

UNIVERSITÉ PAUL SABATIER

Analyse et commande des systèmes temps réel

- Synthèse d'une commande à retard - APPLICATION À UN PROCÉDÉ ÉLECTRO-MÉCANIQUE

Auteurs :

Lucien RAKOTOMALALA

David TOCAVEN

Encadrant :

Carolina ALBEA-SÀNCHEZ

Table des matières

Introduction	1
1 Identification-Modélisation du système	2
1.1 Détermination de paramètres et du retard	2
1.2 Autres méthode	2
1.3 Modèle fréquentiel	3
1.4 Modèle espace d'état	3
1.5 Commandabilité et observabilité	3
1.6 Analyse de la boucle ouverte	5
1.7 Stabilité de la boucle fermée	5
1.7.1 Delay-Sweeping	5
1.7.2 Stabilité 2D	6
2 Étude d'une commande Proportionnelle-dérivateur	7
2.1 Intérêt de ce correcteur	7
2.2 Choix du gain dérivateur du correcteur $C(p)$	7
2.3 Choix du gain proportionnel du correcteur $C(p)$	7
2.4 Calcul de l'erreur de position	8
2.5 Simulation <i>Matlab</i> / <i>Simulink</i>	9
2.6 Équivalence avec retour d'état instantané	10
3 Placement du spectre Fini	11
3.1 Valeurs des pôles	11
3.2 Commande de dimension infinie	11
3.3 Simulation matlab	12
3.4 Robustesse de la commande	12
4 Étude d'un prédicteur de Smith	14
4.1 Schéma de principe du prédicteur de Smith	14
4.2 Fonction de transfert du système en boucle fermé	14
4.3 Correcteur sur le prédicteur de Smith	15
4.4 Analyse stabilité, ajout d'une perturbation	15
4.5 Simulation <i>Matlab</i> et observation des résultats	15
4.6 Changement du retard	15
5 Implantation sur le procédé réel	17
Annexes	19
TITRE	19
TITRE	19
Annexe 2 - TITRE	20

Introduction

Dans ce Travaux pratique du module *Systèmes à retards*, nous avons réalisé l'étude d'une commande sur un procédé électro-magnétique. Cette étude vise à implémenter plusieurs correcteur étudié au cours de notre cursus et pendant les cours/TD. Ces synthèse de commande utiliseront les théories établis autour des systèmes retards et seront autour de cette problématique.

Nous avons pour la création de cette commande, un chier des charges bien fourni que nous avons obtenu partir de l'énoncé :

- Il faut réaliser un asservissement en position angulaire.
- Il faut atteindre la consigne en moins de 8 secondes. $\Rightarrow T_r < 8s + h$
- Il ne doit pas y avoir d'oscillations.
- Il ne doit pas y avoir de dépassement de la consigne. $\Rightarrow \forall t \geq 0, V_g(t) \leq V_{ref}(t)$
- Il doit y avoir une erreur de position nulle. $t \rightarrow \infty, V_g(t) \rightarrow V_{ref}(t)$
- La commande doit rejeter Les perturbations de sortie de type échelon ($p(t) = p_0$) en maximum 3 secondes.

Dans un premier temps, nous allons établir la une série de modèle du procédé, en utilisant nos connaissances antérieure du procédé et de l'automatique et les nouvelles connaissance autour des systèmes à retards.

Ensuite, nous établirons un premier correcteur Proportionnel dérivateur, puis un spectre fini pour finir sur un prédicteur de Smith.

1 Identification-Modélisation du système

Dans un premier temps, nous allons déterminer les paramètres du moteur, ensuite, nous déterminerons le modèle fréquentiel ainsi que le modèle espace d'état du système. Puis, nous étudierons les propriétés, les performances et la stabilité du système.

1.1 Détermination de paramètres et du retard

On identifiera les paramètres du moteur grâce à une approche dite *boite noire*, c'est-à-dire que suivant la forme d'une réponse du système à un échelon, nous allons choisir une modélisation par fonction de transfert type (1^{er} ordre, 2^e ordre, ...). Comme il s'agit d'un moteur à courant continu, nous choisissons un modèle du premier ordre car il permet de former un modèle de précision suffisante au vu de notre application.

Un modèle du 1^{er} ordre est de la forme suivante :

$$G(p) = \frac{K}{\tau p + 1} \quad (1.1)$$

Où :

K : Le gain statique du système.

τ : La constante de temps du système (en seconde).

Nous identifierons K en mesurant le gain statique de la réponse à un signal échelon (pour t tel que la réponse se soit stabilisée) : $K = V_g(t)/U_m(t)$.

Pour l'estimation de τ , nous utiliserons la relation suivante : $\tau = t$ lorsque $\frac{V_g(t)}{U_m(t)} = 0,63 * K$.

Cette méthode nous a permis d'obtenir l'estimation suivante des paramètres :

$$\begin{cases} k_m &= 9,6048 \\ \tau_m &= 0,2533 \text{ secondes} \end{cases} \quad (1.2)$$

Pour identifier le retard, que nous savons être présent sur la commande du moteur, nous avons mesurer le décalage temporel entre le début d'un échelon unité que l'on injecte en entrée $U_m(t)$ du moteur et la sortie $V_g(t)$. Ce décalage représente le retard du système, le temps qu'il met avant de réagir à une modification de l'entrée (voir figure 1.1).

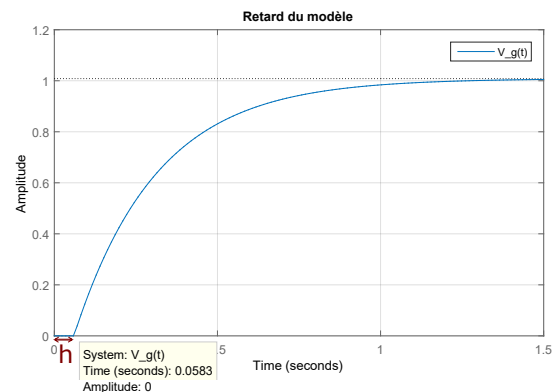


FIGURE 1.1 – Mesure du retard.

