Vladimir Balan     Monica Pîrvan

# Matematici Avansate pentru Ingineri

**Probleme date la Concursul Ştiinţific Studenţesc**
**Traian Lalescu, Matematică * 2002-2014**

**= Bucureşti 2014 =**

**Referenţi ştiinţifici:**

**Prof.univ.dr. Andrei Halanay**
**Prof.univ.dr. Vasile Iftode**

# Cuprins

# Prefaţă

**Matematicianul Traian Lalescu.**

Reputatul matematician român Traian Lalescu, personalitate marcantă a ştiinţei româneşti (12 iulie 1882 - 15 iunie 1929), a fost unul dintre fondatorii teoriei ecuaţiilor integrale şi a publicat în 1910 monografia de excepţie "Introducere în teoria ecuaţiilor integrale", primul tratat din lume de acest tip, devenit clasic în literatura de specialitate. În lucrările sale ştiinţifice, Traian Lalescu a adus contribuţii esenţiale în diverse ramuri ale matematicii, cum ar fi: ecuaţiile funcţionale, seriile trigonometrice, fizica matematică, geometria, mecanica, algebra, istoria matematicii.

Ca student al Facultăţii de Ştiinţe - Matematică din Bucuresti, Traian Lalescu i-a avut ca profesori pe renumiţii matematicieni Gheorghe Ţiţeica, Anton Davidoglu, Spiru Haret, Nicolae Coculescu şi Emil Pangrati. Mai târziu, aflat cu bursă de studii în Franţa, îşi ia doctoratul la Sorbona în 1908, cu excepţionala sa teză "Sur l′equation de Volterra" asupra ecuaţiilor integrale, iar apoi îşi diversifică studiile, obţinând şi diploma de inginer de la Şcoala Superioară de Electricitate din Paris.

Reîntors în ţară, Traian Lalescu a devenit conferenţiar şi apoi profesor la Universitatea din Bucureşti, iar din 1920 a organizat şi condus Şcoala Politehnică din Timişoara, devenind apoi primul rector al acestei instituţii.

Traian Lalescu a scris lucrari de valoare în domeniul ecuaţiilor integrale şi al seriilor trigonometrice, a ţinut cursuri şi conferinte prin care a facut cunoscute Teoria relativităţii şi Calculul Tensorial - preocupări foarte noi pe atunci, şi a ţinut cursuri de Teoria electromagnetismului. În 1921, sub îndrumarea sa, a apărut primul număr al cunoscutei Reviste matematice din Timişoara, în anul 1924 a scris manualul "Calculul algebric", iar între 1920 si 1927 a scris cele patru volume intitulate "Tratat de geometrie analitică".

Traian Lalescu a fost întemeietorul Institutului Politehnic "Traian Vuia" din Timişoara, profesor universitar, deputat de Caransebeş şi Membru al Academiei Romane.

Privitor la alte preocupări care conturează profilul de excepţie al personalităţii sale, este binecunoscut faptul că Traian Lalescu desena frumos, cânta la violoncel şi traducea din limba italiană; era bun prieten cu pictorii Nicolae Tonitza, Gheorghe Zamfiropol-Dall şi sculptorul Cornel Medrea, şi a avut o înrâurire puternică în evoluţia marelui pictor Corneliu Baba. De asemenea, Traian Lalescu a fost primul preşedinte al Clubului Universitar Bucureşti (astăzi Sportul Studentesc), proaspăt înfiinţat în februarie 1916, susţinând mai apoi (după 1920) proaspăt înfiinţata Societatea Sportivă Politehnica din Timişoara.

Academicianul Gr.C. Moisil - părintele informaticii româneşti, îl considera pe Traian Lalescu unul din cei mai de seamă matematicieni pe care i-a avut ţara noastră, unul din făuritorii şcolii matematice din Romania. Alte aprecieri notabile ale personalităţilor vremii asupra lui Traian Lalescu: "inteligenţa foarte vie a lui Lalescu îi îngăduia să atingă imediat miezul unei probleme; de aceea textele lui au acea spontaneitate care le face deosebit de atrăgătoare" (Emile Picard); "un adevărat animator care ştia să pună în evidenţă valoarea părţilor cele mai interesante ale ştiinţei matematice, care atrăgea, cu farmecul şi căldura expunerii sale pe studenţi" (Gheorghe Ţiţeica); "Lalescu a cutreierat multe domenii ale matematicii..., a simţit nevoia de a se face util în educaţia matematică şcolară, universitară şi politehnică, de a-i valorifica şi continua pe cei care au pus bazele învăţământului românesc" (Solomon Marcus).

Astăzi, cinci licee din România (în Bucureşti, Hunedoara, Reşita, Orşova şi Brăneşti), precum şi şase străzi (în Craiova, Drobeta-Turnu Severin, Oradea, Timişoara, Reşiţa şi Crevedia) se mândresc să poarte numele lui Traian Lalescu.

Familia matematicianului a înfiinţat fundaţia omonimă, care promovează proiecte educaţionale, stimulând potenţialul ştiintific si creativ al tinerilor în diverse domenii de activitate prin acordare de burse şi premii, prin iniţierea şi sprijinirea concursurilor şi a altor competiţii culturale şi ştiintifice, prin susţinerea de cursuri, training-uri şi stagii de formare.

Drept omagiu adus marelui matematician Traian Lalescu, există - începând cu anul 1985, concursul interjudetean anual de matematică pentru elevii de gimnaziu şi liceu din judeţele Arad, Caraş-Severin, Hunedoara şi Timiş. În mediul universitar, există în prezent un concurs de matematică în Bucureşti (extins în ultimii ani la nivel naţional) şi un concurs de mecanică teoretică (acoperind trei judeţe din Banat), ambele concursuri purtând numele "Traian Lalescu", şi fiind adresate studenţilor din anii I-II.

Numele omului de ştiinţă Traian Lalescu se alătură personalităţilor importante ale României care au contribuit în mod esenţial la dezvoltarea şcolii naţionale de matematică şi a cercetării.

**Scurt istoric al concursului studenţesc de matematică "Traian Lalescu".**

Concursul Studenţesc de matematică "Traian Lalescu" are loc anual în Universitatea Politehnica din Bucureşti, începand cu 1996. Dorit iniţial ca o reluare a fostei Olimpiade Studenţeşti - întreruptă în 1989, acest concurs a primit după anul 2000 o nouă formă, urmărind nu atât verificarea noţiunilor matematice abstracte, ci aprofundarea noţiunilor din programa obligatorie de matematică aplicată în tehnică, accentul punându-se mai în special pe dezvoltarea logicii şi a structurilor algoritmice.

Până în 2007, concursul s-a desfăşurat independent, fiecare centru universitar organizând etapa sa locală, cu excepţia centrului universitar Bucuresti, unde au existat două etape: una locală şi una interuniversitară (organizată între trei universităţi tehnice: Univ. Politehnica, Univ. Tehnică de Construcţii şi Academia Tehnică Militară). În anul 2007, echipa calificată în urma concursului interuniversitar a participat în Cipru la concursul international SEEMOUS, de unde s-a întors cu premii - eveniment notabil care a atras atenţia asupra acestui concurs. Drept urmare, în 2008 s-a organizat pentru prima dată faza naţionala a concursului "Traian Lalescu" în Bucureşti, unde studenţii calificaţi la faza locală din Universitatea Politehnica

Bucureşti au luat multiple premii, 8 dintre aceştia fiind selectaţi pentru lotul care a participat la concursul internaţional studenţesc de la Atena, aducând ţării 2 medalii de aur, 4 de argint şi 3 de bronz.

În Universitatea Politehnica Bucureşti, cea mai recentă ediţie a concursului "Traian Lalescu", specializarea matematică, a avut patru secţiuni:

- Anul I, profil electric - unde participă studenţii anului intâi de la facultăţile: Automatică şi calculatoare, Electronică şi Telecomunicaţii, Energetică, Electrotehnică, Facultatea de Inginerie în Limbi Străine (grupele de calculatoare şi de telecomunicaţii), FSA (Facultatea de Ştiinţe Aplicate);
- Anul II, profil electric - unde sunt în competiţie studenţii anului II de la aceleaşi facultăti cu profil electric menţionate mai sus;
- Anul I, profil mecanic - unde participă studenţii anului întâi de la facultăţile: Tansporturi, Aeronave, IMST (Construcţii de Maşini), ISB (Ingineria Sistemelor Biotehnice), SIM (Ştiinţa si Ingineria Materialelor), IM (Inginerie mecanică), Facultatea de Inginerie în Limbi Străine (grupele cu profil mecanic);
- Anul II, profil mecanic - unde sunt în competitie studenţii anului II de la aceleasi facultăţi cu profil mecanic menţionate mai sus.

**Concursul Naţional de Matematică "Traian Lalescu".**

Concursul Naţional de Matematică "Traian Lalescu" este o iniţiativă promovată în anul 2008 de un grup de cadre didactice din Universitatea Politehnica din Bucureşti condus de Prof.Dr. Andrei Halanay. Acest concurs îşi propune următoarele obiective:

1. Promovarea calităţii în predarea matematicii şi stimularea studenţilor pentru abordarea aprofundată a acestei discipline;
2. Încurajarea tinerilor cu aptitudini pentru cercetarea matematică şi evidenţierea universităţilor care depun eforturi pentru antrenarea studenţilor în cercetarea ştiinţifică din domeniul matematicii;
3. Cultivarea excelenţei în studiul matematicii la nivel universitar şi reluarea unei tradiţii din anii 1970-1990;
4. Oferă un criteriu pentru clasificarea universităţilor din România;
5. Stabilirea unui criteriu de selectie pentru echipele care reprezintă România la concursurile internaţionale pentru studenţi (de exemplu Concursul de Matematică Sud-Est European, organizat anual de MASEE (Mathematical Society of South Eastern Europe) în Cipru sau Olimpiada Internaţională de Matematică pentru Studenţi).

Secţiunile concursului naţional sunt:

*Secţiunea A.* Facultăţi de Matematică;

*Secţiunea B.* Facultăţi de Automatică şi Calculatoare, Fizică, Informatică, Electronică, Inginerie Electrică, Electrotehnică, Energetică, inclusiv departamentele cu predare în limbi străine cu aceste profile.

*Secţiunea C.* Facultăţi cu profil de Ştiinţe Aplicate, Mecanic, Chimie, Transporturi, Metalurgie, Construcţii, Economic (de toate formele), Biologie, inclusiv departamentele cu predare în limbi străine cu aceste profile.

**Culegerea de probleme.**

Materialul inclus în această culegere conţine enunţurile şi rezolvările problemelor care s-au dat la concursul studenţesc de matematică "Traian Lalescu" la fazele locală, interuniversitară şi naţională din anii 2002-2014.

Autorii au depus eforturi pentru a strânge enunturile problemelor date la concursul ”Traian Lalescu” în perioada 2002-2014. Există enunţuri de probleme - puţine la număr, care datorită trecerii timpului, nemaifiind disponibile, nu au putut fi incluse în culegere.

Datorita faptului că, de-a lungul anilor, în fişele subiectelor de concurs nu au fost de regulă precizate numele celor care au propus problemele de concurs (in special la fazele locale) şi având în vedere caracterul preponderent didactic al problemelor, autorii prezentei culegeri aduc un omagiu colectiv numeroşilor colegi care au propus variante de subiecte pentru a asigura diversitatea de subiecte premergatoare procesului de selectie realizat de comisiile de concurs ale fiecărei ediţii. Majoritatea covărşitoare a soluţiilor sunt realizate de autorii volumului, cu excepţii minore - aici avându-se în vedere în special rezolvările sau baremele problemelor date la secţiunea cercetare, sau idei sugerate de colegi, cărora autorii le sunt recunoscatori.

Soluţiile propuse de autori pot servi nemijlocit în cadrul activităţii studenţilor din anii I-II ai Universităţii ”Politehnica” Bucureşti, la o bună asimilare a cursurilor cu profil matematic. Subliniem că, în timp, programa aferentă anilor de studii I-II a suferit modificări substanţiale. Prin urmare subiectele din anii 2002-2008 conţin rezolvări bazate pe noţiuni care nu se mai regăsesc în noile planuri de planuri de învăţământ. Totuşi, încurajăm studenţii să abordeze şi aceste probleme, ale căror rezolvări conţin deseori tehnici complementare deosebit de utile. Mulţumim în avans celor care doresc să contribuie la îmbunătăţirea volumului prin observaţii, adăugiri, sau prin completarea enunţurilor care nu au putut fi procurate.

Autorii volumului sunt recunoscători Doamnei Smaranda Lalescu - preşedintele Fundaţiei Traian Lalescu - pentru susţinerea constantă oferită de-a lungul timpului, pentru diseminarea culegerii şi pentru iniţiativele care au dus la creşterea calităţii şi prestigiului de care se bucură Concursul Traian Lalescu şi implicit la creşterea rolului primelor două ediţii ale culegerii de probleme la o bună buna pregătire a participanţilor.

Totodată, adresăm caldele noastre mulţumiri pentru îndrumări, materiale şi idei de soluţii profesorilor Andrei Halanay, Vasile Pop, Cristian Ghiu, Dana Mihaela Petroşanu, Laura Matei, Marcel Roman, Dumitru Opriş, Valeriu Prepeliţă, Ligia Brânzănescu, Marinică Gavrilă, Mircea Olteanu, Constantin Drăguşin, Octav Olteanu, Radu Urseanu, şi Adriana Balan. Ne cerem scuze dacă nu am reuşit să includem, după cum am precizat şi mai sus, numele zecilor de cadre didactice care au propus variante posibile de subiecte (majoritatea neincluse in volum), sau cele peste 100 de subiecte selectate, care s-au dat efectiv de-a lungul anilor 2002-2014.

Autorii 10.10.2014

# Enunţuri - anul I

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza locală, anul I, profil mecanic, 2002-2003

**I.** Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x,y) = \begin{cases} x^2 e^{-y^2/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

a) Studiaţi continuitatea lui $f$ în punctele $(0,y)$, $y \in \mathbb{R}$.

b) Studiaţi diferenţiabilitatea Fréchet a lui $f$ in $(0,0)$.

c) Calculaţi derivatele parţiale ale lui $f$ şi studiaţi continuitatea acestora.

d) Fie $g(x,y,z) = f(1, \sqrt{x^2+y^2+z^2})$, $(x,y,z) \neq (0,0,0)$.
Să se calculeze produsul scalar $\langle (\operatorname{grad} g)(x,y,z), \bar{r} \rangle$ cu $\bar{r} = (x,y,z)$.

**II.** Se consideră seria de puteri $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ unde $x$ este real şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze raza de convergenţă a seriei.

b) Să se precizeze mulţimea de convergenţă a seriei pentru $\beta = 0$ (discuţie după $\alpha \in \mathbb{R}$).

c) Să se precizeze mulţimea de convergenţă a seriei pentru $\alpha = 1$ (discuţie după $\beta \in \mathbb{R}$).

d) Determinaţi forma funcţiei $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ şi precizaţi domeniul maxim de definiţie.

**III.** Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} -\cos t & \sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$.

Fie $T$ endomorfismul lui $\mathbb{R}^3$ a cărui matrice în baza canonică este $A$.

a) Să se găseasca $a$ astfel încât $Ker\ T \neq \{0\}$.

b) Pentru $t = \pi$ şi $a$ gasit la punctul a), să se determine $Ker\ T$ şi $Im\ T$.

c) Pentru $a = 1$ şi $t = \frac{\pi}{2}$ să se determine valorile proprii ale lui $A$.

d) Să se studieze pentru ce valori $a$ şi $t$, $A$ este diagonalizabilă.

e) Folosind eventual teorema Cayley-Hamilton să se calculeze, pentru $a = 1$ şi $t = \dfrac{\pi}{2}$, $(A + I_3)^{10}(A - I_3)^2 + A$.

**IV.** Fie $D \in \mathbb{R}^3$ o mulţime deschisă, $(a,b,c) \subset D, f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă $C^1$ cu

$$f(a,b,c) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c) \neq 0, \frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c) \neq 0, \frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c) \neq 0.$$

Fie $x = \varphi_1(y,z),\ y = \varphi_2(x,z),\ z = \varphi_3(x,y)$ funcţiile definite prin aplicarea teoremei funcţiilor implicite lui $f$ relativ la $(a,b,c)$. Să se arate că

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}(b,c)\cdot\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}(a,c)\cdot\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}(a,b) = -1.$$

b) Fie $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ F(x,a,b) = x^7 + ax + b$. Verificaţi aplicabilitatea teoremei funcţiilor implicite pentru $F$ relativ la punctul $(1,1,-2)$ şi deduceţi că $x = \varphi(a,b)$.

c) Calculaţi $\dfrac{\partial\varphi}{\partial a}$ şi $\dfrac{\partial\varphi}{\partial b}$ pentru $\varphi$ definit la b).

d) Verificaţi că $F(x,1,-2) = 0$ are o unică rădăcină reală şi precizaţi valoarea acesteia.

e) Folosind diferenţiala a I-a calculaţi aproximativ o rădăcină a ecuaţiei $x^7 + 0.99x - 2.03 = 0$.

**Notă.** Timp de lucru 3 ore. La stabilirea punctajului final vor fi considerate cele mai bune 3 note din cele 4 acordate.

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza locală, anul I, profil mecanic, 2003-2004

**I.** Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \operatorname{arctg}(x+y)$.

a) Scrieţi formula Taylor cu rest de ordin 2 pentru $f$ şi demonstraţi că are loc inegalitatea

$$|f(x,y) - x - y| \le x^2 + y^2,\ \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

b) Dezvoltaţi în serie Taylor centrată în $x = 0$ funcţia

$$g(x) = \int_0^x \left[ f(t,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(t,0) \right] \mathrm{d}t.$$

Precizaţi mulţimea punctelor de convergenţă din $\mathbb{R}$.

c) Estimaţi numărul de termeni necesari pentru calculul valorii aproximative cu două zecimale exacte pentru integrala $\int_0^1 g(x)dx$ folosind seria de la punctul b).

**II.** Fie funcţia $z(x,y)$ definită implicit prin

$$x^2 + 2y^2 + z^2 - 4x + 2z + 1 = 0, \quad z \ne -1. \tag{1}$$

a) Demonstraţi că $\ -3 \le z(x,y) \le 1$.

b) Aduceţi cuadrica (1) la forma canonică; precizaţi tipul acesteia.

c) Determinaţi punctele în care se pot duce plane tangente la cuadrică, paralele cu planul

$$x + 2y - z = 0.$$

**III.** Fie $f_k \in C^1(\mathbb{R}), k = \overline{1,4}$, unde $f_4(t) = 1, \forall t \in \mathbb{R}$. Fie curba

$$\alpha(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)), t \in \mathbb{R}.$$

a) i) Dacă $f_4 \in L(\{f_1, f_2, f_3\})$, atunci $\alpha$ este conţinută într-un plan ce nu trece prin origine. Reciproca este adevărată ?

ii) Dacă $\{f_1, f_2, f_3\}$ este o familie liniar dependentă şi $f_4 \in L(\{f_1, f_2, f_3\})$, atunci $\alpha$ este o porţiune de dreaptă.

b) Calculaţi lungimea arcului de curbă $\alpha$ între punctele $P(2, 1, \frac{1}{3})$ şi $Q(4, 4, \frac{8}{3})$.

c) Să se arate că există un vector nenul $\bar{a} = (l, m, n)$ care formează unghi constant cu $\bar{\alpha}'(t)$.

**IV.** Fie $f : C([0, 2\pi]) \to C([0, 2\pi])$,

$$[f(\varphi)](x) = \int_0^{2\pi} [1 + \sin(x - t)] \cdot \varphi(t)dt,\ x \in [0, 2\pi].$$

a) Demonstraţi că imaginea lui $f$ este un subspaţiu finit dimensional şi să se găsească o bază a sa.

b) Aflaţi $\mathrm{Ker}\, f$.

c) Să se determine valorile proprii şi vectorii proprii pentru $f$.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza locală, anul I, profil mecanic, 2004-2005

**I.** Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{arctg}\,(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

a) Să se calculeze $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

b) Să se studieze diferenţiabilitatea Fréchet a lui $f$ în $(0, 0)$.

c) Să se studieze continuitatea derivatelor parţiale ale lui $f$ în $(0, 0)$.

d) Fie $g(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{arctg}\, t^2}{t^2} dt$. Folosind seria Taylor a funcţiei $\mathrm{arctg}\, x^2$ pe $(-1, 1)$, să se determine seria Taylor a lui $g$ centrată în 0 şi mulţimea de convergenţă a acesteia din $\mathbb{R}$.

e) Să se estimeze numărul de termeni necesari calculării lui $g(1)$ cu 3 zecimale exacte.

**II.** Fie $f(x, y, z) = x^n + y^n + z^n - 3xy + z^2 - 2z$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Determinaţi $n$ minim astfel încât funcţia $f$ să admită un unic punct de extrem local în domeniul $K = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$, specificând acest punct şi natura sa.

b) Pentru $n = 4$ determinaţi punctele staţionare ale funcţiei $z(x, y)$ obţinută prin aplicarea teoremei funcţiilor implicite relativ la punctul $(0, 0, 1)$.

c) Studiaţi natura punctelor staţionare obţinute anterior.

**III.** Fie $A = \dfrac{1}{2}(B + B^t)$, unde $B \in M_n(\mathbb{R})$, iar $B^t$ este transpusa matricei $B$.

a) Notăm cu $T$ endomorfismul lui $\mathbb{R}^n$ a cărui matrice în raport cu baza canonică a lui $\mathbb{R}^n$ este $A$ şi cu $Q$ funcţia $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definită prin $Q(x) = X^t \cdot A \cdot X$, pentru $X = (x_1, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$. Să se arate că toate valorile proprii ale lui $T$ sunt reale şi că $Q(x) \geq 0$ dacă şi numai dacă toate aceste valori proprii sunt pozitive.

În continuare vom considera $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -5 \\ 1 & 8 & 1 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

b) Să se găsească o bază a lui $\mathbb{R}^3$ formată din vectori proprii ai lui $T$ şi o matrice $C$ astfel încât $C^{-1} \cdot A \cdot C$ să fie diagonală.

c) Să se găsească o bază ortonormată a lui $\mathbb{R}^3$ astfel încât matricea lui $T$ să fie diagonală şi o matrice ortogonală $S$ astfel încât ${}^tS \cdot A \cdot S$ să fie diagonală.

d) Să se găsească forma canonică a ecuaţiei cuadricei $\Sigma : X^t \cdot A \cdot X + A_1 \cdot X - 22 = 0$, unde $A_1 = (10, 4, -8)$ şi să se precizeze tipul cuadricei.

**IV.** Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \cos\theta + x_3 \sin\theta - 1, x_2 + 1, -x_1 \sin\theta + x_3 \cos\theta - 1)^t$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

a) Să se arate că $||f(x) - f(y)||_2 = ||x - y||_2$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^3$, unde $||x||_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

b) Să se găsească $R \in M_3(\mathbb{R})$ şi $C \in \mathbb{R}^3$ astfel încât

$$f(x) = Rx + C,\ x = (x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3.$$

c) Să se afle valorile proprii şi vectorii proprii corespunzători pentru $R$.

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"

Faza locală, anul I, profilele electric şi mecanic(baraj), 2004-2005

**I.** Fie $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 9 & 5 & 1 \\ -3 & 5 & 13 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 20 \end{pmatrix}$.

a) Puteţi găsi, fără a calcula polinomul caracteristic, o majorare pentru cea mai mare valoare proprie ?

b) Operatorul liniar $T$ asociat matricei $A$ în baza canonică este autoadjunct ? (Justificare).

c) Operatorul liniar $T$ este pozitiv definit ? (Justificare).

**II.** a) Determinaţi polinomul caracteristic şi subspaţiile proprii pentru operatorul liniar $T$ care are în baza canonică matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$.

b) Cum arată această matrice dacă se ştie că operatorul liniar $T$ are valorile proprii $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$ ?

**III.** Scrieţi formula prin care se calculează $F'(y)$ dacă $F(y) = \displaystyle\int_{a-y}^{a+y} \cdot \frac{\ln(1 + x^2y^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

**IV.** Determinaţi elementele triedrului Frenet pentru curba $C : \begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ în punctul $A(1,1,-2)$.

**V.** Fie seria $S(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{2n+2}$. Exprimaţi prin funcţii cunoscute $\int_1^x S(t)\,\mathrm{d}t$.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza locală, anul I, profil mecanic, 2005-2006

**I.** Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-1/(x^2+y^2)}}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

a) Studiaţi continuitatea funcţiei $f$ în $(0,0)$.

b) Calculaţi $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

c) Calculaţi $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ şi studiaţi continuitatea lor în $(0,0)$. Studiaţi diferenţiabilitatea funcţiei $f$ în $(0,0)$.

d) Folosind dezvoltarea Taylor în jurul lui 0 a lui $e^x$, calculaţi sub forma unei serii de puteri integrala $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{e^{1/x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$

**II.** a) Dezvoltaţi în serie Taylor în jurul lui 0 funcţia $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$.

b) Calculaţi suma $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

c) Determinaţi extremele locale pentru $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \cos x + y^2 - 2y + 5$.

**III.** Fie matricea $A \in M_3(\mathbb{R})$, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ un vector propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_1 = 3$, iar $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vectori proprii pentru $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

a) Arătaţi că $\det A = 0$.

b) Arătaţi că $A$ este diagonalizabilă.

c) Arătaţi că $A^3 = 3A^2$.

**IV.** Fie punctele $A(1,1,1)$, $B(-1,-2,-1)$, $C(u,v,1+uv)$, $u,v \in \mathbb{R}$.

a) Calculaţi $\overline{AB} \times \overline{AC}$.

b) Calculaţi aria triunghiului $AOB$.

c) Demonstraţi că $C$ descrie o cuadrică şi precizaţi tipul acesteia.

d) Câte puncte $C$ există astfel încât $A, B, C$ să fie coliniare ?

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza locală, anul I, profil mecanic, 2006-2007

**I.** Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=\begin{cases} y^2\cdot\sin\left(\dfrac{x^2}{y^2}\right) & ,y\neq 0;\\ 0 & ,y=0.\end{cases}$

a) Să se calculeze derivatele parţiale ale lui $f$ în $(a,0)$, $a\in\mathbb{R}$.

b) Să se studieze diferenţiabilitatea Fréchet în $(a,0)$, $a\in\mathbb{R}$.

c) Să se studieze continuitatea derivatelor parţiale ale lui $f$ în $(a,0)$, $a\in\mathbb{R}$.

**II.** a) Să se afle extremele funcţiei $f:(0,\pi)\times(0,\pi)\times(0,\pi)\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y,z)=\sin x+\sin y+\sin z-\sin(x+y+z).$$

b) Să se calculeze suma $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\frac{1}{n}\cdot\cos\frac{1}{n+1}}$.

**III.** a) Fie $M=(1,1,1),N=(1,2,2),P=(2,3,2),Q=(3,2,1)$. Să se determine $\overline{MN},\overline{MP}$ şi $\overline{MQ}$ şi să se calculeze volumul tetraedului $MNPQ$.

b) Fie suprafaţa $\Sigma$ de ecuaţie $y+2xz-1=0$. Să se scrie ecuaţia planului tangent la $\Sigma$ in $M=(-1,3,1)$ şi să se studieze ce plane intersectate cu $\Sigma$ formează hiperbole.

**IV.** Fie $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 1\end{pmatrix}, a\in\mathbb{R}$.

a) Să se studieze pentru ce valori ale lui $a\in\mathbb{R}$, $A$ este diagonalizabilă.

b) Pentru $a=1$ să se afle matricele $C$ de trecere la bazele ortonormate orientate pozitiv formate din vectori proprii.

c) Să se arate că matricele $C$ de la punctul b) sunt ortogonale şi să se afle unghiul $\theta\in[0,2\pi]$ pentru care $C=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza locală, anul I, profil mecanic, 2007-2008

**I.** a) Să se dezvolte în serie de puteri, în jurul originii, funcţia

$$f:[-1,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\arcsin x;$$

b) Să se deducă suma seriei $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot ...(2n)}\cdot\frac{1}{2n+1}$.

**II.** Fie $P\subset\mathbb{R}^3$ planul de ecuaţie $x+2y+2z=0$ şi aplicaţia $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ care asociază fiecărui punct $M$, punctul $M'=$ proiecţia ortogonală a lui $M$ pe planul $P$.

a) Să se arate că $f$ este liniară şi să se determine nucleul şi imaginea lui $f$;

b) Să se arate că $f$ este diagonalizabilă;

c) Generalizare.

**III.** Se consideră funcţia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \varphi(x) = \{x\}$ (partea fracţionară a lui $x$).

a) Să se arate că $\varphi$ este periodică şi să se calculeze $I_n = \displaystyle\int_0^n \varphi(x) \cos 2\pi nx \, \mathrm{d}x$.

b) Fie $f_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi(kx)}{2^k}, x \in \mathbb{R}$. Să se arate că $(f_n, n \geq 1)$ este un şir de funcţii periodice, uniform convergent pe $\mathbb{R}$.

c) Să se arate că funcţia $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ este continuă pe $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

**IV.** Fie $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ astfel încât $AB = BA, A^{2007} = I_3$ şi $B^{2008} = I_3$.

a) Să se determine valorile proprii comune ale matricilor $A, B$.

b) Să se arate că polinoamele $P = X^{2007} - 1, Q = (X + 1)^{2008} - 1$ sunt relativ prime.

c) Presupunem că există un vector coloană nenul $x \in \mathbb{R}^3$ astfel încât $(A + B + I_3) \cdot x = 0$; să se arate că $(A + I_3)^n \cdot x = (-1)^n \cdot B^n \cdot x$, pentru orice $n \geq 1$.

d) Folosind eventual b), c) să se arate că matricea $A + B + I_3$ este inversabilă.

**Notă.** Timp de lucru 3 ore. Se vor rezolva la alegere trei subiecte.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza locală, anul I, profil electric, 2008-2009

**I.** Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$ o matrice al cărei polinom caracteristic nu admite nicio rădăcină reală. Demonstraţi că matricea $A$ este inversabilă şi că polinomul caracteristic al matricei $A^{-1}$ nu admite rădăcini reale.

**II.** Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine o matrice $T \in M_3(\mathbb{R})$, astfel încât $T^{-1}AT$ să fie diagonală.

b) Să se determine o matrice $C \in M_3(\mathbb{R})$, astfel încât $C^{2009} = A$.

**III.** Fie şirul $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} \cdot a_n$, $n \geq 1$. Considerăm seria $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n} \cdot x^n$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Să se găsească domeniul de convergenţă al seriei.

b) Să se calculeze $S'(0)$, unde $S$ este suma seriei.

**IV.** a) Să se dezvolte în serie de puteri funcţia $f(x) = \arcsin(x)$, determinând domeniul de convergenţă.

b) Să se calculeze suma seriei $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1^2 \cdot 3^2 \cdots (2n-1)^2}{2^{2n}\,(2n+1)!}$.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza locală, anul I, profil mecanic, 2008-2009

**I.** Fie $(a_n)_n$ un şir de numere reale cu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $a_n \neq 0$ , $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătaţi că seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n - \sin a_n|$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^3$ au aceeaşi natură (sunt simultan convergente sau divergente).

b) Să se arate că dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^3$ este convergentă atunci seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin a_n$ au aceeaşi natură.

c) Studiaţi convergenţa simplă şi convergenţa absolută a seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sin\left(\frac{n}{\sqrt{n^3+1}}\right).$$

**II.** Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$
şi $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (1-t, 1+t)$.

a) Să se studieze continuitatea lui $f$ în $(0,0)$.

b) Să se studieze variaţia funcţiei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) = f(\varphi(t))$.

c) Să se determine $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, astfel încât $f(x,y) = h\left(\dfrac{x}{y}\right)$, pentru orice $y \neq 0$.

**III.** Fie $E = \{e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$ şi $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfism pentru care $T(e_2) = (2,2,-2)$, şi al cărui nucleu este

$$\operatorname{Ker} T = \{(\lambda+\mu, \lambda, \lambda-\mu) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

a) Este zero valoare proprie pentru $T$? Dacă da, determinaţi vectorii proprii corespunzători.

b) Să se arate că vectorii $v = e_1 + e_2 + e_3$ şi $w = e_1 - e_3$ aparţin lui $\operatorname{Ker} T$.

c) Să se exprime vectorii $T(e_1)$, $T(e_2)$ şi $T(e_3)$ în funcţie de vectorii bazei $E$.

d) Să se determine matricea lui $T$ în baza $E$ şi să se găsească subspaţiile proprii ale lui $T$.

**IV.** Fie $S$ spaţiul vectorial real al şirurilor de numere reale. Fie

$$L = \left\{ (x_n)_n \in S \;\middle|\; x_{n+1} = \frac{5}{6}x_n - \frac{1}{6}x_{n-1},\ n \geq 2 \right\},\ u = \left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\geq 1},\ v = \left(\frac{1}{3^n}\right)_{n\geq 1}.$$

a) Să se arate că $L$ este subspaţiu al lui $S$.

b) Să se arate că $u$ şi $v$ aparţin lui $L$.

c) Dacă $(z_n)_n \in L$, $z_1 = 1$, $z_2 = 0$ să se arate că există $\alpha$, $\beta \in \mathbb{R}$, astfel încât

$$z_n = \alpha \frac{1}{2^n} + \beta \frac{1}{3^n},\ \forall n \geq 1.$$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza locală, anul I, profil electric, 2009-2010

**I.** Fie $\{i, j, k\}$ o bază ortonormată în spaţiul $\mathbb{V}_3$.

a) Dacă vectorii $a, b, c \in \mathbb{V}_3$ satisfac inegalitatea $\|a\|^2 + \|b\|^2 + \|c\|^2 < 1$, atunci vectorii $i + a$, $j + b$, $k + c \in \mathbb{V}_3$ alcătuiesc o bază în $\mathbb{V}_3$.

b) Dacă vectorii $a, b, c \in \mathbb{V}_3$ satisfac inegalitatea

$$\cos(a, i) + \cos(b, j) + \cos(c, k) > \frac{5}{2},$$

atunci familia $\{a, b, c\}$ este o bază în $\mathbb{V}_3$.

**II.** Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A$ are toate valorile proprii distincte. Să se arate că: $AB = BA$ dacă şi numai dacă există un polinom $P \in \mathbb{C}[X]$ astfel încât $B = P(A)$.

**III.** Determinaţi raza de convergenţă $R$, a seriei $\sum\limits_{n\geq 1} a_n x^n$, $x \in \mathbb{R}$, în următoarele cazuri:

a) $a_n$ este numărul divizorilor lui $n$ $(n \geq 1)$;

b) $a_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$, $n \geq 1$;

c) $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$, $n \geq 1$. În acest ultim caz calculaţi suma seriei $\sum\limits_{n\geq 1} a_n x^n$, ştiind că

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} w_n, \quad w_n = \sum_{k=0}^{n} y_k z_{n-k}.$$

S-a notat $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ suma seriei $\sum\limits_{n\geq 0} y_n$.

**IV.** Fie $f_n(x) = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} t^{2n+1} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Deduceţi o relaţie de recurenţă între $f_n$ şi $f_{n-1}$.

b) Calculaţi $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza locală, anul I, profil mecanic, 2009-2010

**I.** a) Discutaţi convergenţa seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^{\alpha} \frac{1}{n}$, unde $\alpha$ este un parametru real.

b) Să se afle mulţimea de convergenţă din $\mathbb{R}$ a seriei de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin \frac{1}{n}$.

**II.** a) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clasă $C^2$ şi $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = f(x^2 + y^2)$. Calculaţi $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$ în funcţie de derivatele lui $f$.

b) Studiaţi derivabilitatea funcţiei dată prin $h(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2+y^2}$ pentru $(x, y) \neq (0, 0)$ şi $h(0, 0) = 0$.

**III.** a) Să se calculeze $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{x^2}$.

b) Arătaţi că $\ln(1 + t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n + 1}$ şi indicaţi un rezultat din care rezultă convergenţa uniformă pe $[0, 1]$;

c) Dezvoltaţi în serie de puteri centrată în 0 funcţia $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ pentru $|x| < 1$.

d) Calculaţi integrala $\int_0^1 \frac{\ln(1 + x^2)}{x^2} dx$.

**IV.** Fie $A$ o matrice $3 \times 3$ cu elementele reale, astfel ca $A^3 = A$.

a) Arătaţi că singurele valori proprii sunt $-1, 1$ sau $0$.

b) Arătaţi că o astfel de matrice poate fi totdeauna diagonalizată.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza locală, anul I, profil electric, 2010-2011

**I.** Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Definim $[A, B] = AB - BA$.

a) Dacă $tr(A) = tr(A^2) = 0$, atunci $A^2 = O_2$ (unde $tr(A)$ este urma matricei $A$).

b) Dacă $[A, B] = A$, atunci $A^2 = O_2$.

c) Dacă $[A, B]A = A[A, B]$, atunci $[A, B]^2 = O_2$.

**II.** a) Să se determine triunghiul de arie maximă de perimetru $2p$.

b) Un punct critic pentru o funcţie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clasă $C^1$ este un punct în care se anulează toate derivatele parţiale de ordinul întâi.

i) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clasă $C^1$ care are un unic punct critic $x_0$. Dacă $x_0$ este punct de extrem local, atunci este şi punct de extrem global pentru $f$.

ii) Fie $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clasă $C^1$ care are un unic punct critic $(x_0, y_0)$ care este şi punct de extrem local. Rezultă că $(x_0, y_0)$ este punct de extrem global? (A se considera, de exemplu, funcţia $g(x, y) = e^{3x} + y^3 - 3e^x y$).

**III.** Fie $E$ un spaţiu vectorial cu dimensiunea $2n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Dacă $f : E \to E$ este o aplicaţie liniară, atunci afirmaţiile următoare sunt echivalente:

i) $\text{Ker}\,(f) = \text{Im}\,(f)$.

ii) $f^2 = 0, f \neq 0, \dim(\text{Im}\,(f)) = n$.

b) Construiţi o aplicaţie liniară cu proprietăţile de mai sus.

**IV.** a) Să se arate că seria de puteri pentru funcţia $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ este

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)} x^{2n}.$$

b) Deduceţi că

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

şi studiaţi convergenţa uniformă pe intervalul $[0, 1]$.

c) Arătaţi că

$$\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)},$$

demonstrând că integrarea termen cu termen este permisă.

d) Arătaţi că

$$\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots$$

demonstrând că integrarea termen cu termen este permisă.

e) Să se deducă relaţia

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ”TRAIAN LALESCU”
Faza locală, anul I, profil mecanic, 2010-2011

**I.** a) Să se dezvolte în serie de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ funcţiile $\frac{1}{1-x}$ şi $\ln \frac{1}{1-x}$ precizând mulţimea de convergenţă.

b) Să se descrie seriile de puteri pentru $\ln \frac{1}{1-x} - x - \frac{x^2}{2} - \ldots - \frac{x^n}{n}$ şi pentru

$$\frac{1}{1-x} - 1 - x - x^2 - \ldots - x^n, \quad n \geq 1.$$

c) Să se calculeze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^{\infty} x^{k+n} \right)$.

d) Să se calculeze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left( \ln \frac{1}{1-x} - x - \frac{x^2}{2} - \ldots - \frac{x^n}{n} \right)$.

**II.** Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1 - e^{-x^2-y^2}}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

a) Să se calculeze derivatele parţiale ale lui $f$ în $(0,0)$.

b) Să se studieze derivabilitatea (diferenţiabilitatea) Frechét a funcţiei $f$ în $(0,0)$.

c) Să se scrie dezvoltarea Taylor în jurul lui 0 a funcţiei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

**III.** Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ domeniul închis mărginit de axele $Ox$, $Oy$ şi de dreapta de ecuaţie $x + y + 3 = 0$. Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y + 4$.

a) Să se determine parametric frontiera lui $D$.

b) Să se studieze existenţa punctelor de extrem pentru $f$ în interiorul lui $D$.

c) Să se studieze existenţa punctelor de extrem pentru $f$ pe frontiera lui $D$.

**IV.** Fie $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} x_1+2x_2 \\ 2x_1+4x_2 \end{smallmatrix}\right)$.

a) Să se găsească Ker $T$ şi Im $T$ (nucleul şi imaginea lui $T$) şi să se calculeze dimensiunile lor indicând o bază pentru fiecare.

b) Să se scrie matricea $A$ ataşată lui $T$ în baza $B_1 = \{(0,1),(1,0)\}$.

c) Să se arate că $B_2 = \{(1,2),(2,-1)\}$ este o bază a lui $\mathbb{R}^2$ şi să se scrie matricea de trecere de la $B_1$ la $B_2$.

d) Să se scrie matricea lui $T$ în raport cu $B_2$.

e) Să se calculeze valorile proprii corespunzători pentru $A$. Este $A$ diagonalizabilă?

f) Să se găsească o formulă pentru $A^n$ şi să se calculeze $\left\langle A^n \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$, folosind produsul scalar din $\mathbb{R}^2$.

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ ”TRAIAN LALESCU”
Faza locală, anul I, profil electric, 2011-2012

**I.** Se consideră seria $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^{n-1}}{(n+1)(1+x^{2n})}$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine toate valorile lui $x$ pentru care seria este convergentă.

b) Să se arate că $\forall y \in (0,1)$, seria este uniform convergentă pe $[0,y]$.

c) Dacă $f$ este suma seriei, arătaţi că există $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ şi calculaţi $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.

**II.** a) Fie $a \in \mathbb{R}$ şi $\varphi : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă, astfel încât $x\varphi'(x) = a\varphi(x)$, $\forall x > 0$. Definim funcţia $\psi : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $\psi(x) = x^{-a}\varphi(x)$, $\forall x > 0$. Calculaţi $\psi'$ şi deduceţi că există o constantă $c \in \mathbb{R}$, astfel încât $\varphi(x) = cx^a$, $\forall x > 0$.

b) Fie mulţimea $V(a) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ funcţie derivabilă , $xf'(x) = af(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$ $(a \in \mathbb{R})$. Definim două operaţii:

- pentru orice $f, g \in V(a)$, $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
- pentru orice $f \in V(a)$ şi orice $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \cdot f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

i) Să se arate că $V(a)$, cu aceste două operaţii, este un spaţiu vectorial real.

ii) Arătaţi că dacă $a \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, atunci pentru orice $f \in V(a)$, avem $f(0) = f'(0) = 0$.

iii) Să se determine dimensiunile spaţiilor $V(2)$, $V(1)$, $V(\frac{1}{3})$.

