

UNIVERSITÉ PAUL SABATIER

MATIÈRE

- Contrôle et simulation - COMMANDE DE SYSTÈMES ($max, +$) - LINÉAIRES

Auteurs :

Lucien RAKOTOMALALA

David TOCAVEN

Encadrants :

Euriell LE CORRONC

Laurent HOUSSIN

Table des matières

Introduction	1
1 Étude d'un système de transport	2
1.1 Modélisation :	2
1.1.1 Modélisation brute	2
1.1.2 Ajout d'un état	3
1.1.3 Modélisation en espace d'état	5
1.2 Analyse, matrice d'évolution et valeurs propres	6
1.2.1 Irréductibilité	6
1.2.2 Valeur propre	6
1.2.3 Vecteur propre	6
1.3 Commande des conditions initiales	6
1.3.1 Vecteur d'état initiaux	6
1.3.2 Calculs des 10 premiers trains arrivants en gare C et venant de la gare B	7
1.3.3 Temps inter-arrivées identiques	8
1.3.4 Ajout d'un train	8
1.3.5 Travaux sur la ligne B-F	10
2 Optimisation d'une ressource dans un problème de jobshop	13
2.1 Étude du problème	13
2.2 Modélisation des GET et représentation d'état et analyse du cycle associé	13
2.2.1 Ordonnancement 1	14
2.2.2 Ordonnancement 2	15
2.2.3 Ordonnancement 3	15
2.2.4 Ordonnancement 4	17
3 Un problème de commande	18
4 Conclusion	19
Annexes	21
TITRE	21
TITRE	21
Annexe 2 - TITRE	22

Introduction

Chapitre 1

Étude d'un système de transport

Dans cette première partie, nous allons vous présenter nos travaux sur l'étude d'un système de transport. Dans ce problème, il nous est demandé de mettre en œuvre, avec l'algèbre $(max, +)$, une étude d'un système de Graphe d'Événements Temporisé (GET) qui représentera notre système temporisé de transport. Nous commencerons par modéliser le procédé en GET et vous le présenter, nous effectuerons ensuite une analyse de ce système enfin essayer d'améliorer le système en modifiant ou ajoutant des éléments au réseau à partir de conclusion tirée sur la modélisation.

1.1 Modélisation :

1.1.1 Modélisation brute

Dans un premier temps, nous avons réalisé le GET (voir figure 1.1). Ce graphe représente les différentes gares, un couple de transition $(x\theta1, x\theta2)$ représente la gare θ , la première représente "le train rentre en gare", le t_a de la place suivante le temps d'attente en gare, et la seconde transition $(x\theta2)$ "le train sort de la gare". Les t_a des places entre deux arrivées ou départs de gare représentent le temps de trajet sur une ligne de train. Les places $xB12$ et $xB22$ sont des copies de $xB1$ et $xB2$ afin de représenter les contraintes de synchronisation décrites dans l'énoncé.

Afin de réaliser la mise en représentation d'état, nous avons extrait les égalités suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_{A1}(k) & = & 7x_{B1}(k) \\ x_{B1}(k) & = & 6x_{C1}(k) \\ x_{C1}(k) & = & 4x_{D1}(k) \\ x_{D1}(k) & = & 2x_{D2}(k-1) \\ x_{D2}(k) & = & 4x_{C2}(k) \\ x_{C2}(k) & = & 6x_{B2}(k) \\ x_{B2}(k) & = & 7x_{A2}(k) \oplus x_{B12}(k) \\ x_{A2}(k) & = & 2x_{A1}(k-2) \\ x_{E1}(k) & = & 2x_{E2}(k-1) \\ x_{F1}(k) & = & 5x_{E1}(k) \\ x_{B12}(k) & = & 3x_{F1}(k) \\ x_{G1}(k) & = & 2x_{B12}(k) \\ x_{G2}(k) & = & 2x_{G1}(k-1) \\ x_{B22}(k) & = & 2x_{G2}(k) \oplus x_{B2}(k) \\ x_{F2}(k) & = & 3x_{B22}(k) \\ x_{E2}(k) & = & 5x_{F2}(k) \end{array} \right. \quad (1.1)$$

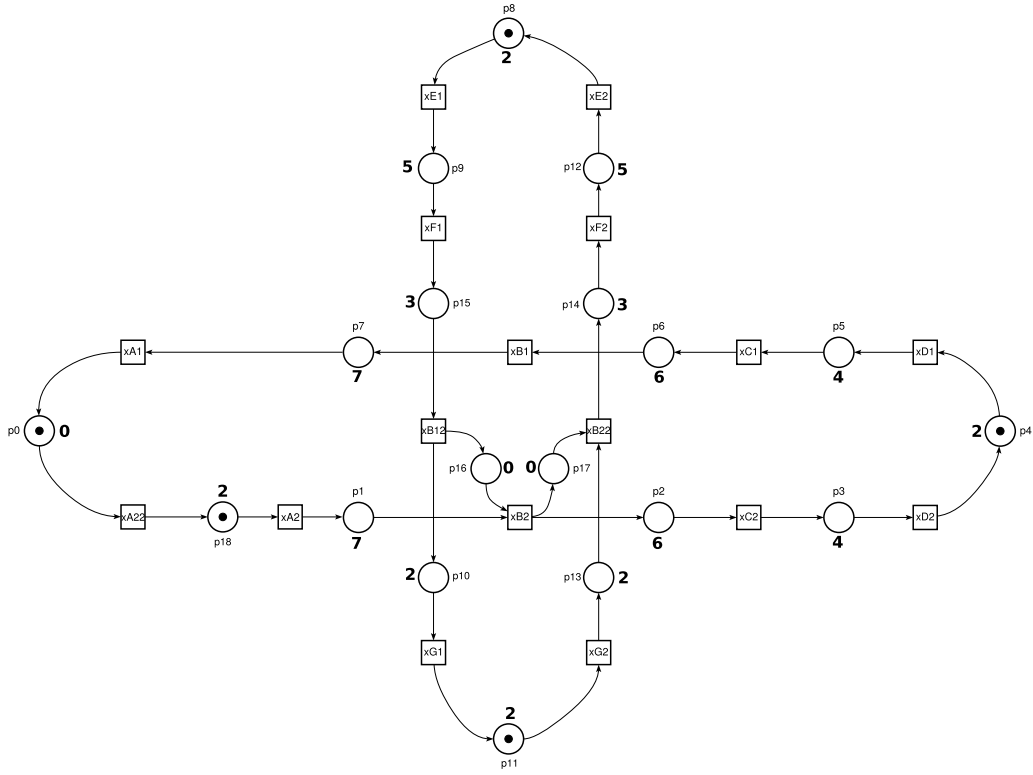


FIGURE 1.2 – Graphe des Événements Temporisé décomposé du réseau de transport

Et voici, équation 1.15, le système d'équations correspondant.

