^T(\theta) A_{d11}^T Q A_{d11} z_1(\theta) d\theta ds \\ & + \int_{t-\tau}^t \int_s^t z_1^T(\theta) K^T A_{d12}^T P R P A_{d12} K z_1(\theta) d\theta ds, \end{aligned}$$

et posons $E = A_{11} + A_{d11} - (A_{12} + A_{d12})K$, $y = z_1 + \int_{t-\tau}^t (A_{d11} - A_{d12}K)z_1(\theta) d\theta$, avec $P, Q, R \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$ des matrices définies positives.

Comme la fonctionnelle V appartient à la classe des fonctionnelles dégénérées, il nous faut assurer la stabilité de l'opérateur

$$D(\varphi) = \varphi(0) + \int_{-\tau_{\max}}^0 (A_{d11} - A_{d12}K)\varphi(\theta) d\theta.$$

La dérivée de cette fonctionnelle le long des solutions du système (II.21) s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{V} = & z_1^T(E^T P + PE + \tau A_{d11}^T Q A_{d11} + \tau K^T A_{d12}^T P R P A_{d12} K)z_1 \\ & + 2 \int_{t-\tau}^t z_1^T(t) E^T P (A_{d11} - A_{d12}K) z_1(\theta) d\theta - \int_{t-\tau}^t z_1^T(\theta) A_{d11}^T Q A_{d11} z_1(\theta) d\theta \\ & - \int_{t-\tau}^t z_1^T(\theta) K^T A_{d12}^T P R P A_{d12} K z_1(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Sachant que quels que soient u et v deux vecteurs de taille compatible et R une matrice définie positive, nous avons

$$2u^T v \leq u^T R u + v^T R^{-1} v,$$

nous utilisons alors les deux inégalités suivantes :

$$2 \int_{t-\tau}^t z_1^T(t) E^T P A_{d11} z_1(\theta) d\theta \leq \begin{pmatrix} \tau z^T(t) E^T P Q^{-1} P E z(t) \\ + \int_{t-\tau}^t z_1^T(\theta) A_{d11}^T Q A_{d11} z_1(\theta) d\theta \end{pmatrix},$$

$$-2 \int_{t-\tau}^t z_1^T(t) E^T P A_{d12} K z_1(\theta) d\theta \leq \begin{pmatrix} \tau z_1^T(t) E^T R^{-1} E z_1(t) \\ + \int_{t-\tau}^t z_1^T(\theta) K^T A_{d12}^T P R P A_{d12} K z_1(\theta) d\theta \end{pmatrix},$$

et nous obtenons finalement :

$$\dot{V} \leq z^T M z(t),$$

avec

$$M = \begin{pmatrix} E^T P + P E + \tau A_{d11}^T Q A_{d11} + \tau K^T A_{d12}^T P R P A_{d12} K \\ + \tau E^T P Q^{-1} P E + \tau E^T R^{-1} E \end{pmatrix}.$$

S'il existe un retard $\tau_{\max} > 0$ et $P, Q, R \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$ trois matrices définies positives telles que

$$M < 0, \quad (\text{II.22})$$

alors le système réduit est asymptotiquement stable pour tout retard $\tau \in [0, \tau_{\max}]$.

Toutefois, nous ne pouvons toujours pas déterminer le gain de la surface K qui assurera la plus grande borne possible du retard τ_{\max} . Si nous voulons optimiser le choix de K , en utilisant des techniques d'optimisation convexe, il nous faut transformer l'inégalité (II.22). En multipliant par $S = P^{-1}$ à droite et à gauche de l'inégalité (II.22), celle-ci est équivalente à :

$$S E^T + E S + \tau S A_{d11}^T Q A_{d11} S + \tau S K^T A_{d12}^T P R P A_{d12} K S + \tau S E^T P Q^{-1} P E S + \tau S E^T R^{-1} E S < 0. \quad (\text{II.23})$$

Si nous choisissons $Q = R^{-1} = P$ et notons $W = K S$, alors l'inégalité II.23 devient (avec Γ et Δ définies en (II.18)) :

$$(\Gamma + SA_{d11}^T PA_{d11} S + W^T A_{d12}^T P A_{d12} W + 2\Delta^T P \Delta) < 0$$

En utilisant le lemme de Schur, nous montrons que cette dernière inégalité est équivalente aux contraintes (II.18). ■

Remarque II.6 Pour τ fixé, le problème d'optimisation (II.17) (II.18) est convexe et peut donc être résolu efficacement par des algorithmes de programmation semi-définie [14, 35].

II.4.2 Le cas du retard à valeur inconnue et constant

Pour mettre en œuvre la commande précédente, il est nécessaire de connaître la valeur du retard. Le théorème suivant propose de modifier la loi de commande (II.15) pour s'affranchir de cette hypothèse qui peut être restrictive.

Nous supposons donc ici que le retard est mal identifié. Nous connaissons une borne inférieure $\tau_{\min} : \tau \geq \tau_{\min} \geq 0$.

Théorème II.4 [63] Considérons le système (II.4) avec un retard constant $\tau \geq \tau_{\min} \geq 0$. Soit m_1 un réel positif et $X \in \mathbb{R}^{r \times r}$ une matrice de Hurwitz, posons :

$$m = m_1 + \delta,$$

où

$$\delta = \sup_{\theta \in [-\tau_{\max}, -\tau_{\min}]} \left(\begin{array}{c} \|B_2\| \Psi_t(\theta) \\ + \|(A_{d21} + KA_{d11})z_1(t+\theta) + (A_{d22} + KA_{d12})z_2(t+\theta)\| \end{array} \right),$$

Alors la loi de commande

$$\begin{cases} v(t) = -B_2^{-1}((A_{21} + KA_{11})z_1(t) + (A_{22} + KA_{12})z_2(t)) \\ + m \frac{P_2 s(z)}{\|P_2 s(z)\|} - X s(z), \end{cases} \quad (\text{II.24})$$

rend la surface $s(z) = 0$ attractive et asymptotiquement stable en temps fini. Si l'opérateur

$$D(\varphi) = \varphi(0) + \int_{-\tau_{\max}}^0 (A_{d11} - A_{d12}K)\varphi(\theta)d\theta$$

est stable, le point d'équilibre $z_t = 0$ est alors asymptotiquement stable pour toute valeur du retard $\tau \in [\tau_{\min}, \tau_{\max}]$ où τ_{\max} est le résultat de l'optimisation (II.17) (II.18).

Preuve. Seule la preuve de la convergence en temps fini du système diffère de la preuve du théorème II.3. Effectivement, une fois sur la surface, le système est régi par l'équation différentielle (II.21), qui ne dépend plus de la commande.

Pour montrer la convergence du système (II.4)(II.24) sur la surface (II.3), choisissons la fonction (II.19). La dérivée de (II.19) le long des solutions de (II.4)(II.24) s'écrit de la manière suivante :

$$\dot{V} = s(z)^T P_2 (\Phi + B_2 v(t) + B_2 f).$$

D'une manière équivalente à la preuve du théorème II.3, nous obtenons une estimation de la borne supérieure de la dérivée de \dot{V} :

$$\begin{aligned} \dot{V} &< s(z)^T P_2 \left((A_{d21} + KA_{d11}) z_1(t - \tau) + (A_{d22} + KA_{d12}) z_2(t - \tau) + B_2 f - m \frac{P_2 s(z)}{\|P_2 s(z)\|} \right) \\ &\quad - s(z)^T s(z). \end{aligned}$$

En majorant les termes retardés par leur norme, nous avons :

$$\begin{aligned} \dot{V} &< -s(z)^T s(z) + \|P_2 s(z)\| (\|(A_{d21} + KA_{d11}) z_1(t - \tau) + (A_{d22} + KA_{d12}) z_2(t - \tau)\| + \|B_2\| \Psi_t) \\ &\quad - m \|P_2 s(z)\|. \end{aligned}$$

En majorant les termes retardés par δ , nous obtenons l'inégalité suivante :

$$\dot{V} < -s(z)^T s(z) - 2m_1 \sqrt{\lambda_{\min}(P_2)} \sqrt{V} < -2m_1 \sqrt{\lambda_{\min}(P_2)} \sqrt{V}.$$

Cette dernière inégalité garantit la convergence du système (II.4) sur la surface $s(z) = 0$ en temps fini. ■

Remarque II.7 *La stabilisation du système en régime glissant est assurée pour tous les retards $0 \leq \tau \leq \tau_{\max}$. Supposer que $\tau \geq \tau_{\min}$ permet de réduire la taille de δ et donc de diminuer l'amplitude de la loi de commande.*

II.5 Choix de la surface : approche par un complément orthogonal

Les résultats présentés dans la partie précédente concernaient la stabilisation robuste des systèmes linéaires héréditaires. Le choix de l'hypothèse AII.1 nous a permis d'établir des critères dépendants du retard, qui peuvent s'avérer moins restrictifs que ceux de la partie II.3. Cependant, ceux-ci peuvent donner des résultats assez conservateurs (voir les exemples de la partie II.7). C'est pourquoi nous essayerons dans la partie qui suit de réduire ce conservatisme en utilisant la notion de complément orthogonal. Celle-ci nous permettra en effet, de diminuer le nombre de variables mises en jeu lors du problème d'optimisation convexe, et ainsi d'améliorer la borne pour le retard.

II.5.1 Cas du retard connu et constant

Théorème II.5 [63]/[55] *Considérons le système (II.7) avec τ constant et connu. Soient $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice de Hurwitz et P la solution de l'équation de Lyapunov suivante :*

$$\Lambda^T P + P\Lambda = -I. \quad (\text{II.25})$$

On définit le gain $m = m_1 + \|SB\| \Psi(z_t)$ avec $m_1 \in \mathbb{R}^+$,

Si les conditions AII.1-AII.2-AII.4 sont vérifiées, alors la loi de commande :

$$u(t) = -(SB)^{-1} \left(SAx(t) + SA_d x(t-\tau) - \Lambda s + m \frac{Ps}{\|Ps\|} \right) \quad (\text{II.26})$$

rend la surface $s(x) = 0$ (Eq. (II.5)) attractive en temps fini. Si l'opérateur

$$D(\varphi) = \varphi(0) + \int_{-\tau_{\max}}^0 \hat{A}_{d11} \varphi(\theta) d\theta \quad (\text{II.27})$$

est stable, le point d'équilibre $x = 0$ est alors asymptotiquement stable pour toute valeur du retard $\tau \in [0, \tau_{\max}]$ où τ_{\max} est la solution du problème d'optimisation suivant :

$$\tau_{\max}^{-1} = \min(\tau^{-1}) \quad (\text{II.28})$$

sous les contraintes ($\sigma \in \mathbb{R}$) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{ccc} \tau^{-1} [X(A + A_d)^T + (A + A_d)X] & XA_d^T & X(A + A_d)^T \\ A_dX & -X & 0 \\ (A + A_d)X & 0 & -X \end{array} \right) \\ -\sigma \left(\begin{array}{ccc} BB^T & 0 & 0 \\ 0 & BB^T & 0 \\ 0 & 0 & BB^T \end{array} \right) < 0, \\ X > 0. \end{array} \right. \quad (\text{II.29})$$

Comme précédemment, la preuve est divisée en deux parties : l'attractivité de la surface, puis la stabilité du système en régime de glissement.

II.5.1.1 Attractivité de la surface

Lemme II.8 *Considérons le système (II.7), si les hypothèses AII.1-AII.2-AII.4 sont vérifiées alors la commande (II.26) rend la surface (II.5) asymptotiquement stable et globalement attractive en temps fini.*

Preuve. Cette preuve est omise, car elle est identique à celle du théorème II.3. ■

II.5.1.2 Stabilité du régime de glissement

Une fois en régime de glissement, les équations $s(x) = \dot{s}(x) = 0$ sont vérifiées et mènent à l'équation du système en régime de glissement :

$$\dot{z}_1(t) = \hat{A}_{11}z_1(t) + \hat{A}_{d11}z_1(t - \tau). \quad (\text{II.30})$$

Lemme II.9 *Si les hypothèses AII.1-AII.2-AII.4 sont vérifiées, le système réduit (II.30) est asymptotiquement stable pour toute valeur du retard $\tau \in [0, \tau_{\max}]$, où τ_{\max} est la solution du problème d'optimisation (II.28)-(II.29).*

Preuve. Nous considérons la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii suivante :

$$V(t) = y^T(t)Py(t) + \int_{t-\tau}^t \int_s^t z_1^T(w)\hat{A}_{d11}^T P Q^{-1} P \hat{A}_{d11} z_1(w) dw ds, \quad (\text{II.31})$$

où $y(t) = z_1(t) + \int_{t-\tau}^t \hat{A}_{d11}z_1(w) dw$ et $P, Q \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ sont deux matrices définies posi-

tives.

Comme la fonctionnelle V appartient à la classe des fonctionnelles dégénérées, il nous faut assurer la stabilité de l'opérateur

$$D(\varphi) = \varphi(0) + \int_{-\tau_{\max}}^0 \hat{A}_{d11} \varphi(\theta) d\theta.$$

La dérivée de y nous donne :

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= \tilde{B}^T(A + A_d)X\tilde{B}(\tilde{B}^TX\tilde{B})^{-1}z_1(t) \\ &= (\hat{A}_{d11} + \hat{A}_{11})z_1(t).\end{aligned}$$

Si nous notons $Z = \hat{A}_{d11} + \hat{A}_{11}$, alors la dérivée de V le long des trajectoires du système réduit (II.30) s'écrit :

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= z_1(t)(Z^T P + PZ + \tau \hat{A}_{d11}^T P Q^{-1} P \hat{A}_{d11})z_1(t) \\ &\quad + 2 \int_{t-\tau}^t z_1^T(w) \hat{A}_{d11}^T P Z z_1(t) dw \\ &\quad - \int_{t-\tau}^t z_1^T(w) \hat{A}_{d11}^T P Q^{-1} P \hat{A}_{d11} z_1(w) dw.\end{aligned}\tag{II.32}$$

En utilisant l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}2 \int_{t-\tau}^t z_1^T(w) \hat{A}_{d11}^T P Z z_1(t) dw &\leq \int_{t-\tau}^t z_1^T(w) \hat{A}_{d11}^T P Q^{-1} P \hat{A}_{d11} z_1(w) dw \\ &\quad + \tau z_1(t) Z^T Q Z z_1(t),\end{aligned}$$

nous obtenons une borne supérieure de \dot{V} :

$$\dot{V}(t) \leq z_1(t) M z_1(t),$$

où $M = Z^T P + PZ + \tau(\hat{A}_{d11}^T P Q^{-1} P \hat{A}_{d11} + Z^T Q Z)$.

Ainsi, s'il existe un nombre réel positif $\tau = \tau^*$ et trois matrices définies positives X, P, Q tels que $M < 0$, alors le système réduit est asymptotiquement stable pour toutes les valeurs de $\tau \in [0, \tau^*]$.

Toutefois, le choix des paramètres (P, Q, X) est très difficile à réaliser si nous voulons optimiser la borne supérieure τ^* . Dans la suite, nous proposons donc une forme plus particulière de la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii en choisissant $P = Q = (\tilde{B}^T X \tilde{B})^{-1}$.

Par ce biais, le problème de l'optimisation est transformé en un problème d'optimisation convexe plus facile à résoudre numériquement. En effet, en multipliant M à droite et à gauche par P^{-1} (définie positive), l'inégalité $M < 0$ est transformée de la manière suivante :

$$\begin{aligned} & \tau^{-1}(\tilde{B}^T X(A + A_d)^T \tilde{B} + \tilde{B}^T(A + A_d)X\tilde{B}) \\ & + \tilde{B}^T X(A + A_d)^T \tilde{B}(\tilde{B}^T X \tilde{B})^{-1}\tilde{B}^T(A + A_d)X\tilde{B} \\ & + \tilde{B}^T X A_d^T \tilde{B}(\tilde{B}^T X \tilde{B})^{-1}\tilde{B}^T A_d X \tilde{B} < 0. \end{aligned}$$

En utilisant le complément de Schur, cette dernière inégalité équivaut à :

$$L^T \begin{pmatrix} \tau^{-1}(H + H^T) & XA_d^T & H^T \\ A_d X & -X & 0 \\ H & 0 & -X \end{pmatrix} L < 0, \quad (\text{II.33})$$

avec $L = \begin{pmatrix} \tilde{B} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{B} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{B} \end{pmatrix}$ et $H = (A + A_d)X$,

qui est exactement (II.29). ■

II.5.2 Cas d'un retard constant à valeur inconnue

Comme dans la partie précédente, il nous est possible de considérer que le retard n'est pas connu. Par une approche identique au paragraphe II.4.2, nous obtenons le théorème suivant :

Théorème II.6 *Considérons le système (II.7) avec τ à valeur inconnue. Soit $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice de Hurwitz, et P la solution de l'équation de Lyapunov (II.25). Soit le gain suivant, avec $m_1 > 0$:*

$$m = m_1 + \sup_{\theta \in [-\tau_{\max}, -\tau_{\min}]} (\|SB\| \Psi(x_t(\theta)) + \|SA_d x_t(\theta)\|).$$

Si les conditions AII.1-AII.2-AII.4 sont vérifiées, si l'opérateur D défini par l'équation II.27 est

stable, alors la loi de commande

$$u(t) = -(SB)^{-1} \left(SAx(t) - \Lambda s + m \frac{Ps}{\|Ps\|} \right)$$

rend la surface (II.5) attractive en temps fini. Le point d'équilibre $x = 0$ de (II.7) est alors asymptotiquement stable pour toute valeur du retard $\tau \in [0, \tau_{\max}]$ où τ_{\max} est la solution du problème d'optimisation (II.29).

Preuve. La preuve est omise car elle est identique à la preuve du théorème II.4, page 62. ■

II.5.3 Cas du retard variable dans le temps

Dans les théorèmes que nous avons présentés dans les parties II.3, II.4, et dans la première section de la partie II.5, nous avons considéré que le retard était constant. Toutefois, en pratique, la valeur de celui-ci est souvent mal identifiée ou fonction de conditions variables dans le temps, $\tau = \tau(t)$. En général, seule une borne du retard est connue.

Dans le cas où le retard varie dans le temps, nous proposons une méthode adaptée des théorèmes précédents qui assure la convergence du système héréditaire sur la surface (II.5) et ainsi la convergence asymptotique du système en entier.

Nous considérons donc désormais que le retard est variable dans le temps avec une loi $\tau = \tau(t)$ mais reste uniformément borné. De plus, nous supposons que le retard est à valeur inconnue.

Théorème II.7 [57] *Considérons le système (II.7) avec τ variable dans le temps et uniformément borné. Soit Λ une matrice de Hurwitz, P la solution de l'équation de Lyapunov (II.25), et $m_1 > 0$. Si les conditions AII.1-AII.2-AII.4 sont vérifiées, alors avec la commande*

$$\begin{aligned} u(t) &= -(SB)^{-1} \left(SAx(t) - \Lambda s + m \frac{Ps}{\|Ps\|} \right), \\ m &= m_1 + \|SB\| \sup_{\theta \in [-\tau_{\max}, 0]} (\Psi(x_t(\theta))) \\ &\quad + \|SA_d\| \sup_{s \in [-\tau_{\max}, 0]} (\|x_t(\theta)\|), \end{aligned} \tag{II.34}$$

la surface s est globalement attractive en temps fini et la solution nulle du système (II.7) est asymptotiquement stable pour tout retard $\tau(t) \in [0, \tau_{\max}]$, où τ_{\max} est la solution du problème d'optimisation suivant :

$$\tau_{\max}^{-1} = \min(\tau^{-1}), \tag{II.35}$$

sous les contraintes :

$$\begin{pmatrix} \alpha X & AX \\ XA^T & X \end{pmatrix} - \gamma_1 \begin{pmatrix} BB^T & 0 \\ 0 & BB^T \end{pmatrix} > 0, \quad (\text{II.36})$$

$$\begin{pmatrix} \beta X & A_d X \\ XA_d^T & X \end{pmatrix} - \gamma_2 \begin{pmatrix} BB^T & 0 \\ 0 & BB^T \end{pmatrix} > 0, \quad (\text{II.37})$$

$$\begin{pmatrix} \tau^{-1}(H^T + H) + (\alpha + \beta)X & A_d X \\ XA_d^T & -\frac{1}{2}X \end{pmatrix} - \sigma \begin{pmatrix} BB^T & 0 \\ 0 & BB^T \end{pmatrix} < 0, \quad (\text{II.38})$$

$$X > 0, \quad (\text{II.39})$$

où $H = (A + A_d)X$, $\gamma_1, \gamma_2, \sigma \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$.

Remarque II.8 Pour $\alpha, \beta, \tau \in \mathbb{R}^+$ fixés, le problème d'optimisation est convexe. Pour affiner la borne τ_{\max} , nous pouvons utiliser un algorithme de relaxation sur les coefficients α, β .

Comme précédemment, la preuve peut être divisée en deux parties : l'étude de l'attractivité de la surface $s(x) = 0$ et l'analyse de la stabilité asymptotique du système réduit. Comme la preuve de l'attractivité de la surface est sensiblement identique à celle du paragraphe précédent, nous ne la répéterons pas. La preuve de la seconde partie s'effectue de la manière qui suit :

Preuve de la stabilité du système réduit. Une fois en régime glissant, les équations $s(x) = \dot{s}(x) = 0$ nous mènent à l'équation différentielle régissant le système réduit (II.30). En utilisant la formule de Leibnitz-Newton, nous avons :

$$z_1(t) = (\hat{A}_{11} + \hat{A}_{d11})z_1(t) - \int_{t-\tau}^t \hat{A}_{d11}\dot{z}_1(v)dv.$$

Le système en régime de glissement peut donc se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned}\dot{z}_1(t) &= (\hat{A}_{11} + \hat{A}_{d11})z_1(t) - \int_{t-\tau}^t \hat{A}_{d11}\hat{A}_{11}z_1(v)dv \\ &\quad - \int_{t-\tau}^t \hat{A}_{d11}\hat{A}_{d11}z_1(v-\tau)dv.\end{aligned}$$

Comme nous avons supposé que le retard est uniformément borné, nous choisissons la fonction de Lyapunov-Razumikhin suivante :

$$V(t) = z_1^T(t)Pz_1(t), \quad (\text{II.40})$$

où $P \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ est une matrice définie positive.

Suivant l'approche proposée par Razumikhin, supposons que l'inégalité suivante :

$$V(x(t+\theta)) < qV(x(t)), \quad (\text{II.41})$$

avec $q > 1$, est vérifiée pour tout $\theta \in [-\tau(t), 0]$.

La dérivée de V le long des trajectoires de (II.30) nous mène à :

$$\begin{aligned}\dot{V} &= z_1^T(t)(Z^T P + PZ)z_1(t) - 2 \int_{t-\tau}^t z_1^T(t)P\hat{A}_{d11}\hat{A}_{11}z_1(v)dv \\ &\quad - 2 \int_{t-\tau}^t z_1^T(t)P\hat{A}_{d11}^2z_1(v-\tau)dv,\end{aligned}$$

avec $Z = \hat{A}_{11} + \hat{A}_{d11}$.

Utilisant l'inégalité (II.41), nous obtenons une estimation de la borne supérieure de $\dot{V}(t)$:

$$\dot{V}(t) < z_1^T(t)Nz_1(t), \quad (\text{II.42})$$

où $N = Z^T P + PZ + \tau\alpha^{-1}P\hat{A}_{d11}\hat{A}_{11}S\hat{A}_{11}^T\hat{A}_{d11}^TP + q\tau(\alpha + \beta)P + \tau\beta^{-1}P\hat{A}_{d11}^2S\hat{A}_{d11}^{2T}P$.

Ainsi s'il existe τ^*, q tels que N soit une matrice définie négative, alors le système réduit est asymptotiquement stable. En multipliant à droite et à gauche par $S = (\tilde{B}^T X \tilde{B})$ et en fixant

$S = P^{-1}$, $N < 0$ devient :

$$SZ^T + ZS + \tau\alpha^{-1}\hat{A}_{d11}\hat{A}_{11}S\hat{A}_{11}^T\hat{A}_{d11}^T + q\tau(\alpha + \beta)S + \tau\beta^{-1}\hat{A}_{d11}^2S\hat{A}_{d11}^{2T} < 0. \quad (\text{II.43})$$

Maintenant, supposons que les inégalités (II.36) et (II.37) sont vérifiées. Elles peuvent être reformulées de la manière suivante :

$$\tilde{B}^TAX\tilde{B}(\tilde{B}^TX\tilde{B})^{-1}\tilde{B}^TXA^T\tilde{B} < \alpha(\tilde{B}^TX\tilde{B}),$$

et

$$\tilde{B}^TA_dX\tilde{B}(\tilde{B}^TX\tilde{B})^{-1}\tilde{B}^TXA_d^T\tilde{B} < \beta(\tilde{B}^TX\tilde{B}).$$

Ces deux dernières inégalités et l'inégalité (II.42) montrent que $N < 0$ implique l'inégalité suivante :

$$(\tilde{B}^TX(A + A_d)^T\tilde{B} + \tilde{B}^T(A + A_d)X\tilde{B}) + q\tau(\alpha + \beta)(\tilde{B}^TX\tilde{B}) \\ + \tau\tilde{B}^TA_dX\tilde{B}(\tilde{B}^TX\tilde{B})^{-1}\tilde{B}^TXA_d^T\tilde{B} + \tau\tilde{B}^TA_dX\tilde{B}(\tilde{B}^TX\tilde{B})^{-1}\tilde{B}^TXA_d^T\tilde{B} < 0,$$

qui est équivalente à :

$$\begin{pmatrix} \tau^{-1}(H^T + H) + q(\alpha + \beta)X & A_dX \\ XA_d^T & -\frac{1}{2}X \end{pmatrix} - \sigma \begin{pmatrix} BB^T & 0 \\ 0 & BB^T \end{pmatrix} < 0. \quad (\text{II.44})$$

Pour $q = 1$, cette inégalité est exactement la contrainte (II.38). Par continuité, si nous supposons qu'il existe des paramètres $X, \tau, \sigma, \alpha, \beta$ tels que (II.38) soit vérifiée, alors il existe $q_1 > 1$ tel que (II.44) le soit aussi. La preuve en découle. ■

Conclusion II.1 Dans les parties II.4, puis II.5, nous avons proposé des méthodes de construction de lois de commande discontinue pour des systèmes linéaires héréditaires. Les surfaces choisies sont de la forme $s(x_t) = Cx_t(0)$. Le gain de glissement C a été choisi dans le but d'optimiser les valeurs du retard maximal pour lesquelles le système est stabilisable par notre approche. Toutefois, les surfaces choisies ne dépendent que de l'état instantané et non pas de l'état complet x_t . Ce manque de généralité peut amener un certain degré de conservatisme. Par contre, il permet une implantation plus simple de la commande !

Dans la partie qui suit, nous développons des surfaces fonctionnelles, dépendant des valeurs passées de l'état et donc de la taille du retard.

II.6 Choix d'une surface fonctionnelle

La “surface” choisie dans cette section est la suivante :

$$\Omega(z_t) = z_2 + K_1 z_1 + K_2 z_1(t - \tau) = 0, \quad (\text{II.45})$$

où K_1 et $K_2 \in \mathbb{R}^{r \times (n-r)}$.

En introduisant cette nouvelle variable $\Omega(t) = \Omega(z_t)$, le système (II.2) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1(t) = \begin{pmatrix} (A_{11} - A_{12}K_1)z_1(t) + (A_{d11} - A_{d12}K_1 - A_{12}K_2)z_1(t - \tau) \\ -A_{d12}K_2z_1(t - 2\tau) + A_{12}\Omega(t) + A_{d12}\Omega(t - \tau) \end{pmatrix}, \\ \dot{\Omega}(t) = \xi + B_2v(t) + B_2f, \end{array} \right. \quad (\text{II.46})$$

avec

$$\begin{aligned} \xi &= (A_{21} + KA_1)z_1(t) + (A_{22} + KA_{12})z_2(t) + (A_{d21} + KA_{d11})z_1(t - \tau) \\ &\quad + (A_{d22} + KA_{d12})z_2(t - \tau) + K_2\dot{z}_1(t - \tau). \end{aligned}$$

Théorème II.8 [56]/[59] *Considérons le système (II.46) avec un retard τ connu et constant. Soit $m_1 > 0$ et $X \in \mathbb{R}^{r \times r}$ une matrice de Hurwitz, la commande :*

$$\begin{aligned} v(t) &= -B_2^{-1}(\xi + m \frac{P_2\Omega(t)}{\|P_2\Omega(t)\|} - Xs(z)), \\ m &= m_1 + \|B_2\|\Psi(z_t), \end{aligned} \quad (\text{II.47})$$

rend la surface $\Omega(z) = 0$ attractive en temps fini. Si l’opérateur

$$D(\varphi) = \varphi(0) + \int_{-\tau_{\max}}^0 (A_{d11} - A_{d12}K_1 - A_{12}K_2)\varphi(\theta)d\theta - \int_{-2\tau_{\max}}^0 (A_{d12}K_2)\varphi(\theta)d\theta$$

est stable, le point d’équilibre $z_t = 0$ est alors globalement asymptotiquement stable pour tout retard $\tau \in [0, \tau_{\max}]$ où τ_{\max} est donné par la résolution du problème d’optimisation suivant :

$$\tau_{\max}^{-1} = \min_{S, W_1, W_2, \gamma} \tau^{-1}, \quad (\text{II.48})$$

sous les contraintes

$$\left\{ \begin{pmatrix} \Gamma & \gamma\Delta^T & \gamma W_2^T A_{d12}^T & \Theta \\ \gamma\Delta & -\gamma S & 0 & 0 \\ \gamma A_{d12} W_2 & 0 & -\frac{\gamma}{2}S & 0 \\ \Theta^T & 0 & 0 & -\frac{\gamma S}{3} \end{pmatrix} < 0, \quad (II.49)$$

$$S > 0,$$

où $\Gamma = \tau^{-1}(\Theta + \Theta^T)$, $\Delta = A_{d11}S - A_{d12}W_1 - A_{12}W_2$, $\Theta = (A_{11} + A_{d11})S - (A_{12} + A_{d12})(W_1 + W_2)$.

Les gains K_1 et K_2 définissant les surfaces de glissement sont alors calculés de la manière suivante :

$$K_1 = W_1 S^{-1}, \quad K_2 = W_2 S^{-1}.$$

La preuve s'effectue en deux temps : premièrement, nous prouvons que le système converge en temps fini sur la surface $\Omega(z_t) = 0$. Ensuite, nous étudierons la stabilité asymptotique du système réduit.

II.6.0.1 Attractivité de la surface

Lemme II.10 Soit $m_1 > 0$ et $X \in \mathbb{R}^{r \times r}$ une matrice stable. Alors, la commande (II.47) rend la surface attractive en temps fini pour le système (II.46).

Preuve. Choisissons la fonctionnelle suivante :

$$V(z_t) = \Omega(z_t)^T P_2 \Omega(z_t) \quad (II.50)$$

où $P_2 \in \mathbb{R}^{r \times r}$ est une matrice définie positive qui satisfait l'équation de Lyapunov (II.20). La dérivée de V le long des solutions de (II.46) (II.47) s'écrit de la manière suivante :

$$\dot{V} = 2\Omega(z_t)^T P_2 (\xi + B_2 v(t) + B_2 f)$$

Si nous choisissons $v(t) = -B_2^{-1}(\xi + m \frac{P_2 \Omega(z_t)}{\|P_2 \Omega(z_t)\|} - X \Omega(z_t))$ avec $m = m_1 + \|B_2\| \Psi$, alors nous obtenons l'inégalité suivante :

$$\dot{V} < -\Omega(z_t)^T \Omega(z_t) - 2m_1 \sqrt{\lambda_{min}(P_2)} \sqrt{V} < -2m_1 \sqrt{\lambda_{min}(P_2)} \sqrt{V}.$$

Cette dernière inégalité garantit la convergence du système (II.46) (II.26) sur la surface $\Omega(z) = 0$ en temps fini. ■

II.6.0.2 Stabilité asymptotique du système réduit

Sur la surface $\Omega(z_t) = 0$, le système (II.46)-(II.47) est régi par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{z}_1(t) = (A_{11} - A_{12}K_1)z_1(t) + (A_{d11} - A_{d12}K_1 - A_{12}K_2)z_1(t - \tau) - A_{d12}K_2z_1(t - 2\tau). \quad (\text{II.51})$$

Lemme II.11 *Le système réduit (II.51) est globalement asymptotiquement stable pour tout retard $\tau \in [0, \tau_{max}]$ où τ_{max} est donné par la résolution du problème d'optimisation (II.48) (II.49).*

Preuve. Introduisons la variable intermédiaire suivante :

$$y(t) = z_1(t) + E_d \int_{t-\tau}^t z_1(s)ds + E_p \int_{t-2\tau}^t z_1(s)ds$$

où $E_d = A_{d11} - A_{d12}K_1 - A_{12}K_2$ et $E_p = -A_{d12}K_2$.

Nous avons alors :

$$\dot{y}(t) = (A_{11} + A_{d11} - (A_{12} + A_{d12})(K_1 + K_2))z_1(t) = Ez_1(t) \quad (\text{II.52})$$

Pour montrer la stabilité asymptotique du système réduit, nous choisissons la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii suivante :

$$V = y^T Py + \gamma \int_{t-h}^t \int_v^t z_1(s)^T E_d^T P R_1 P E_d z_1(s) ds dv \\ + \gamma \int_{t-2h}^t \int_v^t z_1(s)^T E_p^T P R_2 P E_p z_1(s) ds dv, \quad (\text{II.53})$$

où γ est un réel positif et $P, R_1, R_2 \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$ sont des matrices définies positives.