**III.** a) Să se determine toate matricele $B \in M_2(\mathbb{R})\setminus\{\, c\cdot I_2 \mid c \in \mathbb{R}\}$ care comută cu matricea $A \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Să se arate că $B$ este diagonalizabilă şi că are aceleaşi vectori proprii ca şi $A$.

b) Aplicaţia liniară $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ satisface relaţia $\mathrm{Ker}\,(f) \oplus \mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}^n$. Arătaţi că $f$ este suma a două automorfisme pe spaţiul $\mathbb{R}^n$.

**IV.** În $\mathbb{R}^3$ se consideră dreptele

$$d_1 : \ x - y = 0,\ x + y - z = 0 \text{ şi } d_2 : \ x - z = 0,\ x + y + z = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

a) Să se discute după parametrul $\lambda$ poziţia relativă a celor două drepte.

b) Pentru $\lambda = 1$ să se afle ecuaţiile dreptei care se aprijină pe dreptele $d_1$ şi $d_2$, şi este perpendiculară pe $d_1$ şi pe $d_2$.

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
### Faza locală, anul I, profil mecanic, 2011-2012

**I.** a) Să se calculeze $\lim\limits_{x \searrow 0} x^{1/x}$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/x}$.

b) Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}, & \text{pentru } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{pentru } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

i) Calculaţi $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

ii) Studiaţi derivabilitatea Frechét a funcţiei $f$ în $(0,0)$.

iii) Studiaţi continuitatea derivatelor parţiale ale lui $f$ în $(0,0)$.

**II.** a) Să se dezvolte funcţia $f(x) = \ln(1+x^2)$ în serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

b) Să se afle mulţimea de convergenţă a acestei serii şi să se studieze convergenţa uniformă a acesteia.

c) Folosind rezultatul $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, să se calculeze $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

d) Să se calculeze $\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x} dx$ folosind seria de la punctul a).

**III.** Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-x-y}$.

a) Să se determine extremele locale ale lui $f$.

b) Să se determine maximul lui $f$ în mulţimea $\{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$.

c) Să se arate că $\frac{x^2+y^2}{4} \leq e^{x+y-2}$ pentru orice $x \geq 0$, $y \geq 0$.

**IV.** Fie mulţimea $U = \left\{ \begin{pmatrix} 2\alpha \\ -\alpha \\ \beta \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} \subset M_{3,1}(\mathbb{R})$ şi matricea

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

a) Să se arate că $U$ este un subspaţiu vectorial al lui $M_{3,1}(\mathbb{R})$. Să se găsească o bază a lui $U$ şi să se precizeze dimensiunea lui $U$.

b) Să se calculeze valorile proprii şi vectorii proprii ai lui $A$.

c) Să se arate că $U$ este unul dintre subspaţiile proprii ale lui $A$ (adică $U = \{X \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda X\}$, unde $\lambda$ este o valoare proprie a lui $A$).

d) Să se arate că $A$ este diagonalizabilă şi să se diagonalizeze.

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
### Faza locală, anul I, profil electric, 2012-2013

**I.** Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Arătaţi că $\det(A^2 + I_n) \geq 0$.

b) Dacă $A^3 = O_n$, arătaţi că matricea $B = \frac{1}{2}A^2 + A + I_n$ este inversabilă şi calculaţi $B^{-1}$.

**II.** Să se determine toate transformările liniare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cu proprietatea $\mathrm{Im}\,(T) = \mathrm{Ker}\,(T)$. Studiaţi aceeaşi problemă pentru $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

**III.** Fie $f_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{x} t^{2n+1} \cdot e^{-t^2} \mathrm{d}t$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Găsiţi relaţia de recurenţă între $f_n$ şi $f_{n-1}$.

b) Calculaţi $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

c) Calculaţi $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x) \mathrm{d}x$.

**IV.** Fie funcţia $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

a) Studiaţi continuitatea funcţiei, existenţa derivatelor parţiale şi diferenţiabilitatea în origine.

b) Calculaţi integrala $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(f\left(\sin\frac{t}{2},\cos\frac{t}{2}\right)\right)^{2k+1}\mathrm{d}t,\ k\in\mathbb{N}.$

c) Studiaţi convergenţa punctuală şi cea uniformă pentru şirul $g_n(x)=\dfrac{1}{2n}f\left(x^2,n\right)$, pentru $x\in\mathbb{R},n\geq 1$.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ”TRAIAN LALESCU”
Faza locală, anul I, profil mecanic, 2012-2013

**I.** a) Să se găsească mulţimea de convergenţă din $\mathbb{R}$ a seriei $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n}$.

b) Să se determine $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\cos x)^n}{n}$, precizând mulţimea acelor $x\in\mathbb{R}$ pentru care $f$ este definită.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$.

**II.** Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definită astfel:

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{y}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

a) Să se calculeze $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$; $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y)$.

b) Să se studieze derivabilitatea Frechét în $(0,y)$.

c) Să se studieze continuitatea derivatelor parţiale ale lui $f$ în $(0,0)$ şi în $(0,y)$, $y\neq 0$.

**III.** Fie $D$ triunghiul închis mărginit de $Ox$, $Oy$ şi de dreapta $x+y=\pi$. Fie $f:D\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y)=\cos x+\cos y-\cos(x+y).$$

a) Să se descrie parametric frontiera lui $D$.

b) Să se găsească punctele staţionare ale lui $f$ din $D$ ($D$ este închis !) şi să se studieze dacă printre ele se află puncte de extrem local ale lui $f$.

c) Să se calculeze maximul şi minimul lui $f$ pe $D$.

**IV.** Se consideră familiile de vectori:

$$\mathcal{F}=\{u_1=(2,0,1,3),u_2=(0,1,3,2),u_3=(1,3,2,0),u_4=(3,2,0,0)\}\subset\mathbb{R}^4$$

$$\mathbf{B}=\{e_1=(1,0,0,0),e_2=(0,1,0,0),e_3=(0,0,1,0),e_4=(0,0,0,1)\}\subset\mathbb{R}^4.$$

Notăm $u_5 = u_1$. Fie $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ operatorul liniar care satisface condiţiile

$$T(u_k) = u_{k+1}, \quad \forall k \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

a) Construiţi matricea $A$ a operatorului $T$ relativ la baza $B$.

b) Arătaţi că $F$ este bază în $\mathbb{R}^4$ şi aflaţi matricea lui $T$ relativ la $\mathcal{F}$.

c) Aflaţi valorile proprii ale matricei $A$ şi determinaţi vectorii proprii.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza locală, anul I, profil electric, 2013-2014

**I.** Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ şi $I = I_3$.

1. Verificaţi că:

a) $A + I$ este nesingulară;

b) $(I - A)(I + A)^{-1} = (I + A)^{-1}(I - A)$;

c) matricea $Q = (I - A)(I + A)^{-1}$ este ortogonală (adică $Q^t = Q^{-1}$).

2. Determinaţi toate valorile proprii reale ale matricei $Q$, împreună cu vectorii proprii corespunzători.

3. Demonstraţi proprietăţile a), b), c) de la punctul 1 în cazul în care $A$ este o matrice antisimetrică ($A^t = -A$), $3 \times 3$ oarecare.

**II.** a) Să se dezvolte funcţia $f(x) = \arcsin\, x$ în serie de puteri în jurul lui 0.

b) Să se calculeze suma seriei

$$1 + \sum_{n \geq 1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)} \cdot \frac{1}{2n+1}.$$

**III.** Fie funcţiile $f \in C^2(\mathbb{R})$ şi $v(x, y) = f(\frac{y}{x})$. Presupunem că funcţia $f$ este armonică.

a) Arătaţi că

$$\frac{x^2 + y^2}{x^4} f''\left(\frac{y}{x}\right) + 2\frac{y}{x^3} f'\left(\frac{y}{x}\right) = 0.$$

b) Să se afle funcţia $f$ $\left(\text{se poate folosi substituţia } t = \frac{y}{x}\right)$.

**IV.** Se consideră forma pătratică $q(x) = x^t A x$, unde $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, unde $x$ este un vector coloană nenul din $\mathbb{R}^3$.

a) Determinaţi transformarea ortogonală $x = Qy$ prin care forma pătratică este redusă la forma canonică.

b) Determinaţi valorile extreme ale funcţiei $g : \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)^t\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x^t A x}{x^t x}$ şi vectorii în care se ating aceste valori.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza locală, anul I, profil mecanic, 2013-2014

**I.** Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze $A^n$, $n \geq 2$.

b) Să se calculeze $e^{tA} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$.

c) Să se calculeze $\langle Ax, Ax \rangle$, cu $x = (x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3$, unde $\langle\ ,\ \rangle$ este produsul scalar canonic pe $\mathbb{R}^3$.

d) Să se calculeze $||A|| = \sup\{\langle Ax, Ax \rangle^{1/2} \mid ||x||_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = 1\}$.

e) Să se indice punctele de pe sfera unitate în care $||A||$ este atinsă.

**II.** Fie ecuaţia $z^4 - x^4 - y^4 = 0$.

a) Să se găsească punctele în care se poate aplica teorema funcţiilor implicite pentru a obţine funcţia $z = z(x, y)$.

b) Să se arate că funcţia $f$ astfel obţinută verifică relaţia $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$.

c) Să se scrie polinomul Taylor de grad 2 al funcţiei $z$ de la punctul a), relativ la punctul $(1, 0)$.

**III.** Fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \frac{y^{2k}}{x^{2k-3}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

a) Să se calculeze suma seriei care defineşte funcţia $f$.

b) Să se calculeze $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

c) Să se studieze derivabilitatea (diferenţiabilitatea) Frechét a funcţiei $f$ în $(0, 0)$.

**IV.** Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze $A^2, A^3, A^4$.

b) Pentru $v = (0, 0, 0, 1)^t \in \mathbb{R}^4$ să se arate că vectorii $v, Av, A^2v, A^3v$ sunt liniar independenţi.

c) Fie $V$ un spaţiu vectorial real cu $\dim V \geq 2$ şi $T : V \to V$ o aplicaţie liniară cu proprietăţile $T^p = 0$ şi $T^{p-1} \neq 0$ pentru un $p \in \{2, 3, \ldots, \dim V\}$. Să se arate că dacă $v \in V$ este un vector pentru care $T^{p-1}v \neq 0$, atunci familia de vectori $\{v, Tv, T^2v, \ldots, T^{p-1}v\}$ este liniar independentă.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza interuniversitară, anul I, profil electric, 2002-2003

**I.** Fie $s_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ şirul de funcţii definit prin

$$s_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \dfrac{x}{k(k+1)}\right), & \text{pentru } x \neq 0 \\ 1 - \dfrac{1}{n+1}, & \text{pentru } x = 0. \end{cases}$$

a) Arătaţi că $s_n$ sunt funcţii continue.

b) Arătaţi că şirul $(s_n)$ converge uniform pe $[0,1]$.

c) Fie $s : [0,1] \to \mathbb{R}$ limita de la b). Evaluaţi

$$\frac{s(x) - s(0)}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2(n+1)^2}$$

şi demonstraţi că $s$ este derivabilă în origine.

**II.** Fie $a_0 \in (0,1)$ şi şirul $a_n = \ln(1 + a_{n-1}), n \geq 1$.

a) Să se arate că $a_n \to 0$ şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n - a_{n+1}}{a_n^2}$.

b) Să se arate ca $\sum\limits_{n\geq 0} a_n^2$ este convergentă.

**III.** a) Daţi un exemplu de matrice nenula pătratică de ordinul doi cu proprietatea $A^2 = 0$.

b) Să se arate că dacă $A$ este o matrice pătratica de ordinul $n$ astfel incât $A^n = 0$, atunci matricea $I_n - A$ este inversabilă. Determinaţi matricea $(I_n - A)^{-1}$ în funcţie de $A$.

**IV.** Fie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorfism (operator liniar) cu proprietatea că $f^2 = f$. Arătaţi că valorile proprii ale lui $f$ sunt 0 şi 1 şi că subspaţiile proprii corespunzătoare sunt $\operatorname{Ker} f$ şi $\operatorname{Im} f$.

b) Determinaţi $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f$ şi arătaţi ca operatorul $f$ admite o bază formată din vectori proprii.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza interuniversitară, anul I, profil mecanic, 2002-2003

**I.** a) Să se arate că $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-1/x^2}}{x^\alpha} = 0, \forall \alpha > 0$.

b) Fie

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} e^{-1/(x^2+y^2)}, & \text{pentru } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{pentru } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Să se calculeze derivatele parţiale ale lui $f$ in $(0,0)$.

c) Să se studieze diferenţiabilitatea lui $f$ in $(0,0)$.

d) Folosind seria de puteri a funcţiei exponenţiale să se calculeze cu 3 zecimale exacte $\int_1^{100} f(x,0)\,\mathrm{d}x$.

**II.** a) Să se găseasca mulţimea din $\mathbb{R}$ pe care converge seria $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$; să se cerceteze convergenţa uniformă pe $[0,1]$.

b) Să se calculeze $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$ pentru $x$ în mulţimea de convergenţă.

c) Folosind $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{12}$, să se calculeze suma seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n(n+2)^2}$

d) Să se demonstreze convergenţa şi să se calculeze integrala $\displaystyle\int_0^1 \ln x\cdot\ln(1+x)\,\mathrm{d}x$ folosind dezvoltarea în serii de puteri a funcţiei $\ln(1+x)$ în jurul lui zero.

**III.** Fie matricea $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

a) Să se determine matricea $A^n, n\in\mathbb{N}$.

b) Ştiind că $e^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+...+\dfrac{x^n}{n!}+...,\ x\in\mathbb{R}$, să se calculeze matricea $e^A$.

c) Să se afle valorile proprii ale matricei $A^n$.

d) Fie forma pătratică $F_n(X)=X^t\cdot A^n\cdot X, X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$. Să se afle valorile $n\in\mathbb{N}$ pentru care $F_n(X)$ este pozitiv definită.

**IV.** Fie $V=M_2(\mathbb{R})$ spaţiul vectorial al matricelor pătratice cu valori reale, $2\times 2$ şi

$$B=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$$

baza canonică în $V$. Fie funcţia $T:V\to V$, definită prin $T(A)=A^t$, unde $A^t$ este transpusa matricei $A, A\in V$.

a) Să se arate că $T$ este o aplicaţie liniară.

b) Se cere matricea ataşată aplicaţiei $T$ în baza $B$.

c) Se cer valorile proprii şi vectorii proprii pentru $T$.

d) Dacă $W=\{A\in V \mid T(A)=A\}$, să se găsească o bază în $W$ şi $\dim_{\mathbb{R}} W$.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza interuniversitară, anul I, profil mecanic, 2003-2004

**I.** Pentru $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ fixat, fie seria de puteri

$$s_\alpha(x) = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

a) Să se determine raza de convergenţă a seriei şi să se calculeze suma $s_\alpha(x)$, observând eventual că $(1+x){s_\alpha}'(x) = \alpha \cdot s_\alpha(x)$.

b) Să se calculeze coeficienţii seriei pentru $\alpha = -1/2$.

c) Să se calculeze următoarea integrală:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+a^2\sin^2 x}}, \quad |a| < 1,$$

folosind dezvoltarea în serie de la punctul b).

**II.** Fie $f_{ab} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f_{ab}(x, y) = ax + by^2$, unde $a, b$ sunt parametri reali.

a) Pentru ce valori ale parametrilor $a$ şi $b$, $f_{ab}$ admite puncte de extrem local ? Discutaţi natura lor.

b) Studiaţi punctele de extrem ale lui $f_{1,1}$, condiţionate de $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

c) Pentru ce valori $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $f$ are exact două puncte de extrem condiţionate de $x^2 + y^2 - 1 = 0$ ?

**III.** Fie spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3$ cu produsul scalar obişnuit

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, \ \forall x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Fie

$$L = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \ x_1 - x_2 = 0\}$$

un subspaţiu vectorial. Notăm cu $L^\perp = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, y\rangle = 0, \forall x \in L\}$ subspaţiul ortogonal corespunzător subspaţiului $L$.

a) Arătaţi că orice element $x$ din $\mathbb{R}^3$ se poate scrie în mod unic sub forma $x = z+y$, unde $z \in L$ şi $y \in L^\perp$.

b) Notăm cu $pr_L x$ elementul $z$ provenit din descompunerea lui $x$ de la punctul a). Definim aplicaţia liniară $T(x) = 11 \cdot (x - pr_L x)$. Determinaţi o bază de vectori în Ker $T$.

c) Este $T$ izomorfism? Justificaţi.

d) Aduceţi la forma canonică forma pătratică:

$$g(x_1, x_2, x_3) = 10x_1^2 - 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 10x_2^2 - 6x_2x_3 + 2x_3^2.$$

**IV.** Fie $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aplicaţia liniară care în baza canonică are matricea $A$.

a) Să se arate că $\dim \operatorname{Ker} T = 1$ dacă şi numai dacă $a = 2$.

b) Pentru $a = 2$ să se găsească o bază ortonormată în $\operatorname{Ker} T$ şi una în $\operatorname{Im} T$.

c) Dacă $\lambda = 2$ este o valoare proprie pentru $T$ şi dacă $B$ este matricea transformării $T \circ T$, atunci să se arate că forma pătratică $g(x_1, x_2, x_3)$ având matricea $B$ relativ la baza canonică, este pozitiv definită.

**Notă.** Timp de lucru 3 ore. Se vor rezolva la alegere trei subiecte.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ”TRAIAN LALESCU”
Faza interuniversitară, anul I, profil electric, 2004-2005

**I.** Fie operatorii $f_1, f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ care în baza canonică sunt daţi respectiv de matricele :

$$[f_1] = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad [f_2] = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Să se determine valorile proprii ale celor doi operatori.

b) Care dintre ei admite rădăcini pătrate? Justificaţi răspunsul.

c) Pentru operatorul care admite rădăcini pătrate să se afle matricea uneia din rădăcini.

*Notă:* rădăcina pătrată a unui operator $f$ înseamnă un operator $g$ care îndeplineşte condiţia $g \circ g = f$.

**II.** Fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \cdot \displaystyle\int_0^x |\sin(u \cdot y)|\, \mathrm{d}u, & \text{pentru } xy \neq 0 \\ 0, & \text{pentru } xy = 0. \end{cases}$

a) Să se arate că $f$ este continuă în origine.

b) Calculaţi derivatele parţiale în origine.

c) Studiaţi diferenţiabilitatea în origine.

d) Să se arate că: $\dfrac{2k}{k\pi + \frac{\pi}{2}} \leq f(x,y) \leq \dfrac{2k+1}{k\pi}$, $k\pi \leq xy \leq k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{N}$.

e) Calculaţi $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} f(x,y)$.

**III.** Să se aducă la forma canonică şi să se reprezinte grafic conica definită de ecuaţia

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0.$$

**IV.** a) Se consideră seria de funcţii $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot e^{-x}$. Să se arate că această serie nu converge uniform pe $[0, \infty)$.

b) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\dfrac{x}{2} \cdot \cos\dfrac{x}{2^2} \cdot \cdots \cdot \cos\dfrac{x}{2^n} = \dfrac{\sin x}{x}$, $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

c) Se dă seria de funcţii $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$. Să se studieze convergenţa seriei pe intervalul $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

d) Să se calculeze $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x$, unde $f$ este suma seriei de la punctul c).

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza interuniversitară, anul I, profil mecanic, 2004-2005

**I.** Fie funcţia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

a) Să se scrie ecuaţiile care caracterizează punctele staţionare ale lui $f$.

b) Să se determine $a, b, c, d$ astfel încât punctul $(-1, -2, 3)$ să fie punct de minim local şi valoarea funcţiei în acest punct să fie 0.

c) Să se scrie $f(x, y, z)$ în funcţie de puterile lui $(x+1), (y+2)$ şi $(z-3)$, coeficienţii $a, b, c, d$ fiind determinaţi la punctul b).

d) i) Să se verifice condiţiile teoremei funcţiilor implicite pentru ecuaţia $f(x, y, z) - 1 = 0$ relativ la punctul $(-1, -2, 2)$ şi să se arate că există o funcţie definită implicit $z = z(x, y)$ în vecinătatea punctului $(-1, -2)$ a.î. $z(-1, -2) = 2$.

ii) Să se calculeze $\mathrm{d}z(-1, -2)$.

iii) Să se calculeze $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(-1, -2)$.

**II.** Fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \cos(x + y) - x$.

a) Să se calculeze $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$.

b) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^{2\pi} \left( \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)^2 \right) \mathrm{d}x$.

c) Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clasă $\mathbb{C}^2$, $u = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $v = \dfrac{\partial f}{\partial y}$. Presupunem că

(i) $u(x + 2\pi, y) = u(x, y)$; (ii) $v(x + 2\pi, y) = v(x, y)$; (iii) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, pe $\mathbb{R}^2$.

Fie integrala cu parametrul $y \in \mathbb{R}$, dată de $E(y) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^{2\pi} (u^2(x, y) + v^2(x, y))\,\mathrm{d}x$.

a) Să se calculeze $E(y)$.

b) Integrând prin părţi să se deducă că $E(y) = 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$.

**III.** Fie $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ spaţiul vectorial al matricelor pătratice cu valori reale şi $V$ subspaţiul matricelor simetrice din $M_{2\times2}(\mathbb{R})$. Fie aplicaţiile liniare $T : M_{2\times2} \to \mathbb{R}$ şi $f : V \to V$ definite de relaţiile: $T(A) = a_{11} + a_{22}$, unde $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, iar $f(B) = \begin{pmatrix} a & T(B) \\ T(B) & b \end{pmatrix}$, unde $B = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$.

a) Să se descrie Ker $T$, Im $T$ şi să se verifice relaţia:

$$\dim\ \text{Ker}\ T + \dim\ \text{Im}\ T = \dim\ M_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

b) Să se arate că Ker $f \cap$ Im $f = \{O\}$ şi Ker $f$ + Im $f = V$.

c) Se cere matricea transformării $g = \underbrace{f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f}_{2005 \text{ ori}}$ în baza

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

a spaţiului vectorial $V$.

**IV.** Fie $P_3 = \{P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$, spaţiul vectorial al polinoamelor de grad cel mult trei. Fie subspaţiile vectoriale:

$$L_1 = \{P(x) \in P_3 \mid P(1) = P(-1) = 0\} \text{ şi } L_2 = \{P(x) \in P_3 \mid P(2) = P(-2)\},$$

subspaţii vectoriale în $P_3$.

a) Să se determine câte o bază în $L_1$ şi $L_2$ şi să se calculeze $\dim(L_1 + L_2)$ şi $\dim(L_1 \cap L_2)$.

b) Considerând pe $P_3$ produsul scalar: $\langle P(x), Q(x)\rangle = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$, unde

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3, \;\; Q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3,$$

determinaţi o bază în

$$L_2^{\perp} = \{R(x) \in P_3 \mid \langle R(x), Q(x)\rangle = 0,\ \forall\, Q(x) \in L_2\}$$

şi arătaţi că $L_1 + L_2^{\perp}$ nu poate să fie egală cu $P_3$.

c) Fie $L'_2 = \{P(x) \in P_3 | P(2) = P(-2) = 0)$. Calculaţi $\dim(L_1 + (L_2')^{\perp})$. Ce se poate spune despre egalitatea $L_1 + (L_2')^{\perp} = P_3$ ? (Justificare).

**Notă.** Timp de lucru 3 ore. Se vor rezolva la alegere trei subiecte.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza interuniversitară, anul I, profil electric, 2005-2006

**I.** Fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \{(2n\pi, 1), ((2n+1)\pi, -1)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,\alpha) = \dfrac{\alpha \cdot \sin x}{1 - 2\alpha \cdot \cos x + \alpha^2}$.

a) Să se determine coeficienţii $a_n = a_n(x), n \in \mathbb{N}$, astfel încât

$$f(x,\alpha) = \sum_{n\geq 0} a_n(x) \cdot \alpha^n, \;\; |\alpha| < 1.$$

b) Să se calculeze $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin kx\ dx$, unde $k, n \in \mathbb{N}$.

c) Să se calculeze $I_n(\alpha) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x,\alpha) \cdot \sin nx \, \mathrm{d}\, x$, $|\alpha| < 1$.

**II.** Se consideră $F(a) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1 + a\cdot\cos x}{1 - a\cdot\cos x}\right)\cdot\frac{1}{\cos x}dx,\ |a| < 1.$

a) Să se arate că $F$ este derivabilă şi să se calculeze $F'$.

b) Să se calculeze $F$.

**III.** Fie forma pătratica $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, Q(u) = \displaystyle\sum_{k,l=1}^{4} s_{k+l-2}\cdot u_k\cdot u_l$, unde

$$s_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n + x_4^n,\quad n \in \overline{0,6},$$

iar $x_1, x_2, x_3, x_4$ sunt rădăcinile ecuaţiei $x^4 - 4x^3 - 4x - 8 = 0$. Fiecarei rădăcini $x_j$, $j = \overline{1,4}$ îi asociem forma liniară $l_j(u) = u_1 + x_j\cdot u_2 + x_j^2\cdot u_3 + x_j^3\cdot u_4$. Arătaţi că:

a) La rădăcini $x_j$ distincte corespund forme $l_j$ liniar independente.

b) Forma pătratică $Q$ se poate exprima astfel: $Q(u) = \displaystyle\sum_{j=1}^{4} l_j^2$.

c) Forma pătratică $Q$ are signatura (3,1).

**IV.** Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$, $n = 2k + 1$, o matrice antisimetrică.

a) Să se arate că $\lambda = 0$ este o valoare proprie.

b) Arătaţi că originea planului complex este centru de simetrie pentru mulţimea valorilor proprii ale matricei.

c) Oricare două matrice antisimetrice $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $a_{ij}, b_{ij} \in \{\pm 1\}, \forall i < j$, au aceleaşi valori proprii.

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza interuniversitară, anul I, profil mecanic, 2005-2006

**I.** Fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^3}{x^4 + y^4}, & \text{pentru } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{pentru } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Să se studieze continuitatea funcţiei $f$ în $(0,0)$.

b) Să se calculeze derivatele parţiale ale funcţiei $f$ în $(0,0)$.

c) Să se studieze diferenţiabilitatea funcţiei $f$ în $(0,0)$.

d) Să se stabilească natura seriei numerice $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}, n\right)$.

**II.** Fie $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(2x)dx$, şi $J_n = \displaystyle\int_a^b (x-a)^n\cdot(b-x)^n dx, n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $I_n$.

b) Să se calculeze $J_n$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{J_n}$.

**III.** a) Fie $F = \{(1,1,0),(1,1,1),(1,0,0)\} \subset \mathbb{R}^2$. Să se arate că $F$ este o bază de vectori în $\mathbb{R}^3$ şi să se găsească coordonatele vectorului $v = (1,2,3)$ în baza $F$.

b) Fie $T_m : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, transformarea liniară a cărei matrice in baza $F$ este matricea

$$A_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & m \\ 1 & 0 & 1 \\ m & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se cere $T_m(v)$, unde $v = (1,2,3)$.

c) Pentru $m = 0$, să se diagonalizeze matricea $A_0$ şi să se calculeze $A_0^{2006}$.

**IV.** Fie spaţiul vectorial $V = \mathbb{R}^3$ şi funcţia $g = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definită prin:

$$g(X,Y) = x_1y_1 + \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1) + x_2y_2 + x_3y_3,$$

unde $X = (x_1, x_2, x_3)$ şi $Y = (y_1, y_2, y_3)$ sunt vectori din $V$.

a) Să se arate că $g$ este un produs scalar pe $V$.

b) Să se ortogonalizeze baza $E = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ faţă de produsul scalar $g$.

c) Să se calculeze cosinusul unghiului dintre vectorii $e_1 = (1,0,0)$ şi $e_2 = (0,1,0)$ din $V$ faţă de produsul scalar $g$.

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"

### Faza naţională, anul I, profil cercetare, 2007-2008

**I.** Fie matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Să se arate că $A$ este nilpotentă dacă şi numai dacă $\mathrm{tr}(A^k) = 0$, oricare ar fi $k > 0$; ( $\mathrm{tr}(A)$ este urma matricei $A$).

**II.** Fie $E$ o submulţime nevidă a intervalului $(0,+\infty)$ care îndeplineşte condiţiile

i) $\frac{x}{2} \in E$ oricare ar fi $x \in E$.

ii) $\sqrt{x^2 + y^2} \in E$, oricare ar fi $x, y \in E$.

Se cer următoarele:

a) Daţi un exemplu de mulţime $E \neq (0,\infty)$ care îndeplineşte condiţiile i) şi ii).

b) Arătaţi că $\bar{E} = [0,\infty)$; ($\bar{E}$ este închiderea topologică a lui $E$).

**III.** Fie $U \subset \mathbb{R}^2$ o submulţime deschisă care conţine discul unitate închis $D$ şi $f : U \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă $C^1$ cu proprietatea că:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(P)\right| \le 1 \quad \text{şi} \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}(P)\right| \le 1,\ \forall P \in D.$$

Să se arate că dacă $\{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$ este o mulţime de puncte din $D$ cu centrul de greutate în $O$ atunci pentru orice punct $P \in D$ este adevărată inegalitatea:

$$\left| f(P) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(M_k) \right| \leq 2.$$

**IV.** Fie $\Delta$ mulţimea plană formată din punctele interioare şi laturile unui dreptunghi $ABCD$ de laturi $AB = a$ şi $BC = b$. Se defineşte funcţia $f : \Delta \to \mathbb{R}$ prin:

$$f(P) = PA + PB + PC + PD.$$

Să se calculeze mulţimea valorilor funcţiei $f$.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza naţională, anul I, profil electric, 2007-2008

**I.** a) Să se precizeze clasa de diferenţiabilitate a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \left[x + \frac{1}{2}\right] - [2x] + [x],$$

unde $[\,\cdot\,]$ reprezintă partea întreagă a expresiei pe care o conţine.

b) Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ fie funcţiile $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \left[\dfrac{x + 2^n}{2^{n+1}}\right]$, $n \geq 0$. Să se studieze convergenţa seriei $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$.

c) Să se stabilească dacă funcţiile diferenţiabile pot fi aproximate oricât de bine prin funcţii discontinue.

**II.** Fie $V$ spaţiu vectorial din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ generat de matricile de forma $AB - BA$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Să se arate că $\dim_{\mathbb{C}} V = n^2 - 1$.

**III.** În spaţiul real $V = \mathbb{R}^3$ se consideră forma pătratică

$$\varphi(x, x) = \xi_1^2 + 2\xi_2^2 + 3\xi_3^2 + \xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_3,$$

în care $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ sunt coordonatele vectorului $x \in V$ în baza canonică $\{e_1, e_2, e_3\}$. Se cer

a) Să se arate că forma biliniară simetrică asociată acestei forme pătratice este un produs scalar.

b) Să se afle normele vectorilor $e_1, e_2, e_3$ şi $\cos(\widehat{e_1, e_2})$ (în raport cu produsul scalar definit la punctul a)).

**IV.** Funcţiile $f, f', f''$ sunt continue pe $[0, a]$, $a \geq 0$ şi $f(0) = f'(0) = 0$. Să se arate că

$$\int_0^a |f(x)f'(x)|dx \leq \frac{a^2}{2} \int_0^a (f''(x))^2 dx.$$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza naţională, anul I, profil mecanic, 2007-2008

**I.** Fie sfera : $(S):\ x^2+y^2+z^2-9=0$, planul $(H):\ x+y+z-3=0$ şi cercul spaţial $(C)=(S)\cap(H)$.

a) Să se afle raza şi coordonatele centrului cercului $(C)$.

b) Să se arate că orice sferă care conţine efectiv cercul $(C)$, are ecuaţia de forma:

$$x^2+y^2+z^2-9+\lambda(x+y+z-3)=0.$$

c) Să se găsească ecuaţia sferei de rază $R=6$, care conţine cercul $(C)$.

d) Să se dea exemplu de o cuadrică care conţine cercul $(C)$ şi de o sferă care *nu* conţine cercul $(C)$.

**II.** Să se arate că ecuaţia $X^2+aX+bI_3=0_3$, unde $a^2-4b\geq 0$, admite o infinitate de rădăcini în $M_3(\mathbb{R})$. (Căutaţi matrice de formă particulară).

**III.** Fie funcţia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, definită prin

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{pentru } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{pentru } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

a) Să se studieze continuitatea, existenţa derivatelor parţiale şi diferenţiabilitatea funcţiei $f$ în origine.

b) Să se calculeze $I_n=\int\limits_0^{\pi/2}\left[f\left(\sin\dfrac{t}{2},\cos\dfrac{t}{2}\right)\right]^n dt$, pentru $n=2k$ şi $n=2k+1$.

c) Să se arate că şirul de funcţii $g_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definit prin $g_n(x)=\dfrac{1}{2n}\cdot f(x^2,n)$ este uniform convergent pe $\mathbb{R}$ către o funcţie continuă $g$ şi să se calculeze $g(x)=\lim\limits_{n\to\infty}g_n(x)$.

**IV.** Să se studieze natura seriei: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n^\beta\cdot\sin\frac{1}{n}},\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza naţională, anul I, profil cercetare * rezerva #1, 2007-2008

**I.** Fie $n\in\mathbb{N},\ n\geq 1$ şi curba $C_n:|x|^n+|y|^n=1$. Pentru orice $M$ de pe curba $C_n$ notăm cu $X_M, Y_M$ proiecţiile punctului $M$ pe axele de coordonate $Ox$, respectiv $Oy$

şi cu $\mathcal{T}_M$ mulţimea punctelor situate în interiorul şi pe laturile triunghiului $OX_MY_M$. Demonstraţi că

$$\bigcup_{M\in C_n} \mathcal{T}_M = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ |x|^{\frac{n}{n+1}} + |y|^{\frac{n}{n+1}} \leq 1\}.$$

**II.** Fie $V$ un spaţiu vectorial şi $f$ un endomorfism al lui $V$. Să se demonstreze că

a) $V = \text{Ker } f \oplus \text{Im} f \Leftrightarrow \text{Im} f = \text{Im} f^2$.

b) $\text{Ker } f \cap \text{Im} f = \{0\} \Leftrightarrow \text{Ker } f = \text{Ker } f^2$.

**III.** Fie $a,b\in\mathbb{R}^*$ şi matricea $A = \begin{pmatrix} \text{ch } a & b\,\text{sh } a \\ \frac{\text{sh } a}{b} & \text{ch } a \end{pmatrix}$.

a) Să se determine valorile şi vectorii proprii ai matricei $A$.

b) Să se determine o matrice $T\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ inversabilă astfel încât $B = T^{-1}AT$ să fie o matrice diagonală.

c) Să se calculeze $A^n,\ n\in\mathbb{N}^*$.

**IV.** Se consideră şirul $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dat prin

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

unde $n\in\mathbb{N}^*$ şi $u_0 = 0$.

a) Să se arate că

$$\int_{n+1}^{2n+1} \frac{1}{x}dx \leq u_n \leq \int_n^{2n} \frac{1}{x}dx, \quad n\geq 1$$

şi să se deducă de aici că $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent şi să se determine limita sa.

b) Să se afle suma seriei $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(u_{n+1}-u_n)$.

c) Se consideră funcţiile $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ln\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ şi $g(x) = \dfrac{1}{2x}\cdot\ln(1-x)$. Să se arate că

$$f(x)+g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(u_{n+1}-u_n)\cdot x^n$$

şi să se determine raza de convergenţă a acestei serii.

d) Să se afle $\lim\limits_{x\to 1}(f(x)+g(x))$.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza naţională, anul I, profil cercetare * rezerva #2, 2007-2008

**I.** Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice cu proprietate a $A^3 = A$. Să se arate că

$$\text{rang } A + \text{rang } (A - I_n) + \text{rang } (A + I_n) = 2n.$$

**II.** Fie seria $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$.

a) Să se determnine domeniul de convergenţă şi să se arate că suma seriei este o funcţie continuă şi indefinit derivabilă.

b) Să se decidă dacă seria se poate integra termen cu termen.

c) Să se calculeze suma seriei $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(1 - e^{-n}) \cdot e^{-n}$.

**III.** Să se studieze proprietatea de mărginire a mulţimilor închise din plan care o dată cu două puncte conţin întregul cerc determinat de acestea ca diametru.

**IV.** Pentru $a \in \mathbb{R}$ fixat, definim aplicaţia $f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$f_a(x) = \left( x_1, ax_1 + x_2, \frac{a^2}{2} x_1 + ax_2 + x_3 \right), \quad \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

a) Să se demonstreze că aplicaţia este un endomorfism.

b) Să se determine matricea $M_a$ a lui $f_a$ în baza canonică şi să se precizeze structura mulţimii $M_a$, $a \in \mathbb{R}$. Să se studieze convergenţa şi să se afle dacă dacă există limita şirului $S_n$

$$S_n = I + \frac{1}{1!} M_a + \frac{1}{2!} M_a^2 + \ldots + \frac{1}{n!} M_a^n.$$

c) Să se afle valorile proprii şi vectorii proprii ale matricei $M_a$.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza naţională, anul I, profil mecanic * rezerva #1, 2007-2008

**I.** Fie $A = \dfrac{B + B^t}{2}$, unde $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -5 \\ 1 & 8 & 1 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$; fie $\tilde{A} = A + I_3$ şi

$$\begin{aligned} &p : M_{3,1}(\mathbb{R}) \times M_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, && p(X, Y) = X^t \tilde{A} Y, \\ &T : M_{3,1}(\mathbb{R}) \to M_{3,1}(\mathbb{R}), && T(X) = \tilde{A} X, \\ &Q : M_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, && Q(X) = X^t A X, \end{aligned}$$

unde $M_{3,1}(\mathbb{R})$ este mulţimea matricelor cu trei linii şi o coloană cu elemente din $\mathbb{R}$, iar $X^t$ este transpusa lui $X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$.

a) Să se arate că $p$ este un produs scalar pe $M_{3,1}(\mathbb{R})$ şi să se găsească o bază ortonormată a lui $M_{3,1}(\mathbb{R})$ în raport cu care matricea lui $T$ să fie diagonală.

b) Să se arate că $Q(X) \geq 0$ pentru orice $X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$.

c) Dacă $x, y$ sunt coordonatele unui punct din plan şi $X^t = (x\ y\ 1)$, ce reprezintă ecuaţia $X^tAX + A_1X - 22 = 0$, unde $A_1 = (10, 4, -8)$.

**II.** Fie $V = C[-1, 1]$ spaţiul vectorial al funcţiilor continue definite pe intervalul $[-1, 1]$ cu valori reale şi fie funcţia de două variabile

$$S(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx, \quad \forall f, g \in V.$$

a) Să se arate ca $S$ este un produs scalar pe $V$.

b) Să se găsească o bază ortonormată în subspaţiul $W \subset V$ generat de monoamele $\{1, x, x^2\}$, relativ la produsul scalar $S$.

c) Fie funcţia de două variabile $P(u, v) = S(x^2 - u - vx, x^2 - u - vx)$. Să se arate că funcţia $P(u, v)$ are un unic minim $(u_0, v_0)$. Daţi o interpretare geometrică pentru acest rezultat.

**III.** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{\operatorname{tg}^n t} dt$, $n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze:

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}f(x)}{e^{x^n}}dx + \frac{1}{ne}\int_0^1 \frac{e^{x^n}}{1+x^2}dx.$$

**IV.** Fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y}{x^4+y^4}, & \text{dacă } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x^2+y^2 = 0. \end{cases}$

Să se studieze continuitatea şi diferenţiabilitatea în origine a funcţiei $f$.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"

Faza naţională, anul I, profil mecanic * rezerva #2, 2007-2008

**I.** Fie aplicaţia liniară $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (2x + y, x + 2y)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Găsiţi toate punctele din $\mathbb{R}^2$ fixate (lăsate pe loc, adică neschimbate) de aplicaţia liniară $f$.

b) Găsiţi toate dreptele fixate de aplicaţia liniară $f$ (dreptele duse în ele însele punct cu punct).

c) Fie $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $B\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $C\left(\sqrt{2}, 0\right)$, trei vârfuri ale pătratului plin (privit ca suprafaţă) $[OBCA]$. Se cere imaginea acestui pătrat plin prin aplicaţia liniară $f$.

**II.** Se consideră ecuaţia matriceală $X^2 + aX + bI_2 = 0_2$, $a, b \in \mathbb{R}$. Să se arate că ecuaţia admite o infinitate de rădăcini în $M_2(\mathbb{R})$.

**III.** a) Ţinând seama că $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, să se calculeze $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx$.

b) Folosind eventual punctul a) să se calculeze integrala $I(\alpha) = \int\limits_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{\alpha^2}{x^2}\right)}dx$.

**IV.** Se dă integrala cu parametru $F(x) = \int\limits_0^x \frac{\ln(1+tx)}{1+t^2}dt,\ x \geq 0$.

a) Să se calculeze $F'(x)$.

b) Să se calculeze $F(x)$.

c) Utilizând eventual rezultatul precedent calculaţi $I = \int\limits_0^{\pi/4} \ln(1+\ \mathrm{tg}\ x)dx$.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza naţională, anul I, profil mecanic * rezerva #3, 2007-2008

**I.** Se consideră vectorii liberi necoplanari $\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}$ din $V_3$ şi endomorfismul $f : V_3 \to V_3$ definit prin $f(\bar{a}) = \bar{a},\ f(\bar{b}) = \bar{b},\ f(\bar{c}) = \bar{a} + \bar{b} + m\bar{c},\ m \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze volumul tetraedrului construit pe reprezentanţii vectorilor $\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}$ aleşi cu origine comună, dacă $||\bar{a}|| = 1,\ ||\bar{b}|| = 2,\ ||\bar{c}|| = 3$, unghiul dintre $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ este $\frac{\pi}{3}$, iar unghiul dintre $\bar{c}$ şi $\bar{a} \times \bar{b}$ este $\frac{\pi}{4}$.

b) Să se precizeze valorile lui $m$ pentru care $f$ este injectiv şi cele pentru care $f$ este diagonalizabil.

c) Dacă $A$ este matricea lui $f$ în raport cu baza $\{\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}\}$, $m = 1$, $B = A + A^t$, $X^t = (x, y, 1)$, iar $(x, y)$ coordonatele unui punct din plan, atunci să se reprezinte conica de ecuaţie $X^tBX = 3$.

