Université Paul Sabatier

Analyse et commande des systèmes temps réel

- Synthèse d'une commande à retard -
Application à un procédé électro-mécanique

Auteurs :
Lucien Rakotomalala
David Tocaven

Encadrant :
Carolina Albea-Sànchez

21 février 2018

Table des matières

Introduction

À partir de l'énoncé, nous avons définie le cahier des charges suivant :

— Il faut réaliser un asservissement en position angulaire.
— Il faut atteindre la consigne en moins de 8 secondes. $\Rightarrow T_r < 8s + h$
— Il ne doit pas y avoir d'oscillations.
— Il ne doit pas y avoir de dépassement de la consigne.$\Rightarrow \forall t \geq 0, V_g(t) \leq V_{ref}(t)$
— Il doit y avoir une erreur de position nulle. $t \rightarrow \infty, V_g(t) \rightarrow V_{ref}(t)$
— La commande doit rejeter Les perturbations de sortie de type échelon $(p(t) = p_0)$ en maximum 3 secondes.

1 Identification-Modélisation du système

Dans un premier temps, nous allons déterminer les paramètres du moteur, ensuite, nous déterminerons le modèle fréquentiel ainsi que le modèle espace d'état du système. Puis, nous étudierons les propriétés, les performances et la stabilité du système.

1.1 Détermination de paramètres et du retard

On identifiera les paramètres du moteur grâce à une approche dite *boite noire*, c'est-à-dire que suivant la forme d'une réponse du système à un échelon, nous allons choisir une modélisation par fonction de transfert type (1^{er} ordre, 2^{e} ordre, ...). Comme il s'agit d'un moteur à courant continu, nous choisissons un modèle du premier ordre car il permet de former un modèle de précision suffisante au vu de notre application.
Un modèle du 1^{er} ordre est de la forme suivante :

$$G(p) = \frac{K}{\tau p + 1} \tag{1.1}$$

Où :

K **:** Le gain statique du système.

τ **:** La constante de temps du système (en seconde).

Nous identifierons K en mesurant le gain statique de la réponse à un signal échelon (pour t tel que la réponse se soit stabilisée) : $K = V_g(t)/U_m(t)$.
Pour l'estimation de τ, nous utiliserons la relation suivante : $\tau = t$ lorsque $\frac{V_g(t)}{U_m(t)} = 0,63 * K$.

Cette méthode nous a permis d'obtenir l'estimation suivante des paramètres :

$$\begin{cases} k_m &= 9,6048 \\ \tau_m &= 0,2533 \text{ secondes} \end{cases} \tag{1.2}$$

Pour identifier le retard, que nous savons être présent sur la commande du moteur, nous avons mesurer le décalage temporel entre le début d'un échelon unité que l'on injecte en entrée $U_m(t)$ du moteur et la sortie $V_g(t)$. Ce décalage représente le retard du système, le temps qu'il met avant de réagir à une modification de l'entrée (voir figure 1.1).

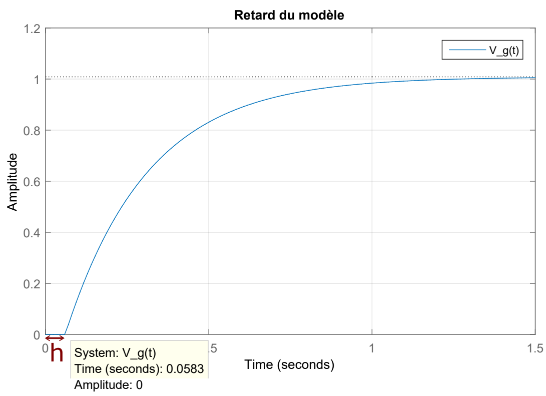

FIGURE 1.1 – Mesure du retard.

1.2 Autres méthode

Une autre façon de modéliser le modèle du moteur est un approche de type *boite blanche*, c'est-à-dire de créer un modèle du moteur à partir d'une étude physique du système.

1.3 Modèle fréquentiel

Avec l'estimation des paramètres du moteur, nous avons former deux fonctions de transferts. La première définie le la fonction entre $V_g(t)$ et l'entrée $U_m(t)$ et la seconde entre $V_s(t)$ et $U_m(t)$.