1.2 Autres méthode

Une autre façon de modéliser le modèle du moteur est un approche de type *boite blanche*, c'est-à-dire de créer un modèle du moteur à partir d'une étude physique du système.

1.3 Modèle fréquentiel

Avec l'estimation des paramètres du moteur, nous avons formé deux fonctions de transferts. La première définit la fonction entre $V_g(t)$ et l'entrée $U_m(t)$ et la seconde entre $V_s(t)$ et $U_m(t)$.

$$\begin{cases} \frac{V_g(t)}{U_m(t)} = \frac{k_g \cdot k_m}{\tau_m p + 1} e^{-hp} \\ \frac{V_s(t)}{U_m(t)} = \frac{k_s \cdot k_m \cdot k_r}{p(\tau_m p + 1)} e^{-hp} \end{cases} \quad (1.3)$$

Avec l'estimation des paramètres donnés en cours, figure 1.2 tracé (1), nous avons tracé la réponse à un échelon unité de ces deux fonctions de transferts.

1.4 Modèle espace d'état

À l'aide des fonctions de transferts précédentes, nous avons fait un modèle espace d'état en choisissant :

Pour entrée $u(t) : u(t) = U_m(t)$

Pour sorties $y(t) : y(t) = \begin{pmatrix} V_g(t) \\ V_s(t) \end{pmatrix}$

Pour état $x(t) : x(t) = \begin{pmatrix} \Theta_s(t) \\ \Omega_m(t) \end{pmatrix}$

Nous avons extrait les équations suivantes du modèle schéma-bloc du moteur :

$$\begin{cases} V_g(t) = k_g \Omega_m(t) \\ V_s(t) = k_s \Theta_s(t) \end{cases} \quad (1.4)$$

Après manipulation des fonctions de transferts précédentes et des expressions de l'équation 1.4, nous avons obtenu le modèle espace d'état suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t-h) \\ y(t) = C x(t) + D u(t-h) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & k_r \\ 0 & -\frac{1}{\tau_m} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_m}{\tau_m} \end{bmatrix} u(t-h) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & k_g \\ k_s & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t-h) \end{cases} \quad (1.5)$$

À l'aide des paramètres de référence, nous avons tracé la réponse à un échelon unité du modèle espace d'état, figure 1.2, tracé (2).

Nous avons comparé les réponses entre les deux modélisations afin de vérifier qu'il n'y ait pas d'erreur. Nous avons pour cela tracé la réponse à un échelon unité de la différence des deux modèles, figure 1.3. Nous pouvons constater que l'erreur est négligeable et doit être due au bruit numérique et/ou à la méthode de calcul de la réponse. Nos modèles sont donc équivalents par rapport à une réponse à un échelon unité.

1.5 Commandabilité et observabilité

Nous allons maintenant étudier l'observabilité et la commandabilité de notre modèle et l'influence du retard sur ces propriétés. Nous utiliserons, pour cela, le modèle espace d'état où nous exprimerons le retard grâce à ∇ dans le modèle espace d'état.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & k_g \\ 0 & -\frac{1}{\tau_m} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla \frac{k_m}{\tau_m} \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} 0 & k_g \\ k_s & 0 \end{pmatrix} x(t) \end{cases} \quad (1.6)$$

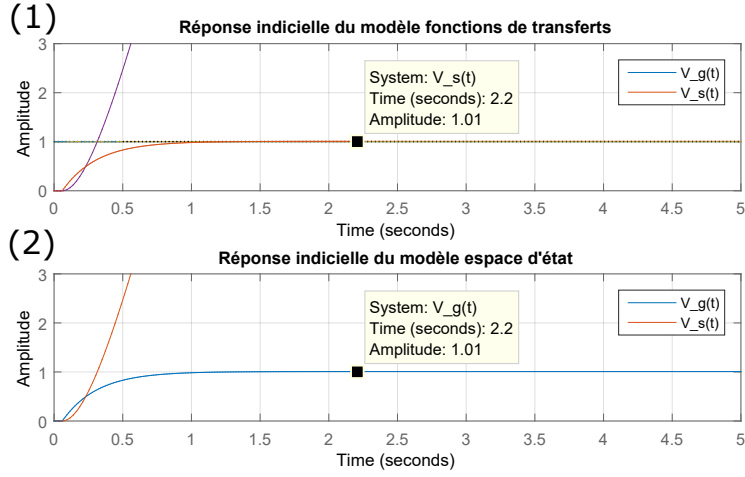


FIGURE 1.2 – Réponse à un échelon indiciel des modèles fonctions de transfert (1) et espace d'état (2).

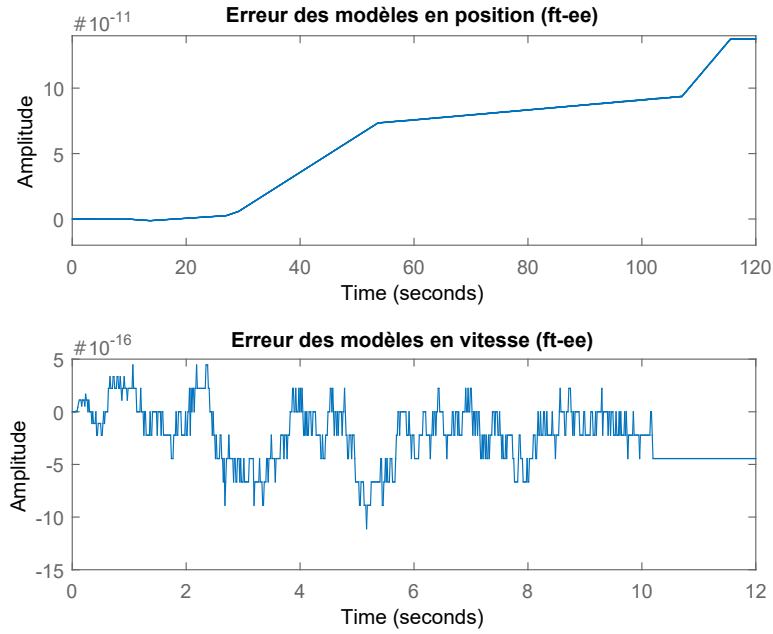


FIGURE 1.3 – Réponse à un échelon unité de la différence des deux modèles.