**II.** Fie matricea $A = \begin{pmatrix} -10 & 2 & 1 \\ -70 & 14 & 7 \\ 40 & -8 & -4 \end{pmatrix}$ şi fie $Y = \{y \in \mathbb{R}^3 |\ \exists x \in \mathbb{R}^3,\ A \cdot x = y\}$.

a) Să se demonstreze că $\dim_{\mathbb{R}} Y \leq 1$.

b) Fie $B \in M_n(\mathbb{R})$, astfel încât $B^2 = O_n$ şi $Y = \{y \in \mathbb{R}^n |\ \exists x \in \mathbb{R}^n,\ B \cdot x = y\}$. Să se demonstreze că $\dim_{\mathbb{R}} Y \leq \frac{n}{2}$.

**III.** Să se determine punctele de extrem local ale funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definită de relaţia $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)} - x^2 - y^2$.

**IV.** a) Să se determine mulţimea de convergenţă a seriei $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1) \cdot 2^{2n}}$.

b) Să se calculeze $S(x)$.

c) Să se arate că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)2^{2n}}$ este convergentă şi să se calculeze suma sa.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza naţională, anul I, profil cercetare, 2008-2009

**I.** Fie $(x_n)_n$ un şir monoton crescător şi divergent de numere reale strict pozitive şi $\alpha \leq 1$. Arătaţi că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right)^{\alpha}$ este divergentă.

**II.** Considerăm hiperboloidul cu o pânză, în reperul cartezian $Oxyz$:

$$(\mathcal{H}) \ \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Ştiind că există punctele $M, N, P \in \mathcal{H}$ astfel încăt vectorii $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP}$ sunt mutual ortogonali, demonstraţi că $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} > \frac{1}{c^2}$.

**III.** Demonstraţi că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi numerele strict pozitive $x_1, x_2, ..., x_n$ cu $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$, avem

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{1 + k(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2)} < \frac{\pi}{4},$$

iar constanta din dreapta este cea mai mică cu această proprietate.

**IV.** Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ cu $A \neq I_n$ şi $k \in \mathbb{N}^*$, $k \geq 3$ astfel încât $\hat{A} = \hat{I_n}$ în $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_k)$. Arătaţi că pentru orice $p \in \mathbb{N}^*$ avem $A^p \neq I_n$.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza naţională, anul I, profil electric, 2008-2009

**I.** Fie $a_n$ un şir de numere reale astfel incât seria $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ are raza de convergenţă 1 şi fie $f(x) = \sum\limits_{n \geq 0} a_n x^n, x \in$ (-1,1). Presupunem că există $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = L \in \mathbb{R}$.

a) Dacă $a_n \geq 0$ să se demonstreze că seria $\sum_{n\geq 0} a_n$ este convergentă şi are suma $L$.

b) Să se dea un exemplu de serie $\sum\limits_{n \geq 0} a_n x^n$ ca în enunţ, cu $a_n \in \mathbb{R}$, astfel încât $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ diverge.

**II.** Fie $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ si fie $f_0 : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea $f_0(a) = 0$. Fie

$$f_n : [a, b] \to \mathbb{R}, \ \ f_n(x) = \int_a^x f_{n-1}(t)dt, n \geq 1.$$

a) Să se studieze convergenţa uniformă a seriei $\sum_{n\geq 1} f_n$.

b) să se calculeze suma seriei $\sum_{n\geq 1} f_n$.

**III.** Fie $P_1, ..., P_n$ $(n \geq 3)$ $n$ puncte distincte aflate pe aceeaşi circumferinţă (în această ordine). Pentru fiecare pereche de puncte $P_i, P_j$, notăm cu $a_{ij}$ lungimea segmentului $P_iP_j$ dacă $i \leq j$ şi $a_{ji} = -a_{ij}$. Considerăm matricea (antisimetrică) $A = [a_{ij}]$. Să se determine dimensiunile imaginii şi nucleului aplicaţiei liniare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, asociate acestei matrice.

**IV.** Fie $A, B$ matrice pătratice din $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu proprietăţile că există o coloană nenulă $x$ din $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ astfel incât $Ax = 0$ şi o coloană $y$ din $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ astfel încât $Ay = Bx$. Dacă $A_i$ este matricea obţinută prin înlocuirea în $A$ a coloanei $i$, $a_i$, prin coloana $i$, $b_i$, din $B$, să se arate că $\det A_1 + ... + \det A_n = 0$, unde $\det A_i$ este determinantul matricei $A_i$.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza naţională, anul I, profil mecanic, 2008-2009

**I.** Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} x^3 \cos \dfrac{y}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

a) Să se calculeze derivatele parţiale ale lui $f$ în $(0, y)$, $y \in \mathbb{R}$.

b) Să se studieze diferenţiabilitatea Fréchet a lui $f$ în $(0, y)$, $y \in \mathbb{R}$.

c) Să se studieze continuitatea derivatelor parţiale ale lui $f$ în $(0, y)$, $y \in \mathbb{R}$.

d) Fie $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ şi $g(x, y, z) = f(r, 1)$. Să se calculeze grad $g$.

**II.** Fie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) = e^{x^2/2} \displaystyle\int_x^\infty e^{-t^2/2}dt$.

a) Folosind, eventual, schimbarea de variabilă $t = x + s$, să se arate că

$$0 < xf(x) < 1, \ \forall x > 0.$$

b) Să se calculeze $f'(x)$.

c) Să se arate că $f'(x) < 0 \quad \forall x > 0$.

d) Folosind, eventual, rezultatul $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, să se calculeze $f(0)$.

**III.** a) Să se găsească o transformare liniară $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ astfel încât

$$f(e_1) = (4, 3, 3), \ f(e_2) = (6, -5, -6), \ f(e_3) = (0, 0, 1),$$

unde $e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1)$.

b) Să se arate că exista $n$ număr natural şi $a_0, a_1, .., a_n$ numere reale astfel încât

$$a_n f^n(x) + a_{n-1} f^{n-1}(x) + ... + a_1 f(x) + a_0 x = 0$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}^3$, unde $f^k(x) = f(f^{k-1}(x)),\ k \geq 2$. Să se găsească $n$ şi $a_0, a_1, ..., a_n$.

c) Să se găsească un subspaţiu vectorial $U$ al lui $\mathbb{R}^3$ astfel încat dim $U$=1 şi $f(u) = u$ pentru orice $u \in U$.

**IV.** Se dă familia de sfere

$$S_\lambda : x^2 + y^2 + z^2 - 4(\lambda + 1)x - 2(3\lambda - 2)y + 2(\lambda - 5)z - 14\lambda + 33 = 0 \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

a) Să se precizeze centrul şi raza sferei $S_\lambda$.

b) Să se arate că centrele sferelor $S_\lambda$ se află pe o dreaptă. Să se afle ecuaţia acestei drepte.

c) Să se găsească un plan care să fie tangent tuturor sferelor din familia dată.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza naţională, anul I, profil cercetare, 2009-2010

**I.** Fie $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea $f(aX + bY) = af(x) + bf(Y)$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ şi orice $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Să se arate că există o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel ca

$$f(X) = Tr(AX),\ \text{pentru orice } X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

b) Să se arate că există o matrice inversabilă $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel ca $f(B) = 0$.

**II.** Găsiţi locul geometric descris de centrul unei elipse, care este tangentă la două drepte perpendiculare date.

**III.** a) Să se justifice faptul că $f(x) = \dfrac{1}{x} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} \right)$ defineşte o funcţie continuă $f : (0,1) \to \mathbb{R}$.

b) Dacă funcţia continuă $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ verifică

$$F\left(\frac{x}{2}\right) + F\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2F(x),\ \ \forall x \in [0,1],$$

atunci $F$ este constantă.

c) Să se demonstreze egalitatea:

$$\pi \operatorname{ctg}(\pi x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} \right),\ \ \forall x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}.$$

**IV.** Fie $f_n \in C([0,1])$ $(n \geq 1)$ un şir de funcţii concave. Presupunem că $f_n$ converge simplu la 0. Să se arate că şirul $f_n$ este uniform convergent pe $[0,1]$.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza naţională, anul I, profil electric, 2009-2010

**I.** Găsiţi funcţiile continue $f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ cu proprietatea $f(x) = 2\displaystyle\int_0^x \sqrt{f(t)}dt$.

**II.** Fie $f$ o funcţie care admite o dezvoltare în serie de puteri în jurul lui 0 având raza de convergenţă $R$.

a) Să se arate că

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\left(e^x - 1 - \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - ... - \frac{x^n}{n!}\right) = \int_0^x e^{x-t} f(t)dt, \ \ |x| < R.$$

b) Să se arate că

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(e^x - 1 - \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - ... - \frac{x^n}{n!}\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

**III.** Fie $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ un vector nenul fixat şi $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(\vec{v}) = \vec{a} \times \vec{v}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$.

a) Să se arate că $T$ este o aplicaţie liniară şi să se determine subspaţiile Ker $T$ şi Im $T$.

b) Să se arate că pentru orice $\vec{v_1}, \vec{v_2} \in ImT$, unghiurile $\widehat{\vec{v_1}, \vec{v_2}}$ şi $\widehat{T(\vec{v_1}), T(\vec{v_2})}$ sunt egale.

c) Să se determine toate aplicaţiile liniare $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cu proprietatea $S(\vec{v}) \perp \vec{v}$, $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3$.

**IV.** Fie $\mathbb{V}$ un spaţiu vectorial real de dimensiune $n$ şi $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ o aplicaţie liniară care admite $n+1$ vectori proprii astfel că oricare $n$ dintre ei sunt liniar independenţi. Să se arate că există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $T = \alpha I$, unde $I$ este aplicaţia identică.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza naţională, anul I, profil mecanic, 2009-2010

**I.** Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^a |y|^b}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

unde $a \geq \frac{1}{2}, b \geq \frac{1}{2}$ sunt doi parametri reali.

a) Demonstraţi inegalitatea

$$\frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \forall (x,y) \neq (0,0).$$

b) Studiaţi continuitatea funcţiei $f$ în origine.

c) Studiaţi existenţa derivatelor parţiale ale funcţiei $f$ în origine.

d) Pentru $a = 4$ şi $b = 1$ să se găsească mulţimea de convergenţă a seriei de funcţii

$$\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}, n\right)(x+1)^n.$$

**II.** Fie funcţia $I : [0,\infty) \to \mathbb{R}, \;\; I(y) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-(x+\frac{y}{x})^2} dx.$

a) Arătaţi că $I(y)$ este convergentă pentru orice $y \in [0,\infty)$.

b) Determinaţi $I'(y)$ şi arătaţi că $I'(y) = -4I(y)$.

c) Ştiind că $\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, să se calculeze $I(y)$.

**III.** Fie funcţia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definită prin

$$T((x_1,x_2,x_3)) = (2x_2 - x_3, -2x_1 + 2x_3, x_1 - 2x_2), \; \forall (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

a) Să se arate că $T$ este aplicaţie liniară şi să se calculeze $\mathrm{Ker}\ T$ şi $\mathrm{Im}\ T$.

b) Să se arate că dacă $u, v \in \mathrm{Im}\ T$, atunci unghiul dintre $u$ si $v$ este egal cu unghiul dintre $T(u)$ şi $T(v)$.

c) Fie matricea $Q = (I_3 - A)(I_3 + A)^{-1}$, unde $A$ este matricea transformării $T$ în baza canonică din $\mathbb{R}^3$. Determinaţi valorile proprii reale ale matricei $Q$ şi subspaţiile proprii corespunzătoare.

**IV.** Se consideră planul $\pi$ de ecuaţie $(2m+1)x + (3-4m)y + 3z - 2 = 0$.

a) Să se scrie ecuaţiile planelor $\pi_1$, $\pi_2$ şi $\pi_3$ care sunt perpendiculare pe planul $\pi$ şi conţin respectiv axele $Ox$, $Oy$ şi $Oz$.

b) Să se arate că cele trei plane de la punctul a) trec printr-o dreaptă $\Delta$, a cărei ecuaţie se cere.

c) Să se arate că dreapta $\Delta$ descrie un plan atunci când $m$ variază.

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
### Faza naţională, anul I, profil electric, 2010-2011

**I.** Fie funcţia $f \in C^2(\mathbb{R})$ astfel încât $|f(x)| \le 1$ şi $|f''(x)| \le 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

a) Scrieţi formula lui Taylor de ordinul doi pentru funcţia $g(t) = 1 - f(x+t)$, $t \in \mathbb{R}$, în jurul unui punct $t_0$ arbitrar ($x \in \mathbb{R}$ fixat).

b) Să se demonstreze că $|f'(x)| \le \sqrt{2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

**II.** Găsiţi cea mai mare valoare a integralei

$$\int_0^y \sqrt{x^4 + (y - y^2)^2}dx, \quad 0 \le y \le 1.$$

**III.** Se consideră spaţiile euclidiene $\mathbb{R}^2$ şi $\mathbb{C}^2$ cu produsele scalare

$$\langle (x, y), (u, v)\rangle = x \cdot u + y \cdot v, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

respectiv

$$\langle (x, y), (u, v)\rangle = x \cdot \overline{u} + y \cdot \overline{v}, \quad (x, y) \in \mathbb{C}^2, \quad (u, v) \in \mathbb{C}^2.$$

Să se determine aplicaţiile liniare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ şi $S : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, care satisfac respectiv proprietăţile

$$\langle T(x, y), (x, y)\rangle = 0, \quad \text{pentru orice} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$
$$\langle S(u, v), (u, v)\rangle = 0, \quad \text{pentru orice} \quad (u, v) \in \mathbb{C}^2.$$

**IV.** Fie $n \ge 2$, $A \in M_n(\mathbb{R})$ o matrice simetrică ($A^t = A$) astfel încât

$$(tr(A^{2010}))^{2011} = (tr(A^{2011}))^{2010}.$$

Să se arate că are loc egalitatea $A^n = tr(A) \cdot A^{n-1}$.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza naţională, anul I, profil mecanic, 2010-2011

**I.** În $\mathbb{R}^3$ se consideră transformarea liniară, pentru $a$ real fixat,

$$T_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T_a(x, y, z) = \left(x, ax + y, \frac{a^2}{2}x + ay + z\right).$$

a) Se cere matricea $M_a$ a lui $T_a$ în baza canonică din $\mathbb{R}^3$. Să să se determine nucleul şi imaginea transformării.

b) Să se afle valorile şi vectorii proprii pentru $M_a$. Stabiliţi dacă matricea este diagonalizabilă.

c) Arătaţi că $M_a M_b = M_{a+b}$ şi calculaţi $M_a^n$ şi $M_a^{-1}$.

d) Să se studieze convergenţa şi să se afle (dacă există) limita şirului $(S_n)$, în care

$$S_n = I_3 + \frac{1}{1!}M_a + \frac{1}{2!}M_a^2 + \ldots + \frac{1}{n!}M_a^n.$$

**II.** Se consideră dreapta de ecuaţii $d_1 : \dfrac{x-a}{1} = \dfrac{y+2}{b} = \dfrac{z-a+b}{3}$ şi planele

$$(P_1) : x + y + z - 4 = 0,$$
$$(P_2) : x + 2y + 2z + 1 = 0,$$
$$(P_3) : x + 7y + 7z + m = 0,$$

unde $a, b, m \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ ştiind că dreapta $d_1$ este inclusă în planul $(P_1)$.

b) Să se găsească proiecţia punctului $A = (1, -2, 2)$ pe planul $(P_2)$.

c) Să se discute poziţia relativă a celor trei plane în funcţie de $m$.

**III.** Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} x^2y^2\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

a) Să se studieze continuitatea şi diferenţiabilitatea funcţiei $f$ în origine.

b) Să se calculeze $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ şi $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ în $(0, 0)$.

c) Se consideră şirul de funcţii $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} \frac{n^2}{x} f\left(x, \frac{1}{n}\right), & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ şi să se precizeze dacă şirul $f_n$ converge uniform pe $\mathbb{R}$.

**IV.** Fie seria de puteri $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^n}{n}x^{2n}$.

a) Să se afle mulţimea de convergenţă a seriei şi să se calculeze suma ei.

b) Discutaţi convergenţa uniformă a seriei.

c) Să se calculeze $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \ln(1 + 3x^2)dx$ şi să se arate că are loc egalitatea

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n(2n + 1)} = \ln 2 + \frac{\pi}{2} - 2.$$

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
### Faza naţională, anul I, profil teoretic, 2011-2012

**I.** Fie $n \geq 2$ număr natural şi $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ două matrice cu proprietăţile

$$A^{2012} = B^{2011} = I_n \text{ şi } AB = BA.$$

Să se arate că matricele $A \pm B \pm I_n$ sunt inversabile pentru orice alegere a semnelor $+$ şi $-$.

**II.** Fie $X = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in \{0, 1\}$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$ şi $A \subset X$ muţimea $n-$uplurilor care au un număr impar de 1. Determinaţi numărul maxim de elemente din $A$ c proprietatea că orcare două dintre ele au în comun un număr par de 1.

**III.** a) Fie $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ o funcţie bijectivă. Să se arate că seria $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{f(n)^n}{n!}$ este divergentă.

b) Să se arate că există o funcţie bijectivă $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$ cu proprietatea că seria $\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)^n}{n!}$ este convergentă.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza naţională, anul I, profil electric, 2011-2012

**I.** Fie $f, g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ două funcţii continue şi fie produsul scalar $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$. Găsiţi polinomul de forma $p(x) = a + b \cdot x^2 - x^4$, care este ortogonal pe intervalul $[-1, 1]$ pe toate polinoamele de grad mai mic sau egal decât 3.

**II.** Fie aplicaţia
$T_\alpha : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $T_\alpha(A) = A + \alpha A^t$, $\forall A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că $T_\alpha$ este o transformare liniară.

b) Să se scrie matricea lui $T_\alpha$ în raport cu baza canonică din $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

c) Să se calculeze polinomul caracteristic.

d) Să se determine valorile lui $\alpha$ pentru care $T_\alpha$ este diagonalizabilă şi să se determine o bază formată din vectori proprii.

**III.** În ce condiţii integrala $\displaystyle\int_0^\infty \left(a^{1/x} + \frac{b^{1/x} + c^{1/x}}{2}\right) dx$, unde $a, b, c > 0$, converge absolut?

**IV.** Se consideră şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 \in (0, 1)$, $x_{n+1} = x_n \cdot \sqrt{1 - x_n^2}$, pentru orice număr natural $n \geq 1$.

a) Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi să se determine limita sa.

b) Să se arate că seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergentă.

c) Să se arate că seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n^3$ este convergentă.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza naţională, anul I, profil mecanic, 2011-2012

**I.** a) În spaţiul liniar $\mathbb{R}^3$ se consideră $M_0\left(a + c - \frac{b}{2}, a - \frac{c}{2}, -\frac{a}{2}\right)$ şi dreapta $(d) : \frac{x-b}{b} = \frac{y-c}{c} = \frac{z-a}{a}$. Determinaţi ecuaţia planului ce trece prin $M_0$ şi este perpendicular pe dreapta $(d)$.

b) Fie $M(a, b, c)$ şi planul $(\pi) : bX + cY + aZ + \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca) = 0$. Definim aplicaţia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. care duce punctul $M$ în simetricul său faţă de planul $(\pi)$. Arătaţi că $f$ este o transformare liniară.

c) Determinaţi defectul şi rangul transformării $f$.

**II.** Fie $B_m = \{(1+m, 2, 2), (2, 1+m, 2), (2, 2, 1+m)\}$ un sistem de vectori din $\mathbb{R}^3$. Determinaţi valorile lui $m$ pentru care $B_m$ constituie bază în $\mathbb{R}^3$. Determinaţi coordonatele vectorului $v = (2, -8, 2)$ în baza $B_{-1}$, $(m = -1)$.

b) Fie $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma biliniară a cărei matrice în perechea de baze canonice este $B_m = \begin{pmatrix} 1+m & 2 & 2 \\ 2 & 1+m & 2 \\ 2 & 2 & 1+m \end{pmatrix}$. Să se scrie forma pătratică asociată şi să se determine natura şi genul pentru $m = 1$.

c) Să se calculeze $B_0^{2012}$.

**III.** Fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 y e^{2x+3y}$.

a) Să se determine punctele de extrem local ale funcţiei $f$.

b) Să se arate că există $r > 0$ astfel ca pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ satisfăcând relaţia $(x+1)^2 + (y + \frac{1}{3})^2 < r^2$ să avem $x^2 y e^{2x+3y} + \frac{1}{3e^2} > 0$.

c) Să se arate că funcţia nu admite extreme globale.

**IV.** Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică cu termeni strict pozitivi.

a) Să se demonstreze inegalitatea: $\dfrac{a_1 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{2n-1}}{a_2 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_{2n}} < \sqrt{\dfrac{a_1}{a_{2n+1}}}$, $\forall n \geq 1$.

b) Să se determine suma seriei: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{2n-1}}{a_2 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_{2n}} \cdot \frac{1}{a_{2n+2}}$.

c) Studiaţi convergenţa seriei: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{2n-1}}{a_2 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_{2n}}$.

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ ”TRAIAN LALESCU”
Faza naţională, anul I, profil teoretic, 2012-2013

**I.** Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$ o matrice, $\lambda$ o valoare proprie a matricei $A^n$ şi $v$ un vector propriu corespunzător. Să se arate că dacă vectorii $v, AV, A^2v, \ldots, A^{n-1}v$ sunt liniar independenţi, atunci $A^n = \lambda I_n$.

**II.** Să se determine funcţiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ pentru care $x - y \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, avem $f(x) - f(y) \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

**III.** Fie $k \in \mathbb{N}^*$. Demonstraţi că valoarea minimă a lui $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care există o matrice $A \in M_n(\mathbb{Q})$ cu proprietatea $A^{2^k} = -I_n$ este $2^k$.

**IV.** Să se demonstreze că $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n} \int_0^1 \frac{n^2x^2 - [nx]^2}{(1+x^2)(1+[nx]^2)} dx = 1$.

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ ”TRAIAN LALESCU”
Faza naţională, anul I, profil electric, 2012-2013

**I.** Punctele $M_1$ şi $M_2$ se mişcă rectiliniu şi uniform pornind din $A_1(0, 0, 0)$ respectiv $B_1(1, 0, 0)$ cu vitezele $\bar{v}_1 = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$ şi $\bar{v}_2 = \bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$. Să se determine ecuaţia suprafeţei generate de dreptele $M_1M_2$ şi să se precizeze forma ei.

**II.** Fie $V$ un spaţiu vectorial finit dimensional peste corpul $K$, fie $F : V \times V \to K$ o formă biliniară şi fie subspaţiile:

$$V_1 = \{x \in V \mid F(x,y) = 0, \forall y \in V\}$$
$$V_2 = \{y \in V \mid F(x,y) = 0, \forall x \in V\}.$$

Arătaţi că $\dim V_1 = \dim V_2$.

**III.** a) Să se arate că $\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{n+3} - \ldots = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$.

b) Să se calculeze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \ldots\right)^2$.

**IV.** Să se determine funcţiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea $f(x) - f(y) \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ pentru care $x - y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza naţională, anul I, profil mecanic, 2012-2013

**I.** a) Să se dezvolte $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+t}{1-t}$ în serie de forma $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ cu precizarea mulţimii de convergenţă.

b) Folosind substituţia $t = \frac{1}{2x+1}$ în seria precedentă, să se obţină o serie a cărei sumă este

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1, \quad x > 0.$$

c) Folosind o serie majorantă convenabil aleasă, să se arate că $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f(x+n)$ converge pentru orice $x > 0$.

**II.** Fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 + 4$.

a) Să se afle valorile extreme ale funcţiei $f$ în domeniul închis:
$$\bar{D} = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

b) Să se determine mulţimea punctelor din plan pentru care există o vecinătate în care ecuaţia $f(x,y) = 0$ defineşte o funcţie implicită $y = y(x)$ şi să se afle punctele de extrem local ale acestei funcţii.

**III.** Fie $M = \begin{pmatrix} a\cos\theta - b\sin\theta & a\sin\theta + b\cos\theta \\ a\sin\theta + b\cos\theta & -a\cos\theta + b\sin\theta \end{pmatrix}$, în care $a$, $b$ şi $\theta$ sunt numere reale date.

a) Să se scrie $M$ sub forma $M = aA + bB$ şi să se calculeze $A^2$, $B^2$ şi $AB + BA$.

b) Să se determine $M^n$, $n$ număr natural.

c) Dacă $a^2 + b^2 < 1$, să se calculeze $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\cdot\frac{1}{k}M^k$.

**IV.** a) Să se determine ecuaţia suprafeţei formată din toate acele puncte ale spaţiului care sunt egal depărtate de dreptele $D_1: \ x = y = z$ şi $D_2: \ x - 1 = y = -z$.

b) Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ şi $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Să se determine coordonatele centrului de simetrie al curbei de intersecţie dintre suprafaţa $X^t(A + A^t)X - 32 = 0$ şi planul $x + y + z - 2 = 0$, unde $X^t$ şi $A^t$ reprezintă transpusele matricelor respective.

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
### Faza naţională, anul I, profil teoretic, 2013-2014

**I.** Fie $I$ un interval nedegenerat al axei reale, $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $I$ şi $g : I \to \mathbb{R}$, $g(x) = |f(x)|$. Să se demonstreze că există o mulţime cel mult numărabilă $E_f \subseteq I$, cu proprietatea că $g$ este derivabilă pe $I \backslash E_f$. Să se dea exemplu de funcţie $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ de clasă $\mathcal{C}^1$ pentru care mulţimea $E_f$ este infinită.

**II.** Câte soluţii are ecuaţia $x^{2013} = \hat{1}$ în $\mathbb{Z}_{2014}$?

**III.** a) Arătaţi că dacă un paralelogram este înscris într-o elipsă, atunci centrul lui coincide cu centrul elipsei.

b) Arătaţi că dacă un dreptunghi este înscris într-o elipsă care nu este cerc, atunci laturile sale sunt paralele cu axele de simetrie ale elipsei.

c) Aflaţi aria minimă a elipselor circumscrise unui dreptunghi dat.

**IV.** Fie $m, n$ numere naturale şi $A \in M_n(\mathbb{C})$ o matrice cu proprietatea $A^m = I_n$. Să se arate că:

$$\text{rang}\,(A - \varepsilon_0 I_n) + \text{rang}\,(A - \varepsilon_1 I_n) + \ldots + \text{rang}\,(A - \varepsilon_{m-1} I_n) = n(m-1),$$

unde $\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{m-1}\} = \{z \in \mathbb{C} \mid z^m = 1\}$.

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
### Faza naţională, anul I, profil electric, 2013-2014

**I.** Fie $a > 0$ şi $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = e^{-x-y} + a\sqrt{x^2 + y^2}, \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Arătaţi că $f$ are un unic punct de extrem local; demonstaţi că acesta este punct de minim global pentru $f$. (Folosiţi eventual inegalitatea $e^t \geq t + 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$.)

**II.** i) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}^\star$ să aibă loc relaţia

$$\int_0^\pi (ax + bx^2) \cos nx dx = \frac{1}{n^2};$$

ii) Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{\pi^2}{6}.$$

**III.** Se consideră spaţiul vectorial real $V = C[0, 2\pi]$ şi endomorfismul

$$T : V \to V,\ \ T(f)(x) = \int_0^{2\pi} 4\sin^3(x+y)f(y)dy,\quad f\in V, x\in[0,2\pi].$$

a) Daţi exemplu de 2014 funcţii liniar independente din $\operatorname{Ker} T$.

b) Determinaţi valorile proprii nenule şi vectorii proprii corespunzători pentru $T$.

**IV.** Fie $a, b, n$ numere naturale astfel ca $0 \le a \le b \le n$ şi $0 \le a + b - n$. Să se arate că pentru orice număr natural $c$ cu proprietatea $a + b - n \le c \le a$ există două matrice $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, astfel ca $\operatorname{rang} A = a$, $\operatorname{rang} B = b$ şi $\operatorname{rang}(AB) = c$.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza naţională, anul I, profil mecanic, 2013-2014

**I.** Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \sin(xy)\cdot\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

a) Să se studieze existenţa derivatelor parţiale de ordinul întâi.

b) Să se studieze diferenţiabilitatea în $(0,0)$.

c) Să se verifice dacă $f''_{xy}(0,0) = f''_{yx}(0,0)$.

d) Să se studieze natura seriei numerice $\sum_{n\ge1} f(n^{-\alpha}, n^{-\beta})$ pentru $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

**II.** Să se calculeze

$$I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(a\cos x)}{\cos x}dx,$$

unde $a \in \mathbb{R}$.

**III.** Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (x+y)e^{-x^2-y^2}$, unde $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 2\}$.

a) Să se determine punctele de extrem local ale funcţiei $f$.

b) Să se determine imaginea funcţiei $f$.

**IV.** Fie planul $\pi:\ 2x + y - 2z + 5 = 0$ şi punctele $A(2, -5, 0)$ şi $B(0, 1, 2)$.

a) Să se determine poziţia relativă a sferelor centrate în $A$, respectiv $B$, tangente la planul $\pi$.

b) Să se determine punctul $M \in \pi$ pentru care $\operatorname{dist}(M, A)+\operatorname{dist}(M, B)$ este minimă.

**V.** Fie $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$ trei vectori liberi necoplanari şi $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{v} = \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{w} = \vec{c} + \vec{a}$, astfel încât $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 1$, $\|\vec{w}\| = 3$, $m(\widehat{\vec{v},\vec{w}}) = \frac{\pi}{6}$, $m(\widehat{\vec{u},\vec{v}\times\vec{w}}) = \frac{\pi}{3}$.

a) Să se afle volumul paralelipipedului construit pe suporturile cu origine comună ale vectorilor $\vec{a}$, $\vec{b}$ şi $\vec{c}$.

b) Se consideră $T : V_3 \to V_3$ un endomorfism astfel încât $T(\vec{a}) = \vec{v}$, $T(\vec{b}) = \vec{w}$, $T(\vec{c}) = \vec{u}$. Să se calculeze $T^{2014}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$.

# Enunţuri - anul II

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza locală, anul II, profil mecanic, 2001-2002

**I.** a) Să se determine funcţia olomorfă $f$ dacă:

$$\text{Im } f = e^x \sin(y); \quad f(0) = 1.$$

b) Se dă: $Re\ f = \varphi(x^2 + y^2)$; $\varphi \in C^2$; se cere funcţia olomorfă $f$.

**II.** a) Să se dezvolte în serie Laurent funcţia: $f(z) = \dfrac{z}{z^2 - 1}$ pentru:
i) $0 < |z - 1| < 2$; ii) $|z - 1| > 2$; iii) $|z| < 2$.
b) Să se calculeze integralele:

$$I_1 = \oint\limits_{|z|=R>0} \frac{z}{z^2 - 1}\, dz; \qquad I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 4\sin x}\, dx.$$

**III.** a) Se dă sistemul: $\begin{cases} \dot{x} = x + 5y \\ \dot{y} = 5x + y \end{cases}$. Se cere:
i) soluţia generală şi stabilitatea soluţiei banale;
ii) soluţia particulară, dacă $x(0) = 1$; $y(0) = -1$.
b) Fie polinomul $P(\lambda) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 12\lambda + 8$. Să se verifice dacă este stabil.

**IV.** Să se rezolve, folosind transformarea!Laplace
a) $y'' - 2y' + y = \sin(t) + 4e^{-t} + 2e^t$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 2$.
b) $\begin{cases} x' = -3x - y \\ y' = x - y \end{cases}$; $\quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 1. \end{cases}$
**Notă.** Timp de lucru 3 ore. Toate subiectele sunt obligatorii.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza locală, anul II, profil mecanic, 2002-2003

**I.** a) Să se determine funcţia olomorfă $f$, dacă $\text{Re}\,(f(z)) = e^x \cos y$, $f(0) = 1$.
b) Să se determine funcţia olomorfă $f$, dacă $\text{Im } f = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, $\varphi \in C^2$.

**II.** a) Să se dezvolte în serie Laurent funcţia $f(z) = \dfrac{e^{1/z}}{1 - z}, 0 < |z| < 1$ şi să se calculeze

$$\int_{|z|=R} f(z)dz, \ R > 0, R \neq 1.$$

b) Să se calculeze integrala $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^6+1} dx$, folosind teorema reziduurilor.

**III.** Să se rezolve cu ajutorul transformării Laplace ecuaţiile:

a) $y'' - 2y' + y = e^t \cos 2t, y(0) = 1, y'(0) = 1.$

b) $x(t) + x'(t) - 2\int_0^t x(s)\sin(t-s)ds = \cos t + sht,\ x(0) = 1.$

**IV.** a) Să se dezvolte în serie Fourier funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = f(x+2\pi)$, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{ax}, x \in [-\pi, \pi), a \in \mathbb{R}.$

b) Aceeaşi problemă pentru $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1 - a\cos x}{1 - 2a\cos x + a^2}, |a| < 1.$$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza locală, anul II, profil mecanic, 2003-2004

**I.** Să se determine funcţia olomorfă $f$ dacă

$$u(x,y) = \text{Re}\,(f(z)) = \frac{x}{x^2+y^2},\ f(1) = 1.$$

**II.** Să se determine soluţiile ecuaţiei $\cos z = 5$.

**III.** Să se calculeze integrala: $I = \int\limits_{4x^2+9y^2=36} \frac{\sin z}{z^2(z^2+1)} dz.$

**IV.** Să se dezvolte funcţia $f(z) = \frac{1}{z^2+z-6}$ în serie, în domeniile:

a) $|z| < 2$; b) $2 < |z| < 3$; c)$|z| > 3$; d)$|z-2| < 1$.

**V.** Să se calculeze integrala, folosind teorema reziduurilor:

$$J = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^2(x^2+b^2)},\quad a > b > 0.$$

**VI.** Să se calculeze integralele, folosind teorema reziduurilor (discuţie după $a$):

$$a_n = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos nx}{1-2a\cos x + a^2} dx,\quad b_n = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{1-2a\cos x + a^2} dx,\quad n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}, |a| \neq 1.$$

**VII.** Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + 2\sin t \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases},\ \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases},\ \text{unde} \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t). \end{cases}$$

**VIII.** Să se determine funcţia original dacă $F(p) = \dfrac{p+1}{p^2+2p+\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (discuţie după $\alpha$).

**Notă.** Timp de lucru 3 ore. Sunt obligatorii 6 subiecte la alegere.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza locală, anul II, profil electric, 2004-2005

**I.** Să se calculeze, folosind teorema reziduurilor, integrala $I = \displaystyle\int_\Gamma z^2 e^{\frac{2z}{z+1}} dz$, unde

$$\Gamma = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \left| z - \frac{1}{2} \right| = R \right\},\ R \neq \frac{3}{2},\ R > 0$$

este un drum parcurs în sens trigonometric o singură dată.

**II.** Să se determine dezvoltarea în serie Fourier a funcţiei periodice, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0 \\ x/2, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Folosind această dezvoltare, determinaţi suma seriei $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

**III.** Folosind transformarea Laplace să se rezolve ecuaţia

$$x'''(t) - 2x''(t) - x'(t) + 2x(t) = 5 \sin 2t,$$

cu condiţiile iniţiale $x(0+) = 1$, $x'(0+) = 1$, $x''(0+) = -1$.

**IV.** Să se determine soluţia în $L^1 \cap L^2$ a ecuaţiei integrale Fourier

$$\int_0^\infty f(x) \cos(tx)\, dx = \frac{1}{1+t^2}.$$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza locală, anul II, profil mecanic, 2004-2005

**I.** Să se determine funcţia olomorfă $f$, ştiind că:

a) $Re(f(z)) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$; $f(1) = 1$; b) $Re(f(z)) = \varphi\left(\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\right)$; $\varphi \in C^2$.

**II.** a) Să se rezolve sistemul prin diferite metode:

$$\begin{cases} y' + 2x - y = 0 \\ 2x' + y'' = 2t - \cos(2t) \end{cases},\ x(0) = \frac{1}{2},\ y(0) = 0,\ y'(0) = -1.$$

b) Să se rezolve ecuaţia integrală:

$$\varphi(t) - \int_0^t e^{t-u}(t-u)\varphi(u)du = \cos t.$$

**III.** Să se calculeze integralele:

$$\text{a)} \int\limits_{|z|=2} (z^2+2z+1)e^{\frac{1}{z-1}}dz; \quad \text{b)} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(2nx)}{5+3\sin x}dx,\ n=1,2,3,\ldots.$$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza locală, anul II, profil electric, 2005-2006

**I.** a) Să se calculeze folosind reziduuri $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{1+z^3}$, unde $\gamma$ este frontiera domeniului:

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R, 0 < \arg z < \pi\}.$$

b) Calculaţi $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}$.

**II.** Determinaţi funcţia $g$ din relaţia:

$$\int_0^\infty g(u)\sin ut du = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\sin\frac{t}{4}, & 0<t<2\pi \\ \frac{\pi}{4}, & t=2\pi \\ 0, & t>2\pi. \end{cases}$$

**III.** Să se rezolve ecuaţia diferenţială folosind transformarea Laplace

$$x'' - 2x' + x = e^t, x(0)=0, x'(0)=1.$$

**Notă.** Timp de lucru 2h 30 min.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza locală, anul II, profil mecanic, 2005-2006

**I.** Să se determine funcţia olomorfă $f$, ştiind că:

a) $\text{Im}\,(f(z)) = \text{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$, $f(1)=0$.

b) $\text{Re}\,(f(z)) = \varphi\left(\dfrac{x^2+y^2}{x}\right)$, $\varphi \in C^2$.

**II.** Folosind teorema reziduurilor, calculaţi următoarele integrale:

a) $I_1 = \displaystyle\int_{|z|=r} z^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz,\ r > 0.$

b) $I_2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^{2006}} dx.$

**III.** a) Folosind transformarea Laplace, să se rezolve ecuaţia

$$\varphi''(t) + \int_0^t e^{2(t-u)} \cdot \varphi'(u) du = e^{2t}, \quad \varphi(0) = \varphi'(0) = 0.$$

b) Să se calculeze transformata Fourier a funcţiei: $f(x) = e^{-x^2/2}$, $x \in \mathbb{R}$.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ”TRAIAN LALESCU”
Faza locală, anul II, profil electric, 2006-2007

**I.** Să se rezolve ecuaţiile:

a) $xy'' - (x+2)y' + y = 0.$

b) $x^2y'' - xy' + y = \ln x,\ x > 0.$

**II.** Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x' = 2x + 2z \\ y' = 2x - 2z \\ z' = 2x - 2y. \end{cases}$

**III.** Fie $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clasă $C^2$, $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $v(x, y) = \varphi(x^2 - y^2)$.

a) Să se determine $\varphi$, astfel încât $v$ să fie armonică.

b) Determinaţi funcţia $f$ olomorfă, pentru care $\text{Im}\,(f) = v(x, y)$.

c) Calculaţi $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{f(z) \cdot \sin z}{z^2} dz.$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ”TRAIAN LALESCU”
Faza locală, anul II, profil mecanic, 2006-2007

**I.** Să se determine funcţiile olomorfe $f = f(z)$ ştiind că:

a) $\text{Re}\, f(z) = e^x(x\cos y - y \sin y);\ \ f(0) = 0.$

b) $\text{Re}\, f(z) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right);\ \ \varphi \in C^2(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}).$

**II.** a) Să se dezvolte funcţia $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + z - 6}$ în serie, în domeniile:

i) $|z| < 2$; ii) $2 < |z| < 3$; iii) $|z| > 3$; iv) $|z - 2| > 1$.

b) Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuaţia $\sin z = 2$.

**III.** Folosind teorema reziduurilor, să se calculeze integralele:

a) $I_1 = \displaystyle\int_{|z|=R} z^3 e^{\frac{1}{z-1}} dz;\ R > 0,\ R \neq 1.$

b) $I_2 = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{1 - 2a\cos x + a^2};\ a \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 0, 1\}.$

**IV.** Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x' - 4x - y = -36t \\ y' + 2x - y = -2e^t \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

**Notă.** Timp de lucru 3 ore. Se vor rezolva, la alegere, 3 subiecte.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza locală, anul II, profilele electric şi mecanic, 2007-2008

**I.** Să se rezolve problema Cauchy:

$$y''' - 3y' + 2y = x^2 e^x,\ \ y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = -\frac{241}{27}.$$

**II.** Să se rezolve problema Cauchy:

$$Y' = AY,\ A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -5 & 7 & -5 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix},\ Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

**III.** Determinaţi funcţia olomorfă $f = f(z)$, ştiind că:

$$\text{Im}\,(f(z)) = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y,\ f(1 + i) = -i - 3 + 2i\ln\sqrt{2}.$$

**IV.** Folosind teorema reziduurilor, calculaţi integrala:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{4 - \sin^2 x}.$$

**V.** Calculaţi integrala, folosind teorema reziduurilor:

$$J = \int_{|z|=R} z^2 e^{1/(z-1)} dz,\ R > 0, R \neq 1.$$

**Notă.** Timp de lucru 3 ore. Se vor rezolva, la alegere, 4 subiecte din cele 5.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza locală, anul II, profil electric, 2008-2009

**I.** Să se rezolve sistemul de ecuaţii diferenţiale $Y' = AY$, $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, cu condiţia $Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

**II.** Fie $p$,$q$,$r$ : $(a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $q(x,0) > 0$; $r(x,0) \geq 0$, $\forall x \in (a,b)$. Arătaţi că nicio soluţie a ecuaţiei $r(x,y') \cdot y'' + p(x,y') \cdot y' = q(x,y') \cdot y$, nu poate avea un maxim interior pozitiv sau un minim interior negativ.