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{V_g(t)}{U_m(t)} & = & \frac{k_g \cdot k_m}{\tau_m p+1} e^{-hp} \\ \\ \frac{V_s(t)}{U_m(t)} & = & \frac{k_s \cdot k_m \cdot k_r}{p(\tau_m p+1)} e^{-hp} \end{array}\right. \tag{1.3}$$

Avec l'estimation des paramètres donnés en cours, figure 1.2 tracé (1) , nous avons tracer la réponse à un échelon unité de ces deux fonctions de transferts.

1.4 Modèle espace d'état

À l'aide des fonctions de transferts précédentes, nous avons fait un modèle espace d'état en choisissant :

Pour entrée $u(t)$ **:** $u(t) = U_m(t)$

Pour sorties $y(t)$ **:** $y(t) = \begin{pmatrix} V_g(t) \\ V_s(t) \end{pmatrix}$

Pour état $x(t)$ **:** $x(t) = \begin{pmatrix} \Theta_s(t) \\ \Omega_m(t) \end{pmatrix}$

Nous avons extrait les équations suivantes du modèle schéma-bloc du moteur :

$$\left\{\begin{array}{lcl} V_g(t) & = & k_g \Omega_m(t) \\ V_s(t) & = & k_s \Theta_s(t) \end{array}\right. \tag{1.4}$$

Après manipulation des fonctions de transferts précédentes et des expressions de l'équation 1.4, nous avons obtenu le modèle espace d'état suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcccccc} \dot{x}(t) & = & A & x(t)+ & B & u(t-h) \\ \\ y(t) & = & C & x(t)+ & D & u(t-h) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcccc} \dot{x}(t) & = & \begin{bmatrix} 0 & k_r \\ 0 & -\frac{1}{\tau_m} \end{bmatrix} & x(t)+ \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_m}{\tau_m} \end{bmatrix} & u(t-h) \\ \\ y(t) & = & \begin{bmatrix} 0 & k_g \\ k_s & 0 \end{bmatrix} & x(t)+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & u(t-h) \end{array}\right. \tag{1.5}$$

À l'aide des paramètres de référence, nous avons tracé la réponse à un échelon unité du modèle espace d'état, figuere 1.2, tracé (2).

Nous avons comparé les réponses entres les deux modélisations afin de vérifier qu'il n'y ai pas d'erreur. Nous avons pour cela tracé la réponse à un échelon unité de la différence des deux modèles, figure 1.3 Nous pouvons constater que l'erreur est négligeable et doit être dût à du bruit numérique et/ou à la méthode de calcul de la réponse. Nos modèles sont donc équivalents par rapport à une réponse à un échelon unité.

1.5 Commandabilité et observabilité

Nous allons maintenant étudier l'observabilité et la commandabilité de notre modèle et l'influence du retard sur ces propriétés. Nous utiliserons, pour cela, le modèle espace d'état où nous exprimerons le retard grâce à ∇ dans le modèle espace d'état.

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x}(t) & = & \begin{pmatrix} 0 & k_g \\ 0 & -\frac{1}{\tau_m} \end{pmatrix} x(t) \quad + \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla \frac{k_m}{\tau_m} \end{pmatrix} u(t) \\ \\ y(t) & = & \begin{pmatrix} 0 & k_g \\ k_s & 0 \end{pmatrix} x(t) \end{array}\right. \tag{1.6}$$

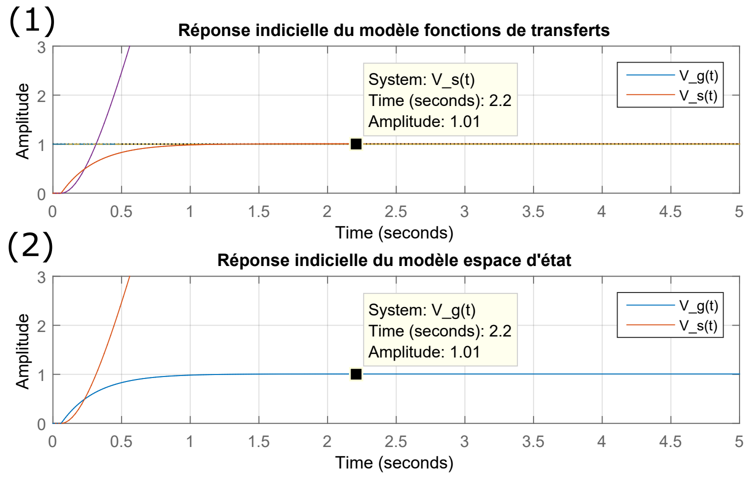

FIGURE 1.2 – Réponse à un échelon indiciel des modèles fonctions de transfert (1) et espace d'état (2).