Nous avons ensuite calculer les matrices de commandabilité et d'observabilité, respectivement :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k_m * k_r * \nabla}{\tau_m} \\ \frac{k_m * \nabla}{\tau_m} & -\frac{k_m * \nabla}{\tau_m^2} \end{bmatrix} \\ \mathcal{O} &= \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_g \\ k_s & 0 \\ 0 & -\frac{k_g}{\tau_m} \\ 0 & k_r * k_s \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Nous avons vérifié que le rang de la matrice de commandabilité et de celle d'observabilité sont bien égaux à la dimension de A . Si cette condition est respectée et qu'il n'y a pas de ∇ dans la matrice, la propriété (commandabilité ou observabilité) est qualifiée de forte. Dans le cas où, en plus d'être de bon rang, il y a ∇ dans la matrice de commandabilité ou d'observabilité, la propriété est dite faible (car dépend du retard). Dans notre cas, \mathcal{C} est de rang égal à la dimension de A et contient ∇ , donc le système est faiblement commandable.

Pour \mathcal{O} , On peut remarquer qu'il n'y a pas de ∇ et que le rang est égal à la dimension de A , donc le système est fortement observable.

1.6 Analyse de la boucle ouverte

Nous allons maintenant étudier les performances de notre système. Nous avons choisi d'étudier les performances sur la sortie $V_g(t)$. Toujours à l'aide de matlab, nous avons obtenu les performances suivantes :

Temps de monté : $t_m = 0,659$ secondes.

Temps de réponse à 5% : $t_r = 0,959$ secondes.

Oscillation : Il n'y a pas d'oscillations.

Gain statique : $G_{stat} = 1.05$. Il y a donc un dépassement de 0,05 soit de 5%.

1.7 Stabilité de la boucle fermée

Nous allons maintenant étudier la stabilité de la boucle fermée par deux méthodes : le *Delay-sweeping* et l'étude de la *stabilité 2D*. Avant cela, nous allons donner les fonctions de transferts en boucle fermée du système.

$$\begin{cases} \frac{V_s(s)}{u_m(s)} = \frac{e^{-hp} k_m * k_r * k_s}{\tau_m * p^2 + p + e^{-hp} k_m * k_r * k_s} \\ \frac{V_g(s)}{u_m(s)} = \frac{e^{-hp} k_m * k_g}{\tau_m * p + 1 + e^{-hp} k_m * k_g} \end{cases} \quad (1.8)$$

Nous avons aussi simulé la boucle fermée sans correction sur simulink, figure 1.4 et voici la réponse à un échelon unité, figure 1.5. Sur $V_s(t)$, nous pouvons observer beaucoup d'oscillations, du dépassement, un temps de convergence assez important et une erreur statique nulle.

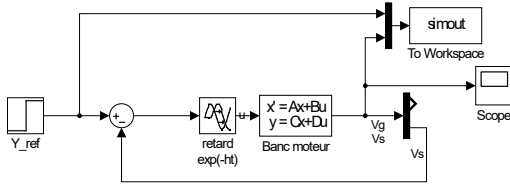


FIGURE 1.4 – Modèle SIMULINK du système en boucle fermée sans correcteur.

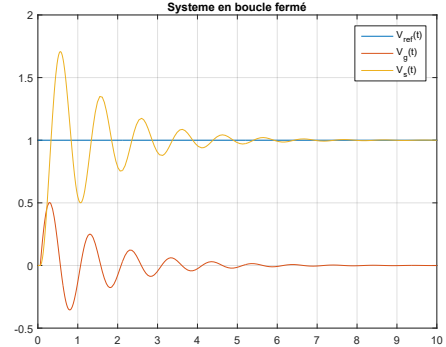


FIGURE 1.5 – Tracé de la réponse à un échelon unité du système en boucle fermée sans correcteur.

1.7.1 Delay-Sweeping

Nous allons étudier la stabilité à l'aide de la méthode du *Delay-sweeping*. Nous allons décomposer le quasipolynôme caractéristique de la fonction de transfert $\frac{V_s(s)}{u_m(s)}$ en deux. Une partie contenant la partie du quasipolynôme indépendante du retard $P(p)$ et la seconde partie ceux qui dépendent du retard $Q(p)$. Afin d'analyser la stabilité, nous allons calculer le module et l'argument de l'équation suivante (où $p = j\omega$) :

$$P(j\omega) + Q(j\omega)e^{-j\omega h} = 0 \quad (1.9)$$

Nous avons identifier, sur la fonction de transfert concernée, $P(p)$ et $Q(p)$:

$$\begin{cases} P(p) = \tau_m p^2 + p \\ Q(p) = k_m * k_s * k_r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P(p) = -\tau_m \omega^2 + j\omega \\ Q(p) = k_m * k_s * k_r \end{cases} \quad (1.10)$$

Voici le module et l'argument :

$$\begin{array}{lcl}
\left\| \frac{Q(j\omega)}{P(j\omega)} \right\| & = & 1 \\
\Leftrightarrow \frac{k_m * k_s * k_r}{\sqrt{(-\tau_m \omega^2)^2 + \omega^2}} & = & 1 \\
\Leftrightarrow \tau_m^2 \omega^4 + \omega^2 - (k_m * k_r * k_s)^2 & = & 0 \\
\Leftrightarrow \omega & = & \begin{cases} -5.9206 \\ 7.1161 * i \\ -7.1161 * i \\ 5.9206 \end{cases} \\
\Leftrightarrow \omega & = & 5.9206 \text{ rad/sec}
\end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{lcl}
\bar{h}\omega & = & \arg\left(-\frac{Q(j\omega)}{P(j\omega)}\right) + 2k\pi \\
\Leftrightarrow \bar{h}\omega & = & \arg(-k_m * k_r * k_s) - \arg(-\tau_m \omega^2 + j\omega) + 2k\pi \\
\Leftrightarrow \bar{h}\omega & = & -\pi - 1,588\pi + 2k\pi \\
\Leftrightarrow \bar{h} & = & 0,0993\pi \\
\Leftrightarrow \bar{h} & = & 0,0993\pi
\end{array} \right. \quad (1.12)$$

1.7.2 Stabilité 2D

2 | Étude d'une commande Proportionnelle-dérivateur

2.1 Intérêt de ce correcteur

Pour établir notre asservissement en position, nous devons faire en sorte de commander le transfert entre u_m et V_s . Ce transfert dispose d'un intégrateur pur et d'un pôle en $-\frac{1}{\tau_m}$, qui donnent l'instabilité de la position du moteur à une entrée échelon. Un premier correcteur nous est proposé sous la forme :

$$C(p) = k_0(1 + d_i p) \quad (2.1)$$

avec k_0 le gain proportionnel et d_i le gain dérivateur. Avec une telle correction, nous allons diminuer l'ordre du transfert de position/consigne et perdre le pôle en 0 menant à l'instabilité.