**III.** Să se calculeze $\int_\Gamma z^2 \cdot e^{2z/(z+1)} dz$, unde $\Gamma: \ \ x^2 + y^2 + 2x = 0$.

**IV.** a) Să se determine funcţia $f$ olomorfă, dacă $\operatorname{Re}(f) = \varphi\left(\frac{x^2+y^2}{x}\right)$, $\varphi \in C^2(D)$, unde $D$ este domeniul maxim de definiţie.

b) Calculaţi $\int_{|z|=R} f^3(z) \cdot \sin z \, dz$, unde $R > 0$ şi $f$ este funcţia olomorfă de la punctul a).

**V.** Calculaţi, folosind teorema reziduurilor, $I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(3 + \cos x)^2}$.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza locală, anul II, profil mecanic, 2008-2009

**I.** a) Să se determine $F \in C^2(\mathbb{R})$, astfel încât $F(t(x,y))$, $t \in C^2(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R})$, $t(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x}$ să fie funcţie armonică.

b) Să se determine funcţia olomorfă $f = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, ştiind că

$$u(x,y) = F(t(x,y)), \ \ F \in C^2(\mathbb{R}), \ \ t \in C^2(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}), \ \ t(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x}.$$

**II.** a) Să se determine reziduul funcţiei $f(z) = (z-1)^3 e^{\frac{1}{z-1}}$ în $z = 1$.

b) Folosind formulele Euler, să se determine soluţiile ecuaţiei $\sin z = i$.

**III.** Calculaţi integrala $I_n$ folosind teorema reziduurilor:

$$I_n = \int_0^{2\pi} \frac{\left(1-a^2\right) \cdot e^{inx}}{1 - 2a\cos x + a^2} dx, \ \ a \in \mathbb{R}, \ \ |a| \neq 1 \ \ \text{(discuţie după } a\text{)}.$$

**IV.** Să se rezolve problema Cauchy: $\begin{cases} x' + y = t \\ x + y' = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = -1. \end{cases}$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza locală, anul II, profil electric, 2009-2010

**I.** Găsiţi soluţia problemei Cauchy:

$$y''' + y'' - 2y' = \ln(e^x + 1), \;\; y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = -1.$$

**II.** Construiţi funcţia olomorfă $f$ care verifică:

$$\text{Re}\,(f(z)) = \varphi\left(\frac{x^2 + y^2}{x}\right), \;\; \varphi \in C^2(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}).$$

**III.** Folosind formulele Euler, calculaţi:
a) soluţia ecuaţiei $\text{tg}\,(z) = \frac{5}{3} \cdot i$;
b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x}{5 - 3 \cdot \sin x}\, dx.$

**IV.** Să se calculeze:
a) $\displaystyle\int_{|z|=r} \frac{z^2 e^z}{(z-1)^{n+1}}\, dx,\; r > 0, n \in \mathbb{N}.$
b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x \cdot sinx}{x^2 + a^2}\, dx,\; a \geq 0$ (discuţie după $a$).

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza locală, anul II, profil mecanic, 2009-2010

**I.** a) Să se determine $F \in C^2(\mathbb{R})$ astfel incât

$$F(t(x, y)), \;\; t \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}), \;\; t(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - x$$

să fie funcţie armonică.

b) Să se determine funcţia olomorfă $f = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, ştiind că

$$u(x, y) = F((t(x, y)), \;\; F \in C^2(R \times R), \;\; t(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - x.$$

**II.** a) Să se determine reziduul funcţiei $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z-2}}$ în $z = 2$.

b) Să se determine soluţiile ecuaţiei $\operatorname{tg} z = \frac{5i}{3}$.

**III.** Să se calculeze integrala $I$, folosind teorema reziduurilor:

$$I = \int_{0,25x^2+0.16y^2=0.04} \frac{\operatorname{tg} z}{z^2(z^2+1)} dz.$$

**IV.** Calculaţi integrala $J$, folosind teorema reziduurilor (discuţie dupa $a$):

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x - a}{1 - 2a\cos x + a^2} dx, a \in \mathbb{R}, |a| < 1.$$

**V.** Să se rezolve problema Cauchy:

$$\begin{cases} x''(t) - y(t) = t \\ y''(t) - x(t) = 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = x'(0) = 0 \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza locală, anul II, profil electric, 2010-2011

**I.** Să se afle soluţia generală a sistemului diferenţial $y' = Ay$. Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**II.** a) Să se afle soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale

$$(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = x^2 + 1, \quad x > 0,$$

unde $y = x$ este o soluţie a ecuaţiei *omogene*.

b) Determinaţi $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia diferenţială $x^2y'' + xy' + \lambda y = 0$ admite o soluţie nenulă pe $(0, \infty)$, ce îndeplineşte condiţiile $y(1) = 0$, $y(e) = 0$.

**III.** Să se calculeze integrala $I = \displaystyle\int_{\Gamma:|z|^2-2\operatorname{Re} z=0} \frac{z^3 e^{z/(z-1)}}{(z-1)^2} dz.$

**IV.** Calculaţi $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos x \cos(nx)}{13 - 12\cos x} dx$, $n \in \mathbb{N}$, (discuţie după $n$).

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza locală, anul II, profil mecanic, 2010-2011

**I.** Să se determine funcţia olomorfă $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, ştiind că

$$u(x,y) + v(x,y) = F(t(x,y)), \;\; F \in C^2(R), \;\; t \in C^2(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}), \;\; t(x,y) = \frac{y}{x}.$$

**II.** a) Să se determine reziduul funcţiei $f(z) = z^3 e^{1/(z-3)}$ în $z = 3$.
b) Să se determine soluţiile ecuaţiei $\sin z = 2i$.

**III.** Folosind teorema reziduurilor, să se calculeze integrala:

$$I = \int_{9x^2+25y^2=225} \frac{\sin z}{z^2(z^2+4)} dz.$$

**IV.** Folosind teorema reziduurilor, calculaţi integrala:

$$I_n = \int_0^{2\pi} \frac{\cos nx}{b - ia\cos x} dx, \quad a > 0, b > 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

**V.** Să se rezolve problema Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 4y = 4(\cos 2t - \sin 2t), \quad y = y(t) \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3. \end{cases}$$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza locală, anul II, profilele electric şi mecanic, 2011-2012

**I.** a) Să se determine $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ astfel încât $\varphi(t(x,y))$, $t \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, $t(x,y) = x^3 - 3xy^2$ să fie funcţie armonică.
b) Să se determine funcţia olomorfă $f = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, ştiind că $u(x,y) = \varphi(t(x,y))$, $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, $t \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, $t(x,y) = x^3 - 3xy^2$.

**II.** Să se dezvolte în serie Laurent funcţia $f(z) = \dfrac{z}{\sin z}$ în vecinătatea punctului $z = \pi$, precizând coeficienţii lui $(z-\pi)^n$, pentru $n = -1$ şi $n = 0$.
b) Să se calculeze integrala $I$ folosind teorema reziduurilor, unde

$$I = \int_{|z-\pi|=1} \frac{z}{\sin z} dz.$$

**III.** Calculaţi integrala $I$, folosind teorema reziduurilor:

$$I = \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^n \sin nt dt.$$

**IV.** Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x' = x - y + 2\sin t \\ y' = 2x - y \end{cases}, \quad \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}, \text{ unde } \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t). \end{cases}$$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza locală, anul II, profil electric, 2012-2013

**I.** Calculaţi integrala complexă:

$$\int_{|z|=R} (z-1)^{2012} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot \frac{z}{z-1}\right) dz,$$

dacă $R \in (0, \infty)$, $R \neq 1$.

**II.** Fie $F : D = \mathbb{R} \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$,

$$F(x, y) = e^x(ax \cos y - by \sin y), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

a) Ce relaţie trebuie să existe între $a$ şi $b$ astfel încât $F$ să fie armonică?

b) Construiţi $f$ olomorfă, $f : D \to \mathbb{C}$, astfel încât:

$$\operatorname{Re} f = F(x, y) + \varphi(x^2 - y^2), \quad \varphi \in \mathcal{C}^2(D).$$

**III.** Calculaţi integrala:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos^2(2012x)}{x^2 - 6x + 13} dx.$$

**IV.** a) Determinaţi soluţia sistemului diferenţial $Y' = AY$, unde am notat $Y = Y(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t))^t$, dacă $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & -3 \\ -6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$.

b) Ştiind că soluţia sistemului de la punctul a) satisface condiţia iniţială $Y(0) = (1, 9, 0)^t$, rezolvaţi în $\mathbb{C}$ ecuaţia:

$$\sin z = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t).$$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza locală, anul II, profil mecanic, 2012-2013

**I.** Calculaţi integrala complexă:

$$\int_{|z|=R} (z-1)^{2012} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot \frac{z}{z-1}\right) dz,$$

dacă $R \in (0, \infty)$, $R \neq 1$.

**II.** Fie $F : D = \mathbb{R} \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$,

$$F(x, y) = e^x(ax \cos y - by \sin y), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

a) Ce relaţie trebuie să existe între $a$ şi $b$ astfel încât $F$ să fie armonică?

b) Construiţi $f$ olomorfă, $f : D \to \mathbb{C}$, astfel încât:

$$\operatorname{Re} f = F(x, y).$$

**III.** Calculaţi integrala:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(\frac{\pi}{2} x)}{x^4 + 2x^2 + 1} dx.$$

**IV.** a) Determinaţi soluţia sistemului diferenţial $Y' = AY$, unde am notat $Y = Y(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t))^t$, dacă $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, iar soluţia satisface condiţia iniţială $Y(0) = (0, 1, 1)^t$.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza locală, anul II, profil electric, 2013-2014

**I.** Calculaţi integrala: $I = \displaystyle\int_{|z|=7} \frac{1}{z^3 \sin z} dz.$

**II.** Fie $F : D = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = ax^2 - by^2 + \cos(ax)\operatorname{sh}(by)$, $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Ce relaţie trebuie să existe între $a$ şi $b$ astfel încât $F$ să fie armonică?

b) Construiţi $f$ olomorfă, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = f(z)$, $f = u + iv$, astfel încât: $3u + 5v = F(x, y)$ şi $f(0) = 0$.

**III.** Calculaţi: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx}{(x^2 + 1)^2} dx.$

**IV.** Determinaţi soluţia sistemului diferenţial $Y' = AY + b$, unde am notat $Y = Y(t) = (y_1(t), y_2(t))^t$, $b = b(t) = (b_1(t), b_2(t))^t$, dacă $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $b(t) = (\sin t, \cos t)^t$, iar soluţia sistemului satisface condiţia iniţială $Y(0) = (0, 0)^t$.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza locală, anul II, profil mecanic, 2013-2014

**I.** Calculaţi integrala: $I = \displaystyle\int_{\gamma} \frac{1}{z^3 \sin z} dz$, unde $\gamma$ este curba $|z| = 7$.

**II.** Fie $F : D = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = ax^2 - by^2$, $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Ce relaţie trebuie să existe între $a$ şi $b$ astfel încât $F$ să fie armonică?

b) Construiţi $f$ olomorfă, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = f(z)$, $f = u + iv$, astfel încât: $5u + 3v = F(x, y)$ şi $f(0) = 0$.

**III.** Calculaţi integrala: $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos x}{(x^2 - 6x + 13)^2} dx.$

**IV.** Determinaţi soluţia sistemului diferenţial $Y' = AY + b$, unde am notat $Y = Y(t) = (y_1(t), y_2(t))^t$, $b = b(t) = (b_1(t), b_2(t))^t$, dacă $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $b(t) = (\sin t, \cos t)^t$, iar soluţia sistemului satisface condiţia iniţială $Y(0) = (0,0)^t$.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza interuniversitară, anul II, profil electric, 2002-2003

**I.** Folosind teorema reziduurilor, să se calculeze integrala $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}dx.$

**II.** Să se rezolve problema Cauchy $\begin{cases} x''(t) + 2x'(t-2) + x(t-4) = t \\ x(0) = x'(0) = 0. \end{cases}$

**III.** Fie $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \lambda \\ 0, & x > \lambda \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \lambda \\ 0, & x > \mu, \end{cases}$, unde $\lambda$, $\mu \in \mathbb{R}_+^*$.

a) Să se arate că funcţiile $f$ şi $g$ admit transformate Fourier (notate $F_c$, $G_c$) prin cosinus şi să se calculeze acestea,

$$F_c(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x)\cos(\xi x)\,dx, \qquad G_c(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty g(x)\cos(\xi x)\,dx.$$

b) Să se demonstreze relaţia

$$\int_0^\infty F_c(\xi)G_c(\xi)d\xi = \int_0^\infty f(x)g(x)dx.$$

c) Folosind punctul b) să se arate că $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin\lambda t \cdot \sin\mu t}{t^2}dt = \frac{\pi}{2}\min(\lambda, \mu).$

**IV.** a) Să se dezvolte în serie Fourier trigonometrică funcţia:

$$f(x) = \frac{a\cos x - a^2}{1 - 2a\cos x + a^2}, \quad -1 < a < 1.$$

b) Folosind seria Fourier a funcţiei $f$ şi formula lui Parseval, să se demonstreze că:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\cos x - a}{1 - 2a\cos x + a^2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{1-a^2}.$$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza interuniversitară, anul II, profil mecanic, 2002-2003

**I.** a) Determinaţi funcţia olomorfă $f(z) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$, $z = x + iy$, ştiind că

$$v(x,y) = \varphi(t(x,y)),\ \varphi \in C^2(\mathbb{R}),\ t \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*),\ t(x,y) = \frac{x^2+y^2}{y}.$$

b) Să se calculeze $I = \displaystyle\int_\gamma \frac{e^{1/z}}{(1-z)^2} dz$, $\gamma :\ |z| = r,\ r > 0,\ r \neq 1.$

**II.** Pentru fiecare $r \in [0,1)$ fixat, fie $f(\theta) = \dfrac{1-r^2}{2(1-2r\cos\theta + r^2)}$. Să se dezvolte $f$ în serie Fourier.

**III.** a) Să se calculeze transformata Fourier prin cosinus a funcţiei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f(x) = \frac{1}{(x^2+4)^2}.$$

b) Folosind (eventual) rezultatul obţinut la punctul a), să se calculeze transformata Fourier prin sinus a funcţiei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{x}{(x^2+4)^2}$.

**IV.** Folosind transformarea Laplace, să se rezolve ecuaţia integrală

$$\varphi(t) - \int_0^t e^{t-u}(t-u) \cdot .\varphi(u) du = \cos t.$$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza interuniversitară, anul II, profil mecanic, 2003-2004

**I.** Să se calculeze valoarea integralei $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+1)^{2004}} dx.$

**II.** Să se determine funcţia olomorfă $f(z) = u + iv$, ştiind că

$$v(x,y) = e^x \sin y - \frac{y}{x^2+y^2},\ \ (x,y) \neq (0,0),\ \ f(1) = e.$$

**III.** Să se dezvolte în serie Fourier trigonometrică funcţia

$$f(\theta) = \frac{a\sin\theta}{a^2 - 2a\cos\theta + 1},\ |a| < 1.$$

**IV.** Să se calculeze transformatele Fourier prin sinus şi cosinus ale funcţiei $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(t) = e^{-at}$, $a > 0$, prelungind convenabil funcţia $f$ pe toată axa reală.

**V.** Folosind transformarea Laplace, să se rezolve problema Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{x}+2\dot{x}+x+\ddot{y}+\dot{y}+y=1 \\ 2\dot{x}+2x+\ddot{y}+2\dot{y}=2t \end{cases}, \quad \begin{cases} x(0)=0, \quad \dot{x}(0)=2 \\ y(0)=1, \quad \dot{y}(0)=-2, \end{cases}$$

unde $x=x(t), \;\; y=y(t)$.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ”TRAIAN LALESCU”
Faza interuniversitară, anul II, profil electric, 2004-2005

**I.** Să se studieze convergenţa şi în caz afirmativ să se calculeze integrala

$$I=\int_0^1 \frac{\sqrt[5]{x^2(1-x)^3}}{1+x}dx.$$

**II.** Fie funcţia $f(t)=\begin{cases} 1, & 2nl<t<(2n+1)l \\ -1, & (2n+1)l<t<(2n+2)l \end{cases}, \;\; n\in\mathbb{N}$.

a) Să se dezvolte $f$ în serie Fourier de sinusuri;

b) Să se calculeze transformata Laplace a funcţiei $f$;

c) Utilizând teoreme de inversare să se regăsească funcţia $f$ ca serie Fourier.

**III.** a) Să se arate că există transformata Fourier prin sinus a funcţiei $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ şi să se calculeze aceasta.

b) Folosind punctul a) să se rezolve ecuaţia integrală $\displaystyle\int_0^\infty g(t)\sin tx \; dt=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $x>0$.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ”TRAIAN LALESCU”
Faza interuniversitară, anul II, profil mecanic, 2004-2005

**I.** a) Ştiind că partea reală $u(x,y)$ a unei funcţii olomorfe $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$ este de forma $u(x,y)=\varphi(t(x,y))$, unde $\varphi\in C^2(\mathbb{R})$, $t:\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ şi $t(x,y)=\dfrac{y}{x}$, să se determine funcţia $f(z)$.

b) Să se calculeze $I=\displaystyle\int_{|z-1|=r} z^2\sin\frac{\pi}{z}dz$, $r\in(0,2)$, $r\neq 1$.

**II.** Să se dezvolte în serie Fourier funcţia $f:(-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$, $f(t)=\dfrac{\pi}{2\,\mathrm{sh}\,\pi}e^t$.

Din dezvoltarea obţinută, să se determine suma seriei numerice $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}$.

**III.** Folosind transformarea Laplace să se rezolve problema Cauchy:

$$\begin{cases} x'' - 2x' + 5x = e^t \cos 2t \\ x(0) = x'(0) = 1. \end{cases}$$

**IV.** Să se arate că transformata Fourier prin sinus a funcţiei $xe^{-x^2/2}$ coincide cu ea însăşi.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza interuniversitară, anul II, profil electric, 2005-2006

**I.** Fie funcţia $v(x, y) = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$. Verificaţi dacă $v$ este funcţie armonică, şi determinaţi funcţia olomorfă $f$, cu $\operatorname{Im} f = v(x, y)$, $f(0) = 0$. Pentru $f$ astfel determinat, calculaţi: $\displaystyle\int_{|z|=r} \frac{f(1/z)}{1-z} dz$.

**II.** Dezvoltaţi în serie Fourier trigonometrică, pe $[-\pi, \pi]$, funcţia: $f(x) = \operatorname{ch}(ax)$, $a > 0$, şi determinaţi suma seriilor $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$ şi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + a^2)^2}$.

**III.** Determinaţi funcţia $f$, dacă

$$\int_0^{\infty} f(t) \cdot \cos(\omega t) dt = \frac{1}{(1 + \omega^2)^2}, \quad \omega > 0.$$

**IV.** Rezolvaţi ecuaţia diferenţială: $y'' + 4y = f(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = a$ unde $a \in \mathbb{R}$, iar $f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [2, 3] \\ 0, & t \notin [2, 3]. \end{cases}$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza interuniversitară, anul II, profil mecanic, 2005-2006

**I.** a) Să se determine funcţia olomorfă $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$, $z = x + iy$, ştiind că $u(x, y) = \varphi(x^2 - y^2)$, $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ şi $f(0) = 0$, $f(i) = -1$.

b) Fie $g(z) = \dfrac{f(z) \cdot e^{2/z}}{z^2 - z}$. Să se calculeze $Rez(g, 1)$.

c) Să se calculeze $Rez(g, 0)$.

d) Să se calculeze $\displaystyle\int_{|z|=2} g(z) dz$.

**II.** Fie funcţia $f(x) = \dfrac{\sin x}{5 + 4 \cos x}$, $x \in \mathbb{R}$. Să se dezvolte $f$ în serie Fourier pe intervalul $(-\pi, \pi)$.

**III.** a) Să se calculeze transformata Fourier a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2/a^2}$, $(a \in \mathbb{R}^*)$.

b) Să se calculeze transformatele Fourier prin sinus şi cosinus pentru funcţia

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ g(x) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } x < 0 \\ e^{-x}, & \text{pentru } x \geq 0. \end{cases}$$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza interuniversitară, anul II, profil electric, 2006-2007

**I.** a) Să se determine funcţia olomorfă $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ştiind că

$$u(x, y) = \text{Re } f = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),\ \ \varphi \in C^2.$$

b) Folosind teorema reziduurilor, să se calculeze integrala $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$.

**II.** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = \dfrac{\sin t}{5 + 3\cos t}$.

a) Să se dezvolte funcţia $f$ în serie Fourier trigonometrică.

b) Să se regăsească dezvoltarea de la a), utilizând o dezvoltare Laurent în coroană pentru o funcţie complexă ataşată funcţiei $f$.

**III.** Să se rezolve ecuaţia integrală $x(t) = \cos t + \displaystyle\int_0^t (t - \tau)\, e^{t-\tau} x(\tau) d\tau$, utilizând transformarea Laplace.

**IV.** Să se rezolve ecuaţia integrală $\displaystyle\int_0^\infty \varphi(u) \cos(ux) du = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \cos x, & x \in (0, \pi) \\ -\frac{\pi}{4}, & x = \pi \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza interuniversitară, anul II, profil mecanic, 2006-2007

**I.** Să se determine funcţia olomorfă $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$, dacă

$$v(x, y) = \text{Im } (f) = \text{arctg } \left(\frac{y}{x}\right),\ f(1) = 0, \text{ unde } v \in C^2(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}).$$

**II.** Folosind teorema reziduurilor, calculaţi $\displaystyle\int_{|z|=R} \frac{e^{1/z}}{z(1-z)} dz$, $R > 0$, $R \neq 1$.

**III.** Cu ajutorul transformării Laplace, determinaţi $y(t)$, dacă $\begin{cases} y'' - 2y' + y = t \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1. \end{cases}$

**IV.** Calculaţi transformata Fourier pentru funcţia $f(x) = e^{-x^2/2}$.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza naţională, anul II, profilele electric şi mecanic, 2007-2008

**I.** Fie funcţia $u(x,y) = \ln(x^2+y^2) + e^x \cdot \cos y$.

a) Arătaţi că $u(x,y)$ este funcţie armonică.

b) Construiţi $f(z)$ olomorfă pe $\mathbb{C}^*$, $f(z) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$, unde $u(x,y)$ este funcţia precizată în enunţ, cu condiţia $f(1) = e$.

c) Fie $R \in (0,\infty) \setminus \left\{\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$. Calculaţi integrala:

$$I = \int_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=R} \frac{f(z) - 2\ln z}{z^2(z+i)} dz,$$

unde $f$ este funcţia olomorfă determinată la punctul b).

**II.** Calculaţi integrala $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin x \cdot e^{inx}}{(13 - 5\cos x)^2} dx, \quad n \in \mathbb{N}^*$.

**III.** Să se rezolve ecuaţia diferenţială:

$$x'' - 2x' + x = e^t, \; x(0) = 0, \; x'(0) = 1,$$

folosind transformarea Laplace.

**IV.** Să se rezolve sistemul de ecuaţii diferenţiale:

$$\begin{cases} x' = -x + y + z \\ y' = x - y + z \\ z' = x + y + z, \end{cases}$$

unde $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ şi care verifică condiţiile iniţiale

$$x(0) = 0, \; y(0) = 0, \; z(0) = 1.$$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza naţională, anul II, profil electric, 2008-2009

**I.** Se consideră ecuaţia diferenţială $x''' + (2a-1)x'' + (a^2+3)x' + (a^2+3a)x = 1$, unde $a \in \mathbb{R}$ este un parametru.

a) Să se determine valorile lui $a$ pentru care ecuaţia are soluţiile stabile spre $\infty$.

b) Pentru $a = 1$, să se determine, folosind transformarea Laplace, soluţia $x(t)$ pe $(0,\infty)$ a ecuatiei, astfel incât $x(0_+) = x'(0_+) = x''(0_+) = 0$.

**II.** Fie $D$ un disc deschis în planul complex.

a) Să se arate că o funcţie olomorfă $f : D \to \mathbb{C}$ are primitive şi că orice două primitive diferă printr-o constantă.

b) Dacă $F$ este o primitivă a unei funcţii $f : D \to \mathbb{C}$, are loc relaţia $\int_\gamma f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$.

c) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ dacă $a + ib = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}+i} \sin z\, dz$.

**III.** Să se determine seria Fourier ataşată funcţiei $f(x) = \dfrac{1}{5 - 4\cos z}$ pe $[-\pi, \pi]$, să se studieze natura convergenţei acestei serii şi să se calculeze $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{dz}{5 - 4\cos z}$.

**IV.** Fie $f(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$ cu $a_i \in \mathbb{C}, i = 0, 1, 2, 3, ..., n$.

a) Să se calculeze $I_k = \displaystyle\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^k} dz$ şi $J_k = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})e^{-ikt}dt$ pentru $0 \leq k \leq n$.

b) Dacă toţi $a_i \in \mathbb{R}$, să se arate că au loc relaţiile

$$\int_{-1}^{1} f(x)^2 dx = -i \int_0^{\pi} f(e^{it})^2 e^{it} dt; \qquad \int_0^1 f(x)^2 dx \leq 2\pi \sum_{k=0}^{n} a_k^2.$$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza naţională, anul II, profil mecanic, 2008-2009

**I.** Se consideră ecuaţia diferenţială $x''' + (2a-1)x'' + (a^2+3)x' + (a^2+3a)x = 1$, unde $a \in \mathbb{R}$ este un parametru.

a) Să se determine valorile lui $a$ pentru care soluţiile sunt stabile pentru $t \to \infty$.

b) Pentru $a = 1$, să se determine, folosind transformarea Laplace, soluţia $x(t)$ pe $(0, \infty)$ a ecuaţiei, astfel încât $x(0_+) = 0, x'(0_+) = 0, x''(0_+) = 0$.

**II.** a) Să se determine $\left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \cos z = \dfrac{5}{4} \right\}$;

b) Să se dezvolte în serie Fourier funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = \dfrac{1}{5 - 4\cos t}$;

c) Să se calculeze $\displaystyle\int_{|z-i|=1} \frac{dz}{5 - 4\cos z}$.

**III.** Fie sistemul $x' = f(x, y)$; $y' = g(x, y)$ cu $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, funcţii de clasă $C^1$ cu soluţii $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = (x(t), y(t))$.

a) Un punct $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ se numeşte echilibru dacă funcţia $\varphi(t) = (a, b)$ este soluţie. Să se arate că $(a, b)$ este echilibru dacă şi numai dacă $f(a, b) = 0$, $g(a, b) = 0$.

b) Să se arate că două orbite sunt sau disjuncte, sau coincid.
(Se numeşte orbită imaginea oricărei soluţii.)

c) Să se rezolve sistemul $x' = y$, $y' = -x$.

**IV.** Fie $f(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$ cu $a_i \in \mathbb{C},\ i = 0, 1, 2, ..., n$.

a) Să se calculeze

$$I_k = \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^k} dz \text{ şi } J_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) e^{-ikt} dt,$$

pentru $0 \leq k \leq n$.

b) Dacă toţi $a_k \in \mathbb{R}$, să se arate că

$$\int_{-1}^{1} f(x)^2 dx = -i \int_0^{\pi} f(e^{it})^2 e^{it} dt \qquad \text{şi că} \qquad \int_0^1 f(x)^2 dx \leq 2\pi \sum_{k=0}^{n} a_k^2.$$

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza naţională, anul II, profilele electric şi mecanic, 2009-2010

**I.** a) Se consideră ecuaţia diferenţială:

$$tx''(t) + x'(t) + tx(t) = 0.$$

Să se arate că ecuaţia admite o unică soluţie serie de puteri convergentă pe $\mathbb{R}$, care respectă condiţia $x(0) = 1$.

b) Să se rezolve problema Cauchy:

$$\begin{cases} x' = 2x + y + 2z \\ y' = -x - 2z \\ z' = x + y + 2z, \end{cases}$$

unde $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ şi $x(0) = 0, y(0) = 0, z(0) = 1$.

**II.** Să se determine funcţia olomorfă:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),\ z = x + iy,\ x > 0,$$

ştiind că $f(1) = 0,\ f(e) = 1 - i$ şi $u(x, y) + v(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, unde $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$.

**III.** Rezolvaţi ecuaţia integrală:

$$x'(t) - 2\int_0^t x(\tau)\cos(t - \tau) d\tau = \int_0^t (t - \tau)\sin\tau \ d\tau,$$

ştiind că $x(0) = 0$ şi $t > 0$.

**IV.** Să se dezvolte în serie Fourier trigonometrică funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\cos^2 x}{5 + 4\sin x}.$$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza naţională, anul II, profilele electric şi mecanic, 2010-2011

**I.** a) În coordonate polare $(\rho, \theta)$, sistemul Cauchy-Riemann este $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta}, \end{cases}$ iar operatorul lui Laplace are expresia $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$. Să se determine funcţia olomorfă $f(z) = u(\rho, \theta) + iv(\rho, \theta)$, unde $z = \rho e^{i\theta}$ ştiind că $u(\rho, \theta) = \varphi(\text{tg}\theta)$, unde $\varphi$ este o funcţie de două ori diferenţiabilă.

b) Calculaţi: $\displaystyle\int_{|z|=r} \frac{e^{1/(z-a)}}{z(z-a)^2} dz, \quad r > 0,\ r \neq a,\ a \in \mathbb{R}.$

**II.** Să se rezolve următoarea ecuaţie integrală, utilizând transformarea Laplace

$$\varphi''(t) + \int_0^t 4e^{4(t-u)} \varphi'(u) du = \sin(5t),$$

cu condiţiile iniţiale $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$.

**III.** Rezolvaţi ecuaţia integrală $\displaystyle\int_0^\infty \varphi(t) \sin(ut) dt = \frac{u}{(u^2 + a^2)^2},\ u > 0,\ a > 0.$

**IV.** Fie $f : (-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2sh\pi} \cdot e^x$.
a) Să se dezvolte funcţia $f$ în serie Fourier.
b) Folosind dezvoltarea obţinută la punctul a), calculaţi sumele seriilor numerice

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{1 + n^2} \qquad \text{şi} \qquad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + 1}.$$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza naţională, anul II, profil inginerie, 2011-2012

**I.** Calculaţi: $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2012x) + \sin(2012x)}{3 + 2\cos x}\, dx.$

**II.** Calculaţi: $\displaystyle\int_{|z|=R} z^{2012} \sin\left(\frac{1}{z}\right) dx, \quad R > 0.$

**III.** a) Determinaţi soluţia $f(t)$, $t > 0$ a următoarei ecuaţii integrale:

$$\int_0^\infty f(t) \sin(\omega t)\, dt = e^{-a\omega}, \quad a > 0.$$

b) Considerând $f(t) = F[g(\omega)]$, unde $g$ este funcţia original, să se determine $g(\omega)$.

**IV.** Rezolvaţi următoarea ecuaţie integrală:

$$\int_0^t f(\tau) \cdot (t - \tau)\, d\tau + \int_0^t f(t - \tau) \cdot \tau\, d\tau = t^2.$$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza naţională, anul II, profil inginerie, 2012-2013

**I.** Fie funcţia $u(x,y) = e^{nx} \cdot (x \cos ny - y \sin ny)$, $n$ număr natural.

a) Construiţi $f$ olomorfă, $f(z) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$, care verifică condiţia $f(1) = e^n$.

b) Fie $g: D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă şi fie $\varphi$ o funcţie reală de clasă $C^2(\mathbb{R})$. Aflaţi $\varphi(t)$ astfel încât $\text{Re}\ (f) = \varphi(\text{Im}\ (g))$, unde $f$ este funcţia determinată la punctul a).

c) Fie $R > 0$. Calculaţi integrala $\displaystyle\int_{|z|=R} \frac{e^{1/z} \cdot f(z)}{z^3 \cdot e^{nz}(z+2i)} dz$.

**II.** Folosind transformarea Laplace, să se determine soluţia problemei Cauchy

$$x''(t) + 2 \cdot x'(t) + x(t) = \frac{e^{-t}}{t+1}; \qquad x(0) = 0, \ \ x'(0) = 1.$$

**III.** Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{5 - 4\sin x}$.

a) Să se dezvolte funcţia $f$ în serie Fourier trigonometrică.

b) Să se calculeze $\displaystyle\int_{\pi}^{3\pi} \frac{\cos((2n+1) \cdot x)}{5 - 4\sin x} dx$, $n$ număr natural.

**IV.** a) Să se calculeze transformata Fourier a funcţiei $f_k(x) = e^{-|x|} \cdot x^k$, $k$ număr natural.

b) Calculaţi transformata Fourier, $\hat{g}(\omega)$, a funcţiei $g(x) = e^{-|x|} \cdot \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ în punctul $\omega = 1$.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza naţională, anul II, profil inginerie, 2013-2014

**I.** Să se rezolve: $\quad ty'' - 2y' + ty = -2 \operatorname{ch} t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

**II.** Fie $f: [-\pi; \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\cos x} \cos(\sin x)$. Să se dezvolte funcţia $f$ în serie Fourier trigonometrică.

**III.** Să se calculeze $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{z \sin z + i \sin(\bar{z})}{z^{2n} + a} dz, \quad n \in \mathbb{N}, \quad |a| < 1.$

**IV.** Să se rezolve ecuaţia integrală $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x) \cos(\omega x) dx = \frac{1}{(\omega^2 + a^2)^2}$, $a \in \mathbb{R}, \ \ a \neq 0.$

# Rezolvări

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza locală, anul I, profil mecanic, 2002-2003

**I.** Avem $f(x,y) = \begin{cases} x^2 \cdot e^{-y^2/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \cdot e^{-y^2/x^2} = 0$ şi $f(0,y) = 0$, deci $f$ continuă în punctul $(0,y)$.

b) Avem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{0-0}{y} = 0, \end{cases}$$

deci

$$\alpha(x,y) = \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2 \cdot e^{-\frac{y^2}{x^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Se observă că $|\alpha(x,y)| = \frac{x^2 \cdot e^{-y^2/x^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Deoarece $e^{y^2/x^2} \geq \frac{y^2}{x^2} + 1$ şi $\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1$, rezultă

$$|\alpha(x,y)| = \frac{x^2 \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \left(\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^3 \cdot |x| \leq |x| \to 0,$$

pentru $x \to 0,\ y \to 0$, deci $f$ este diferenţiabilă Frechét în $(0,0)$.

c) Deoarece $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,y) - f(0,y)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \cdot e^{-y^2/x^2}}{x} = 0$, şi similar

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,a) = \lim_{y\to a} \frac{f(0,y) - f(0,a)}{y-a} = \lim_{y\to a} \frac{0-0}{y-a} = 0,$$

deci

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} 2e^{-y^2/x^2}\left(x + \frac{y^2}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} -2y \cdot e^{-y^2/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Dar $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = 0$ şi

$$\lim_{x\to 0} 2e^{-y^2/x^2}\left(x + \frac{y^2}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{2\left(x + \frac{y^2}{x}\right)}{e^{y^2/x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{2\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right)}{e^{y^2/x^2}\cdot \frac{-2y^2}{x^3}} = 2\cdot 0 \cdot \frac{0}{-2y^2} = 0,$$

deci $\frac{\partial f}{\partial x}$ este continuă în $(0,y)$; în concluzie, $\frac{\partial f}{\partial x}$ este continuă peste tot. Analog, avem $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 0$ şi $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} -2y \cdot e^{-y^2/x^2} = -2y \cdot 0 = 0$ deci $\frac{\partial f}{\partial y}$ continuă în $(0,y)$, şi deci continuă peste tot.

d) $g(x,y,z) = f(1, \sqrt{x^2+y^2+z^2}) = f(1,\beta)$, unde am notat $\beta(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Obţinem

$$\text{grad } g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial \beta}\cdot\frac{x}{\beta}, \frac{\partial f}{\partial \beta}\cdot\frac{y}{\beta}, \frac{\partial f}{\partial \beta}\cdot\frac{z}{\beta}\right)$$

deci

$$\langle \text{grad } g, \bar{r}\rangle = x\frac{\partial g}{\partial x} + y\frac{\partial g}{\partial y} + z\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial \beta}\frac{x^2+y^2+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\partial f}{\partial \beta}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{\partial f}{\partial \beta}\beta.$$

**II.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$, $x \in \mathbb{R}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. a) Fie $a_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$. Calculăm raza de convergenţă $\rho$ a seriei. Avem

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(n+1)^\alpha (\ln(n+1))^\beta} n^\alpha (\ln n)^\beta\right| = \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha \left(\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right)^\beta = 1\cdot 1 = 1,\end{aligned}$$

deci raza de convergenţă este $\rho = \frac{1}{1} = 1$.

b) $\beta = 0 \Rightarrow a_n = \frac{1}{n^\alpha}$. Intervalul de convergenţă este $I = (-\rho,\rho) = (-1,1)$.

i) Pentru $x = -1$ avem $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^\alpha} = \begin{cases}\text{convergentă}, & \alpha > 0 \text{ (Leibniz)}\\ \text{divergentă}, & \alpha \le 0 \text{ (crit. de necesitate)}.\end{cases}$

ii) Pentru $x = 1$ avem $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases}\text{convergentă}, & \alpha > 1\\ \text{divergentă}, & \alpha \le 1\end{cases}.$

În concluzie, distingem cazurile:

- dacă $\alpha \le 0$ atunci $M = (-1,1)$;
- dacă $0 < \alpha \le 1$ atunci $M = [-1,1)$;
- dacă $\alpha > 1$ atunci $M = [-1,1]$.

c) Dacă $\alpha = 1$, atunci obţinem $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{(\ln n)^\beta}$, deci $a_n = \dfrac{1}{(\ln n)^\beta}$.
Intervalul de convergenţă este $I = (-1,1)$.

- Pentru $x = -1$, avem $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(\ln n)^\beta} = \begin{cases}\text{convergentă}, & \beta > 0 \text{ (Leibniz)}\\ \text{divergentă}, & \beta \le 0 \text{ (crit. de necesitate)}.\end{cases}$

• Pentru $x = 1$ avem $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^\beta}$ = divergent, $\forall \beta \in \mathbb{R}$, deoarece pentru $\beta < 0$, rezultă $\lim_{n\to\infty} (\ln n)^{-\beta} = \infty \neq 0$ şi $\beta \geq 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(\ln n)^\beta}}{\frac{1}{n}} = \infty \neq 0$ şi conform criteriului de comparaţie, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^\beta}$ are aceeaşi natură cu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$, care este divergentă.

În concluzie, avem cazurile:

• dacă $\beta > 0$ atunci $M = [-1, 1)$;

• dacă $\beta \leq 0$ atunci $M = (-1, 1)$.

d) $\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$, pentru $|x| < 1$; rescriem egalitatea: $\sum_{n\geq 1} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$ şi integrând, obţinem

$$\sum_{n\geq 1} \int_0^x t^{n-1} dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt \Leftrightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x), \quad |x| < 1,$$

deci $f(x) = -\ln(1-x)$, $D_f = (-1, 1)$. Se observă că pentru $x = 1$, $f(1) = \sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă, iar pentru $x = -1$, avem $f(-1) = \sum_{n\geq 1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ convergentă şi domeniul maxim de definiţie este $[-1, 1)$.