Comme la fonctionnelle V appartient à la classe des fonctionnelles dégénérées, il nous faut assurer la stabilité de l'opérateur

$$D(\varphi) = \varphi(0) + \int_{-\tau_{max}}^0 (A_{d11} - A_{d12}K_1 - A_{12}K_2)\varphi(\theta)d\theta - \int_{-2\tau_{max}}^0 (A_{d12}K_2)\varphi(\theta)d\theta.$$

La dérivée de (II.53) le long des trajectoires des solutions (II.51) nous donne :

$$\begin{aligned}\dot{V} = & z_1(t)(E^T P + PE + \tau PR_1 PE_d + 2\tau\gamma E_p^T PR_2 PE_p)z_1(t) \\ & + 2 \int_{t-\tau}^t z_1(s)^T E_d^T PE z_1(s) + 2 \int_{t-2\tau}^t z_1(s)^T E_p^T PE z_1(s) \\ & - \gamma \int_{t-\tau}^t z_1(s)^T E_d^T PR_1 PE_d z_1(s) - \gamma \int_{t-2\tau}^t z_1(s)^T E_p^T PR_2 PE_p z_1(s).\end{aligned}$$

Nous utilisons les deux inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}2 \int_{t-\tau}^t z_1(s)^T E_d^T PE z_1(s) &< \gamma \int_{t-h}^t z_1(s)^T E_d^T PR_1 PE_d z_1(s) + \tau\gamma^{-1} z_1(t)^T E^T R_1^{-1} E z_1(t), \\ 2 \int_{t-2\tau}^t z_1(s)^T E_p^T PE z_1(s) &< \gamma \int_{t-2h}^t z_1(s)^T E_p^T PR_2 PE_p z_1(s) + 2\tau\gamma^{-1} z_1(t)^T E^T R_2^{-1} E z_1(t),\end{aligned}$$

Finalement, nous obtenons l'inégalité suivante :

$$\dot{V} < z_1(t) \begin{pmatrix} E^T P + PE + \tau\gamma E_d^T PR_1 PE_d + 2\tau\gamma E_p^T PR_2 PE_p \\ + \tau\gamma^{-1} E^T R_1^{-1} E + 2h\gamma^{-1} E^T R_2^{-1} E \end{pmatrix} z_1(t).$$

S'il existe γ, τ_{max} deux réels positifs, $P, R_1, R_2 \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$ trois matrices définies positives, K_1 et $K_2 \in \mathbb{R}^{r \times (n-r)}$ tels que

$$X = \begin{pmatrix} E^T P + PE + \tau\gamma E_d^T PR_1 PE_d + 2\tau\gamma E_p^T PR_2 PE_p \\ + \tau\gamma^{-1} E^T R_1^{-1} E + 2h\gamma^{-1} E^T R_2^{-1} E \end{pmatrix} < 0, \quad (\text{II.54})$$

alors le système réduit (II.51) est asymptotiquement stable pour tout retard $\tau \leq \tau_{max}$.

Toutefois, nous ne pouvons pas déterminer les différents gains de la surface qui assureront la plus grande borne du retard. Si nous voulons optimiser le choix de K_1 et K_2 en utilisant des techniques d'optimisation convexe, il nous faut transformer légèrement l'inégalité (II.54). En multipliant par $S = P^{-1}$ à droite et à gauche de l'inégalité (II.54), celle-ci est équivalente à :

$$\Gamma + \gamma \Delta^T P \Delta + 2\gamma W_2^T A_{d12}^T P A_{d12} W_2 + 3\gamma^{-1} \Theta^T P \Theta < 0.$$

En utilisant le lemme de Schur, cette dernière inégalité est équivalente aux contraintes (II.49).

■

Remarque II.9 Pour γ, τ fixés, le problème d'optimisation (II.48)-(II.49) est convexe et peut être résolu efficacement par des algorithmes de programmation semi-définie.

Remarque II.10 Dans de nombreux théorèmes que nous avons présentés, il nous est nécessaire d'assurer la stabilité d'un opérateur de la forme :

$$D(\varphi) = \varphi(0) + \int_{-\tau_{\max}}^0 D\varphi(\theta)d\theta. \quad (\text{II.55})$$

Nous rappelons ici une condition suffisante pour la stabilité de (II.55).

Si

$$\tau_{\max}\rho(D) < 1,$$

alors l'opérateur (II.55) est stable.

II.7 Exemples et comparaisons

Dans cette section, nous présentons des applications numériques des différents théorèmes des parties II.3, II.4, II.5.

Exemple II.1 Considérons le système (II.1) de retard constant avec

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1.75 & 0.25 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -0.1 & -0.25 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{II.56})$$

Comme la paire de matrices (A, B) n'est pas commandable, le système ne peut être stabilisé indépendamment du retard. En appliquant les théorèmes précédents, nous trouvons les résultats de la Table II.2.

TAB. II.2: Tableau récapitulatif des différents résultats pour l'exemple (II.56)

	retard maximal calculé	paramètres
théorème II.5	1.65	$s(x) = 4.46 \cdot 10^{-4}x_1(t) + 1.392 \cdot 10^{-4}x_2(t)$
théorème II.3	1.65	$s(z) = z_2(t) + 0.722z_1(t)$
théorème II.8	1.79	$\Omega(z_t) = z_2(t) + 1.016z_1(t) - 0.180z_1(t - \tau)$
Ivanescu et al.	1.46	
Fu et al.	0.984	
Li and De Souza	0.51	

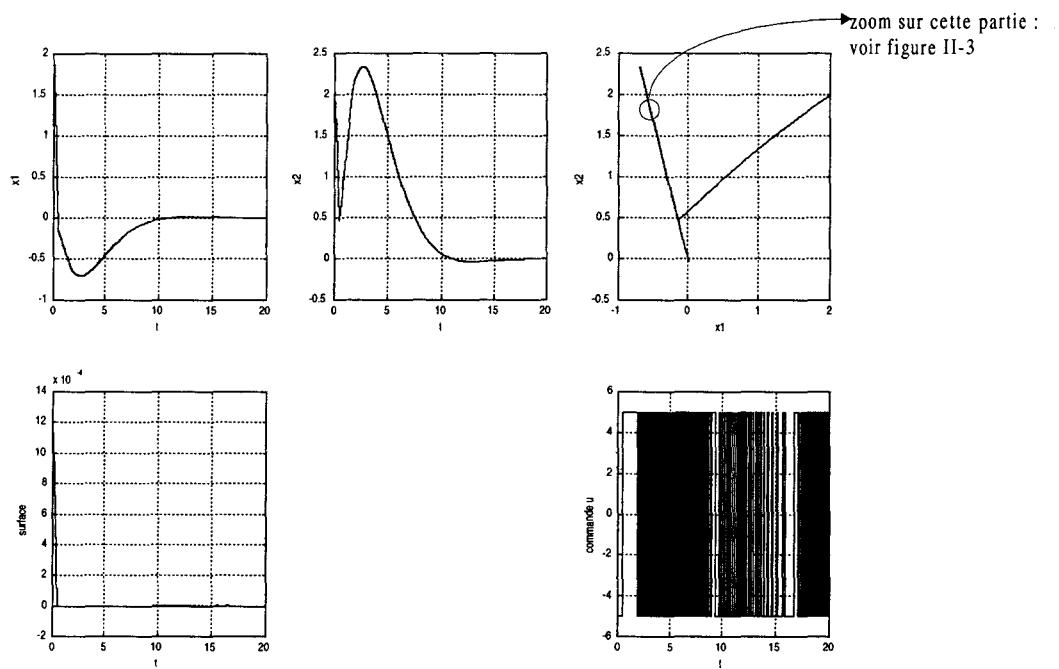


FIG. II-1: Exemple (II.1) : évolution du système en boucle fermée

La figure (II-1) montre l'évolution du système pour un retard $\tau = 1.46$, en utilisant la surface optimisée par le théorème II.5. Les conditions initiales sont fixées à $\varphi(\theta) = 2$ pour $\theta \in [-\tau, 0]$. En comparaison, les résultats proposés par Ivanescu et al. [73] nous donnent un retard maximal de $\tau_{max} = 1.46$ (voir figure II-2), tandis que ceux de Fu et al [49] stabilisent le système pour $\tau_{max} = 0.984$ et Li et al [90] seulement $\tau_{max} = 0.51$.

Remarque II.11 Sur la simulation de la figure (II-1), apparaît clairement le problème de l'attractivité de la surface en temps fini pour un système à retard déjà mentionné en remarque II.4. En effet, une fois sur la surface, le système II.56 ne converge pas immédiatement vers le point d'équilibre mais s'écarte de celui-ci (voir le grossissement sur la figure II-3). Sur la figure II-3, cela correspond à la trajectoire dont l'amplitude autour de la surface est la plus grande. Intuitivement, nous voyons que ces commutations sont dues à un décalage de la valeur moyenne de s par une fonction de $s(t - \tau)$ tendant vers zéro lorsque t tend vers $t_s + \tau$ et nulle en valeur moyenne pour $t > t_s + \tau$. Ensuite, à partir de $t_s + \tau$, le système (II.56), régi par l'équation réduite, converge bien vers zéro. L'amplitude est alors réduite.

Anecdotiquement, la figure (II-4) représente l'évolution du système pour des conditions initiales fixées à $\varphi(\theta) = [1; -1]$ pour $\theta \in [-\tau, 0]$. Les trajectoires du système passent par le point d'équilibre sans s' "arrêter" !!

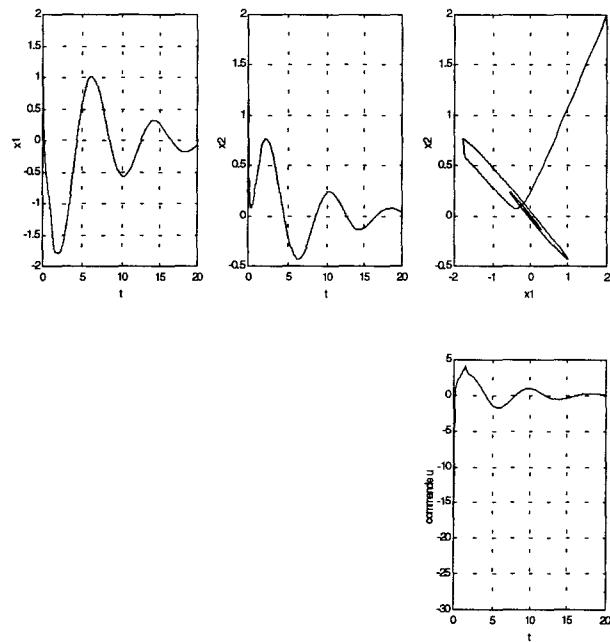


FIG. II-2: Exemple (II.1) : évolution du système en boucle fermée : méthode de Ivanescu et al.

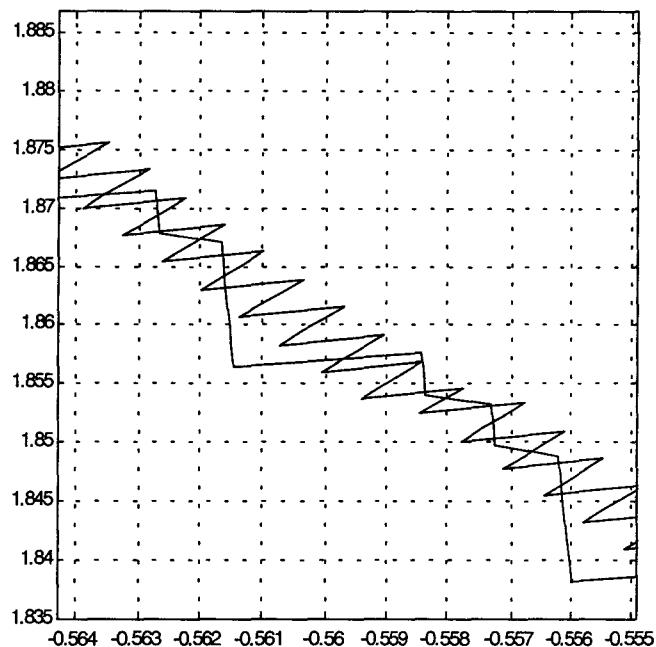


FIG. II-3: Exemple (II.1) : zoom du plan de phase (x_1, x_2). Pour deux instants différents, deux trajectoires co-existent sur $s = 0$. L'une diverge (provisoirement), tandis que l'autre converge vers zéro.

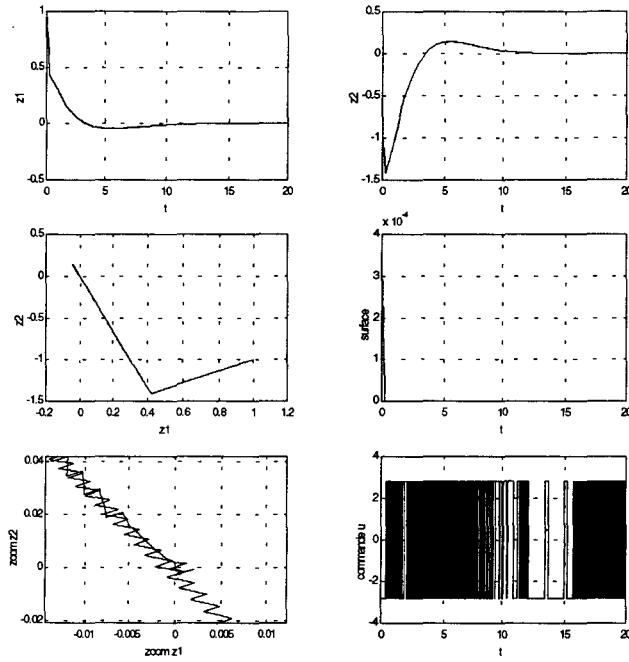


FIG. II-4: Exemple (II.1) : évolution du système en boucle fermée pour des conditions initiales fixées à $\varphi(\theta) = [1; -1]$ pour $\theta \in [-\tau, 0]$.

Exemple II.2 Considérons le système (II.1) avec un retard constant et

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} -2 & -0.5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{II.57})$$

Comme la paire de matrices (A, B) n'est pas commandable, le système ne peut être stabilisé indépendamment du retard. Les résultats obtenus en appliquant les théorèmes précédents sont donnés en Table II.3 : La figure (II-5) montre l'évolution du système pour un retard $\tau = 0.49$.

TAB. II.3: Tableau récapitulatif des différentes commandes pour l'exemple (II.2)

	retard maximal calculé	paramètres (valeur pour $\tau = 100$)
théorème II.5	100	$s(x) = 0.28195x_1(t) + 0.0706x_2(t)$
théorème II.3	100	$s(z) = z_2(t) + 3.991z_1(t)$
théorème II.8	100	$\Omega(z_t) = z_2(t) + 3.991z_1(t) - 0.0016z_1(t - \tau)$
Ivanescu et al	1.3	
Li et De Souza	0.48	

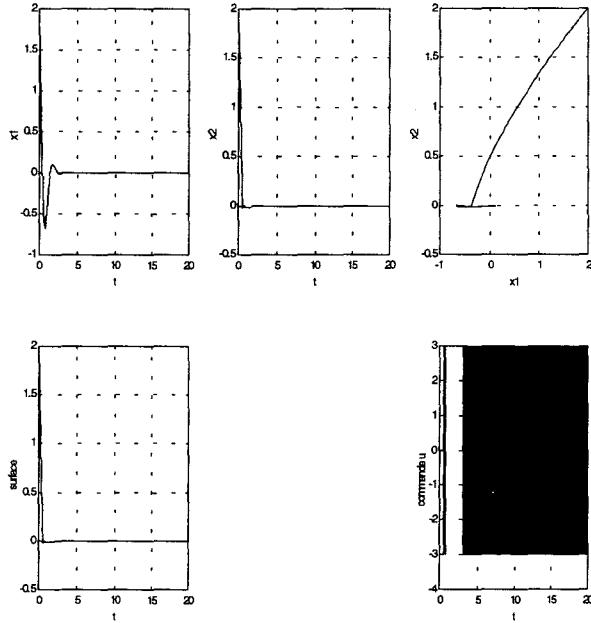


FIG. II-5: Exemple (II.2) : évolution du système en boucle fermée

Les conditions initiales y sont fixées à $\varphi(\theta) = 2$ pour $\theta \in [-\tau, 0]$. La surface optimisée par le théorème II.5 est donnée par $s(x) = x_2 = 0$. Les travaux précédents trouvent une borne maximale de 1.3 pour Ivanescu et al [73] et 0.48 pour Li et al [90], tandis que par notre approche, la résolution de l'optimisation semble toujours donner une solution et ceci quel que soit le retard.

Remarque II.12 Notons que plus nous nous rapprochons de la limite théorique², plus les matrices déterminées par (II.29) sont mal conditionnées. Ainsi, si nous choisissons $\tau = 100$, nous trouvons :

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} 0.0405 & -0.1618 \\ -0.1618 & 14.798 \end{bmatrix}, \\ \sigma &= 14449. \end{aligned}$$

Les valeurs propres de X sont $(0.038, 14.7993)$. L'inversion de X , nécessaire pour trouver la surface, reste fortement sensible aux erreurs numériques.

² Celle-ci est définie pour un système scalaire de la forme $\dot{x} = -ax(t) - bx(t-\tau)$ par $\tau_{th} \leq \frac{\arccos(-a/b)}{\sqrt{b^2 - a^2}}$

Exemple II.3 Considérons le système (II.1) avec un retard constant et

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1.4 & 0.25 & 0.8 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 A_d &= \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0.1 & -0.1 \\ -0.2 & -0.2 & 0.1 \end{bmatrix} \\
 B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha^2 * \sin(t) \end{bmatrix} x(t)
 \end{aligned} \tag{II.58}$$

Pour $\alpha = 0$, le retard maximal proposé par Li et al. [90] est de 0.66. En utilisant les théorèmes précédents, nous trouvons les résultats de la Table II.4 :

TAB. II.4: Tableau récapitulatif des résultats de l'exemple (II.3)

méthode employée	retard maximal	paramètres
théorème II.5	1.9	$s(x) = [0.03346 \quad 0.01758 \quad 0.017655] x(t)$
théorème II.3	1.6	$s(z) = z_2(t) + [1.895 \quad 0.95] z_1(t)$
théorème II.8	2.5	$s(z) = z_2(t) + [1.84 \quad 0.30] z_1(t) + [-0.1 \quad 0.005] z_1(t - \tau)$

Soit une perturbation : $f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha^2 \sin(t) \end{bmatrix} x(t)$. L'ajout d'une telle perturbation satisfaisant

les conditions de recouvrement ne change pas la qualité de la convergence pour la commande par modes glissants. Par contre, en utilisant les théorèmes de stabilisation robuste définis par Li et al, les valeurs admissibles du retard diminuent lorsque α augmente (Table II.5)

TAB. II.5: Retard admissible en fonction de α pour l'exemple (II.3)

valeur de α	valeur du retard admissible τ_{max}
0.1	0.64
0.3	0.26
0.5	-

Exemple II.4 Reprenons l'exemple (II.58) mais supposons que le retard est cette fois variant dans le temps. D'après le théorème II.7, nous obtenons une borne supérieure du retard $\tau_{max} = 0.42$. La surface a alors comme équation :

$$s = [0.1736 \quad 0.0697 \quad 0.0954009] x = 0.$$

II.8 Extensions possibles

Nous proposons dans cette partie deux extensions des résultats précédents. La première considère le cas d'une commande par modes glissants pour des systèmes linéaires à plusieurs retards sur l'état. La seconde est un cas particulier de commande par modes glissants à coût garanti appliquée aux systèmes à retards distribués.

II.8.1 Extension à des systèmes à plusieurs retards sur l'état

Nous considérons le système linéaire suivant avec k retards h_i . On pose $h = \max_i(h_i)$,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^k A_{di}x(t - h_i) + Bu(t) + f_1, & \text{pour } t > 0, \\ x(t) = \phi(t), & \text{for } t \in [-h, 0], \end{cases} \quad (\text{II.59})$$

où les $A_{di} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont des matrices constantes. Les hypothèses AII.1 et AII.2 concernant la commandabilité et la majoration de la perturbation sont remplacées par :

A II.5 La paire de matrices $(A + \sum_{i=1}^k A_d, B)$ est commandable.

A II.6 $f_1 = Bf$ avec $\|f\| < \Psi(x_t)$.

L'hypothèse AII.4 (rang $B = m$) est conservée.

Théorème II.9 Soit $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice de Hurwitz, P une solution de l'équation de Lyapunov (II.25) et m_1 un réel strictement positif. Si les conditions AII.4, AII.5, AII.6 sont vérifiées, si l'opérateur

$$D(\varphi) = \varphi(0) + \sum_{i=1}^k \int_{-h_{i \max}}^0 \hat{A}_{d1i} \varphi(\theta) d\theta$$

est stable, alors la commande

$$u(t) = -(SB)^{-1}(-\Lambda s(x) + SAx(t) + \sum_{i=1}^k SA_{di}x(t - h_i)) + m \frac{Ps}{\|Ps\|},$$

où $m = m_1 + \|SB\| \Psi(x_t)$, rend la surface $s(x) = 0$ (Eq. II.5) globalement attractive en temps fini pour le système (II.59). Le système est alors asymptotiquement stable pour tous les retards

$h_i \in [0, h_{i \max}]$ ($i = 1, \dots, k$), où les paramètres $h_{i \max}$ satisfont les contraintes suivantes :

$$\begin{pmatrix} J^T + J & h_{1 \max} X A_{d1}^T & \dots & h_{k \max} X A_{dk}^T & \sum_{i=0}^k h_{i \max} J^T \\ h_{1 \max} A_d X & -h_{1 \max} X & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ h_{k \max} A_{dk} X & 0 & 0 & -h_{k \max} X & 0 \\ \sum_{i=0}^k h_{i \max} J & 0 & 0 & 0 & -\sum_{i=0}^k h_{i \max} X \end{pmatrix}$$

$$-\sigma \begin{pmatrix} BB^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & BB^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & BB^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & BB^T \end{pmatrix} < 0,$$

$$X > 0,$$

avec $J = (A + \sum_{i=0}^k A_{di})X$, $\sigma \in \mathbb{R}$.

La preuve est similaire à celle donnée pour le théorème II.5 page 64.

II.8.2 Extension à une classe de systèmes à retards distribués

Nous considérons le système linéaire à retards distribués de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \int_{-\tau}^0 A_d x(t+w) dw + Bu(t) + f_1, \text{ pour } t > 0, \\ x(t) = \phi(t), \text{ pour } t \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (\text{II.60})$$

où $A_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$. L'hypothèse concernant la commandabilité est remplacée par :

A II.7 La paire de matrices (A, B) est commandable.

De plus, nous supposerons que B est de rang plein (hypothèse II.4).

Afin de construire une loi de commande à structure variable, la surface choisie est de la forme (II.5). Le premier paragraphe présente la loi de commande discontinue qui permet la stabilisation du système pour une valeur du retard supposée constante, mais inconnue. Dans le second paragraphe, nous considérerons le cas d'un retard à valeur inconnue et variable dans le temps. Enfin, nous considérerons l'élaboration d'une commande à structure variable et à coût garanti.

II.8.2.1 Cas du retard constant et à valeur inconnue

Théorème II.10 *Considérons le système (II.60) avec un retard τ constant et à valeur inconnue. Soit une matrice $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice de Hurwitz, P la solution de l'équation de Lyapunov (II.25), et m_1 un réel strictement positif. Si les conditions AII.4-AII.6-AII.7 sont vérifiées, la commande*

$$u(t) = -(SB)^{-1}(-\Lambda s(x) + SAx(t) + m \frac{Ps}{\|Ps\|}), \quad (\text{II.61})$$

avec $m = m_1 + \sup_{\theta \in [-\tau_{\max}, 0]} \left(\|SB\| \Psi(x_t(\theta)) + \left\| SA_d \int_{\theta}^0 x(t+w) dw \right\| \right)$, rend la surface $s(x) = 0$ (Eq. (II.5)) globalement attractive en temps fini pour le système (II.60). Le système (II.60) est alors globalement asymptotiquement stable pour tout retard $\tau \in [0, \tau_{\max}]$, où τ_{\max} est le résultat du problème d'optimisation suivant :

$$\tau_{\max}^{-1} = \min(\tau^{-1}), \quad (\text{II.62})$$

soumis aux contraintes ($\sigma, \alpha \in \mathbb{R}$) :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \tau^{-1} (AX + XA^T) + Y & A_d X \\ X A_d^T & -Y \end{bmatrix} - \sigma \begin{bmatrix} BB^T & 0 \\ 0 & BB^T \end{bmatrix} < 0, \\ & X > 0, \\ & Y > 0, \\ & Y - \alpha BB^T > 0, \end{aligned} \quad (\text{II.63})$$

avec $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Preuve. Nous ne reviendrons pas sur la preuve de l'attractivité de la surface en temps fini.

Une fois en régime de glissement, les équations $s(x) = \dot{s}(x) = 0$ sont vérifiées et mènent à l'équation du système en régime de glissement :

$$\dot{z}_1(t) = \hat{A}_{11} z_1(t) + \hat{A}_{d11} \int_{t-\tau}^t z_1(w) dw. \quad (\text{II.64})$$

Pour montrer la stabilité asymptotique de ce système réduit, nous choisissons la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii suivante :

$$V(z_{1t}) = z_1^T(t)Pz_1(t) + \int_{t-\tau}^t \int_w z_1(c)^T R z_1(c) dc dw, \quad (\text{II.65})$$

où $P, R \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ sont définies positives.

La dérivation de la fonctionnelle de Lyapunov V le long des trajectoires du système réduit (II.64) nous mène à :

$$\begin{aligned} \dot{V}(z_{1t}) &= z_1^T(t) \left(\hat{A}_{11}^T P + P \hat{A}_{11} \right) z_1(t) \\ &\quad + 2z_1^T(t) P \hat{A}_{d11} \int_{t-\tau}^t z_1(w) dw \\ &\quad - \int_{t-\tau}^t z_1^T(w) R z_1(w) dw + \tau z_1^T(t) R z_1(t) dw. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité suivante :

$$2z_1(t) P \hat{A}_{d11} \int_{t-\tau}^t z_1(w) dw \leq \tau z_1(t) P \hat{A}_{d11} R^{-1} \hat{A}_{d11}^T P z_1(t) + \int_{t-\tau}^t z_1^T(w) R z_1(w) dw,$$

nous obtenons une estimation de la borne supérieure de la dérivée de V :

$$\dot{V}(z_{1t}) \leq z_1^T(t) N z_1(t),$$

$$\text{avec } N(\tau) = \left(\hat{A}_{11}^T P + P \hat{A}_{11} + \tau R + \tau P \hat{A}_{d11} R^{-1} \hat{A}_{d11}^T P \right).$$

Ainsi, s'il existe P et R deux matrices définies positives et un réel τ_{\max} tel que $N(\tau_{\max})$ est définie négative alors le système réduit est asymptotiquement stable pour tout $\tau \in [0, \tau_{\max}]$. Pour pouvoir optimiser la borne supérieure τ_{\max} , multiplions N à droite et à gauche par $S = P^{-1}$ et fixons $P = (\tilde{B}^T X \tilde{B})^{-1}$. L'inégalité $N < 0$ devient

$$S \hat{A}_{11}^T + \hat{A}_{11} S + \tau S R S + \tau P \hat{A}_{d11} R^{-1} \hat{A}_{d11}^T < 0,$$

ou, d'une manière équivalente

$$\tilde{B}^T A X \tilde{B} + \tilde{B}^T X A^T \tilde{B} + \tau Q + \tau \tilde{B}^T A_d X \tilde{B} Q^{-1} \tilde{B}^T X A_d^T \tilde{B} < 0, \quad (\text{II.66})$$

avec $Q = SRS$. Nous choisissons une forme particulière de la matrice Q de la manière suivante $Q = \tilde{B}^T Y \tilde{B}$, avec $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice définie positive. En utilisant le lemme de Schur, l'inégalité (II.66) est alors équivalente à la contrainte (II.63). ■

Les deux prochains théorèmes considèrent le cas de retards variant dans le temps. Le premier théorème développe une commande pour des systèmes à retard variant dans le temps dont on sait que la dérivée $\dot{\tau}(t)$ est bornée supérieurement par une constante $\beta < 1$. Pour ce faire, nous modifierons légèrement la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii (II.65).

La deuxième commande nous permet de nous affranchir de l'hypothèse $\beta < 1$, en se basant sur une fonction de Razumikhin.

Théorème II.11 (retard variant) *Considérons le système (II.60) avec un retard $\tau(t)$ dérivable et dont la dérivée est bornée supérieurement par une constante $\beta < 1$. Soit une matrice $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice de Hurwitz, P la solution de l'équation de Lyapunov (II.25), et soit $m_1 > 0$ un réel.*

Si les conditions AII.4-AII.6-AII.7 sont vérifiées, la commande (II.61) rend la surface $s(x) = 0$ (Eq. (II.5)) globalement attractive en temps fini. Le système (II.60) est alors globalement asymptotiquement stable pour tout retard $\tau \in [0, \tau_{\max}]$ où τ_{\max} est le résultat du problème d'optimisation suivant :

$$\tau_{\max}^{-1} = \min(\tau^{-1}),$$

sous les contraintes ($\sigma, \alpha \in \mathbb{R}$) :

$$\begin{bmatrix} \tau^{-1} (AX + XA^T) + \frac{1}{1-\beta} Y & A_d X \\ X A_d^T & -Y \end{bmatrix} - \sigma \begin{bmatrix} BB^T & 0 \\ 0 & BB^T \end{bmatrix} < 0,$$

$$X > 0,$$

$$Y > 0,$$

$$Y - \alpha BB^T > 0,$$

avec $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Preuve. La preuve de la convergence sur la surface $s(x) = 0$ reste la même et nous ne la détaillerons pas. La preuve de la stabilité du système réduit repose sur la fonctionnelle de

Lyapunov-Krasovskii suivante :

$$V = z_1^T(t)Pz_1(t) + \frac{1}{1-\beta} \int_{t-\tau}^t \int_w z_1(c)^T R z_1(c) dc dw,$$

Le calcul est analogue à la preuve du théorème (II.10) page 86. ■

Nous considérons dans le théorème suivant le calcul d'une loi de commande dans le cas d'un retard à valeur inconnue, mais uniformément bornée. L'approche proposée sera basée sur une fonction de Razumikhin.

Théorème II.12 (retard variant) *Considérons le système (II.60) avec un retard $\tau(t)$ uniformément borné. Soit une matrice $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice de Hurwitz, P la solution de l'équation de Lyapunov (II.25), et m_1 un réel strictement positif.*

Si les conditions AII.4-AII.6-AII.7 sont vérifiées, la commande (II.61) rend la surface $s(x) = 0$ (Eq. (II.5)) globalement attractive en temps fini. Le système (II.60) est alors globalement asymptotiquement stable pour tout retard $\tau \in [0, \tau_{\max}]$ où τ_{\max} est le résultat du problème d'optimisation suivant :

$$\tau_{\max}^{-1} = \min(\tau^{-1})$$

soumis aux contraintes ($\sigma \in \mathbb{R}$) :

$$\begin{bmatrix} \tau^{-1}(AX + XA^T) + X & A_d X \\ X A_d^T & -X \end{bmatrix} - \sigma \begin{bmatrix} BB^T & 0 \\ 0 & BB^T \end{bmatrix} < 0 \quad (II.67)$$

$X > 0$

avec $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Preuve. Une fois en régime glissant, les équations $s(x) = \dot{s}(x) = 0$ nous mènent à l'équation différentielle régissant le système réduit :

$$\dot{z}_1(t) = \hat{A}_{11} z_1(t) + \hat{A}_{d11} \int_{t-\tau(t)}^t z_1(w) dw. \quad (II.68)$$

Choisissons la fonction de Lyapunov-Razumikhin suivante

$$V(t) = z_1^T(t)Pz_1(t),$$

où $R \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ est une matrice définie positive.

Selon l'approche proposée par Razumikhin, supposons que l'inégalité suivante :

$$V(x(t + \theta)) < qV(x(t)),$$

avec $q > 1$ est vérifiée pour $\theta \in [-\tau(t), 0]$. La dérivée de V le long des trajectoires de (II.68) nous mène à :

$$\begin{aligned}\dot{V}(z_{1t}) &= z_1^T(t) \left(\hat{A}_{11}^T P + P \hat{A}_{11} \right) z_1(t) \\ &\quad + 2z_1^T(t) P \hat{A}_{d11} \int_{t-\tau}^t z_1(w) dw.\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité suivante :

$$2z_1(t) P \hat{A}_{d11} \int_{t-\tau}^t z_1(w) dw \leq \tau z_1(t) P \hat{A}_{d11} P^{-1} \hat{A}_{d11}^T P z_1(t) + \int_{t-\tau}^t z_1^T(w) P z_1(w) dw,$$

nous obtenons une estimation de la borne supérieure de la dérivée de V :

$$\dot{V}(z_{1t}) \leq z_1^T(t) N z_1(t),$$

$$\text{avec } N(\tau) = \left(\hat{A}_{11}^T P + P \hat{A}_{11} + \tau q P + \tau P \hat{A}_{d11} P^{-1} \hat{A}_{d11}^T P \right).$$

Ainsi, s'il existe P une matrice définie positive et un réel τ_{\max} tels que $N(\tau_{\max})$ est définie négative alors le système réduit est asymptotiquement stable pour $\tau \in [0, \tau_{\max}]$. Pour pouvoir optimiser la borne supérieure τ_{\max} , multiplions N à droite et à gauche par $S = P^{-1}$ et fixons $P = (\tilde{B}^T X \tilde{B})^{-1}$. L'inégalité $N < 0$ devient

$$S \hat{A}_{11}^T + \hat{A}_{11} S + \tau q S + \tau P \hat{A}_{d11} S P S \hat{A}_{d11}^T < 0$$

ou, d'une manière équivalente

$$\tilde{B}^T A X \tilde{B} + \tilde{B}^T X A^T \tilde{B} + \tau q S + \tau \tilde{B}^T A_d X \tilde{B} P \tilde{B}^T X A_d^T \tilde{B} < 0.$$

En utilisant le lemme de Schur, cette dernière inégalité est équivalente à

$$\begin{bmatrix} \tau^{-1}(AX + XA^T) + qX & A_d X \\ XA_d^T & -X \end{bmatrix} - \sigma \begin{bmatrix} BB^T & 0 \\ 0 & BB^T \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{II.69})$$

Pour $q = 1$, cette inégalité est exactement la contrainte (II.67). Si nous supposons qu'il existe des paramètres $X, \tau, \sigma, \alpha, \beta$ tels que (II.69) soit vérifiée, alors, par continuité, il existe $q_1 > 1$ tel que (II.67) le soit aussi. La preuve en découle. ■

II.8.2.2 Exemple

Exemple II.5 Pour illustrer les diverses commandes proposées dans cette sous-partie, considérons le système à retard distribué (II.60) avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1.75 & 0.25 & 0.8 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, A_d = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0.25 & 0.2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin(z_1(t - \tau)) \end{pmatrix} \text{ et } z(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ pour } t \in [-\tau, 0]. \quad (\text{II.70})$$

1) Retard constant : en utilisant le théorème (II.10), le système (II.70) (II.61) est asymptotiquement stable pour $\tau \leq 1.99$ (voir figure II-6).