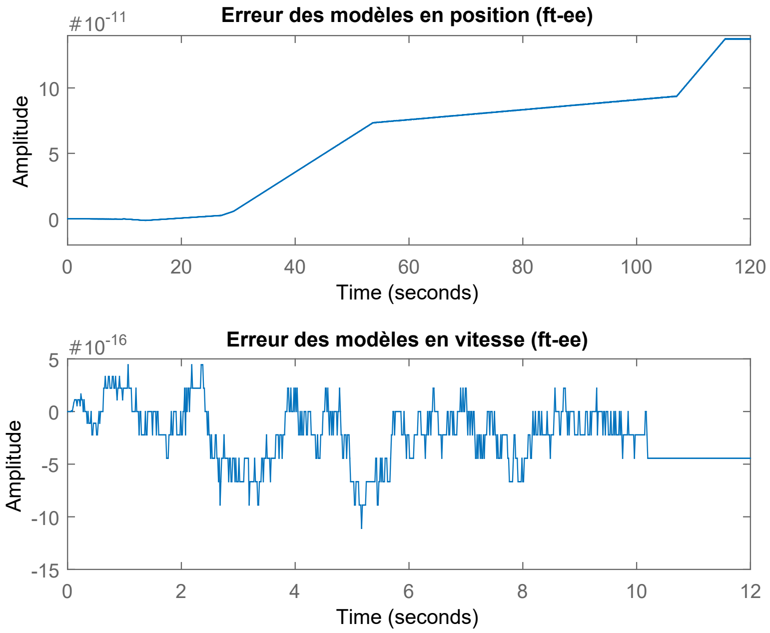

FIGURE 1.3 – Réponse à un échelon unité de la différence des deux modèles.

Nous avons ensuite calculer les matrices de commandabilité et d'observabilité, respectivement :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k_m * k_r * \nabla}{\tau_m} \\ \frac{k_m * \nabla}{\tau_m} & -\frac{k_m * \nabla}{\tau_m^2} \end{bmatrix} \\ \mathcal{O} &= \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_g \\ k_s & 0 \\ 0 & -\frac{k_g}{\tau_m} \\ 0 & k_r * k_s \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1.7}$$

Nous avons vérifié que le rang de la matrice de commandabilité et de celle d'observabilité sont bien égaux à la dimension de A. Si cette condition est respectée et qu'il n'y a pas de ∇ dans la matrice, la propriété (commandabilité ou observabilité) est qualifiée de forte. Dans le cas où, en plus d'être de bon rang, il y a ∇ dans la matrice de commandabilité ou d'observabilité, la propriété est dite faible (car dépend du retard). Dans notre cas, $\mathcal{C}$ est de rang égal à la dimension de A et contient ∇, donc le système est faiblement commandable.

Pour $\mathcal{O}$, On peut remarquer qu'il n'y a pas de ∇ et que le rang est égal à la dimension de A, donc le système est fortement observable.

1.6 Analyse de la boucle ouverte

Nous allons maintenant étudier les performances de notre système. Nous avons choisi d'étudier les performances sur la sortie $V_g(t)$. Toujours à l'aide de matlab, nous avons obtenu les performances suivantes :

Temps de monté : $t_m = 0,659$ secondes.

Temps de réponse à 5% : $t_r = 0,959$ secondes.

Oscillation : Il n'y a pas d'oscillations.

Gain statique : $G_{stat} = 1.05$. Il y a donc un dépassement de $0,05$ soit de 5%.

1.7 Stabilité de la boucle fermée

Nous allons maintenant étudier la stabilité de la boucle fermée par deux méthodes : le *Delay-sweeping* et l'étude de la *stabilité 2D*. Avant cela, nous allons donner les fonctions de transferts en boucle fermée du système.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{V_s()}{u_m(t)} & = & \frac{e^{-hp}k_m * k_r * k_s}{\tau_m * p^2 + p + e^{-hp}k_m * k_r * k_s} \\ \frac{V_g()}{u_m(t)} & = & \frac{e^{-hp}k_m * k_g}{\tau_m p + 1 + e^{-hp}k_m * k_g} \end{array} \right. \tag{1.8}$$

Nous avons aussi simulé la boucle fermé sans correction sur simulink, figure 1.4 et voici la réponse à un échelon unité, figure 1.5. Sur $V_s(t)$, nous pouvons observer beaucoup d'oscillations, du dépassement, un temps de convergence assez important et une erreur statique nulle.