**III.** $A = \begin{pmatrix} -\cos t & \sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$. a) Avem

$$\operatorname{Ker} T \neq \{0\} \Leftrightarrow \det A = 0 \Leftrightarrow -a\cos^2 t + \cos t - a \sin^2 t = 0 \Leftrightarrow a = \cos t.$$

b) Pentru $t = \pi$, $a = \cos \pi = -1$ determinăm $\operatorname{Ker} T$; ecuaţia $T(x, y, z) = O_{\mathbb{R}^3}$ se rescrie $\begin{cases} x = 0 \\ -y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$, deci

$$\operatorname{Ker} T = \{(x, y, z) \mid x = 0, y = z\} = \{(0, t, t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((0, 1, 1)).$$

Determinăm $\operatorname{Im} T$. Din egalitatea $T(x, y, z) \equiv (x, -y + z, y - z) = (\alpha, \beta, \gamma)$ rezultă $\gamma = -\beta$; deci

$$\operatorname{Im} T = \{(\alpha, \beta, \gamma) \mid \gamma = -\beta\} = \{(t, s, -s) \mid t, s \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((1, 0, 0), (0, 1, -1)).$$

c) Pentru $a = 1$, $t = \frac{\pi}{2}$ avem $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Polinomul caracteristic al acestei matrice este $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda - 1.$

Rezolvăm ecuaţia caracteristică $P_A(\lambda) = 0$. Fie $g(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda - 1$. Atunci $g'(\lambda) \equiv -3\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \left\{\frac{1\pm\sqrt{7}}{3}\right\}$. Dar $g\left(\frac{1\pm\sqrt{7}}{3}\right) = \frac{-7\pm14\sqrt{7}}{27}$, deci avem tabelul Rolle

| $x$ | $-\infty$ | $\dfrac{1-\sqrt{7}}{3}$ | $\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-\infty$ | $\dfrac{-7-14\sqrt{7}}{27}$ | $\dfrac{-7+14\sqrt{7}}{27}$ | $+\infty$ |

deci $g(\lambda) = 0$ are 3 soluţii reale:

$$\lambda_1 \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{7}}{3}\right),\ \lambda_2 \in \left(\frac{1-\sqrt{7}}{3}, \frac{1+\sqrt{7}}{3}\right),\ \lambda_3 \in \left(\frac{1+\sqrt{7}}{3}, +\infty\right).$$

d) Polinomul caracteristic al matricei $A$ este $P(\lambda) = -(\lambda^2-1)(\lambda-a)$, deci valorile proprii sunt $\{\pm1, a\}$. Distingem două cazuri: (i) dacă $a \in \mathbb{R}\backslash\{\pm1\}$, atunci matricea este diagonalizabilă (valorile proprii fiind distincte, multiplicităţile geometrică şi algebrică ale acestora coincid); (ii) $a \in \{\pm1\}$. În acest caz, pentru valoarea proprie dublă $\lambda = a$, matricea $A - aI_3 = \begin{pmatrix} -\cos t \mp a & \sin t & 0 \\ \sin t & \cos t - a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ are rangul 2 (minorul de ordin doi din cloţul dreapta-jos este nenul), deci multiplicitatea geometrică este 1, mai mică decât cea algebrică (2, valoarea proprie fiind dublă), deci în acest caz $A$ nu este diagonalizabilă. În concluzie, $A$ este diagonalizabilă dacă şi numai dacă $a \in \mathbb{R}\backslash\{\pm1\}$.

e) Pentru $a = 1$, $t = \frac{\pi}{2}$ avem $(A + I_3)^{10} \cdot (A - I_3)^2 + A$. Avem $P_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda + 1$. Folosind teorema Cayley-Hamilton, rezultă $P_A(A) = O_3 \Rightarrow A^3 - A^2 - 2A + I_3 = O_3$, deci $(A + I_3)(A - I_3)^2 = A$ şi, prin urmare, rezultă

$$\begin{aligned}
&(A + I_3)^{10} \cdot (A - I_3)^2 + A = (A + I_3)^9 \cdot A + A = (A + I_3)^{10} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{10} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 9 & 13 & 11 \\ 12 & 19 & 18 \\ 13 & 26 & 32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 13 & 11 \\ 12 & 19 & 18 \\ 13 & 26 & 32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 13 & 11 \\ 12 & 19 & 18 \\ 13 & 26 & 32 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

**IV.** a) $f(\varphi_1(y, z), y, z) = 0$. Derivând în raport cu $x$, obţinem $\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, deci $\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}} \Rightarrow \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(b, c) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)}{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)}$. Analog, rezultă $\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}(a, c) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)}{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)}$, $\frac{\partial \varphi_3}{\partial x}(a, b) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)}{\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)}$, de unde, prin înmulţirea celor trei egalităţi, rezultă relaţia $\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(b, c) \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}(a, c) \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial x}(a, b) = -1$.

b) Avem $F(x,a,b) = x^7 + ax + b$. Verificăm condiţiile teoremei funcţiilor implicite:

$$\begin{cases} F(1,1,-2) = 1+1-2 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x} = 7x^6 + a \Rightarrow \dfrac{\partial F}{\partial x}(1,1,-2) = 7+1 = 8 \neq 0 \\ F \in C^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}). \end{cases}$$

Rezultă că există $U_0 \in \mathcal{V}((1,-2))$ şi $V_0 \in \mathcal{V}(1)$ şi o unică funcţie $\varphi : U_0 \to V_0$ astfel încât

$$\begin{cases} \varphi(1,-2) = 1 \\ F(\varphi(a,b),a,b) = 0,\ \forall (a,b) \in U_0 \\ \varphi \in C^1(U_0,V_0),\ x = \varphi(a,b). \end{cases}$$

c) Din relaţia $F(\varphi(a,b),a,b) = 0$, prin derivare în raport cu $x$ rezultă $\frac{\partial F}{\partial x}(x,a,b) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial a}(a,b) + \frac{\partial F}{\partial a}(x,a,b) = 0$, deci obţinem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial a}(a,b) = \dfrac{-\frac{\partial F}{\partial a}(x,a,b)}{\frac{\partial F}{\partial x}(x,a,b)} = \dfrac{-x}{7x^6+a} = \dfrac{-\varphi(a,b)}{7\varphi^6(a,b)+a} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial b}(a,b) = \dfrac{-\frac{\partial F}{\partial b}(x,a,b)}{\frac{\partial F}{\partial x}(x,a,b)} = \dfrac{-1}{7x^6+a} = \dfrac{-1}{7\varphi^6(a,b)+a}. \end{cases}$$

d) $F(x,1,-2) = 0 \Leftrightarrow x^7 + x - 2 = 0$. Notând $g(x) = x^7 + x - 2$ obţinem $g'(x) = 7x^6 + 1 > 0$, $\forall z \in \mathbb{R}$; $g$ fiind continuă şi strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, rezultă că ecuaţia $g(x) = 0$ are soluţie unică şi se observă că aceasta este $x = 1$.

e) Folosim metoda contracţiei: se observă că ecuaţia se rescrie sub forma $x(x^6 + 0.99) = 2.03$, deci $x = \frac{2.03}{x^6+0.99}$. Atunci funcţia $g : [1.004, 1.008] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{2.03}{x^6+0.99}$ este o contracţie. Prima iteraţie folosind valoarea iniţială $x_0 = 1.004$, este $x_1 = g(x_0) \sim 1.0078$.

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza locală, anul I, profil mecanic, 2003-2004

**I.** a) Funcţia $f(x,y) = \text{arctg}\,(x+y)$ se dezvoltă în serie Taylor în jurul unui punct $(x_0,y_0)$, $f(x,y) = f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0)(x-x_0,y-y_0) + R_f$, unde

$$R_f = \frac{1}{2!} d^2 f(\xi_1,\xi_2)(x-x_0,y-y_0)^2,\ \xi_1 \in (x,x_0),\ \xi_2 \in (y,y_0).$$

Avem $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+(x+y)^2}$, deci

$$df(x_0,y_0)(x-x_0,y-y_0) = \frac{1}{1+(x_0+y_0)^2}(x+y-x_0-y_0),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \cdot \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-2(x+y)}{[1+(x+y)^2]^2},$$

deci
$$d^2f(\xi_1,\xi_2)(x-x_0,y-y_0)^2=\frac{-2(\xi_1+\xi_2)}{[1+(\xi_1+\xi_2)^2]^2}(x+y-x_0-y_0)^2.$$
Atunci, pentru $(x_0,y_0)=(0,0)$, rezultă $f(x,y)=0+x+y+R_f$, unde
$$R_f=\frac{-2(\xi_1+\xi_2)}{[1+(\xi_1+\xi_2)^2]^2}(x+y)^2,\ \xi_1\in(x,0),\ \xi_2\in(y,0)$$
şi deci
$$f(x,y)\simeq x+y\Rightarrow|f(x,y)-x-y|=\frac{2(x+y)^2}{[1+(\xi_1+\xi_2)^2]^2}|\xi_1+\xi_2|\le x^2+y^2,\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

b) $g(x)=\displaystyle\int_0^x\left(\text{arctg }(t)+\frac{1}{1+t^2}\right)dt\Rightarrow g'(x)=\text{ arctg }(x)+\frac{1}{1+x^2}$. Dar $\frac{1}{1+x^2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^{2n}$, deci $\text{arctg }(x)=\displaystyle\int\frac{1}{1+x^2}dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Rezultă
$$g'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(x^{2n}+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)\Rightarrow g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}\right).$$

c) Folosind punctul b), rezultă
$$\begin{aligned}\int_0^1 g(x)dx &=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}\right)dx=\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}+\frac{1}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}\right)=\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+4}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}.\end{aligned}$$
Dar
$$\frac{2n+4}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}<10^{-2}=\frac{1}{100}\Leftrightarrow 100(2n+4)<(2n+1)(2n+2)(2n+3).$$
Inegalitatea este falsă pentru $n=4$ $(1200\not<990)$ şi este adevărată pentru $n=5$ $(1400<11\cdot12\cdot13=2716)$, deci aproximarea corectă se realizează cu primii 5 termeni ai sumei.

**II.** a) Relaţia din enunţ se rescrie
$$x^2+2y^2+z^2-4x+2z+1\Leftrightarrow(x-2)^2+2y^2+(z+1)^2=4,$$
de unde rezultă $(z+1)^2\le4\Leftrightarrow-2\le z+1\le2\Leftrightarrow-3\le z\le1\Leftrightarrow z\in[-3,1]$.

b) Aducem ecuaţia cuadricei la forma canonică (redusă)
$$(x-2)^2+2y^2+(z+1)^2=4\Leftrightarrow\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{y^2}{2}+\frac{(z+1)^2}{4}=1,$$

deci efectuând translaţia de reper $Oxyz \to OXYZ$ dată de relaţiile $\begin{cases} X = x - 2 \\ Y = y \\ Z = z + 1, \end{cases}$
se obţine în noile coordonate ecuaţia redusă $\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{2} + \frac{Z^2}{4} = 1$, ecuaţia unui elipsoid de rotaţie cu axa de rotaţie $OY$.

c) Fie $x + 2y - z + a = 0$ un plan paralel cu $x + 2y - z = 0$. Impunem condiţia ca sistemul ce descrie intersecţia cuadricei cu planul $\begin{cases} (x-2)^2 + 2y^2 + (z+1)^2 = 4 \\ x + 2y - z - a = 0 \end{cases}$
să aibă soluţie unică. Substituim $y = \frac{a+z-x}{2}$ în prima ecuaţie, şi obţinem

$$3z^2 + z(2a - 2x + 4) + 3x^2 - 2ax - 8x + 2 + a^2 = 0.$$

Soluţia $z$ este unică în cazul în care discriminantul ecuaţiei este nul, deci atunci când $8x^2 - 4x(a+5) + 2(a-1)^2 = 0$. Anularea discriminantului conduce la relaţiile:

$$\Delta' = 0 \Leftrightarrow 4(a+5)^2 - 16(a-1)^2 = 0 \Leftrightarrow 3(7-a)(a+1) = 0 \Leftrightarrow a \in \{-1, 7\}.$$

Distingem cazurile:

i) Dacă $a = -1$, atunci $x = \frac{-16}{-16} = 1$; $z = 0,\ y = -1$, deci punctul $(1, -1, 0)$.

ii) Dacă $a = 7$, atunci $x = \frac{-48}{-16} = 3$; $z = \frac{-12}{6} = -2$; $y = 1$, deci punctul $(3, 1, -2)$.

**III.** a) $f_4 \in L(\{f_1, f_2, f_3\})$ d.n.d. există $a, b, c \in \mathbb{R}$, nu toate nule, astfel încât

$$f_4 = af_1 + bf_2 + cf_3 \Leftrightarrow af_1 + bf_2 + cf_3 - 1 = 0,$$

deci curba se află în planul $\pi_1 : ax+by+cz-1 = 0$, care nu trece prin origine, deoarece $O(0,0,0)$ nu satisface ecuaţia planului. Familia $\{f_1, f_2, f_3\}$ este liniar dependentă $\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, nu toate nule, a.î. $\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 = 0$, deci curba se află în planul $\pi_2 : \alpha x + \beta y + \gamma z = 0$, care conţine originea ($O(0,0,0)$ satisface ecuaţia lui $\pi_2$). Deci curba este inclusă în dreapta $\Delta = \pi_1 \cap \pi_2$, aflată la intersecţia celor două plane distincte ($O \in \pi_2 \setminus \pi_1$).

b) Construim un drum parametrizat $\alpha(t)$ care să unească $P$ cu $Q$. O alegere posibilă este segmentul ce uneşte cele două puncte,

$$[PQ] : \ \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1/3}{7/3} = t,\ x \in [2,4],$$

care admite parametrizarea $\alpha(t) = (2t+2, 3t+1, (7t+1)/3),\ t \in [0,1]$. Viteza pe acest segment este $\alpha'(t) = (2, 3, \frac{7}{3})$, iar lungimea sa este

$$l = \int_0^1 \sqrt{2^2 + 3^2 + \left(\frac{7}{3}\right)^2}\, dt = \frac{\sqrt{166}}{3}.$$

*Altfel.* Lungimea $l$ este distanţa dintre punctele $P(2, 1, \frac{1}{3})$ şi $Q(4, 4, \frac{8}{3})$, deci

$$l = d(P, Q) = \sqrt{(4-2)^2 + (4-1)^2 + (\frac{8}{3} - \frac{4}{3})^2} = \frac{\sqrt{166}}{3}.$$

**IV.** a) Se verifică direct că transformarea $f$ este liniară. Prin calcul direct, obţinem

$$\begin{aligned} f(\varphi)(x) &= \int_0^{2\pi} [1+\sin(x-t)]\cdot\varphi(t)dt = \\ &= \int_0^{2\pi}\varphi(t)dt + \int_0^{2\pi}(\sin x\cdot\cos t - \sin t\cdot\cos x)\cdot\varphi(t)dt = \\ &= \underbrace{\int_0^{2\pi}\varphi(t)dt}_{I_1} + \sin x\cdot\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos t\cdot\varphi(t)dt}_{I_2} + \cos x\cdot\underbrace{\left(-\int_0^{2\pi}\sin t\cdot\varphi(t)dt\right)}_{I_3} = \\ &= I_1 + I_2\cdot\sin x + I_3\cdot\cos x,\quad I_1, I_2, I_3\in\mathbb{R}, \end{aligned}$$

deci $\operatorname{Im} f = \{C_1 + C_2\cdot\sin x + C_3\cdot\cos x \mid C_1, C_2, C_3\in\mathbb{R}\}$, şi deci o bază în $\operatorname{Im} f$ este $\{1, \sin x, \cos x\}$.

b) Folosind punctul a), avem $\varphi\in$ Ker $f \Leftrightarrow f(\varphi(x)) = 0, \forall x\in[0,2\pi]$, adică

$$I_1 + I_2\cdot\sin x + I_3\cdot\cos x = 0,\ \forall x\in[0,2\pi] \Leftrightarrow I_1 = 0, I_2 = 0, I_3 = 0,$$

deci

$$\textstyle\int_0^{2\pi}\varphi(t)dt = 0,\ \int_0^{2\pi}\varphi(t)\cdot\cos t dt = 0,\ \int_0^{2\pi}\varphi(t)\cdot\sin t dt = 0.$$

Atunci, folosind dezvoltarea în serie trigonometrică Fourier, rezultă

$$\text{Ker } f = \left\{\varphi\in C[0,2\pi]\ \middle|\ \varphi(t) = \sum_{n=2}^{\infty}(a_n\cos nt + b_n\sin nt), a_n, b_n\in\mathbb{R},\ n\geq 2\right\}.$$

c) Pentru $\lambda = 0$ (valoare proprie), subspaţiul propriu este Ker $T$. Pentru o valoare proprie $\lambda\neq 0$, un vector propriu $\varphi$ asociat valorii proprii satisface relaţiile echivalente: $f(\varphi) = \lambda\varphi \Leftrightarrow \varphi = \frac{1}{\lambda}f(\varphi)$, deci $\varphi\in\operatorname{Im} f \Rightarrow \exists a, b, c\in\mathbb{R}$ nu toate nule, astfel încât

$$\varphi(x) = a + b\sin x + c\cos x,\ \forall x\in[0.2\pi].$$

Atunci egalitatea $f(\varphi) = \lambda\varphi$ se rescrie

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi}(a\cos t + b\sin t\cos t + c\cos^2 t)dt\cdot\sin x + \int_0^{2\pi}(a\sin t + b\sin^2 t + c\sin t\cos t)dt = \\ &= \lambda(a + b\sin x + c\cos x),\ \forall x\in[0,2\pi]. \end{aligned}$$

Identificând în egalitate coeficienţii familiei liniar independente $\{1, \sin x, \cos x\}$, obţinem relaţiile:

$$\begin{cases} \left(at\Big|_0^{2\pi} - b\cos t\Big|_0^{2\pi} + c\sin t\Big|_0^{2\pi}\right) = \lambda a \\ \left(a\sin t\Big|_0^{2\pi} + b\frac{\sin^2 t}{2}\Big|_0^{2\pi} + c\frac{t+\frac{\sin 2t}{2}}{2}\Big|_0^{2\pi}\right) = \lambda b \\ \left(-a\cos t\Big|_0^{2\pi} + b\frac{t-\frac{\sin 2t}{2}}{2}\Big|_0^{2\pi} + c\frac{\sin^2 t}{2}\Big|_0^{2\pi}\right) = \lambda c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi a = \lambda a \\ \pi c = \lambda b \\ \pi b = \lambda c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(\lambda - 2\pi) = 0 \\ \lambda b - \pi c = 0 \\ \lambda c - \pi b = 0. \end{cases}$$

Se disting cazurile:

i) $a = 0$. Subcazuri:

• $b = 0 \Rightarrow \lambda c = 0$. Dar s-a presupus $\lambda \neq 0$ deci $c = 0 \Rightarrow \varphi = 0$, posibil.

• $b \neq 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\pi c}{b}$. Folosind ultima ecuaţie, rezultă

$$c^2 = b^2 \Leftrightarrow c = \pm b \Rightarrow \lambda = \pm\pi.$$

Pentru $\lambda = \pi$ avem

$$b = c \Rightarrow \varphi(t) = b(\cos t + \sin t),\ b \in \mathbb{R},$$

iar $S_{\lambda=\pi}$ admite drept bază vectorul $\{\cos t+\sin t\}$. Pentru $\lambda = -\pi$ avem $b = -c$, deci $\varphi(t) = b(\cos t - \sin t)$, $b \in \mathbb{R}$, iar $S_{\lambda=-\pi}$ admite baza $\{\cos t - \sin t\}$.

• $a \neq 0 \Rightarrow \lambda = 2\pi$. Ultimele două ecuaţii conduc la

$$\begin{cases} 2b = c \\ 2c = b \end{cases} \Leftrightarrow b = c = 0,$$

deci $\varphi(t) = a$, $\forall t \in [0, 2\pi]$, iar $S_{\lambda=2\pi}$ admite baza $\{1\}$.

În concluzie, $f$ admite valorile proprii $\lambda_1 = \pi$, $\lambda_2 = -\pi$, $\lambda_3 = 2\pi$, iar bazele subspaţiilor proprii asociate sunt:

$$B_1 = \{\cos x + \sin x\},\quad B_2 = \{\cos x - \sin x\},\quad B_3 = \{1\}.$$

Se observă că toate cele trei subspaţii proprii sunt incluse in $\operatorname{Im} f = L(\{1, \sin x, \cos x\})$.

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
### Faza locală, anul I, profil mecanic, 2004-2005

**I.** a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{arctg}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Obţinem succesiv:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{arctg}(x^2)}{x^2} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(x^2) - x^2}{x^3} \overset{\frac{0}{0}}{=} \\ &\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x - 2x}{3x^2} = \frac{2}{3}\lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{x(1+x^2)} = 0.\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{\operatorname{arctg}(y^2)}{y^2} - 1}{y} = 0.$$

b) $\alpha(x,y) = \frac{f(x,y)-f(0,0)-0-0}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\frac{arctg(x^2+y^2)}{x^2+y^2}-1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Atunci $\sqrt{x^2+y^2} = t \to 0$ pentru $x \to 0$, $y \to 0$ $(t > 0)$. Deci, folosind un raţionament identic cu cel de la punctul a), $\lim\limits_{x,y\to 0} \alpha(x,y) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\frac{\operatorname{arctg}(t^2)}{t^2} - 1}{t} = 0$, deci $f$ este diferenţiabilă Frechét în $(0,0)$.

c) Pentru $(x,y)\neq(0,0)$, avem $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\frac{1}{1+(x^2+y^2)^2}\cdot 2x\cdot(x^2+y^2)-\text{arctg }(x^2+y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$, deci notând $t=x^2+y^2$, obţinem:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}2x\cdot\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\frac{x^2+y^2}{1+(x^2+y^2)^2}-\text{arctg }(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}2x\cdot\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\frac{\frac{t}{1+t^2}-\text{arctg }t}{t^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}0\cdot\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\frac{\frac{1+t^2-2t^2}{(1+t^2)^2}-\frac{1}{1+t^2}}{2t}=0\cdot\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\frac{-t}{(1+t^2)^2}=0\cdot 0=0=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),$$

deci $\frac{\partial f}{\partial x}$ este continuă în $(0,0)$. Analog, $\frac{\partial f}{\partial y}$ este continuă în $(0,0)$.

d) Fie $h(x)=\text{arctg }x\Rightarrow h'(x)=\frac{1}{1+x^2}$. Dar

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^n,\ |x|<1\Rightarrow\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^{2n},\ |x|<1,$$

iar

$$\text{arctg }x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ |x|<1\Rightarrow\text{arctg }(x^2)=\sum_{n=0}^{\infty}\cdot\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot x^{4n+2},\ |x|<1.$$

Atunci

$$g(x)=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\cdot\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot t^{4n}\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\cdot\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot\left.\frac{t^{4n+1}}{4n+1}\right|_0^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(4n+1)}\cdot x^{4n+1},$$

serie de puteri cu coeficienţii $a_n=\frac{(-1)^n}{(2n+1)(4n+1)}$. Determinăm raza de convergenţă, $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+3)(4n+5)}{(2n+1)(4n+1)}\right|=1$. Intervalul de convergenţă este deci $(-1,1)$. Dacă $x=-1$, atunci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{(2n+1)(4n+1)}$ este convergentă conform criteriului Leibniz. Analog, pentru $x=1$, seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{(2n+1)(4n+1)}$ rezultă convergentă. În concluzie, mulţimea de convergenţă este $[-1,1]$.

e) Avem $g(1)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\cdot\frac{(-1)^n}{(2n+1)(4n+1)}$. Atunci

$$\left|\frac{(-1)^n}{(2n+1)(4n+1)}\right|<10^{-3}\Leftrightarrow(2n+1)(4n+1)>1000\Leftrightarrow 8n^2+6n+1>1000\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8n^2+6n-999>0\Leftrightarrow\quad n\in\mathbb{N}\cap\left(\frac{-3+\sqrt{8001}}{8},\infty\right)\Leftrightarrow n\in\{11,12,...\}.$$

**II.** a) $f(x,y,z)=x^n+y^n+z^n-3xy+z^2-2z$. Aflăm punctele critice ale funcţiei $f$, acestea satisfac sistemul: $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=n\cdot x^{n-1}-3y=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=n\cdot y^{n-1}-3x=0\\ \frac{\partial f}{\partial x}=n\cdot z^{n-1}+2z-2=0\end{cases}$. Distingem cazurile:

i) Dacă $n = 1$, atunci $\begin{cases} 1-3y=0 \Rightarrow y=\frac{1}{3} \\ 1-3x=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3} \\ 2z-1=0 \Rightarrow z=\frac{1}{2} \end{cases}$, deci $A = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ este punct critic. Matricea hessiană în acest punct este $H_f = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, deci

$$d^2f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) = (dx, dy, dz)H_f \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = -6dxdy + 2dz^2,$$

deci $A$ nu este punct de extrem.

ii) Dacă $n = 2$, atunci $\begin{cases} 2x-3y=0 \\ 2y-3x=0 \\ 4z-2=0 \end{cases}$, de unde $B = \left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$ este punct critic, iar matricea hessiană în $B$ este $H_f = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, iar

$$d^2f\left(0, 0, \frac{1}{2}\right) = 2dx^2 + 2dy^2 + 4dz^2 - 6dxdy = 2\left(dx - \frac{3}{2}dy\right)^2 - \frac{5}{2}dy^2 + 4dz^2.$$

Această formă pătratică nu are semn constant, deci $B$ nu este punct de extrem.

iii) Dacă $n = 3$, atunci $\begin{cases} 3x^2-3y=0 \Rightarrow y=x^2 \\ 3y^2-3x=0 \\ 3z^2+2z-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow z \in \left\{\frac{\pm\sqrt{7}-1}{3}\right\} = \{z_{1,2}\}$.

Din primele două ecuaţii rezultă $x^4 - x = 0$, cu soluţiile posibile $x = y = 0$, sau $x = y = 1$. Matricea hessiană este:

$$H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 6x & -3 & 0 \\ -3 & 6y & 0 \\ 0 & 0 & 6z+2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad H_f(0, 0, z_1) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6z_1+2 \end{pmatrix},$$

deunde rezultă $C_1 = (0, 0, z_1)$ nu este punct de extrem. Analog, $C_2 = (0, 0, z_2)$ nu este punct de extrem. Avem $H_f(1, 1, z_1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6z_1+2 \end{pmatrix}$ deci

$$\begin{aligned} d^2f(1, 1, z_1) &= 6dx^2 + 6dy^2 - 6dxdy + (6z_1 + 2)dz = \\ &= (\sqrt{3}dx - \sqrt{3}dy)^2 + 3dx^2 + 3dy^2 + (6z_1 + 2)dz^2 > 0, \end{aligned}$$

deci $C_3 = (1, 1, z_1)$ este punct de minim local. În al patrulea punct $C_4 = (1, 1, z_2)$ avem: $H_f(1, 1, z_2) = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6z_2+2 \end{pmatrix}$, deci

$$d^2f(1, 1, z_2) = 6dx^2 + 6dy^2 - 6dxdy + (6z_2 + 2)dz^2 = 6(dx - \frac{1}{2}dy)^2 + \frac{9}{2}dy^2 + (6z_2 + 2)dz^2.$$

Dar $6z_2+2=-2\sqrt{7}-2+2=-2\sqrt{7}<0$, deci $d^2f(1,1,z_2)$ nu are semn constant şi deci $(1,1,z_2)$ nu este punct de extrem. În concluzie, $n_{\min}=3$.

b) Avem $f(0,0,1)=0$, iar pentru $n=4$,

$$f(x,y,z)=0\Rightarrow x^4+y^4+z^4-3xy+z^2-2z=0. \tag{2}$$

Notăm $z=z(x,y)$ şi derivăm (2) în raport cu $x$. Obţinem:

$$4x^3+4z^3\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-3y+2z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-2\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0, \tag{3}$$

de unde rezultă $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{3y-4x^3}{4z^3+2z-2}$. Derivăm (2) în raport cu $y$ şi obţinem:

$$4y^3+4z^3\cdot\frac{\partial z}{\partial y}-3y+2z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}-2\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0, \tag{4}$$

de unde rezultă $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{3x-4y^3}{4z^3+2z-2}$. Punctele critice ale funcţiei $z(x,y)$ se obţin rezolvând sistemul:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3y-4x^3=0\\ 3x-4y^3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{4x}{3}\\[2mm] 3x-\dfrac{256x^9}{27}=0.\end{cases}$$

Din a doua ecuaţie obţinem: $x\left(3-\frac{256x^8}{27}\right)=0\Leftrightarrow x\in\left\{0,\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$. Punctele staţionare sunt deci: $(0,0)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

c) Derivăm (3) în raport cu $x$ şi obţinem

$$12x^2+12z^2\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+4z^3\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2z\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,$$

deci $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{-12x^2-12z^2\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-2\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}{4z^3+2z-2}$. Derivăm (3) în raport cu $y$ şi obţinem

$$12z^2\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+4z^3\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-3+2\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+2z\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,$$

deci $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{3-2\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}(6z^2+1)}{4z^3+2z-2}$. Derivăm (4) în raport cu $y$; rezultă

$$12y^2+12z^2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+4z^3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+2z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

deci $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{-12y^2-2\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2(6z^2+1)}{4z^3+2z-2}$. Atunci $d^2z(0,0)=0\cdot dx^2+0\cdot dy^2+2\cdot\frac{3}{4}dxdy=\frac{3}{2}dxdy$, şi deci $(0,0)$ nu este punct de extrem pentru $z(x,y)$.

**III.** a) Matricea $A=\frac{1}{2}(B+B^t)$ este simetrică, deci toate rădăcinile polinomului caracteristic sunt reale. Fie $\lambda$ o valoare proprie pentru $A$. Atunci $Ax=\lambda x$ şi deci $Q(x)=X^tAX=\lambda X^tX\geq 0\Leftrightarrow\lambda\geq 0$.

b) Pentru $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -5 \\ 1 & 8 & 1 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, rezultă $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 8 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Polinomul caracteristic al matricii $A$ este $\det(A - \lambda I_3) = -\lambda(\lambda - 9)^2 = 0$, deci $\lambda_1 = 9$ ($\mu_{\lambda_1} = 2$) şi $\lambda_2 = 0$ ($\mu_{\lambda_2} = 1$). Determinăm subspaţiile proprii asociate valorilor proprii. Pentru $\lambda_1 = 9$, sistemul caracteristic asociat este

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 2y - 4z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ -4x + 2y - 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b = 2a + 2c,\ a, c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (a, b, c) = (a, 2a + 2c, c) = c(0, 2, 1) + a(1, 2, 0),\quad a, c \in \mathbb{R}.$$

Alegem vectorii proprii liniar independenţi $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Pentru $\lambda_2 = 0$, avem

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 8 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a + 2b - 4c = 0 \\ a + 4b + c = 0 \\ -4a + 2b + 5c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = c = -2b,\quad b \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (a, b, c) = (-2b, b, -2b) = b(-2, 1, -2),\ b \in \mathbb{R}.$$

Alegem vectorul propriu $v_3 = (-2, 1, -2)^t$. S-a obţinut astfel baza diagonalizatoare a matricei $A$ dată de $B = \{v_1, v_2, v_3\}$, a cărei matrice modală (matricea de schimbare la baza diagonalizatoare) este $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, iar $D = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ este matricea diagonală.

c) Ortogonalizăm baza primului subspaţiu propriu, apoi normăm reuniunea bazelor celor două subspaţii. Obţinem: $v_1{}' = \frac{v_1}{||v_1||} = \left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^t$ şi

$$\tilde{v}_2 = v_2 - \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} \cdot v_1 = (1, 2, 0)^t - \frac{4}{5} \cdot (0, 2, 1)^t = \left(1, \frac{2}{5}, \frac{-4}{5}\right)^t \parallel (5, 3, 4)^t,$$

deci

$$v_2{}' = \frac{1}{||\tilde{v}_2||} \tilde{v}_2 = \left(\frac{5}{9\sqrt{5}}, \frac{2}{9\sqrt{5}}, \frac{-4}{9\sqrt{5}}\right)^t,\quad v_3{}' = \frac{v_3}{||v_3||} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)^t.$$

Baza cerută este $B' = \{v_1{}', v_2{}', v_3{}'\}$, iar matricea modală este $C' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{9\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{9\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-4}{9\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

d) Avem

$$\Sigma:\ (x,y,z)\begin{pmatrix}5 & 2 & -4\\ 2 & 8 & 2\\ -4 & 2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}+\underbrace{(10,4,8)}_{A_1}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}-22=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x^2+8y^2+5z^2+4xy-8xz+4yz+10x+4y-8z-22=0.$$

Cuadrica este degenerată fără centru de simetrie, deoarece $\det\begin{pmatrix}A & A_1^t\\ A_1 & -22\end{pmatrix}=0$ şi $\det A=0$). Pentru a afla ecuaţia redusă a acesteia aplicăm metoda valorilor proprii. Efectuăm schimbarea de coordonate (rotaţia de reper $Oxyz\to Ox'y'z'$ de matrice $C'$) $X=C'X'\Leftrightarrow\begin{cases}x=5y'/9\sqrt{5}-2z'/3\\ y=2x'/\sqrt{5}+2y'/9\sqrt{5}+z'/3\\ z=x'/\sqrt{5}-4y'/9\sqrt{5}-2z'/3\end{cases}$, unde $X=(x,y,z)^t$, $X'=(x',y',z')^t$, iar $C'$ este matricea de la punctul $c$. Înlocuind $X$ în $\Sigma$, se obţine $\Sigma$: $y'^2+4\sqrt{5}y'+9x'^2-22=0$, care prin restrângerea pătratului în $y'$ devine: $9x'^2+(y'+2\sqrt{5})^2=42$. În urma translaţiei de reper $Ox'y'z'\to O''x''y''z''$ dată de relaţiile $\begin{cases}x''=x'\\ y''=y'+2\sqrt{5}\\ z''=z'\end{cases}$, ecuaţia cuadricei devine $\frac{9x''^2}{42/9}+\frac{y''^2}{42}=1$, deci se obţine un cilindru eliptic cu generatoarele paralele cu $O''z''$.

**IV.** a) $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1\cos\theta+x_3\sin\theta-1,x_2+1,-x_1\sin\theta+x_3\cos\theta-1)$. Avem

$$\begin{aligned}&\|f(x)-f(y)\|_2=\\ &\quad=\|(x_1-y_1)\cos\theta+(x_3-y_3)\sin\theta,x_2-y_2,-(x_1-y_1)\sin\theta+(x_3-y_3)\cos\theta\|_2=\\ &\quad=\sqrt{(x_1-y_1)^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}=\\ &\quad=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}=||x-y||_2.\end{aligned}$$

b) Obţinem

$$\begin{aligned}f(x)&=(x_1\cos\theta+x_3\sin\theta-1,x_2+1,-x_1\sin\theta+x_3\cos\theta-1)=\\ &=(x_1\cos\theta+x_3\sin\theta,x_2,-x_1\sin\theta+x_3\cos\theta)+(-1,1,-1),\end{aligned}$$

deci $f(x)^t=R(x_1,x_2,x_3)^t+V$, unde $R=\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}$ iar $V=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$.

c) Polinomul caracteristic asociat matricei $R$ este

$$P(\lambda)=\det(R-\lambda I_3)=\begin{vmatrix}\cos\theta-\lambda & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1-\lambda & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda\cos\theta+1).$$

Deci $P(\lambda)=0\Leftrightarrow\lambda\in\{1,e^{\pm i\theta}\}$. Determinăm subspaţiile proprii pentru complexificata

$R^{\mathbb{C}}$ a transformării $R$. Pentru $\lambda_1 = 1$ obţinem sistemul caracteristic

$$\begin{pmatrix} \cos\theta - 1 & 0 & \sin\theta \\ 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (\cos\theta - 1)\, a + c\sin\theta = 0 \\ -a\sin\theta + c\,(\cos\theta - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = c = 0;\ b \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (a, b, c) = (0, b, 0) = b(0, 1, 0),\ b \in \mathbb{R}.$$

Alegem vectorul propriu generator $v_1 = (0, 1, 0)^t$. Pentru $\lambda_2 = \cos\theta + i\sin\theta$, avem

$$\begin{pmatrix} -i\sin\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 - e^{i\theta} & 0 \\ -\sin\theta & 0 & -i\sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (a, b, c) = (a, 0, ia) = a(1, 0, i),\ a \in \mathbb{R}.$$

Alegem $v_2 = (1, 0, i)^t$ vector propriu. Pentru $\lambda_3 = \bar{\lambda}_2 = \cos\theta - i\sin\theta$, alegem vectorul propriu $v_3 = \bar{v}_2 = (1, 0, -i)^t$. S-a obţinut baza $B_{\mathbb{C}^3} = \{v_1, v_2, v_3\}$ a spaţiului $\mathbb{C}^3$, formată din vectori proprii ai endomorfismului $R^{\mathbb{C}}$ (complexificata transformării liniare $R$). Se observă însă că $R$ este transformare liniară reală, endomorfism al spaţiului vectorial real $\mathbb{R}^3$. Distingem următoarele cazuri:

- Pentru $\theta \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $R$ admite o singură valoare proprie $\lambda_1 = 1$ cu vectorul propriu generator al subspaţiului propriu asociat $v_1 = (0, 1, 0)^t$.
- Pentru $\theta \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, avem $R = I_3$, iar $\lambda_1 = 1$ este singura valoare proprie (triplă, $\mu_1 = 3$); $\mathbb{R}^3$ este subspaţiul propriu asociat, o bază a acestuia fiind cea canonică, $\{e_1, e_2, e_3\}$.
- Pentru $\theta \in \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, avem $R = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, iar valorilor proprii $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = -1$ le corespund respectiv vectorii proprii generatori

$$w_1 = (0, 1, 0)^t, w_2 = Re(v_1) = (1, 0, 0)^t, w_3 = \text{ Im }(v_1) = (0, 0, 1)^t.$$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza locală, anul I, profilele electric şi mecanic(baraj), 2004-2005

**I.** a) Fie $\lambda$ valoare proprie pentru $A$. Atunci

$$AX = \lambda X \Rightarrow ||AX|| = |\lambda| \cdot ||X|| \Rightarrow |\lambda| = \frac{||AX||}{||X||} \leq \frac{||A|| \cdot ||X||}{||X||} = ||A||.$$

Alegem $||A|| = ||A||_\infty = \max\limits_i \left\{ \sum\limits_{j=1}^{4} |a_{ij}| \right\} = \max\{11, 17, 23, 23\} = 23$, şi obţinem $|\lambda| \leq 23$.

b) $A$ este autoadjunctă. (evident)

c) $A$ este pozitiv definită deoarece: $\Delta_1 = 6 > 0$ şi

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 50 > 0,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 2 & 9 & 5 \\ -3 & 5 & 13 \end{vmatrix} = 369 > 0,\ \Delta_4 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 9 & 5 & 1 \\ -3 & 5 & 13 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 20 \end{vmatrix} > 0.$$

**II.** a) Polinomul caracteristic al matricii $A$ este

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I_n) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n-1} & a_n-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix} = (-1)^n\lambda^n + \Delta_n.\end{aligned}$$

Dezvoltând determinantul după ultima coloană, obţinem

$$\begin{aligned}\Delta_n &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix} = \\ &= (-1)^{2n-1}\cdot 1 \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{vmatrix} + (-1)^{2n}a_n \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{vmatrix},\end{aligned}$$

deci $\Delta_n = -\Delta_{n-1} + a_n(-1)^{n-1}\lambda^{n-1}$. Rezultă relaţiile

$$\begin{cases} \Delta_n = -\Delta_{n-1} + a_n(-1)^{n-1}\lambda^{n-1} \\ \Delta_{n-1} = -\Delta_{n-2} + a_{n-1}(-1)^{n-2}\lambda^{n-2} \\ \dots \\ \Delta_3 = -\Delta_2 + a_3(-1)^2\lambda^2. \end{cases}$$

Amplificând $\Delta_k$ cu $(-1)^{n-k}$, $(k = \overline{3,n})$ şi sumând, rezultă

$$\Delta_n = (-1)^{n-2}\Delta_2 + (-1)^{n-1}(a_n\lambda^{n-1} + a_{n-1}\lambda^{n-2} + \dots + a_3\lambda^2).$$

De asemenea, avem $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = -\lambda a_2 + a_1$, deci

$$\det(A-\lambda I_n) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}a_n\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1}a_3\lambda^2 + (-1)^{n-1}a_2\lambda^2 + (-1)^{n-2}a_1.$$

Prin urmare,

$$\det(A-\lambda I_n) = 0 \Leftrightarrow \lambda^n + a_n\lambda^{n-1} + \dots + a_3\lambda^2 + a_2\lambda^2 + a_1 = 0.$$

Notând rădăcinile polinomului cu $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, multiplicităţile acestora satisfac relaţia $(\mu_{\lambda_1} + \mu_{\lambda_2} + \cdots + \mu_{\lambda_p} = n)$. Pentru $\lambda = \lambda_i$ obţinem sistemul caracteristic

$$\begin{pmatrix} -\lambda_i & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda_i & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n-1} & a_n - \lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_2 = \lambda_i \alpha_1 \\ \alpha_3 = \lambda_i^2 \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n = \lambda_i^{n-1}\alpha_1 \\ a_1\alpha_1 + a_2\lambda_i\alpha_2 + \cdots + a_{n-1}\lambda_i^{n-2}\alpha_{n-1} + (a_n - \lambda_i)\lambda_i^{n-1}\alpha_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1(a_1 + a_2\lambda_i + \cdots + a_{n-1}\lambda_i^{n-2} + (a_n - \lambda_i)\lambda_i^{n-1}) = 0.$$

Notând $A_i = (a_1 + a_2\lambda_i + \dots)$, sistemul are soluţii doar dacă $A_i = 0$. Subspaţiul propriu asociat valorii proprii $\lambda_i$ este

$$S_{\lambda_i} = \{(a, \lambda_i a, \lambda_i^2 a, \dots, \lambda_i^{n-1} a) \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

b) Polinomul caracteristic este: $\lambda^3 - a_3\lambda^2 - a_2\lambda + a_1 = 0$. Relaţiile lui Viétè conduc la rezultatul dorit:

$$\begin{cases} a_3 & = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + 1 + 4 = 6 \\ -a_2 & = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = 1 + 4 + 4 = 9 \\ -a_1 & = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow a_1 = -4 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -9 & 6 \end{pmatrix}.$$

**III.** Derivata funcţiei $F$ are forma

$$\begin{aligned} F'(y) &= \frac{\ln[1 + (a+y)^2y^2]}{y^2} - \frac{\ln[1 + (a-y)^2y^2]}{y^2} + \int_{a-y}^{a+y} \frac{1}{1 + x^2y^2}\frac{2x^2y}{x^2}\,dx = \\ &= \frac{\ln\left(\frac{1+(a+y)^2y^2}{1+(a-y)^2y^2}\right)}{y^2} + \int_{a-y}^{a+y} \frac{2y}{1 + x^2y^2}\,dx = \frac{\ln\left(\frac{1+(a+y)^2y^2}{1+(a-y)^2y^2}\right)}{y^2} + 2\,\mathrm{arctg}\,(xy)\Big|_{x=a-y}^{x=a+y} = \\ &= \frac{\ln\left(\frac{1+(a+y)^2y^2}{1+(a-y)^2y^2}\right)}{y^2} + 2\,\mathrm{arctg}\,(ay + y^2) - 2\,\mathrm{arctg}\,(ay - y^2). \end{aligned}$$

**IV.** Curba de intersecţie este:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -(x + y) \\ x^2 + y^2 + xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x + \frac{y}{2})^2}{3} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \\ x + y + z = 0, \end{cases}$$

deci avem un cilindru eliptic cu generatoarele paralele cu axa $Oz$ intersectat cu un plan oblic (vectorul normal $\bar{n} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k} \not\parallel \bar{k}$), prin urmare o elipsă. O parametrizare a acestei elipse este: $\begin{cases} y = 2\sin t \\ x = \sqrt{3}\cos t - \sin t \\ z = -\sqrt{3}\cos t - \sin t \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$, deci $\alpha(t) = (\sqrt{3}\cos t - \sin t,$ $2\sin t, -\sqrt{3}\cos t - \sin t)$ şi obţinem succesiv

$$\begin{cases} \alpha'(t) = (-\sqrt{3}\sin t - \cos t, -2\cos t, \sqrt{3}\sin t - \cos t), \\ \alpha''(t) = (-\sqrt{3}\cos t + \sin t, -2\sin t, \sqrt{3}\cos t + \sin t), \\ \overline{\alpha'} \times \overline{\alpha''} = 2\sqrt{3}\bar{\imath} + 2\sqrt{3}\bar{\jmath} + 2\sqrt{3}\bar{k}, \end{cases}$$

iar elementele Frenet sunt: (i) versorii Frenet

$$\begin{cases} \bar{T} &= \dfrac{\bar{\alpha}'}{||\bar{\alpha}'||} = \dfrac{\bar{\alpha}}{\sqrt{6}} = \dfrac{-1}{\sqrt{6}}(\sqrt{3}\sin t + \cos t)\bar{\imath} + \dfrac{2}{\sqrt{6}}\cos t\bar{\jmath} + \dfrac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{3}\sin t - \cos t)\bar{k}, \\ \bar{B} &= \frac{\bar{\alpha}'\times\bar{\alpha}''}{||\bar{\alpha}'\times\bar{\alpha}''||} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(\bar{\imath} + \bar{\jmath} + \bar{k}), \\ \bar{N} &= \bar{B} \times \bar{T} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(\sin t - \sqrt{3}\cos t)\bar{\imath} - \dfrac{2}{\sqrt{6}}\sin t\bar{\jmath} + \dfrac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{3}\cos t + \sin t)\bar{k}. \end{cases}$$

şi (ii) curbura $k = \frac{||\bar{\alpha}'\times\bar{\alpha}''||}{\bar{\alpha}'} = \frac{6}{(\sqrt{6})^3} = \frac{1}{\sqrt{6}}$ şi torsiunea $\tau = 0$ (care se obţine prin calcul direct, sau observând că $\alpha$ este curbă plană inclusă în planul $x + y + z = 0$). Formulele Frenet se scriu

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{T}}{dt} = kv\bar{N} = \sqrt{6}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{6}}\bar{N} = \bar{N} \\ \dfrac{d\bar{N}}{dt} = -kv\bar{T} + \tau v\bar{B} = -\bar{T} \\ \dfrac{d\bar{B}}{dt} = \tau v\bar{N} = 0, \end{cases}$$

unde $v = ||\bar{\alpha}'|| = \sqrt{6}$. Căutăm valoarea parametrului $t$ asociată punctului $A$. Din relaţia

$$(1, 1, -2) = (\sqrt{3}\cos t - \sin t, 2\sin t, -\sqrt{3}\cos t - \sin t),$$

rezultă $\begin{cases} \sin t = 1/2 \\ \cos t = \sqrt{3}/2 \end{cases}$, deci $t = \frac{\pi}{6}$. Atunci în acest punct avem elementele Frenet: $\left\{\bar{T}_A = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}\bar{\imath} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\bar{\jmath},\ \bar{N}_A = \dfrac{-1}{\sqrt{6}}\bar{\imath} - \dfrac{1}{\sqrt{6}}\bar{\jmath} + \dfrac{2}{\sqrt{6}}\bar{k},\ \bar{B}_A = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(\bar{\imath} + \bar{\jmath} + \bar{k})\right\}$, $k_A = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$, $\tau_A = 0$.