2.2 Choix du gain dérivateur du correcteur $C(p)$

Passons maintenant au choix des valeurs du correcteur. On nous propose un choix particulier pour d_i dans l'énoncé du TP, nous allons voir ensemble en quoi ce choix est judicieux. Nous notons, pour le procédé étudié le transfert $G(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{p(1+\tau_m p)}$, la boucle fermée avec le correcteur en cours d'étude qui intervient de cette manière :

$$\begin{aligned} G_{bf}(p) &= \frac{Y(p)}{Y_{ref}} = \frac{C(p)G(p)}{1 + C(p)G(p)} = \frac{k_0(1 + d_i p) \frac{N(p)}{D(p)}}{1 + k_0(1 + d_i p) \frac{N(p)}{D(p)}} \\ &= \frac{k_0(1 + d_i p) \frac{N(p)}{p(1+\tau_m p)}}{1 + k_0(1 + d_i p) \frac{N(p)}{p(1+\tau_m p)}} \end{aligned}$$

si l'on prend : $d_i = \tau_m$, nous pouvons retomber sur une fonction de transfert plus simple qui est :

$$G_{bf} = \frac{k_0 N(p)}{p + k_0 N(p)} \quad (2.2)$$

En sachant que $N(p)$ contient e^{-hp} , nous voyons qu'avec ce correcteur, nous allons pouvoir manipuler l'influence du retard dans le système à l'aide k_0 et placer le pôle de la boucle fermée corrigée où nous le souhaitons.

Valeur du gain dérivateur : Application numérique : $d_i = 0.2533$

2.3 Choix du gain proportionnel du correcteur $C(p)$

Maintenant que les calculs théoriques du correcteur ont été effectués, nous allons passer à la recherche du gain proportionnel k_0 . Pour cela, nous allons nous référer aux contraintes du cahier des charges vu en Introduction. Si l'on décompose le résultat établi en 2.2, il vient comme représentation de Laplace du système en boucle fermée :

$$G_{bf} = \frac{k_0 k_r k_s k_m e^{-hp}}{p + k_0 k_r k_s k_m e^{-hp}} \quad (2.3)$$

Il devient donc évident que l'étude de cette boucle fermée passe par l'étude du quasi-polynôme défini par

$$p + k_0 k_r k_s k_m e^{-hp} = 0 \quad (2.4)$$

Valeur du gain proportionnel Le cahier des charges nous impose une réponse sans oscillations : cette contrainte est rempli par l'ordre 1 de cette équation caractéristique. Pour remplir les contraintes temporelles et de dépassement, nous allons analyser la boucle fermé obtenu avec un modèle du premier ordre sous la forme :

$$G(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \text{ avec } t_r \text{ le temps de réponse } = 3.3\tau$$

et K le gain en régime établi

en notant tout de même que notre temps de réponse doit être établi à partir du retard du système : $t_r + h \leq 8$. Nous obtenons donc, avec une application numérique : $\tau \leq \frac{8-h}{3.3} \Leftrightarrow \tau \leq 2.42$ et $K = 1$. Pour une identification de ces paramètres, nous prenons la fonction de transfert en boucle fermé que nous réécrivons pour correspondre avec la forme présentée précédemment :

$$G_{bf} = \frac{1}{\frac{1}{k_0 k_r k_s k_m e^{-hp}} p + 1} \quad (2.5)$$

Il vient donc : $\frac{1}{k_0 k_r k_s k_m e^{-hp}} < 2.42 \Leftrightarrow k_0 > \frac{1}{2.42 k_r k_s k_m e^{-hp}}$.

Valeur gain proportionnel : Application numérique : $k_0 = 0.0354$

Retard Admissible Pour cette étude, nous allons aborder l'étude du quasi-polynôme de la fonction de transfert en boucle fermé établi en '2.4.

Nous allons utiliser la méthode du *Delay Sweeping* pour connaitre le retard admissible de notre système en boucle fermé. Pour cela, nous posons :

$$\frac{Q(j\omega)}{P(j\omega)} = \frac{k_0 k_s k_m k_r}{j\omega} \quad (2.6)$$

On obtient alors, pour le calcul du module :

$$\left\| \frac{Q(j\omega)}{P(j\omega)} \right\| = \left\| \frac{k_0 k_s k_m k_r}{j\omega} \right\| = 1 \quad (2.7)$$

$$(2.8)$$

qui donne alors :

$$\omega = k_0 k_s k_m k_r$$

Nous appliquons ensuite ce résultat sur le calcul de l'argument suivant pour pouvoir en extraire le retard maximum accessible :

$$wh^* = -\arg \left(-\frac{Q(j\omega)}{P(j\omega)} \right) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (2.9)$$

qui nous donne :

$$\begin{aligned} h^* &= \frac{1}{\omega} \arg \left(-\frac{k_0 k_s k_r k_m}{j\omega} \right) \\ &= \frac{1}{\omega} \arg(-1) - \arg(j) \quad \text{car nous avons noté : } \omega = k_0 k_s k_r k_m \\ &= \frac{\pi}{2\omega} \end{aligned}$$