$$\left\{ \begin{array}{lcl}
 x_{A1}(k) & = & 7x_{B1}(k) \\
 x_{B1}(k) & = & 6x_{C1}(k) \\
 x_{C1}(k) & = & 4x_{D1}(k) \\
 x_{D1}(k) & = & 2x_{D2}(k-1) \\
 x_{D2}(k) & = & 4x_{C2}(k) \\
 x_{C2}(k) & = & 6x_{B2}(k) \\
 x_{B2}(k) & = & 7x_{A2}(k) \oplus x_{B12}(k) \\
 x_{A2}(k) & = & 2x_{A22}(k-1) \\
 x_{A22}(k) & = & x_{A1}(k-1) \\
 x_{E1}(k) & = & 2x_{E2}(k-1) \\
 x_{F1}(k) & = & 5x_{E1}(k) \\
 x_{B12}(k) & = & 3x_{F1}(k) \\
 x_{G1}(k) & = & 2x_{B12}(k) \\
 x_{G2}(k) & = & 2x_{G1}(k-1) \\
 x_{B22}(k) & = & 2x_{G2}(k) \oplus x_{B2}(k) \\
 x_{F2}(k) & = & 3x_{B22}(k) \\
 x_{E2}(k) & = & 5x_{F2}(k)
 \end{array} \right. \quad (1.3)$$

1.1.3 Modélisation en espace d'état

Nous avons ré exprimé le système d'équations précédent (équation 1.15) de façon à avoir une expression facilitant la mise en espace d'état.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_{A1}(k) & = & (7 + 6 + 4 + 2)x_{D2}(k - 1) \\ x_{B1}(k) & = & (6 + 4 + 2)x_{D2}(k - 1) \\ x_{C1}(k) & = & (4 + 2)x_{D2}(k - 1) \\ x_{D1}(k) & = & 2x_{D2}(k - 1) \\ x_{D2}(k) & = & (4 + 6 + 7 + 2)x_{A22}(k - 1) \oplus (4 + 6 + 3 + 5 + 2)x_{E2}(k - 1) \\ x_{C2}(k) & = & (6 + 7 + 2)x_{A22}(k - 1) \oplus (6 + 3 + 5 + 2)x_{E2}(k - 1) \\ x_{B2}(k) & = & (7 + 2)x_{A22}(k - 1) \oplus (3 + 5 + 2)x_{E2}(k - 1) \\ x_{A2}(k) & = & 2x_{A22}(k - 1) \\ x_{A22}(k) & = & x_{A1}(k - 1) \\ x_{E1}(k) & = & 2x_{E2}(k - 1) \\ x_{F1}(k) & = & (5 + 2)x_{E2}(k - 1) \\ x_{B12}(k) & = & (3 + 5 + 2)x_{E2}(k - 1) \\ x_{G1}(k) & = & (2 + 3 + 5 + 2)x_{E2}(k - 1) \\ x_{G2}(k) & = & 2x_{G1}(k - 1) \\ x_{B22}(k) & = & (2 + 2)x_{G1}(k - 1) \oplus (7 + 2)x_{A22}(k - 1) \oplus (3 + 5 + 2)x_{E2}(k - 1) \\ x_{F2}(k) & = & (3 + 2 + 2)x_{G1}(k - 1) \oplus (3 + 7 + 2)x_{A22}(k - 1) \oplus (3 + 3 + 5 + 2)x_{E2}(k - 1) \\ x_{E2}(k) & = & (5 + 3 + 2 + 2)x_{G1}(k - 1) \oplus (5 + 3 + 7 + 2)x_{A22}(k - 1) \oplus (5 + 3 + 3 + 5 + 2)x_{E2}(k - 1) \end{array} \right. \quad (1.4)$$

Les expressions dépendent uniquement de $k - 1$.

On peut remarquer que notre système est autonome, c'est-à-dire qu'il ne présente pas d'entrée ou de sortie. Dans l'espace d'état de référence, équation 1.2, les matrices B et C ne sont donc pas nécessaires.

Le système d'équation de l'équation 1.4 nous ont permis de créer la matrice dynamique suivante :

$$A = \begin{pmatrix} . & . & . & . & 19 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 12 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 6 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 2 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 19 & . & . & . & . & . & . & . & 20 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 15 & . & . & . & . & . & . & . & 16 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 9 & . & . & . & . & . & . & . & 10 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 2 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 2 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 7 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 10 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 12 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 2 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 9 & . & . & . & 4 & . & . & . & 10 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 12 & . & . & . & 7 & . & . & . & 13 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 17 & . & . & . & 12 & . & . & . & 18 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

(. signifie ϵ)

1.2 Analyse, matrice d'évolution et valeurs propres

Nous abordons ici, dans l'ordre, l'analyse de réductibilité et le calcul des valeurs et vecteurs propres.

1.2.1 Irréductibilité

Maintenant que nous avons une représentation d'état de notre procédé, nous allons étudier s'il est irréductible ou non, si c'est le cas, cela signifie qu'il a une unique valeur propre (c'est une implication et non une équivalence). Une des méthodes de vérification de la propriété d'irréductibilité d'une matrice est de vérifier si elle comporte une ligne ou une colonne d'éléments neutres (ϵ). Nous pouvons voir ici que la matrice A comporte au moins 12 colonnes d'éléments neutres, elle est donc réductible. Une autre façon est de voir si le graphe des marquages accessible est fortement connexe ou non. Si il n'est, elle est irréductible. Figure 1.3, on peut voir que ce n'est pas le cas les états 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15 et 16 sont des états puits.

