

Turing enumerabilitate, Turing acceptare, Turing decizabilitate

Teorema

Un limbaj este Turing decizabil \Leftrightarrow atât el cât și complementul sunt Turing acceptate.

dem.

\Rightarrow L Turing decizabil $\Rightarrow L$ Turing acceptat (Th.)
 $\Rightarrow \bar{L}$ Turing decizabil (Th.) \Rightarrow Turing acceptat (Th.)

\Leftarrow Să pp. L acceptat de M.T. M_1 și \bar{L} este acceptat de M.T. M_2 . Putem construi o M.T. M care decide L : va fi o M.T. cu 2 fuzi (Th. echiv. cu M.T.S)
 M pune simbol de intrare w pe ambele fuzi și pune capetele la sf. w .
 M simulează M_1 și M_2 în paralel; la fiec. pas al unei aple. a lui M_1 , un pas al lui M_1 este pus pe tona bandă și un pas al lui M_2 este pus pe a 2-a bandă. Cum fie M_1 sau M_2 acceptă w , nu amândouă, M_1 sau M_2 acceptă w ; M determină care dintre M_1 sau M_2 se oprește, M se oprește cu fuzile

config. pt. a indica $w \in L$ sau $w \notin L$.

Def.

Fie Σ_0 un alfabet care nu conține $\#$. Un limbaj $L \subseteq \Sigma_0^*$ este limbajul de ieșire al unei M.T. $M \Leftrightarrow L$ este mulțimea șirurilor $w \in \Sigma_0^*$ aș. pt un anumit șir $u \in \Sigma_0^*$, $(s, \#u\#) \vdash_M^* (h, \#w\#)$. ($s \rightarrow$ st. iniț. a M.T. M).

Teorema

Un limbaj este Turing acceptat \Leftrightarrow este limbajul de ieșire al unei M.Turing.

Dem.

$L \rightarrow$ limbaj de ieșire al unei M.T. $M \Rightarrow L$ acceptat de o au. M.T.

Din Th. de echiv. M.T.D \sim M.T.H. este suficient să dem. că L este acceptat de o MTH.

Proiectăm M.T.H. M' care-l acceptă pe L : pt. un șir de intrare w , M' scrie nedeterminist u pe bandă, salvând w pe a la poartă a sensu. Atunci când M se oprește, M' compară șirul calc. de M cu w . Dc. sunt același, atunci M' acceptă, altfel intră într-un ciclu infinit.

$L \rightarrow$ mulțimea șirurilor acceptate de o M.T.M., putem modifica M să la accept. unui șir de intrare ss. aparască cu acel șir pe bandă. \Rightarrow Mulțimea șirurilor rămase pe bandă la sf. opțiilor este aceeași cu mulțimea șirurilor acceptate de $M \Rightarrow L$.

Def.

O M.T. enumerează limbajul $L (\Rightarrow)$ pt o anumită stare finală q ,

$$L = \{ w \mid \text{pt. un anumit } s, (s, \#) \vdash_M^* (q, \# w \# u) \}$$

unde $s \rightarrow$ st. inițială a lui M .

Def.

Un limbaj este Turing-enumerabil (\Rightarrow) este enumerat de o am. M.T.M.

Teoremă

Un limbaj este Turing-acceptat (\Rightarrow) Turing-enumerabil.

dem.

$\Rightarrow L \rightarrow$ Turing-acceptat de o M.T.M.

Putem construi o M.T. M' care pornește cu bandă vidă, generează sistematic (ordine lexicografică) toate șirurile peste alfabetul lui L , și efectuează

operațiile pe care le-ar fi făcut M .

!!!! M' s-ar putea să nu termine opțiunile pe fec. înaintea de a ajunge la urm.
pt. că pt un anumid M opțiunile lui M nu se termină, deși există siruri pe
care M le acceptă dar nu au fost încă generate.

$M' \Rightarrow$ va funcționa astfel:

- (1) M' execută un pas al opțiunilor lui M asupra 1mului sir peste alf. lui M .
- (2) M' execută 2 pas din opțiunile lui M pe fec. dintre cele 2 siruri.
- (3) M' execută 3 pas, ...

De fiecare dată când M' descoperă ca M ar fi acceptat un sir, se oprește
în starea 2 pt a semnaliza acceptarea.

\Leftarrow Dacă $M.T.M$ enumerează L , putem modifica M să accepte L : restructurăm M să
salveze orice intrare primită înainte să înceapă enumerarea. De fec. dată
când M intră în st. 2, machine modific. compară conținutul senzi cu
sirul de intrare salvat. Dacă sunt la fel, sirul de intrare este acceptat,
altfel enumerarea continuă.

Teoremă

Un limbaj este Turing acceptat \Leftrightarrow generat de o au. gramatică.

Complexitatea optilor

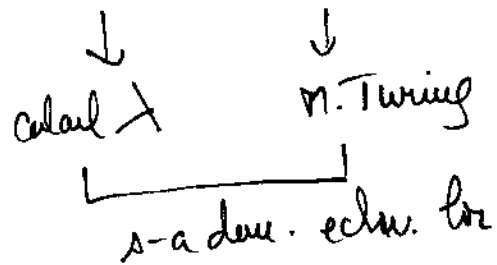
Hilbert - 1900

polinom: $5x^2yz^3 + 7xy^2 - x^5 - 10$.

a 10-a problemă enunțată de Hilbert \rightarrow alg. care să verifice dc. un polinom are rad. întregi.

până în 1936 \rightarrow def. intuitivă a noțiunii de alg.

1936 \rightarrow Church & Turing au formalizat noțiunea de alg.



1930 \rightarrow Yuri Matijasevic \rightarrow arată că nu există alg. pt. pr. 10 enunțuri de Hilbert

$D = \{p \mid p \text{ este un polinom cu rad. întregi}\}.$

? D este decizibil

$D \rightarrow$ este Turing acceptat.

$D_1 = \{p \mid p \text{ este un polinom peste } x, \text{ cu rad. întregi}\}.$

M.T. M_1 care acceptă D_1 .

$M_1 \Rightarrow$ input: $f(p)$, $p \rightarrow$ polinom de var. x
evaluează p cu valorile $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$

Dacă $p(x)$ devine 0 $\Rightarrow M_1$ acceptă

pt $D \rightarrow$ M.T. M care acceptă \Rightarrow funcț. analog. M.T. M_1 .

$M_1 \rightarrow$ poate decide D_1 pt. că există o Th \rightarrow rad. unui $p(x)$ se află în

$$\pm K \frac{C_{\max}}{C_L}$$

Problema: vrem să planificăm vizitele unui omis vizitor în 10 orașe; se da
harta și distanțele lor \Rightarrow itinerariul care minimizează întreaga dist.
 n orașe \rightarrow nr. itinerariilor posibile $(n-1)!$

10 orașe $\rightarrow 9! \approx 360000$

30 orașe $\rightarrow 29! \gg 10^{30}$