Pr 1.

Fie GIC:

$S \to aSbS \mid bSaS \mid e$

S.s. dem. $L(G)$ este mulțimea șirurilor cu nr. egal de 'a' și 'b'.

$L = L(G)$

$L' = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#a(w) = \#b(w)\}$.

$L = L(G)$ trebuie să dem. $L(G) \subseteq L'$ și $L' \subseteq L(G)$

1) $L(G) \subset L'$

Vreau să arăt că $\forall w \in L(G)$, w are nr. egal de 'a' și 'b'. Dem. prin inducție după nr. de pași ai derivării $S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} w$

Caz de bază:

$w = e$, $S \underset{G}{\Rightarrow} e$, w are un nr egal (0) de 'a' și 'b'

Ip. inductivă:

Dc. $S \overset{\leq}{\underset{G}{\Rightarrow}} w$ în m. puțin de n pași $\Rightarrow$ w are nr. egal 'a' și 'b'

Pas de inductie

Fie w a.î. $S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} w$ în pași

Dc. w începe cu 'a', $S \underset{G}{\Rightarrow} aSbS \overset{*}{\Rightarrow} aw_1bw_2$

$S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} w_1$ și $S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} w_2$ în cel mult n-1 pași. Din ip. ind. w_1 și w_2

au nr. egal de 'a' și 'b'. w are nr egal $((|w_1|+|w_2|)/2+1)$ de 'a' și 'b'.

Dc. w începe cu 'b', $S \underset{G}{\Rightarrow} bSaS \overset{*}{\Rightarrow} bw_1aw_2 \Rightarrow$ ac demo.

2) $L' \subseteq L(G)$

$\forall w \in \Sigma^*$, w are nr. egal de 'a' și 'b', $S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} w$. Dem. prin ind. după $|w|$.

Caz de bază $w = \varepsilon$, $S \overset{0}{\underset{G}{\Rightarrow}} \varepsilon$

Ip. ind.

$|w|<n$, w are nr. egal de 'a' și 'b' $\Rightarrow S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} w$

Pas de inductie

Fie w cu nr. egal de 'a' și 'b'. Pp. că w începe cu 'a'.

Idee: vreau să găsesc primul caracter după 'a' a.î. $\#_a - \#_b = 0$.

→ Pt. că am început cu 'a', $\#_a = 1$ ⇒ găsesc un caract a.î. $\#_a - \#_b = 0$ ⇒ b.

⇒ $w = a w_1 b w_2$

$\downarrow$

$\#_a = \#_b$

$a w_1 b$ ⇒ $\#_a = \#_b$.

· w ⇒ $\#_a = \#_b$ ⇒ $w_2 \Rightarrow \#_a = \#_b$.

$|w_1| < n$, $|w_2| < n$ | Ip. ind. → $S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} w_1$, $S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} w_2$

$S \underset{G}{\Rightarrow} aSbS \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} aw_1bS \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} aw_1bw_2 = w$.

→ Dc w începe 'b', $S \underset{G}{\Rightarrow} bSaS \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} bw_1aS \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} bw_1aw_2 = w$

Exemplu grilă

1° Fie L → limbaj și a un simbol. Def: $a \backslash L = \{w \mid aw \in L\}$

ex: $L = \{0, 001, 100\}$, $0 \backslash L = \{\varepsilon, 01\}$

Știind că L → reg, $a \backslash L$ este:

a) L.R.

b) Lic

c) ?

dem.

$L = L(K, \Sigma, \delta, q_0, F)$

$a \backslash L = L(K, \Sigma, \delta, q_0', F)$

$q_0' = \delta(q_0, a)$

2° Fie $w = a_1 \dots a_n$, $x = t_1 \dots t_n$, $|w| = |x|$

Def. alt (w, x) → șirul în care simb. din w și x alternează, începând cu u

$(a_1 t_1 a_2 t_2 \dots a_n t_n)$

$L, M \rightarrow$ limbaje

$alt(L, M) = \{alt(w,x) \mid w \in L, x \in M, |w| = |x|\}$.

Dc $L, M \rightarrow$ regulate, $alt(L, M)$ este:

(a) L.R.

b) L.i.c.

c) ?

dem.