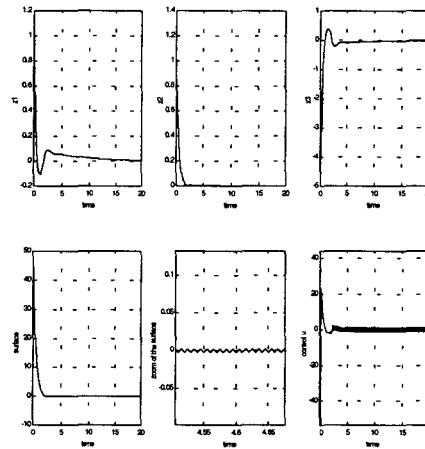


FIG. II-6: Exemple II.5 : évolution de la trajectoire du système (II.70) (II.61) pour un retard de $\tau = 1.99$.

2) retard variant : Maintenant, si nous supposons que le retard est variant dans le temps, alors en utilisant le théorème II.12, le système est stabilisé pour $\tau(t) < 0.83$, ce qui est bien sûr plus restrictif que la borne déterminée précédemment. Les simulations sont représentées sur les figures II-7 et II-8.

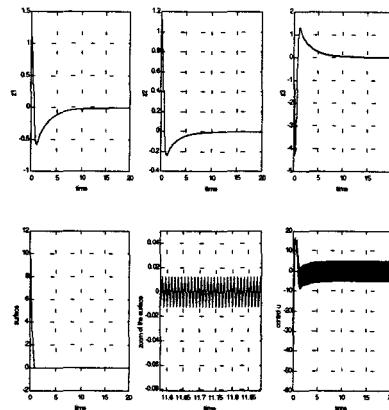


FIG. II-7: Exemple II.5 : évolution des trajectoires de (II.70) (II.61) et un retard variant de valeur maximale $\tau = 0.83$.

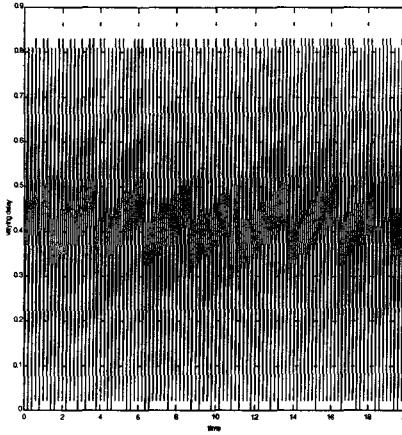


FIG. II-8: Exemple II.5 : retard variable

II.8.2.3 Commande par modes glissants à coût garanti

Dans cette partie, nous nous sommes intéressés à la commande par modes glissants à coût garanti pour des systèmes à retard distribué de la forme (II.60). Considérons le critère de performance suivant :

$$J = \int_{t_s}^{\infty} x^T(w) Z x(w) dw, \quad (\text{II.71})$$

avec $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice définie positive, t_s le temps d'arrivée sur la surface $s(x) = 0$ avec de plus $s(x(t - \tau)) = 0$.

Le but de cette partie est de déterminer une loi à structure variable garantissant la bornitude de J sur la surface $s(x) = 0$. Nous proposons le résultat suivant :

Théorème II.13 *Considérons le système (II.60) avec un retard τ constant et à valeur inconnue. Soit le critère de performance J défini par (II.71), $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice de Hurwitz, P une solution de l'équation de Lyapunov (II.20) et $m_1 > 0$. Si les hypothèses AII.4-AII.6-AII.7 sont vérifiées, alors la commande (II.61) rend la surface globalement attractive en temps fini, et le système (II.60) asymptotiquement stable pour $\tau \in [0, \tau_{\max}]$, où τ_{\max} est la solution du problème d'optimisation suivant :*

$$\tau_{\max}^{-1} = \min(\tau^{-1}),$$

sous les contraintes :

$$\begin{bmatrix} \tilde{B}^T & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{B}^T & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau^{-1}(AX + XA^T) + Y & A_d X & X \\ XA_d^T & -Y & 0 \\ X & 0 & -Z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{B} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{B} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} < 0,$$

$$X > 0,$$

$$Y > 0,$$

$$Y - \alpha BB^T > 0.$$

De plus, la fonction de coût J est bornée par :

$$J < z_1^T(t_s) P z_1(t_s) + \int_{t_s-\tau}^{t_s} \int_w^{t_s} z_1(c)^T R z_1(c) dc dw,$$

avec $P = (\tilde{B}^T X \tilde{B})^{-1}$, et $R = P(\tilde{B}^T Y \tilde{B})P$.

Preuve. Tout d'abord, nous appliquons la transformation (II.6) à la fonction coût pour pouvoir l'exprimer dans la base "régulière" :

$$J = \int_{t_s}^{\infty} z^T(w) (M^{-1})^T Z (M^{-1}) z(w) dw,$$

avec

$$\begin{aligned} (M^{-1})^T Z (M^{-1}) &= \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} (\tilde{B}^T X \tilde{B})^{-1} \tilde{B}^T X Z X \tilde{B} (\tilde{B}^T X \tilde{B})^{-1} & (\tilde{B}^T X \tilde{B})^{-1} \tilde{B}^T X Z B (SB)^{-1} \\ (B^T S^T)^{-1} B^T Z X \tilde{B} (\tilde{B}^T X \tilde{B})^{-1} & (B^T S^T)^{-1} B^T Z B (SB)^{-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Comme nous ne considérons que le système en régime de glissement, la seconde composante de l'état z_2 est égale à 0. J est donc réduit à :

$$J = \int_{t_s}^{\infty} z_1^T(w) Z_{11} z_1(w) dw.$$

Choisissons la fonctionnelle de Lyapunov suivante :

$$V = z_1^T(t)Pz_1(t) + \int_{t-\tau}^t \int_w z_1(c)^T R z_1(c) dc dw,$$

avec $P, R \in R^{(n-m) \times (n-m)}$ des matrices définies positives. La dérivée de la fonctionnelle de Lyapunov V le long des trajectoires du système réduit (II.64) nous mène à :

$$\dot{V}(z_{1t}) \leq z_1^T(t)N(\tau)z_1(t),$$

avec

$$N(\tau) = \left(\hat{A}_{11}^T P + P \hat{A}_{11} + \tau R + \tau P \hat{A}_{d11} R^{-1} \hat{A}_{d11}^T P \right). \quad (\text{II.72})$$

Si nous supposons qu'il existe P, X, R, τ_{\max} tels que :

$$z_1^T(t)(N(\tau_{\max}) + Z_{11})z_1(t) < 0,$$

alors l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\dot{V}(z_{1t}) < -z_1^T(t)Z_{11}z_1(t). \quad (\text{II.73})$$

En intégrant des deux côtés de l'inégalité (II.73), nous obtenons :

$$\int_{t_s}^{\infty} \dot{V}(z_{1t}) dt < - \int_{t_s}^{\infty} z_1^T(t)Z_{11}z_1(t),$$

c'est-à-dire

$$J < V(t_s).$$

En conclusion, s'il existe P, X, R, τ_{\max} tels que $N(\tau_{\max}) + Z_{11}$ est une matrice définie positive alors la fonction coût est bornée par :

$$J < z_1^T(t_s)Pz_1(t_s) + \int_{t_s-\tau}^{t_s} \int_w z_1(c)^T R z_1(c) dc dw,$$

et le système réduit est asymptotiquement stable pour $\tau \in [0, \tau_{\max}]$.

Cependant le choix des paramètres P, R, X permettant d'optimiser τ_{\max} et tels que $N(\tau_{\max}) + Z_{11} < 0$ peut se révéler difficile. C'est pourquoi nous choisissons comme précédemment une forme particulière pour P , et R qui nous permettra de définir un problème convexe. Si nous choisissons $P = (\tilde{B}^T X \tilde{B})^{-1}$, en multipliant à droite et à gauche par $S = P^{-1}$, l'inégalité $N(\tau) + Z_{11} < 0$ devient :

$$S \hat{A}_{11}^T + \hat{A}_{11} S + \tau S R S + \tau P \hat{A}_{d11} R^{-1} \hat{A}_{d11}^T + S Z_{11} S < 0,$$

ou

$$\tilde{B}^T A X \tilde{B} + \tilde{B}^T X A^T \tilde{B} + \tau Q + \tau \tilde{B}^T A_d X \tilde{B} Q^{-1} \tilde{B}^T X A_d^T \tilde{B} + \tilde{B}^T X Z X \tilde{B} < 0,$$

avec $Q = S R S$.

Nous choisissons $Q = (\tilde{B}^T Y \tilde{B})$, avec $Y > 0$. En utilisant le complément de Schur, l'inégalité est équivalente à :

$$\begin{bmatrix} \tau^{-1}(\tilde{B}^T A X \tilde{B} + \tilde{B}^T X A^T \tilde{B}) + (\tilde{B}^T Y \tilde{B}) & \tilde{B}^T A_d X \tilde{B} & \tilde{B}^T X \\ \tilde{B}^T X A_d^T \tilde{B} & -(\tilde{B}^T Y \tilde{B}) & 0 \\ X \tilde{B} & 0 & -Z^{-1} \end{bmatrix} < 0,$$

ou

$$\begin{bmatrix} \tilde{B}^T & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{B}^T & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau^{-1}(AX + XA^T) + Y & A_d X & X \\ X A_d^T & -Y & 0 \\ X & 0 & -Z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{B} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{B} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} < 0.$$

Ceci conclut la preuve. ■

III.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté différentes méthodes originales de stabilisation des systèmes linéaires à retards sur l'état à l'aide de commandes par modes glissants. Nous pouvons distinguer deux grandes approches :

- La première approche consiste à élaborer une surface dépendant de l'état instantané du système c'est-à-dire une surface de la forme $s(x) = Cx$. Plusieurs méthodes d'optimisation ont alors été menées afin de déterminer le gain de la surface qui stabilise le système commandé pour le plus grand retard possible (Théorèmes II.1, II.3, II.5). Par ailleurs, nous avons adapté ces méthodes pour traiter le cas de systèmes où le retard est à valeur inconnue et/ou variant dans le temps (Théorèmes II.4, II.7).
- La deuxième approche s'intéresse au développement d'une surface fonctionnelle qui dépend des états passés et donc de la taille du retard. Dans cette partie, nous avons considéré le cas d'un retard ponctuel et connu (Théorème II.8). Cette nouvelle information nous a permis de relaxer les critères présentés dans les parties précédentes.

A travers quelques exemples, nous avons montré que la stabilisation de systèmes linéaires à retards par modes glissants permet d'améliorer la robustesse du système à deux niveaux distincts :

- Robustesse vis-à-vis du retard.
- Robustesse vis-à-vis de perturbations paramétriques, ou exogènes pourvu qu'elles satisfassent une condition structurelle de recouvrement.

Enfin, dans une dernière partie, nous avons présenté deux extensions possibles : le cas de systèmes à plusieurs retards sur l'état et le cas de systèmes distribués. Pour cette dernière classe de systèmes à retards, nous avons envisagé, par ailleurs, la construction d'une commande à structures variables qui garantit la bornitude d'une fonction coût quadratique.

Cependant, il nous reste plusieurs points à développer. Le premier point est bien sûr de comprendre le degré de conservatisme introduit lors de l'optimisation convexe. En effet, nos résultats restent très dépendants du choix de la fonctionnelle de Lyapunov. A cet effet, il pourrait être intéressant de considérer d'autres types de commandabilité, comme nous l'avons mentionné page 53.

Le deuxième point est de considérer une plus large classe d'incertitudes paramétriques ne satisfaisant plus les conditions de recouvrement. Nous devrions alors développer une surface qui stabilise un sous-système incertain.

Chapitre III

Commande des systèmes non linéaires à retards.



III.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons proposé des lois de commande par modes glissants pour des systèmes linéaires à retards sur l'état. Les exemples proposés ont montré que ces techniques de commande améliorent de façon notable la robustesse du système vis-à-vis du retard et des perturbations paramétriques ou exogènes. Il nous a paru alors intéressant d'essayer d'étendre ces résultats aux cas des systèmes non linéaires à retards, qui sont des modèles plus proches de la réalité en ce sens que leur validité n'est pas nécessairement limitée à un voisinage immédiat d'un point de fonctionnement ou d'une trajectoire de référence.

Ce chapitre se compose de quatre parties distinctes : après avoir transformé le système original en un système non linéaire nous permettant de mettre en valeur la dynamique de la surface choisie, plusieurs cas seront considérés :

Le premier correspond à un système non linéaire avec un retard constant. Nous proposerons alors plusieurs techniques de commandes menant à une stabilisation indépendante du retard, exponentielle (avec un taux de croissance garanti), ou dépendante du retard.

Le deuxième cas correspond au cas d'un retard variant dans le temps. En reprenant la méthodologie du chapitre II, plusieurs lois de commande seront mises en œuvre.

La troisième partie nous permettra, à travers des exemples, de comparer nos lois de commandes par rapport à celles qui ont été proposées dans la littérature.

Enfin, la quatrième partie propose la généralisation de ces résultats pour des systèmes non

linéaires, plus complexes, sous réserve d'un certain nombre d'hypothèses à vérifier.

III.2 Notations et formulation du problème

Dans ce chapitre, nous considérons le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x_t(\theta)) + g(x(t))u(t) + p(x_t, t), \\ x(t) = \phi(t) \text{ pour } t \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

où $\tau = \tau(t) \geq 0$ est un retard qui peut être variable dans le temps, $x \in \mathbb{R}^n$, f représente un champ de vecteur de dimension $n \times n$ éventuellement perturbé et qui dépend de la fonction x_t ; $g(x) = [g_1(x) \dots g_m(x)]$ est un champ de commande de dimension $n \times m$, où les vecteurs $g_i(x)$, $i \in \{1..m\}$ représentent des fonctions suffisamment régulières de $x(t)$; $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur de commande; ϕ est la condition initiale, supposée continue par morceaux sur $[-\tau, 0]$; p est un terme qui représente les dynamiques négligées et les perturbations exogènes.

Les hypothèses sur le système (III.1) sont les suivantes :

A III.1 $\text{rang}(g(x)) = m$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

A III.2 La distribution $\Delta_g = \text{span}(\{g_1, \dots, g_m\})$ est involutive.

A III.3 La perturbation p vérifie les conditions de recouvrement suivantes :

$$p \in \Delta_g. \quad (\text{III.2})$$

Remarque III.1 Lorsque l'hypothèse A III.1 n'est pas vérifiée, il est possible, dans certains cas, de calculer d'abord un pré-compensateur qui permet de retrouver l'hypothèse A III.1 (voir [119] dans le cas non retardé).

Remarque III.2 Nous considérons une classe restreinte de systèmes non linéaires à retards car le champ de commande g dépend uniquement de l'état instantané. Cette hypothèse est nécessaire, car elle permettra de mettre le système (III.1) sous forme régulière. Une extension au cas général demanderait un résultat théorique, de type théorème de Frobénius, pour les systèmes fonctionnels.

Comme dans le chapitre II, afin de déterminer de manière systématique des lois de commande, nous nous proposons de transformer le système original en un système plus simple à étudier, mais qui va introduire de ce fait un certain conservatisme.

III.3 Reformulation du problème

Le but de cette section est de transformer le système (III.1) en un système multimodèle (c'est-à-dire un ensemble de modèles linéaires pondérés de façon non linéaire [138]). Ceci s'exprime de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \sum_{i=1}^r h_i(z_t) \left(\begin{bmatrix} A_{i11} \\ A_{i12} \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} A_{di11} \\ A_{di12} \end{bmatrix} z(t-\tau) \right), \\ \dot{z}_2 = f_2^R(z_t) + G_2^R(z)u(t) + p^R(z_t), \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

où z et p^R représentent respectivement le nouvel état et la perturbation dans la nouvelle base, $G_2^R(z)$ est une matrice non singulière, et les fonctions $h_i(z_t)$, $i \in I_r$ sont des fonctions de pondération qui satisfont une propriété de convexité :

$$\sum_{i=1}^r h_i(z_t) = 1, \quad h_i(z_t) \geq 0, \quad i \in I_r. \quad (\text{III.4})$$

Cette transformation s'effectue en deux étapes qui vont être présentées dans les paragraphes suivants. Mettre le système (III.1) sous cette forme va nous permettre de développer de manière **systématique** une commande par modes glissants qui stabilise le système (III.3) et donc (III.1).

III.3.1 Première étape : utilisation de la forme régulière généralisée

D'après les hypothèses A III.1, A III.2, A III.3 le système (III.1) peut être transformé en un système de la forme :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = f_1^R(z_{1t}, z_{2t}) \\ \dot{z}_2 = f_2^R(z_{1t}, z_{2t}) + G_2^R(z)u(t) + p^R(z_t), \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

où $G_2^R(z)$ est une matrice non singulière, $z_1 \in \mathbb{R}^{n-m}$, $z_2 \in \mathbb{R}^n$

Preuve. Comme le champ de vecteur $g(x)$ dépend de l'état instantané, et puisque l'hypothèse A III.2 est vérifiée, nous pouvons appliquer la procédure décrite dans l'annexe B pour déterminer un difféomorphisme qui transforme le système (III.5) en un système de la forme (III.3). ■

Remarque III.3 L'hypothèse A III.2, sur la distribution engendrée par g , est une hypothèse assez conservatrice. Celle-ci pourrait être relaxée en utilisant la méthodologie développée par

[119] et décrite dans l'annexe B.

Exemple III.1 Pour montrer tout l'intérêt de cette transformation, choisissons un système non linéaire avec un retard $\tau > 0$ suivant :

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = z_1(t - \tau) + z_3(t - \tau) + z_3^2(t) - z_2(t) - u(t), \\ \dot{z}_2(t) = -2z_3(t) - z_1(t) + 2z_3u, \\ \dot{z}_3(t) = u. \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

Soit le difféomorphisme global suivant :

$$x(t) = \varphi(z) : \begin{cases} x_1 = z_1 + z_3, \\ x_2 = z_3^2 - z_2, \\ x_3 = z_3. \end{cases}$$

Dans le nouveau système de coordonnées, le système (III.6) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x} = x_1(t - \tau) + x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_3, \\ \dot{x}_3 = u. \end{cases} \quad (\text{III.7})$$

Celui-ci peut être alors stabilisé par les méthodes classiques issues des systèmes linéaires à retards.

III.3.2 Deuxième étape : formulation polytopique

Supposons que nous puissions factoriser le premier sous-système par z_t de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \left[\begin{array}{c} \overline{A_{11}}(z_t) \\ \overline{A_{12}}(z_t) \end{array} \right] z(t) + \left[\begin{array}{c} \overline{A_{d11}}(z_t) \\ \overline{A_{d12}}(z_t) \end{array} \right] z(t - \tau), \\ \dot{z}_2 = f_2^R(z_{1t}, z_{2t}) + G_2^R(z)u(t) + p^R(z_t). \end{cases} \quad (\text{III.8})$$

Nous supposerons par la suite que :

A III.4 Les matrices $\overline{A_{1j}}(z_t)$ et $\overline{A_{dj}}(z_t)$, ($\forall j \in \{1, 2\}$) sont des applications bornées de l'espace d'état.

A III.5 La perturbation $p^R(z_t)$ est bornée par une fonctionnelle connue :

$$\|p^R\| < \Psi(z_t).$$

Si ces hypothèses sont vérifiées, le premier sous-système peut être écrit sous une forme polytopic qui met en valeur les bornes des matrices $\overline{A_{1j}}(z_t)$ et $\overline{A_{d1j}}(z_t)$ ($\forall j \in \{1, 2\}$) (voir [138, 140] dans le cas non retardé et [10] dans le cas retardé, pour de plus amples détails) :

$$\dot{z}_1 = \sum_{i=1}^r h_i(z_t) \left(\begin{bmatrix} A_{i11} \\ A_{i12} \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} A_{di11} \\ A_{di12} \end{bmatrix} z(t-\tau) \right), \quad (\text{III.9})$$

les fonctions h_i vérifiant les propriétés de convexité définies par l'équation (III.4) page 101.

Lemme III.1 Si les hypothèses A III.1 à A III.4 sont vérifiées, alors le système (III.1) peut être écrit sous la forme (III.3).

Remarque III.4 La stabilisation du système (III.8) implique la stabilisation du système (III.1).

III.4 Le choix de la surface

Une fois le système (III.1) mis sous la forme (III.8), et afin de construire une commande par modes glissants, nous choisissons une surface de la forme suivante :

$$s(z) = z_2 + Kz_1 = 0. \quad (\text{III.10})$$

Nous adopterons quelquefois la notation fonctionnelle $s_t = s(z_t)$.

Le système (III.8) est équivalent à :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \sum_{i=1}^r \left[h_i(z_t)(A_{i11} - A_{i12}K)z_1(t) \right. \\ \quad \left. + (A_{di11} - A_{di12}K)z_1(t-\tau) + A_{i12}s(z) + A_{di12}s(t-\tau(t)) \right], \\ \dot{s}(z) = \xi(z_t) + G_2^R(z)u(t) + p^R(z), \end{cases} \quad (\text{III.11})$$

avec :

$$\xi(z_t) = \xi_1(z_t) + \xi_2(z_t),$$

$$\xi_1(z_t) = f_2^R(z_{1t}, s_t(z) - K z_{1t}),$$

$$\xi_2(z_t) = K \sum_{i=1}^r h_i(z_t) \left\{ \sum_{j=1}^2 A_{i1j} z_j(t) + A_{di1j} z_j(t-\tau) \right\}.$$

Le but est donc de contraindre le système (III.11) à rester au voisinage de la surface $s = 0$ par une commande discontinue. En effet, pour $s = 0$, le système se réduit à

$$\dot{z}_1 = \sum_{i=1}^r [h_i(z_t)(A_{i11} - A_{i12}K)z_1(t) + (A_{di11} - A_{di12}K)z_1(t-\tau)].$$

III.5 Cas du retard constant

Dans cette partie, nous considérons que le retard est constant.

III.5.1 Stabilisation asymptotique

Théorème III.1 [4, 53] *Considérons le système (III.11) avec un retard τ constant. Soient $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice stable et $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$ une matrice symétrique définie positive qui vérifie l'équation de Lyapunov : $\Lambda^T P + P \Lambda = -I$. Si les hypothèses A III.1 à A III.5 sont vérifiées et s'il existe $S, R \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ deux matrices symétriques définies positives et une matrice $W \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$ telles que la contrainte suivante :*

$$\begin{bmatrix} X_i + X_i^T + R & M_i \\ M_i^T & -R \end{bmatrix} < 0, \quad i \in I_r, \quad (\text{III.12})$$

$$\text{avec } X_i = A_{i11}S - A_{i12}W, M_i = A_{di11}S - A_{di12}W,$$

est vérifiée, alors la commande :

$$\begin{cases} u(t) = -G^R(z)^{-1} \left(\xi(z_t) - \Lambda s + m(z_t) \frac{Ps(z(t))}{\|Ps(z(t))\|} \right), \\ m(z_t) = m_1 + \Psi(z_t), \\ m_1 > 0, \end{cases} \quad (\text{III.13})$$

rend la surface (III.10) stable et globalement attractive en temps fini. Le point d'équilibre $z = 0$ du système (III.8) est asymptotiquement stable pour toute valeur du retard $\tau > 0$.

Le gain K de la surface (III.10) est alors calculé par $K = WS^{-1}$.

Remarque III.5 (Cas des modèles incertains) Pour calculer la loi de commande, il est

nécessaire de connaître parfaitement les fonctions de pondérations h_i . Cependant, il est possible de transformer la loi de commande (III.13) pour traiter le cas d'un système dont les paramètres sont incertains. Dans ce cas, nous supposerons que les matrices $\overline{A_{1j}}(z_t)$ et $\overline{A_{d1j}}(z_t)$ sont des matrices perturbées mais qu'elles restent incluses dans un domaine connu et borné. Par ce biais, nous pouvons traiter le cas de systèmes linéaires ou non linéaires incertains et dont les incertitudes ne vérifient pas les conditions de recouvrement.

Pour de tels systèmes, les valeurs des fonctions de pondérations h_i ne sont pas connues. Pour déterminer une nouvelle loi de commande, nous calculons une borne de la norme de ξ . La loi de commande est alors modifiée de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(t) = -G^R(z)^{-1} \left(\xi_1(z_t) - \Lambda s + m(z_t, t) \frac{Ps}{\|Ps\|} \right), \\ m(z_t, t) = m_1 + \Psi(z_t) + m_2(z_t), \\ m_1 > 0, \\ \text{avec } m_2(z_t) = \max_{i=1,r} \left(\left\| K \left\{ \sum_{j=1}^2 A_{i1j} z_j(t) + A_{d1j} z_j(t-\tau) \right\} \right\| \right). \end{array} \right. \quad (\text{III.14})$$

Remarque III.6 De manière analogue au chapitre II, si nous connaissons une borne supérieure du retard, il est possible de calculer une loi de commande qui soit indépendante du retard.

La preuve du théorème III.1 s'effectue en trois étapes distinctes : dans un premier temps, nous prouvons que la solution du système converge en temps fini vers la surface $s(z) = 0$. Ensuite, une fois en régime glissant (c'est-à-dire $s(z) = \dot{s}(z) = 0$), nous prouvons la stabilité asymptotique de la solution nulle du système réduit. Enfin, nous nous assurons qu'entre le temps initial et le temps d'établissement du régime glissant, le système ne s'échappe pas à l'infini.

Attractivité de la surface

Lemme III.2 Si les hypothèses A III.1 à A III.5 sont vérifiées et si la contrainte (III.12) a une solution, alors la commande (III.13) existe et rend la surface (III.10) stable et globalement attractive en temps fini.

Preuve. Soit la fonction suivante $V(t) = s^T(z(t))Ps(z(t))$. Sa dérivation le long des trajectoires de (III.11) (III.13) nous donne :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -s^T(z)s(z) - 2s^T(z)P(p^R(z) + m \frac{Ps}{\|Ps\|}), \\ \dot{V}(t) &\leq -s(z)^T s(z) - 2m_1 \sqrt{\lambda_{\min}(P)} \sqrt{V}, \\ \dot{V}(t) &\leq -2m_1 \sqrt{\lambda_{\min}(P)} \sqrt{V}. \end{aligned} \quad (\text{III.15})$$

Cette dernière inégalité garantit la convergence du système (III.8) sur la surface $s(z) = 0$ en temps fini [143]. ■

Stabilité asymptotique du système réduit

Nous utilisons une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii pour prouver la stabilité du système réduit. Une fois sur la surface, les équations $s(z) = \dot{s}(z) = 0$ sont vérifiées et le système réduit est régi par :

$$\dot{z}_1(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z_t)((A_{i11} - A_{i12}K)z_1(t) + (A_{di11} - A_{di12}K)z_1(t - \tau)). \quad (\text{III.16})$$

Lemme III.3 *L'origine du système réduit (III.16) est asymptotiquement stable s'il existe $S, R \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ deux matrices symétriques définies positives et une matrice $W \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$ telles que la contrainte (III.12) ait une solution.*

Preuve. D'après le théorème A.1 de l'annexe A, le système :

$$\dot{z} = \sum_{i=1}^r h_i(z_t)(A_i z_1(t) + A_{di} z_1(t - \tau)),$$

est asymptotiquement stable s'il existe $P, Q \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ deux matrices symétriques définies positives telles que :

$$\begin{bmatrix} A_i^T P + P A_i + Q & P A_{di} \\ A_{di}^T P & -Q \end{bmatrix} < 0, i \in I_r.$$

En remplaçant A_i par $Z_i = (A_{i11} - A_{i12}K)$ et A_{di} par $N_i = A_{di11} - A_{di12}K$, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} Z_i^T P + P Z_i + Q & P N_i \\ N_i^T P & -Q \end{bmatrix} < 0, i \in I_r.$$

En multipliant à droite et à gauche de l'inégalité par $\begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}$ avec $S = P^{-1}$, il vient :

$$\begin{bmatrix} S Z_i^T + Z_i S + R & N_i S \\ S N_i^T & -R \end{bmatrix} < 0, i \in I_r. \quad (\text{III.17})$$

En utilisant le changement de variables $W = KS$ et $R = SQS$, (III.17) est équivalent à la contrainte (III.12) :

$$\begin{bmatrix} X_i + X_i^T + R & M_i \\ M_i^T & -R \end{bmatrix} < 0, i \in I_r,$$

ce qui conclut la preuve. ■

Le problème de l'échappement en temps fini

Contrairement au cas linéaire, un système non linéaire peut s'échapper en temps fini [72, 137]. D'après le lemme III.2, nous savons que s converge vers zéro. Il nous reste donc à prouver que $\|z_1\|$ ne peut devenir infini en temps fini, et ceci malgré le comportement de s (qui joue de ce fait le rôle d'une perturbation).

Le premier sous-système s'écrit :

$$\dot{z}_1 = \sum_{i=1}^r h_i(z_t) \begin{bmatrix} (A_{i11} - A_{i12}K)z_1(t) + (A_{di11} - A_{di12}K)z_1(t-\tau) \\ + A_{i12}s(z(t)) + A_{di12}s(z(t-\tau)) \end{bmatrix}, \quad (\text{III.18})$$

D'après le théorème A.1 de l'annexe A, il existe une fonctionnelle de Lyapunov V :

$$V(z_{1t}) = V_1(z_1(t)) + V_2(z_{1t}),$$

$$V_1(z_1(t)) = z_1(t)^T P z_1(t),$$

$$V_2(z_{1t}) = \int_{t-\tau}^t z_1(\theta)^T S z_1(\theta) d\theta,$$

qui prouve la stabilité du premier sous-système (III.18) quand $s(z(t+\theta)) = 0, \forall \theta \in [-\tau, 0]$. La dérivée de la fonctionnelle V le long des trajectoires de (III.18) s'écrit de la manière suivante :

$$\dot{V} = Z_1^T(t) M Z_1(t) + 2z_1^T(t) P \sum_{i=1}^r h_i(z_t)(A_{i12}s(z(t)) + A_{di12}s(z(t-\tau))),$$

avec M une matrice définie négative (c.f. annexe A), et $Z_1(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_1(t-\tau) \end{bmatrix}$. Nous pouvons majorer \dot{V} de la manière suivante :

$$\dot{V} \leq 2z_1^T(t)P \left(\sum_{i=1}^r h_i(z_t)(A_{i12}s(z(t)) + A_{di12}s(z(t-\tau))) \right),$$

c'est-à-dire

$$\dot{V} \leq 2 \left\| P \sum_{i=1}^r h_i(z_t) A_{i12} \right\| \|z_1(t)\| \|s(z(t))\| + 2 \left\| P \sum_{i=1}^r h_i(z_t) A_{id12} \right\| \|z_1(t)\| \|s(z(t-\tau))\|.$$

Puisque $\sum_{i=1}^r h_i(z_t) = 1$, nous pouvons trouver δ et η des constantes positives qui ne dépendent pas de l'état telles que :

$$\dot{V} \leq \delta \|z_1(t)\| \|s(z(t))\| + \eta \|z_1(t)\| \|s(z(t-\tau))\|.$$

Or il existe μ un réel positif tel que $\|z_1(t)\| \leq \mu V_1^{\frac{1}{2}}$ et, puisque $V_1 < V$, nous obtenons l'inégalité :

$$\dot{V} \leq \delta \mu V^{\frac{1}{2}} \|s(z(t))\| + \eta \mu V^{\frac{1}{2}} \|s(z(t-\tau))\|.$$

D'après le lemme III.2, la variable s converge vers zéro en temps fini. Sa norme peut donc être majorée par une constante s_o . L'évolution de \dot{V} peut donc être majorée par la fonction W qui vérifie l'équation suivante :

$$\dot{W} = (\delta + \eta) \mu s_o W^{\frac{1}{2}}.$$

En intégrant cette équation, il est aisément de montrer que W ne peut s'échapper en temps fini. Ainsi, le premier sous-système et donc le système en entier ne peut pas s'échapper à l'infini en temps fini.