Valeur retard admissible : Application numérique : $h \in [0; 4.15]$

2.4 Calcul de l'erreur de position

Avec cette partie, nous pourrions établir l'ajout d'un gain de pré-compensation. Seulement, il vient par construction de l'asservissement la fonction de transfert de la boucle fermé trouvée en 2.3. Nous appliquons alors le théorème de la valeur finale sur la sortie du système pour obtenir la valeur du régime permanent. Cette valeur sera ensuite comparé avec la référence (si la référence est égale, tout est bon). Nous avons :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &= \lim_{p \rightarrow 0} p(Y(p)) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} p(G_{bf}(p)Y_{ref}(p)) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} p \left(\frac{k_0 k_r k_s k_m e^{-hp}}{p + k_0 k_r k_s k_m e^{-hp}} \frac{y_{ref}}{p} \right) \end{aligned}$$

La simplification des variables de Laplace et l'application de leur limite donnent un résultat pour le moins assez trivial qui est :

$$\lim_{p \rightarrow 0} Y(p) = y_{ref}$$

donc, nous pouvons conclure sur l'erreur de position en disant :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon(t) = y(t) - y_{ref}(t) = 0 \quad (2.10)$$

2.5 Simulation *Matlab* / *Simulink*

Nous avons pour cette partie établi plusieurs simulations de la correction. Un premier modèle a été effectué avec *Matlab* en ligne de commande. Il vous est donné ci-dessous :

```
mPD.BO = tf(k0*ks*kr*km,[1 0],...
            'InputDelay',h);

mPD.BF = feedback(mPD.BO,1);
```

Nous y créons donc une fonction de transfert de Boucle ouverte qui est $G_{BO}(p) = \frac{k_0 k_s k_m k_r e^{-hp}}{p}$ que nous rebouclons avec la commande *feedback*. Le résultat du transfert obtenu est présenté dans le *step* suivant (2.1)

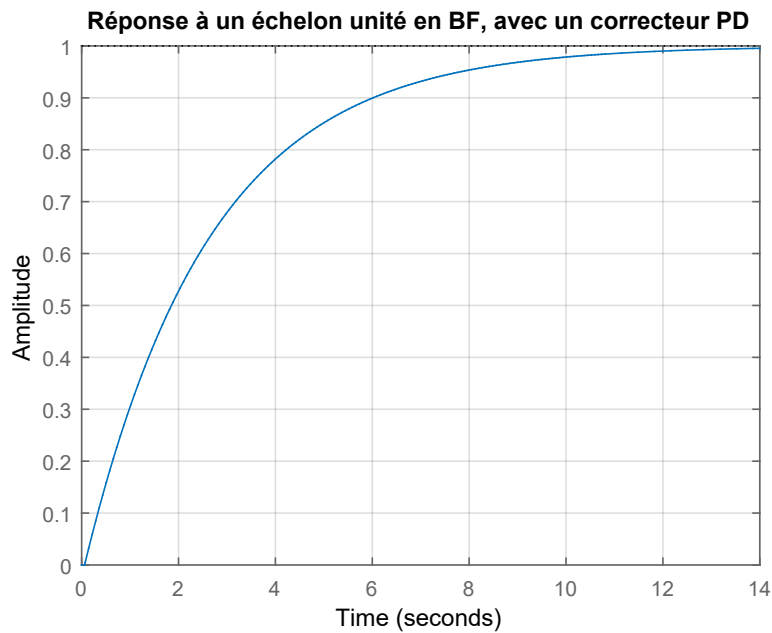


FIGURE 2.1 – Réponse à un échelon unité en BF, avec un correcteur PD

Nous avons réalisé une meilleure simulation, avec un fichier *Simulink* dans lequel nous avons relevé les signaux de sorties et d'amplitudes. Vous trouverez ces résultats aux figures 2.2 et 2.3.

Conclusion Résultats Nous avons bien le temps de réponse demandé dans le cahier des charges, ainsi que l'absence d'oscillations et dépassement. Le placement d'un tel correcteur nous permet de satisfaire le cahier des charges mais le retard admissible est lui, assez faible. Nous verrons dans les parties suivantes si des correcteurs mieux adaptés aux systèmes à retards sont possibles.

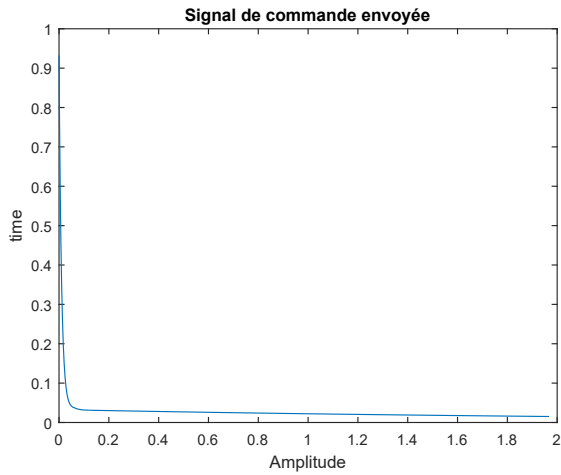


FIGURE 2.2 – Signal de commande envoyée *Simulink*

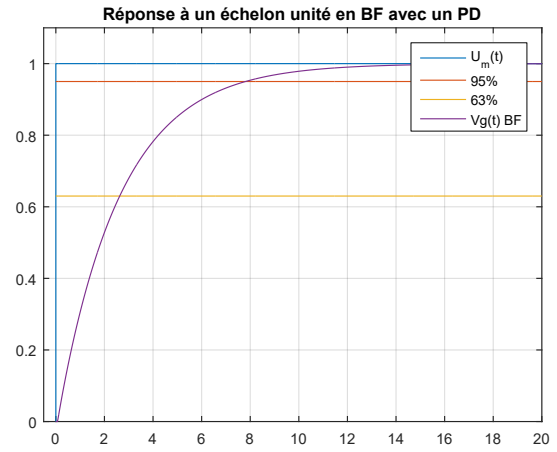


FIGURE 2.3 – Réponse à un échelon unité en BF avec un PD *Simulink*

2.6 Équivalence avec retour d'état instantané

Pour une loi de commande PD avec comme polynôme $Q(p) = k_1 + k_2p + \dots + k_np^n$ dans la boucle d'asservissement, nous pouvons écrire le développement suivant :

$$\begin{aligned} \frac{Y(p)}{E(p)} &= \frac{G(p)}{1 + Q(p)G(p)} \Leftrightarrow \frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{Y(p)}{U(p) + Q(p)Y(p)} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{E(p)} = \frac{1}{U(p) + Q(p)Y(p)} \\ &\Leftrightarrow E(p) = U(p) + Q(p)Y(p) \\ &\Leftrightarrow U(p) = E(p) - Q(p)Y(p) \end{aligned}$$

Cette dernière ligne est la caractéristique d'un retour d'état, si et seulement si les états sont disponibles sur la sortie du système.

