

## 魔戒三部曲：王者再臨 The Return of the King

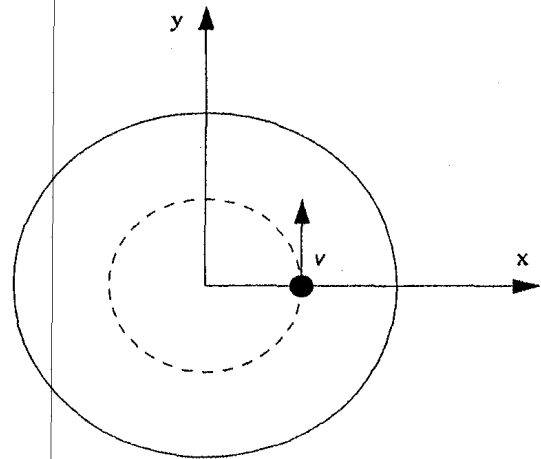
### 人物介紹



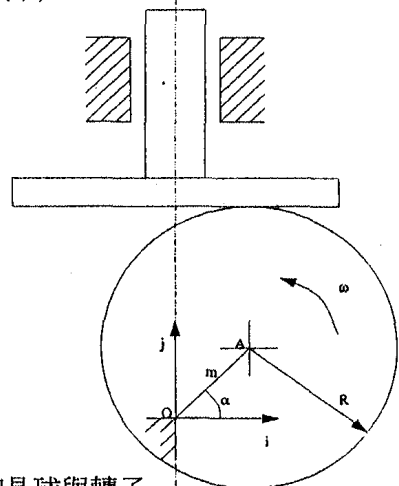
### 命運降臨剛鐸圖 The Destiny of Gondor

1. 一開始，皮聘因為好奇，把手放在薩魯曼的真知晶球上，但這玩意卻是和薩魯曼的眼睛直接相通，讓黑闇君王以為皮聘就是保管魔戒的人。皮聘將質量為  $3m$  的真知晶球（視為質點），放在一個空心圓錐體內保持固定高度  $h$ ，做無摩擦的圓周運動。圖一為其俯視圖以及側視圖，虛線為該晶球的運動軌跡，假設該空心圓錐體對  $z$  軸對稱。另一個晶球為  $m$  的質點  $b$  在空心圓錐體上方高度為  $2h$  之處 ( $2h \cot \alpha, 0, 2h$ ) 被釋放（初始速度為零），並且在 ( $h \cot \alpha, 0, h$ ) 處撞擊到晶球  $a$ ，之後兩個晶球融合，並一起作無摩擦的運動。

- (1)、求出在撞擊之前晶球  $a$  的速度向量。（以座標軸  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$  表示）(5%)
- (2)、求出在撞擊之後融合晶球為  $4m$  的質點的速度向量。（以座標軸  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$  表示）(5%)
- (3)、撞擊之後融合的晶球繼續在圓錐體內作不等速、不等高度的反覆運動，求出其所能達到的最大以及最小高度分別為  $1.1192 h$  以及  $0.6260 h$ 。（必須詳細說明所採用的原理，及列出最後所得到的三階方程式）(10%)



圖一、質點在空心圓錐體內的運動，俯視圖(上) 以及側視圖(下)。



圖二、真知晶球與轉子。

### 亡者之道 Path of Death

2. 一日，亞拉岡為了看到真知晶球中的影像，必須將真知晶球以偏心  $O$  點為中心，作等角速度  $\omega$  轉動，帶動轉子作垂直運動，亞拉岡看到真知晶球中，蒼白而奄奄一息的亞玟，為了救亞玟，亞拉岡必須在圖二所示的瞬間，算出(a)轉子的垂直速度(5%)，和(b)真知晶球與轉子接觸點的滑動速度(5%)。大家一起來幫忙吧！

洛汗和瑞文戴爾的失落 Rohan and Rivendell fall into a decline

3. 穿越了依多拉斯的平原，亞拉岡加入了希優頓王的軍隊準備迎接戰爭。為了適應戰場地形，亞拉岡的單輪戰車懸吊系統必須克服路面顛簸，你可以協助分析嗎？

現在我們考慮一個簡單的單輪戰車單輪懸吊系統，如圖三(a)所示；其中  $m_s$  代表車體的質量， $\mu$  代表輪軸的質量， $Z_s, Z_u$  分別代表車身以及輪軸的位移， $k, c$  分別代表被動式懸吊(passive suspension)元件—彈簧以及阻尼常數，而輪胎則被模擬成一個彈力係數為  $k_t$  的彈簧， $F_s$  以及  $Z_r$  分別代表施加諸於車身的作用力以及路面的顛簸。