Remarque III.7 (A propos du conservatisme de la loi de commande) *Afin de pouvoir réaliser la commande (III.13), nous avons émis plusieurs hypothèses qui peuvent introduire beaucoup de conservatisme.*

- *En premier lieu, nous avons considéré que le premier sous-système pouvait s'exprimer comme une somme polytopique de modèles linéaires. Nous pouvons réécrire le système*

(III.11) de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 \in co \left(\begin{bmatrix} A_{11}^i \\ A_{12}^i \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} A_{d11}^i \\ A_{d12}^i \end{bmatrix} z(t - \tau), i \in I_r \right) \\ \dot{z}_2 = f_1^R(z_t) + G_2^R(z)u(t) + p^R(z_t), \end{cases}$$

où $co(V_i)$ désigne l'ensemble convexe engendré par $\{V_1, \dots, V_r\}$, ce qui revient de ce fait à vouloir stabiliser toute une famille de modèles (dont le système (III.1) n'est qu'un élément).

De plus, de nombreux systèmes ne peuvent s'exprimer comme ceci. Ainsi le système simple :

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = z_1 z_1(t - \tau) + z_2(t), \\ \dot{z}_2(t) = u(t) + p^R(z(t)), \end{cases} \quad (\text{III.19})$$

ne peut être transformé en un système de la forme (III.11) en vérifiant l'hypothèse AIII.4.

Pourtant une surface du type

$$s(z) = z_2 + z_1 z_1(t - \tau) + \alpha z_1(t) = 0, \quad \alpha > 0,$$

et une commande par modes glissants associée permettrait la stabilisation globale du système (III.19) et ceci pour toute valeur du retard $\tau \geq 0$.

- En second lieu, le choix de la surface et de la fonctionnelle de Lyapunov associées à la stabilisation du premier sous-système correspond clairement à la stabilisation quadratique du système (III.11) et donc de (III.1). Ce choix qui permet de déterminer des critères systématiques pour la stabilisation de systèmes non linéaires à retards, peut être assez réducteur.
- Enfin, les résultats présentés jusqu'ici sont indépendants du retard, et s'avéreront donc souvent conservateurs. Des théorèmes présentés dans une section ultérieure (section III.5.3) permettent de s'affranchir de cette limite.

III.5.2 Spécification du taux de décroissance

Dans la partie précédente, nous avons considéré la stabilisation du système (III.11) indépendamment de la taille du retard. Cette partie a pour objet la spécification d'un critère de performance. Nous considérons le problème de la stabilité exponentielle du système réduit. Le

but est de déterminer le plus grand nombre positif α tel que $y_1(t) = e^{\alpha t}x_1(t)$ converge asymptotiquement vers le point d'équilibre $y_1 = 0$. Les résultats dérivent de l'étude du comportement de $y_1(t)$ en régime de glissement qui est régi par l'équation suivante :

$$\dot{y}_1 = \sum_{i=1}^r h_i(y_{1t})((A_{i11} - A_{i12}K + \alpha I_n)y_1(t) + (A_{di11} - A_{di12}K)e^{\alpha\tau}y_1(t - \tau)). \quad (\text{III.20})$$

Bien entendu ces résultats n'augurent en rien du comportement du système initial (III.1) sauf si le difféomorphisme est linéaire.

Théorème III.2 *Considérons le système (III.11) avec un retard τ constant. Soit $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice stable et $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$ une matrice symétrique définie positive qui vérifie l'équation de Lyapunov : $\Lambda^T P + P\Lambda = -I$. Si les hypothèses A III.1 à A III.5 sont vérifiées, s'il existe $S, R \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ deux matrices symétriques définies positives, une matrice $W \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$, et deux réels $\alpha > 0, \eta > 1$ tels que la contrainte suivante soit vérifiée :*

$$\begin{bmatrix} X_i^T + X_i + 2\alpha S + R & \eta M_i \\ \eta M_i^T & -R \end{bmatrix} < 0, \quad i \in I_r, \quad (\text{III.21})$$

$$\text{avec } X_i = A_{i11}S - A_{i12}W, M_i = A_{di11}S - A_{di12}W,$$

alors la commande (III.13) rend la surface (III.10) stable et globalement attractive en temps fini. Le point d'équilibre $z = 0$ du système (III.8) est exponentiellement stable (en $e^{-\alpha t}$) pour toute valeur du retard $\tau \leq \frac{\ln(\eta)}{\alpha}$.

Preuve. La preuve de la convergence sur la surface ne diffère pas de celle du théorème III.1. Par contre, lorsque le système (III.8) est en régime de glissement, il nous faut assurer la stabilité asymptotique du système (III.20). D'après le théorème (A.1) de l'annexe A, la solution nulle du système (III.20) est asymptotiquement stable si :

$$\begin{bmatrix} Z_i^T P + P Z_i + 2\alpha P + Q & \eta P N_i \\ \eta N_i^T P & -Q \end{bmatrix} < 0, \quad i \in I_r,$$

avec $\eta = e^{\alpha\tau} > 1$, ou encore, d'après la preuve du théorème III.1 :

$$\begin{bmatrix} X_i + X_i^T + 2\alpha S + R & \eta M_i \\ \eta M_i^T & -R \end{bmatrix} < 0, \quad i \in I_r. \quad (\text{III.22})$$

La preuve en découle immédiatement. ■

III.5.3 Stabilisation asymptotique dépendante du retard

Exceptées les lois de commandes qui permettent d'assurer une convergence exponentielle du système réduit, les critères que nous avons développés ne dépendent pas de la taille du retard. Ils peuvent donc être assez conservateurs surtout lorsque le retard n'est pas très grand. Dans cette partie, nous développons des lois de commande qui assurent la stabilisation du système jusqu'à une borne maximale du retard. Comme dans le chapitre précédent, cette borne sera exprimée comme la solution d'un problème d'optimisation convexe.

Théorème III.3 *Considérons le système (III.11) avec un retard τ constant. Soient $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice stable et $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$ une matrice symétrique définie positive qui vérifie l'équation de Lyapunov : $\Lambda^T P + P\Lambda = -I$. Si les hypothèses A III.1 à A III.5 sont vérifiées, s'il existe $Q_1, Q_2, S, M_1, M_2 \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ cinq matrices symétriques définies positives, une matrice $W \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$ et deux réels positifs α_1, α_2 tels que le problème d'optimisation suivant :*

$$\tau_{max}^{-1} = \min_{\alpha_1, \alpha_2, S, W, M_1, M_2, Q_1, Q_2} \tau^{-1},$$

soumis aux contraintes :

$$\begin{bmatrix} M_1 & X_i \\ X_i^T & Q_1 \end{bmatrix} > 0, i \in I_r,$$

$$\begin{bmatrix} M_2 & Y_i \\ Y_i^T & Q_2 \end{bmatrix} > 0, i \in I_r,$$

$$\alpha_1 M_1 < S,$$

$$\alpha_2 M_2 < S,$$

$$\begin{bmatrix} \tau^{-1}((X_i + Y_i) + (X_i + Y_i)^T + Q_1 + Q_2) & Y_i & Y_i \\ Y_i^T & -\frac{\alpha_1}{2}S & 0 \\ Y_i^T & 0 & -\frac{\alpha_2}{2}S \end{bmatrix} < 0, i \in I_r, \quad (\text{III.23})$$

avec $X_i = A_{i11}S - A_{i12}W, Y_i = A_{di11}S - A_{di12}W$,

a une solution, alors avec la commande (III.13), la surface III.19 est stable et globalement attractive en temps fini. Le point d'équilibre $z = 0$ du système (III.11) est asymptotiquement stable pour toute valeur du retard $\tau \leq \tau_{max}$.

Le gain K de la surface (III.10) est alors calculé par $K = WS^{-1}$.

Remarque III.8 (Cas des modèles incertains) *Comme précédemment, pour calculer la loi de commande, il n'est pas nécessaire de connaître parfaitement le retard ou les fonctions de pondération h_i . Dans ce cas, les matrices $\overline{A_{1j}}(z_t)$ and $\overline{A_{d1j}}(z_t)$ sont des matrices perturbées. Pour de tels systèmes, les valeurs des fonctions de pondération h_i ne sont pas connues. Pour déterminer une nouvelle loi de commande, nous calculons une borne de la norme de ξ et la loi de commande est modifiée de la manière suivante :*

$$\begin{cases} u(t) = -G^R(z)^{-1} \left(\xi_1(z_t) - \Lambda s + m(z_t, t) \frac{Ps}{\|Ps\|} \right), \\ m(z_t, t) = m_1 + \Psi(z_t) + m_2(z_t), \\ m_1 > 0, \end{cases} \quad (\text{III.24})$$

$$\text{avec } m_2(z_t) = \max_{i=1,r} \left(\left\| K \left\{ \sum_{j=1}^2 A_{i1j} z_j(t) + A_{di1j} z_j(t-\tau) \right\} \right\| \right).$$

La preuve du théorème s'effectue en trois étapes distinctes :

- La convergence du système en temps fini vers la surface $s(z) = 0$.
- La stabilité du système réduit.
- L'assurance de la bornitude du système entre le temps initial et le temps d'établissement du régime glissant.

Nous ne reviendrons pas sur la preuve de la convergence en temps fini vers la surface et sur le problème du non-échappement en temps fini. Seule la preuve de la stabilité du système réduit diffère.

Stabilité du système réduit

Nous utilisons une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii pour prouver la stabilité du système réduit. Une fois sur la surface, les équations $s(z) = \dot{s}(z) = 0$ sont vérifiées et le système réduit est régi par l'équation (III.16). Notons :

$$\begin{aligned} A_{TS} &= \sum_{i=1}^r h_i(z_t(\theta))(A_{i11} - A_{i12}K), A_{dTS} = \sum_{i=1}^r h_i(z_t(\theta))(A_{di11} - A_{di12}K), \\ E_{ts} &= A_{TS} + A_{dTS}, \end{aligned} \quad (\text{III.25})$$

Nous avons alors :

$$\dot{z}_1(t) = A_{TS}z_1(t) + A_{dTS}z_1(t - \tau), \quad (\text{III.26})$$

En utilisant la formule de Leibnitz, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= (A_{TS} + A_{dTS})z_1(t) - A_{dTS} \int_{t-\tau}^t \dot{z}_1(s)ds, \\ &= (A_{TS} + A_{dTS})z_1(t) - A_{dTS} \int_{t-\tau}^t A_{TS}(s)z_1(s) + A_{dTS}(s)z_1(s - \tau)ds. \end{aligned}$$

Choisissons la fonctionnelle de Lyapunov -Krasovskii $V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$ avec :

$$\begin{aligned} V_1 &= z_1^T P z_1, \\ V_2 &= \int_{t-\tau}^t \int_v^t z_1^T(s) R_1 z_1(s) ds dv, \\ V_3 &= \int_{t-\tau}^t \int_v^t z_1^T(s - \tau) R_2 z_1(s - \tau) ds dv, \\ V_4 &= \tau \int_{t-\tau}^t z_1^T(s) R_2 z_1(s) ds, \end{aligned}$$

avec $R_1, R_2, P \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$. La dérivée de V le long des trajectoires de (III.16) nous donne :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= z_1^T (E_{ts}^T P + P E_{ts}) z_1 - 2z_1^T P A_{dTS} \int_{t-\tau}^t A_{TS}(s) z_1(s) ds \\ &\quad - 2z_1^T P A_{dTS} \int_{t-\tau}^t A_{dTS}(s) z_1(s - \tau) ds, \end{aligned}$$

$$\dot{V}_2 = \tau z_1^T(t) R_1 z_1(t) - \int_{t-\tau}^t z_1^T(s) R_1 z_1(s) ds,$$

$$\dot{V}_3 + \dot{V}_4 = \tau z_1^T(t) R_2 z_1(t) - \int_{t-\tau}^t z_1^T(s - \tau) R_2 z_1(s - \tau) ds.$$

En utilisant les inégalités suivantes

$$\begin{aligned} -2z_1^T P A_{dTS} \int_{t-\tau}^t A_{TS}(s) z_1(s) ds &\leq \int_{t-\tau}^t z_1^T(t) P A_{dTS} A_{TS}(s) R_1^{-1} A_{TS}(s)^T A_{dTS} P z_1(t) ds \\ &+ \int_{t-\tau}^t z_1^T(s) R_1 z_1(s) ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2z_1^T P A_{dTS} \int_{t-\tau}^t A_{dTS}(s) z_1(s) ds &\leq \int_{t-\tau}^t z_1^T(t) P A_{dTS} A_{dTS}(s) R_2^{-1} A_{dTS}(s)^T A_{dTS} P z_1(t) ds \\ &+ \int_{t-\tau}^t z_1^T(s-\tau) R_2 z_1(s-\tau) ds, \end{aligned}$$

nous obtenons une borne supérieure de \dot{V}_1 :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= z_1^T(E_{ts}^T P + P E_{ts} \\ &+ P A_{dTS} \int_{t-\tau}^t (A_{TS}(s) R_1^{-1} A_{TS}(s)^T) A_{dTS} P ds + P A_{dTS} \int_{t-\tau}^t (A_{dTS}(s) R_2^{-1} A_{dTS}(s)^T) A_{dTS} P ds) z_1 \\ &+ \int_{t-\tau}^t z_1^T(s) R_1 z_1(s) ds + \int_{t-\tau}^t z_1^T(s-\tau) R_2 z_1(s-\tau) ds. \end{aligned}$$

Supposons qu'il existe une matrice $M_1 \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ symétrique définie positive telle que

$$(A_{i11} - A_{i12}K)SPR_1^{-1}PS(A_{i11} - A_{i12}K)^T < M_1, \quad i \in I_r, \quad (\text{III.27})$$

ou d'une manière équivalente :

$$\begin{bmatrix} M_1 & (A_{i11}S - A_{i12}W) \\ (A_{i11}S - A_{i12}W) & SR_1S \end{bmatrix} > 0, \quad i \in I_r,$$

alors puisque nous avons :

$$\begin{aligned} x^T(t) F_i S P R_1^{-1} P S F_j^T x(t) &< x^T F_i S P R_1^{-1} P S F_i^T x(t) \\ &+ x^T F_j S P R_1^{-1} P S F_j^T x(t) \end{aligned}$$

avec $F_i = (A_{i11} - A_{i12}K)$. Ainsi :

$$\begin{aligned} x^T (A_{TS}(s)R_1^{-1}A_{TS}(s)^T) x &< 2x^T \sum_{i=1}^r h_i(z_t(\theta))(A_{i11} - A_{i12}K)SPR_1^{-1}PS(A_{i11} - A_{i12}K)^T x \\ &< 2x^T M_1 x. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons l'inégalité suivante :

$$(A_{TS}(s)R_1^{-1}A_{TS}(s)^T) < 2M_1, \quad (\text{III.28})$$

et donc :

$$z_1^T P A_{dTS} \int_{t-\tau}^t (A_{TS}(s)R_1^{-1}A_{TS}(s)^T) A_{dTS}^T P z_1^T < 2\tau z_1^T P A_{dTS} M_1 A_{dTS}^T P z_1^T.$$

De la même manière, si nous supposons qu'il existe une matrice M_2 symétrique définie positive telle que :

$$\begin{bmatrix} M_2 & (A_{di11}S - A_{di12}W) \\ (A_{di11}S - A_{di12}W) & SR_2S \end{bmatrix} > 0, \quad i \in I_r,$$

alors :

$$(A_{dTS}(s)R_2^{-1}A_{dTS}(s)^T) < 2M_2,$$

et donc :

$$z_1^T P A_{dTS} \int_{t-\tau}^t (A_{dTS}(s)R_2^{-1}A_{dTS}(s)^T) A_{dTS}^T P z_1^T < 2\tau z_1^T P A_{dTS} M_2 A_{dTS}^T P z_1^T.$$

Nous pouvons alors obtenir une borne de la dérivée de V :

$$\dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3 + \dot{V}_4 \leq z_1^T \left(\begin{array}{c} E_{ts}^T P + PE_{ts} + 2\tau P A_{dTS} M_1 A_{dTS}^T P \\ + 2\tau P A_{dTS} M_2 A_{dTS}^T P + \tau(R_1 + R_2) \end{array} \right) z_1(t).$$

Ainsi, s'il existe P, M_1, M_2, R_1, R_2 cinq matrices définies positives et un réel $\tau_{max} > 0$, tels que :

$$E_{ts}^T P + P E_{ts} + 2\tau_{max} P A_{dTS} M_1 A_{dTS}^T P + 2\tau_{max} P A_{dTS} M_2 A_{dTS}^T P + \tau_{max} (R_1 + R_2) < 0, \quad (\text{III.29})$$

alors le système (III.16) est asymptotiquement stable pour $\tau < \tau_{max}$. Afin de pouvoir optimiser ce critère, nous allons transformer l'inéquation (III.29) de la manière suivante. En multipliant à droite et à gauche par $S = P^{-1}$, nous obtenons les inégalités équivalentes :

$$S E_{ts}^T + E_{ts} S + 2\tau A_{dTS} M_1 A_{dTS}^T + 2\tau A_{dTS} M_2 A_{dTS}^T + \tau (S R_1 S + S R_2 S) < 0,$$

\iff

$$S E_{ts}^T + E_{ts} S + 2\tau A_{dTS} S (P M_1 P) S A_{dTS}^T + 2\tau A_{dTS} S (P M_2 P) S A_{dTS}^T + \tau (S R_1 S + S R_2 S) < 0,$$

\iff

$$S E_{ts}^T + E_{ts} S + 2\tau A_{dTS} S (P M_1 P) S A_{dTS}^T + 2\tau A_{dTS} S (P M_2 P) S A_{dTS}^T + \tau (S R_1 S + S R_2 S) < 0, \quad (\text{III.30})$$

Si nous supposons qu'il existe 2 réels positifs α_1 et α_2 et en posant :

$$Q_1 = S R_1 S,$$

$$Q_2 = S R_2 S,$$

$$\alpha_1 M_1 < S,$$

$$\alpha_2 M_2 < S,$$

alors l'inéquation (III.30) s'écrit :

$$S E_{ts}^T + E_{ts} S + \frac{2\tau}{\alpha_1} A_{dTS} S P S A_{dTS}^T + \frac{2\tau}{\alpha_2} A_{dTS} S P S A_{dTS}^T + \tau (Q_1 + Q_2) < 0,$$

et en utilisant le lemme de Schur, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} \tau^{-1}(SE_{ts}^T + E_{ts}S + Q_1 + Q_2) & A_{dTS}S & A_{dTS}S \\ SA_{dTS}^T & -\frac{\alpha_1}{2}S & 0 \\ SA_{dTS}^T & 0 & -\frac{\alpha_2}{2}S \end{bmatrix} < 0. \quad (\text{III.31})$$

Il est ensuite aisé de montrer que la contrainte (III.23) implique l'inégalité (III.31).

III.6 Cas du retard variant dans le temps

Dans cette partie, la valeur du retard peut varier dans le temps, bien que pour simplifier notre présentation nous noterons $\tau = \tau(t)$.

Nous poserons l'hypothèse suivante sur ses variations :

A III.6 *La valeur précise du retard est inconnue, mais celle-ci est bornée par $\tau_{min} \geq 0$ et $\tau_{sup} < \infty$ de telle sorte que $\tau(t) \in [\tau_{min}; \tau_{sup}]$.*

III.6.1 Stabilisation asymptotique

Théorème III.4 *Considérons le système (III.11) avec un retard τ variant dans le temps. Soient $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice stable et $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$ une matrice symétrique définie positive qui vérifie l'équation de Lyapunov : $\Lambda^T P + P\Lambda = -I$. Si les hypothèses A III.1   A III.6 sont vérifiées, s'il existe $S \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ une matrice symétrique définie positive et une matrice $W \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$ telles que les contraintes suivantes soient vérifiées :*

$$\begin{bmatrix} X_i + X_i^T + S & M_i \\ M_i^T & -S \end{bmatrix} < 0, \quad i \in I_r, \quad (\text{III.32})$$

avec $X_i = A_{i11}S - A_{i12}W, M_i = A_{di11}S - A_{di12}W$,

alors avec la commande :

$$\begin{cases} u(t) = -G^R(z)^{-1} \left(-\Lambda s + m(z_t) \frac{Ps}{\|Ps\|} \right), \\ m(z_t) = m_1 + \sup_{w \in [\tau_{min}, \tau_{sup}]} (\Psi(z_t(w))) + \sup_{w \in [\tau_{min}, \tau_{sup}]} \|\xi(z_t(w))\|, \\ m_1 > 0, \end{cases} \quad (\text{III.33})$$

la surface (III.10) est stable et globalement attractive en temps fini. Le point d'équilibre $z = 0$ du système (III.8) est asymptotiquement stable pour toute valeur du retard $\tau(t) \in [\tau_{min}, \tau_{sup}]$.

Le gain K de la surface (III.10) est alors calculé par $K = WS^{-1}$.

Remarque III.9 D'une manière analogue à la partie précédente III.5, la connaissance du retard et des valeurs des fonctions de pondération n'est pas forcément nécessaire. Dans ce cas, la loi de commande devient :

$$\begin{cases} u(t) = -G^R(z)^{-1} \left(-\Lambda s + m(t) \frac{Ps}{\|Ps\|} \right), \\ m(z_t, t) = m_1 + \sup_{w \in [\tau_{\min}, \tau_{\sup}]} (\Psi(z_t(w))) + \sup_{w \in [\tau_{\min}, \tau_{\sup}]} (\|\xi_1(z_t(w))\| + m_2(z_t(w))), \\ m_1 > 0, \\ m_2(z_t(w)) = \max_{i=1,r} (\|K(A_{i11}z_1(t) + A_{di11}z_1(t-s) + A_{i12}z_2(t) + A_{di12}z_2(t-s))\|). \end{cases} \quad (\text{III.34})$$

La preuve s'effectue en trois temps comme pour celle du théorème III.1. Nous ne reviendrons pas sur la preuve de l'attractivité de la surface en temps fini, car celle-ci est analogue à celle développée au chapitre II, page 59. De même, la preuve de la bornitude du système (III.11) avant le temps d'arrivée de la surface reste la même. Seul le choix de la méthode pour l'étude du système réduit change : nous prenons dans ce cas précis une fonction de Razumikhin.

Stabilité du système réduit

Lemme III.4 Le système réduit (III.11) est asymptotiquement stable s'il existe $S \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ une matrice symétrique définie positive et une matrice $W \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$ telles que la contrainte (III.32) soit vérifiée.

Preuve. Choisissons une fonction de Razumikhin de la manière suivante :

$$V(z_1) = z_1^T P z_1, \quad (\text{III.35})$$

où $P \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ est une matrice symétrique définie positive. Suivant l'approche proposée par Razumikhin (voir le chapitre I), supposons qu'il existe une classe de fonctionnelles ϕ solutions de (III.11) telles que :

$$\|V(\phi(t-s))\| < q \|V(\phi(t))\|, \quad s \in [0, \tau_{\sup}], \quad q > 1. \quad (\text{III.36})$$

L'inégalité :

$$\phi(t-s)^T P \phi(t-s) < q \phi(t)^T P \phi(t), \quad (\text{III.37})$$

est alors vérifiée.

En régime de glissement, les solutions ϕ_t sont régies par l'équation suivante :

$$\dot{\phi}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\phi_t) \{ (A_{i11} - A_{i12}K)\phi(t) + (A_{di11} - A_{di12}K)\phi(t-\tau) \}. \quad (\text{III.38})$$

Pour simplifier notre démonstration, nous utilisons les notations :

$$\begin{aligned} A_{TS} &= \sum_{i=1}^r h_i(\phi_t)(A_{i11} - A_{i12}K), \\ A_{dTS} &= \sum_{i=1}^r h_i(\phi_t)(A_{di11} - A_{di12}K). \end{aligned}$$

La dérivée de V le long des solutions ϕ s'écrit donc :

$$\dot{V}(\phi(t)) = \phi(t)^T (A_{TS}^T P + PA_{TS}) \phi(t) + 2\phi(t)^T PA_{dTS} \phi(t-\tau).$$

En utilisant l'inégalité suivante :

$$2\phi(t)^T PA_{dTS} \phi(t-\tau) \leq \phi(t)^T PA_{dTS} P^{-1} A_{dTS}^T P \phi(t) + \phi(t-\tau)^T P \phi(t-\tau),$$

et la propriété (III.36), nous obtenons finalement que :

$$\dot{V}(\phi(t)) \leq \phi(t)^T (A_{TS}^T P + PA_{TS} + PA_{dTS} P^{-1} A_{dTS}^T P + qP) \phi(t).$$

Ainsi, s'il existe un réel $q > 1$ tel que :

$$\begin{bmatrix} Z_i^T P + PZ_i + qP & PN_i \\ N_i^T P & -P \end{bmatrix} < 0, \quad i \in I_r, \quad (\text{III.39})$$

pour $Z_i = A_{i11} - A_{i12}K$, $N_i = A_{di11} - A_{di12}K$, alors cela implique que

$$A_{TS}^T P + PA_{TS} + PA_{dTS} P^{-1} A_{dTS}^T P + qP,$$

est une matrice définie négative. Le système réduit (III.11) est donc asymptotiquement stable pour $\tau \geq 0$.

En multipliant à droite et à gauche par $\begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}$, avec $S = P^{-1}$, nous obtenons l'équivalence

de (III.39) avec :

$$\begin{bmatrix} SZ_i^T + Z_iS + qS & N_iS \\ SN_i^T & -S \end{bmatrix} < 0, i \in I_r. \quad (\text{III.40})$$

Finalement, en utilisant le changement de variable $W = KS$, (III.40) est équivalent à :

$$h(q) = \begin{bmatrix} X_i + X_i^T + qS & M_i \\ M_i^T & -S \end{bmatrix} < 0, i \in I_r, \quad (\text{III.41})$$

Par continuité des fonctions $q \mapsto h(q)$, si la contrainte (III.32) est satisfaite, alors il existe un réel $q > 1$ tel que (III.41) le soit aussi. La preuve en découle. ■

III.6.2 Spécification du taux de décroissance

Nous pouvons déduire des résultats précédents une technique de commande qui assure la stabilisation exponentielle du système en régime de glissement. Ces résultats dérivent, comme dans la partie III.5, de l'analyse de la stabilité de $y_1 = e^{\alpha t} z_1(t)$ lorsque le système est en régime de glissement. L'état y_1 est alors régi par :

$$\dot{y}_1 = \sum_{i=1}^r h_i(y_t)((A_{i11} - A_{i12}K + \alpha I_n)y_1(t) + (A_{di11} - A_{di12}K)e^{\alpha\tau}y_1(t - \tau(t))).$$

Bien entendu ces résultats n'augurent en rien du comportement du système initial (III.1) sauf si le difféomorphisme est linéaire.

Théorème III.5 *Considérons le système (III.11) avec un retard τ variant dans le temps. Soient $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice stable et $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$ une matrice symétrique définie positive qui vérifie l'équation de Lyapunov : $\Lambda^T P + P\Lambda = -I$. Si les hypothèses A III.1 à A III.6 sont vérifiées, s'il existe $S \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ une matrice symétrique définie positive, une matrice $W \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$ et deux réels $\alpha > 0, \eta > 1$ tels que la contrainte suivante soit vérifiée :*

$$\begin{bmatrix} X_i + X_i^T + 2\alpha S + S & \eta M_i \\ \eta M_i^T & -S \end{bmatrix} < 0, i \in I_r, \quad (\text{III.42})$$

avec $X_i = A_{i11}S - A_{i12}W, M_i = A_{di11}S - A_{di12}W$,

alors la commande (III.33) rend la surface (III.10) stable et globalement attractive en temps fini. Le point d'équilibre $x = 0$ du système (III.11) est exponentiellement stable (en $e^{-\alpha t}$) pour

toute valeur du retard $\tau \leq \frac{\ln(\eta)}{\alpha}$.

Preuve. Nous omettrons la preuve, qui procède de la même démarche que celle du théorème (III.2). ■

III.6.3 Stabilisation asymptotique dépendante du retard

Comme dans la partie III.5, mais ici dans le cas de retards non constants, il peut être intéressant de déterminer des lois de commande qui assurent la convergence asymptotique du système jusqu'à une borne maximale de variation du retard.

Théorème III.6 *Considérons le système (III.11) avec un retard τ variant dans le temps. Soient $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice stable et $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$ une matrice symétrique définie positive qui vérifie l'équation de Lyapunov : $\Lambda^T P + P \Lambda = -I$. Si les hypothèses A III.1-A III.6 sont vérifiées, s'il existe $S, M_1, M_2 \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ trois matrices symétriques définies positives, une matrice $W \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$ et α_1, α_2 deux réels positifs tels que le problème d'optimisation suivant :*

$$\tau_{\max}^{-1} = \min_{\alpha_2, \alpha_2, S, W, M_1, M_2} \tau^{-1}$$

soumis à :

$$\alpha_1 M_1 < S,$$

$$\alpha_2 M_2 < S,$$

$$\begin{bmatrix} M_1 & X_i \\ X_i^T & S \end{bmatrix} > 0, \quad i \in I_r,$$

$$\begin{bmatrix} M_2 & Y_i \\ Y_i^T & S \end{bmatrix} > 0, \quad i \in I_r,$$

$$\begin{bmatrix} \tau^{-1}((X_i + Y_i) + (X_i + Y_i)^T + 2S) & Y_i & Y_i \\ Y_i^T & -\frac{\alpha_1}{2}S & 0 \\ Y_i^T & 0 & -\frac{\alpha_2}{2}S \end{bmatrix} < 0, \quad i \in I_r, \quad (\text{III.43})$$

avec $X_i = A_{i11}S - A_{i12}W, Y_i = A_{di11}S - A_{di12}W$

ait une solution, alors la commande (III.33) rend la surface stable et globalement attractive en temps fini. Le point d'équilibre $x = 0$ du système (III.11) est asymptotiquement stable pour toute valeur du retard $\tau \leq \tau_{max}$.

Le gain K de la surface (III.10) est alors calculé par $K = WS^{-1}$.

Remarque III.10 (Cas des modèles incertains) D'une manière analogue à la partie précédente, la connaissance des valeurs des fonctions de pondération n'est pas forcément nécessaire. Nous pourrions ainsi développer des commandes par modes glissants qui ne dépendent ni du retard ni des fonctions de pondération.

La preuve s'effectue en trois temps comme pour la preuve du théorème III.1. Nous ne reviendrons pas sur la preuve de la convergence en temps fini sur la surface ainsi que sur le problème de l'échappement en temps fini. Seule la preuve de la stabilité du système réduit diffère fondamentalement.

Stabilité du système réduit

Preuve. Choisissons une fonction de Razumikhin $V(z_1) = z_1^T P z_1$, comme pour la preuve du théorème III.4, et la famille de fonctionnelles ϕ solutions de (III.11) vérifiant (III.36) et donc (III.37) et en régime de glissement (III.38). En utilisant la formule de Leibnitz, nous avons :

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(t) &= (A_{TS} + A_{dTS})\phi(t) - A_{dTS} \int_{t-\tau}^t \dot{\phi}(s)ds, \\ \dot{\phi}(t) &= A_{TS}\phi(t) - A_{dTS} \int_{t-\tau}^t A_{TS}(s)\phi(s) + A_{dTS}(s)\phi(s-\tau)ds, \end{aligned}$$

La dérivée de (III.35) le long des solutions de (III.16) et vérifiant (III.37) nous mène à :

$$\dot{V} = \phi^T(E_{ts}^T P + P E_{ts})\phi - 2\phi^T P A_{dTS} \int_{t-\tau}^t A_{TS}(s)\phi(s)ds - 2\phi^T P A_{dTS} \int_{t-\tau}^t A_{dTS}(s)\phi(s-\tau)ds. \quad (\text{III.44})$$

En utilisant les deux inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} -2\phi^T P A_{dTS} \int_{t-\tau}^t A_{TS}(s)\phi(s)ds &< \phi^T(t) P A_{dTS} \left(\int_{t-\tau}^t A_{TS}(s)P^{-1}A_{TS}^T(s)ds \right) A_{dTS}^T P \phi(t) \\ &\quad + \int_{t-\tau}^t \phi^T(s)P\phi(s)ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2\phi^T P A_{dTS} \int_{t-\tau}^t A_{dTS}(s)\phi(s-\tau)ds &< \phi^T(t) P A_{dTS} \left(\int_{t-\tau}^t A_{dTS}(s)P^{-1}A_{dTS}^T(s)ds \right) A_{dTS}^T P \phi(t) \\ &\quad + \int_{t-\tau}^t \phi^T(s-\tau)P\phi(s-\tau)ds, \end{aligned}$$

ainsi que la propriété (III.37), nous obtenons une borne de la dérivée de V :

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \phi^T(t)[(E^T P + PE + 2q\tau P \\ &\quad + PA_{dTS} \left(\int_{t-\tau}^t A_{TS}(s)P^{-1}A_{TS}^T(s)ds \right) A_{dTS}^T P \\ &\quad + PA_{dTS} \left(\int_{t-\tau}^t A_{dTS}(s)P^{-1}A_{dTS}^T(s)ds \right) A_{dTS}^T P)]\phi(t). \end{aligned}$$

Si nous supposons qu'il existe une matrice $M_1 \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ symétrique définie positive telle que

$$(A_{i11}S - A_{i12}W)P(SA_{i11}^T - W^TA_{i12}) < M_1, \quad i \in I_r,$$

avec $S = P^{-1}$, ou d'une manière équivalente :

$$\begin{bmatrix} M_1 & (A_{i11}S - A_{i12}W) \\ (A_{i11}S - A_{i12}W)^T & S \end{bmatrix} > 0, \quad i \in I_r, \quad (\text{III.45})$$

alors :

$$(A_{i11}S - A_{i12}W)P(SA_{j11}^T - W^TA_{j12}) < 2M_1.$$

Il est donc possible de calculer une borne de $\left(\int_{t-\tau}^t A_{TS}(s)P^{-1}A_{TS}^T(s)ds\right)$:

$$\int_{t-\tau}^t A_{TS}(s)P^{-1}A_{TS}^T(s)ds < 2\tau M_1,$$

et

$$\int_{t-\tau}^t \phi^T P A_{dTS} A_{dTS}^T(s) P^{-1} A_{dTS}^T(s) ds < 2\tau \phi^T P A_{dTS} M_1 A_{dTS}^T P \phi.$$

De même, si nous supposons qu'il existe une matrice $M_2 \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ symétrique définie positive telle que

$$\begin{bmatrix} M_2 & (A_{di11}S - A_{di12}W) \\ (A_{di11}S - A_{di12}W)^T & S \end{bmatrix} > 0, \quad i \in I_r, \quad (\text{III.46})$$

alors

$$\phi^T P A_{dTS} \left(\int_{t-\tau}^t A_{dTS}(s) P^{-1} A_{dTS}^T(s) ds \right) A_{dTS}^T P \phi < 2\tau \phi^T P A_{dTS} M_2 A_{dTS}^T P \phi.$$

Une borne supérieure de la dérivée de V est donc donnée par :

$$\dot{V} \leq \phi^T(t)(E_{ts}^T P + PE_{ts} + 2\tau P A_{dTS}(M_2 + M_1) A_{dTS}^T P + q\tau P)\phi(t).$$

Ainsi, s'il existe un retard τ_{\max} , un réel positif $q > 1$, trois matrices P, M_1, M_2 symétriques définies positives et une matrice W vérifiant les inégalités (III.45) (III.46) telles que

$$E^T P + PE + 2\tau_{\max} P A_{dTS}(M_2 + M_1) A_{dTS}^T P + q\tau_{\max} P. \quad (\text{III.47})$$

soit définie négative, alors la solution nulle du système réduit est asymptotiquement stable pour tout retard $\tau \leq \tau_{\max}$. Afin d'obtenir des critères exploitables, supposons qu'il existe deux réels α_1 et α_2 positifs tels que

$$\alpha_1 M_1 < S,$$

$$\alpha_2 M_2 < S,$$

alors en multipliant à droite et à gauche par S et en utilisant le lemme de Schur, nous obtenons que l'inégalité (III.47) est équivalente à :

$$\begin{bmatrix} \tau^{-1}(SE^T + ES + 2qS) & A_{dTS}S & A_{dTS}S \\ SA_{dTS}^T & -\frac{\alpha_1}{2}S & 0 \\ SA_{dTS}^T & 0 & -\frac{\alpha_2}{2}S \end{bmatrix} < 0. \quad (\text{III.48})$$

Par substitution, nous pouvons alors montrer que la contrainte (III.43) implique l'inégalité (III.48). ■

III.7 Exemples et comparaisons

Dans cette section, nous présentons des applications numériques des différents théorèmes proposés dans ce chapitre. Nous avons choisi trois exemples qui mettront en valeur les différentes possibilités de notre approche. Les deux premiers exemples représentent des systèmes linéaires à retard perturbés par des incertitudes paramétriques. Le dernier exemple considère la stabilisation d'un système non linéaire à retard. Le choix des deux premiers exemples tient au fait qu'il n'existe que très peu d'exemples de stabilisation de systèmes non linéaires. Nous avons voulu alors comparer nos résultats à ceux de la littérature concernant la commande robuste.