3 | Placement du spectre Fini

Nous allons essayer de développer une loi de commande de dimension infinie permettant d'avoir un système en boucle fermé aillant un spectre fini. Pour cela, nous allons dans un premier temps définir des valeurs de pôles de façon à satisfaire le cahier des charges (voir Introduction). Ensuite, nous allons concevoir la commande de façon à avoir une boucle fermé de spectre fini et remplir le cahier des charges. Dans un troisième temps, nous simulerons le procédé et enfin nous étudierons la robustesse de la commande.

3.1 Valeurs des pôles

Avec le cahier des charges (voir Introduction) nous avons défini que le système en boucle fermé avec le correcteur doit avoir des valeurs propres réelles pour éviter les oscillations. Elles doivent être positives afin que le système soit stable. Avec l'exigence de temps de réponse inférieur ou égale à 8 secondes, Elles doivent être inférieures ou égalent à $-\frac{1}{8}$. Elles ne doivent être différentes l'une de l'autre afin d'éviter l'instabilité. Nous avons choisi le valeurs propres suivantes :

$$vp_{des} = \left\{ -\frac{1}{8} - \frac{1}{3} \right\} \quad (3.1)$$

3.2 Commande de dimension infinie

Nous avons ensuite calculer la valeur valeur du correcteur à partir de la forme générale. Nous avons calculer, à partir de l'équation du retour d'état par spectre fini :

$$u(t) = -Kx(t+h) \quad (3.2)$$

Ce retour d'état permet de placer les pôles de notre système en boucle fermé où on le souhaite (ici,celles de la question précédente) et de compenser la partie retardée du modèle du procédé. À partir du cours, nous avons pris l'équation suivante :

$$x(t+h) = e^{A*h}x(t) + \int_t^{t+h} e^{A(t+h-p)}B * u(p-h)dp \quad (3.3)$$

Nous avons effectuer le changement de variable suivant afin d'intégrer de $t-h$ à t : $\phi = p-h$. Cela donne :

$$x(t+h) = e^{Ah}x(t) + \int_{t-h}^t e^{A(t-\phi)}Bu(\phi)d\phi \quad (3.4)$$

Nous avons séparer l'exponentielle de la façon à sortir la partie indépendante de ϕ de l'intégrale :

$$x(t+h) = e^{Ah}x(t) + e^{A*t} \int_{t-h}^t e^{-A\phi}Bu(\phi)d\phi \quad (3.5)$$

En remplaçant $x(t+h)$ dans l'expression de $u(t)$ précédente :

$$u(t) = -K \left(e^{Ah}x(t) + e^{A*t} \int_{t-h}^t e^{-A\phi}Bu(\phi)d\phi \right) \quad (3.6)$$

Comme il est difficile d'implémenter la fonction de transfert de cette commande sur Simulink, nous laissons cette expression telle qu'elle.

3.3 Simulation matlab

Nous avons simulé le système en boucle fermé ce cette commande sur Simulink et à l'aide de d'un script Matlab. Nous avons du décomposer la commande en plusieurs "blocs" que nous avons multiplié et sommé.

$-Ke^{Ah}$: Nous avons utilisé un gain dans lequel nous avons utilisé une variable provenant d'un script contenant

e^{Ah} . Nous avons multiplié l'expression par une matrice $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ afin de spécifier qu'il s'agit de la position (car nous asservissons le système en position).

e^{At} : Nous avons utilisé une horloge afin d'avoir t , un bloc gain pour A et un bloc *matrix exponential* (*expm*) pour avoir l'exponentielle de l'ensemble.

$\int_{t-h}^t e^{-A\phi} Bu(\phi) d\phi$: Nous avons décomposer cette partie en trois parties :

$e^{-A\phi}$: La premier partie à intégrer. Nous l'avons fait à partir de $u(t)$ avec un gain contenant $-A$ et un bloc *expm*.

$B * u(\phi)$: La seconde partie à intégrer. Nous l'avons fait avec un gain contenant B à partir de $u(\phi)$.

$\int_{t-h}^t d\phi$ En premier, nous avons multiplié les deux parties précédentes avec un bloc *Matrix Multiply*. Puis, nous avons utilisé un bloc intégrateur pur, à la suite duquel nous avons utiliser un bloc retard paramétré de façon à avoir un retard de h et avons soustrait le signal sortant de l'intégrateur à celui sortant du retard de façon à avoir le signal intégré en t moins le signal en $t - h$.

Nous avons ensuite multiplié e^{At} et $\int_{t-h}^t e^{-A\phi} Bu(\phi) d\phi$ puis avons multiplié le tout par un gain $-K$. De cette façon, nous réalisons le retour d'état par spectre fini.

Voici le schéma simulink en deux parties, figures 3.1 et 3.2.

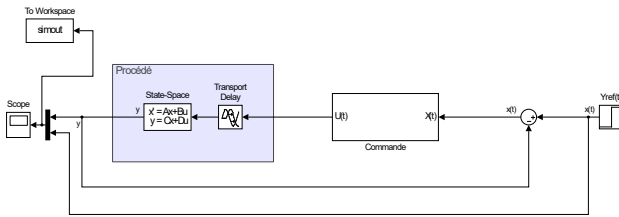


FIGURE 3.1 – Modèle SIMULINK du système en boucle fermé avec correcteur par retour d'état spectre fini (schéma général).