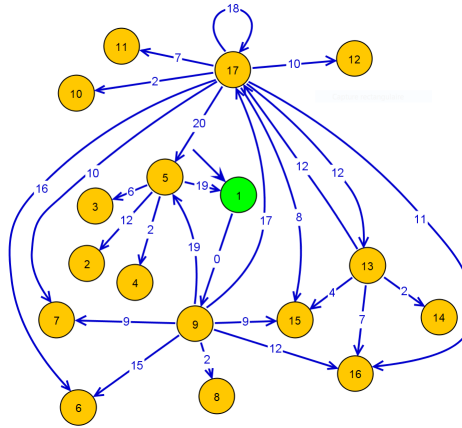


FIGURE 1.3 – Graphe des Marquages accessibles de A

1.2.2 Valeur propre

Nous avons calculé la valeur propre à l'aide de ScicosLab, elle est unique et vaut 18. Cela veut dire que le cycle interne du système est de 18 événements une fois le régime permanent établi.

1.2.3 Vecteur propre

Comme précédemment, nous avons utilisé ScicosLab pour calculer le vecteur propre de A .

$$\text{vecteur}_{\text{propre}} = \begin{bmatrix} 21 & 14 & 8 & 4 & 20 & 16 & 10 & -13 & 3 & 2 & 7 & 10 & 12 & -4 & 10 & 13 & 18 \end{bmatrix}^T \quad (1.6)$$

1.3 Commande des conditions initiales

Dans cette partie, nous allons étudier l'évolution des trains et étudier les temps d'arrivées des trains aux différentes gares. Dans un premier temps nous créerons le vecteur d'état initial à partir de contraintes spécifiées dans l'énoncé, nous calculerons les temps d'évolutions des trains à partir de ces conditions initiales. Nous étudierons également des contraintes de synchronisation, identifierons l'amélioration du système par ajout d'un train et finalement nous évaluerons l'impact d'une modification du réseau.

1.3.1 Vecteur d'état initiaux

Nous avons les contraintes suivantes :

1. Un train part de la station **D** à la date **1** ;
2. Un train part de la station **A** à la date **3** ;
3. Un train part de la station **E** à la date **3** ;
4. Un train part de la station **A** à la date **7** ;

5. Un train part de la station **G** à la date 8.

A partir de ces contraintes, nous avons calculé le vecteur initial suivant :

$$X0 = \begin{bmatrix} 18 & 11 & 5 & 1 & 21 & 17 & 11 & 3 & 5 & 3 & 8 & 11 & 13 & 8 & 11 & 14 & 19 \end{bmatrix}^T \quad (1.7)$$

Pour ce calcul, nous avons dans un premier temps placé, les temps de départ de chaque trains aux indices correspondants au départ de la gare concernée :

Contrainte 1 : $X0(D1) = 1$;

Contrainte 2 : $X0(A2) = 3$;

Contrainte 3 : $X0(E1) = 3$;

Contrainte 4 : $X0(A22) = 5$ (car 2 u.t déjà consommée en $p0$) ;

Contrainte 5 : $X0(G2) = 8$.

A partir de ces données, nous avons calculé les valeurs des autres états en étudiant le GET.

1.3.2 Calculs des 10 premiers trains arrivants en gare C et venant de la gare B

Afin d'effectuer l'analyse demandé et pour avoir une vision globale des temps d'arrivées dans les autres gares, nous avons généré les 10 premiers temps d'arrivées de l'ensemble du réseau. (La petite taille du réseau rendant cette génération possible en terme de temps de calcul.)

Pour cela, nous avons initialisé un vecteur de dimension : $\mathbb{R}^{\text{nombre d'états} \times \text{nombre de temps d'arrivé souhaité}}$.

Ensuite, nous avons initialisé la première colonne avec le vecteur d'état initiaux et les avons calculer les suivantes dans une boucle en effectuant le calcul suivant :

$$\forall i \in \{2, \dots, 10\} \mid X_1 = X0, \quad X_i = A * X_{(i-1)} \quad (1.8)$$

$$\Leftrightarrow \quad (1.9)$$

$$\forall i \in \{1, \dots, 10\}, \quad X_i = X0 * A^i \quad (1.10)$$

Les dates de départs correspondants aux trains arrivants en C et venant de B sont ceux de la ligne 7 de X :

$$L_7(X) = \begin{bmatrix} 10 & 28 & 46 & 64 & 82 & 100 & 118 & 136 & 154 & 172 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

Voici une représentation graphique figure 1.4 (effectué à l'aide de Matlab) où nous pouvons voir que les temps de départs se stabilise rapidement car la pente est constante au bout d'un certain nombre d'événement.

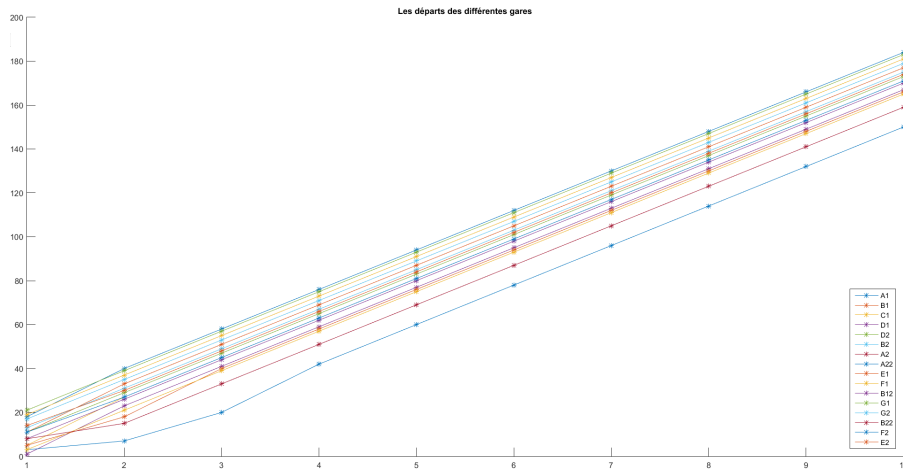


FIGURE 1.4 – Temps de départ des trains dans les différentes gares

Nous avons décidé d'étudier la différence suivante $\Delta_{cy} = X_i - X_{i-1}$ où $i = \{1, \dots, 9\}$. Cela nous a permis de

calculer le nombre d'événement nécessaire à l'entrée dans le cycle périodique.