(1)、不考慮重力加速度的情況之下，請寫出這一個系統的(二個)動態方程式。(5%)

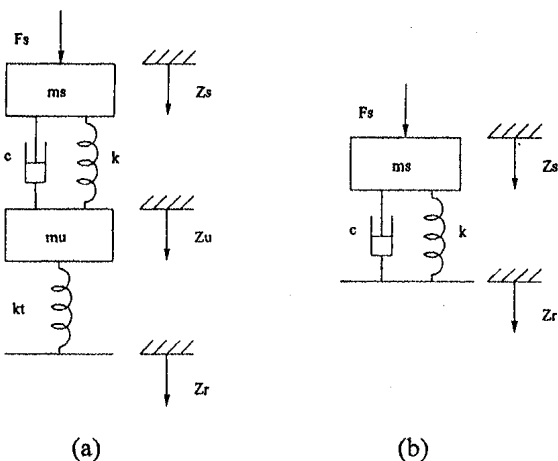
(2)、當我們忽略輪胎的彈簧作用時( $k_t \rightarrow \infty$ )，圖三(a)系統可以簡化成如圖三(b)。在不考慮重力加速度的情況之下，試著求出圖三(b)系統的

(a)、振動頻率(natural frequency) (3%)

(b)、阻尼常數(damping ratio) (3%)

(c)、當要求系統為 critical damped 時候，阻尼  $c$  應如何調整？(4%)

(d)、並試著去討論如何藉著調整系統的參數去降低系統反應的時間。(5%)



圖三、單輪汽車單輪懸吊系統。

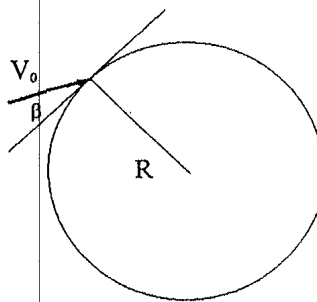
帕蘭諾平原 Battle of Pelennor Fields

4. 在帕蘭諾平原，甘道夫下令軍隊啟動大型彈射器，瞄準來勢洶洶的半獸人。剛鐸弓箭手的箭兩成為米那斯提力斯之戰最壯觀的景象；這時安格馬一個幽靈殺進了城市，挑戰甘道夫，對方射來一箭，等速  $V_0$  水平橫劃過甘道夫的啤酒肚，留下一道血痕，只知這箭長度為  $L$ ，質量為  $m$ ，為了要澄

清受傷的事實，我們不得不將啤酒肚模擬成一個半徑為  $R$  的圓筒，箭和啤酒肚都不得不視為剛體，如果箭頭射到啤酒肚的位置如圖，箭身和切線成  $\beta$  斜角，箭頭劃過啤酒肚過程中當然會保持接觸，而且箭身也保持在水平面，當箭碰撞後會產生旋轉，轉到箭身和圓筒面相切，就不會劃出傷痕了，請在計算傷口長度前，完成下面分析：

(a) 如果箭身長度  $L$  遠小於半徑  $R$ ，你可以做甚麼簡化？簡化後，列出足夠的方程式，並解出箭頭射到啤酒肚碰撞後瞬間的質心速度和轉動角速度。(20%)

(b) 箭頭劃過啤酒肚過程中，箭身轉動角速度當然一直在變，但要估計傷口長度時，我們可以假設箭身轉動角速度在碰撞後就維持不變，且不考慮重力，那麼傷口長度應該是多長？(8%)



圖四

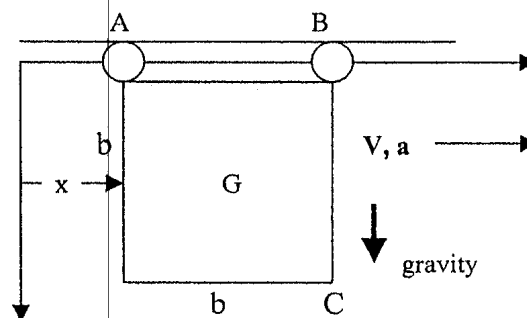
深入摩多核心 Deep Into Mordor

5. 越過了中古世界，抵達西力斯昂哥，咕魯設計佛羅多，讓他把山姆給丟在後頭，此時山姆站在吊車的正中心，吊車邊長均為  $b$ ，山姆的質心和吊車質心重合，總重為  $M$ ，當吊車在  $x$  位置，以速度  $V$  及加速度  $a$  行駛在軌道上，此刻  $B$  點突然斷裂掉下，山姆和吊車一起翻轉，請問在斷裂瞬間，

(a) 山姆和吊車翻轉角速度和角加速度為何？(8%)

(b)  $A$  點支撐力為多少？(8%)

(c)  $C$  點的速度為何？(6%)



圖五