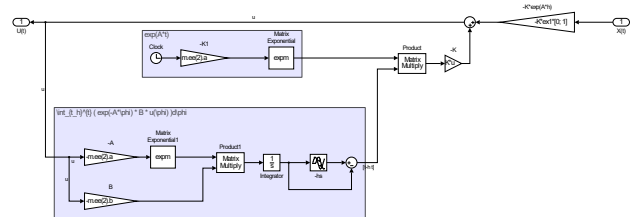


FIGURE 3.2 – Modèle SIMULINK du système en boucle fermé avec correcteur par retour d'état spectre fini (schéma bloc commande)

3.4 Robustesse de la commande

Nous avons testé la commande sur une simulation de très longue durée (400s) et avec un solveur basé sur Euler, on s'aperçoit que le système diverge au bout d'un temps important de simulation ($\approx 300s$). Cela est dû à l'intégration numérique qui transforme le système, sur un temps long, en un système neutre (voir figure 3.3).

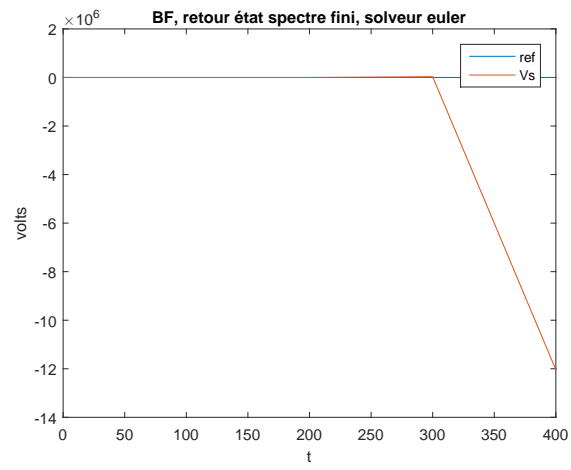


FIGURE 3.3 – Réponse à un échelon unité de la différence des deux modèles.

4 Étude d'un prédicteur de Smith

Nous allons maintenant passer à l'analyse d'un autre type de correction de systèmes à retard : le prédicteur de Smith. Ce type de correcteur permet d'établir une commande de système retardé en utilisant une estimation du procédé qui sera utilisé en temps t et $t + h$.

4.1 Schéma de principe du prédicteur de Smith

Nous avons dessiné avec *Simulink* le schéma bloc en figure 4.1, dans lequel nous avons séparé $\tilde{C}(p)$ (C_Smith sur le schéma) et $G(p)e^{-hp}$ (Procédé dans le schéma). Le bloc $C(p)$ devra contenir le bloc de commande que

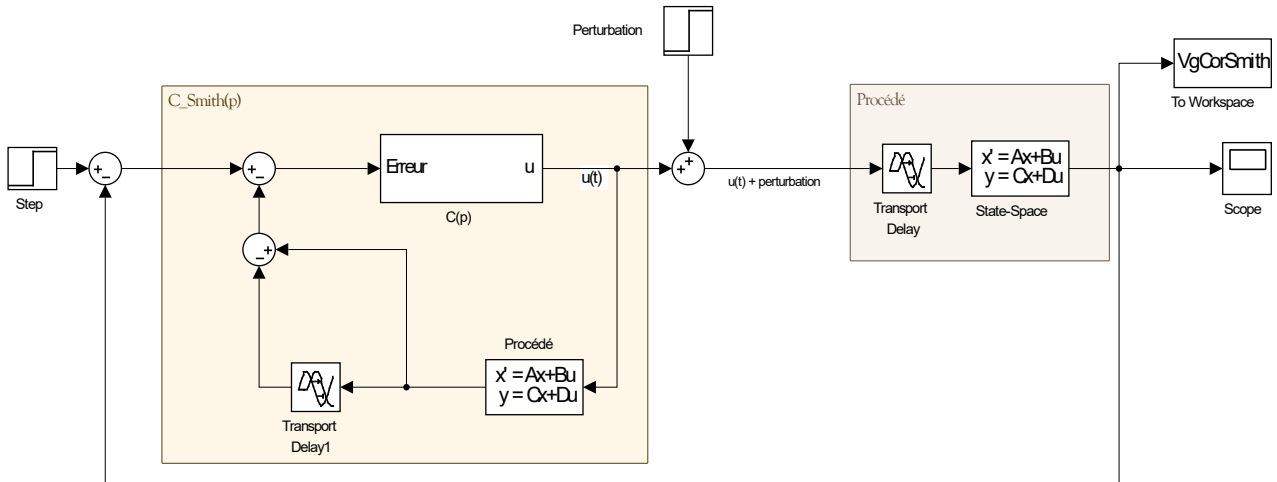


FIGURE 4.1 – Schéma de principe du prédicteur de Smith

nous souhaitons utiliser. Il pourra être complexe ou bien plus simple.

4.2 Fonction de transfert du système en boucle fermé

Pour obtenir le transfert en boucle fermé de ce schéma, nous allons nous référer à des résultats de cours et TD, qui sont :

$$\tilde{C}(p) = \frac{C(p)}{1 + G(p)(1 - e^{-hp})} C(p) \quad (4.1)$$

ainsi que le transfert de boucle fermé qui s'écrit :

$$G_{bf} = \frac{\tilde{C}G(p)e^{-hp}}{1 + \tilde{C}G(p)e^{-hp}} \quad (4.2)$$

$$= \frac{C(p)G(p)e^{-hp}}{1 + G(p)C(p)} \quad (4.3)$$

Nous utiliserons cette fonction de transfert pour déterminer, à partir du correcteur établi dans les prochaines parties, le polynôme caractéristique du système.

4.3 Correcteur sur le prédictor de Smith

On nous propose de mettre un correcteur simple dans la bloc $C(p)$, celui ci sera de a forme : $C(p) = k_0$, soit, un correcteur proportionnel. Nous obtenons avec ce nouvel élément, la fonction de transfert enboucle fermé suivante :

$$G_{bf}(p) = \frac{k_s k_r k_m e^{-hp}}{\tau p + p + k_0 k_s k_r k_m} \quad (4.4)$$

L'analyse du polynôme caractéristique vient alors dans les équations suivantes :

$$\tau p + p + k_0 k_s k_r k_m = 0 \Leftrightarrow p_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\tau k_0 k_s k_r k_m}}{2\tau}$$

Plusieurs conditions apparaissent alors sur le gain proportionnel pour assurer le cahier des charges :

- $Re(p_{1,2}) < 0$ pour assurer la stabilité. De cette hypothèse, nous avons alors forcément :

$$1 - 4\tau k_0 k_s k_r k_m < 1 \Leftrightarrow k_0 > 0 \quad (4.5)$$

Résultat logique, bien qu'il existe des correcteurs avec un gain admis de manière négative, nous sommes ici dans un cas trivial qui n'admet qu'un gain proportionnel positif.