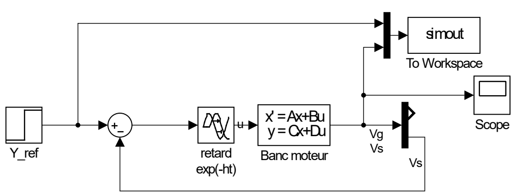

FIGURE 1.4 – Modèle SIMULINK du système en boucle fermé sans correcteur.

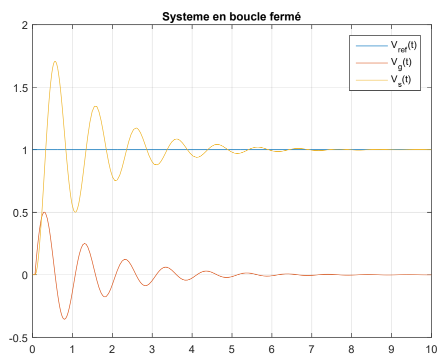

FIGURE 1.5 – Tracé de la réponse à un échelon unité du système en boucle fermé sans correcteur.

1.7.1 Delay-Sweeping

Nous allons étudier la stabilité à l'aide de la méthode du *Delay-sweeping*. Nous allons décomposer le quasi-polynôme caractéristique de la fonction de transfert $\frac{V_s()}{u_m(t)}$ en deux. Une partie contenant la partie du quasi-polynôme indépendante du retard $P(p)$ et la seconde partie ceux qui dépendent du retard $Q(p)$. Afin d'analyser la stabilité, nous allons calculer le module et l'argument de l'équation suivante (où $p = j\omega$) :

$$P(j\omega) + Q(j\omega)e^{-j\omega h} = 0 \tag{1.9}$$

Nous avons identifier, sur la fonction de transfert concernée, $P(p)$ et $Q(p)$:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} P(p) & = & \tau_m p^2 + p \\ Q(p) & = & k_m * k_s * k_r \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} P(p) & = & -\tau_m \omega^2 + j\omega \\ Q(p) & = & k_m * k_s * k_r \end{array} \right. \tag{1.10}$$

Voici le module et l'argument :

$$
\begin{aligned}
& \left\| \frac{Q(j\omega)}{P(j\omega)} \right\| &=& \ 1 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{k_m * k_s * k_r}{\sqrt{(-\tau_m \omega^2)^2 + \omega^2}} &=& \ 1 \\
\Leftrightarrow\ & \tau_m^2 \omega^4 + \omega^2 - (k_m * k_r * k_s)^2 &=& \ 0 \\
\Leftrightarrow\ & \omega &=& \left\{ \begin{array}{c} -5.9206 \\ 7.1161 * i \\ -7.1161 * i \\ 5.9206 \end{array} \right. \\
\Leftrightarrow\ & \omega &=& \ 5.9206 \text{ rad/sec}
\end{aligned} \tag{1.11}
$$

$$
\begin{aligned}
& \overline{h}\omega &=& \ arg\left(\frac{Q(j\omega)}{P(j\omega)}\right) + 2 * k * \pi \\
\Leftrightarrow\ & \overline{h}\omega &=& \ \text{A finir !!!!} \\
\Leftrightarrow\ & \overline{h}\omega &=& \ 0 \\
\Leftrightarrow\ & \overline{h}\omega &=& \left\{ \begin{array}{c} -5.9206 \\ 7.1161 * i \\ -7.1161 * i \\ 5.9206 \end{array} \right. \\
\Leftrightarrow\ & \omega &=& \ 5.9206 \text{ rad/sec}
\end{aligned} \tag{1.12}
$$

1.7.2 Stabilité 2D

2 Étude d'une commande Proportionnelle-dérivateur

2.1 Intérêt de ce correcteur

Pour établir notre asservissement en position, nous devons faire en sorte de commander le transfert entre u_m et V_s. Ce transfert dispose d'un intégrateur pur et d'un pôle en $-\frac{1}{\tau_m}$, qui donnent l'instabilité de la position du moteur à une entrée échelon. Un premier correcteur nous est proposé sous la forme :

$$C(p) = k_0(1 + d_i p) \tag{2.1}$$

avec k_0 le gain proportionnel et d_i le gain dérivateur. Avec une telle correction, nous allons diminué l'ordre du transfert de position/consigne et perdre le pôle en 0 menant à l'instabilité.