$$\Delta_{cy} = \begin{pmatrix} 22 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 \\ 22 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 \\ 22 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 \\ 22 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 \\ 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 \\ 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 \\ 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 \\ 4 & 13 & 22 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 \\ 13 & 22 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 \\ 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 \\ 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 \\ 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 \\ 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 \\ 7 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 \\ 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 \\ 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 \\ 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

Nous pouvons constater qu'à partir du 5^e départs, tous les trains partent toutes les 18 u.t, cela correspond à la valeur propre et cela permet de renforcer la validité de nos calculs, de plus nous pouvons le voir graphiquement sur la figure 1.4.

1.3.3 Temps inter-arrivées identiques

Afin d'avoir des temps d'inter-arrivées tous identiques, nous avons refais les opérations nécessaire au calcul de X avec $X_1 = \text{vecteur}_{propre}$.

De cette façon, nous avons des temps inter-arrivées identiques et qui valent la valeur propre du système soit 18. Nous l'avons recalculé Δ_{cy} et toutes les différences de temps valent 18.

1.3.4 Ajout d'un train

Nous devons ajouter un train afin d'accélérer le temps de cycle. Dans un premier temps, nous allons identifier le cycle à accélérer pour accélérer le réseau, ensuite nous ajouterons un train à la bonne gare et finalement nous évaluerons l'amélioration.

La valeur propre étant le temps du plus long cycle, il faut que l'on trouve le/les sous-cycle(s) qui correspond à cette durée. Cela correspond à, au départ d'un train d'un terminus, le nombre d'unité de temps qu'il faut attendre avant qu'un autre train arrive dans ce même terminus. Sur le GET, cela revient au prochain au temps écoulé entre deux tirs d'une même transition. Nous avons trouvé que c'est le trajet E-B → B-E qui prend le plus de temps. Nous allons donc ajouter un train sur la gare E. Nous ajoutons donc un jeton en $p8$ sur la figure 1.1. Cela donne, une fois décomposé de la même façon que la figure 1.2, la figure 1.5.

Afin de recalculer une nouvelle matrice dynamique A_2 , nous avons redéfinis les équations d'états de la même façon que précédemment (équation 1.1).

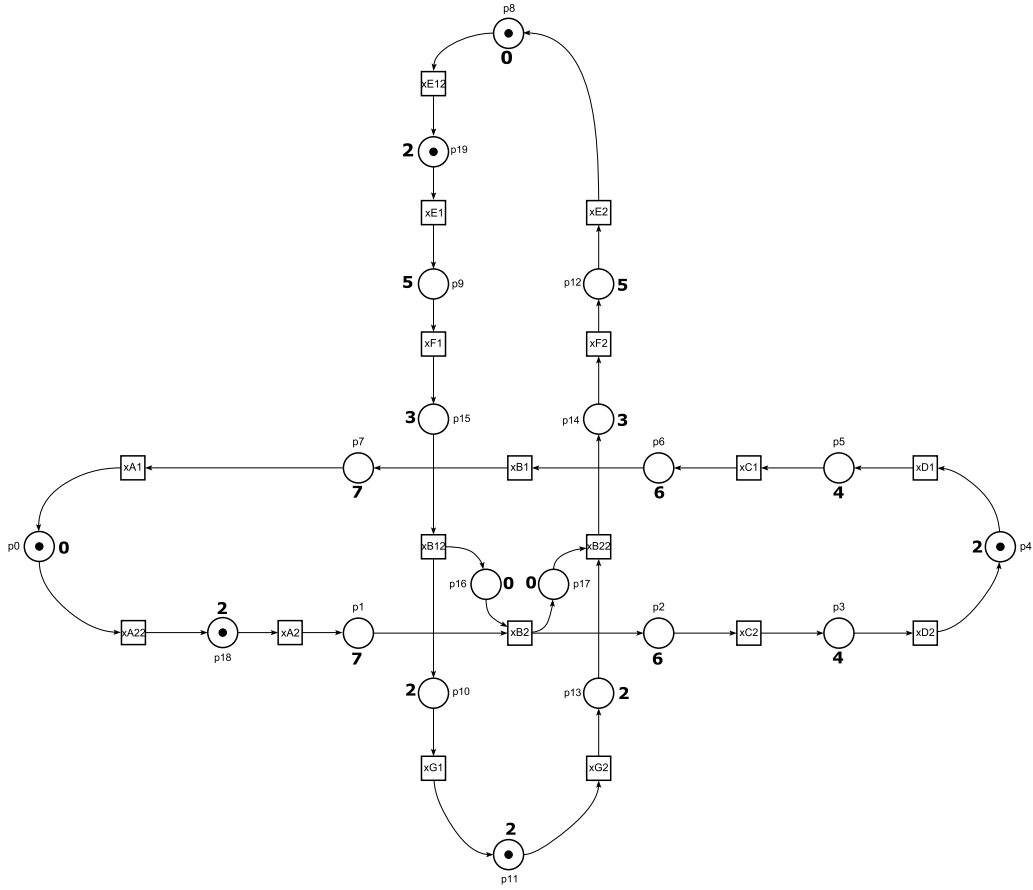


FIGURE 1.5 – Graphe des Événements Temporisé décomposé du réseau de transport avec l'ajout d'un nouveau train.

