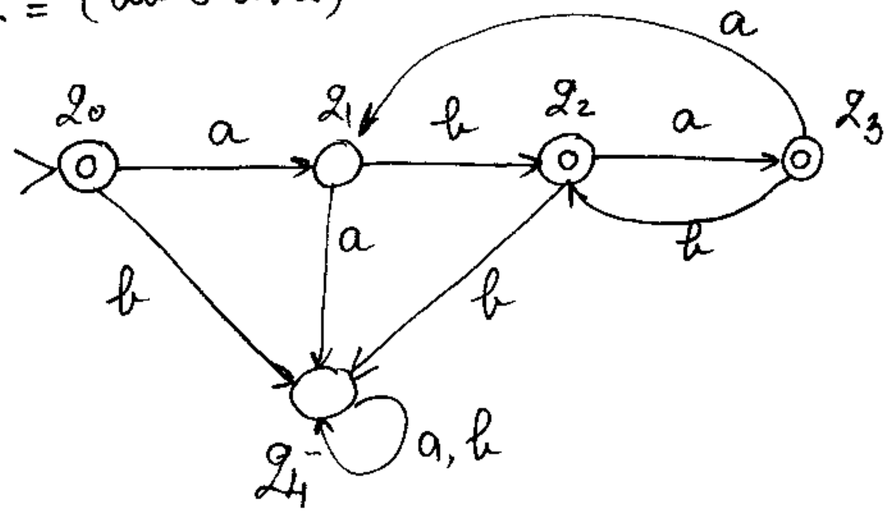
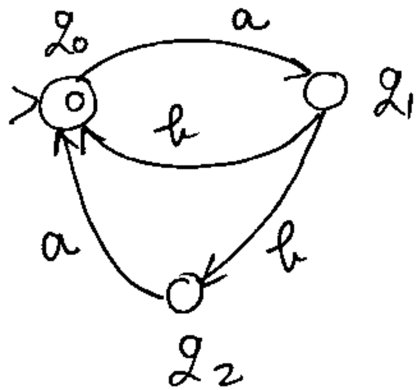
Automate Finite Nedeterministe

Nedeterminismul - proprietatea de a schimba stările într-un mod care este parțial determinat de st. curentă și simbolul de intrare.

ex: $L = (ab \cup aba)^*$



$\Rightarrow$ eliminăm restricția: din fiecare stare să $\exists$ tranziții pe fiec. simbol din alfabet.

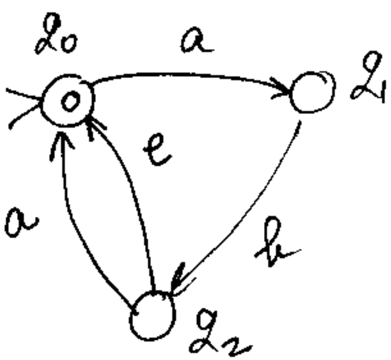


ex: ab $\xrightarrow{\text{acceptat}}$ $q_0 \to q_1 \to q_0$

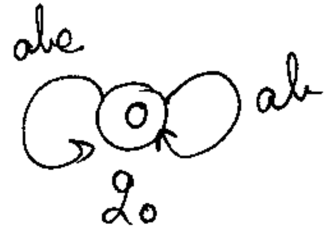
aba $\xrightarrow{\text{acceptat}}$ $q_0 \to q_1 \to q_2 \to q_0$.

Poate face o alegere greşită: aba : $q_0 \to q_1 \to q_0 \to q_1$

abb $\notin L \Rightarrow \nexists$ nicio cale care să permită acceptarea şirului



$\Rightarrow$



Def.

Un AFN este un tuplu $M=(K, \Sigma, \Delta, s, F)$, unde

K - mulțimea finită a stărilor

Σ - alfabetul de intrare

$s \in K$ - starea inițială

$F \subseteq K$ - mulțimea stărilor finale

Δ - relația de tranziție

$$\Delta \underset{\uparrow\text{ finită}}{\subseteq} K \times \Sigma^* \times K$$

$(q, u, p) \in \Delta \xRightarrow{\text{semnificație}}$ M în starea 'q' poate citi șirul de intrare 'u' și intra în starea 'p'

$\Updownarrow$

$$q \xrightarrow{u} p$$

Def

O configurație a unui AFN, M, este un element din $K \times \Sigma^*$.

