

1. Într-o secvență de  $n$  operații Insert, fiecare clădire  $i$  este adăugată în stivă fix o dată, și eliminată din stivă maxim o dată. În plus, într-o inserare în care se efectuează  $k$  operații pop() se vor efectua maxim  $k+1$  operații top(). Prin urmare, alocăm costurile amortizate:  
 $\hat{C}_{push} = 4, \hat{C}_{pop} = \hat{C}_{top} = 0$ , care vor putea mereu acoperi costurile reale ( $C_{push} = C_{pop} = C_{top} = 1$ ).  
 $(\hat{C}_{push} = 4$  plătește pentru 1 push(), 1 pop(), 2 top()-uri)

$$\Rightarrow T(n) = \sum_{i=1..n} (C_{Insert}) \leq \sum_{i=1..n} (\hat{C}_{Insert}) \leq 4n \Rightarrow \text{costul mediu} = T(n)/n = O(1).$$

2.  $O(n*k)$  – este posibil să ajungem în situația în care toți biții contorului sunt setați pe 1 și să efectuăm încontinuu câte o incrementare și câte o decrementare, modificând de fiecare dată fiecare bit.

3. Codul inversează un vector  $v$  de dimensiune  $n$ .

**Invariant:** Înainte de iterația  $(i, j)$ ,  $v[i+1..j-1]$  conține elementele **aflate inițial** în  $v[i+1..j-1]$ , în ordine inversă.

**Inițializare:** Înainte de prima iterație,  $i=(n-1)/2, j=n/2$ . Pentru  $n$  impar  $\Rightarrow i = j$ , pentru  $n$  par  $\Rightarrow i+1 = j$ . În ambele cazuri,  $v[i+1..j-1]$  este un vector vid (indicele de start mai mare decât cel de stop), și conține cele 0 elemente aflate inițial în  $v[i+1..j-1]$ , în ordine inversă.

**Mentineră:** Presupunem că înainte de iterația  $(i, j)$   $v[i+1..j-1]$  conține elementele aflate inițial în  $v[i+1..j-1]$ , în ordine inversă. După iterația  $(i, j)$  (înainte de iterația  $(i-1, j+1)$ ), se modifică (prin interschimb) doar elementele de pe pozițiile  $i$  și  $j$ , deci  $v[i-1+1..j+1-1]$  (adică  $v[i..j]$ ) va conține elementele aflate inițial în  $v[i..j]$ , în ordine inversă.

**Terminare:** La ieșirea definitivă din buclă (înainte de iterația  $(i=-1, j=n)$ ),  $v[0..n-1]$  conține elementele aflate inițial în  $v[0..n-1]$ , în ordine inversă.

4.  $d[v]$  este drumul minim de la source la  $v$  care trece prin maxim  $i-1$  muchii. Acesta este principiul de funcționare al algoritmului Bellman-Ford (celelalte variante nu au legătură cu ideea algoritmului). Există o mică problemă cu implementarea oferită, care permite ca, pe un drum, în aceeași iterație, să se efectueze mai multe relaxări de muchii (să avansăm mai mult decât cu câte o muchie în fiecare pas). Am putea împiedica aceasta dacă  $d$  ar fi o matrice, nu un vector. (Am scrie  $\text{if } d[i-1][v] > d[i-1][u] + w \{ d[i][v] = \dots \}$ )

5.  $(0, 1) : \rightarrow \text{NConsPair} //$  generează perechea  $(0, 1)$   
 $\text{succ} : \text{NConsPair} \rightarrow \text{NConsPair} //$  pe baza perechii  $(n, n+1)$ , obține perechea  $(n+1, n+2)$

6. (V1)  $v(\text{nil}) = 0$   
(V2)  $v(\text{node}(l, x, r)) = 1 + v(l) + v(r)$   
(E1)  $e(\text{nil}) = 0$   
(E2)  $e(\text{node}(l, x, r)) = (\text{nil?}(l) ? 0 : 1) + (\text{nil?}(r) ? 0 : 1) + e(l) + e(r)$

$$P: \text{not}(\text{nil?}(t)) \Rightarrow v(t) = e(t) + 1$$

**Cazul de bază:**  $t = \text{nil}$

$$\text{not}(\text{nil?}(t)) \Rightarrow \text{ceva} \Leftarrow (N1) \Rightarrow$$

false  $\Rightarrow$  ceva.

**Pasul de inducție:**  $t = \text{node}(l, x, r)$

**Ipoteza inductivă:**  $\text{not}(\text{nil?}(l)) \Rightarrow v(l) = e(l) + 1$  ;  $\text{not}(\text{nil?}(r)) \Rightarrow v(r) = e(r) + 1$

$\text{not}(\text{nil?}(\text{node}(l, x, r))) \Rightarrow v(\text{node}(l, x, r)) = e(\text{node}(l, x, r)) + 1 \leq (N2/V2, E2) \Rightarrow$

$\text{True} \Rightarrow 1 + v(l) + v(r) = 1 + (\text{nil?}(l) ? 0 : 1) + (\text{nil?}(r) ? 0 : 1) + e(l) + e(r)$

Există 4 posibilități:

**a)  $l = r = \text{nil}$**

$1 + v(\text{nil}) + v(\text{nil}) = 1 + (\text{nil?}(\text{nil}) ? 0 : 1) + (\text{nil?}(\text{nil}) ? 0 : 1) + e(\text{nil}) + e(\text{nil}) \leq (V1/N1, E1) \Rightarrow$

$1 + 0 + 0 = 1 + 0 + 0 + 0 + 0.$

**b)  $l = \text{nil}, r \neq \text{nil}$**

$1 + v(\text{nil}) + v(r) = 1 + (\text{nil?}(\text{nil}) ? 0 : 1) + (\text{nil?}(r) ? 0 : 1) + e(\text{nil}) + e(r) \leq (V1/N1, E1) \Rightarrow$

$1 + v(r) = 1 + 1 + e(r) \leq (l) \Rightarrow \text{True}.$

**c)  $r = \text{nil}, l \neq \text{nil}$**

Analog cu b).

**d)  $l \neq \text{nil}, r \neq \text{nil}$**  (adică  $\text{not}(\text{nil?}(l)), \text{not}(\text{nil?}(r))$ )

$1 + v(l) + v(r) = 1 + (\text{nil?}(l) ? 0 : 1) + (\text{nil?}(r) ? 0 : 1) + e(l) + e(r) \leq$

$1 + v(l) + v(r) = 1 + 1 + 1 + e(l) + e(r) \leq (l) \Rightarrow \text{True}.$