**V.** $S(x) = 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x^2)^n}{n+1}$. Dar pentru $|x| < 1$ şi $|t| \in [0, |x|]$ avem $\dfrac{1}{1+t} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n$, de unde prin integrare obţinem

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} = x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n+1},$$

deci $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n+1}$, $|x|<1$. Substituind $x \to x^2$, rezultă

$$\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{n+1} = 1 + S(x) \Rightarrow S(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} - 1,$$

Atunci, integrând prin părţi, obţinem:

$$\begin{aligned}\int_1^x S(t)\,dt &= \int_1^x \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}\,dt - x + 1 = -\frac{1}{t}\ln(t^2+1)\Big|_1^x + \int_1^x \frac{1}{t}\frac{1}{t^2+1}2t\,dt - x + 1 = \\ &= -\tfrac{1}{x}\ln(x^2+1) + \ln 2 + 2\,\mathrm{arctg}\,t\Big|_1^x - x + 1 = \\ &= -\tfrac{1}{x}\ln(x^2+1) + \ln 2 + 2\,\mathrm{arctg}\,x - \tfrac{\pi}{2} - x + 1.\end{aligned}$$

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
### Faza locală, anul I, profil mecanic, 2005-2006

**I.** a) Notând $x^2+y^2=t$, rezultă $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{\frac{1}{t}}{e^{\frac{1}{t}}}$. Efectuând substituţia $z=\frac{1}{t}$, rezultă $\displaystyle\lim_{z\to\infty}\frac{z}{e^z} = 0 = f(0,0)$, deci $f$ este continuă în $(0,0)$.

b) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^2\cdot x}$. Fie $t=\frac{1}{x}$, rezultă $\displaystyle\lim_{t\to\infty} e^{-t^2}\cdot t^3 = \lim_{t\to\infty}\frac{t^3}{e^{t^2}} = 0$. Analog se obţine $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

c) Pentru $(x,y)\neq(0,0)$, avem

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\cdot 2x\cdot\left(x^2+y^2\right) - e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}\cdot 2x\left(\frac{1}{x^2+y^2}-1\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

deci

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases}\frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}\cdot 2x\left(\frac{1}{x^2+y^2}-1\right)}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Analog,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases}\frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}\cdot 2y\left(\frac{1}{x^2+y^2}-1\right)}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Notând $t=\frac{1}{x^2+y^2}$, rezultă

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\partial f}{\partial x} &= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}\cdot 2x\left(\frac{1}{x^2+y^2}-1\right)}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}2x\cdot\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}\cdot\left(\frac{1}{x^2+y^2}-1\right)}{(x^2+y^2)^2} = \\ &= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}2x\cdot\lim_{t\to\infty}e^{-t}(t-1)\cdot t^2 = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}2x\cdot\lim_{t\to\infty}\frac{t^2(t-1)}{e^t} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0),\end{aligned}$$

deci $\frac{\partial f}{\partial x}$ continuă în $(0,0)$. Analog se demonstrează că $\frac{\partial f}{\partial y}$ continuă în $(0,0)$. Fie

$$\alpha(x,y) = \frac{f(x,y) - f(0,0) - 0\cdot x - 0 \cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Avem $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \alpha(x,y) = \lim\limits_{t\to\infty} e^{-t}\cdot t\sqrt{t} = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{t\sqrt{t}}{e^t} = 0$, deci $f$ este diferenţiabilă Frechét în $(0,0)$.

d) $e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\cdot z^n$, deci înlocuind $z \to \frac{1}{x^2}$, rezultă $e^{1/x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{x^{2n}}$, pentru $x \neq 0$. Atunci $\frac{e^{1/x^2}}{x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{x^{2n+2}}$ şi deci $\int_1^{\infty}\frac{e^{1/x^2}}{x^2}dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\int_1^{\infty}\frac{1}{x^{2n+2}}dx$, de unde rezultă

$$\int_1^{\infty}\frac{e^{1/x^2}}{x^2}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\left.\frac{x^{-2n-1}}{-2n-1}\right|_1^{\infty} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,(2n+1)}.$$

**II.** a) $f(x) = \text{arctg }(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^{2n} \Rightarrow f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C$, iar $f(0)=0 \Rightarrow C=0$, deci $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $x\in(-1,1)$.

b) Pentru $x\to 1$ în egalitatea de la punctul a), obţinem $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = f(1) = \text{arctg }(1) = \frac{\pi}{4}$.

c) $f(x,y) = \cos x + y^2 - 2y + 5$. Punctele critice ale lui $f$ se obţin rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -\sin x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Leftrightarrow x \in \{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\} \\ y = 1, \end{cases}$$

deci punctele critice sunt $\{(k\pi,1) \mid k\in\mathbb{Z}\}$. Matricea hessiană $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\cos x & 0 \\ 0 & 2\end{pmatrix}$ calculată în aceste puncte este $H_f(k\pi,1) = \begin{pmatrix}(-1)^{k+1} & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ şi conduce la forma pătratică $d^2f(k\pi,1) = (-1)^{k+1}\cdot dx^2 + 2dy^2$. Distingem două cazuri. Dacă $k$ este par, atunci $d^2f(k\pi,1) = -dx^2+2dy^2$, deci $(k\pi,1)$ nu este punct de extrem. Dacă $k$ este impar, atunci $d^2f(k\pi,1) = dx^2+2dy^2 > 0$, deci $(k\pi,1)$ este punct de minim local. În concluzie, $f$ admite punctele de minim local $\{((2m+1)\pi,1) \mid m\in\mathbb{Z}\}$.

**III.** a) Matricea diagonală asociată lui $A$ este $D = \left(\begin{smallmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{smallmatrix}\right)$, iar matricea modală (de schimbare de bază) este $C = \left(\begin{smallmatrix}1&1&1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{smallmatrix}\right)$. Au loc relaţiile

$$D = C^{-1}AC \Leftrightarrow A = CDC^{-1} \Rightarrow \det A = \det C\cdot\det D\cdot\det C^{-1} = 0.$$

b) Cei trei vectori proprii ai matricei $A$ formează o bază în spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3$, deci $A$ este diagonalizabilă.

c) Folosind egalitatea $A = CDC^{-1}$, obţinem:

$$A^3 = (CDC^{-1})^3 = CD^3C^{-1} = C \cdot (3D^2)C^{-1} = 3CD^2C^{-1} = 3(CDC^{-1})^2 = 3A^2,$$

deci $A^3 = 3A^2$.

*Metoda 2.* Polinomul caracteristic asociat lui $A$ este

$$P(\lambda) = -(\lambda - 0)^2(\lambda - 3) = -\lambda^2(\lambda - 3) = 3\lambda^2 - \lambda^3.$$

Conform teoremei Cayley-Hamilton, avem $3A^2 - A^3 = O_3 \Leftrightarrow A^3 = 3A^2$.

**IV.** a) Obţinem succesiv $\overline{AB} = -2\bar{i} - 3\bar{j} - 2\bar{k}$, $\overline{AC} = (u-1)\,\bar{i} + (v-1)\,\bar{j} + uv\bar{k}$,

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & -3 & -2 \\ u-1 & v-1 & uv \end{vmatrix} = \bar{i}\,(-3uv + 2v - 2) - \bar{j}\,(-2uv + 2u - 2) + \bar{k}\,(-2v + 3u - 1)\,.$$

b) $A_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} \cdot \left\|\overline{OA} \times \overline{OB}\right\|$, iar $\overline{OA} \times \overline{OB} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \bar{i} - \bar{k}$, deci

$$\left\|\overline{OA} \times \overline{OB}\right\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \Rightarrow A_{\Delta AOB} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

c) Eliminând parametrii $u$ şi $v$ din ecuaţiile parametrice, obţinem $\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 1 + uv, \end{cases}$ deci rezultă ecuaţia carteziană $z = 1 + xy$. Efectuăm rotaţia $Oxyz \to Ox'y'z'$ de axă $Oz = Oz'$ şi unghi $\pi/4$, dată de relaţiile $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \\ z = z' \end{cases}$, iar ecuaţia cuadricei devine $z' = 1 + \frac{x'^2 - y'^2}{2}$. Translatând originea în punctul $O''(0,0,1)$, deci efectuând translaţia de reper dată de relaţiile $\begin{cases} x' = x'' \\ y' = y'' \\ z' = z'' + 1 \end{cases}$, ecuaţia cuadricei relativ la reperul roto-translatat $O''x''y''z''$ este $2z'' = x''^2 - y''^2$ deci cuadrica este o şea (paraboloid hiperbolic).

d) Folosind punctul a), condiţia de coliniaritate $\overline{AB} \times \overline{AC} = \bar{0}$, revine la relaţiile

$$\begin{cases} -3uv + 2v - 2 = 0 \\ -2uv + 2u - 2 = 0 \\ -2v + 3u - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3uv - 2v + 2 = 0 \\ 2u - 2 = 0 \\ 3u - 2v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 1 \\ uv = 0, \end{cases}$$

sistem incompatibil, deci nu există $u, v \in \mathbb{R}$ a.î. $A$, $B$, $C$ să fie coliniare.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza locală, anul I, profil mecanic, 2006-2007

**I.** a) Avem $f(x,y) = \begin{cases} y^2 \cdot \sin\left(\frac{x^2}{y^2}\right) & y \neq 0; \\ 0, & y = 0 \end{cases}$. Atunci

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,0) = \lim_{x \to a} \frac{f(x,0) - f(a,0)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{0-0}{x-a} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(a,y) - f(a,0)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{y^2 \cdot \sin(\frac{a^2}{y^2})}{y} = \lim_{y \to 0} y \cdot \sin(\frac{a^2}{y^2}) = 0.$$

b) Au loc egalităţile $\alpha(x,y) = \frac{f(x,y)-f(a,0)-0(x-a)-0\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y^2 \cdot \sin(\frac{x^2}{y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Dar pentru $y \to 0, x \to a$ avem $|\alpha(x,y)| = \frac{y^2 \cdot |\sin(\frac{x^2}{y^2})|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq |y| \cdot \left|\sin\left(\frac{x^2}{y^2}\right)\right| \to 0$, deci $f$ este diferenţiabilă Fréchet în $(a,0)$.

c) Avem $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 \cdot \cos\left(\frac{x^2}{y^2}\right) \cdot \frac{2x}{y^2} = 2x \cdot \cos\left(\frac{x^2}{y^2}\right)$, $y \neq 0$;

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \cdot \sin\left(\frac{x^2}{y^2}\right) + y^2 \cdot \cos\left(\frac{x^2}{y^2}\right) \cdot \left(-\frac{2x^2}{y^3}\right) = 2y \cdot \sin\left(\frac{x^2}{y^2}\right) - 2\frac{x^2}{y} \cdot \cos\left(\frac{x^2}{y^2}\right), \quad y \neq 0.$$

Dar limita $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to 0}} 2x \cdot \cos\left(\frac{x^2}{y^2}\right)$ nu există, deci $\frac{\partial f}{\partial x}$ nu este continuă în $(a,0)$. Doarece $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to 0}} 2y \cdot \sin\left(\frac{x^2}{y^2}\right) - 2\frac{x^2}{y} \cdot \cos\left(\frac{x^2}{y^2}\right)$ nu există, rezultă că $\frac{\partial f}{\partial y}$ nu este continuă în $(a,0)$.

**II.** a) $f(x,y,z) = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x+y+z)$. Obţinem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \cos x - \cos(x+y+z) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \cos y - \cos(x+y+z) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = \cos z - \cos(x+y+z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \cos x = \cos y = \cos z = \cos(x+y+z).$$

Dar funcţia cosinus este injectivă pe $(0,\pi) \Rightarrow x = y = z$. Avem

$$\cos x = \cos 3x \Rightarrow \cos x = 4\cos^3 x - 3\cos x \Rightarrow 4\cos x(\cos^2 x - 1) = 0$$

de unde rezultă variantele i) $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$; ii) $\cos x = 1 \Rightarrow$ imposibil; iii) $\cos x = -1 \Rightarrow$ imposibil. Deci singurul punct critic din $D_f$ este $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Avem

$$H_f = \begin{pmatrix} -\sin x + \sin(x+y+z) & \sin(x+y+z) & \sin(x+y+z) \\ \sin(x+y+z) & -\sin y + \sin(x+y+z) & \sin(x+y+z) \\ \sin(x+y+z) & \sin(x+y+z) & -\sin z + \sin(x+y+z) \end{pmatrix},$$

deci $H_f(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Dar $\begin{cases} \Delta_1 = -2 < 0 \\ \Delta_2 = 3 > 0 \\ \Delta_3 = -4 < 0 \end{cases}$, deci $(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ este punct de maxim local.

b) Avem $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n(n+1)})}{\cos(\frac{1}{n}) \cdot \cos\frac{1}{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})}{\cos\frac{1}{n} \cdot \cos\frac{1}{n+1}}$, deci

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{1}{n} \cdot \cos\frac{1}{n+1} - \cos\frac{1}{n} \cdot \sin\frac{1}{n+1}}{\cos\frac{1}{n} \cdot \cos\frac{1}{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\frac{1}{n} - \operatorname{tg}\frac{1}{n+1}.$$

Fie

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \left( \operatorname{tg}\frac{1}{k} - \operatorname{tg}\frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^{n} \left( \operatorname{tg}\frac{1}{k} \right) - \sum_{k=1}^{n} \left( \operatorname{tg}\frac{1}{k+1} \right) = \operatorname{tg} 1 - \operatorname{tg}\left( \frac{1}{n+1} \right).$$

Atunci $S = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left( \operatorname{tg} 1 - \operatorname{tg}\left( \frac{1}{n+1} \right) \right) = \operatorname{tg} 1.$

**III.** a) $\begin{cases} M = (1,1,1), \ \ N = (1,2,2) \\ P = (2,3,2), \ \ Q = (3,2,1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{MN} = 0\overline{i} + 1\overline{j} + 1\overline{k} = \overline{j} + \overline{k} \\ \overline{MP} = 1\overline{i} + 2\overline{j} + 1\overline{k} = \overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k} \\ \overline{MQ} = 2\overline{i} + 1\overline{j} + 0\overline{k} = 2\overline{i} + 2\overline{j}, \end{cases}$

deci

$$V_{MNPQ} = \frac{1}{6}|\langle \overline{MN}, \overline{MP} \times \overline{MQ} \rangle| = \frac{1}{6}| \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} | = \frac{1}{6}|(1+2-4)| = \frac{1}{6}.$$

b) $f(x,y,z) = y + 2xz = 1$. Obţinem $\frac{\partial f}{\partial x} = 2z$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$; $\frac{\partial f}{\partial z} = 2x$, deci

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,3,1) = 2, \ \ \frac{\partial f}{\partial y}(-1,3,1) = 1, \ \ \frac{\partial f}{\partial y}(-1,3,1) = -2,$$

şi deci ecuaţia planului tangent cerut este

$$(x+1)2 + (y-3)1 + (z-1)\cdot(-2) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 2z + 1 = 0.$$

**IV.** a) $\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & a \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - a = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^2 = a \Rightarrow a \neq 0.$

b) $a = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (1-\lambda)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 2. \end{cases}$

Pentru $\lambda_1 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha + \beta = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha \in \mathbb{R} \\ \beta = -\alpha \end{cases}$, de unde vectorul propriu: $\begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix}$, iar vectorul ales pentru baza ortonormată este $\begin{pmatrix} \frac{\alpha}{|\alpha|\sqrt{2}} \\ \frac{-\alpha}{|\alpha|\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Pentru $\lambda_2 = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma = \delta \in \mathbb{R}$, deci vectorul propriu $\begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \end{pmatrix}$, iar vectorul ales pentru baza ortonormată este $\begin{pmatrix} \frac{\gamma}{|\gamma|\sqrt{2}} \\ \frac{\gamma}{|\gamma|\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Prin urmare, notând $\varepsilon = \text{sign}(\alpha), \mu = \text{sign}(\gamma)$, avem $C = \varepsilon \cdot \mu \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$; $\varepsilon, \mu = \pm 1$. Dar din condiţia de orientare pozitivă, rezultă $C_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ şi $C_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

d) $C_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$, deci $\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$. Analog, $C_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$, deci $\theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$. Verificăm ortogonalitatea matricelor:

$$C_1^t \cdot C_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ deci } C_1 \text{ ortogonală;}$$

$$C_2^t \cdot C_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ deci } C_2 \text{ ortogonală.}$$

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza locală, anul I, profil mecanic, 2007-2008

**I.** a) Derivata funcţiei $f(x) = \arcsin x$ este $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$. Dar $(1-x)^\alpha = 1 + \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n,\ \alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$, deci

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n\right)}{n!} \cdot x^n = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!} \cdot x^n.$$

Efectuând substituţia $x \to x^2$, rezultă $\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \cdot x^{2n} = f'(x)$, deci $f(x) = x + \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!} \cdot \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + C$. Dar $f(0) = \arcsin 0 = 0$ conduce la $C = 0$, şi prin urmare $f(x) = x + \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!} \cdot \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

b) Conform cu a), $f(1) = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{1}{2n+1}$. Dar $f(1) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, deci $\sum_{n\geq 1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2n-1}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2} - 1$.

**II.** a) Avem $P : x + 2y + 2z = 0$; fie $M(a, b, c)$ şi $M' = pr_P M$. Ecuaţiile perpendicularei din $M$ pe planul $P$ sunt: $\frac{x-a}{1} = \frac{y-b}{2} = \frac{z-c}{2} = t$. Atunci

$$M'(x,y,z) : \begin{cases} x = a + t \\ y = 2t + b \\ z = 2t + c \\ x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = (-a - 2b - 2c)/9 \\ x = (8a - 2b - 2c)/9 \\ y = (5b - 2a - 4c)/9 \\ z = (5c - 2a - 4b)/9. \end{cases}$$

Prin urmare $f(a, b, c) = \left(\frac{8a-2b-2c}{9}, \frac{5b-2a-4c}{9}, \frac{5c-2a-4b}{9}\right)$ şi, evident, $f$ este liniară.

Determinăm nucleul aplicaţiei $f$: $\begin{cases} 8a - 2b - 2c = 0 \\ 5b - 2a - 4c = 0 \\ 5c - 2a - 4b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow b = c = 2a,\ a \in \mathbb{R}$, deci $\mathrm{Ker}\ f = \{(a, 2a, 2a) \mid a \in \mathbb{R}\}$; o bază în $\mathrm{Ker}\ f$ este $\{v_1 = (1, 2, 2)\}$. Fie $y = (y_1, y_2, y_3)$, $y \in \mathrm{Im}\, f$. Atunci există $x = (a, b, c)$, a.î.

$$f(x) = y \Leftrightarrow \begin{cases} 8a - 2b - 2c = y_1 \\ 5b - 2a - 4c = y_2 \\ 5c - 2a - 4b = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow y_1 = 2y_2 + 2y_3,\quad y_2, y_3 \in \mathbb{R},$$

deci $\mathrm{Im}\, f = \{(2y_2 + 2y_3, y_2, y_3) \mid y_2, y_3 \in \mathbb{R}\} = \{y_2(2, 1, 0) + y_3(2, 0, 1) \mid y_2, y_3 \in \mathbb{R}\}$; prin urmare o bază în $\mathrm{Im}\, f$ este $\{v_2 = (2, 1, 0), v_3 = (2, 0, 1)\}$.

b) Matricea transformării liniare $f$ este $M_f = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$. Aflăm valorile proprii:

$$\det(M_f - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 9)(1 - \lambda)(8 - \lambda) = 0,$$

deci obţinem $\lambda_1 = 9, (m_{\lambda_1} = 1)$, $\lambda_2 = 1, (m_{\lambda_2} = 1)$, $\lambda_3 = 8, (m_{\lambda_3} = 1)$. Se verifică uşor că multiplicitatea geometrică pentru fiecare valoare proprie este 1, deci $f$ este diagonalizabilă.

c) Fie $P :\ Ax + By + Cz = 0$ un plan care trece prin origine; aflăm proiecţia unui punct $M(a, b, c)$ pe planul $P$. Dreapta perpendiculară pe $P$ ce conţine punctul $M$ are ecuaţiile

$$\frac{x-a}{A} = \frac{y-b}{B} = \frac{z-c}{C} = t \Leftrightarrow \begin{cases} x = At + a \\ y = Bt + b \\ z = Ct + c \end{cases},\ t \in \mathbb{R}, \qquad (5)$$

deci proiecţia căutată $\{(a, b, c)\} = P \cap D$ corespunde valorii $t$ care satisface ecuaţia

$$A(At + a) + B(Bt + b) + C(Ct + c) = 0 \Leftrightarrow t(A^2 + B^2 + C^2) = -Aa - Bb - Cc,$$

deci $t = \frac{-Aa-Bb-Cc}{A^2+B^2+C^2}$; înlocuind în (5), obţinem

$$(a, b, c) = \left(\frac{\left(B^2 + C^2\right) a - Bb - Cc}{A^2 + B^2 + C^2}, \frac{\left(A^2 + C^2\right) b^2 - Aa - Cc}{A^2 + B^2 + C^2}, \frac{\left(A^2 + B^2\right) c - Bb - Aa}{A^2 + B^2 + C^2}\right),$$

deci o aplicaţie liniară a cărei matrice este $\frac{1}{A^2+B^2+C^2}\begin{pmatrix} B^2+C^2 & -B & -C \\ -A & A^2+C^2 & -C \\ -A & -B & A^2+B^2 \end{pmatrix}$.

**III.** a) Avem $\varphi(x) = \{x\} = x - [x]$. Fie $k \in \mathbb{Z}$. Atunci

$$\varphi(x+k) = x+k-[x+k] = x+k-[x]-k = x-[x] = \varphi(x),\ \forall x \in \mathbb{R},$$

deci $\varphi$ este periodică cu perioada $T = p \in \mathbb{Z}$ şi perioada principală $T_* = 1$. Calculăm $I_n = \int_0^n \varphi(x)\cdot\cos(2n\pi x)dx$. Avem

$$[x] = \begin{cases} 0, & x\in[0,1) \\ 1, & x\in[1,2) \\ \dots & \\ n-1, & x\in[n-1,n) \\ n, & x=n \end{cases} \quad \Rightarrow \varphi(x) = \begin{cases} x, & x\in[0,1) \\ x-1, & x\in[1,2) \\ \dots & \\ x-n+1, & x\in[n-1,n) \\ 0, & x=n \end{cases}$$

şi deci, făcând abstracţie de discontinuitatea în $x = n$ a ultimului integrand, rezultă

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 \varphi(x)\cdot\cos(2n\pi x)dx + \int_1^2 \varphi(x)\cdot\cos(2n\pi x)\,dx + \cdots + \int_{n-1}^n \varphi(x)\cdot\cos(2n\pi x)\,dx \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}(x-k)\cos(2n\pi x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}\left((x-k)\left.\frac{\sin(2n\pi x)}{2n\pi}\right|_k^{k+1} - \int_k^{k+1}\frac{\sin(2n\pi k)}{2n\pi}dx\right), \end{aligned}$$

deci $I_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left.\frac{\cos(2n\pi x)}{4n^2\pi^2}\right|_k^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1-1}{4n^2\pi^2} = 0.$

b) Arătăm că funcţiile $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi(kx)}{2^k}$ sunt periodice. Punctul a) implică

$$f_n(x+1) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi(kx+k)}{2^k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi(kx)}{2^k} = f_n(x),$$

deci $f_n$ este un şir de funcţii periodice. Pe de altă parte, avem $\left|\frac{\varphi(kx)}{2^k}\right| \le \frac{1}{2^k}$, iar seria $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$ este convergentă, deci seria $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi(kx)}{2^k}$ este uniform convergentă, şi deci $f_n$ este şir uniform convergent.

c) Datorită convergenţei uniforme, pentru $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, avem

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(a) = f(a),$$

deci $f$ este continuă în $a$, unde în ultima egalitate s-a folosit continuitatea în $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ a sumanzilor funcţiei $f_n$.

**IV.** $AB = BA$, $A^{2007} = I_3$, $B^{2008} = I_3$. a) Fie $\lambda$ valoare proprie pentru $A$ asociată vectorului propriu $v \ne 0$. Atunci se poate arăta uşor, prin inducţie, că $A^n v = \lambda^n v$, $\forall n \ge 0$. Pentru $n = 2007$, obţinem $A^{2007}v = \lambda^{2007}v$. Dar $A^{2007} = I_3$, deci $\lambda^{2007} = 1$. Fie $\mu$ valoare proprie pt $B$ asociată vectorului propriu $w \ne 0$. Ca mai sus, rezultă $B^{2008}w = \mu^{2008}w$. Dar $B^{2008} = I_3$, deci $\mu^{2008} = 1$. Prin urmare (deoarece $\text{cmmdc}(2007, 2008) = 1$), singura valoare proprie comună a celor două matrice este 1.

b) Presupunem că $P$ şi $Q$ nu sunt prime între ele, deci există $\alpha$ rădăcină comună pt $P$ şi $Q$; rezultă

$$\begin{cases} \alpha^{2007} = 1 & \Rightarrow \alpha = \cos\dfrac{2k\pi}{2007} + i\sin\dfrac{2k\pi}{2007},\ k \in \{0, \ldots, 2006\} \\ (\alpha+1)^{2008} = 1 & \Rightarrow \alpha + 1 = \cos\dfrac{2p\pi}{2008} + i\sin\dfrac{2p\pi}{2008},\ p \in \{0, \ldots, 2007\} \end{cases}$$

deci $\cos\frac{2k\pi}{2007} = \cos\frac{2p\pi}{2008} - 1$ şi $\sin\frac{2k\pi}{2007} = \sin\frac{2p\pi}{2008}$. Notând $\alpha = \frac{2k\pi}{2007}$ şi $\beta = \frac{2p\pi}{2008}$, obţinem $\begin{cases} \sin\alpha = \sin\beta \\ \cos\alpha = \cos\beta - 1 \end{cases}$ de unde, prin ridicare la pătrat şi sumare, rezultă

$$\cos\beta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \beta \in \left\{ 2m\pi \pm \frac{\pi}{3} \,\middle|\, m \in \mathbb{Z} \right\} \cap \left\{ \frac{2k\pi}{2008} \,\middle|\, k = \overline{0, 2007} \right\}.$$

Dar $2m\pi \pm \frac{\pi}{3} = \frac{2k\pi}{2008} \Leftrightarrow 2m = \frac{k}{1004} \mp \frac{1}{3}$; deoarece $2m \in \{0, \pm 2, \pm 4, \ldots\}$ iar $\frac{k}{1004} \mp \frac{1}{3} \in (-2, 2)$, rezultă $m = 0 \Rightarrow k \in \left\{\pm\frac{1004}{3}\right\} \cap \overline{0, 2007} = \emptyset$, deci sistemul nu are soluţii iar $P$ şi $Q$ nu au rădăcini comune, deci sunt prime între ele.

c) Deoarece matricile $A$ şi $B$ comută, notând $A + I_3 = U$, $-B = V$, avem

$$\begin{aligned} &(A + I_3)^n \cdot x = (-1)^n \cdot B^n \cdot x \Leftrightarrow ((A + I_3)^n - (-1)^n \cdot B^n)\, x = 0 \\ &\Leftrightarrow [(A + I_3)^n - (-B)^n]\, x = 0 \Leftrightarrow (A + I_3 + B)\left(U^{n-1} + U^{n-2} \cdot V + \ldots + V^{n-1}\right) x = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(U^{n-1} + U^{n-2} \cdot V + \ldots + V^{n-1}\right) [(A + B + I_3)\, x] = 0. \end{aligned}$$

Dar a doua paranteză din membrul stâng este nulă, deci egalitatea din enunţ are loc.

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
### Faza locală, anul I, profil electric, 2008-2009

**I.** 1) $A$ este inversabilă dacă şi numai dacă $\det A \neq 0$. Dar $\det A$ este produsul rădăcinilor complexe ale polinomului său caracteristic $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) \in \mathbb{C}[\lambda]$, deci dacă prin absurd $A$ neinversabilă, atunci $\det A = 0 \Rightarrow P_A(\lambda)$ admite rădăcina reală $\lambda = 0$, ceea ce contrazice ipoteza. Rezultă $A$ inversabilă. Polinomul caracteristic al matricii $A$ are doar rădăcini complexe conjugate de forma $\lambda$, $\bar{\lambda} \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Dacă $P_A(\lambda) = \prod\limits_{k=1}^{m} (\lambda - \lambda_k)\left(\lambda - \bar{\lambda}_k\right)$, $n = 2m$, atunci

$$\begin{aligned} P_{A^{-1}}\left(\lambda^{-1}\right) &= \det\left(A^{-1} - \lambda^{-1} I\right) = \det\left(AA^{-1}\right) \det\left(\lambda A^{-1} - I\right) \cdot \lambda^{-n} = \\ &= \lambda^{-n} \cdot \det\left(A^{-1}\right) \cdot \det\left[A\left(\lambda A^{-1} - I\right)\right] = \lambda^{-n} \det\left(A^{-1}\right) \det(A - \lambda I). \end{aligned}$$

Cum $\lambda = 0$ nu este rădăcină a lui $P_A(\lambda)$, pentru orice rădăcină $\lambda$ a lui $P_A(\lambda)$, rezultă $P_{A^{-1}}\left(\lambda^{-1}\right) = 0$. Deci polinomul caracteristic al matricii $A^{-1}$ are drept rădăcini inversele rădăcinilor matricii $A$, deci de forma $\frac{1}{\lambda} \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$.

**II.** a) Matricea $T$ va avea pe coloane componentele unei baze a spaţiului $\mathbb{R}^3$, formate din vectori proprii ai matricii $A$. Pentru a afla această bază, determinăm valorile proprii ale matricii $A$. Avem

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)^2(\lambda-5).$$

Deci $P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{-1, 5\}$. Notând cu $S_\lambda$ subspaţiul propriu asociat valorii proprii $\lambda$, avem pentru $\lambda = -1$,

$$v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in S_\lambda \Leftrightarrow (A+I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a+b+c=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v = (a, b, -a-b)^t = a(1,0,-1)^t + b(0,1,-1)^t \in L(\{(1,0,-1)^t, (0,1,-1)^t\}).$$

Pentru $\lambda = 5$, avem

$$v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in S_\lambda \Leftrightarrow (A-5I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a+b+c=0 \\ a-2b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow v = (a,a,a)^t = a(1,1,1)^t \in L(\{(1,1,1)^t\}).$$

Deci $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, iar $D = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

b) Se observă că $A = TDT^{-1} = (TUT^{-1})^{2009}$, de unde rezultă

$$D = U^{2009},\ U = \begin{pmatrix} \sqrt[2009]{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt[2009]{5} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[2009]{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt[2009]{5} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[2009]{5} \end{pmatrix}.$$

**III.** Avem $a_1 = 1$; $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \cdot a_n$; $\sum\limits_{n\geq 1} \underbrace{\frac{a_n}{n}}_{b_n} \cdot x^n$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Calculăm raza de convergenţă $\rho$ a seriei de puteri. Obţinem

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{n+1} = 0,$$

deci $\rho = \infty$ iar domeniul de convergenţă este $\mathbb{R}$.

b) Fie $S(x) = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{a_n}{n} \cdot x^n$. Atunci

$$S'(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n} \cdot n \cdot x^{n-1} = \sum_{n\geq 1} a_n \cdot x^{n-1} = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots \Rightarrow S'(0) = a_1 = 1.$$

**IV.** a) Avem $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$. Dar

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{-\frac{1}{2}x}{1!} + \cdots + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}x^n + \cdots,$$

deci $(1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{x^2}{2\cdot 1!} + \frac{1\cdot 3\cdot x^4}{2^2\cdot 2!} + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n} + \cdots$. Rezultă

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n} \Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!\,(2n+1)}x^{2n+1}.$$

Notăm $a_n = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!(2n+1)} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \Rightarrow \rho = 1$, deci intervalul de convergenţă este $I = (-1,1)$. Pentru $x=-1$, avem $f(-1) = -\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!\,(2n+1)}$. Dar

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2(n+1)(2n+3)}{(2n+1)^2} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(6n+5)}{(2n+1)^2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} > 1,$$

deci folosind criteriul Raabe-Duhamel, seria este convergentă. Analog, pentru $x=1$, seria este convergentă. Deci mulţimea de convergenţă este $[-1,1]$.

b) Notăm $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1^2\cdot 3^2\cdots(2n-1)^2}{2^n\cdot(2n+1)!} = S$. Dar

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!\,(2n+1)}\cdot x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^2\cdot 3^2\cdots(2n-1)^2}{2^n\cdot n!\cdot 1\cdot 3\cdots(2n-1)\,(2n+1)}\cdot x^{2n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^2\cdot 3^2\cdots(2n-1)^2}{2\cdot 4\cdots 2n\cdot 1\cdot 3\cdots(2n-1)\,(2n+1)}\cdot x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^2\cdot 3^2\cdots(2n-1)^2}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}.$$

Rezultă

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^2\cdot 3^2\cdots(2n-1)^2}{2^{n+1}\cdot(2n+1)!} = \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^2\cdot 3^2\cdots(2n-1)^2}{2^n\cdot(2n+1)!} = \frac{1}{2}\left(1+S\right),$$

deci $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(1+S) \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}S \Rightarrow S = \frac{\pi}{3} - 1$.

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza locală, anul I, profil mecanic, 2008-2009

**I.** a) Folosim

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\mathcal{L}'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{3x^2} = \frac{1}{6} \neq 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n - \sin a_n}{a_n^3}\right| = \frac{1}{6},$$

deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Folosind criteriul comparaţiei la limită, rezultă că seriile $\sum\limits_{n\geq 1} |a_n - \sin a_n|$ şi $\sum\limits_{n\geq 1} |a_n|^3$ au aceeaşi natură.

b) Conform punctului a), deoarece $\sum\limits_{n\geq 1}|a_n|^3$ este convergentă rezultă că seria $\sum\limits_{n\geq 1}|a_n - \sin a_n|$ este convergentă, deci $\sum\limits_{n\geq 1}(a_n - \sin a_n)$ este absolut convergentă, şi deci $\sum\limits_{n\geq 1}(a_n - \sin a_n)$ este convergentă. Dacă am presupune că $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ şi $\sum\limits_{n\geq 1}\sin a_n$ nu au aceeaşi natură, atunci $\sum\limits_{n\geq 1}(a_n - \sin a_n)$ este divergentă, ceea ce este fals, deci $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ şi $\sum\limits_{n\geq 1}\sin a_n$ au aceeaşi natură.

c) Fie $a_n = \frac{n}{\sqrt{n^3+1}}$. Observăm că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0, a_n \neq 0$ iar $a_n < \frac{\pi}{2}$ implică $\sin a_n > 0$, deci

$$\sum_{n\geq 1}\left|(-1)^{n-1}\cdot \sin\left(\frac{n}{\sqrt{n^3+1}}\right)\right| = \sum_{n\geq 1}\sin a_n.$$

Deoarece seria $\sum\limits_{n\geq 1} a_n^3 = \sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{n^3}{(n^3+1)^{\frac{3}{2}}} \leq \sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ este convergentă, din criteriul de comparaţie cu inegalităţi, rezultă că $\sum\limits_{n\geq 1} a_n^3$ este convergentă şi conform punctului b), $\sum\limits_{n\geq 1}\sin a_n$ are aceeaşi natură cu $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$. Avem $\sum\limits_{n\geq 1} a_n = \sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{n}{\sqrt{n^3+1}}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n}{\sqrt{n^3+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^3+1}} = 1 \neq 0$, deci $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{n}{\sqrt{n^3+1}}$ şi $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ au aceeaşi natură. Dar $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ este divergentă $\Rightarrow \sum\limits_{n\geq 1} a_n$ este divergentă $\Rightarrow \sum\limits_{n\geq 1}\sin a_n$ este divergentă $\Rightarrow$ seria $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\cdot \sin\left(\dfrac{n}{\sqrt{n^3+1}}\right)$ nu este absolut convergentă. Pentru convergenţa simplă, se observă că argumentul sinusului din seria $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\cdot \sin\left(\dfrac{n}{\sqrt{n^3+1}}\right)$ satisface $0 < \frac{n}{\sqrt{n^3+1}} < 1 < \frac{\pi}{2}$, deci $\sin\left(\frac{n}{\sqrt{n^3+1}}\right)$ este şir descrescător şi poate fi folosit criteriul lui Leibniz.

**II.** a) Avem $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2} \neq 0$, deoarece dacă alegem $x_n = y_n = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$, $f(x_n, y_n) = \frac{1/n^2}{2/n^2} = \frac{1}{2} \nrightarrow 0$, deci $f$ nu este continuă în $(0,0)$.

b) Calculăm $g(t) = f(\varphi(t)) = \frac{(1-t)(1+t)}{(1-t^2)+(1+t)^2} = \frac{1-t^2}{2(1+t^2)}$. Atunci $g'(t) = \frac{-2t}{(1+t^2)^2}$, deci $g'(t) = 0$ implică $t = 0$ punct critic (maxim), conform tabelului de mai jos.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ |
| $g$ | $-1/2$ | $\nearrow$ | $1/2$ | $\searrow$ | $-1/2$ |

Rezultă că funcţia $g$ este crescătoare pe $(-\infty, 0)$ şi descrescătoare pe $(0, +\infty)$.

c) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{x/y}{(x/y)^2+1}$, deci pentru $h(t) = \frac{t}{t^2+1}$ avem $f(x,y) = h\left(\frac{x}{y}\right)$, $\forall y \neq 0$.