Def.

Relația dintre configurații, $\vdash_M$:

$(q, w) \vdash_M (q', w') \iff \exists\, u \in \Sigma^*$ a.î. $w = uw'$ și $(q, u, q') \in \Delta$

Obs:

$\vdash_M \Rightarrow$ nu trebuie să fie funcție

Notație

$\vdash_M^*$ închiderea reflexivă și tranzitivă a lui $\vdash_M$

Def.

Șirul $w \in \Sigma^*$ este acceptat de AFN, M, dc. și numai dc. $\exists\, q \in F$ a.î. $(s, w) \vdash_M^* (q, e)$.

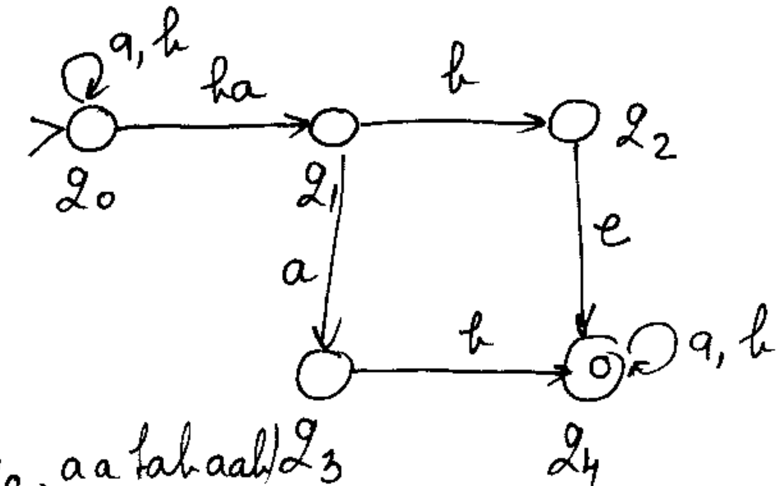
Def.

Limbajul acceptat de un AFM este mulțimea tuturor șirurilor acceptate de automat.

ex:

? M, $L = \{ w \in \{a, b\}^* \mid$ w conține cel puțin o apariție a șirului bab sau baab$\}$.

$M = (K, \Sigma, \Delta, s, F)$



$K = \{$

$\Sigma = \{a, b\}$

$(q_0, baababaab) \vdash_M (q_0, aababaab)$

$\vdash_M (q_0, ababaab)$

$\vdash_M^* (q_0, e)$

$$
\begin{aligned}
(q_0, baababaab) &\vdash_M (q_1, ababaab) \\
&\vdash_M (q_3, babaab) \\
&\vdash_M (q_4, abaab) \\
&\vdash_M (q_4, baab) \\
&\vdash_M (q_4, aab) \\
&\vdash_M (q_4, ab) \\
&\vdash_M (q_4, b) \\
&\vdash_M (q_4, e)
\end{aligned}
$$

Echivalența AFD și AFN

Def.

Automatele finite M_1 și M_2 sunt echivalente, dc și numai dc. $L(M_1)=L(M_2)$.

Teorema

Pentru fiecare AFN există un AFD echivalent.

dem.

Fie $M=(K,\Sigma,\Delta,s,F)$

Pt. a transforma M într-un AFD echivalent, trebuie eliminate

→ tranzițiile de forma $(q,u,q')\in\Delta$ ai $u=e$ sau $|u|>1$

→ tranziții multiple aplicabile aceleași config.

→ tranziții care lipsesc.

Elimin. tranzițiilor (q,u,q'), $|u|>1$. ⇒ introduc noi stări
noi tranziții

$$q \xrightarrow{\sigma_1 \dots \sigma_k} q' \quad \Rightarrow \quad q \xrightarrow{\sigma_1} p_1 \xrightarrow{\sigma_2} p_2 \cdots p_{k-1} \xrightarrow{\sigma_k} q'$$

Formal, $(q, \sigma_1 \dots \sigma_k, q') \in \Delta$, $\sigma_1, \dots, \sigma_k \in \Sigma$, $k \geq 2$

adaug stările nefinale $p_1, \dots, p_{k-1}$ la K și noi tranziții $(q, \sigma_1, p_1), (p_1, \sigma_2, p_2), \dots, (p_{k-1}, \sigma_k, q')$ la Δ.