Voici les nouvelles équations d'état :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_{A1}(k) & = & 7x_{B1}(k) \\ x_{B1}(k) & = & 6x_{C1}(k) \\ x_{C1}(k) & = & 4x_{D1}(k) \\ x_{D1}(k) & = & 2x_{D2}(k-1) \\ x_{D2}(k) & = & 4x_{C2}(k) \\ x_{C2}(k) & = & 6x_{B2}(k) \\ x_{B2}(k) & = & 7x_{A2}(k) \oplus x_{B12}(k) \\ x_{A2}(k) & = & 2x_{A22}(k-1) \\ x_{A22}(k) & = & x_{A1}(k-1) \\ x_{E1}(k) & = & 2x_{E12}(k-1) \\ x_{E12}(k) & = & x_{E2}(k-1) \\ x_{F1}(k) & = & 5x_{E1}(k) \\ x_{B12}(k) & = & 3x_{F1}(k) \\ x_{G1}(k) & = & 2x_{B12}(k) \\ x_{G2}(k) & = & 2x_{G1}(k-1) \\ x_{B22}(k) & = & 2x_{G2}(k) \oplus x_{B2}(k) \\ x_{F2}(k) & = & 3x_{B22}(k) \\ x_{E2}(k) & = & 5x_{F2}(k) \end{array} \right. \quad (1.13)$$

La définition de $x_{F1}(k)$ est maintenant exprimée à partir de $x_{E12}(k)$ et celle de $x_{E12}(k)$ à partir de $x_{E1}(k)$, le reste est identique. La dimension de A_2 est donc agrandie d'un état par rapport à celle de A .

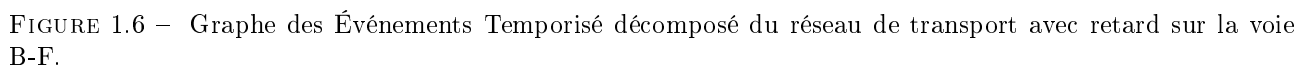
Par le même type d'opérations que précédemment nous avons calculé des expressions en fonction de $k - 1$. Voici la matrice dynamique A_2 de notre système avec un train de plus :

$$A_2 = \begin{pmatrix} . & . & . & . & 19 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 12 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 6 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 2 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 19 & . & . & . & . & . & . & . & 20 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 15 & . & . & . & . & . & . & . & 16 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 9 & . & . & . & . & . & . & . & 10 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 2 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 2 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 7 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 10 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 12 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 2 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 9 & . & . & . & 4 & . & . & . & 10 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 12 & . & . & . & 7 & . & . & . & 13 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 17 & . & . & . & 12 & . & . & . & 18 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 & . \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

(. signifie ϵ) Le nouveau temps de cycle, qui est la valeur propre, vaut 12.6666.... Nous pouvons constater un amélioration d'environ 30% du temps de cycle par l'ajout d'un train initialement placé en gare E.

1.3.5 Travaux sur la ligne B-F

Le temps de trajet entre les gares B et F fait maintenant 5 u.t à cause de travaux. Nous allons, dans un premier temps, ré exprimer la matrice dynamique du système A_3 à partir du système initial (c'est-à-dire sans l'ajout de train). Dans un second temps nous allons étudier l'influence cette modification. Nous allons utiliser modifier le GET avec l'ajout d'état de la figure 1.2 afin de former un nouveau GET. Celui-ci est représenter figure 1.6



11

Comme précédemment, nous avons créé la matrice A_3 .

$$A_3 = \begin{pmatrix} . & . & . & . & 19 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 12 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 6 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 2 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 19 & . & . & . & . & . & 20 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 15 & . & . & . & . & . & 18 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 9 & . & . & . & . & . & 12 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 2 & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 2 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 7 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 12 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 14 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 2 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 9 & . & . & . & 4 & . & 12 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 14 & . & . & . & 9 & . & 17 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 19 & . & . & . & 14 & . & 22 \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

(. signifie €)

Cette modification modifie le temps de cycle à 22. Il est de 22,22.% plus long. Il est logique que la modification de cette ligne impacte directement le temps de cycle car il affecte directement le cycle le plus long.

Chapitre 2

Optimisation d'une ressource dans un problème de jobshop

Cette fois ci, nous allons nous concentrer sur la modélisation d'un problème à base de *jobshop* dans lequel nous étudierons le travail entre deux machines M_1 et M_2 sur deux pièces A et B . Dans un premier temps, nous modéliserons comme dans le chapitre précédent, le GET associé à notre système. Puis nous étudierons chaque marquage initial de notre graphe, selon les ordonnancement possible, afin de déterminer le cycle de temps associé de chacun.

2.1 Étude du problème

Le problème de cet exercice peut être décomposé en deux sous problèmes équivalents. Le premier concerne l'ordre dans lequel les pièces A et B peuvent être traités par les machines : A ne peut pas passer sur M_1 tant qu'elle n'est pas d'abord passer sur M_2 . Pour la pièce B , elle doit d'abord passer par M_1 puis elle va sur M_2 , comme cela est expliqué dans l'énoncé.

Le deuxième problème qui apparaît n'en ai pas vraiment un, il s'agit de choisir l'ordonnancement des usinages de pièces. Très naturellement, pour 2 machines et 2 pièces il vient 2×2 possibilité d'ordonnancement qui sont :

1. **Ordonnancement 1** $M_2 \rightarrow A$ puis $M_1 \rightarrow A \rightarrow B$ et $M_2 \rightarrow B$
2. **Ordonnancement 2** $M_2 \rightarrow B \rightarrow A$ parallèle à $M_1 \rightarrow A \rightarrow B$
3. **Ordonnancement 3** $M_2 \rightarrow A \rightarrow B$ parallèle à $M_1 \rightarrow B \rightarrow A$
4. **Ordonnancement 4** $M_1 \rightarrow B$ puis $M_2 \rightarrow A \rightarrow B$ et $M_1 \rightarrow A$

Pour modéliser notre problème sous forme de GET, nous aurons besoin des événements qui lient les machines et les pièces entre elles. Nous pouvons obtenir ces informations à partir du tableau donné dans le sujet de TP, Ces temps d'attentes seront utilisés dans les temps d'attentes des places du GET pour modéliser le temps que met une pièce à être usiné par une machine. L'entrée d'un jeton dans une place signifie le début du traitement d'une pièce par une machine, la fin de traitement est modélisé par la fin de l'attente d'un jeton dans une place.