$L = L(M_1)$
$M = L(M_2)$, $M_1, M_2 \rightarrow$ AFD

$M_3 = (K_1 \times K_2 \times \{0,1\}, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \delta', ((q_1, q_2), 0), F_1 \times F_2 \times \{0\})$

$\delta'((q_a, q_b), 0), c) = (\delta_1(q_a, c), q_b, 1)$

$\delta'((q_a, q_b), 1), c) = (q_a, \delta_2(q_b, c), 0)$

(3) Fie alfabetul $\Sigma = \{0\}$ și fie

M_1 = mulțimea LiC peste Σ

M_2 = mulțimea LR peste Σ

a) $M_1 \subset M_2$

b) $M_1 = M_2$

c) $M_1 \supset M_2$

(4) Fie GiC, G, def. prin reg. $S \to aS \mid Sb \mid a \mid b$.

Şirurile din $L(G)$:

a) conțin "ba"

b) nu conțin "ba"

c) doar cele conțin "ba"

(5) Fie $L \to$ ~~LiC~~ și S o mulțime finită de șiruri:

Atunci $L' = L \setminus S$ este

a) LR.

b) LiC.

c) ~~LiC~~

dem.

pp. $L' \to$ LiC , $L' = L(G')$

construim. $G = G' \cup \{S' \to w \mid \forall w \in S\}$

$L \to \cancel{LiC} \Rightarrow L' \to \cancel{LiC}$

⑥ Fie $L_1 \to LiC$, $L_2 \to \cancel{LiC}$. Af. $L_1 \cap L_2 \to \cancel{LiC}$

a) A

b) F

Dem.

$L_2 = \overline{L_1}$, $L_2 \to \cancel{LiC}$

$L_1 \cap L_2 = \emptyset$ LiC

⑦ $L \to LiC$, $R \to LR$. $(\overline{L \cup R}) \to \cancel{LiC}$

a) A

b) F

Dem.

$R = \Sigma^*$

$L \cup R = \Sigma^*$

$\overline{\Sigma^*} = \emptyset$

(8) Pt. orice limbaj L, rezultatul L^*:

a) finit $L = \emptyset$

b) infinit

c) ?

(9) Se dau urm. grame:

G1: $A \to a \mid aA \mid bAA \mid AbA \mid Aab$

G2: $B \to b \mid bB \mid aBB \mid BaB \mid Bba$

G3: $C \to bCa \mid aCb \mid ba \mid ab \mid e$

Limbajul cu $\#a \geq \#b$ este generat de rumnica grame:

a) G1 și G2

b) G1 și G3

c) G2 și G3

(10) Fie $L = \{ w \in \{a, b, c\}^+ \mid \#_a(w) = 2 * \#_b(w)$ și

$\#_c(w) = \#_b(w)$ și

$|w| \to$ impar $\}$

a) LR

b) LiC

c) LDC

R: $L = \emptyset \in LR$.

(11) Alegeți enunțul fals:

a) APD poate cicla la infinit

(b) o cond. suf. ca APD să accepte șirul de intrare este s.s. ajle într-o stare finală cu stiva vidă

c) $\nexists$ LiC se poate construi un APD care să-l accepte.

Tehnici de construcție a GIC

→ a^* : $A \to aA \mid e$

→ $a^n f^n$: $S \to aSf \mid e$

→ $a^n f^{kn}$: $S \to aS\underbrace{ff\ldots f}_{k} \mid e$

→ $a^n f^m$, $m > n$:

$\|\|$

$a^n f^n f^k$, $k > 0$

$S \to XY$

$X \to aXf \mid e$

$Y \to fY \mid f$

→ $a^n f^m$, $n \neq m$

$L = L_1 \cup L_2$

$L_1 = \{a^n f^m \mid n < m\}$

$L_2 = \{a^n f^m \mid n > m\}$

→ $a^n f^m c^m d^n$, $\nexists$ rel (m, n)

$S \to a S d \mid X$

$X \to f X c \mid e$

NU se poate GIC

→ să controlăm m. mult de 2 parametri: $a^n f^m c^n$

→ să contr. 2 parametri. care nu sunt sufixe sau prefixe

$a^n f^m c^n d^m$