**III.** a) Observăm că 0 este valoare proprie pentru $T$ dacă şi numai dacă $\dim \mathrm{Ker}\,(T - 0Id) > 0$. Dar $\mathrm{Ker}\,(T - 0Id) = \mathrm{Ker}\,T$, iar

$$v \in \mathrm{Ker}\,(T) \Leftrightarrow v = (\lambda+\mu, \lambda, \lambda-\mu) = \lambda \underbrace{(1,1,1)}_{v_1^t} + \mu \underbrace{(1,0,-1)}_{v_2^t},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Deoarece $\mathrm{rang}[v_1, v_2] = 2$, rezultă că $\{v_1, v_2\}$ formează bază în Ker $T$, deci $\dim \mathrm{Ker}\,T = 2 > 0$; prin urmare 0 este valoare proprie pentru $T$, iar vectorii proprii asociati formează $\mathrm{Ker}\,T \backslash \{0\}$.

b) Se observă că $v = v_1$, $w = v$, deci $v, w \in \mathrm{Ker}\,T$.

c) Avem $\begin{cases} T(v) = T(w) = 0 \\ T(e_2) = (2,2,-2) = 2\,(e_1 + e_2 - e_3) \end{cases}$. Folosind liniaritatea lui $T$, rezultă

$$\begin{cases} T(e_1) + T(e_2) + T(e_3) = 0 \\ T(e_1) - T(e_2) = 0 \\ T(e_2) = 2\,(e_1 + e_2 - e_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T(e_1) = T(e_3)e_1 - e_2 + e_3 \\ T(e_3) = 2(e_1 + e_2 - e_3). \end{cases}$$

d) Matricea $A$ a lui $T$ relativ la $B$ are pe coloane coeficienţii vectorilor $T(e_1), T(e_2)$ şi $T(e_3)$ relativ la $B$, deci $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Polinomul caracteristic asociat lui $A$ este $P_A = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$, iar vectorii proprii $v = (a,b,c)^t$ asociaţi valorilor proprii $\{0, 8\}$ se obţin succesiv:

$$\lambda = 0 \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow a - 2b + c = 0 \Leftrightarrow v = \begin{pmatrix} 2b-c \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v = b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ b, c \in \mathbb{R}$$

$$\lambda = 2 \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 0 \\ a + 2b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow v = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{R}.$$

**IV.** a) Fie $(x_n{}')_n, (x_n{}'')_n \in L$. Atunci adunând egalităţile de mai jos şi înmulţind prima egalitate cu $\lambda$, obţinem:

$$\begin{cases} x_{n+1}{}' = \frac{5}{6}x_n{}' - \frac{1}{6}x_{n-1}{}' \\ x_{n+1}{}'' = \frac{5}{6}x_n'' - \frac{1}{6}x_{x-1}{}'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_{n+1}{}' + x_{n+1}'') = \frac{5}{6}\left(x_n{}' + x_n''\right) - \frac{1}{6}\left(x_{n-1}{}' + x_{n-1}''\right) \\ (\lambda x_{n+1}{}') = \frac{5}{6}\left(\lambda x_n{}'\right) - \frac{1}{6}(\lambda x_{n-1}{}'), \end{cases}$$

pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$. Rezultă $(x_n{}' + x_n{}'') \in L$, $(\lambda x_n{}') \in L$, deci $L$ este subspaţiu vectorial închis.

b) Avem

$$\begin{cases} \frac{5}{6}u_n - \frac{1}{6}u_{n-1} = \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2^n} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{5}{12} - \frac{2}{12}\right) = \frac{1}{2^{n+1}} = u_{n+1} \\ \frac{5}{6}v_n - \frac{1}{6}v_{n-1} = \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{3^n} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3^{n-1}} = \frac{1}{3^{n-1}}\left(\frac{5}{18} - \frac{2}{18}\right) = \frac{1}{3^{n+1}} = v_{n+1}, \end{cases}$$

deci $(u_n)_n, (v_n)_n \in L$.

c) $u$, $v$ sunt liniar independenţi, ca vectori în $S$. Într-adevăr, $\alpha u_n + \beta v_n = 0$, $v_n \geq 1$ conduce pentru $n \in \{1,2\}$ la sistemul

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{3} = 0 \\ \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{9} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0, \end{cases}$$

deci $\{u,v\}$ bază în $L$. Atunci orice şir $(z_n)_n \in L$ se descompune după această bază. În cazul nostru, relaţia $z_n = \frac{\alpha}{2^n} + \frac{\beta}{3^n}$, $n \geq 1$ se rescrie pentru $n \in \{1,2\}$,

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{3} = 1 \\ \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{9} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha + 2\beta = 6 \\ 9\alpha + 4\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -4 \\ \beta = 9 \end{cases} \Rightarrow z_n = (-4)\frac{1}{2^n} + 9\frac{1}{3^n}.$$

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
### Faza locală, anul I, profil electric, 2009-2010

**I.** a) Fie $\{i,j,k\}$ o bază ortonormată în $V_3$. Notând

$$\sigma = ||u-i||^2 + ||v-j||^2 + ||w-k||^2,$$

avem de demonstrat implicaţia $\sigma < 1 \Rightarrow$ familia $F = \{u,v,w\}$ este liniar independentă. Presupunem prin absurd că deşi $\sigma < 1$, familia $F$ este liniar dependentă, deci există o combinaţie liniară nulă $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$ în care cel puţin unul dintre coeficienţii $\alpha, \beta, \gamma$ este nenul, adică $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 > 0$. Atunci avem

$$\alpha(u-i) + \beta(v-j) + \gamma(w-k) = -(\alpha i + \beta j + \gamma k).$$

Aplicând acestei relaţii norma din $\mathbb{R}^3$ şi folosind faptul că baza $\{i,j,k\}$ este ortonormată, rezultă

$$||\alpha(u-i) + \beta(v-j) + \gamma(w-k)|| = ||-(\alpha i + \beta j + \gamma k)|| = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2.$$

Utilizând apoi succesiv inegalitatea triunghiului, inegalitatea Cauchy-Schwartz pentru produsul scalar canonic din $\mathbb{R}^3$ şi ipoteza $\sigma < 1$, rezultă

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= ||\alpha(u-i) + \beta(v-j) + \gamma(w-k)|| \\ &\leq |\alpha|\cdot||u-i|| + |\beta|\cdot||v-j|| + |\gamma|\cdot||w-k|| \\ &\leq (|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2)\cdot(||u-i||^2 + ||v-j||^2 + ||w-k||^2) \\ &= \sigma(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) < \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, \end{aligned}$$

deci s-a obţinut o contradicţie. Prin urmare familia $F$ este liniar independentă.

b) Notăm $c_1 = \cos(\widehat{a,i})$, $c_2 = \cos(\widehat{b,j})$, $c_3 = \cos(\widehat{c,k})$. Avem $c_k \in [-1,1]$, $\forall k \in \overline{1,3}$, deci folosind ipoteza, rezultă:

$$\frac{5}{2} < c_1 + c_2 + c_3 \leq 2 + c_3 \Rightarrow c_3 > \frac{1}{2}.$$

Analog se arată că $c_1, c_2 > \frac{1}{2}$. Admitem prin absurd că familia $F = \{a,b,c\}$ este liniar dependentă. Fie $\pi$ subspaţiul vectorial generat de $F$, asimilat cu un plan care conţine originea. Fie $i' = pr_\pi i$. Avem $(\widehat{i,i'}) \leq (\widehat{i,a})$, deci

$$\cos(\widehat{i,i'}) \geq \cos(\widehat{i,a}) = c_1.$$

Notând cu $n$ versorul normal la $\pi$, avem de asemenea $\cos(\widehat{i,i'}) = \sin(\widehat{n,i})$ şi deci $c_1 \leq \sin(\widehat{n,i}) \overset{not}{=} s_1$. Analog rezultă relaţiile omologe

$$c_2 \leq \sin(\widehat{n,j}) \overset{not}{=} s_2, \;\; c_3 \leq \sin(\widehat{n,k}) \overset{not}{=} s_3.$$

Adunând cele trei relaţii obţinute, rezultă $s_1 + s_2 + s_3 \geq c_1 + c_2 + c_3 > \frac{5}{2}$. Notând

$$k_1 = \cos(\widehat{n,i}), \; k_2 = \cos(\widehat{n,j}), \; k_3 = \cos(\widehat{n,k}),$$

din faptul că $n$ este versor, rezultă $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 1$. Folosind egalităţile

$$s_j^2 + k_j^2 = 1, \; \forall j \in \{1,2,3\},$$

rezultă $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 3 - (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) = 2$. Au deci loc relaţiile

$$s_1 + s_2 + s_3 > \frac{5}{2}, \quad s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 2. \tag{6}$$

Dar, folosind inegalitatea Cauchy-Schwartz pentru suma din stânga inegalităţii şi apoi a doua egalitate, rezultă

$$1 \cdot s_1 + 1 \cdot s_2 + 1 \cdot s_3 \leq \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{6}.$$

Folosind prima relaţie din (6), obţinem $\sqrt{6} \geq s_1 + s_2 + s_3 > \frac{5}{2}$, de unde $\sqrt{6} > \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{6} > 5 \Leftrightarrow 24 > 25$, contradicţie. În concluzie familia de vectori $\{a,b,c\}$ este liniar independentă.

**II.** Se observă că implicaţia inversă este imediată: dacă $B = P(A) = \sum_{k=0}^{m} a_k A^k$, atunci $AB = \sum_{k=0}^{m} a_k A^{k+1} = BA$. Pentru a demonstra implicaţia directă, presupunem adevărată egalitatea $AB = BA$. Notând cu $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ cele $n$ valori proprii distincte ale matricii $A$ şi respectiv cu $f_1, \ldots, f_n$ generatorii celor $n$ subspaţii proprii $S_1, \ldots, S_n$ asociate, se observă că ipoteza $AB = BA$ implică

$$A(Bf_k) = BAf_k = B(\lambda_k f_k) = \lambda_k (Bf_k),$$

deci $Bf_k \in S_k$. Dar $S_k = L(f_k)$, şi deci există $\mu_k \in \mathbb{C}$ a.î. $Bf_k = \mu_k f_k$. Prin urmare $\{f_1, \ldots, f_n\}$ este bază diagonalizatoare atât pentru $A$, cât şi pentru $B$. Notăm cu $C$ matricea diagonalizatoare $C = [f_1, \ldots, f_n]$ şi avem matricele diagonale asociate $\tilde{A} = C^{-1}AC =$ diag $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ şi $\tilde{B} = C^{-1}BC =$ diag $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$. Se constată că deoarece valorile proprii $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ sunt distincte, determinantul Vandermonde care are pe linii vectorii $v_k = (\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k) \in \mathbb{C}^n$, $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ este nenul, deci vectorii $\{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$ formează o bază în $\mathbb{C}^n$. Deci notând $w = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{C}^n$, există scalarii $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, astfel încât $w = a_0 v_0 + \cdots + a_{n-1} v_{n-1}$ şi deci

$$\tilde{B} = a_0 I_n + a_1 \tilde{A} + a_2 \tilde{A}^2 + \cdots + a_{n-1} \tilde{A}^{n-1} \equiv P(\tilde{A}).$$

Înmulţind această relaţie cu $C$ la stânga şi cu $C^{-1}$ la dreapta şi folosind egalitatea $C\tilde{A}^k C^{-1} = (C\tilde{A}C^{-1})^k, \forall k \in \{0, \ldots, n-1\}$, rezultă $B = P(A)$.

**III.** a) Notând cu div $(m)$ numărul divizorilor unui număr natural nenul $m$, cu $p_1, p_2, \ldots, p_n$ primele $n$ numere prime în ordine crescătoare şi cu $b_n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$. Se observă că $\{b_n\}_{n \geq 1}$ este un şir de numere naturale strict crescător şi că avem div $(b_{n^2}) = 2^{n^2}$. Şirul $\sqrt[n]{a_n}$ conţine subşirul

$$\sqrt[n]{a_{b_{n^2}}} = \sqrt[n]{\text{div }(b_{n^2})} = \sqrt[n]{2^{n^2}} = 2^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

deci raza de convergenţă a seriei de puteri este $R = 1/\sqrt[n]{|a_n|} = 0$.

b) Integrând prin părţi, obţinem

$$a_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx = -\int_0^1 x^n (e^{-x})' dx = -\left( x^n e^{-x} \Big|_0^1 - \int_0^1 n x^{n-1} e^{-x} dx \right),$$

deci $a_n = -\frac{1}{e} + n a_{n-1}$. Prin calcul direct, obţinem $a_0 = \displaystyle\int_0^1 e^{-x} dx = \frac{e-1}{e}$. Se observă că $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, deoarece integrandul este funcţie pozitivă continuă neidentic nulă, deci $0 < a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Sumând relaţiile $a_k = k a_{k-1} - \frac{1}{e}, k \in \{1, \ldots, n\}$ înmulţite pentru fiecare $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ respectiv cu $n(n-1)(n-2) \cdot \cdots \cdot (k+1)$ obţinem

$$\begin{aligned} a_n &= n! a_0 - \tfrac{1}{e} \left(1 + n + n(n-1) + n(n-1)(n-2) + \cdots + n(n-1) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2\right) \\ &= n! a_0 - \tfrac{1}{e} \left( \tfrac{1}{n!} + \tfrac{1}{(n-1)!} + \cdots + \tfrac{1}{2!} + \tfrac{1}{1!} \right) n! = \tfrac{n!}{e} (e - \theta_n), \end{aligned}$$

unde

$$\theta_n = \left( 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} \right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} e.$$

Dar $e - \theta_n$ este eroarea dintre suma seriei Taylor asociată funcţiei $f(x) = e^x, x \in [0,1]$, deci este restul Lagrange în $x = 1$, dat de $R = \dfrac{f^{(n+1)}(x^*)}{(n+1)!} = \dfrac{e^{x^*}}{(n+1)!}, x^* \in [0,1]$. Dar $0 \leq x^* \leq 1 \Rightarrow \dfrac{1}{(n+1)!} \leq R \leq \dfrac{e}{(n+1)!}$, deci

$$\frac{1}{e(n+1)} \leq a_n \leq \frac{1}{n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

şi deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Prin trecere la limită în relaţia de recurenţă $a_n = \dfrac{1}{e} + n \cdot a_{n-1}$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} na_{n-1} = \dfrac{1}{e}$, deci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n-1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{na_{n-1}}{(n+1)a_n} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1/e}{1/e} \cdot 1 = 1,$$

şi deci raza de convergenţă este $R = 1$.

c) Orice şir de numere reale $\{x_n\}_{n\geq 1}$ este convergent dacă şi numai dacă este şir Cauchy, deci dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}^*, \text{ a.î. } \forall n_1, n_2 \geq n, \ \ |x_{n_2} - x_{n_1}| < \varepsilon.$$

Dar pentru $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ avem

$$\exists \varepsilon = \tfrac{1}{2} > 0, \text{ a.î. } \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists n_1 = n, n_2 = 2n \geq n, \text{ cu proprietatea}$$

$$|x_{n_2} - x_{n_1}| = \left|\tfrac{1}{n+1} + \cdots + \tfrac{1}{2n}\right| \geq \underbrace{\left|\frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}\right|}_{n \text{ termeni}} = \tfrac{1}{2} \geq \varepsilon,$$

deci şirul nu este şir Cauchy, deci nu este convergent. Fiind şir crescător cu termeni pozitivi, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}\right) = \infty$, deci

$$L = \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim \left|1 + \frac{1/(n+1)}{a_n}\right| = 1,$$

şi deci $R = \frac{1}{L} = 1$. Distingem trei cazuri:

(i) pentru $x = 1$, seria numerică obţinută are termenul general $b_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n}$, şi este serie divergentă deoarece $\lim b_n = \lim a_n = \infty \neq 0$, deci seria de puteri diverge;

(ii) pentru $x = -1$, seria de puteri devine $S(-1) = \sum\limits_{n\geq 1} (-1)^n \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n}$; termenul general al acestei serii, $b_n = (-1)^n \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n}$ produce şirul sumelor parţiale, format din subşirurile $b_{2n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ şi $b_{2n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$, deci $b_n \overset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$ şi prin urmare pentru $x = -1$ seria de puteri nu este convergentă;

(iii) pentru $|x| < 1$, folosim indicaţia din enunţ. Observăm că are loc egalitatea

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} \cdot x^{n-k},$$

de unde rezultă

$$S(x) \equiv \sum_{n\geq 1} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n = \left(\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}\right) \cdot \left(\sum_{n\geq 1} x^n\right).$$

Dar $\sum_{n\geq 1} x^n = \lim_{n\to\infty} x\cdot\dfrac{1-x^n}{1-x} = \dfrac{x}{1-x}$, şi $\sum_{n\geq 1}\dfrac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$, deci suma seriei este $S(x) = -\dfrac{x\ln(1-x)}{1-x}$.

**IV.** a) Se observă că funcţia $\varphi(t) = t^{2n+1}e^{-t^2}$ este impară, deci pentru $x > 0$ avem $\int_{-x}^{x}\varphi(t)dt = 0$ şi deci $f_n(x) = f_n(-x), \forall x\in\mathbb{R}$. Efectuând schimbarea de variabilă $u = t^2$, unde $t\in(-\infty, x]$, şi apoi integrând prin părţi, obţinem

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{1}{n!}\int_{\infty}^{x^2}\frac{u^n}{2}e^{-u}du = -\frac{1}{2n!}\int_{x^2}^{\infty}u^ne^{-u}du \\ &= -\frac{1}{2n!}\left(-u^ne^{-u}\Big|_{x^2}^{\infty} + n\int_{x^2}^{\infty}u^{n-1}e^{-u}du\right) = -\frac{x^{2n}e^{-x^2}}{2n!} + f_{n-1}(x), \end{aligned}$$

deci $f_n(x) = -\dfrac{x^{2n}e^{-x^2}}{2n!} + f_{n-1}(x)$.

b) Integrând în relaţia de recurenţă obţinută şi notând $a_n = \int_0^1 f_n(x)$, rezultă egalitatea $a_n = -b_n + a_{n-1}$, unde $b_n = \displaystyle\int_0^1\frac{x^{2n}e^{-x^2}}{2\cdot n!}dx$. Sumând relaţiile obţinute din relaţia de recurenţă prin înlocuirea $n\to 1, 2, 3, \ldots, n$, avem

$$\begin{aligned} a_n &= a_0 - \sum_{n=1}^{n}\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^{2n}}{n!}e^{-x^2}dx = a_0 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-x^2}\cdot\left(\sum_{n=1}^{n}\frac{x^{2n}}{n!}\right)dx = \\ &= a_0 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-x^2}\cdot\left(-1+\sum_{n=0}^{n}\frac{(x^2)^n}{n!}\right)dx. \end{aligned}$$

Se observă că suma tinde pentru $n\to\infty$ la $e^{x^2}$, deci trecând la limită în egalitatea obţinută, rezultă

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a_0 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-x^2}\cdot\left(-1+e^{x^2}\right)dx = a_0 - \frac{1}{2}\int_0^1(1-e^{-x^2})dx = a_0 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-x^2}dx.$$

Dar $a_0 = \displaystyle\int_0^1\left(\frac{1}{0!}\int_{-\infty}^{x}te^{-t^2}dt\right)dx = -\int_0^1\left(\frac{e^{-t^2}}{2}\Big|_{-\infty}^{x}\right)dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-x^2}dx$, şi deci $\lim_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{2}$.

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
### Faza locală, anul I, profil mecanic, 2009-2010

**I.** a) Cum $\frac{1}{n}\in(0,\frac{\pi}{2}), \forall n\geq 2$, rezultă că seria este o serie numerică cu termeni pozitivi. Seria $\sum_{k=2}^{\infty}\sin^{\alpha}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ are aceeaşi natură cu $\sum_{k=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}$, deci este divergentă pentru $\alpha\leq 1$ şi convergentă pentru $\alpha > 1$.

b) Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\sin(\frac{1}{n})}{\sin(\frac{1}{n+1})}\right| = 1$, rezultă că raza de convergenţă este $\rho = 1$. Dacă $x = 1$, avem $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{1}{n}$, divergentă. Dacă $x = -1$, avem $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \sin\dfrac{1}{n}$, convergentă (criteriul lui Leibniz). Rezultă că mulţimea de convergenţă este $[-1, 1)$.

**II.** a) Notăm $t(x, y) = x^2 + y^2$. Atunci:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = f'(t)\frac{\partial t}{\partial x} = 2xf''(t), \quad \frac{\partial g}{\partial y} = f'(t)\frac{\partial t}{\partial y} = 2yf'(t),$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 2f'(t) + 4x^2 f''(t), \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 2f'(t) + 4y^2 f''(t),$$

de unde $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 2f'(t) + 4f''(t)$.

b) Pentru funcţia $h(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = 0. \end{cases}$, problema derivabilităţii apare doar în punctul $(0, 0)$. Fie

$$\alpha(x, y) = \frac{h(x, y) - h(0, 0) - \frac{\partial h}{\partial x}(0, 0)x - \frac{\partial h}{\partial y}(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Avem $\frac{\partial h}{\partial x}(0, 0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{h((x, 0) - h(0, 0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x \cdot \sin\dfrac{1}{x^2 + y^2} = 0$; analog $\frac{\partial h}{\partial y}(0, 0) = 0$, deci $\alpha(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$. Dar $\lim\limits_{x,y\to 0}\alpha(x, y) = 0$, deci $h$ derivabilă în origine.

**III.** a) Avem $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1 + x^2)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1 + x^2} = 1$.

b) Fie $f(t) = ln(1 + t)$. Atunci $f'(t) = \dfrac{1}{1 + t} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot t^n$ (dezvoltare în serie Maclaurin), deci $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \dfrac{t^{n+1}}{n + 1}$. Rezultatul cerut este criteriul lui Cauchy, întrucât:

$$\left|(-1)^{n+1} \cdot \tfrac{t^{n+2}}{n+2} + (-1)^{n+2} \cdot \tfrac{t^{n+3}}{n+3} + ... + (-1)^{n+p+1} \cdot \tfrac{t^{n+p+1}}{n+p+1}\right|$$
$$= \left|(-1)^{n+1}\right| \cdot \left|\tfrac{t^{n+2}}{n+2} + (-1) \cdot \tfrac{t^{n+3}}{n+3} + ... + (-1)^{p+1} \cdot \tfrac{t^{n+p+1}}{n+p+1}\right|$$
$$= \left|\tfrac{t^{n+2}}{n+2} + (-1) \cdot t^{n+3} \cdot (\tfrac{1}{n+3} - \tfrac{t}{n+4}) + ... + (-1)^p \cdot t^{n+p} \cdot \left(\tfrac{1}{n+p} - \tfrac{t}{n+p+1}\right)\right| \overset{t\in[0,1]}{\leq}$$
$$\leq \frac{1}{n + 2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

c) Cum $\dfrac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot x^n$, pentru $|x| < 1$, înlocuind $x$ cu $x^2$, obţinem $\dfrac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot x^{2n}$, pentru $|x| < 1$.

d) Folosind punctul b), avem $\ln(1+x^2) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot x^{2n}$. Rezultă că

$$\int_1^0 \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx = \int_1^0 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot x^{(2n\cdot-2)}dx \overset{\text{unif.conv.}}{=}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \left.\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right|_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}.$$

Totuşi această metodă nu permite aflarea rezultatului exact. Integrala $\displaystyle\int_1^0 \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx$ nu este improprie (punctul a). Folosind integrarea prin părţi, rezultă

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx &= \int_0^1 \left(\frac{-1}{x}\right)' \cdot \ln(1+x^2)dx = \\ &= -\left.\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x^2)\right|_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{x}\cdot\frac{2\cdot x}{1+x^2}dx = \\ &= -\ln(2) + \underbrace{\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\cdot\ln(1+\epsilon^2)}_{0} + 2\cdot\,\mathrm{arctg}\,x = \frac{\pi}{2} - \ln(2).\end{aligned}$$

**IV.** a) Fie $\lambda$ o valoare proprie a matricii $A$ şi $v \in \mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ un vector propriu asociat valorii proprii $\lambda$. Atunci avem

$$Av = \lambda v, \quad A^2v = A\cdot Av = \lambda Av = \lambda^2 v, \quad A^3v = \lambda^3 v.$$

Folosind relaţia din ipoteză aplicată vectorului $v$, obţinem

$$A^3v = Av \Rightarrow \lambda^3 v = \lambda v \Leftrightarrow (\lambda^3 - \lambda)v = 0.$$

Dar $v \neq 0$, deci $\lambda^3 - \lambda = 0$, şi deci singurele valori proprii sunt rădăcinile ecuaţiei $\lambda(\lambda^2-1) = 0$, deci $\lambda \in \{0, \pm 1\}$.

b) Deoarece matricea are valori proprii reale, ea este jordanzabilă. Fie $C$ matricea modală (diagonalizatoare) care are pe coloane coordonatele unei baze formate din vectori proprii şi eventual vectori principali ai matricei $A$. Atunci $J = C^{-1}AC$ are formă canonică Jordan şi se observă că

$$J^3 = (CAC^{-1})^3 = CA^3C^{-1} = CAC^{-1} = J,$$

deci $J^3 = J$. Distingem trei cazuri: (i) dacă valorile proprii sunt distincte $\{-1, 0, 1\}$; atunci, acestea fiind simple (de multiplicitate unu), matricea este diagonalizabilă; (ii) dacă una dintre valorile proprii este dublă şi prin absurd $A$ nu este diagonalizabilă, atunci $J$ conţine două celule Jordan, una dintre acestea având ordinul 2; în acest caz $J = D + N$ unde $D$ este matrice diagonală cu proprietatea $D^3 = D$ (deoarece are pe diagonală valori proprii ale lui $A$, din mulţimea $\{\pm 1, 0\}$), iar $N$ este o matrice nenulă nilpotentă de ordinul doi ($N^2 = 0$). Atunci

$$J^3 = J \Leftrightarrow (D+N)^3 = D + N \Leftrightarrow (3D^2 - I_3)N = O_3.$$

Dar matricea $3D^2$ conţine pe diagonală numerele 0 sau 3, deci $(3D^2 - I_3)$ este o matrice diagonală inversabilă şi deci $N = O_3$, contradicţie; (iii) dacă $A$ admite o unică valoare proprie triplă $\lambda \in \{\pm 1, 0\}$, atunci $J$ conţine o singură celulă Jordan; în acest caz $J = D + N$ unde $D = \lambda I_3$ este matrice diagonală cu proprietatea $D^3 = D$, iar $N$ este o matrice nenulă nilpotentă de ordinul trei ($N^3 = 0$). Atunci

$$J^3 = J \Leftrightarrow (D+N)^3 = D + N \Leftrightarrow (3D^2 - I_3)N + 3DN^2 = O_3.$$

Dar $(3D^2 - I_3) = (3\lambda^2 - 1)I_3 \overset{not}{=} M$ este o matrice diagonală inversabilă şi deci $N = -3M^{-1}DN^2$, unde matricea din stanga este nilpotentă de ordin trei, iar cea din dreapta este fie nilpotentă de ordin doi (pentru $\lambda \in \{\pm 1\}$), fie nulă (în cazul $\lambda = 0$), deci contradicţie. În concluzie, în toate cele trei cazuri, $A$ este matrice diagonalizabilă.

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
### Faza locală, anul I, profil electric, 2010-2011

**I.** a) Polinomul caracteristic al matricei $A$ este $P(\lambda) = \lambda^2 - Tr(A)\lambda + \det(A)$, deci teorema Cayley-Hamilton conduce la relaţia $A^2 - Tr(A) \cdot A + \det(A) \cdot I_2 = O_2$, unde $O_2$ este matricea nulă de ordin 2, iar $I_2$ este matricea unitate. Dar $Tr(A) = 0$, deci relaţia devine $A^2 = -\det(A) \cdot I_2$ şi deci aplicând urma în ambii membri, obţinem $Tr(A^2) = -2\det(A)$. Cum însă din ipoteză $Tr(A^2) = 0$, rezultă $\det(A) = 0$. Prin urmare $A^2 = -2 \cdot 0 \cdot I_2 = O_2$.

b) Se poate verifica imediat că urma oricărei matrice de forma $[A, B]$ este nulă[1]:

$$\begin{aligned} Tr([A,B]) &= \sum_{i=1}^{n}([A,B])_{ii} = \sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}b_{ji} - b_{ij}a_{ji}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} - \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}a_{ji} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} - \sum_{i,j=1}^{n} b_{ji}a_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} - \sum_{i,j=1}^{n} b_{ji}a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}b_{ji} - b_{ji}a_{ij}) = 0, \end{aligned}$$

unde în al doilea termen s-au redenumit indicii ($i \leftrightarrow j$) şi apoi s-au permutat cele două sume.

Aplicând urma în ambii membri ai egalităţii $[A, B] = A$, rezultă egalitatea $0 = Tr(A)$ (*). Egalitatea din enunţ se rescrie $AB - BA = A$. Amplificând egalitatea

[1] Pentru cazul din problemă, având $n = 2$ proprietatea se poate verifica direct, considerând două matrice pătratice arbitrare de ordinul doi.

cu $A$ la stânga, apoi la dreapta, sumând cele două egalităţi obţinute şi aplicând urma, obţinem succesiv:

$$\begin{cases} A^2B - ABA = A^2 \\ ABA - BA^2 = A^2 \end{cases} \Rightarrow A^2B - BA^2 = 2A^2 \Leftrightarrow [A^2, B] = 2A^2,$$

deci $Tr([A^2, B]) = 2Tr(A^2)$. Urma din stânga fiind nulă, rezultă $0 = Tr(A^2)$ (**). Dar relaţiile (*) şi (**) sunt exact ipotezele punctului anterior a), deci $A^2 = O_2$.

**II.** a) Aria triunghiului cu formula lui Heron este $\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, unde $p = (a+b+c)/2$. Din inegalitatea mediilor, obţinem

$$\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \leq \tfrac{3p-a-b-c}{3} = \tfrac{p}{3} \Rightarrow (p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{p^3}{27}.$$

Prin urmare $\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \leq \sqrt{p}\sqrt{\frac{p^3}{27}} = \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$, şi aria maximă este $\mathcal{A}_* = \frac{p^2\sqrt{3}}{9}$, care se atinge pentru $p-a = p-b = p-c$, deci pentru cazul triunghiului echilateral $(a = b = c)$.

b) Consecinţă imediată a Teoremei lui Fermat.

c) Considerăm funcţia dată în enunţ, $g(x, y) = e^{3x} + y^3 - 3e^x y$. Unicul punct critic al acesteia este $(0, 1)$ şi se demonstrează uşor că este punct de minim local pentru $g$. Valoarea funcţiei în acest punct este $g(0, 1) = -1$. Dar luând, de exemplu, $x = 0$ şi $y = -3$, constatăm că $g(0, -3) = -17 < -1 = g(0, 1)$, deci $(0, 1)$ nu este punct de minim global al funcţiei.

**III.** a) Demonstrăm echivalenţa prin dublă implicaţie.

"(i) $\Rightarrow$ (ii)". Fie $\text{Ker } f = \text{Im } f$. Atunci pentru orice $v \in E$, notând $w = f(v)$, avem $f^2(v) = f(w)$, unde $w = f(v) \in \text{Im } f = \text{Ker } f$, deci $f(w) = 0$ şi prin urmare $f^2(v) = 0$. Rezultă $f^2 = 0$, deci afirmaţia (ii)$_1$. Se observă că deoarece $\text{Ker } f = \text{Im } f$, rezultă $\dim \text{Ker } f = \dim \text{Im } f$ Notăm cu $m$ această dimensiune comună. Din teorema dimensiunii pentru transformări liniare, avem

$$\dim E = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f, \tag{7}$$

care se rescrie $2n = m + m$, deci $m = n$ şi prin urmare $\dim \text{Im } f = n$, deci afirmaţia (ii)$_3$. Pe de altă parte, $f \neq 0 \Leftrightarrow \text{Im } f \neq \{0\} \Leftrightarrow \dim \text{Im } f \neq 0$. Dar $\dim \text{Im } f = n \geq 1$, ceea ce implică $f \neq 0$, deci rezultă afirmaţia (ii)$_2$.

Implicaţia "(ii) $\Rightarrow$ (i)". Fie satisfăcute proprietăţile $f^2 = 0$, $f \neq 0$, $\dim \text{Im } f = n$. Pentru orice $w = f(v) \in \text{Im } f$, avem $f(w) = f(f(u)) = f^2(u) = 0(u) = 0$, deci $w \in \text{Ker } f$. Avem deci incluziunea $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$. Însă din (7) rezultă

$$\dim \text{Ker } f = 2n - \dim \text{Im } f = 2n - n = n \Rightarrow \dim \text{Ker } f = \dim \text{Im } f = n.$$

Cum însă $\text{Im } f$ este subpaţiu vectorial în $\text{Ker } f$, având aceeaşi dimensiune rezută că aceste spaţii coincid, deci (i).

b) Alegem $E = \mathbb{R}^{2n}$ şi aplicaţia liniară

$$f(w) = (y, 0), \quad \forall w = (\underbrace{x_1, \ldots, x_n}_{x}; \underbrace{y_1, \ldots, y_n}_{y}) \in \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Se pot verifica uşor următoarele: (i) $\text{Ker } f = \text{Im } f = \{(x; 0_n) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$, (ii)$_1$ $f^2((x; y)) = f((y, 0_n)) = (0_n; 0_n) = 0_{2n}$, deci $f^2 = 0$; (ii)$_2$: $f \neq 0$ deoarece, spre exemplu, $f(0_n;\underbrace{1,\ldots,1}_{1_n}) = (1_n, 0_n) \neq 0_{2n})$; (ii)$_3$: din relaţia (7) şi din teorema dimensiunii rezultă $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Im} f = n$.

**IV.** a) Se foloseşte dezvoltarea binomială a lui $(1-x)^\alpha$, în care se ia $\alpha = -\frac{1}{2}$ şi $x \to x^2$.

b) Dezvoltarea cerută se determină integrând termen cu termen seria de la punctul a). Pentru convergenţa uniformă, folosim inegalitatea

$$\sum_{n\geq 1} \left| \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right| \leq \sum_{n\geq 1} \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)} \frac{1}{2n+1},$$

unde convergenţă seriei din membrul drept rezultă din Criteriul lui Duhamel.

c) Pentru demonstrarea egalităţii, folosim o metodă elementară. Notăm cu $I_n$ integrala cerută. Integrând prin părţi, avem

$$I_n = \int_0^1 x^{2n} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\, x^{2n}\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 + 2n\int_0^1 x^{2n-1}\sqrt{1-x^2}dx = 2nI_{n-1} - 2nI_n,$$

de unde $I_n = \dfrac{2n}{2n+1} I_{n-1}$. Cum $I_1 = \frac{2}{3}$, rezultă formula dorită.

d) Din punctul b), avem $\arcsin x - x = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1\cdot 3\ldots 2n-1}{2\cdot 4\ldots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Atunci $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arcsin x - x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^1 \sum_{n\geq 1} \frac{1\cdot 3\ldots 2n-1}{2\cdot 4\ldots 2n(2n+1)} \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}dx$, sau, echivalent,

$$\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx - 1 = \sum_{n\geq 1} \frac{1\cdot 3\ldots 2n-1}{2\cdot 4\ldots 2n(2n+1)} \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Dar, la punctul c), am aflat că $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{2\cdot 4\ldots 2n}{1\cdot 3\ldots 2n+1}$, şi înlocuind mai sus, obţinem

$$\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = 1+\sum_{n\geq 1} \frac{1\cdot 3\ldots 2n-1}{2\cdot 4\ldots 2n(2n+1)}\cdot\frac{2\cdot 4\ldots 2n}{1\cdot 3\ldots 2n+1} = 1+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

e) Calculăm $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n)^2}$. Această sumă poate fi scrisă ca $\displaystyle\frac{1}{4}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n)^2}+\frac{1}{4}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^2}$, de unde $\displaystyle\frac{3}{4}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^2}$. De la punctul d), ştim că $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^2} = \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ această ultimă integrală, făcând schimbarea de variabilă $\arcsin x = t$, are valoarea $\dfrac{\pi^2}{8}$. Aşadar, $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{24}$. Suma cerută este $\dfrac{\pi^2}{8} + \dfrac{\pi^2}{24} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ”TRAIAN LALESCU”
Faza locală, anul I, profil mecanic, 2010-2011

**I.** a) Avem $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n$, $x \in (-1,1)$. Cum însă $\left(\ln \dfrac{1}{1-x}\right)' = \dfrac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n$, integrând termen cu termen, obţinem $\ln \dfrac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$, $x \in (-1,1)$.

b) Folosind a), rezultă $\ln \dfrac{1}{1-x} - x - \dfrac{x^2}{2} - \cdot \ldots \cdot - \dfrac{x^n}{n} = \sum_{k\geq 1} \dfrac{x^{n+k}}{n+k}$, $x \in (-1,1)$.

c) Obţinem succesiv

$$\sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 1} x^{n+k} = \sum_{n\geq 1} x^n \sum_{k\geq 1} x^k = \sum_{n\geq 1} x^n \left(\frac{1}{1-x} - 1\right) = \frac{1}{1-x}\sum_{n\geq 1} x^{n+1} = \frac{x^2}{(1-x)^2}.$$

d) Se poate observa direct că $\sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 1} \dfrac{x^{n+k}}{n+k} = \dfrac{1}{1-x} - \ln \dfrac{1}{1-x}$. *Altfel.* Notăm cu $S(x)$ seria cerută. Pornim de la $\int \sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 1} x^{n+k} dx = \int \dfrac{x^2}{(1-x)^2} dx$ folosind rezultatul de la punctul c). Obţinem $\sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 1} \dfrac{x^{n+k+1}}{n+k+1} = x + 2\ln(1-x) - \dfrac{1}{1-x}$, sau

$$\sum_{n\geq 1}\left(\sum_{k\geq 1} \frac{x^{k+n}}{k+n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = S(x) - \sum_{n\geq 1} \frac{x^{n+1}}{n+1} = S(x) - \left(\ln \frac{1}{1-x} - x\right),$$

de unde $S(x) = \ln(1-x) + \dfrac{1}{1-x}$.

**II.** a) Obţinem $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \dfrac{1 - x^2 - e^{-x^2}}{x^3}$. Nedeterminarea este de tipul $\dfrac{0}{0}$ şi folosind regula lui L'Hospital, avem $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{2}{3}\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{-x^2} - 1}{-x} = \dfrac{2}{3}\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{-x^2} - 1}{-x^2} \cdot \dfrac{-x^2}{x} = 0$. Analog, rezultă $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

b) Se pune problema diferenţiabilităţii Frechét in punctul $(0,0)$. Calculăm limita $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1 - e^{-x^2-y^2} - x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$. Notând $t = x^2 + y^2$, această limită se rescrie $\lim_{t\searrow 0} \dfrac{1 - e^{-t} - t}{t^{\frac{3}{2}}} = 0$, deci $f$ este diferenţiabilă Frechét în $(0,0)$.

c) Folosim dezvoltarea în serie $e^x = \sum_{k\geq 0} \dfrac{x^k}{k!}$, şi obţinem $e^{-x^2} = \sum_{k\geq 0} \dfrac{(-1)^k x^{2k}}{k!}$ şi $1 - e^{-x^2} = \sum_{k\geq 1} \dfrac{(-1)^{k+1} x^{2k}}{k!}$, deci $\dfrac{1 - e^{-x^2}}{x^2} = \sum_{k\geq 1} \dfrac{(-1)^{k+1} x^{2k-2}}{k!}$.

**III.** a) Prin calcul direct, obţinem $\partial D = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, unde

$$\gamma_1 : x = t, y = 0,\ t \in [0,3];\ \gamma_2 : y = t, x = 0,\ t \in [0,3];\ \gamma_3 : x = t, y = -3-t,\ t \in [0,3].$$

b) $x = -1, y = -1$ este punct de minim global al funcţiei şi se află în interiorul lui $D$.

c) Sunt trei situaţii care apar la aflarea extremului condiţionat. Pentru $x = 0$, avem $L_1(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda x$ şi obţinem $(0, -\frac{1}{2})$ punct de minim local. Pentru $y = 0$, avem $L_2(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda y$ şi obţinem $(-\frac{1}{2}, 0)$ punct de minim local. Pentru $x + y + 3 = 0$, $L_3(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda(x+y+3)$ şi obţinem $(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$ punct de minim local.

**IV.** a) Fie $x = (x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2$. Aflăm nucleul transformării $T$:

$$T(x) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -2t \\ x_2 = t,\ t \in \mathbb{R} \end{array} \right. \Leftrightarrow x = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$$

si obţinem o bază a nucleului $B_{\text{Ker}\ T} = \{(-2,1)^t\}$, deci dim Ker $T = 1$. Pentru imaginea lui $T$, notăm $B_0 = \{e_1 = (1,0)^t, e_2 = (0,1)^t\} \subset \mathbb{R}^2$, şi obţinem generatorii imaginii $T(e_1) = (1,2)^t \neq 0_{\mathbb{R}^2}$ şi $T(e_2) = (2,4)^t = 2 \cdot (1,2)^t = 2T(e_1)$. Deci o bază a imaginii este $B_{\text{Im}\ T} = \{T(e_1) = (1,2)^t\}$, şi deci dim Im $T = 1$.

b) Matricea lui $A$ relativ la $B_1$ este $[A]_{B_1} = [A]_{\{e_2,e_1\}} = [T(e_2), T(e_1)]_{\{e_2,e_1\}}$. Avem

$$\left\{ \begin{array}{l} T(e_2) = (2,4)^t = 4e_2 + 2e_1 \\ T(e_1) = (1,2)^t = 2e_2 + 1e_1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} [T(e_2)]_{B_1} = (4,2)^t \\ [T(e_1)]_{B_1} = (2,1)^t \end{array} \right. \Rightarrow [T]_{B_1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Altfel.* Notăm $C = [B_1]_{B_0} = [e_2, e_1]_{B_0} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ şi $A' = [T]_{B_1}$. Folosind relaţia $A' = C^{-1}AC$, rezultă

$$[T]_{B_1} = A' = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)^{-1} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right).$$

c) Observăm că $B_2$ este bază în spaţiul $\mathbb{R}^2$, deoarece matricea sa relativ la $B_0$, $[B_2]_{B_0} = [(1,2)^t, (2,-1)^t] = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ este nesingulară ($\det[B_2]_{B_0} = -5 \neq 0$). Atunci matricea de trecere de la $B_1$ la $B_2$ este

$$C_{B_1 B_2} = [B_1]_{B_0}^{-1} [B_2]_{B_0} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)^{-1} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right).$$

*Altfel.* Pentru a obţine matricea de schimbare de bază $C_{B_1 B_2}$, descompunem baza nouă $B_2$ după cea veche $B_1$ şi formăm din coeficienţii descompunerii coloanele matricei:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1,2) = a(0,1) + b(1,0) \\ (2,-1) = c(0,1) + d(1,0) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} a = 2, & b = 1 \\ c = -1, & d = 2 \end{array} \right. \Rightarrow C_{B_1 B_2} = \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right).$$

d) Folosind relaţia $A' = C^{-1}AC$ de schimbare a matricei lui $T$ de la baza $B_0$ la baza $B_2$, obţinem

$$[T]_{B_2} = [B_2]_{B_0}^{-1} [T]_{B_0} [B_2]_{B_0} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right)^{-1} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right).$$

*Altfel.* Exprimăm imaginile prin $T$ ale vectorilor noii baze $B_2 = \{(1,2),(2,-1)\}$ relativ la $B_2$, iar coeficienţii descompunerilor formează coloanele matricei operatorului liniar $T$ relativ la baza $B_2$:

$$\begin{cases} T((1,2)) = a(1,2) + b(2,-1) \\ T((2,-1)) = c(1,2) + d(2,-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5, & b = 0 \\ c = 0, & d = 0 \end{cases} \Rightarrow [T]_{B_2} = \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right).$$

e) Notăm $D = [T]_{B_2} = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Matricea $D$ este însă formă diagonală a matricei $A$, cu valorile proprii $\{5,0\}$ aflate pe diagonala acesteia, iar baza $B_2$ are calitatea de bază diagonalizatoare pentru endomorfismul $T$.

f) Ştim că polinomul caracteristic al lui $T$ nu depinde de baza relativ la care se consideră matricea endomorfismului, deci

$$P_T(\lambda) = P_A(\lambda) = P_D(\lambda) = \left|\begin{smallmatrix} 5-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{smallmatrix}\right| = \lambda^2 - 5\lambda.$$

Folosind teorema Cayley-Hamilton, rezultă $P_T(A) = O_2$, deci $A^2 - 5A = O_2$. Prin urmare $A^2 = 5A$, deci $A^k = 5^{k-1}A, \forall k \geq 2$. Atunci

$$\begin{aligned} \left\langle A^n \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle &= \left\langle 5^{n-1} A \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle = 5^{n-1} \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle \\ &= 5^{n-1} \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle = 5^{n-1} \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
### Faza locală, anul I, profil electric, 2011-2012

**I.** a) Studiem absolut convergenţa seriei cu criteriul raportului. Obţinem

$$\lim_{n\to\infty} |x| \frac{1 + x^{2n}}{1 + x^{2n+2}} = \begin{cases} |x|, & |x| < 1 \\ 1, & |x| = 1 \\ \frac{1}{|x|}, & |x| > 1. \end{cases}$$

Rezultă că seria este absolut convergentă, deci convergentă, pentru $x \in \mathbb{R} \backslash \{\pm 1\}$. Pentru $x = 1$, seria este evident divergentă şi pentru $x = -1$ convergenţa seriei rezultă din criteriul lui Leibniz.

b) Pentru $x \in (0, y]$, folosind $x^{2n}+1 \geq 1$, rezultă $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^{n-1}}{(n+1)(x^{2n}+1)} \leq \sum_{n\geq 1} \frac{y^{n-1}}{n+1}$. Dar $y < 1$, deci seria din membrul drept converge. Prin urmare seria dată este uniform convergentă pentru orice $y \in (0,1)$. Pentru $x = 0$, seria este 0.

c) Conform punctului b) seria este uniform convergentă pe $(0,1)$, deci are loc egalitatea $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}}$. Cu schimbarea de variabilă $x^n = t$, rezultă $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$.