Les événements qui lient les machines aux pièces sont donc les liaisons A entre dans M_1 , B entre dans M_1 , A entre dans M_2 et B entre dans M_2 . Nous nous intéressons qu'aux entrées dans les machines car ce sont les événements les plus importants dans un système industriel. En effet les sortie dépendent des temps de traitement et des temps d'entrée : temps de sortie = temps de l'entrée + temps de traitement.

2.2 Modélisation des GET et représentation d'état et analyse du cycle associé

Dans un premier temps, nous avons réalisé le graphe des événements temporisés général (voir figure 2.4). Ce graph a 4 transitions (en noir) qui se retrouvent sur les intersections être une pièce et une machine qui est doit usiner la pièce. Elles correspondent, en partant de celle en haut à gauche et dans le sens horaire, à A entre dans M_1 , B entre dans M_1 , B entre dans M_2 et à A entre dans M_2 .

Les annotations A , B , M_1 et M_2 ne font pas partis du graph, elles font offices de légendes pour la couleurs des éléments du graph.

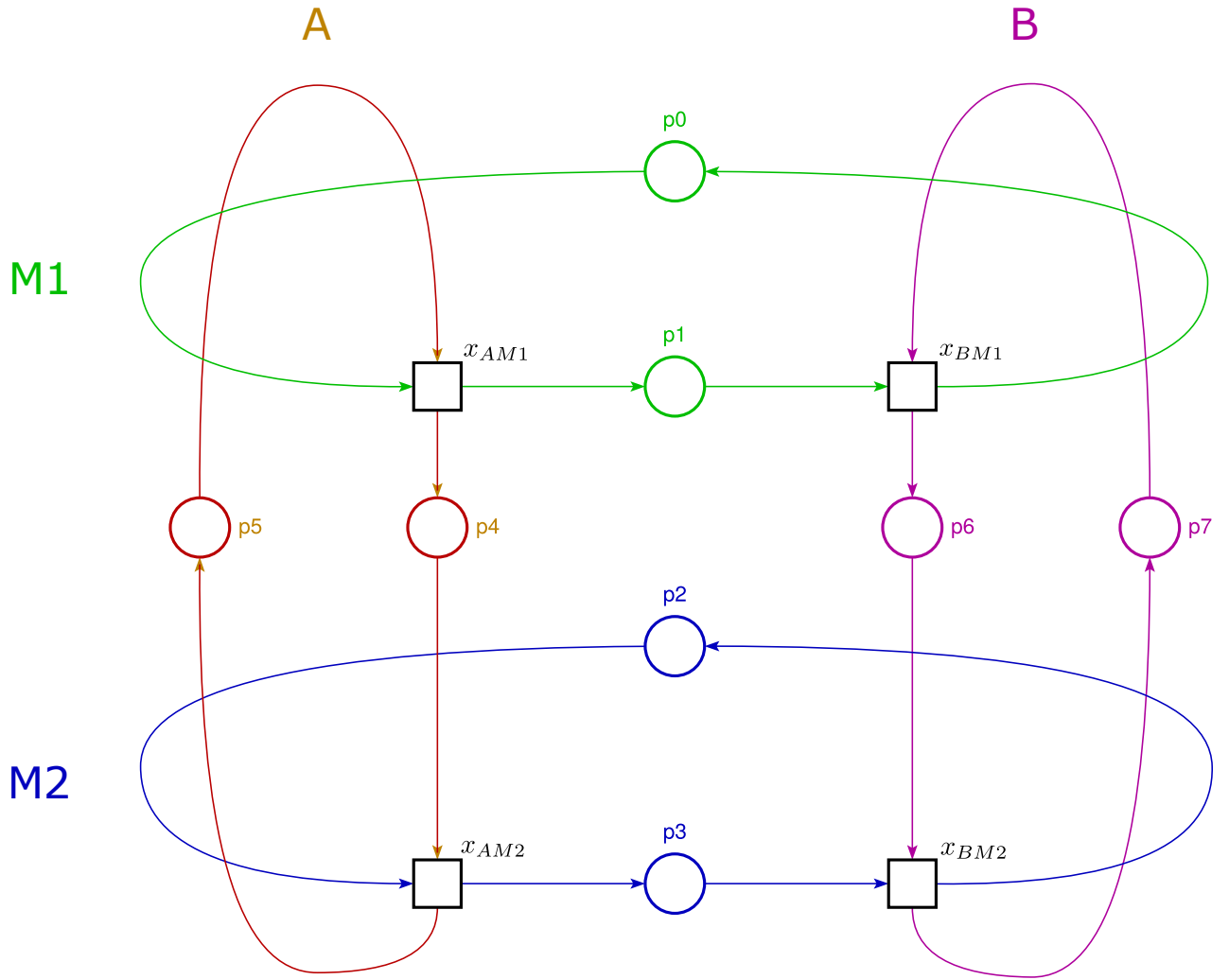


FIGURE 2.1 – Graphe des Événements Temporisé du *jobshop*

2.2.1 Ordonnancement 1

Nous modélisons maintenant le cas du premier ordonnancement possible décrit rapidement en 1. Dans ce cycle, la pièce *A* doit d'abord passer sur la machine *M*₂ puis prendre la machine *M*₁. Ensuite c'est au tour de la pièce *B* de prendre les machines *M*₁ puis *M*₂.

Pour que la pièce *A* occupe la première utilisation de *M*₂, nous devons placer le marquage initial dans les places *p*₄ et *p*₂ pour sensibiliser la transition *x*_{AM2} et ainsi modéliser l'entrer de *A* dans la machine 2. On souhaite aussi que *A* utilise la machine 1 avant *B*, donc on empêche la sensibilisation de *x*_{BM1} en ne mettant pas de jeton dans la place *p*₁ mais en plaçant un jeton dans la place *p*₀. Pour que la pièce *B* commence par la machine *M*₁, i.e *x*_{BM1}, nous plaçons un jeton dans la place *p*₇.

Nous obtenons la figure suivante (2.2). Avec l'outil *Stepper Simulator* disponible grâce à TINA, nous avons été capables de simuler notre modèle pour vérifier l'ordonnancement.