2.2 Choix du gain dérivateur du correcteur $C(p)$

Passons maintenant au choix des valeurs du correcteur. On nous propose un choix particulier pour d_i dans l'énoncé du TP, nous allons voir ensemble en quoi ce choix est judicieux. Nous notons, pour le procédé étudié le transfert $G(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{p(1+\tau_m p)}$, la boucle fermé avec le correcteur en cours d'étude qui intervient de cette manière :

$$\begin{aligned} G_{bf}(p) = \frac{Y(p)}{Y_{ref}} = \frac{C(p)G(p)}{1 + C(p)G(p)} &= \frac{k_0(1 + d_i p)\frac{N(p)}{D(p)}}{1 + k_0(1 + d_i p)\frac{N(p)}{D(p)}} \\ &= \frac{k_0(1 + d_i p)\frac{N(p)}{p(1+\tau_m p)}}{1 + k_0(1 + d_i p)\frac{N(p)}{p(1+\tau_m p)}} \end{aligned}$$

si l'on prend : $d_i = \tau_m$, nous pouvons retomber sur une fonction de transfert plus simple qui est :

$$G_{bf} = \frac{k_0 N(p)}{p + k_0 N(p)} \tag{2.2}$$

En sachant que N(p) contient e^{-hp}, nous voyons qu'avec ce correcteur, nous allons pouvoir manipuler l'influence du retard dans le système à l'aide k_0 et placer le pôle de la boucle fermé corrigé où nous le souhaitons.

Valeur du gain dérivateur : Application numérique : $d_i = 0.2533$

2.3 Choix du gain proportionnel du correcteur $C(p)$

Maintenant que les calculs théoriques du correcteur ont été effectué, nous allons passer à la recherche du gain proportionnel k_0. Pour cela, nous allons à nous référencer aux contraintes du cahier des charges vu en Introduction. Si l'on décompose le résultat établi en 2.2, il vient comme représentation de Laplace du système en boucle fermé :

$$G_{bf} = \frac{k_0 k_r k_s k_m e^{-hp}}{p + k_0 k_r k_s k_m e^{-hp}} \tag{2.3}$$

Il devient donc évident que l'étude de cette boucle fermé passe par l'étude du quasi-polynôme définit par

$$p + k_0 k_r k_s k_m e^{-hp} = 0 \tag{2.4}$$

Valeur du gain proportionnel Le cahier des charges nous impose une réponse sans oscillations : cette contrainte est rempli par l'ordre 1 de cette équation caractéristique. Pour remplir les contraintes temporelles et de dépassement, nous allons analyser la boucle fermé obtenu avec un modèle du premier ordre sous la forme :

$$G(p) = \frac{K}{1+\tau p} \text{ avec } t_r \text{ le temps de réponse } = 3.3\tau$$
$$\text{et } K \text{ le gain en régime établi}$$

en notant tout de même que notre temps de réponse doit être établi à partir du retard du système : $t_r + h \leq 8$. Nous obtenons donc, avec une application numérique : $\tau \leq \frac{8-h}{3.3} \Leftrightarrow \tau \leq 2.42$ et $K = 1$. Pour une identification de ces paramètres, nous prenons la fonction de transfert en boucle fermé que nous réécrivons pour correspondre avec la forme présentée précédemment :

$$G_{bf} = \frac{1}{\frac{1}{k_0 k_r k_s k_m e^{-hp}} p + 1} \tag{2.5}$$

Il vient donc : $\frac{1}{k_0 k_r k_s k_m e^{-hp}} < 2.42 \Leftrightarrow k_0 > \frac{1}{2.42 k_r k_s k_m e^{-hp}}$.

Valeur gain proportionnel : Application numérique : $k_0 = 0.0354$

Retard Admissible Pour cette étude, nous allons aborder l'étude du quasi-polynôme de la fonction de transfert en boucle fermé établi en '2.4.