Exemple III.2 (système linéaire perturbé, retard constant) Soit le système suivant :

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (A_d + \Delta A_d)x(t - \tau) + Bu(t), \quad (\text{III.49})$$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.2 \\ -0.2 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\Delta A = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}, \text{ avec } |\varepsilon| < \varepsilon_{\text{sup}},$$

$$\Delta A_d = \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}, \text{ avec } |\beta| < \beta_{\text{sup}},$$

- $\Delta A, \Delta A_d$ représentent des perturbations paramétriques qui dépendent du temps.

- Le système est déjà mis sous forme régulière.

Nous nous sommes intéressés à la stabilisation exponentielle du système (III.49) en fixant $\alpha = 0.5$. Les résultats obtenus sont donnés dans la table III.1.

TAB. III.1: Récapitulatif des différents résultats pour l'exemple (III.49)

β_{sup}	ε_{sup}	τ
0	0	4.2
0	0.2	4.1
0	0.5	3.9
0	1	3.5
0.2	0	3.4
0.4	0	2.9
0.6	0	2.6
0.8	0	2.4
1	0	2.3
1	0.8	2.2
1	1	2

Les comparaisons avec [131] [116] sont difficiles à effectuer car ces résultats sont basés sur les mesures de matrice. Effectivement, sauf pour des cas simples, il est difficile de choisir le gain de la surface qui assure la stabilité exponentielle du système pour la plus grande valeur du retard possible.

Quant aux méthodes proposées par [2, 17, 36], celles-ci mènent à des critères qui dépendent de la résolution d'équations de Riccati. Cependant, celles-ci ne proposent pas de borne pour la stabilisation exponentielle de systèmes linéaires à retards.

Exemple III.3 (critère dépendant du retard) Reprenons l'exemple II.3 du chapitre II page 81,

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (A_d + \Delta A_d)x(t - \tau) + Bu(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1.4 & 0.25 & 0.8 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0.1 & -0.1 \\ -0.2 & -0.2 & 0.1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\Delta A = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}, \text{ avec } |\varepsilon| < \varepsilon_{\text{sup}}, \quad (\text{III.50})$$

$$\Delta A_d = \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}, \text{ avec } |\beta| < \beta_{\text{sup}},$$

- $\Delta A, \Delta A_d$ représentent des perturbations paramétriques qui dépendent du temps.
- Le système est déjà mis sous forme régulière.
- Le système ne peut être stabilisé indépendamment du retard.

Nous avons comparé nos résultats avec ceux de Li et De Souza [90]. Ils sont résumés dans le tableau III.2 :

TAB. III.2: Récapitulatif des différents résultats pour l'exemple (III.50)

ε_{sup}	β_{sup}	théorème III.1	méthode de [90]
0.1	0	0.25	0.29
0.2	0	0.16	0.04
0.1	0.1	0.2	0.03

Remarque III.11 Pour des perturbations d'amplitudes assez faibles, nos critères sont moins bons que ceux de [90]. Ceci s'explique par le choix des majorations qui sont effectuées pour obtenir des résultats exploitables. Effectivement, pour $\beta = 0$ par exemple, les matrices A_{di} ne dépendent pas des perturbations. La majoration proposée (Eqn. III.28) est alors très mauvaise, car les matrices A_{di} sont toutes identiques.

Exemple III.4 (système non linéaire) Considérons le modèle suivant avec les perturbations inconnues et bornées $\beta(t)$ et $f(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 + \sin(x_3(t)) & 1 \\ 1 & 1 & x_2^2(t) + 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.2 \\ -0.2 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} x(t - \tau) \\ & + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} \beta(t)x_1(t) \\ -0.5\beta(t)x_1(t - \tau) \\ f(t) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{III.51})$$

avec $0 \leq \beta(t) \leq 2$, et $f(t) \in [-1, 1]$ est une fonction bornée du temps ($f(t) = \cos(100t)$ pour la simulation).

- Le système est déjà mis sous forme régulière.
- Nous pouvons transformer le système (III.51) car le premier sous-système satisfait les conditions requises, même si le système original ne peut pas être mis sous forme polytopic à cause de la présence du terme $(x_2^2(t) + 1)x_3(t)$.
- Les différentes matrices utilisées pour transformer le système (III.51) en un système mis sous forme polytopic (III.3) sont les suivantes :

$$\begin{aligned} A_{12}^i &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, A_{d12}^i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \\ A_{d11}^1 = A_{d11}^3 &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_{d11}^2 = A_{d11}^4 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \\ A_{11}^1 &= \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, A_{11}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, A_{11}^3 = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, A_{11}^4 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Basée sur un algorithme d'optimisation LMI, la figure (III-1) montre la relation entre le choix de α et la valeur maximale du retard. Les deux cas ont été considérés : un retard constant et connu, (utilisation d'une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii) et un retard de valeur inconnue et variant dans le temps (utilisation d'une fonction de Lyapunov-Razumikhin).

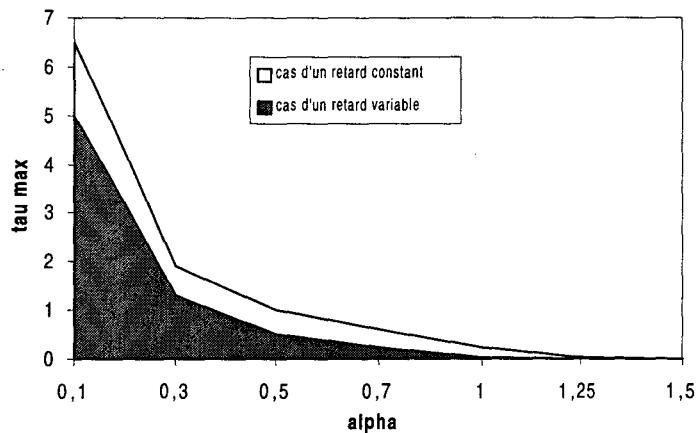


FIG. III-1: Exemple III.4 : taux de décroissance α en fonction du retard τ_{max}

Considérons le choix particulier d'un taux de décroissance $\alpha = 0.5$ et supposons que le retard est constant et connu. En appliquant la commande (III.13) du théorème III.1, nous prouvons que la solution nulle du système (III.51) est asymptotiquement stable pour $\tau \leq \tau_{max} = 0.9$. Les coefficients de la surface sont alors déterminés par :

$$K = \begin{bmatrix} 0.496 & 3.04 \end{bmatrix}. \quad (\text{III.52})$$

Les simulations de la figure (III-2) ont été obtenues en utilisant un retard $\tau = 0.8$ secondes, des conditions initiales $x(t) = [1, 1, -1]^T$ pour $t \in [-\tau, 0]$, un algorithme d'intégration d'ordre 5 et un pas d'échantillonnage de 10^{-3} secondes. Approximativement, la surface est atteinte en 0.2 secondes. Cependant, le système (III.51) est en régime de glissement seulement 0.8 secondes plus tard. Une fois en régime "autonome", l'équilibre $x = 0$ est atteint en 2.5 secondes, ce qui correspond au choix du taux de décroissance $\alpha = 0.5$. Finalement, le système est stabilisé en ≈ 3 secondes malgré un retard de $\tau = 0.8$.

Remarquons qu'il existe un phénomène de réticence d'amplitude 2.2 sur la commande(voir figure (III-3)).

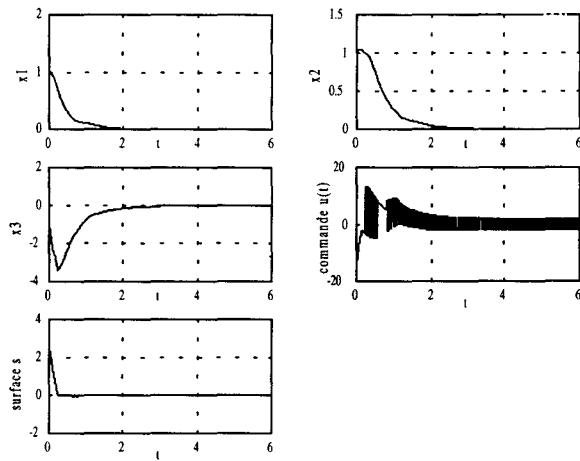


FIG. III-2: Exemple III.4 : Simulation de (III.51), (III.13) avec $m_1 = 1, \Lambda = -1, \tau = 0.8$

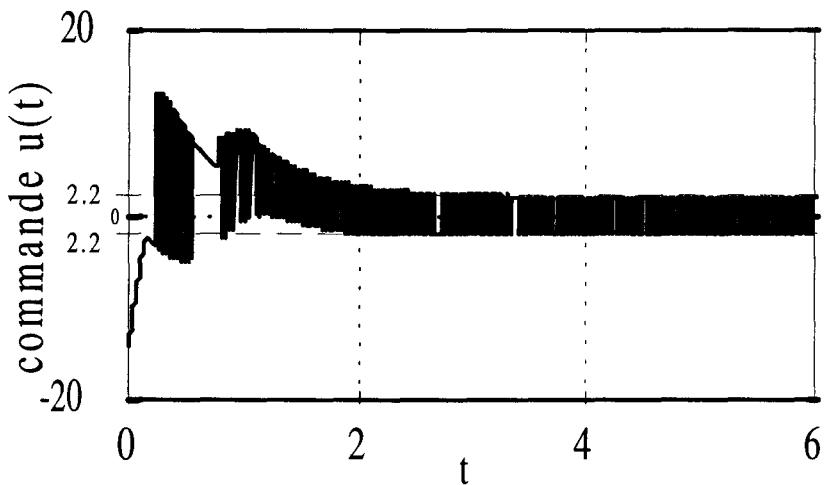


FIG. III-3: Exemple III.4 : zoom de la commande $u(t)$

Afin d'évaluer le conservatisme lié à notre commande, nous avons choisi de simuler le système (III.51) avec comme condition initiale [5, 5, 5]. La surface est alors atteinte en 0.67 secondes. Le système est en régime de glissement au temps 1.47 secondes. La figure (III-4) montre la réponse du $x_3(t)$, et la courbe exponentielle de décroissance garantie 0.5.

Le système est bien exponentiellement stable, mais pour une constante de temps beaucoup plus grande.

Remarque III.12 *Les commandes basées sur des modèles non linéaires sur anneau [102] pourraient rejeter la perturbation, mais seulement dans le cas d'un retard connu et constant.*

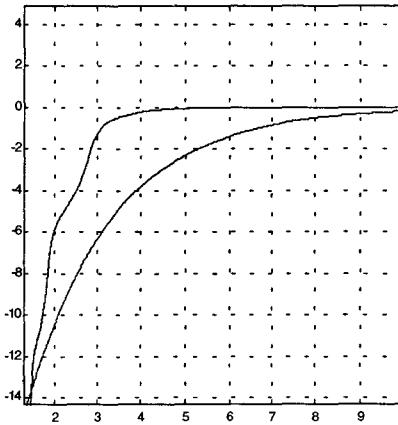


FIG. III-4: Exemple III.4 : Simulation de z_3 de (III.51), (III.13) avec $m_1 = 2$, $\Lambda = -1$, $\tau = 0.8$ et de la courbe exponentielle de taux 0.5.

III.8 Extension au cas général

Nous proposons dans cette partie de généraliser les résultats à des systèmes non linéaires, qui ne peuvent pas forcément se mettre sous une forme polytopicue.

III.8.1 Préliminaires et données du problème

Nous considérons la stabilisation du point d'équilibre $z = 0$ d'un système non linéaire à retard sur l'état par une technique de modes glissants. Nous supposerons que le système est mis sous forme régulière c'est-à-dire sous la forme (III.5) :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = f_1^R(z_{1t}, z_{2t}) \\ \dot{z}_2 = f_2^R(z_{1t}, z_{2t}) + G_2^R(z)u(t) + p^R(z_t), \end{cases} \quad (\text{III.53})$$

où $G_2^R(z)$ est une matrice non singulière qui ne dépend pas du retard, $z_1 \in \mathbb{R}^{n-m}$, $z_2 \in \mathbb{R}^m$, u représente la commande.

Les hypothèses sur le système (III.53) sont les suivantes :

A III.7 *Le premier sous-système s'écrit :*

$$\dot{z}_1 = f_1^R(z_{1t}, z_{2t}) = f_1^R(z_{1t}, z_2(t), z_2(t-\tau)),$$

On se limite donc ici à des retards ponctuels. Une extension devrait être possible sur la base de [58].

A III.8 Il existe deux réels positifs L_1 et L_2 tels que

$$\left\| f_1^R(z_{1t}, x, z) - f_1^R(z_{1t}, x', z') \right\| < L_1 \|x - x'\| + L_2 \|z - z'\|.$$

A III.9 Il existe une fonctionnelle $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que la solution $z_1 = 0$ du système :

$$\dot{z}_1(t) = f_1^R(z_{1t}, \varphi(z_{1t}), \varphi(z_{1t-\tau})) \quad (\text{III.54})$$

soit asymptotiquement stable. Associé au système (III.54), il existe une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii :

$$V_2 = \omega(z_1) + \int_{-\tau}^0 l(z_t(\theta)) d\theta,$$

telle que la dérivée de V le long des trajectoires de (III.54) soit définie négative.

A III.10 Il existe des réels strictement positifs $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tels que

$$\begin{cases} \alpha_2 \|z_1\|^\gamma \leq \omega(z_1) \leq \alpha_1 \|z_1\|^\gamma, \gamma > 1 \\ \left\| \frac{d\omega(z_1)}{dz_1} \right\| \|z_1\| < \alpha_3 \omega(z_1), \end{cases}$$

A III.11 La perturbation vérifie une condition de bornitude, c'est-à-dire :

$$\|p^R(z_t)\| < p.$$

Remarque III.13 L'hypothèse III.10 est souvent appelée condition de croissance et est toujours vérifiée si w est une fonction polynomiale homogène de z_1 (voir [100]).

Remarque III.14 Si le système considéré est linéaire, alors toutes ces hypothèses sont vérifiées.

Le système en entier peut donc s'écrire :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = f_1^R(z_{1t}, \varphi(z_{1t}), \varphi(z_{1t-\tau})) + f_1^R(z_{1t}, z_{2t}) - f_1^R(z_{1t}, \varphi(z_{1t}), \varphi(z_{1t-\tau})) \\ \dot{z}_2 = f_2^R(z_{1t}, z_{2t}) + G_2^R(z)u(t) + p^R(z_t), \end{cases} \quad (\text{III.55})$$

Afin de construire une commande à structure variable, choisissons une surface :

$$s(z) = z_2 - \varphi(z_{1t}) = 0, \quad (\text{III.56})$$

alors sa dérivée le long des trajectoires de (III.55) s'écrit :

$$\dot{s}(z) = f_2^R(z_{1t}, z_{2t}) + G_2^R(z)u(t) + p^R(z_t) - \dot{\varphi}(z_{1t}).$$

Nous choisissons une commande de la forme :

$$u(t) = -G_2^R(z)^{-1}(f_2^R(z_{1t}, z_{2t}) - \dot{\varphi}(z_{1t}) + m\text{sign}(s)), \quad (\text{III.57})$$

avec

$$m = p + \varepsilon, \varepsilon > 0$$

III.8.2 Stabilisation asymptotique

Le théorème qui suit propose une commande par modes glissants qui assure la stabilisation asymptotique robuste du système (III.53) pour toute valeur du retard $\tau > 0$.

Théorème III.7 *Soit le système (III.53) avec un retard constant $\tau > 0$. Si les hypothèses AIII.7 à AIII.11 sont vérifiées alors avec la commande (III.57), la surface $s(z) = 0$ (III.56) est attractive en temps fini et le point d'équilibre $z = 0$ du système (III.53) est globalement asymptotiquement stable pour toute valeur du retard $\tau > 0$.*

Preuve. La preuve s'effectue en deux parties.

Premièrement, nous montrons que la surface est attractive en temps fini. Ainsi, sur la surface $s = 0$ (Eqn. III.56), le système est globalement asymptotiquement stable. Ensuite, nous nous assurons que le système ne peut pas s'échapper en temps fini.

Montrons tout d'abord que la surface est attractive :

Soit la fonction suivante :

$$V_1 = \frac{1}{2}s^T s,$$

Sa dérivée le long des trajectoires de (III.55) s'écrit ainsi :

$$\dot{V}_1 = s^T p^R(z_t) - ms^T \text{sign}(s).$$

Nous pouvons alors majorer \dot{V}_1 par

$$\dot{V}_1 < -\varepsilon s^T \text{sign}(s).$$

Cette dernière inégalité suffit à prouver la convergence en temps fini du système (III.5) sur la surface (III.56) [143].

Sur la surface $s(z) = 0$, le système réduit est régi par l'équation (III.55) et le point d'équilibre $z_1 = 0$ est asymptotiquement stable. Cependant, entre le temps initial et le temps d'établissement du régime glissant, le système peut s'échapper en temps fini. Pour prouver qu'il n'en est rien, nous choisissons une fonctionnelle de Lyapunov suivante :

$$V = V_2.$$

Sa dérivée le long des trajectoires de (III.55) s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \frac{d\omega(z_1)}{dz_1} \left\{ \begin{array}{l} f_1^R(z_{1t}, \varphi(z_{1t}), \varphi(z_{1t-\tau})) \\ + f_1^R(z_{1t}, z_2(t), z_2(t-\tau)) - f_1^R(z_{1t}, \varphi(z_{1t}), \varphi(z_{1t-\tau})) \\ + l(z(t)) - l(z(t-\tau)), \end{array} \right\} \\ \dot{V}_2 &= K(z_{1t}) + \frac{d\omega(z_1)}{dz_1} \{ f_1^R(z_{1t}, z_2(t), z_2(t-\tau)) - f_1^R(z_{1t}, \varphi(z_{1t}), \varphi(z_{1t-\tau})) \}, \end{aligned}$$

avec $K(z_{1t}) = \frac{d\omega(z_1)}{dz_1} \{ f_1^R(z_{1t}, \varphi(z_{1t}), \varphi(z_{1t-\tau})) \} + l(z(t)) - l(z(t-\tau))$. Finalement nous avons

$$\dot{V}_2 < \frac{d\omega(z_1)}{dz_1} \{ f_1^R(z_{1t}, z_2(t), z_2(t-\tau)) - f_1^R(z_{1t}, \varphi(z_{1t}), \varphi(z_{1t-\tau})) \},$$

Or comme l'hypothèse AIII.8 est vérifiée, nous avons

$$\| f_1^R(z_{1t}, z_2(t), z_2(t-\tau)) - f_1^R(z_{1t}, \varphi(z_{1t}), \varphi(z_{1t-\tau})) \| < L_1 \|s\| + L_2 \|s(t-\tau)\|.$$

Nous obtenons que :

$$\dot{V}_2 < \left\| \frac{d\omega(z_1)}{dz_1} \right\| (L_1 \|s\| + L_2 \|s(t-\tau)\|),$$

Suivant la méthode proposée par [100], si nous supposons que l'hypothèse AIII.10 est vérifiée, alors il vient que :

$$\dot{V}_2 < \left(\frac{\alpha_1 \alpha_3}{\alpha_2^{\frac{1}{\gamma}}} \right) \omega(z_1)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} (L_1 \|s\| + L_2 \|s(t-\tau)\|).$$

Finalement, nous obtenons que :

$$\dot{V}_2 < \left(\frac{\alpha_1 \alpha_3}{\alpha_2^{\frac{1}{\gamma}}} \right) V_2^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} (L_1 \|s\| + L_2 \|s(t-\tau)\|).$$

Comme s converge en temps fini vers zéro, alors il existe une constante s_0 qui dépend des conditions initiales, telle que

$$\|s_t\| \leq s_0.$$

Nous avons alors

$$\dot{V}_2 < \beta V_2^{\frac{\gamma-1}{\gamma}},$$

avec $\beta = s_0 \left(\frac{\alpha_1 \alpha_3}{\alpha_2^{\frac{1}{\gamma}}} \right) (L_1 + L_2).$

Cette dernière inégalité nous assure que V_2 ne peut pas s'échapper en temps fini, ce qui conclut la preuve. ■

Remarque III.15 *Comme la surface et la commande équivalente dépendent du retard, il nous est nécessaire de connaître sa valeur pour planter la commande (III.57).*

III.8.3 Exemple

Exemple III.5 Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2(t) + z_1(t - \tau) \\ \dot{z}_2(t) = z_1(t)z_2(t) + z_1^2(t - \tau) + \frac{1}{z_1^2 + 1}z_3(t) \\ \dot{z}_3(t) = z_1(t - \tau) + z_1(t)z_2(t) + u(t) + p(t), \\ \text{avec } p(t) = \sin(10t). \end{cases} \quad (\text{III.58})$$

Soit la surface

$$s(z_{1t}, z_{2t}, z_{3t}) = z_3(t) + (z_1^2 + 1)(z_1(t)z_2(t) + z_1^2(t - \tau) + k_1 z_1(t) + k_2 z_2(t)) = 0,$$

avec k_1 et k_2 deux réels à déterminer. Sur cette surface, le système réduit est régi par :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2(t) + z_1(t - \tau), \\ \dot{z}_2(t) = -k_1 z_1(t) - k_2 z_2(t). \end{cases}$$

Si nous choisissons comme valeurs pour k_1 et k_2

$$k_1 = 5, \quad k_2 = 6.$$

alors en choisissant une fonctionnelle de Lyapunov V_2 quadratique, il est aisément de montrer que le système réduit est asymptotiquement stable pour toute valeur du retard τ . Ainsi, puisque les hypothèses AIII.7-AIII.11 sont vérifiées, par le théorème III.7, la commande (III.57) assure la stabilisation asymptotique globale du système (III.58). Pour la simulation de la figure III-5 et III-6, nous avons choisi des conditions initiales constantes égales à $z(t) = [1; -1; -1]$, un retard τ de 1 seconde, un gain $m = 3$ et un algorithme d'intégration d'ordre 5 avec un pas d'échantillonnage de 0.001 seconde.

Remarque III.16 Lorsque nous supposons que le retard est mal connu, en simulation, le système (III.58) reste asymptotiquement stable pour toute valeur du retard implanté compris entre $[0; 2]$. Cependant, cela mériterait une plus ample investigation.

Remarque III.17 La technique de stabilisation que nous avons proposée est une stabilisation dépendante du retard, et repose essentiellement sur l'existence d'une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii pour le système en régime glissant. D'une manière analogue, nous pourrions utiliser une fonction de Lyapunov-Razumikhin, et proposer un résultat similaire.

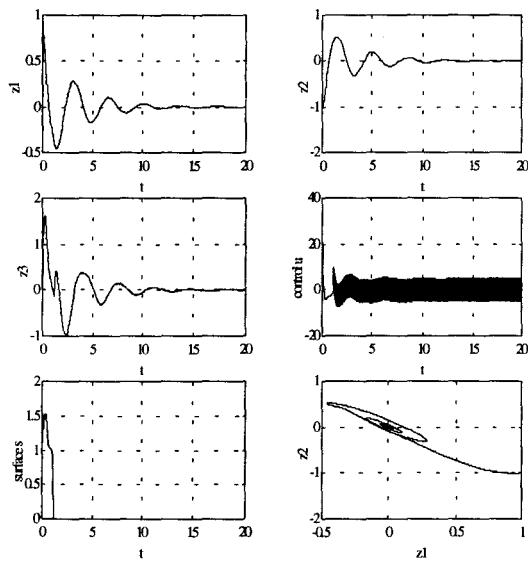


FIG. III-5: Exemple III.5 : simulation de (III.58)(III.57) avec un retard de valeur constante égale à 1 seconde

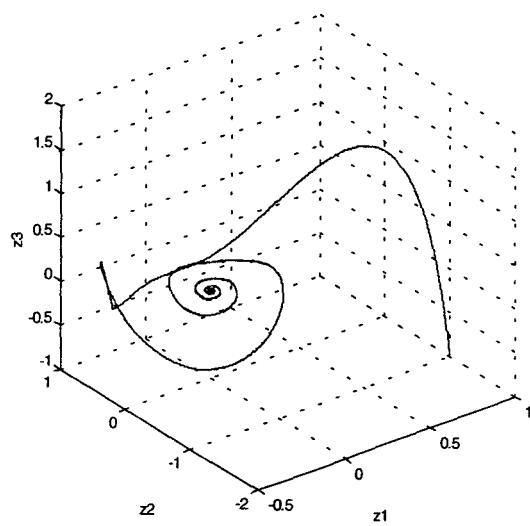


FIG. III-6: Exemple III.5 : portrait de phase.

III.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une technique systématique pour construire des lois de commande par modes glissants pour une classe de systèmes non linéaires à retards. Plusieurs cas ont été étudiés suivant que le retard est constant (partie III.5) ou variant dans le temps (partie III.6). Pour chacun de ces deux cas, trois possibilités de commandes discontinues ont été présentées : stabilisation indépendante du retard, stabilisation exponentielle du système réduit, et stabilisation dépendante du retard. Ces commandes sont relativement faciles à implanter, car les calculs des différents paramètres sont effectués grâce à un algorithme d'optimisation convexe. À travers trois exemples, nous avons montré que ces commandes permettaient d'améliorer sensiblement la robustesse du système à retard vis-à-vis de perturbations paramétriques ou exogènes, et vis-à-vis du retard. Cependant, pour pouvoir déterminer des critères systématiques et exploitables, un certain nombre d'approximations ont été effectuées, qui introduisent de ce fait un conservatisme (voir remarque III.7). C'est pourquoi, nous proposons une technique de commande par modes glissants qui assure la stabilisation du point d'équilibre $z = 0$ pour des systèmes non linéaires plus généraux (partie III.8).

Les perspectives inspirées par ce chapitre sont les suivantes :

Réduire ce problème par l'utilisation d'autres types de surfaces, comme des surfaces non linéaires et dépendantes du retard $s(z) = z_2(t) + \sum_{i=1}^r h_i(z_t)z_1(t)$.

Développer de nouveaux critères de stabilité du système réduit, en choisissant des fonctionnelles de Lyapunov qui dépendent des fonctions de pondération h_i .

D'une manière plus générale, tous les résultats proposés dans ce chapitre reposent sur la transformation du système original en une forme plus adaptée à la synthèse d'une commande par modes glissants. Cependant, pour ce faire, il est nécessaire que le champ de commande ne dépende pas des états retardés. Effectivement, dans ce cas, nous ne pouvons pas utiliser le théorème de Frobénius pour calculer le difféomorphisme (voir Annexe B). Récemment, des outils de géométrie différentielle comme la dérivée de Lie retardée [50, 51] ont permis la linéarisation entrée-sortie de systèmes non-linéaires à retards. L'idée serait de prouver qu'il existe (ou non) un théorème analogue au théorème d'intégrabilité pour une distribution involutive. Ainsi nous pourrions alors généraliser notre étude au cas d'un champ de vecteur fonctionnel.

Chapitre IV

Effet d'un retard pur sur un système commandé par modes glissants

Dans les deux chapitres précédents, nous avons considéré la commande par modes glissants des systèmes à retards sur l'état. La stabilisation par commande discontinue nous a permis d'améliorer la robustesse vis-à-vis de perturbations ou d'incertitudes sur la valeur du retard. Par contre, des exemples simples montrent que la présence d'un retard sur l'entrée ne permet plus d'assurer l'attractivité de la surface choisie compromettant ainsi la stabilisation du système original. Le but de ce chapitre est d'estimer l'évolution des comportements d'un système dynamique commandé par modes glissants et soumis à un retard sur l'entrée. Ce chapitre est divisé en deux parties. La première est consacrée aux systèmes linéaires, tandis que la seconde s'intéresse aux systèmes non linéaires mono-entrée.

IV.1 Cas des systèmes linéaires

IV.1.1 Modèle considéré et position du problème

Nous considérerons dans cette partie le cas d'un modèle linéaire, qui a été mis sous une forme régulière.

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = \sum_{i=1}^2 A_{1i} z_i(t), \\ \dot{z}_2(t) = \sum_{i=1}^2 A_{2i} z_i(t) + B_2 v(t). \end{cases} \quad (\text{IV.1})$$

où $z_1(t) \in \mathbb{R}^{n-m}$, $z_2(t) \in \mathbb{R}^m$, $A_{11} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times m}$, $A_{21} \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$, $A_{22} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ sont des matrices constantes, $v(t) \in \mathbb{R}^m$ représente la commande.

Les hypothèses sur le système (IV.1) sont les suivantes :

A IV.1 *La matrice B_2 est carrée inversible.*

A IV.2 *(A_{11}, A_{12}) est une paire de matrices commandable.*

Remarque IV.1 [143] L'hypothèse classique AIV.2 nous permet de déterminer une surface de glissement qui assurera la stabilisation du système réduit (en $z_1(t)$) et donc du système en entier.

Afin de construire une commande par modes glissants, nous considérons la surface suivante :

$$s(z) = z_2 + Kz_1 = 0,$$

le gain K étant déterminé de façon à ce que le système réduit :

$$\dot{z}_1 = (A_{11} - A_{12}K)z_1(t),$$

soit asymptotiquement stable.

Le calcul de la dérivée de s nous donne :

$$\begin{aligned}\dot{s} &= \sum_{i=1}^2 (A_{2i} + KA_{1i})z_i(t) + B_2v(t), \\ \dot{s} &= B_2v_{eq} + B_2v(t),\end{aligned}$$

avec

$$v_{eq} = B_2^{-1} \sum_{i=1}^2 (A_{2i} + KA_{1i})z_i(t). \quad (\text{IV.2})$$

En appliquant la méthode proposée par Utkin [132], nous choisissons une commande par modes glissants de la manière suivante :

$$v(t) = -mB_2^{-1} \frac{Ps(t)}{\|Ps(t)\|} - v_{eq}(t), \quad (\text{IV.3})$$

et nous avons alors :

$$\dot{s} = -m \frac{Ps(t)}{\|Ps(t)\|}.$$

Remarque IV.2 La fonction $V = s^T Ps$ est une fonction adéquate pour prouver que la commande rend la surface globalement asymptotiquement stable et attractive en temps fini.

Cependant une question pratique se pose pour la réalisation d'une telle commande. Quels sont les changements de comportements du système (IV.1)(IV.3) lorsque la sortie ou la commande est retardée ? Par exemple, on peut considérer que les capteurs ne peuvent donner une information instantanée, c'est-à-dire, d'une manière générale :

$$y(t) = h(z(t - \tau)), \quad (\text{IV.4})$$

où $\tau > 0$ est un retard qui n'est pas forcément constant.

Dans ce chapitre, nous supposerons que l'état retardé

$$z(t - \tau),$$

est reconstructible par l'intermédiaire de capteurs, d'une approximation numérique ou *via* un observateur (voir [118] dans le cas non retardé, ou [51] dans le cas retardé).