Cependant, pour connaître le temps de cycle, nous devons passer par une représentation d'état de notre GET en (max,+) pour calculer la ou les valeurs propres. Les équations d'état du GET sont :

$$\begin{cases} x_{AM_1}(k) &= 10x_{AM_1}(k-1) \oplus 9x_{BM_2}(k-1) \oplus 7x_{BM_1}(k-1) \\ x_{AM_2}(k) &= 4x_{AM_1}(k-1) \oplus 3x_{BM_2}(k-1) \\ x_{BM_1}(k) &= 11x_{BM_1}(k-1) \oplus 14x_{AM_1}(k-1) \oplus 13x_{BM_2}(k-1) \\ x_{BM_2}(k) &= 20x_{BM_2}(k-1) \oplus 21x_{AM_1}(k-1) \oplus 18x_{BM_1}(k-1) \end{cases}$$

où les $x_i(k)$ représentent le prochain tir de la transition *i*. On peut alors factoriser notre système d'équation

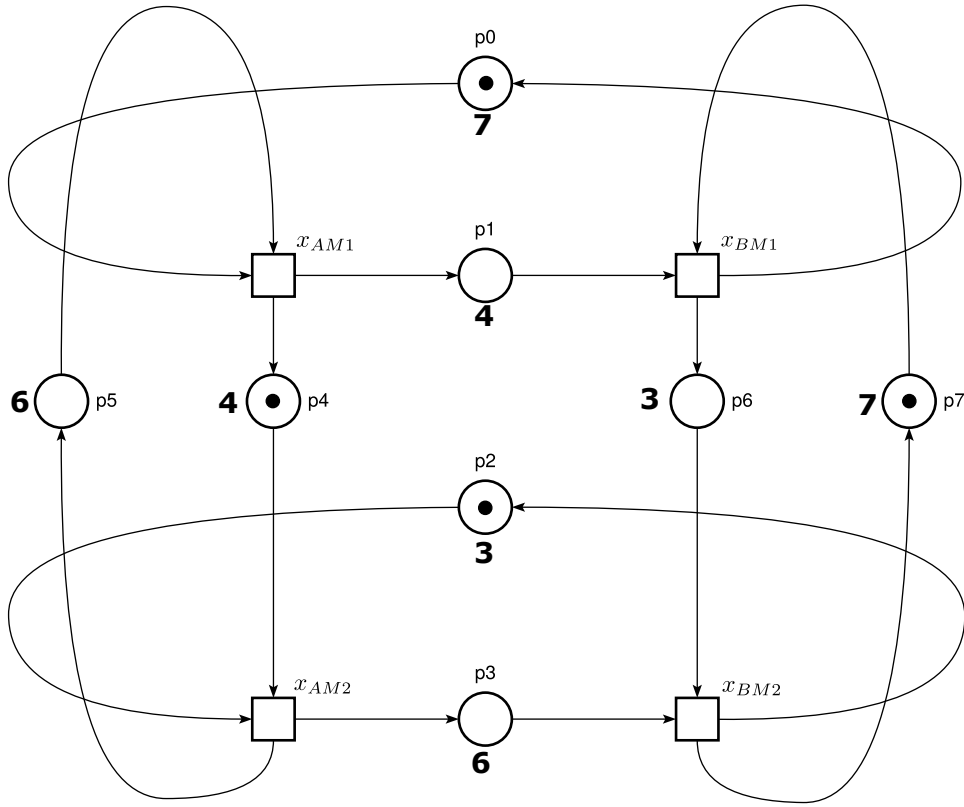


FIGURE 2.2 – Graphe des Événements Temporisé de l'ordonnancement 1 (1)

avec :

$$X(k) = \begin{pmatrix} x_{AM1}(k) \\ x_{AM2}(k) \\ x_{BM1}(k) \\ x_{BM2}(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & \epsilon & 7 & 9 \\ 4 & \epsilon & \epsilon & 3 \\ 14 & \epsilon & 11 & 13 \\ 21 & \epsilon & 18 & 20 \end{pmatrix} X(k-1) = A_1 X(k-1) \quad (2.1)$$

Nous obtenons avec ScicosLab et la fonction *karp* le résultat suivant :

$$\lambda(A_1) = 20$$

Ce temps de cycle maximal correspond à la somme des temps de traitement de toute les machines. Il était possible de prévoir ce résultat car l'ordonnancement n'est pas optimal, les machines passent du temps en étant inactive. Nous verrons qu'un meilleur ordonnancement est possible dans la suite de ce rapport.

2.2.2 Ordonnancement 2

L'ordonnancement 2 n'est pas réalisable. En effet, il n'est pas compatible avec la spécification sur l'ordre dans lequel les pièces *A* et *B* doivent être usiné par les machines. Nous n'avons alors pas pu dessiner le GET associé.

2.2.3 Ordonnancement 3

Nous allons effectuer la même analyse que dans la partie précédente (2.2.1). Dans cette répartition des traitement de pièces, nous allons synchroniser l'usinage de la pièce *A* par *M*₂ et de *B* par *M*₁ puis l'inverse (*A* par *M*₁ et *B* par *M*₂).

Pour obtenir cette séquence, il est nécessaire de disposer le marquage initial de sorte à ce que *x*_{AM2} et *x*_{BM1} soit sensibiliser dès le début du traitement.