Nous allons utiliser la méthode du *Delay Sweeping* pour connaitre le retard admissible de notre système en boucle fermé. Pour cela,nous posons :

$$\frac{Q(j\omega)}{P(j\omega)} = \frac{k_0 k_s k_m k_r}{j\omega} \tag{2.6}$$

On obtient alors, pour le calcul du module :

$$\left\| \frac{Q(j\omega)}{P(j\omega)} \right\| = \left\| \frac{k_0 k_s k_m k_r}{j\omega} \right\| = 1 \tag{2.7}$$

$$\tag{2.8}$$

qui donne alors :

$$\omega = k_0 k_s k_m k_r$$

Nous appliquons ensuite ce résultat sur le calcul de l'argument suivant pour pouvoir en extraire le retard maximum accessible :

$$wh^* = -arg\left(-\frac{Q(j\omega)}{P(j\omega)}\right) + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z} \tag{2.9}$$

qui nous donne :

$$\begin{aligned} h^* &= \frac{1}{\omega} arg\left(-\frac{k_0 k_s k_r k_m}{j\omega}\right) \\ &= \frac{1}{\omega} arg(-1) - arg(j) \quad \text{car nous avons noté : } \omega = k_0 k_s k_r k_m \\ &= \frac{\pi}{2\omega} \end{aligned}$$

Valeur retard admissible : Application numérique : $h \in [0; 4.15]$

2.4 Calcul de l'erreur de position

Avec cette partie, nous pourrons établir l'ajout d'un gain de pré-compensation. Seulement, il vient par construction de l'asservissement la fonction de transfert de la boucle fermé trouvée en 2.3. Nous appliquons alors le théorème de la valeur finalesur la sortie du système pour obtenir la valeur du régime permanent. Cette valeur sera ensuite comparé avec la référence (si la référence est égale, tout est bon). Nous avons :

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} y(t) &= \lim_{p\to 0} p(Y(p)) \\ &= \lim_{p\to 0} p(G_{bf}(p) Y_{ref}(p) \\ &= \lim_{p\to 0} p\left(\frac{k_0 k_r k_s k_m e^{-hp}}{p + k_0 k_r k_s k_m e^{-hp}} \frac{y_{ref}}{p}\right) \end{aligned}$$

La simplification des variables de Laplace et l'application de leur limite donnent un résultat pour le moins assez trivial qui est :

$$\lim_{p \to 0} Y(p) = y_{ref}$$

donc, nous pouvons conclure sur l'erreur de position en disant :

$$\mathop{lim}_{t \to \infty} \epsilon(t) = y(t) - y_{ref}(t) = 0 \tag{2.10}$$

2.5 Simulation *Matlab / Simulink*

Il nous est maintenant possible de simuler notre commande. Nous avons choisi de faire cette partie avec *Simulink* pour une analyse plus complète et facile des signaux envoyé et

2.6 Équivalence avec retour d'état instantané

Pour une loi de commande PD avec comme polynôme $Q(p) = k_1 + k_2 p + ... + k_n p^n$ dans la boucle d'asservissement, nous pouvons écrire le développement suivant :

$$\begin{aligned}
\frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{G(p)}{1 + Q(p)G(p)} &\Leftrightarrow \frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{Y(p)}{U(p) + Q(p)Y(p)} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{E(p)} = \frac{1}{U(p) + Q(p)Y(p)} \\
&\Leftrightarrow E(p) = U(p) + Q(p)Y(p) \\
&\Leftrightarrow U(p) = E(p) - Q(p)Y(p)
\end{aligned}$$

Cette dernière ligne est la caractéristique d'un retour d'état, si et seulement si les états sont disponibles sur la sortie du système.

3 Placement du spectre Fini

Nous allons essayer de développer une loi de commande de dimension infinie permettant d'avoir un système en boucle fermé aillant un spectre fini. Pour cela, nous allons dans un premier temps définir des valeurs de pôles de façon à satisfaire le cahier des charges (voir Introduction). Ensuite, nous allons concevoir la commande de façon à avoir une boucle fermé de spectre fini et remplir le cahier des charges. Puis, nous calculerons un pré-compensateur afin de compenser l'erreur statique. Dans un quatrième temps, nous simulerons le procédé et enfin nous étudierons la robustesse de la commande.

3.1 Valeurs des pôles

3.2 Commande de dimension infinie

3.3 Pré-compensation

3.4 Simulation matlab

3.5 Robustesse de la commande

4 | Étude d'un prédicteur de Smith

5 | Implantation sur le procédé réel

Annexes

Annexe 1 - TITRE

Annexe 2 - TITRE