La commande injectée au système (IV.3) est donc :

$$v(t) = -mB_2^{-1}\left(\frac{Ps(t - \tau)}{\|Ps(t - \tau)\|}\right) - v_{eq}(t - \tau), \quad (\text{IV.5})$$

avec v_{eq} défini en (IV.2). Le calcul de la dérivée de s devient alors :

$$\dot{s} = \Delta(t) - m \frac{Ps(t - \tau)}{\|Ps(t - \tau)\|},$$

$$\text{avec } \Delta(t) = \sum_{i=1}^2 (A_{2i} + KA_{1i})(z_i(t) - z_i(t - \tau)).$$

Pour montrer les effets du retard sur le changement de comportement du système en régime de glissement, choisissons l'exemple simple ci-dessous :

Exemple IV.1 Soit le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t), \\ y(t) = z(t - \tau) \end{array} \right. \quad (\text{IV.6})$$

Un placement de pôles du système réduit en -2 et -1 nous permet de déterminer la surface :

$$s(z) = z_2(t) + [0 \ 3] z_1(t) = 0.$$

Si nous choisissons pour la simulation un retard de 0.2 , nous obtenons les courbes décrites Fig. (IV-1). Le système (IV.6) ne converge pas vers la surface $s(z) = 0$ mais reste dans un voisinage de celui-ci. De même, l'état ne converge pas vers $z = 0$, mais oscille autour de l'origine.

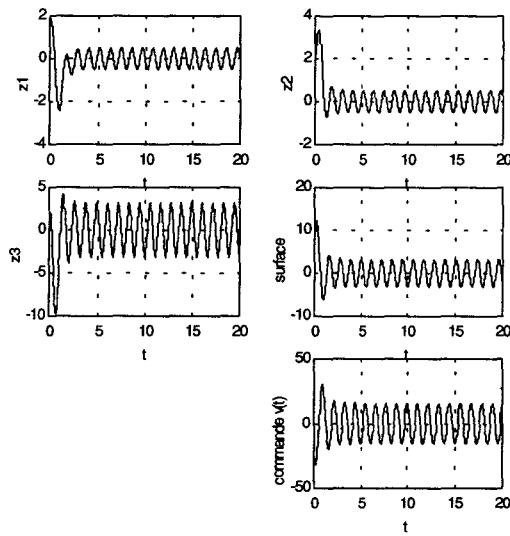


FIG. IV-1: Exemple (IV.1) : Simulation du système (IV.6) (IV.5) avec $\tau = 0.2$, $m = 10$.

Le but de cette partie est d'évaluer les conditions sous lesquelles un système commandé par (IV.1) (IV.5) admet un domaine attracteur autour de $s(z) = 0$, c'est-à-dire d'estimer le domaine attracteur et le cas échéant le domaine des conditions initiales (c.f. figure IV-2).

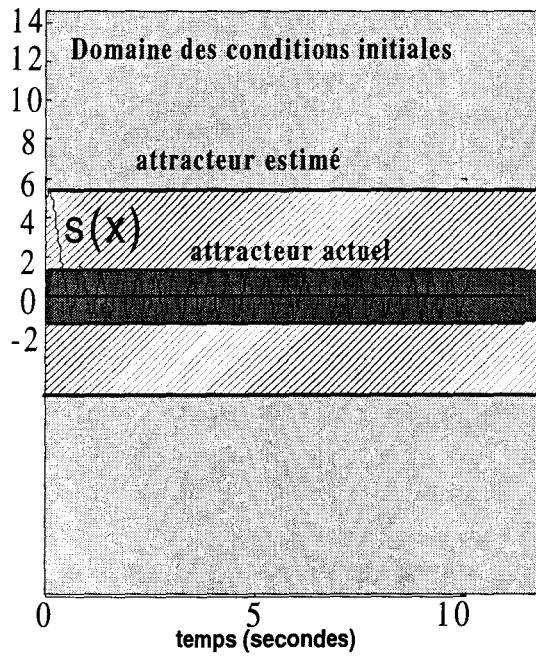


FIG. IV-2: Estimation du domaine des conditions initiales et du domaine attracteur

IV.1.2 Estimation du domaine attracteur

Théorème IV.1 Considérons le système (IV.1) commandé par (IV.5), avec un retard $\tau > 0$ constant. Si les hypothèses AIV.1-AIV.2 sont vérifiées, si la condition suivante :

$$\left(-1 + \tau \frac{\varpi^2}{2\beta} \right) < 0, \quad (\text{IV.7})$$

avec $\varpi = 2\sqrt{\lambda_{\min}(P)}(m-L\tau)$, $\beta = 2\|P\|(L^2\tau^3+mL\tau^2)+2m\|P\|L\tau^2+2m^2\|P\|\tau$ est satisfaite, alors pour des conditions initiales appartenant à D_{ini} défini par :

$$D_{ini} = \{z(t) \in R^n, \left| s(z)^T Ps(z) - \frac{\beta^2}{\varpi^2} \right| < \frac{(1-\tau)\left(\frac{\varpi^2}{2\beta}\right)}{\frac{1}{2}\tau\frac{\varpi^4}{\beta^3}}\}, \quad (\text{IV.8})$$

le système (IV.1) commandé par (IV.5) converge vers le domaine attracteur D_∞ :

$$D_\infty = \{z(t) \in R^n, s(z)^T Ps(z) < \frac{(2\|P\|(L^2\tau^3+mL\tau^2)+2m\|P\|L\tau^2+2m^2\|P\|\tau)^2}{4\lambda_{\min}(P)(m-L\tau)^2}\},$$

Preuve. Considérons la fonction suivante :

$$V_1(t) = s^T P s, \quad (\text{IV.9})$$

La dérivation de (IV.9) le long des trajectoires de (IV.1) (IV.5) nous donne :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= 2s^T P \left(\sum_{i=1}^2 (A_{2i} + K A_{1i})(z_i(t) - z_i(t-\tau)) - m \frac{Ps(t-\tau)}{\|Ps(t-\tau)\|} \right), \\ \dot{V}_1 &= 2s^T P \left[\Delta(t) - m \frac{Ps(t-\tau)}{\|Ps(t-\tau)\|} \right], \end{aligned}$$

or, d'après la formule de Leibnitz, nous avons l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} s(t) &= s(t-\tau) + \int_{t-\tau}^t \dot{s}(w) dw \\ &= s(t-\tau) + \int_{t-\tau}^t \left(\Delta(w) - m \frac{Ps(w-\tau)}{\|Ps(w-\tau)\|} \right) dw. \end{aligned}$$

En remplaçant l'expression de $s(t)$ dans celle de $\dot{V}_1(t)$, nous obtenons l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= 2s^T(t-\tau)P(\Delta(t) - m \frac{Ps(t-\tau)}{\|Ps(t-\tau)\|}) \\ &\quad + 2 \left(\int_{t-\tau}^t \left(\Delta(w) - m \frac{Ps(w-\tau)}{\|Ps(w-\tau)\|} \right) dw \right)^T P \left[\Delta(t) - m \frac{Ps(t-\tau)}{\|Ps(t-\tau)\|} \right] \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= 2s^T(t-\tau)P\Delta(t) - 2m \frac{s^T(t-\tau)P^2 s(t-\tau)}{\|Ps(t-\tau)\|} \\ &\quad + 2 \left(\int_{t-\tau}^t \left(\Delta(w) - m \frac{Ps(w-\tau)}{\|Ps(w-\tau)\|} \right) dw \right)^T P\Delta(t) \\ &\quad - 2m \left(\int_{t-\tau}^t \left(\Delta(w) - m \frac{Ps(w-\tau)}{\|Ps(w-\tau)\|} \right) dw \right)^T P \frac{Ps(t-\tau)}{\|Ps(t-\tau)\|}. \end{aligned}$$

La fonction v_{eq} (IV.2) est localement lipschitzienne par rapport au temps, alors il existe une

constante $L > 0$ telle que la fonction $\Delta(t)$ vérifie :

$$\|\Delta(t)\| < L\tau.$$

Grâce à cette inégalité, nous pouvons alors majorer l'expression suivante :

$$\left(\int_{t-\tau}^t \left(\Delta(w) - m \frac{Ps(w-\tau)}{\|Ps(w-\tau)\|} \right) dw \right)^T P \Delta(t) \leq \|P\| (L^2\tau^3 + mL\tau^2),$$

et de la même manière :

$$\begin{aligned} & -m \left(\int_{t-\tau}^t \left(\Delta(w) - m \frac{Ps(w-\tau)}{\|Ps(w-\tau)\|} \right) dw \right)^T P \frac{Ps(t-\tau)}{\|Ps(t-\tau)\|} \\ & \leq m \|P\| L\tau^2 + m^2 \|P\| \tau, \end{aligned}$$

Ainsi, il nous est possible de déterminer une majoration de la fonction \dot{V}_1 de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 & \leq 2s^T(t-\tau)P\Delta(t) - 2m \frac{s^T(t-\tau)P^2s(t-\tau)}{\|Ps(t-\tau)\|} \\ & \quad + 2\|P\| (L^2\tau^3 + mL\tau^2) + 2m \|P\| L\tau^2 + 2m^2 \|P\| \tau, \end{aligned}$$

ou encore :

$$\dot{V}_1 \leq -\varpi V_1^{\frac{1}{2}}(t-\tau) + \beta,$$

avec $\varpi = 2\sqrt{\lambda_{\min}(P)}(m - L\tau)$, $\beta = 2\|P\| (L^2\tau^3 + mL\tau^2) + 2m \|P\| L\tau^2 + 2m^2 \|P\| \tau$.

Notons

$$y = V_1 - \frac{\beta^2}{\varpi^2},$$

alors :

$$\dot{y}(t) \leq -\beta \left(\frac{\omega^2}{\beta^2} y(t-\tau) + 1 \right)^{\frac{1}{2}} + \beta,$$

$$\dot{y}(t) \leq -\beta \frac{\frac{\omega^2}{\beta^2} y(t-\tau)}{\left(1 + \left(\frac{\omega^2}{\beta^2} y(t-\tau) + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right)}.$$

Or nous avons l'égalité suivante :

$$\frac{y}{1 + (1+y)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \frac{y^2}{(1 + (1+y)^{\frac{1}{2}})^2}$$

il vient alors :

$$\dot{y}(t) \leq -\frac{\omega^2}{2\beta} y(t-\tau) + \frac{1}{2} \frac{\omega^4}{\beta^3} \frac{y^2(t-\tau)}{\left(1 + \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\beta^2} y(t-\tau)} \right)^2} \quad (\text{IV.10})$$

Nous pouvons réécrire l'inéquation (IV.10) de la manière suivante en utilisant la formule de Leibniz :

$$y(t-\tau) = y(t) - \int_{t-\tau}^t \dot{y}(\theta) d\theta.$$

Nous avons alors :

$$\dot{y}(t) \leq -\frac{\omega^2}{2\beta} y(t) + \frac{\omega^2}{2\beta} \int_{t-\tau}^t \dot{y}(\theta) d\theta,$$

Or

$$\int_{t-\tau}^t \dot{y}(\theta) d\theta \leq -\frac{\omega^2}{2\beta} \int_{t-\tau}^t y(\theta-\tau) d\theta + \frac{1}{2} \frac{\omega^4}{\beta^3} \int_{t-\tau}^t y^2(\theta-\tau),$$

et donc nous obtenons la majoration suivante :

$$\dot{y}(t) \leq -\frac{\varpi^2}{2\beta}y(t) - \left(\frac{\varpi^2}{2\beta}\right)^2 \int_{t-\tau}^t y(\theta - \tau)d\theta + \frac{1}{4}\frac{\varpi^6}{\beta^4} \int_{t-\tau}^t y^2(\theta - \tau).$$

Par application du théorème de Razumikhin, si nous réduisons l'étude à la classe de fonctions y telles que :

$$|y(t+s)| < q |y(t)|, \quad \forall s \in [-\tau, 0],$$

avec $q > 1$, alors nous obtenons l'inégalité suivante :

$$|\dot{y}(t)| \leq \left(-\frac{\varpi^2}{2\beta} + \tau q \left(\frac{\varpi^2}{2\beta}\right)^2\right) |y(t)| + \frac{1}{4}\tau q^2 \frac{\varpi^6}{\beta^4} y^2(t). \quad (\text{IV.11})$$

Si l'inégalité

$$\left(-1 + \tau \frac{\varpi^2}{2\beta}\right) < 0,$$

est satisfaite alors il existe un $q_1 > 1$ tel que $\left(-1 + \tau q_1 \frac{\varpi^2}{2\beta}\right) < 0$, ce qui implique la stabilité asymptotique locale du point d'équilibre y_{e1} . De la même manière, pour $q > 1$, les ensembles définis par

$$D_{ini}(q) = \{z(t) \in R^n, \left|s(z)^T Ps(z) - \frac{\beta^2}{\varpi^2}\right| < \frac{(1 - \tau q \left(\frac{\varpi^2}{2\beta}\right))}{\frac{1}{2}\tau q^2 \frac{\varpi^4}{\beta^3}}\},$$

sont des ensembles emboîtés décroissants. Si pour des conditions initiales (IV.8), les trajectoires du système converge vers le domaine attracteur défini par D_∞ alors, il existe un réel $q_1 > 1$, tels que l'inéquation (IV.11) soit vérifiée. ■

Ce premier théorème nous a permis d'établir des conditions locales, pour lesquelles les trajectoires d'un système linéaire commandé par modes glissants et soumis à un retard de mesure ou de commande, convergent vers un domaine d'attraction situé autour de la surface de glissement. Le prochain théorème propose une estimation du domaine d'attraction pour le premier sous-système en z_1 .

Théorème IV.2 Soit le système (IV.1) commandé par (IV.5) avec un retard τ , si les hypothèses AIV.1-AIV.2 sont satisfaites, si la condition (IV.7) est vérifiée et s'il existe une solution définie positive Q à

$$(A_{11} - A_{12}K)^T Q + Q(A_{11} - A_{12}K) + \alpha Q A_{12} P^{-1} A_{12}^T Q = -Q, \quad (\text{IV.12})$$

avec $\alpha > 0$, alors le premier sous-système converge vers un domaine attracteur défini par :

$$D_{\infty r} = \{z_1(t) \in \mathbb{R}^{n-m}, z_1 Q z_1 < \alpha^{-1} \frac{\beta^2}{\varpi^2}\},$$

pour des conditions initiales appartenant à D_{ini} .

Preuve. Choisissons la fonction suivante :

$$V_2 = z_1^T Q z_1,$$

La dérivée de V_2 le long des trajectoires de (IV.1) (IV.5) s'écrit :

$$\dot{V}_2 = z_1^T (A_{11}^T Q + Q A_{11}) z_1(t) + 2z_1^T Q A_{12} s(t),$$

en utilisant l'inégalité suivante :

$$2z_1^T Q A_{12} s(t) \leq \alpha z_1(t) Q A_{12} P^{-1} A_{12}^T Q z_1(t) + \alpha^{-1} s^T(t) P s(t),$$

nous obtenons une borne sur la dérivée de V_2 :

$$\dot{V}_2 \leq z_1^T (A_{11}^T Q + Q A_{11} + Q A_{12} P^{-1} A_{12}^T Q) z_1(t) + \alpha^{-1} V_1.$$

avec $V_1 = s^T(t) P s(t)$. Ainsi en utilisant le théorème IV.1, nous obtenons la majoration suivante :

$$\dot{V}_2 \leq z_1^T (A_{11}^T Q + Q A_{11} + \alpha Q A_{12} P^{-1} A_{12}^T Q) z_1(t) + \alpha^{-1} \frac{\beta^2}{\varpi^2},$$

En supposant que l'équation de Riccati (IV.12) est vérifiée, nous obtenons finalement l'inégalité suivante :

$$\dot{V}_2 \leq V_2(t) + \alpha^{-1} \frac{\beta^2}{\varpi^2},$$

ce qui permet de conclure. ■

IV.2 Cas des systèmes non linéaires

IV.2.1 Modèle considéré

Soit un système non linéaire mono-entrée. Pour simplifier notre étude, nous allons considérer que ce système a été mis sous forme commandable, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = x_{i+1}, & \forall i = 1 \dots (n-1), \\ \frac{dx_n}{dt} = f(t, x) + g(t, x)u, \end{cases} \quad (\text{IV.13})$$

Nous utiliserons les hypothèses suivantes (la première pouvant être affaiblie) :

A IV.3 La fonction gain $g(t, x)$ est constante et égale à g .

A IV.4 la fonction f est bornée : $|f(t, x)| < M_f$.

Nous choisissons une hypersurface \mathcal{S} décrite par l'équation suivante :

$$s(x) = x_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i = 0, \quad (\text{IV.14})$$

avec les coefficients a_i choisis de telle manière que $a_0 + a_1 x + \dots + x^n$ soit un polynôme de Hurwitz. S'il n'y avait pas de retard, nous appliquerions une commande par modes glissants :

$$u(t) = u_{\text{eq}}(t, x(t)) - \frac{k}{g} \text{sign}(s(t)), \quad (\text{IV.15})$$

$$u_{\text{eq}}(t, x(t)) = -\frac{1}{g} \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_{i+1}(t) + f(t, x(t)) \right), \quad (\text{IV.16})$$

telle que $\dot{s} = -k \text{sign}(s)$, avec $k > 0$.

Comme nous ne pouvons mesurer instantanément l'état à l'instant t , (IV.15) devient

$$u(t) = u_{\text{eq}}(t, x(t - \tau)) - \frac{k}{g} \text{sign}(s(t - \tau)). \quad (\text{IV.17})$$

IV.2.2 Estimation du domaine attracteur

Théorème IV.3 (domaine d'attraction) [29] *Considérons le système (IV.13) commandé par (IV.17) avec un retard $\tau > 0$ constant. Si les hypothèses AIV.3-AIV.4 sont vérifiées ainsi que :*

$$2 \frac{(k + gM\tau)^2}{(k - gM\tau)} - (k - gM\tau) > 0, \quad (\text{IV.18})$$

alors pour des conditions initiales appartenant à I défini par :

$$I = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |s^2(x) - 2V_\infty^2| < V_\infty^2 \frac{2V_\infty - \alpha\tau}{2V_\infty + \alpha\tau} \right\},$$

où $\alpha = k - gM\tau$, le système (IV.13) commandé par (IV.17) converge vers le domaine attracteur R_∞ défini par :

$$R_\infty = \{x \in \mathbb{R}^n : s^2(x(t)) < 2V_\infty^2\}, \quad (\text{IV.19})$$

$$\text{avec } V_\infty = \frac{\tau(k + gM\tau)^2}{(k - gM\tau)}, \quad (\text{IV.20})$$

Preuve. Choisissons $V(x(t)) = \frac{1}{2}s^2(x(t))$. La fonction :

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_{i+1}(t) - \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_{i+1}(t - \tau) \\ &\quad + f(t, x(t)) - f(t, x(t - \tau)) \\ &\quad - k \operatorname{sign}(s(t - \tau)), \end{aligned} \quad (\text{IV.21})$$

a un nombre fini de discontinuité ([45][46][47]), alors $s(t) = s(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t \dot{s}(w)dw$ est vérifiée.

$$\dot{s}(t) = g\Delta_t^{(t-\tau)}(u_{\text{eq}}) - k \operatorname{sign}(s(t - \tau)), \quad (\text{IV.22})$$

$$\text{avec } \Delta_t^{(t-\tau)}(u_{\text{eq}}) = (u_{\text{eq}}(t, x(t - \tau)) - u_{\text{eq}}(t, x(t))). \quad (\text{IV.23})$$

$$\begin{aligned}\dot{V}(x(t)) &\leq \left(s(t-\tau) + \int_{t-\tau}^t \dot{s}(w)dw \right) \times \\ &\quad (g\Delta_t^{(t-\tau)}(u_{\text{eq}}) - k \operatorname{sign}(s(t-\tau))),\end{aligned}\tag{IV.24}$$

$$= -k |s(t-\tau)| + g\Delta_t^{(t-\tau)}(u_{\text{eq}})s(t-\tau)\tag{IV.25}$$

$$+ g^2 \int_{t-\tau}^t \Delta_t^{(t-\tau)}(u_{\text{eq}}) \Delta_w^{(w-\tau)}(u_{\text{eq}}) dw\tag{IV.26}$$

$$-gk\Delta_t^{(t-\tau)}(u_{\text{eq}}) \int_{t-\tau}^t \operatorname{sign}(s(w-\tau)) dw\tag{IV.27}$$

$$+ k^2 \int_{t-\tau}^t [\operatorname{sign}(s(t-\tau)) \operatorname{sign}(s(w-\tau))] dw\tag{IV.28}$$

$$-kg \operatorname{sign}(s(x(t-\tau))) \int_{t-\tau}^t \Delta_w^{(w-\tau)}(u_{\text{eq}}) dw.\tag{IV.29}$$

En utilisant :

$$\int_{t-\tau}^t [\operatorname{sign}(s(t-\tau)) \operatorname{sign}(s(w-\tau))] dw \leq \tau,\tag{IV.30}$$

et si nous supposons que $|\Delta_t^{(t-\tau)}(u_{\text{eq}})| < M\tau$ alors :

$$\dot{V}(x(t)) < (gM\tau - k)\sqrt{V(x(t-\tau))} + \tau(k + Mg\tau)^2.\tag{IV.31}$$

Notons que si le champ de commande n'est pas constant, il est malgré tout possible d'obtenir une inégalité comparable c'est-à-dire :

$$\dot{V}(x(t)) < \omega\sqrt{V(x(t-\tau))} + \beta.\tag{IV.32}$$

Ainsi, si $gM\tau < k$ est vérifiée et en notant : $V = y + V_\infty^2$, ($V_\infty^2 = \frac{\tau^2(k+gM\tau)^4}{(k-gM\tau)^2}$), nous obtenons l'inégalité :

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &< -\frac{\alpha}{2V_\infty}y(t-\tau) \\ &\quad + \frac{\alpha y^2(t-\tau)}{2V_\infty \left(V_\infty + \sqrt{V_\infty^2 + y(t)} \right)^2},\end{aligned}\tag{IV.33}$$

$$\alpha = k - gM\tau.\tag{IV.34}$$

En reprenant la démonstration de la preuve du théorème IV.1, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &< -\frac{\alpha}{2V_\infty}y(t) + \frac{\alpha}{2V_\infty^3}y^2(t-\tau) \\ &\quad + \frac{\alpha}{2V_\infty} \int_{t-\tau}^t \dot{y}(w)dw,\end{aligned}\tag{IV.35}$$

$$\begin{aligned}\int_{t-\tau}^t \dot{y}(w)dw &< \int_{t-\tau}^t -\frac{\alpha}{2V_\infty}y(w-\tau) \\ &\quad + \frac{\alpha}{2V_\infty^3}y^2(w-\tau)dw.\end{aligned}\tag{IV.36}$$

En utilisant le théorème de Razumikhin, c'est-à-dire en supposant que $|y(t+s)| < q|y(t)|$, $\forall s < 0$ pour $q > 1$, nous pouvons majorer $|y(t)|$ par :

$$|y(t)| < -\frac{\alpha}{4V_\infty^2}(2V_\infty - \alpha\tau q)|y(t)| + \frac{\alpha}{4V_\infty^4}q^2(2V_\infty + \alpha\tau)y^2(t).\tag{IV.37}$$

En utilisant le même principe que pour la preuve du théorème (IV.1), nous obtenons ainsi la condition de convergence suivante : $(2V_\infty - \alpha\tau) > 0$, c'est-à-dire

$$2\frac{(k+gM\tau)^2}{(k-gM\tau)} - (k-gM\tau) > 0,\tag{IV.38}$$

pour les conditions initiales :

$$I = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |s^2(x) - 2V_\infty^2| < V_\infty^2 \frac{2V_\infty - \alpha\tau}{2V_\infty + \alpha\tau} \right\}.\tag{IV.39}$$

■

Remarque IV.3 *Lorsque la matrice de commande dépend de l'état et du temps, il est plus difficile de calculer son inverse.*

D'autre part, si le système n'est pas mono-entrée, les calculs deviennent beaucoup plus ardu si g dépend de l'état et se heurtent à l'inversibilité de $g(x, t)$. En effet, comme nous ne connaissons pas le retard, nous ne pouvons pas calculer l'inverse de $g(x(t-\tau), t-\tau)$.

IV.3 Exemples

Exemple IV.2 Reprenons l'exemple (IV.1). Nous choisissons un gain $m = 10$. Supposons que la valeur du retard est égale à 0.1. Nous pouvons estimer la valeur de L à 45. En appliquant le théorème (IV.1) et en choisissant $P = I_n$, nous obtenons que le système converge vers un domaine de convergence $D_\infty = \{z(t) \in R^n, s(z)^2 \leq 25.09\}$, pour un domaine initial défini par $D_{ini} = \{z(t) \in R^n, |s(z)^2 - 25.09| < 203.42\}$, ce qui correspond bien à la simulation de la figure (IV-3)-figure (IV-4), mais avec un certain conservatisme puisque la simulation donne environ une oscillation autour de la surface de 4, au lieu de 25.09 pour le théorème IV.1.

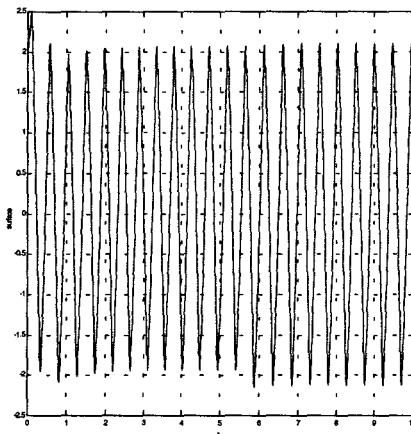


FIG. IV-3: Exemple IV.2 : Simulation de $s(z)$ pour le système (IV.6)-(IV.5) avec $\tau = 0.1, m = 10$.

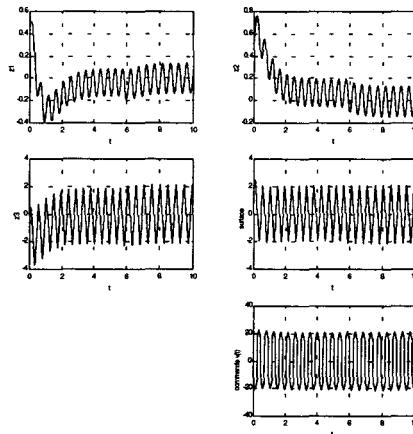


FIG. IV-4: Exemple IV.2 : du système (IV.6)-(IV.5) avec $\tau = 0.1, m = 10$.

Exemple IV.3 Application à la commande numérique par modes glissants

Dans cet exemple, nous allons montrer que ces résultats peuvent s'appliquer pour calculer la bande autour de laquelle un système linéaire oscille lorsque celui-ci est commandé numériquement par une commande par modes glissants. En effet, supposons que la commande (IV.3) est discrétisée avec une période d'échantillonnage de τ_{ech} secondes. L'effet d'un tel échantillonnage peut être représenté par un retard variant dans le temps, illustré par la figure (IV-5) :

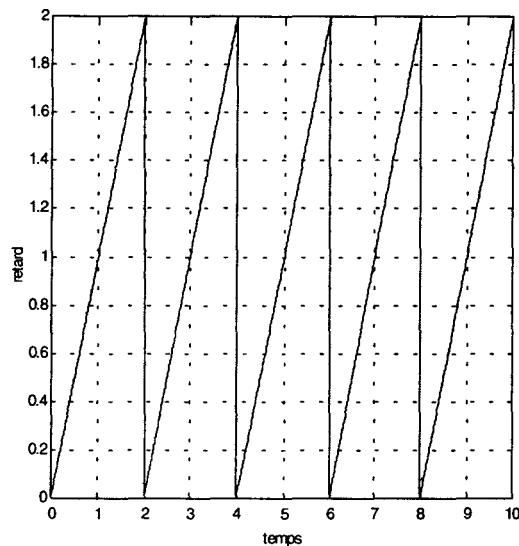


FIG. IV-5: Modélisation d'un bloqueur d'ordre zéro pour $\tau_{ech} = 2$ secondes.

C'est pourquoi, en pratique, un échantillonneur bloqueur d'ordre 0 de fréquences suffisamment élevées peut être approché par un retard pur constant de valeur $\frac{\tau_{ech}}{2}$ (valeur obtenue en prenant la moyenne du signal de la figure (IV-5)). D'après la théorie (voir [87, 118] à ce sujet), le système oscille autour de la surface avec une précision de l'ordre de $o(\tau_{ech})$. En utilisant le théorème IV.1, nous retrouvons bien localement ce résultat. Pour illustrer notre propos, choisissons un exemple très simple :

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) = v(t) \\ y(t) = z(t - \tau), \end{cases} \quad (\text{IV.40})$$

La commande (IV.3) est discrétisée avec une période d'échantillonnage de 0.2 sec. Nous choisissons une surface de glissement $s(z) = z_2 + z_1 = 0$, un gain $k = 5$ pour la commande. La constante L est estimée à 5. En appliquant le théorème (IV.1) avec $P = I_n$, nous obtenons que les trajectoires du système convergent vers un domaine de convergence $D_\infty = \{z(t) \in R^n, s(z)^2 \leq 3.125\}$, pour un domaine initial défini par $D_{ini} = \{z(t) \in R^n, |s(z)^2 - 3.125| < 0.8049\}$, ce qui correspond bien à la simulation de la figure (IV-6).

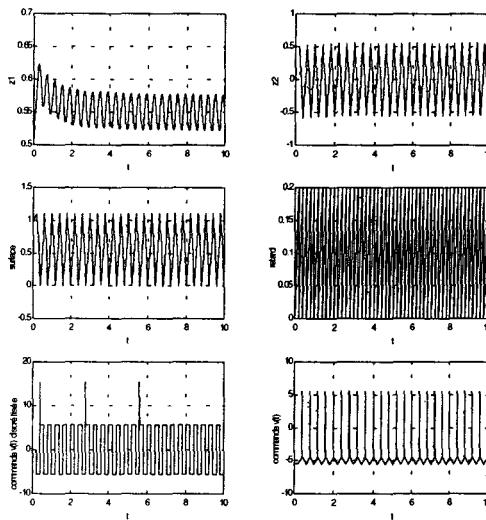


FIG. IV-6: Exemple IV.3 : Simulation de (IV.40)-(IV.5) avec $\tau = 0.2$ seconde, $k = 5$.

IV.4 Conclusion

Ce chapitre nous a permis de confirmer qu'un retard de capteur (mais aussi, de façon analogue, de commande) pouvait altérer le comportement d'un système à retard commandé par modes glissants. Pour les systèmes linéaires comme pour les systèmes non linéaires mono-entrée nous avons pu donner les conditions et les bornes pour lesquelles le système à retard admet un domaine attracteur autour de la surface de commutation. D'autre part, lorsque le système est linéaire, nous avons mis en évidence un domaine attracteur pour le système réduit. Enfin, ces théorèmes nous ont permis de retrouver le calcul de la précision sur la surface $s(x) = 0$ pour un mode glissant réel d'ordre 1, prenant ainsi en compte le phénomène d'échantillonnage.

Chapitre V

Conclusion générale et perspectives

Dans ce mémoire, nous avons développé des techniques de commande par modes glissants pour des systèmes héréditaires.

- Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés aux différents moyens qui existent pour commander ces systèmes : approche temporelle, algébrique, opérateur en dimension finie. Nous avons, par ailleurs, rappelé brièvement les principes de la commande par modes glissants et comment celle-ci a déjà été utilisée pour stabiliser des systèmes à retards. Il est alors apparu que seul le cas de la stabilisation par modes glissants des systèmes linéaires à retard constant avait été traité. Ces critères conduisaient alors généralement à des critères indépendants du retard.
- Les chapitres II et III ont été consacrés au développement de commandes discontinues pour des systèmes linéaires / non linéaires à retard sur l'état. En premier lieu, nous avons décomposé le système original en deux sous-systèmes. Ensuite, nous avons proposé plusieurs types de surfaces. La première surface de commutation ne dépend pas du retard et permet alors de stabiliser le système de manière robuste vis-vis du retard constant, ou variant dans le temps. Afin de permettre un plus grand degré de liberté, nous avons développé, dans un second temps, des surfaces de commutation fonctionnelles. Ensuite, une commande discontinue adéquate constraint les trajectoires du système à converger vers $s = 0$ et stabilise ainsi d'une manière robuste le point d'équilibre du système original.
A travers de nombreux exemples académiques, nous avons montré tout l'intérêt d'utiliser des commandes discontinues. En effet, que le retard soit connu, ou inconnu, constant, ou variant dans le temps, ces techniques peuvent améliorer de façon notable la robustesse du système vis-à-vis du retard ou d'incertitudes sur les paramètres du modèle et se révèlent

une alternative intéressante à la commande robuste du type $u(t) = Kx(t)$ ou d'une manière plus générale $u(t) = Kx(t) + K_d x(t - \tau)$.

Cependant, cette amélioration de la robustesse s'accompagne d'une "dégradation" de la commande. Les commandes discontinues génèrent un phénomène de réticence, pouvant endommager les actionneurs. (voir la différence entre les deux commandes de l'exemple II.1 page 76).

- Une première solution pratique est d'utiliser une approximation de la fonction signe, comme dans le cas des systèmes de dimension finie.
- Une deuxième solution serait d'utiliser le formalisme des modes glissants d'ordre supérieur. Ainsi, nous pourrions réduire la réticence tout en gardant de bonnes propriétés de robustesse pour le système héréditaire. Effectivement, en reprenant le formalisme des modes glissants d'ordre 2, le problème de l'attractivité de la surface et de sa dérivée reviendrait à la stabilisation en temps fini de :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = \zeta(y_t, u_t) + \chi(y_t, u_t)u(t). \end{cases} \quad (\text{V.1})$$

En fixant des bornes sur les fonctions ζ et χ , nous pourrions par exemple reprendre l'algorithme du twisting [88] et ses améliorations [44][43].

