$$memberT(e,t) \Rightarrow member\big(e, flatten(t)\big)$$

Caz de baza: $t = leaf$. Membrul stang al implicatiei este fals, iar falsul implica orice, deci implicatia este adevarata.

Ipoteza de inductie: presupunem $P(t_1), P(t_2)$ adevarate.

Pasul de inductie: $t = node(t_1, a, t_2)$. Scriu separat membrul stang si drept al implicatiei.

$$MS = memberT\big(e, node(t_1, a, t_2)\big) = (e == a)\ ||\ memberT(e, t_1)\ ||\ memberT(e, t_2)$$

$$MD = member\left(e, flatten\big(node(t_1, a, t_2)\big)\right) =$$

$$member\left(e, append\left(flatten(t_1), cons\big(a, flatten(t_2)\big)\right)\right)$$

Folosesc proprietatea $member\big(e, append(l_1, l_2)\big) = member(e, l_1)\ ||\ member(e, l_2)$, pentru

$l_1 = flatten(t_1)$ si $l_2 = cons\big(a, flatten(t_2)\big)$. Obtinem:

$$MD = member\big(e, flatten(t_1)\big)\ ||\ member\left(e, cons\big(a, flatten(t_2)\big)\right) =$$

$$member\big(e, flatten(t_1)\big)\ ||\ (e == a)\ ||\ member\big(e, flatten(t_2)\big)$$

Aplicand ipotezele de inductie, obtinem $MS \ \Rightarrow MD$.

Trebuie sa mai arat ca $member\big(e, append(l_1, l_2)\big) = member(e, l_1)\ ||\ member(e, l_2)$. Fac inductie dupa l_1.

Caz de baza: $l_1 = []$. Obtinem $member(e, l_2) = false\ ||\ member(e, l_2)$, adevarat.

Pas de inductie: $l_1 = cons(x, l_1)$. Avem de aratat:

$$member\big(e, append(cons(x, l_1), l_2)\big) = member\big(e, cons(x, l_1)\big)\ ||\ member(e, l_2) \Leftrightarrow$$

$$member\left(e, cons\big(x, append(l_1, l_2)\big)\right) = (e == x)\ ||\ member(e, l_1)\ ||\ member(e, l_2) \Leftrightarrow$$

$$(e == x)\ ||\ member\big(e, append(l_1, l_2)\big) = (e == x)\ ||\ member(e, l_1)\ ||\ member(e, l_2),$$

ceea ce este adevarat daca aplicam ipoteza de inductie.

La problema asta erau mai multe proprietati ajutatoare care pareau utile intuitiv. Eu de exemplu am incercat mai intai sa folosesc $member\big(e, append(l_1, l_2)\big) = member\big(e, append(l_2, l_1)\big)$. Presupunand ca as fi reusit sa demonstrez proprietatea asta, mi-ar fi iesit si restul problemei, insa din pacate nu cred ca este posibil sa demonstram asta folosind doar axiomele date. Ar fi trebuit sa avem axioma pentru $append(l_1, cons(x, l_2))$. Proprietatea asta rezulta la randul ei din cea pe care am folosit-o in problema.