- $1 - 4\tau k_0 k_s k_r k_m \geq 0$ pour ne pas avoir des pôles complexes conjugués. Nous avons alors :

$$4\tau k_0 k_s k_r k_m \leq 1 \Leftrightarrow k_0 \leq \frac{1}{4\tau k_s k_r k_m} \quad (4.6)$$

Valeur du Correcteur $C(p)$ Application numérique Nous avons alors un correcteur qui est :

$$C(p) = 0.0925 \quad (4.7)$$

4.4 Analyse stabilité, ajout d'une perturbation

Nous avons prouvé, par construction du correcteur, que le système était asymptotiquement stable. Cependant, nous avons omis plusieurs hypothèse que nous allons analyser maintenant.

Il a été noté dans le cahier des charges l'ajout d'une perturbation sur la commande $u(t)$ (voir schéma 4.1). Cette perturbation, de type échelon, ne doit pas déstabiliser le système. Nous allons étudier le transfert entre cette perturbation et la sortie du système. Cette étude a déjà été commencé au cours des cours/TD, elle est exprimé par

$$\frac{Y(p)}{P_{pert}(p)} = \frac{G(p)e^{-hp} (1 + G(p) (1 - e^{-hp}) C(p))}{1 + G(p) (1 - e^{-hp}) C(p) + G(p)e^{-hp} C(p)} \quad (4.8)$$

4.5 Simulation *Matlab* et observation des résultats

Nous avons pu simuler sur *Matlab* la réponse à un échelon de position que vous trouverez en figure 4.2.

Toute les attentes du cahier des charges ont été remplis pour cette partie, nous avons validé la simulation de cette commande.

4.6 Changement du retard

Pour observer une partie de la robustesse du système, nous avons modifier radicalement la valeur du retard du système. Nous avons choisi une valeur hors des valeurs admises dans les partis de modélisation du procédé en boucle ouverte ou avec un correcteur Proportionnel dérivateur, pour voir si la stabilité du système était respecté. Nous avons obtenu la courbe 4.3. Nous voyons que le système réponds toujours au cahier des charges, résultat logique car le transfert en boucle fermé n'a pas de quasi polynôme caractéristique

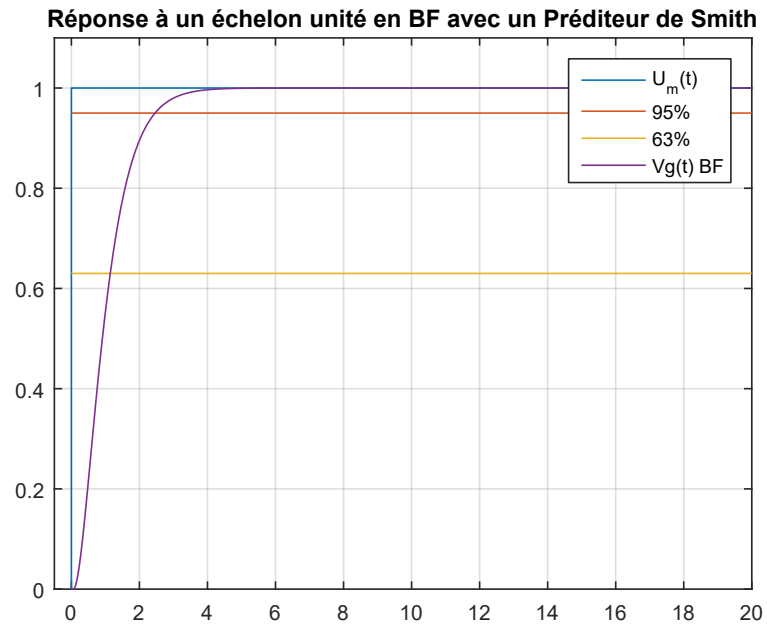


FIGURE 4.2 – Réponse à un échelon unité en BF avec un Préditeur de Smith

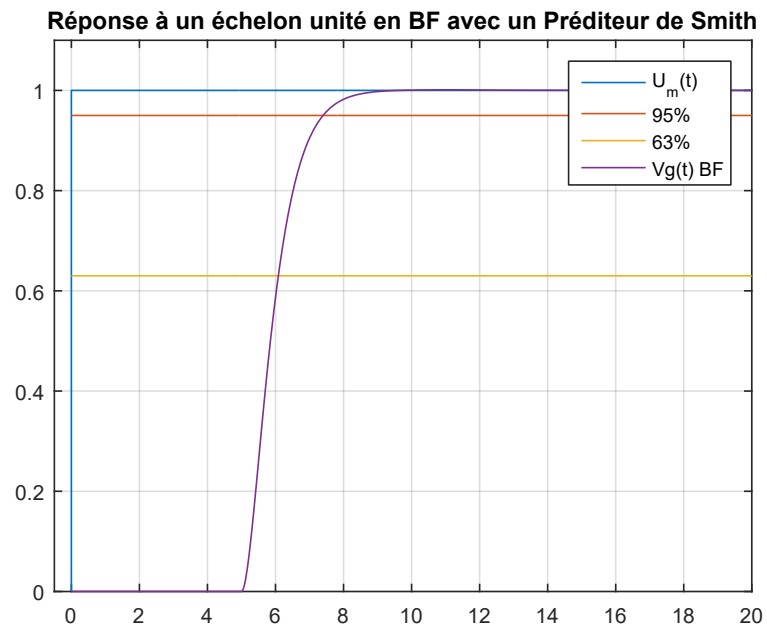


FIGURE 4.3 – Réponse à un échelon unité en BF avec un Préditeur de Smith et un retard $h = 5s$