Cependant, il est à noter que toutes les techniques de stabilisation par structures variables sont basées sur la transformation des systèmes originaux en des formes adéquates pour la synthèse. Pour les cas des systèmes non linéaires elle est effectuée par l'intermédiaire de difféomorphismes locaux. Dans le cadre de ce mémoire, nous avons utilisé ces mêmes difféomorphismes, ce qui nous a amené à restreindre notre classe de systèmes à retard (chapitre III) : le champ de commande ne peut pas dépendre des valeurs passées de l'état. Une perspective intéressante serait d'utiliser d'autres difféomorphismes dépendant du retard, par exemple en utilisant la dérivée de Lie retardée introduite par [50, 112]. Cette étude mènerait à une stabilisation du système héréditaire pour toute valeur du retard. Cependant, la sensibilité de ces difféomorphismes à une variation du retard est encore à étudier.

- Le quatrième et dernier chapitre porte sur le problème de la stabilisation par modes glissants d'un système soumis à un retard en entrée ou en sortie. Une commande continue ne permet plus d'assurer l'attractivité de la surface, mais seulement dans une bande au-

tour de $s = 0$. Dans le cas d'un retard connu et constant, le problème est généralement résolu en utilisant la transformation d'Artstein. Cependant, dans le cas d'un retard sur l'entrée variant dans le temps (un cas courant en pratique, comme par exemple en commande numérique), la stabilisation robuste par modes glissants reste à l'heure actuelle un problème ouvert.

Annexe A

Stabilité asymptotique d'un système polytopique à retards.

Cette annexe est consacrée à la stabilité d'un système non linéaire à retard mis sous forme polytopique :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x_t) (A_i x(t) + B_i x(t - \tau)), \quad (\text{A.1})$$

Théorème A.1 [10] Soit le système (A.1). S'il existe P et S deux matrices définies positives telles que

$$\begin{bmatrix} A_i^T P + PA_i + S & B_i^T P \\ PB_i & -S \end{bmatrix} < 0, \quad i \in I_r, \quad (\text{A.2})$$

alors l'équilibre $x = 0$ du système (A.1) est globalement asymptotiquement stable pour toute valeur du retard $\tau \geq 0$.

Preuve. Considérons la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii suivante :

$$V(x_t) = V_1(x_t) + V_2(x_t),$$

$$V_1(x_t) = x(t)^T P x(t),$$

$$V_2(x_t) = \int_{t-\tau}^t x(\theta)^T S x(\theta) d\theta,$$

avec $P = P^T, P > 0$ et $S = S^T, S > 0$.

Le calcul de la dérivée de $V(x_t)$ le long des trajectoires du système (A.1) nous mène à :

$$\begin{aligned}\dot{V}_2(x_t) &= x(t)^T S x(t) - x(t-\tau)^T S x(t-\tau), \\ \dot{V}_1(x_t) &= \dot{x}(t)^T P x(t) + x(t)^T P \dot{x}(t) \\ &= \begin{cases} x(t)^T \left[\sum_{i=1}^r h_i(x_t) (A_i^T P + P A_i) \right] x(t) \\ + 2x(t-\tau)^T \left[\sum_{i=1}^r h_i(x_t) B_i^T P \right] x(t) \\ + 2x(t)^T \left[\sum_{i=1}^r h_i(x_t) P B_i \right] x(t-\tau). \end{cases}\end{aligned}$$

Définissons $X(t)^T = [x(t), x(t-\tau)]$, nous obtenons alors $\dot{V}(x_t) = X^T(t) M X(t)$ avec :

$$\begin{cases} M = \sum_{i=1}^r h_i(x_t) M_i, \\ M_i = \begin{bmatrix} G_i + S & B_i^T P \\ P B_i & -S \end{bmatrix}, \\ G_i = A_i^T P + P A_i. \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Ainsi, si

$$M < 0, \quad (\text{A.4})$$

alors nous pouvons affirmer que le système (A.1) est asymptotiquement stable quel que soit le retard $\tau \geq 0$. En effet $h_i(x_t) \geq 0, \forall i \in I_r$ et $\exists i_0 \in I_r : h_{i_0}(x_t) > 0$, (A.4) est vérifiée si $M_i < 0, \forall i \in I_r$. La preuve en découle. ■

Annexe B

Forme régulière généralisée

Dans cette annexe, nous considérons le système MIMO suivant :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u + p(x), \quad (\text{B.1})$$

où p est une perturbation additive, f est un champ de vecteur suffisamment différentiable, $g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) & \dots & g_m(x) \end{pmatrix}$ est une matrice de dimension $n \times m$ où $g_i(x)$, $i \in \{1..m\}$ représente des fonctions suffisamment régulières de x .

Nous cherchons les conditions sous lesquelles un système de la forme (B.1) peut être transformé en une forme

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = f_1^R(z_1, z_2) + G^R(z_1, z_2)u + p^R(z), \\ \dot{z}_2 = f_2^R(z_1, z_2), \\ z_1 \in R^d, z_2 \in R^{n-d}. \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Les résultats que nous présentons ont été développés par [94] dans le cas non perturbé et par [119] dans le cas général.

B.0.1 A propos du rang de la matrice $g(x)$.

Dans [94], $g(x)$ est supposé de rang plein. Lorsque cette hypothèse n'est pas vérifiée, il est possible d'utiliser un retour d'état statique, qui permet de retrouver l'hypothèse de Lukyanov.

Théorème B.1 *Si $\text{rang}(G(x_0)) = r$, alors il existe un retour d'état statique $u = W(x)(v^T, 0, 0, \dots, 0)^T$, $v \in I\!\!R^r$, avec v la nouvelle entrée et W une matrice non singulière dans un voisinage de x_0 , tel que :*

$$g(x)W(x) = \begin{pmatrix} & \overbrace{\quad \quad \quad}^r & \overbrace{\quad \quad \quad}^{m-r} \\ X & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ X & \cdots & \cdots & X & 0 & \cdots & 0 \\ X & \cdots & \cdots & X & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ X & \cdots & \cdots & X & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \overbrace{\quad \quad}^r & \overbrace{\quad \quad}^{m-r} \\ g'(x) & 0 & \end{pmatrix}.$$

Si $\text{rank}(G(x_0)) = r < m$, le nouveau système peut s'écrire de la manière suivante :

$$\dot{x} = f(x) + g'(x)v + p(x),$$

où $v \in \mathbb{R}^r$ est la nouvelle entrée et $g'(x)$ est une matrice de rang plein de dimension $n \times r$.

Pour simplifier notre problème, il est maintenant possible de considérer sans perte de généralité que $\text{rang}(x_0) = m$.

Le problème est désormais de déterminer un difféomorphisme $z = \phi(x)$ qui permette de changer (B.1) en (B.2).

B.0.2 La forme régulière généralisée dans le cas non perturbé

Les résultats obtenus sont des résultats locaux, c'est-à-dire au voisinage d'un point x_0 . Cependant, lorsque l'hypothèse H1) est vérifiée sur l'ensemble de l'espace d'état, alors le difféomorphisme existe sur l'ensemble de l'espace d'état : les résultats deviennent globaux.

Théorème B.2 Soit Δ une distribution telle que :

H1) Δ est non singulière en x_0 (c'est-à-dire de dimension constante $\dim \Delta = d_\Delta \leq n$),

H2) Δ est involutive (et donc intégrable) :

$$\forall \tau_1 \in \Delta, \forall \tau_2 \in \Delta : [\tau_1, \tau_2] \in \Delta, \tag{B.3}$$

H3) $\text{span}\{g_1(x), \dots, g_m(x)\} \subset \Delta$.

Alors, il existe un voisinage $\mathcal{V}(x_0)$ de x_0 et un difféomorphisme local $z = \phi(x)$ défini sur $\mathcal{V}(x_0)$ tels que (B.1) est transformé en (B.2) avec $d = d_\Delta \leq n$. De plus, si $d_\Delta < n$, alors la

conclusion est la même pour $n \geq d \geq d_\Delta$.

Preuve (éléments) : D'après les hypothèses $H1-H3$, en utilisant le théorème de Frobenius, nous pouvons trouver $(n - d_\Delta)$ fonctions réelles λ_i qui engendrent l'espace orthogonal à Δ . Nous choisissons donc les fonctions $\phi_{d+i} \triangleq \lambda_i \forall i \in \{1..(n - d_\Delta)\}$ et nous complétons la base. Le théorème en découle. ■

Remarque B.1 La pierre angulaire de la preuve repose sur l'existence d'une distribution vérifiant $H1 - H3$. Un algorithme de construction de Δ peut être trouvé dans [119].

B.0.3 Le cas perturbé

Théorème B.3 [44] Supposons que les hypothèses $H1-H3$ soient vérifiées, et que de plus :

$H0) p \in \Delta_G = \text{span} \{Ad_{g_i}^k g_j(x) : i \in \{1..m\}, j \in \{1..m\}, k \in \{0..\infty\}\}$;

$H'0) \Delta_G$ est non singulière en x_0 (c'est-à-dire de dimension $\dim \Delta_G = d_{\Delta_G} \leq n$).

Alors, il existe un voisinage $\mathcal{V}(x_0)$ de x_0 et un difféomorphisme local $z = \phi(x)$ défini sur $\mathcal{V}(x_0)$, tel que (B.1) est transformé en (B.2) avec $d = d_{\Delta_G}$.

Preuve : Comme $p \in \Delta_G$, $\forall \omega^* \in \Delta_G^\perp : \langle \omega^*, p \rangle = 0$, en utilisant le difféomorphisme ϕ défini au théorème précédent, nous obtenons le résultat ■

Remarque B.2 Si $\Delta_G = \text{vect} \{g_1(x), \dots, g_m(x)\}$ est involutive, alors l'hypothèse $H0$ devient l'hypothèse classique de recouvrement [143].

Annexe C

Stabilité de systèmes à retards par la seconde méthode de Lyapunov

Nous considérons le système autonome suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), x_t), \\ x_{t_0}(\theta) = \varphi(\theta) \text{ pour } \theta \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

dont nous supposons qu'il existe un état d'équilibre $x_t = 0$. (Nous pouvons toujours nous ramener à ce cas en formant l'équation aux différences, si le système admet un autre point d'équilibre).

Etant donné un équilibre $x_t = 0$, la seconde méthode de Lyapunov cherche à déterminer une fonction $V(x)$ définie positive telle que le long des trajectoires du système (C.1), $\frac{dV(x(t))}{dt} < 0$ si $x \neq 0$. Cette méthode directe est valable pour une classe restreinte de systèmes héréditaires car $\frac{dV(x(t))}{dt}$ dépend des valeurs passées x_t . Elle est donc très difficile à appliquer dans le cas général des systèmes héréditaires. Deux extensions à la seconde méthode de Lyapunov ont alors été proposées dans le cadre des équations différentielles héréditaires.

C.1 Approche par fonctionnelles de Krasovskii

La méthode de Krasovskii est une extension directe de la seconde méthode de Lyapunov pour les équations différentielles fonctionnelles. Elles consistent à rechercher des fonctionnelles $\mathcal{V}(t, x_t)$ qui décroissent le long des solutions du système (C.1).

Théorème C.1 [79] Soit $u, v, w : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ des fonctions continues, strictement crois-

santes ; $u(\theta)$ et $v(\theta)$ positives pour $\theta > 0$ et $u(0) = v(0) = 0$. Supposons que la fonction f de (C.1) est bornée pour des valeurs bornées de ses arguments.

Alors s'il existe une fonctionnelle continue $\mathcal{V} : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

a) $u(\|\varphi(0)\|) \leq \mathcal{V}(t, \varphi) \leq v(\|\varphi\|)$,

b) $\dot{\mathcal{V}}(t, \varphi) \leq -w(\|\varphi(0)\|)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ le long des trajectoires de (C.1),

alors la solution nulle de (C.1) est uniformément stable. Si de plus $w(\theta) > 0$ pour $\theta > 0$ alors la solution nulle de (C.1) est uniformément asymptotiquement stable.

Si \mathcal{V} vérifie plutôt les conditions

i) $u(\|\varphi\|) \leq \mathcal{V}(t, \varphi) \leq v(\|\varphi\|)$,

ii) $\dot{\mathcal{V}}(t, \varphi) \leq -w(\|\varphi\|)$, pour tout $t \geq t_0$ et $w(\theta) > 0$ pour $\theta > 0$,

iii) \mathcal{V} est lipschitzienne par rapport à son second argument.

alors la solution nulle de (C.1) est exponentiellement stable.

$\dot{\mathcal{V}}(t, \varphi)$ est ici une dérivée au sens de Dini, $\dot{\mathcal{V}}(t, \varphi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sup \frac{\mathcal{V}(t+\epsilon, x_{t+\epsilon}) - \mathcal{V}(t, x_t)}{\epsilon}$. Une telle fonctionnelle est appelée fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii.

C.2 Approche par fonctions de Razumikhin

Dans cette approche, nous nous plaçons dans \mathbb{R}^n en considérant une fonction de Lyapunov classique $V(t, x(t))$. Toutefois, il est inutile de vérifier que $\dot{V}(t, x(t)) \leq 0$ le long de toutes des trajectoires du système. Effectivement, nous pouvons nous restreindre aux solutions qui ont tendance à quitter un voisinage $V(t, x(t)) = c$ du point d'équilibre.

Théorème C.2 Soit $u, v, w : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ des fonctions continues, strictement croissantes ; $u(\theta)$ et $v(\theta)$ positives pour $\theta > 0$ et $u(0) = v(0) = 0$. Supposons que la fonction f de (C.1) est bornée pour des valeurs bornées de ses arguments.

Alors s'il existe une fonction continue $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

a) $u(\|x\|) \leq V(t, \varphi) \leq v(\|x\|)$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$,

b) $\dot{V}(t, x_t) \leq -w(\|x(t)\|)$ pour les trajectoires de (C.1) vérifiant

$$V(t + \theta, x(t + \theta)) \leq V(t, x(t)), \forall \theta \in [-\tau, 0], \quad (\text{C.2})$$

alors la solution nulle de (C.1) est uniformément stable.

De plus si $w(\theta) > 0$ pour $\theta > 0$ et s'il existe une fonction $p : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, strictement croissante avec $p(\theta) > \theta$ pour $\theta > 0$ telle que

i) $u(\|x\|) \leq V(t, \varphi) \leq v(\|x\|)$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$,

ii) $\dot{\mathcal{V}}(t, x_t) \leq -w(\|x(t)\|)$, pour toutes fonctions vérifiant :

$$V(t + \theta, x(t + \theta)) \leq p(V(t, x(t))), \forall \theta \in [-\eta, 0], \quad (\text{C.3})$$

alors la solution nulle de (C.1) est uniformément asymptotiquement stable.

Dans la pratique, les fonctions p souvent utilisées sont celles de la forme $p = q\theta$, $q > 1$.

Annexe D

Le formalisme des modes glissants

Cette annexe a pour but de fournir les éléments fondamentaux du formalisme d'une commande à structure variable. Tout d'abord, nous expliciterons les conditions sous lesquelles un régime glissant apparaît sur la surface. Nous nous intéresserons ensuite à la dynamique du système réduit (lorsque le système est au voisinage de la surface) et à sa robustesse "naturelle" vis-à-vis d'une certaine classe de perturbations. Enfin, nous étudierons le problème de l'implantation numérique des modes glissants. Les limites de la commande par modes glissants apparaissent alors clairement. Effectivement, la commande par commutation peut exciter des dynamiques parasites et dégrader les performances du système. Plusieurs solutions seront alors envisagées.

Nous terminerons ce tour d'horizon par un exemple simple mettant en œuvre les principes de la synthèse d'une commande par modes glissants.

Dans un souci de clarté, nous nous intéresserons à la classe de systèmes non linéaires monoentrée et affines en la commande. Cependant, tous les résultats présentés peuvent être étendus aux systèmes de la forme $\dot{x} = f(x, u)$ où $u \in \mathbb{R}^m$ (voir [132]).

D.1 Définition du régime glissant

Soit le système dynamique suivant :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (\text{D.1})$$

où x , le vecteur état, appartient à $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, f et g sont des champs de vecteurs dépendant de x que nous considérerons suffisamment différentiables, $u : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ est la commande du système.

Définissons une fonction continue s comme suit :

$$\begin{cases} \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}, \\ x \mapsto s(x). \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

Nous pouvons alors créer une variété de codimension 1, S , définie par :

$$S = \{x \in \mathcal{X} \mid s(x) = 0\}, \quad (\text{D.3})$$

et appelée dans la suite du mémoire surface de glissement, ou surface de commutation.

Nous considérons une commande à structure variable particulière, en élaborant un retour d'état qui change suivant le signe de $s(x)$:

$$u(t) = \begin{cases} u^+(x) & \text{si } s(x) > 0, \\ u^-(x) & \text{si } s(x) < 0. \end{cases} \quad (\text{D.4})$$

Dans la suite du mémoire, nous supposons que u^+ , et u^- sont des fonctions continues de $\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$. En outre, sans perte de généralité, les deux fonctions extrêmes de la commande satisfont $u^+(x) > u^-(x)$ et ceci $\forall x \in \mathcal{X}$.

Remarque D.1 *Le système commandé (D.1)-(D.4) présente un caractère particulier puisque le second membre est discontinu le long de $s(x) = 0$. La théorie des équations différentielles ordinaires ne peut pas s'appliquer pour déterminer la nature des solutions d'un tel problème. La solution proposée est de se placer dans le cadre plus général des inclusions différentielles et des solutions au sens de Filippov [4, 5, 42].*

Le théorème suivant [143] établit les conditions locales sous lesquelles les trajectoires du système convergent dans un voisinage de la surface.

Définition D.1 [143] *Un régime glissant s'établit sur S s'il existe un temps fini t_s tel que la solution de (D.1) (D.4) satisfasse $s(x) = 0$ pour tous les temps $t \geq t_s$.*

Théorème D.1 [132] *Un régime glissant est établi localement sur S si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\partial s}{\partial x} (f + gu^+) < 0 \quad \text{et} \quad \lim_{s \rightarrow 0^-} \frac{\partial s}{\partial x} (f + gu^-) > 0. \quad (\text{D.5})$$

Géométriquement, ces conditions expriment le fait que, localement autour de la surface, les projections des champs de vecteurs $(f + gu^+)$ et $(f + gu^-)$ sur le gradient de S sont de signes

opposés (voir Figure D-1). De plus, les champs de vecteurs de commande sont localement orientés vers la surface S .

La condition (D.5) est plus souvent rencontrée sous la forme :

$$s\dot{s} < 0, \quad (\text{D.6})$$

et est appelée *condition d'attractivité* ([132]).

Toutefois, cette dernière condition n'implique pas que la surface est atteinte en temps fini. Une condition plus forte :

$$\dot{s}s \leq -\eta |s|, \quad (\text{D.7})$$

appelée condition de η -attractivité, est plus souvent utilisée.

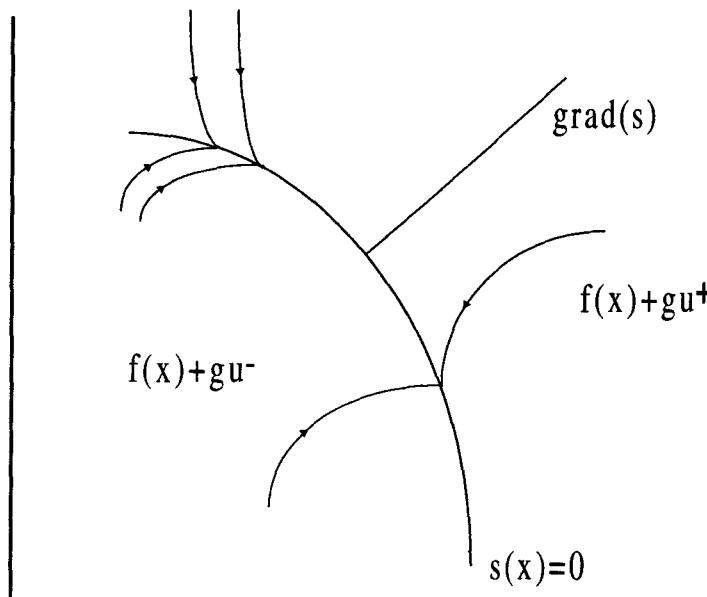


FIG. D-1: Attractivité de la surface

D.2 Etude de la dynamique glissante du système

D.2.1 Condition d'invariance de la surface.

Pour déterminer la dynamique du système lorsque celui ci évolue idéalement sur la surface, Utkin a développé la méthode dite de la commande équivalente [143].

Exprimons tout d'abord, les conditions d'invariance de la surface c'est-à-dire :

$$\begin{cases} s(x) = 0 \\ \dot{s}(x) = 0 \end{cases} \quad (\text{D.8})$$

Il vient naturellement l'équation suivante :

$$\frac{\partial s}{\partial x}(f(x) + g(x)u_e) = 0,$$

où u_e est une fonction continue de $\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ appelée commande équivalente. Elle est donc définie par l'équation suivante :

$$u_e = -(\frac{\partial s}{\partial x}g(x))^{-1}\frac{\partial s}{\partial x}f(x), \quad (\text{D.9})$$

Lemme D.1 [132] *La commande équivalente est bien définie si et seulement si*

$$\frac{\partial s}{\partial x}g(x) \neq 0. \quad (\text{D.10})$$

Remarque D.2 *Cette dernière équation appelée condition de transversalité, est essentielle à la synthèse d'une commande à structure variable. Elle a une signification géométrique très simple. Pour contraindre le système à converger vers la surface et à y rester, il ne faut pas que le champ de vecteurs $g(x)$ soit tangent à $s(x)$. Cependant, ce n'est qu'une condition nécessaire à l'établissement d'un régime par mode glissant local [132].*

Le lemme suivant propose quant à lui des conditions nécessaires et suffisantes de l'existence d'un régime glissant local sur $s(x) = 0$.

Lemme D.2 [132] *Un régime glissant sur S est établi localement si et seulement si, pour $x \in S$,*

$$u^-(x) < u < u^+(x),$$

Ces deux inéquations dérivent des conditions nécessaires et suffisantes (D.5).

D.2.2 Dynamiques du mode glissant idéal

D'après l'expression de la commande équivalente, nous pouvons alors exprimer la dynamique du système en boucle fermée par :

$$\begin{cases} \dot{x}_e = f(x_e) - g(x_e)(\frac{\partial s(x_e)}{\partial x}g(x_e))^{-1}\frac{\partial s}{\partial x}f(x_e), \\ s(x_e) = 0. \end{cases} \quad (\text{D.11})$$

Remarque D.3 *Du fait de la contrainte algébrique $s(x_e) = 0$, les trajectoires du système en régime de glissement sont gouvernées par un nombre réduit d'équations différentielles.*

Remarque D.4 [132] *La dynamique du système en mode glissant peut s'écrire sous la forme suivante :*

$$\begin{cases} \dot{x}_e = \Pi(x_e)f(x_e), \\ s(x_e) = 0, \end{cases}$$

où

$$\Pi : \begin{cases} \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}, \\ x_e \longmapsto \Pi(x_e) = (I_{n-1} - g(x_e)(\frac{\partial s(x_e,t)}{\partial x}g(x_e))^{-1}\frac{\partial s}{\partial x}), \end{cases}$$

est un opérateur de projection qui envoie $x(t)$ sur la surface $s(x, t) = 0$ parallèlement aux champs de vecteurs $g(x)$. Effectivement, Π vérifie :

$$\begin{aligned} \Pi(x_e) \circ \Pi(x_e) &= \Pi(x_e), \\ \Pi(x_e)g(x_e) &= 0. \end{aligned}$$

Remarque D.5 [42] *Il existe une autre manière de définir cette dynamique en utilisant le formalisme des inclusions différentielles. On montre que celle ci est définie par*

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left[\frac{\langle ds, f^- \rangle}{\langle ds, (f^- - f^+) \rangle} \right] f^+ - \left[\frac{\langle ds, f^+ \rangle}{\langle ds, (f^- - f^+) \rangle} \right] f^-, \quad (\text{D.12})$$

où f^+ , et f^- sont définis par

$$\begin{cases} f^+(x) = f(x) + g(x)u^+(t), \\ f^-(x) = f(x) + g(x)u^-(t). \end{cases} \quad (\text{D.13})$$

Celle ci n'est pas équivalente en général à la dynamique définie au sens d'Utkin, mais l'est dans

le cas de systèmes affines en la commande.

D.2.3 Signification physique de la commande par modes glissants

Idéalement, la commande discontinue (D.4) peut osciller à une fréquence infinie. Or, lors de l'implantation réelle de cette commande, du fait des imperfections des actionneurs (retards, hystérésis) ou de l'échantillonnage, celle-ci s'exprime alors comme la somme d'une composante basse fréquence u_{BF} et d'une composante haute fréquence u_{HT} : $u_{réel}(t) = u_{BF}(t) + u_{HT}(t)$. Cette dernière est filtrée par le système réel. Ainsi, en régime de glissement, seule la composante $u_{BF}(t)$ agit sur le système.

Ce signal moyen $u_{BF}(t)$ coïncide avec la commande équivalente u_e [143]. Nous pouvons le mesurer en filtrant les composantes hautes fréquences de $u_{réel}$. Ainsi, par exemple, u_{BF} est la sortie du filtre passe-bas représenté par l'équation différentielle suivante :

$$\tau \dot{u}_{BF}(t) + u_{BF}(t) = u_{réel}(t), \text{ avec } \tau \ll 1.$$

C'est pourquoi, l'élaboration d'une commande à structure variable consiste souvent à ajouter à la composante haute fréquence (qui assure la convergence en temps fini vers la surface), une composante à basse fréquence qui n'est rien d'autre que la commande équivalente. La commande par modes glissants s'écrit alors :

$$u(t) = u_{eq}(t) + \bar{u}(x) \text{ signe}(s).$$

D.3 Robustesse des commandes à structure variable

Considérons le système initial soumis à des perturbations p représentant des incertitudes paramétriques ou des perturbations exogènes :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u + p.$$

Une condition suffisante pour que la dynamique du système en régime de glissement soit indépendante de la perturbation p est donnée par le théorème suivant :

Théorème D.2 [132, 143] *Le régime glissant sur la variété \mathcal{S} du système perturbé est indépendant de la perturbation p si celle-ci vérifie la condition structurelle appelée condition de*

recouvrement¹ suivante :

$$p \in Vect(g(x)). \quad (\text{D.14})$$

Preuve. Puisque la condition (D.14) est vérifiée alors il existe une fonction ξ telle que $p = g(x)\xi$. La preuve découle simplement de la fonction de projection Π qui annule toute contribution des vecteurs engendrés par $g(x)$ à la dynamique de la trajectoire en mode glissant.

■

Nous remarquons ici que, si le régime en mode glissant n'est pas affecté par des perturbations vérifiant la condition de recouvrement, il n'en reste pas moins que celles-ci agissent toujours lors de la phase d'établissement du mode glissant. La robustesse est alors assurée par l'amplitude de la commande discontinue qui "écrase" les perturbations, si celles-ci sont bornées.

D.4 Le phénomène de réticence

Les trajectoires du système lors de la phase de glissement idéal sont des fonctions continues ne dépendant que de la surface de commutation choisie. Ces trajectoires correspondent au système commandé par un retour statique appelé contrôle équivalent. Cependant, du fait des imperfections technologiques (retard, hystérésis) des actionneurs et des capteurs, le contrôle discontinu ne peut pas osciller idéalement à une fréquence infinie. Alliée aux retards négligés lors de la modélisation du processus physique, la commande discontinue engendre alors une dynamique parasite appelée communément "chattering" en anglais, ou phénomène de réticence en français. Celle-ci se caractérise par des oscillations persistantes et à hautes fréquences de la commande (voir Figure D-2).

En pratique, de telles oscillations sont indésirables car elles peuvent dégrader les performances du système et même le déstabiliser [71] en excitant des modes négligés.

Plusieurs techniques ont alors été proposées pour réduire ou éliminer ce phénomène. La première et la plus intuitive consiste à déterminer une approximation continue au voisinage de la surface de commutation $\mathcal{V} = \{x \in \mathcal{X} / |s(x)| \leq \varepsilon\}$ [148] en remplaçant la fonction idéale *signe* par une fonction continue comme $\text{sat}(\frac{1}{\varepsilon}s(x))$, $\tanh(\frac{s(x)}{\varepsilon})$, ou $\frac{s(x)}{\varepsilon+s(x)}$. Elles permettent de filtrer les hautes fréquences dans la couche limite définie par \mathcal{V} .

¹en anglais, "matching conditions"

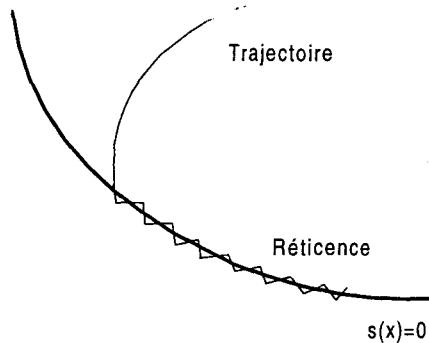


FIG. D-2: Illustration de la réticence

Une autre technique pour diminuer la réticence est de déterminer une commande dont l'amplitude diminue au fur et à mesure que l'état du système approche de la surface de commutation, c'est-à-dire des commandes de la forme $u(t) = -|s(t)|^\alpha \operatorname{signe}(s)$.

Toutefois, pour que ces approches soient effectives, il est nécessaire d'avoir convenablement modélisé les dynamiques négligées des actionneurs. Effectivement, dans le cas contraire, les propriétés de robustesse les performances du système s'en trouvent souvent dépréciées [143].

Enfin, une autre solution proposée est d'introduire de nouvelles dynamiques dans la commande, en utilisant un intégrateur pour séparer le contrôleur discontinu du processus en lui-même, évitant ainsi le phénomène de chattering. Cette astuce est à la base du concept de mode glissant d'ordre supérieur qui permet de réduire la réticence tout en conservant de bonnes qualités de robustesse et de précision ([38, 39, 48, 87, 88]).

D.5 Exemple

Exemple D.1 Afin d'illustrer notre propos, considérons un modèle simple de système non linéaire commandé en mode glissant (voir Figure D.15).

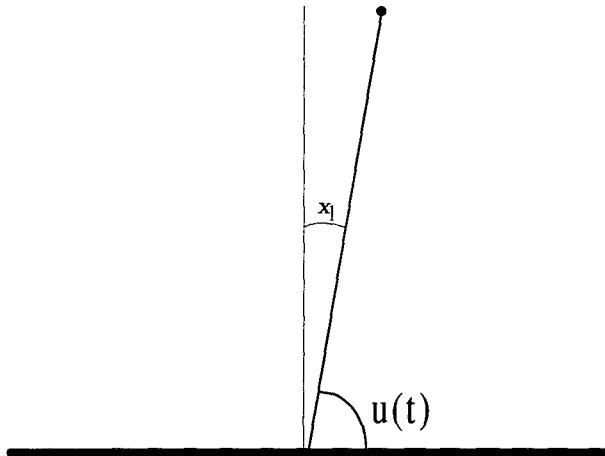


FIG. D-3: Exemple D.1 : le pendule inverse

Un modèle linéarisé autour du point d'équilibre instable d'un pendule inverse est régi par le système d'équation différentielle suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\sin(x_1) + u, \\ y = x_1. \end{cases} \quad (\text{D.15})$$

où x_1 représente l'angle que fait le pendule avec la verticale dirigée vers le haut et x_2 la vitesse angulaire. $u(t)$ est la commande, en l'occurrence le couple moteur appliqué à l'axe du pendule inverse. Choisissons une surface du type :

$$s(x) = k_1 x_1 + x_2, \quad (\text{D.16})$$

où le gain $k_1 \in \mathbb{R}$ est choisi pour que le système en régime de glissement soit exponentiellement stable avec une constante de temps égale à $\frac{1}{k_1}$.

La commande discontinue :

$$u(t) = -m \operatorname{signe}(s(x)), \quad (\text{D.17})$$

est bien définie par rapport à la surface de glissement car

$$\frac{\partial s(x, t)}{\partial x} g(x) = u(t) \neq 0. \quad (\text{D.18})$$

Calculons la condition d'attractivité :

$$s(x)\dot{s}(x) = s(x)(k_1 x_2 - \sin(x_1) - m \operatorname{signe}(s(x))). \quad (\text{D.19})$$

Un régime glissant existe donc dans le domaine :

$$\Lambda = \{x \in \mathcal{X} \mid |k_1 x_1 - \sin(x_1)| < m\}.$$

Le système en régime de glissement est donc défini par

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -k_1 x_1, \\ x_2 = -k_1 x_1. \end{cases}$$

Pour améliorer la taille du domaine Λ , la structure de la commande peut être modifiée de la manière suivante :

$$u(t) = -k_1 x_2 + \sin(x_1) - m \operatorname{signe}(s(x)). \quad (\text{D.20})$$

La condition de η -attractivité est alors respectée avec $\eta = m$ car $\dot{s}(x)s(x) < -m|s(x)|$.

Les figures suivantes sont les résultats de la simulation du système (D.15) commandé par (D.20) avec $k_1 = 2$, $m = 2$, les conditions initiales étant fixées à $[x_{10}, x_{20}] = [2, 2]$. L'algorithme d'intégration choisi est l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4 avec un pas d'échantillonnage de 10^{-4} .

La Figure D-4 montre clairement que le contrôle oscille à très hautes fréquences, et présente ainsi un phénomène de réticence.