Fie $M' = (K', \Sigma, \Delta', s', F')$ AFN rezultat prin transf.

Vrem să constr. un AFD $M'' = (K'', \Sigma, \delta'', s'', F'')$ echivalent cu M'.

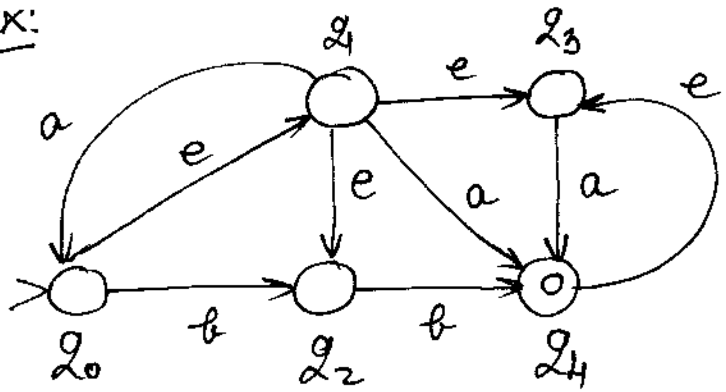
Ideea: Vedem AFN ca ocupând la fiecare moment nu o stare, ci o mulțime de stări, respectiv toate stările care pot fi atinse din st. curentă prin intermediul intrării parcurse.

$\Rightarrow K'' \leq 2^{K'}$

Problema tranzițiilor pe șirul vid, AFN

$$E(q) = \{p \in K' \mid (q, e) \vdash^*_{M'} (p, e)\}$$

ex:



$E(q_0) = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$

$E(q_1) = \{q_1, q_2, q_3\}$

$E(q_2) = \{q_2\}$

$E(q_3) = \{q_3\}$

$E(q_4) = \{q_3, q_4\}$

Definim $M'' = (K'', \Sigma, \delta'', s'', F'')$

$K'' \subseteq 2^{K'}$

$s'' = E(s')$

$F'' = \{Q \subseteq K' \mid Q \cap F' \neq \emptyset\}$

$\forall Q \subseteq K', \forall \sigma \in \Sigma$, $\delta''(Q, \sigma) = \cup \{E(p) \mid p \in K'$ şi $(q, \sigma, p) \in \Delta', q \in Q\}$

Vreau să arăt că M'' este determinist şi echivalent cu M'.

$M'' \to$ determinist din construcţie, δ'' este o f-ţie

$\delta''(Q, \sigma) = \emptyset$, adevărat, dar $\emptyset \subseteq 2^{K'}, \emptyset \in K''$

Echivalenţa revine la a demonstra, $\forall w \in \Sigma^*$ şi $\forall p, q \in K'$,

$$(q, w) \vdash^*_{M'} (p, e) \Leftrightarrow (E(q), w) \vdash^*_{M''} (P, e), p \in P.$$

$\forall w \in \Sigma^*$, $w \in L(M') \Leftrightarrow (s', w) \vdash^*_{M'} (f', e)$, $f' \in F'$

$$\Leftrightarrow (E(s'), w) \vdash^*_{M''} (Q, e), f' \in Q$$

$$\Leftrightarrow (s'', w) \vdash^*_{M''} (Q, e), f' \in Q, Q \in F''$$

Dem $\Rightarrow$ prin inducţie după $|w|$.

Pasul de bază

$|w| = 0$, $w = e$

Vreau să arăt $\underbrace{(q, e) \vdash^{*}_{M'} (p, e)}_{p \in E(q)} \iff \underbrace{(E(q), e) \vdash^{*}_{M''} (P, e)}_{\underbrace{E(q) = P,\ p \in P}_{p \in E(q)}}$, $p \in P$

Ipoteza inductivă

Pp. adev. pt șiruri w, $|w| \leq k$, $k \geq 0$

Pas de inducție

$\forall w$, $|w| = k+1$.