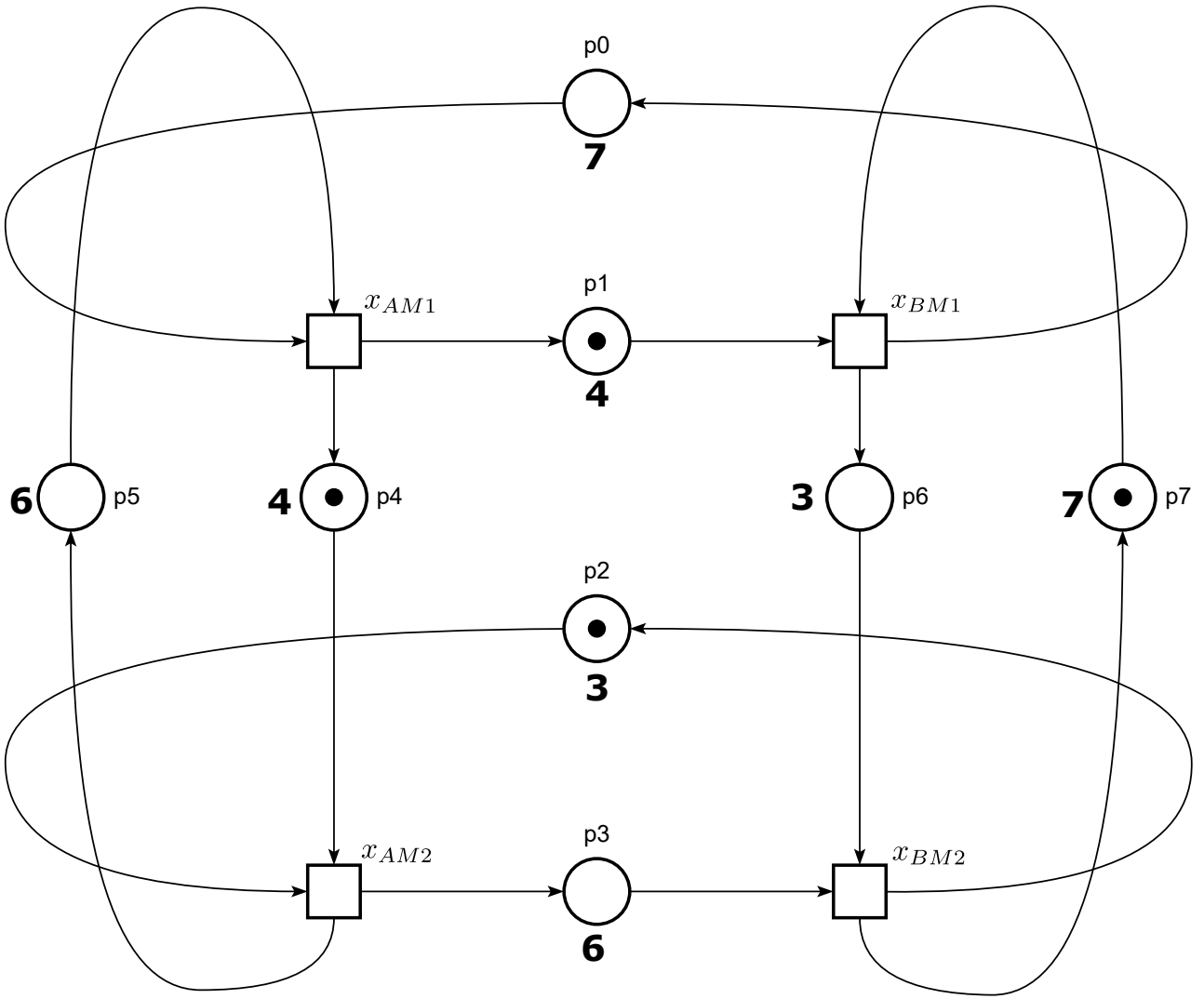


FIGURE 2.3 – Graphe des Événements Temporisé de l'ordonnancement 3 (3)

Nous pouvons écrire le système d'équation du GET obtenu que nous vous présentons ci dessous :

$$\begin{cases} x_{AM_1}(k) &= 10x_{AM_1}(k-1) \oplus 9x_{BM_2}(k-1) \\ x_{AM_2}(k) &= 4x_{AM_1}(k-1) \oplus 3x_{BM_2}(k-1) \\ x_{BM_1}(k) &= 4x_{AM_1}(k-1) \oplus 3x_{BM_2}(k-1) \\ x_{BM_2}(k) &= 10x_{BM_2}(k-1) \oplus 11x_{AM_1}(k-1) \end{cases}$$

Ce système d'équation du GET peut être représenté sous forme espace d'état avec le même vecteur que d'état que dans 2.1. Nous obtenons :

$$X(k) = \begin{pmatrix} 10 & \epsilon & \epsilon & 9 \\ 4 & \epsilon & \epsilon & 3 \\ 4 & \epsilon & \epsilon & 3 \\ 11 & \epsilon & \epsilon & 10 \end{pmatrix} X(k-1) = A_2 X(k-1) \quad (2.2)$$

Comme pour l'ordonnancement précédent, nous calculons la valeurs propres du système pour le temps de cycle :

$$\lambda(A_2) = 11$$

Ce cycle maximal correspond à l'usinage de la machine M_1 pour les deux pièces. Il s'agit du cycle le plus long, cycle de A = cycle de B = 10 et le cycle de M_2 = 9. Cet ordonnancement est le plus optimal, M_1 ne va jamais s'arrêter car c'est elle même qui ralentir le système.

2.2.4 Ordonnancement 4

FIGURE 2.4 – Graphe des Événements Temporisé de l'ordonnancement 4(4)

$$\begin{cases} x_{AM_1}(k) &= 20x_{AM_1}(k-1) \oplus 19x_{BM_2}(k-1) \oplus 15x_{AM_2}(k-1) \\ x_{AM_2}(k) &= 14x_{AM_1}(k-1) \oplus 13x_{BM_2}(k-1) \oplus 9x_{AM_2}(k-1) \\ x_{BM_1}(k) &= 4x_{AM_1}(k-1) \oplus 3x_{BM_2}(k-1) \\ x_{BM_2}(k) &= 10x_{BM_2}(k-1) \oplus 11x_{AM_1}(k-1) \oplus 6x_{AM_2}(k-1) \end{cases}$$

$$X(k) = \begin{pmatrix} 20 & 15 & \epsilon & 19 \\ 14 & 8 & \epsilon & 13 \\ 4 & \epsilon & \epsilon & 3 \\ 11 & 6 & \epsilon & 10 \end{pmatrix} X(k-1) = A_3 X(k-1) \quad (2.3)$$

Chapitre 3

Un problème de commande

Chapitre 4

Conclusion

Annexes

Annexe 1 - TITRE

Annexe 2 - TITRE