En choisissant de remplacer la fonction signe par une fonction saturation du type $\tanh(\frac{1}{\epsilon}s(x))$, nous obtenons les simulations de la Figure D-5. Le phénomène de réticence est alors réduit.

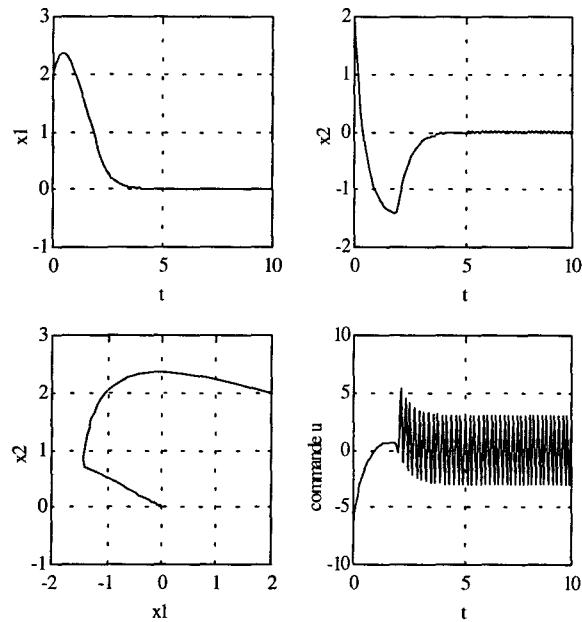


FIG. D-4: Exemple D.1 : simulation du système (D.15) commandé par une commande (D.20) avec $k_1 = 2$, $m = 2$.

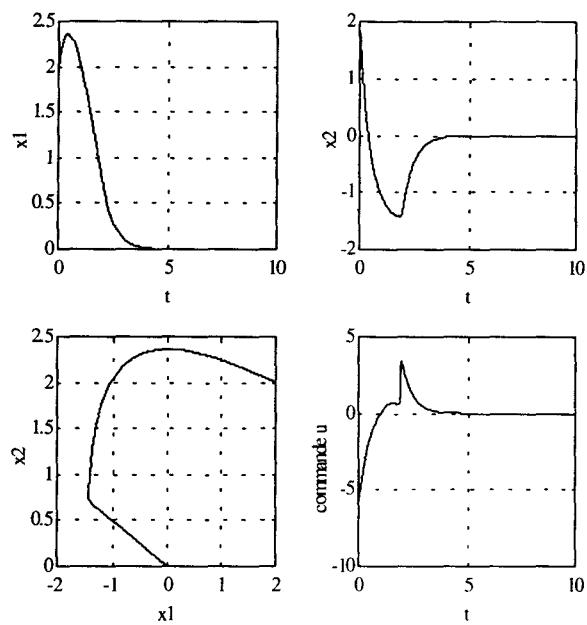


FIG. D-5: Exemple D.1 : simulation du système (D.15) commandé par une commande approchée de (D.20) avec $k_1 = 2$, $m = 2$, $\varepsilon = 10^{-2}$.

Bibliographie

- [1] G. ABDALLAH, P. DORATO, J. BENITEZ-READ, R. BYRNE. « Delayed Positive Feedback Can Stabilize Oscillatory Systems ». *ACC'93, American Control Conference*,, 3106–3107, 1993.
- [2] W. AGGOUNE. « *Contribution à la Stabilisation de Systèmes Non Linéaires : Application Aux Systèmes Non Réguliers et Aux Systèmes à Retards* ». PhD thesis, INRIA Lorraine/CRAN, Univ. de Metz, France, June 1999.
- [3] J. ASSAN. « *Analyse et Synthèse de L'approche Géométrique Pour Les Systèmes sur un Anneau* ». PhD thesis, IRCCyN, Univ. de Nantes et d'Ancone, France-Italie, Octobre 1999.
- [4] J.P. AUBIN A. CELLINA. *Differential Inclusions*. Grundlehren der Math. Wiisenschaften 264. Editeur Springer-Verlag, 1984.
- [5] J.P. AUBIN H. FRANKOWSKA. *Set-Valued Analysis*. System and Control : Foundations and Applications. Editeur Birkhauser, 1990.
- [6] V.R. BASKER, K. HRISSAGIS, O.D. CRISALLE. « Variable Structure Control Design for Reduced Chatter in Uncertain Time Delay Systems ». *Proc. 36th IEEE CDC'97*, 3234–3236, San Diego, 1997.
- [7] R. BELLMAN K.L. COOKE. *Differential Difference Equations*. Academic Press, New York, 1963.
- [8] A. BENOUESSAN, G. DA PRATO, M.C. DELFOUR, S.K. MITTER. *Representation and Control of Infinite Dimensional Systems*, 1. Birkhauser, 1992.
- [9] Y. BLANCO, F. GOUAISBAUT, W. PERRUQUETTI, P. BORNE. « Sliding Mode Controller Design Using Polytopic Formulation ». *Proc. 40th IEEE CDC'01*, Orlando, USA, 2001.
- [10] Y. BLANCO J.P. RICHARD. « Stability Analysis of Uncertain Nonlinear Systems with Delay Using Takagi-Sugeno Fuzzy Representations ». *Proc. LTDS'00, Ancône*, 2000.

- [11] C. BONNET, J.R. PARTINGTON, M. SORINE. « Robust Control and Tracking in L_∞ of Delay Systems Equipped with a Relay Sensor ». *Proc. 8th. IFAC Conf. Large Scale Systems LSS'98*, Patras, July 1998.
- [12] C. BONNET, J.R. PARTINGTON, M. SORINE. « Robust Control and Tracking of a Delay System with Discontinuous Non-Linearity in the Feedback ». *International Journal of Control*, 72(15) :1354–1364, 1999.
- [13] C. BONNET, J.R. PARTINGTON, M. SORINE. « Robust Stabilization of a Delay System with Saturating Actuator or Sensor ». *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 10(7) :579–590, 2000.
- [14] S. BOYD, Ghaoui L. EL, E. FERON, V. BALAKRISHAN. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM, Philadelphia, 1994.
- [15] D. BRETHÉ. « Contribution à L'étude de la Stabilisation Des Systèmes Linéaires à Retards ». (in french), IRCCyN, Univ. de Nantes, EC Nantes, France, Decembre 1997.
- [16] D. BRETHÉ J.-J. LOISEAU. « A Result That Could Bear Fruit for the Control of Delay-Differential Systems ». *Proc. 4th IEEE Medit. Symp. On New Directions in Control and Automation, MSCA '96*, Maleme, Crete, Greece, June 1996.
- [17] E. CHERES, S. GUTMAN, Z.J. PALMOR. « Stabilization of uncertain dynamic systems including state delay ». *IEEE Trans. Aut. Control*, 34(11) :1199–1203, 1989.
- [18] E. CHERES, Z.J. PALMOR, S. GUTMAN. « Mix-Max Predictor Control for Uncertain Systems with Input Delays ». *IEEE Trans. Aut. Control*, 35(2) :210–214, 1990.
- [19] H.H. CHOI. « A New Method for Variable Structure Control System Design : A Linear Matrix Inequality Approach ». *Automatica*, 33 :2089–2092, 1997.
- [20] H.H. CHOI. « An LMI Approach to Sliding Mode Control Design for a Class of Uncertain Time Delay Systems ». *Proc. ECC'99*, Karlsruhe, Germany, September 1999.
- [21] S.B. CHOI J.K. HEDRICK. « An Observer-Based Controller Design Method for Improving Air/Fuel Characterization of Spark Ignition Engines ». *IEEE Trans. Control Syst. Technology*, 6(3) :325–334, 1998.
- [22] S.Y. CHU T.T. SOONG. « Time Delay Effect on Direct Output Feedback Controlled Mass Damper Systems ». *Proc. ACC'00, American Control Conference*, 3575–3579, Chicago, Illinois, June 2000.
- [23] G. CONTE A.M. PERDON. « Systems over a Principal Ideal Domain : A Polynomial Approach ». *SIAM J. Control and Optimization*, 20(1) :112–124, 1982.

- [24] G. CONTE A.M. PERDON. « The Disturbance Decoupling Problem for Systems over a Ring ». *SIAM J. Control and Optimization*, 33(3), 1995.
- [25] G. CONTE A.M. PERDON. « Non-Interacting Control Problems for Delay-Differential Systems Via Systems over Rings ». *CNRS Conf. Analyse et Commande Des Systèmes Avec Retards*, 101–114, Nantes, France, March 1996.
- [26] G. CONTE A.M. PERDON. « Systems over Rings : Theory and Applications ». *Proc. IFAC Workshop LTDS'98, Linear Time Delay Systems*, 223–234, Grenoble, France, July 1998. Plenary lecture.
- [27] R.F. CURTAIN H.J. ZWART. *An Introduction to Infinite Dimensional Linear Systems Theory*. Springer Verlag, New York, 1995.
- [28] M. DAMBRINE. « Contribution à L'étude de la Stabilité Des Systèmes à Retards ». PhD thesis, Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle de Lille, EC Lille, Univ. de Lille, France, Octobre 1994.
- [29] M. DAMBRINE, F. GOUAISBAUT, W. PERRUQUETTI, J.-P. RICHARD. « Robustness of sliding mode control under delays effects : a case study ». *Proc. 2nd IEEE-IMACS CESA '98, Comput. Eng. In Systems Applications*, 817–821, Hammamet, Tunisie, 1998.
- [30] M. DAMBRINE, J.P. RICHARD, P. BORNE. « Feedback Control of Time-Delay Systems with Bounded Control and State ». *Mathematical Problems in Engineering*, (1) :77–87, 1995. (first issue).
- [31] M. DELFOUR J. KARRAKCHOU. « State-Space Theory of Linear Time Invariant Systems with Delays in State, Control and Observation Variables, Parts 1 & ». *J. Math. Anal & Appl.*, 125 :361–452, 1987.
- [32] M. DELFOUR S. MITTER. « Controllability, Observability and Optimal Feedback Control of Affine, Hereditary, Differential Systems ». *SIAM J. Contr. Optim.*, 10 :298–328, 1972.
- [33] L. DUGARD E.I. VERRIEST, . *Stability and Control of Time-Delay Systems*, 228 *LNCIS*. Springer Verlag, 1997. (337 pages).
- [34] Anosov D.V.. « On Stability of Equilibrium Points of Relay Systems ». *Automation and Remote Control*, 2 :135–149, 1959.
- [35] L. EL GAOUI S.-I. NICULESCU, . *Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control*. Advances in Design and Control. SIAM, Philadelphia, 2000.
- [36] R. EL-KHAZALY. « Variable structure robust control of uncertain time-delay systems ». *Automatica*, 34(3) :327–332, 1998.

- [37] S.V. EMEL'YANOV. « On Peculiarities of Variable Structure Control Systems with Discontinuous Switching Functions ». *Doklady ANSSR*, 153 :776–778, 1963.
- [38] S.V. EMEL'YANOV, S.V. KOROVIN, L.V. LEVANTOVSKY. « Higher Order Sliding Modes in the Binary Control System ». *Soviet Physics*, 31(4) :291–293, 1986.
- [39] S.V. EMEL'YANOV, S.V. KOROVIN, L.V. LEVANTOVSKY. « Higher Order Sliding Modes in Control Systems ». *Differential Equations*, 29(11) :1627–1647., 1993.
- [40] K. ENGELBORGHES, M. DAMBRINE, D. ROOSE. « Limitations of a Class of Stabilization Methods for Delay Systems ». *IEEE Trans. Aut. Control*, 46(2) :336–339, 2001.
- [41] Y.A. FIAGBEDZI A.E. PEARSON. « Feedback Stabilization of Linear Autonomous Time Lag Systems ». *IEEE Trans. Aut. Control*, 31 :847–855, 1986.
- [42] A.G. FILIPPOV. *Differential Equations with Discontinuous Right Hand-Sides*. Mathematics and its Applications. Kluwer Ac. Pub., 1983.
- [43] T. FLOQUET. « Contributions À la Commande Par Modes Glissants D'ordre Supérieur ». PhD thesis, Université de Lille, LAIL, décembre 2000.
- [44] T. FLOQUET, J.P. BARBOT, W. PERRUQUETTI. « Second Order Sliding Mode Control for Induction Motor ». *Proc. 39th IEEE CDC'00*, Sydney, Australia, december 2000.
- [45] L.M. FRIDMAN, E. FRIDMAN, E.I. SHUSTIN. « Steady Modes in a Discontinuous Control Relay with Time Delay ». *Pure Mathematics & Applications (PUMA)*, 4(1), 1993.
- [46] L.M. FRIDMAN, E. FRIDMAN, E.I. SHUSTIN. « Steady Modes in an Autonomous System with Break and Delay ». *J. Differential Equations*, 29(8), 1993.
- [47] L.M. FRIDMAN, E. FRIDMAN, E.I. SHUSTIN. « Steady Modes and Sliding Modes in the Relay Control Systems with Time Delay ». *35th IEEE CDC'96*, 4601–4606, Kobe, Japan, 1996.
- [48] L.M. FRIDMAN A. LEVANT. *Sliding Modes of Higher Order as a Natural Phenomenon in Control Theory*, 217 *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer Verlag, 1996.
- [49] M. FU, H. LI, S.I. NICULESCU. « Robust Stability and Stabilisation of Time-Delay System Via Integral Quadratic Constraint Approach », 228 *LNCIS*, 101–116. Springer-verlag , 1997.
- [50] A. GERMANI, C. MANES, P. PEPE. « Linearization and Decoupling of Nonlinear Delay Systems ». *Proc. IEEE Amerivan Control Conference (ACC)* , Philadelphia, USA., 1998.

- [51] A. GERMANI, C. MANES, P. PEPE. « A State Observer for Nonlinear Delay Systems ». *Proc. 37th IEEE CDC'98*, 355–360, Tampa, Florida, USA, December 1998.
- [52] K. GOPALSAMY. *Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics*, 74 Mathematics and Applications. Kluwer Acad., 1992.
- [53] F. GOUAISBAUT, Y. BLANCO, J.P. RICHARD. « Robust Sliding Mode Control of Nonlinear Systems with Delay : A Design Via Polytopic Formulation ». *Accepté à International Journal of Control*, 2001.
- [54] F GOUAISBAUT, Y. BLANCO, J.P. RICHARD. « Robust Control of Nonlinear Time Delay System : A Sliding Mode Control Design ». *Proc. 1th IFAC Symposium NOLCOS'01*, St Petersburg, Russia, July 2001.
- [55] F. GOUAISBAUT, M. DAMBRINE, J.-P. RICHARD. « Robust Control of Delays Systems : A Sliding Mode Control Design Via LMI ». *accepté à Systems and Control letters*, 2001.
- [56] F. GOUAISBAUT, M. DAMBRINE, J.P. RICHARD. « Sliding Mode Control of Linear Time Delays Systems ». *IMA Journal on Mathematical Control and Information*, 2001. A paraître.
- [57] F. GOUAISBAUT, M. DAMBRINE, J.P. RICHARD. « Sliding Mode Control of Perturbed Systems with Time Varying Delays ». *Proc. 1th IFAC Symposium on System Structure and Control, SSSC'01*, Prague, 2001.
- [58] F. GOUAISBAUT, M. DAMBRINE, J.P. RICHARD. « Sliding Mode Control of Systems with Distributed Delay ». USA NEW-MEXICO, , *Accepté à TDS'01*, Santa-Fe, 2001.
- [59] F. GOUAISBAUT, M. DAMBRINE, J.P. RICHARD. « Sliding Mode Control of Time Delay Systems Via Functional Surfaces ». *Proc. 40th IEEE CDC'01*, Orlando, USA, 2001. accepté.
- [60] F. GOUAISBAUT, M. DAMBRINE, J.P. RICHARD. « Variable Structure Control of Systems with State Delays ». *Proc. 16th World Congress IMACS'00*, Session 154, Lausanne, Switzerland, August 2000.
- [61] F. GOUAISBAUT, W. PERRUQUETTI, Y. ORLOV, J.P. RICHARD. « A sliding mode controller for linear time delay systems ». *Proc. ECC'99 European Control Conference*, Karlsruhe, September 1999.
- [62] F. GOUAISBAUT, W. PERRUQUETTI, J.P. RICHARD. « A sliding mode control for linear systems with input and state delays ». *Proc. 38th IEEE CDC'99*, Phoenix, 1999.

- [63] F GOUAISBAUT, J-P. RICHARD, M. DAMBRINE. « Robust Control of Delay Systems : A Sliding Mode Control Design Via LMI ». *Proc. IFAC ECC'01*, Porto (Portugal), 2001.
- [64] A. GOUBET-BARTHOLOMÉÜS. « *Sur la Stabilité et la Stabilisation Des Systèmes Retardés : Critères Dépendant Des Retards* ». PhD thesis, Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle de Lille, EC Lille, France, Decembre 1996.
- [65] A. GOUBET.-BARTHOLOMÉÜS, M. DAMBRINE, J.P. RICHARD. « Bounded Domains and Constrained Control of Linear Time-Delays Systems ». *JESA, European Journal of Automated Systems*, 31(6) :1001–1014, October 1997. (special issue).
- [66] A. GOUBET.-BARTHOLOMÉÜS, M. DAMBRINE, J.P. RICHARD. « Stability of Perturbed Systems with Time-Varying Delay ». *Systems and Control Letters*, (31) :155–163, 1997.
- [67] R.L. GREGORY. *L'oeil et Le Cerveau, la Psychologie de la Vision*. DeBoeck Université, Belgique, 2000.
- [68] K. GU. « Discretized LMI Set in the Stability Problem of Linear Uncertain Time-Delay Systems ». *Internat. J. Control*, 68 :923–934, 1997.
- [69] K. GU S.-I. NICULESCU. « Additional Dynamics in Transformed Time-Delay Systems ». *Trans. Aut. Control*, 45(3) :572–575, March 2000.
- [70] K. GU S.I. NICULESCU. « Additional Dynamics in Transformed Time-Delay Systems ». *Proc. 38th IEEE CDC'99*, 4673–4677, Phoenix, Arizona, USA, December 1999.
- [71] B. HECK. « Sliding Mode Control for Singularly Perturbed Systems ». *Int. J. Control*, 53 :985–1001, 1991.
- [72] A. ISIDORI. *Nonlinear Control Systems*. Communications and Control Engineering. Springer Verlag, London, 1999.
- [73] D. IVANESCU. « *Sur la Stabilisation Des Systèmes À Retard : Théorie et Applications* ». PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2000.
- [74] N. JALILI N. OLGAC. « Optimum Delayed Feedback Vibration Absorber for MDOF Mechanical Structures ». *Proc. 37th IEEE CDC'98*, 4734–4739, Tampa, Florida, USA, December 1998.
- [75] M. JANKOVIC. « Control Lyapunov-Razumikhin Functions for Time Delay Systems ». *Proc. 38th IEEE CDC99*, 1136–1141, Phoenix, Arizona, USA, 1999.
- [76] M. JANKOVIC. « Robust CLRF Based Nonlinear Control Design for Time Delay Systems ». *Proc. ACC'00*, 1980–1985, Chicago, Illinois, USA, 2000.

- [77] M. JANKOVIC. « Extension of Control Lyapunov Functions to Time-Delay Systems ». *Proc. 39th IEEE CDC'01*, Sydney, Australia, 2001.
- [78] E. KAMEN. « An Operator Theory of Linear Functional Differential Equations ». *J. of Differential Equations*, 27 :274–297, 1978. (also in proc. CDC'76).
- [79] V.B. KOLMANOVSKII A. MYSHKIS. *Introduction to the theory and applications of functional differential equations*. Kluwer Acad., Dordrecht, 1999.
- [80] V.B. KOLMANOVSKII, S.I. NICULESCU, J.P. RICHARD. « On the Liapunov-Krasovskii functionals for stability analysis of linear delay systems ». *Int. J. Control*, 72(4) :374–384, February 1999.
- [81] V.B. KOLMANOVSKII V.R. NOSOV. *Stability of functional differential equations*. Academic Press, London, 1986.
- [82] V.B. KOLMANOVSKII J.P. RICHARD. « Stability of some Linear Systems with Delay ». *IEEE Trans. Aut. Control*, 44(5) :984–989, May 1999.
- [83] V.B. KOLMANOVSKII L.E. SHAIKHET. *Control of systems with aftereffect*, 157. American Mathematical Society, 1996. (359 pages).
- [84] A.J. KOSHKOUEI A.S.I. ZINOBER. « Sliding mode time-delay systems. ». *Proc. International Workshop on VSS*, 97–101, Toskyo, 1996.
- [85] J.F. LAFAY, M. FLIESS, H. MOUNIER, O. SENAME. « Sur la commandabilité des systèmes linéaires à retards ». *CNRS Conf. Analyse et commande des systèmes avec retards*, 19–42, Nantes, France, 1996.
- [86] E.B. LEE A.W. OLBROT. « Observability and related structural results for linear hereditary systems ». *Int. J. Control*, 34 :1061–1078, 1981.
- [87] A. LEVANT. « Sliding Order and Sliding Accuracy in Sliding Mode Control ». *International Journal of Control*, 58(6) :1247–1263., 1993.
- [88] A. LEVANT. « Higher Order Sliding : Collection of Design Tools ». *Proc. ECC'97*, Bruxelles, Belgique, 1997.
- [89] X. LI C.E. DE SOUZA. « Robust Stabilization and H_∞ Control of Uncertain Linear Time-Delay Systems ». *Proc. 13th IFAC World Congress*, 113–118, San Francisco, CA, 1996. Vol. H.
- [90] X. LI C.E. DE SOUZA. « Delay-Dependent Robust Stability and Stabilization of Uncertain Linear Delay Systems : A Linear Matrix Inequality Approach ». *IEEE Trans. Aut. Control*, 42(8) :1144–1148, 1997.

- [91] X. LI S. YURKOVICH. « Sliding mode control of systems with delayed states and control ». *Variable Structure systems, sliding mode and nonlinear control*, 247(1), 1999.
- [92] H. LOGEMANN Martensson B.. « Adaptative Stabilization of Infinite-Dimensional Systems ». *IEEE Trans. Aut. Control*, 37(2) :1869–1883, December 1992.
- [93] J.J. LOISEAU D. BRETHÉ. « An effective algorithm for finite spectrum assignment of single-input systems with delays ». *Mathematics & Computers in Simulation*, 45(3-4), January 1998. (Special issue).
- [94] A.G. LUKYANOV V.I. UTKIN. « Methods of reducing equations of dynamics systems to regular form ». *Automat. Remote Control*, 42 :413–420, 1981.
- [95] N. LUO M. De la SEN. « State Feedback Sliding Mode Control of a Class of Uncertain Time-Delay Systems ». *IEE proceedings-D*, 140(4) :261–274, 1993.
- [96] MACDONALD. *Time Lags in Biological Models*, 27 *Lecture Notes in Biomathematics*. Springer Verlag, 1978.
- [97] A. MANITIUS A.W. OLBROT. « Finite spectrum assignment problem for systems with delays ». *IEEE Trans. Aut. Control*, 24(4) :541–553, 1979.
- [98] L.A. MARQUEZ MARTINEZ. « Analyse et commande des systèmes non linéaires à retards ». PhD thesis, IRCCyN, Univ. de Nantes, EC Nantes, France, Juin 2000.
- [99] L.A. MARQUEZ-MARTINEZ C.H. MOOG. « On the Input-Output Linearization of Non-Linear Time-Delay Systems ». *Proc. IFAC Conf. Syst. Struc. and Control*, Nantes, France, 1998.
- [100] W. MICHELS, R. SEPULCHRE, D. ROOSE. « Stability of Perturbed Delay Differential Equations and Stabilization of Nonlinear Cascade Systems ». Rapport interne TW298, Université Catholique de Leuven, 2000.
- [101] S. MONDIÉ SANTOS. « Une condition nécessaire pour l’implantation de lois de commandes à retards distribuées ». *Proc. CIFA2000, 1e IEEE Conférence Internationale Francophone d’Automatique*, Lille, France, July 2000.
- [102] C.H. MOOG, R. CASTRO LINARES, M. VELASCO VILLA, L.A. MARQUEZ MARTINEZ. « The Disturbance Decoupling Problem for Time-Delay Nonlinear Systems ». *IEEE Trans. Aut. Control*, 45(5) :572–575, May 2000.
- [103] A.S. MORSE. « Ring models for delay differential systems ». *Automatica*, 12 :529–531, 1976.

- [104] H. MOUNIER. « *Propriétés structurelles des systèmes linéaires à retards : aspects théoriques et pratiques* ». PhD thesis, LSS, Univ. Paris-Sud, France, October 1995.
- [105] H. MOUNIER G. BASTIN. « Compartimental Modelling for Congestion Control in Communication Networks ». *Proc. 1th IFAC NOLCOS'01*, Saint Petersburg, Russia, 2001.
- [106] H. MOUNIER, P. ROUCHON, J. RUDOLPH. « Some examples of linear systems with delays ». *JESA, European Journal of Automated Systems*, 31(6) :911–926, October 1997. special issue.
- [107] A.D. MYSHKIS. « General theory of differential equations with delay ». *Uspehi Mat. Naut (N.S.)*, 4(33) :99–141, 1949. (in Russian), English transl. in Transl. AMS, No. 55, p. 1-62, 1951.
- [108] S.K. NGUANG. « Robust H_∞ Control of a Class of Nonlinear Systems with Delayed State and Control : A LMI Approach ». *Proc. 37th IEEE CDC'98*, 2384–2389, Tampa, Florida, USA, December 1998.
- [109] S.I. NICULESCU. *Systèmes à retard : aspects qualitatifs sur la stabilité et la stabilisation*. Nouveaux Essais. Diderot Multimedia, Paris, 1997.
- [110] S.I. NICULESCU. « H_∞ memoryless control with an α -stability constraint for time delays systems : an LMI approach ». *IEEE Trans. Aut. Control*, 43(5) :739–743, May 1998.
- [111] S.I. NICULESCU, C.E. DE SOUZA, L. DUGARD, J.M. DION. « Robust exponential stability of uncertain systems with time-varying delays ». *IEEE Trans. Aut. Control*, 43(5) :743–748, May 1998.
- [112] T. OGUCHI, A. WATANABE, T. NAKAMIZO. « Input-output linearization of retarded nonlinear systems by an extended Lie derivative ». *Proc. 37th IEEE CDC'98*, 1364–1369, Tampa, Florida, USA, December 1998.
- [113] A.W. OLBROT. « A sufficiently large time delay in feedback loop must destroy exponential stability of any decay rate ». *IEEE Trans. Aut. Control*, 29 :367–368, 1984.
- [114] Y.V. ORLOV. « Discontinuous unit feedback control of uncertain infinite-dimensional systems ». *IEEE Trans. Aut. Control*, 45(5) :834–843, May 2000.
- [115] Y.V. ORLOV V.I. UTKIN. « Sliding mode control in infinite-dimensional systems ». *Automatica*, 6 :753–757, 1987.
- [116] S. OUCHERIAH. « Dynamic compensation of uncertain time-delay systems using variable structure approach ». *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Fundamental theory and Applications*, 42(8) :466–470, 1995.

- [117] A.E. PEARSON A. A. PANDISCO JR. « Control of Time Lag Systems Via Reducing Transformations ». *Imacs'97 World Congress*, 9–14, Berlin, August 1997.
- [118] W. PERRUQUETTI J.P. BARBOT. *Sliding Mode Control in Engineering*. Marcel Dekker, 2001 (to appear).
- [119] W. PERRUQUETTI, J.P. RICHARD, P. BORNE. « A Generalized Regular Form for Sliding Mode Stabilization of MIMO Systems ». *Proc. 36th IEEE CDC'97*, San Diego, 1997.
- [120] P. PICARD. « Sur l'observabilité et la commande des systèmes linéaires à retards modélisés sur un anneau ». PhD thesis, IRCCyN, Univ. de Nantes, EC Nantes, France, Octobre 1996.
- [121] P. PICARD, J.F. LAFAY, V. KUCERA. « Feedback realization of nonsingular precompensators for linear systems with delays ». *IEEE Trans. Aut. Control*, 42(6), 1997.
- [122] P. PICARD, O. SENAME, J.F. LAFAY. « Observers and observability indices for linear systems with delays ». *Proc. IEEE-IMACS CESA*, 81–86, Lille, France, July 1996. Vol. 1.
- [123] K. PYRAGAS. « Control of Chaos Via Extented Delay Feedback ». *Physics Letters A*, 206 :323–330, 1995.
- [124] J.P. RICHARD. « Some Trends and Tools for the Study of Time delay systems ». *Proc. 2nd IMACS-IEEE CESA '98*, 27–43, Tunisia, April 1998. plenary lecture.
- [125] J.P. RICHARD, M. DAMBRINE, F. GOUAISBAUT, W. PERRUQUETTI. « Systems with Delays : An Overview of some Recent Advances ». *SACTA special issue on stability and optimal control of difference and differential equations with delay*, 3(1), 2000.
- [126] J.P. RICHARD, F. GOUAISBAUT, W. PERRUQUETTI. « Sliding Mode Control in the Presence of Delay ». *Kibernetika.*, 37 :277–294, 2001.
- [127] Y.H. ROH J.H. OH. « Robust stabilization of uncertain input-delay systems by sliding mode control with delay compensation ». *Automatica*, 35 :1681–1685, 1999.
- [128] O. SENAME. « Sur la commandabilité et le découplage des systèmes linéaires à retards ». PhD thesis, Laboratoire d'Automatique de Nantes, Univ. de Nantes & EC Nantes, France, Octobre 1994.
- [129] O. SENAME, R. RABAH, J.F. LAFAY. « Decoupling without prediction of linear systems with delays : a structural approach ». *Syst. & Contr. Lett.*, 25 :387–395, 1995.
- [130] S.N. SHIMANOV. « On Stability in the Critical Case of a Zero Root for Systems with Time Lag ». *J.Appl.Math. Mech.*, 24 :653–668, 1960.

- [131] K.K. SHYU J.J. YAN. « Robust stability of uncertain time-delay systems and its stabilization by variable structure control ». *Int. J. of Control*, 57 :237–246, 1993.
- [132] H. SIRA-RAMIREZ. « Differential Geometric Methods in Variable-Structure Control ». *International Journal of Control*, 48(4) :1359–1390., 1988.
- [133] K.U. SMITH W.M. SMITH. *Perception and Motion : An Analysis of Space Structured Behaviour*. Saunders, Londre, 1962.
- [134] O.J.M. SMITH. « A Controller to Overcome Dead Time ». *Instrument Society of America Journal (ISA)*, 6 :28–33, 1959.
- [135] E. SONTAG. « A "universal" Construction of Arstein's Theorem on Nonlinear Stabilization ». *Systems Control Letters*, 13 :117–123, 1989.
- [136] W-C. SU, S.V. DRAKUNOV, U. OZGUNER. « Constructing discontinuity surfaces for variable structure systems : a Lyapunov approach ». *Automatica*, 32(6) :925–928, 1996.
- [137] H.J. SUSSMANN P.V. KOKOTOVIC. « The Peaking Phenomenon and the Global Stabilization of Nonlinear Systems ». *IEEE Trans. on Autom. Cont.*, 36 :424–439, 1991.
- [138] T. TAKAGI M. SUGENO. « Fuzzy Identification of Systems and its Applications to Modelling and Control ». *IEEE Trans. on S.M.C.*, 15 :116–132., 1985.
- [139] K.K. TAN, Q.K. WANG, T.H. LEE. « Finite spectrum assignment control of unstable time delay processes with relay tuning ». *Ind. Eng. Chem. Res.*, 37(4) :1351–1357, 1998.
- [140] K. TANAKA, T. IKEDA, H. WANG. « Fuzzy Regulators and Fuzzy Observers Design : Relaxed Stability Conditions and LMI-Based Design ». *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 6(2) :14–23., 1998.
- [141] P.A. TCHANGANI. « Sur la stabilité des systèmes héréditaires non linéaires ». PhD thesis, LAIL, EC Lille, Univ. de Lille, France, Janvier 1999.
- [142] V.I. UTKIN. « Variable Structure Systems with Sliding Modes ». *IEEE Trans. on Autom. Cont.*, AC-22(2) :212–222., 1977.
- [143] V.I. UTKIN. *Sliding modes in control optimization*. CCES. Springer-Verlag, 1992.
- [144] V. VAN ASSCHE, M. DAMBRINE, J.F LAFAY, J.P. RICHARD. « Some problems arising in the implementation of distributed-delay control laws ». *Proc. 38th IEEE CDC'99*, 4668–4672, Phoenix, Arizona, December 1999.
- [145] K. WATANABE. « Finite-spectrum assignment and observer for multivariable systems with commensurate delays ». *IEEE Trans. Aut. Control*, 31(6) :543–550, 1986.

- [146] K. WATANABE, M. ITO, M. KANEKO. « Finite spectrum assignment problem for systems with multiple commensurate delays in state variables ». *Int. J. Control.*, 38(5) :506–508, 1983.
- [147] K. WATANABE, E. NOBUYAMA, K. KOJIMA. « Recent advances in control of time-delay systems A tutorial review ». *Proc. 35th IEEE CDC'96*, 2083–2089, Kobe, Japan, 1996.
- [148] K.D. YOUNG, V.I UTKIN, U. OZGUNER. « A Control Engineer's Guide to Sliding Mode Control ». *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 7(3) :328–342, May 1999.
- [149] J. ZHANG, C.R. KNOSPE, P. TSIOTRAS. « Toward less conservative stability analysis of time delay systems ». *Proc. 38th IEEE CDC'99*, 2017–2022, Phoenix, Arizona, December 1999.
- [150] F. ZHENG, M. CHENG, W-B. GAO. « Variable structure Control of Time-delay Systems with a simulation Study on Stabilizing Combustion in Liquid Propellant Rocket Motors ». *Automatica*, 31(7) :1031–1037, 1995.