**II.** a) Folosind regula de derivare a produsului de funcţii, din definiţia lui $\psi$ rezultă:

$$\psi'(x) = (x^{-a}\varphi(x))' = (-a)x^{-a-1}\varphi(x) + x^{-a}\varphi'(x) = (-a)x^{-a-1}\varphi(x) + x^{-a-1} \cdot x\varphi'(x).$$

Folosind relaţia din enunţ, obţinem $\psi'(x) = (-a)x^{-a-1}\varphi(x) + x^{-a-1} \cdot a\varphi(x) = 0$. Deci $\psi$ având derivata nulă, este constantă pe intervalul conex $(0, \infty)$, şi deci $\psi(x) = c$, $\forall x > 0$. Atunci din relaţia care defineşte funcţia $\psi$, rezultă $c = x^{-a}\varphi(x)$, şi prin urmare $\varphi(x) = c \cdot x^a$.

b) i) $V(a)$ este o submulţime în spaţiul vectorial $W = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, considerat cu operaţiile din enunţ. Calitatea de spaţiu vectorial a lui $V(a)$ decurge din cea de subspaţiu vectorial în $W$, ceea ce se verifică imediat:

- Dacă $f, g \in V(a)$, din $f, g$ derivabile rezută $f + g$ derivabilă, iar prin sumare obţinem

$$\left\{\begin{array}{l} xf'(x) = af(x) \\ xg'(x) = ag(x) \end{array}\right. \Rightarrow x(f+g)'(x) = a(f+g)(x), \forall x \in \mathbb{R}, \text{ deci } f+g \in V(a).$$

- Dacă $k \in \mathbb{R}$ şi $f \in V(a)$, din $f$ derivabilă, rezultă $kf$ derivabilă, iar prin înmulţire cu $k$, rezultă

$$xf'(x) = af(x) \Rightarrow x(kf)'(x) = a(kf)(x), \forall x \in \mathbb{R}, \text{ deci } kf \in V(a).$$

Rezultă $(V(a), +, \cdot_{\mathbb{R}})$ spaţiu vectorial cu operaţiile definite în enunţ, induse din $W$.

ii) Fie $a \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$ şi $f \in V(a)$. Atunci din relaţia $xf'(x) = af(x), \forall x \in \mathbb{R}$, pentru $x = 0$ obţinem $0 = af(0)$. Dar $a \neq 0$, deci $f(0) = 0$. Fie $f \in V(a)$. Pentru $x > 0$ s-a obţinut la punctul a) forma funcţiei $f$, $f(x) = cx^a$, unde $c \in \mathbb{R}$. Pentru $x < 0$, după schimbarea de variabilă $x' = -x$ şi cu un raţionament similar celui de la punctul a), obţinem $f(x) = c(-x)^{-a}$, unde $c \in \mathbb{R}$. Deci $V(a)$ conţine acele funcţii *derivabile* care au forma

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ll} c_1(-x)^a, & \text{pentru } x < 0 \\ c_2, & \text{pentru } x = 0 \\ c_3x^a, & \text{pentru } x > 0 \end{array}\right., \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Se observă că pentru $a = 0$, obţinem $f'(x) = 0$, deci $f(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$. Pentru $a \neq 0$, punând condiţia de derivabilitate, avem

- pentru $a \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$, rexultă $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, deci $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ şi $V(a) = \{0\}$;
- pentru $a = 1$, rezultă $c_1 = -c_3$ şi $c_2 = 0$, deci $f(x) = cx, \forall x \in \mathbb{R}$;
- pentru $a > 1$ avem $c_2 = 0$, iar $c_{1,3} \in \mathbb{R}$.

Se observă că pentru $a \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$, avem $f'(0) = 0$.

iii) Pentru $a = 2 > 1$, avem $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$; şi obţinem

$$V(2) = \{c_1 \cdot f_1 + c_3 \cdot f_2 \mid c_1, c_3 \in \mathbb{R}\} = \text{Span}(\{f_1, f_2\}),$$

unde

$$f_1(x) = \left\{\begin{array}{ll} x^2, & \text{pentru } x \leq 0 \\ 0, & \text{pentru } x > 0 \end{array}\right., \qquad f_2(x) = \left\{\begin{array}{ll} 0, & \text{pentru } x \leq 0 \\ x^2, & \text{pentru } x > 0, \end{array}\right.$$

şi deci $\dim V(2) = 2$.

Pentru $a = 1$, rezultă $c_1 = -k, c_3 = k,\ k \in \mathbb{R}$ şi $c_2 = 0$; obţinem

$$V(1) = \{kf_0 \mid k \in \mathbb{R}\} = \text{Span}\,(f_0),\ \text{pentru}\ f_0(x) = x, \forall x \in \mathbb{R},\ \text{deci}\ \dim V(1) = 1.$$

Pentru $a = 1/2 \in (0,1)$, obţinem $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, deci $f = 0$, iar $V(1/2) = \{0\}$, de unde rezultă $\dim V(1/2) = 0$.

**III.** a) Fie $B = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, unde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ care satisface condiţia din enunţ. Egalitatea se rescrie

$$AB = BA \quad \Leftrightarrow \left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 2a + b = 2a + c, & 2a + 3b = 2b + 3d \\ 2c + d = a + 3c, & 2c + 3d = b + 3d \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = 2c \\ c = d - a \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2(s-t) \\ s-t \\ s \end{pmatrix} \Leftrightarrow B = \begin{pmatrix} t & 2(s-t) \\ s-t & s \end{pmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Polinomul caracteristic al matricei $B$ este

$$P_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} t-\lambda & 2(s-t) \\ s-t & s-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (s+t)\lambda + (5st - 2s^2 - 2t^2).$$

Ecuaţia caracteristică $P_B(\lambda) = 0$ conduce la rădăcinile $\lambda_1 = 2t - s$; $\lambda_2 = 2s - t$, $s, t \in \mathbb{R}$, valori proprii simple, deci $B$ este diagonalizabilă. Dar $P_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 4$ are rădăcinile reale $\hat{\lambda}_1 = 1$, $\hat{\lambda}_2 = 4$. Se observă că egalând valorile proprii ale matricelor $B$ şi $A$, avem

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \hat{\lambda}_1 \\ \lambda_2 = \hat{\lambda}_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2t - s = 1 \\ 2s - t = 4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t = 2 \\ s = 3, \end{array} \right.$$

deci pentru $t = 2, s = 3$, avem $\lambda_1 = \hat{\lambda}_1 = 1$ şi $\lambda_2 = \hat{\lambda}_2 = 4$, deci valorile proprii ale celor două matrice coincid.

*Altfel.* Printre matricele $B$ care comută cu $A$ se află şi matricea $A$, deoarece $A$ comută cu ea însăşi $(A \cdot A = A \cdot A)$. Deci existenţa unei matrice de tip $B$ cu valori proprii identice cu ale lui $A$ este asigurată chiar de matricea $A$. Se mai observă că înlocuind $t = 2, s = 3$ în expresia generică a matricelor $B$, se obţine chiar matricea $A$.

b) Considerăm automorfismele $f_\pm = \frac{1}{2}(m \pm k) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, unde $m, k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sunt respectiv proiectorii pe subspaţiile $\text{Im}\ f$ şi $\text{Ker}\ f$. Dar $f_\pm$ sunt endomorfisme în spaţii vectoriale finit-dimesnionale, deci pentru a arăta că sunt automorfisme este suficient de probat injectivitatea acestora, adică faptul că nucleul acestora este subspaţiul nul[2]. Spre exemplu, Pentru $f_+$ probăm egalitatea $\text{Ker}\ f_+ = \{0\}$ prin dublă incluziune. Deoarece $\text{Ker}\ f_+$ este subspaţiu vectorial, avem $\{0\} \subset \text{Ker}\ f_+$. Pentru incluziunea inversă, folosim faptul că suma din enunţ este directă ($\text{Im}\ f \cap \text{Ker}\ f = \{0\}$ şi faptul că suma acoperă întregul spaţiu $\mathbb{R}^n$ $(id = m + k)$. Pentru $x \in \mathbb{R}^n$, avem

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker}\ f_+ \Leftrightarrow f_+(x) = 0 \Leftrightarrow (m + k)(x) = 0 \Leftrightarrow m(x) = -k(x) \in \text{Ker}\ f \cap \text{Im}\ f = \{0\} \\ \Rightarrow m(x) = k(x) = 0 \Rightarrow m(x) + k(x) = 0 \Rightarrow \underbrace{(m + k)}_{id}(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow x \in \{0\}, \end{aligned}$$

[2]Această proprietate a endomorfismelor injective pe spaţii finit dimensionale rezultă imediat din teorema dimensiunii pentru transformări liniare, $\underbrace{\dim \mathbb{R}^n}_{n} = \underbrace{\dim \text{Ker}\ f}_{0} + \dim \text{Im}\ f$, de unde rezultă surjectivitatea constatând egalitatea dimensiunii imaginii cu cea a codomeniului $\dim \text{Im}\ f = \dim \mathbb{R}^n = n$.

deci $\text{Ker } f_+ \subset \{0\}$, rezultând trivialitatea nucleului şi injectivitatea lui $f_+$, de unde bijectivitatea lui $f_+$ pe baza observaţiei de mai sus. Pentru $F_-$ se procedează analog.

**IV.** a) Fie $\mathcal{M} = d_1 \cap d_2 \subset \mathbb{R}^3$. Această mulţime este descrisă de sistemul de ecuaţii liniare cu parametru

$$\begin{cases} x - y = 0, \quad x + y - z = 0 \\ x - z = 0, \quad x + y + z = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z = 0 \\ 0 = \lambda. \end{cases}$$

Sistemul este compatibil doar pentru $\lambda = 0$ - având în acest caz soluţia unică $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, deci $\mathcal{M} = \{O(0, 0, 0)\}$, drepte concurente în origine. Pentru $\lambda \neq 0$, sistemul este incompatibil, nu are soluţie, iar intersecţia celor două drepte este vidă ($\mathcal{M} = \emptyset$, dreptele nu se intersectează). În acest caz, vectorii directori ai celor două drepte (daţi de exemplu de produsele vectoriale ale vectorilor normali la planele ce le determină), sunt:

$$\bar{v}_1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \equiv (1, 1, 2), \quad \bar{v}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \equiv (1, -2, 1),$$

şi deoarece

$$\bar{v}^{\perp} = \bar{v}_1 \times \bar{v}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \equiv (5, 1, -3) \neq (0, 0, 0),$$

rezultă că vectorii directori $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$ nu sunt colineari, deci dreptele nu sunt paralele.

b) Dreapta căutată este perpendiculara comună $d^{\perp}$ a dreptelor $d_1$ şi $d_2$, drepte care pentru $\lambda = 1$ sunt disjuncte şi neparalele (deci $d^{\perp}$ există şi este unică). Atunci $d^{\perp} = \pi_1 \cap \pi_2$, unde

$$\begin{cases} \pi_1 \text{ este determinat de vectorii liberi } \bar{v}_1,\ \bar{v}^{\perp} \text{ şi de un punct } A_1 \in d_1 \\ \pi_2 \text{ este determinat de vectorii liberi } \bar{v}_2,\ \bar{v}^{\perp} \text{ şi de un punct } A_2 \in d_2. \end{cases}$$

Alegem $A_1(0, 0, 0) \in d_1$ şi $A_2(0, 1, 0) \in d_2$. Atunci ecuaţiile căutate sunt:

$$d^{\perp} : \begin{cases} \pi_1 : \begin{vmatrix} x - 0 & y - 0 & z - 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix} \Leftrightarrow 5x - 13y + 4z = 0 \\ \\ \pi_2 : \begin{vmatrix} x - 0 & y - 1 & z - 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix} \Leftrightarrow 5x + 8y + 11z - 8 = 0, \end{cases}$$

şi deci perpendiculara comună este dată de ecuaţiile $d^{\perp} : \begin{cases} 5x - 13y + 4z = 0 \\ 5x + 8y + 11z - 8 = 0. \end{cases}$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza locală, anul I, profil mecanic, 2011-2012

**I.** a) Obţinem $\lim\limits_{x\searrow 0} x^{1/x} = \lim\limits_{x\searrow 0} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{-\infty} = 0$, şi $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/x} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^0 = 1$.

b) i) Prin calcul direct, rezultă $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x^2)^{1/x^2}}{x}$. Avem o nedeterminare de tipul $\frac{0}{0}$. Vom calcula cele două limite laterale. Astfel

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{(x^2)^{1/x^2}}{x} = \lim\limits_{x\searrow 0} x^{\frac{2}{x^2}-1} = e^{\lim\limits_{x\searrow 0}(2-x^2)\dfrac{\ln x}{x^2}} = e^2 \cdot 0 = 0 \\ \lim\limits_{x\nearrow 0} \dfrac{(x^2)^{1/x^2}}{x} = -\lim\limits_{x\nearrow 0} \dfrac{(x^2)^{1/x^2}}{-x} = -\lim\limits_{y\searrow 0} \dfrac{(y^2)^{1/y^2}}{y} = 0. \end{cases}$$

Rezultă $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$; analog, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

ii) Calculăm $\lim\limits_{x,y\to 0} \dfrac{(x^2+y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Notând $x^2+y^2 = t$, obţinem $\lim\limits_{t\searrow 0} t^{\frac{1}{t}-\frac{1}{2}} = 0$, deci funcţia este diferenţiabilă Frechét în $(0,0)$.

iii) Pentru $(x,y) \neq (0,0)$, rezultă $\dfrac{\partial f}{\partial x} = (x^2+y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}} \cdot \dfrac{2x}{(x^2+y^2)^2}(1-\ln(x^2+y^2))$.

**II.** a) Obţinem $\ln'(x^2+1) = \dfrac{2x}{x^2+1} = 2x\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n x^{2n}$, $x \in (-1,1)$, de unde $\ln(x^2+1) = \sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n \dfrac{x^{2n+2}}{n+1}$.

b) Intervalul de convergenţă al seriei de la punctul a) este $x \in (-1,1)$, dar cum în $\pm 1$ seria este convergentă (criteriul lui Leibniz), rezultă că mulţimea de convergenţă este $[-1,1]$. Seria este uniform convergentă pe $[-r,r]$, $\forall r \in (0,1)$.

c) Avem $\dfrac{\pi^2}{6} = \sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^2} = \sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{4n^2} + \sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{1}{(2n+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{24} + \sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{1}{(2n+1)^2}$, de unde rezultă

$$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

d) Calculul intregralei conduce la

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x} = \sum_{n\geq 0}\int_0^1 (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)(n+1)} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{1}{(2n+2)(n+1)}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^2} - \sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n)^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{24}\right) = \frac{\pi^2}{24}.$$

**III.** a) Punctele critice sunt $(0,0)$ şi $(1,1)$. $(0,0)$ este punct de minim local iar $(1,1)$ nu este punct de extrem.

b) Punctul $(1,1)$ este punct critic al funcţiei $f$ şi $d^2f(1,1)(x,y) = -4e^{-2}dxdy \leq 0$, pentru $(x,y)$ în mulţimea $\{(x,y)/x \geq 0, y \geq 0\}$, deci $(1,1)$ este punct de maxim local(şi global) al funcţiei $f$ pe mulţimea cerută. Maximul cerut este $f(1,1) = 2e^{-2}$.

c) Se observă că avem $f(x,y) \leq 2e^{-2} \leq 4e^{-2}$, pentru $(x,y)$ cu proprietatea $x \geq 0, y \geq 0$, de unde inegalitatea dorită.

**IV.** a) Verificăm calitatea de subspaţiu vectorial pentru $U \subset M_{3,1}(\mathbb{R})$.

- dacă $u = (2\alpha, -\alpha, \beta)^t$, $v = (2\alpha', -\alpha', \beta')^t \in U$, atunci

$$u + v = (\underbrace{2(\alpha+\alpha')}_{2\alpha''}, \underbrace{-(\alpha+\alpha')}_{-\alpha''}, \underbrace{(\beta+\beta')}_{\beta''})^t \in U.$$

- dacă $k \in \mathbb{R}$ şi $u = (2\alpha, -\alpha, \beta)^t$, atunci $k \cdot u = (\underbrace{2(k\alpha)}_{2\alpha''}, \underbrace{-(k\alpha)}_{-\alpha''}, \underbrace{(k\beta')}_{\beta''})^t \in U.$

Vectorii din $U$ se descompun după doi generatori:

$$(2\alpha, -\alpha, \beta)^t = \alpha \underbrace{(2,-1,0)^t}_{u_1} + \beta \underbrace{(0,0,1)^t}_{u_2} \in \text{Span}\,(u_1, u_2),$$

iar matricea componentelor celor doi vectori $[u_1, u_2] = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ are rangul 2, deci familia $\{u_1, u_2\}$ este liniar independentă. Rezultă că o bază în $U$ este $B_U = \{u_1, u_2\}$.

b) Polinomul caracteristic al matricei $A$ este

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & 0 \\ -3 & -5-\lambda & 0 \\ -3 & -6 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda+2).$$

Atunci $P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{1, -2\} \subset \mathbb{R}$, iar valorile proprii ale matricei $A$ sunt $\lambda_1 = 1$ (valoare proprie dublă) şi $\lambda_2 = -2$ (valoare proprie simplă). Aflăm subspaţiile proprii asociate celor două valori proprii.

Pentru $\lambda = 1$, rezolvăm sistemul caracteristic

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a + 2b = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ t \\ s \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ s, t \in \mathbb{R},$$

deci subspaţiul propriu este $S_{\lambda=1} = \text{Span}\,(\{\underbrace{(-2,1,0)^t}_{v_1}, \underbrace{(0,0,1)^t}_{v_2}\})$.

Pentru $\lambda = -2$, obţinem sistemul caracteristic

$$\begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ -3 & -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ a + 2b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R},$$

deci subspaţiul propriu este $S_{\lambda=-2} = \text{Span}\,(\{\underbrace{(1,-1,-1)^t}_{v_3}\})$.

c) Se observă că $u_1 = -v_1$ şi $u_2 = v_2$, deci $au_1 + bu_2 = (-a)v_1 + bv_2$, deci Span $(u_1, u_2) =$ Span $(v_1, v_2)$ şi prin urmare $U$ coincide cu subspaţiul propriu $S_{\lambda=1}$.

d) Se constată că avem $\det([v_1, v_2, v_3]) = 1 \neq 0$, deci familia $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ este bază formată din vectori proprii ai matricei $A$ pentru spaţiul $\mathbb{R}^3$. Prin urmare $A$ este diagonalizabilă, cu matricea diagonalizatoare $C = [v_1, v_2, v_3] = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, matricea diagonală asociată $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, şi are loc relaţia $D = C^{-1}AC$.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza locală, anul I, profil mecanic, 2012-2013

**I.** a) Utilizând proprietăţile determinanţilor, avem:

$\det(A^2+I_n) = \det(A+iI_n)\cdot\det(A-iI_n) = \det(A+iI_n)\cdot\overline{\det(A+iI_n)} = |\det(A+iI_n)|^2 \geq 0.$

b) Căutăm inversa $B^{-1}$ a matricei $B$ de forma $B^{-1} = I_n + aA + bA^2$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Folosind egalitatea $A^3 = 0_n$, care implică $A^4 = 0_n$, relaţia $BB^{-1} = I_n$ se rescrie

$$\underbrace{(I_n + A + \frac{1}{2}A^2)}_{B}\underbrace{(I_n + aA + bA^2)}_{B^{-1}} = I_n \Leftrightarrow (a+1)A + (a+b+\frac{1}{2})A^2 = 0_n.$$

Identificând coeficienţii celor două matrice cu 0 obţinem sistemul liniar $\begin{cases} a+1=0 \\ a+b+\frac{1}{2}=0 \end{cases}$ deci $a=-1$, $b=\frac{1}{2}$. Prin urmare $B^{-1} = I_n - A + \frac{1}{2}A^2$. Se arată că

$$B\cdot\left(\frac{1}{2}A^2 - A + I_n\right) = \left(\frac{1}{2}A^2 - A + I_n\right)\cdot B = I_n.$$

Aşadar, matricea $B$ este inversabilă şi $B^{-1} = \frac{1}{2}A^2 - A + I_n$.

**II.** Fie $m = \dim \mathrm{Ker}\ T = \dim \mathrm{Im}\ T$. Pentru $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ folosind teorema dimensiunii pentru transformări liniare $\dim \mathbb{R}^2 = \dim \mathrm{Ker}\ T + \dim \mathrm{Im}\ T$, şi obţinem $2 = m + m$, deci $m = 1$. Dar $\mathrm{Im}\ T = \mathrm{Ker}\ T$ implică $T^2(v) = 0, \forall v \in \mathbb{R}^2$, deci dacă $A$ este matricea transformării $T$ în baza canonică, atunci $A^2 = 0$. În plus, $\dim \mathrm{Im}\ T = 1$ implică $\mathrm{rang}\ A = 1$, deci $A$ singulară, cu cel puţin un coeficient nenul. Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, obţinem

$$A^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+bc=0, & d^2+bc=0 \\ b(a+d)=0, & c(a+d)=0. \end{cases}$$

Distingem cazurile: (i) $b = 0 \Rightarrow a = d = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, c \in \mathbb{R}^*$; (ii) $c = 0 \Rightarrow a = d = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R}^*$; (iii) $d = -a \Rightarrow bc + a^2 \neq 0$. Dacă $b = 0$, atunci $a = d = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, c \in \mathbb{R}^*$, deci se obţine cazul (i); dacă $b \neq 0$, atunci $c = -\frac{a^2}{b}$ şi $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$. Se observă că pentru $a = 0$, cazul (iii) produce cazul (ii). În final, obţinem matricele $M_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{R}$; $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$. Transformările $T$ corespunzătoare sunt: $T(x,y) = (0, cx)$, $c \neq 0$, şi $T(x,y) = \left(ax+by, -\dfrac{a}{b}(ax+by)\right), a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^*$. Pentru $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, folosind teorema dimensiunii pentru transformări liniare, obţinem $3 = 2m$, deci contradicţie (3 nu este număr par). Deci nu există asemenea endomorfisme în $\mathbb{R}^3$.

**III.** a) Evident, $f_0(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$, iar $f_n(x) = f_{n-1}(x) - \frac{x^{2n} \cdot e^{-x^2}}{2n!}$.

b) Cu ajutorul relaţiei de recurenţă, găsim

$$f_n(x) = f_0(x) - \frac{e^{-x^2}}{2}\left(\frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + ... + \frac{x^{2n}}{n!}\right) = -\frac{e^{-x^2}}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(x^2\right)^k\right).$$

Ţinând cont că $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(x^2)^k = e^{x^2}$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = -\frac{1}{2}$.

c) Obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}$.

**IV.** a) Funcţia $f$ nu este continuă în $(0;0)$, are derivatele parţiale în origine egale cu 0 şi nu este diferenţiabilă în origine.

b) Avem $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n$. Dacă $n = 2k+1, k \in \mathbb{N}$, obţinem $I_n = \frac{k! \cdot 2^k}{(2k+1)!!}$.

c) Şirul de funcţii $(g_n)$ converge uniform la funcţia nulă $g(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza locală, anul I, profil mecanic, 2012-2013

**I.** a) Raza de convergenţă a seriei de puteri este 1. Pentru $y = 1$ seria este divergentă iar pentru $y = -1$ seria este convergentă (Leibniz), deci mulţimea de convergenţă este $y \in [-1, 1)$.

b) Cum $\ln(1-y) = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{y^n}{n}$, $y \in [-1,1)$, rezultă că $\ln(1-\cos x) = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{\cos^n x}{n}$, pentru $x \in \mathbb{R}\backslash\{2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

c) Avem $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \lim\limits_{x\to 0} \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$ nu există.

**II.** a) Derivatele parţiale sunt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,b) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,b) - f(0,b)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{b}{x}}{x} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,b) = \lim_{y\to b} \frac{f(0,y) - f(0,b)}{y-b} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{y-b} = 0.$$

b) Cum $\left|\frac{x^2\sin\frac{y}{x}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2}{|x|} = x|x|$ şi tinde la 0 când $x \to 0$ şi $y \to b$, rezultă că $f$ este diferenţiabilă Frechét în $(0,b)$.

c) Avem $\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} 2x\sin\frac{y}{x} - \cos\frac{y}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ Cum limita funcţiei în $(0,b)$ nu există, rezultă că $\frac{\partial f}{\partial x}$, nu este continuă. Pe de altă parte, $\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} x\cos\frac{y}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ iar $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\frac{y}{x} = 0$, deci avem continuitate.

**III.** a) Vârfurile triunghiului $D$ (considerate în sens trigonometric) sunt $O(0,0)$, $A(\pi,0)$, $B(0,\pi)$. Atunci cele trei laturi $OA$, $AB$, $BO$ ale frontierei admit, spre exemplu, următoarele parametrizări:

$$\begin{cases} \gamma_{OA}(t) = (t,0),\ t \in [0,\pi] \\ \gamma_{AB}(t) = (-t,\pi+t),\ t \in [-\pi,0] \\ \gamma_{BO}(t) = (0,-t),\ t \in [-\pi,0]. \end{cases}$$

b) Pentru determinarea punctelor critice ale funcţiei $f$ rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} -\sin x + \sin(x+y) = 0 \\ -\sin y + \sin(x+y) = 0, \end{cases}$$

de unde $x = y$ şi $\sin(2x) = \sin x$. Obţinem $\sin x = 0$ sau $\cos x = \frac{1}{2}$. Alegem doar punctele aflate în $D$ şi avem trei puncte staţionare $(0,0)$, $(\pi,\pi)$ şi $(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$. Primul nu este punct de extrem local al funcţiei, dar cel de-al doilea este punct de minim local, iar $(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$ este punct de maxim local.

c) Avem $\min\limits_{(x,y)\in D} f = -1$, iar $\max\limits_{(x,y)\in D} f = \dfrac{3}{2}$.

**IV.** a) Folosind liniaritatea lui $T$ şi descompunerile $u_1 = 2e_1 + 0e_2 + 1e_3 + 3e_4$, $u_2 = 0e_1 + 1e_2 + 3e_3 + 2e_4$, prima relaţie din enunţ se rescrie relativ la baza $B$:

$$\begin{aligned} T(u_1) = u_2 \quad &\Leftrightarrow 2T(e_1) + 0T(e_2) + 1T(e_3) + 3T(e_4) = 0e_1 + 1e_2 + 3e_3 + 2e_4 \\ &\Leftrightarrow [T(e_1),T(e_2),T(e_3),T(e_4)]_B \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Rescriind analog celelalte relaţii, sistemul format din relaţiile date în enunţ se scrie condensat

$$\underbrace{[T(e_1),T(e_2),T(e_3),T(e_4)]_B}_{[T]_B} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{M=[u_1,u_2,u_3,u_4]_B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{N=[u_2,u_3,u_4,u_1]_B}.$$

Deci matricea transformării $T$ relativ la baza $B$ este

$$[T]_B = N \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ \frac{29}{15} & -\frac{7}{5} & \frac{17}{15} & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Se observă că $F$ este bază în $\mathbb{R}^4$, deoarece matricea $[F]_B$ asociată acestei familii relativ la baza canonică $B$ a spaţiului este nesingulară:

$$\det[F]_B = \det[u_1,u_2,u_3,u_4]_B = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 23 \neq 0.$$

Rescriem egalităţile din enunţ relativ la baza $F$, ţinând cont de liniaritatea lui $T$:

$$\begin{cases} T(u_1) = u_2 \\ T(u_2) = u_3 \\ T(u_3) = u_4 \\ T(u_4) = u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T(u_1) = 0 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 + 0 \cdot u_4 \\ T(u_2) = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 1 \cdot u_3 + 0 \cdot u_4 \\ T(u_3) = 0 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 + 1 \cdot u_4 \\ T(u_4) = 1 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 + 0 \cdot u_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [T(u_1)]_F = (0,1,0,0)^t \\ [T(u_2)]_F = (0,0,1,0)^t \\ [T(u_3)]_F = (0,0,0,1)^t \\ [T(u_4)]_F = (1,0,0,0)^t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow [T]_F = [T(F)]_F = [T(u_1), T(u_2), T(u_3), T(u_4)]_F = \begin{pmatrix} 0&0&0&1 \\ 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}.$$

c) Determinăm polinomul caracteristic al endomorfismului $T$ utilizând oricare dintre matricele asociate ($P_T(\lambda) = P_{A=[T]_B}(\lambda) = P_{[T]_F}(\lambda)$):

$$P_T(\lambda) = \det([T]_F - \lambda I_4) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1).$$

Singurele rădăcini reale ale polinomului (valorile proprii ale matricei reale $A$) sunt $\lambda_1 = 1$ şi $\lambda_2 = -1$. Aflăm subspaţiile proprii asociate celor două valori proprii.

Pentru $\lambda = 1$, rezolvăm sistemul caracteristic asociat

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{[T]_F - \lambda_1 I_4} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + d = 0 \\ a - b = 0 \\ b - c = 0 \\ c - d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R},$$

deci subspaţiul propriu asociat valorii proprii $\lambda = 1$ este $S_{\lambda=1} = \text{Span}\,(\{\underbrace{(1,1,1,1)^t}_{v_1}\})$.

Pentru $\lambda = -1$, rezolvăm sistemul caracteristic asociat

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1&0&0&1 \\ 1&1&0&0 \\ 0&1&1&0 \\ 0&0&1&1 \end{pmatrix}}_{[T]_F - \lambda_2 I_4} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a + d = 0 \\ a + b = 0 \\ b + c = 0 \\ c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R},$$

deci $S_{\lambda=-1} = \text{Span}\,(\{\underbrace{(-1,1,-1,1)^t}_{v_2}\})$.

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
### Faza locală, anul I, profil electric, 2013-2014

**I.** 1) a) Obţinem succesiv $A+I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\det(A+I) = 10 \neq 0$, deci matricea $A + I$ este nesingulară.

b) Înmulţind la stânga şi la dreapta cu matricea inversabilă $(I + A)$, se obţine relaţia echivalentă $(I + A)(I - A) = (I - A)(I + A)$, care (ţinând cont că matricele $I$ şi $A$ comută) se rescrie ca $I - A^2 = I - A^2$, o identitate.

c) Folosim următoarele egalităţi evidente:

$$\begin{cases} A^t = -A, I^t = I, & (B^t)^{-1} = (B^{-1})^t \\ (BC)^t = C^t B^t, & (B+C)^t = B^t + C^t \\ (BC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}, & (B+C)^{-1} = B^{-1} + C^{-1} \end{cases}$$

şi obţinem $I - A$ inversabilă, cu inversa

$$(I-A)^{-1} = [(I+A)^t]^{-1} = [(I+A)^{-1}]^t,$$

iar transpusa matricei $Q = (I-A)(I+A)^{-1}$ este

$$Q^t = [(I+A)^{-1}]^t (I-A)^t = [(I+A)^t]^{-1}(I+A) = (I-A)^{-1}(I+A),$$

deci, folosind egalitatea b) rezultă $Q^tQ = (I-A)^{-1}(I+A)(I-A)(I+A)^{-1}$, egalitate care se rescrie

$$Q^tQ = (I-A)^{-1}(I+A)(I+A)^{-1}(I-A) = (I-A)^{-1}(I-A) = I.$$

2) Folosim egalitatea $Q^tQ = I$. Fie $\lambda \in \mathbb{C}$ valoare proprie a matricei $Q$, privită ca matrice cu coeficienţi complecşi, şi fie $v \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ un vector propriu de normă 1 asociat valorii proprii $\lambda$. Atunci, aplicând conjugarea complexă şi transpunerea, şi ţinând cont că matricea $Q$ este reală ($Q = \bar{Q}$), rezultă

$$Qv = \lambda v \Rightarrow Q\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v} \Rightarrow \bar{v}^t Q^t = \bar{\lambda}\bar{v}^t.$$

Înmulţind apoi termen cu termen la stânga prima egalitate cu membrii ultimei egalităţi şi folosind relaţiile $Q^tQ = I$ şi $\bar{v}^t v = ||v||^2 = 1$, rezultă

$$\bar{v}^t Q^t Q v = \bar{\lambda}\bar{v}^t \lambda v \Leftrightarrow \bar{v}^t v = \bar{\lambda}\lambda \bar{v}^t v \Leftrightarrow 1 = |\lambda|^2 \cdot 1 \ \Leftrightarrow\ |\lambda| = 1,$$

deci toate valorile proprii ale matricei $Q$ au modulul egal cu 1. Se observă că $\lambda \in \mathbb{R}$ implică $\lambda \in \{\pm 1\}$, deci valorile proprii *reale* ale lui $Q$ nu pot fi decât $\pm 1$. Pentru matricea $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4/5 & -3/5 & 0 \\ 3/5 & 4/5 & 0 \end{pmatrix}$ din problemă, polinomul caracteristic asociat

$$P_Q(\lambda) = \det(Q - \lambda I_3) = -\tfrac{1}{5}(\lambda - 1)(5\lambda^2 + 8\lambda + 5)$$

are singura rădăcină reală $\lambda = 1$. Rezolvând sistemul caracteristic, obţinem subspaţiul propriu

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4/5 & -8/5 & 0 \\ 3/5 & 4/5 & -1 \end{pmatrix}}_{Q-I_3} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{v} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{0_{\mathbb{R}^3}} \Leftrightarrow v = s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R} \ \Rightarrow\ S_{\lambda=1} = \text{Span}\,(\{(2,1,2)^t\}).$$

3) Singura proprietate care a mai rămas de demonstrat este $\det(A+I) \neq 0$. Matricea $A$ este antisimetrică de ordin trei, deci are forma $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$.

Atunci $\det(A+I_3) = \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ -a & 1 & c \\ -b & -c & 1 \end{vmatrix} = 1 + \underbrace{a^2 + b^2 + c^2}_{\geq 0} > 0$, şi prin urmare $\det(A+I_3) \neq 0$.

*Altfel.* Demonstrăm proprietatea prin reducere la absurd. Fie $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ cele trei rădăcini *complexe* ale polinomului caracteristic $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$. Folosim egalitatea $A^t = -A$ şi faptul că $A$ are ordin impar $n = 3$; obţinem

$$\det A = \det A^t = \det(-A) = (-1)^n \det A = -\det A,$$

deci $\det A = 0$, şi cum $\det A = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$, rezultă prima valoare proprie $\lambda_1 = 0$. Dacă *prin absurd* matricea $A + I = A - (-I)$ ar fi singulară, atunci am avea $P_A(-1) = 0$ şi deci a doua valoare proprie va fi $\lambda_2 = -1$. Din antisimetria matricei $A$, rezultă imediat $Tr(A) = 0$, iar din egalitatea $Tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 + (-1) + \lambda_3$ obţinem a treia valoare proprie $\lambda_3 = 1$. Pe de altă parte, folosind din nou antisimetria matricei $A$, exprimăm în două moduri diferite invariantul $J$ al matricei $A$,

$$J = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{13} \\ -a_{13} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{23} \\ -a_{32} & 0 \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1,$$

ceea ce conduce la egalitatea

$$a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2 = 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0 \Leftrightarrow \underbrace{a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2}_{\geq 0} + 1 = 0,$$

o *contradicţie*. Rezultă că matricea $A + I$ este nesingulară.

**II.** a) Obţinem $\arcsin x = x + \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n} \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ (a se vedea problema IV, faza locală, anul I, profil electric, 2010-2011).

b) Seria cerută este $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.

**III.** a) Impunem condiţia ca $v(x, y)$ să fie armonică, deci $\Delta v = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$. (a se vedea problema I b), faza locală, anul II, profil mecanic, 2006-2007).

b) Avem $\varphi(\frac{y}{x}) = C_1 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + C_2$, $C_1, C_2$ constante reale. (a se vedea problema I b), faza locală, anul II, profil mecanic, 2006-2007).

**IV.** a) Matricea $C = [c_1, c_2, c_3]$ de trecere la baza ortonormată $B' = \{c_1, c_2, c_3\}$ satisface relaţia $x = Cy$, deci $y = C^{-1}x = C^t x$, deci $y = Qx$ implică $Q = C^t$. Aflăm baza $B'$ formată din versori proprii ortogonali. Matricea fiind simetrică, valorile proprii sunt cele trei rădăcini reale ale polinomului caracteristic

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 2) \cdot [\lambda - (2 + \sqrt{2})] \cdot [\lambda - (2 - \sqrt{2})].$$

Rezolvând sistemele caracteristice asociate, obţinem

$$\begin{cases} (A - 2I)v = 0 & \Leftrightarrow v \in \text{Span } \{(-1, 0, 1)^t\} \\ [A - (2 + \sqrt{2})I]v = 0 & \Leftrightarrow v \in \text{Span } \{(1, \sqrt{2}, 1)^t\} \\ [A - (2 - \sqrt{2})I]v = 0 & \Leftrightarrow v \in \text{Span } \{(1, -\sqrt{2}, 1)^t\} \end{cases}$$

Normând generatorii celor trei subspaţii mutual ortogonale, rezultă baza ortonormată, matricea $C = [c_1, c_2, c_3]$ de trecere la această bază şi matricea $Q = C^t$

$$B' = \left\{ c_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t, c_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)^t, c_3 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) \right\},$$

deci $Q = [c_1, c_2, c_3]^t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

b) Folosind egalitatea $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix}$, se observă că funcţia de optimizat se rescrie în noua bază ortonormată în funcţie de noua variabilă $y \in \mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ după cum urmează:

$$\begin{aligned} f(x) &= \tfrac{x^tAx}{x^tx} = \tfrac{(Qy)^tA(Qy)}{(Qy)^t(Qy)} = \tfrac{y^tQ^tAQy}{y^ty} = \tfrac{y^tQ^{-1}AQy}{y^ty} \\ &= \tfrac{y^t\cdot \operatorname{diag}\,(2,2+\sqrt{2},2-\sqrt{2})\cdot y}{y^ty} = \tfrac{2y_1^2+(2+\sqrt{2})y_2^2+(2-\sqrt{2})y_3^2}{y_1^2+y_2^2+y_3^2} = g(y). \end{aligned}$$

Matricea $Q$ fiind nesingulară, folosind egalitatea $y = Qx$ se observă că $x = 0 \Leftrightarrow y = 0$, deci $g : \mathbb{R}^3\backslash\{0\} \to \mathbb{R}^3$. Mai mult, notând $z_k = \frac{y_k^2}{y_1^2+y_2^2+y_3^2}$, $k \in \overline{1,3}$, în funcţia $g$ obţinem noua funcţie de optimizat

$$\begin{aligned} &h : D = \{z = (z_1, z_2, z_3)^t \in \mathbb{R}^3 \mid z_k \geq 0,\ \forall k \in \overline{1,3},\ z_1 + z_2 + z_3 = 1\} \to \mathbb{R} \\ &g(y) = az_1 + bz_2 + cz_3 = h(z), \end{aligned}$$

unde $a = 2, b = 2 + \sqrt{2},\ c = 2 - \sqrt{2}$, definită pe interiorul închis al unui triunghi din $\mathbb{R}^3$, ale cărui vârfuri sunt tăieturile pe cele trei axe de coordonate ale planului $z_1 + z_2 + z_3 = 1$. Folosind relaţiile care definesc domeniul $D$, putem rescrie problema de extrem în raport cu primele două variabile $(z_1, z_2)$

$$\max_{(z_1,z_2)\in D'} az_1+bz_2+c(1-z_1-z_2),\ \text{unde } D' = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 \mid z_1 \geq 0, z_2 \geq 0, z_1+z_2 \leq 1\}.$$

Se observă că extremul acestei probleme de programare liniară se atinge în colţul $(z_1, z_2) = (0, 1) \in D'$, deci în punctele corespunzătoare $y_* = (y_1, y_2, y_3) = (0, s, 0)$, $s \neq 0$, în care se atinge valoarea de maxim local $g(y_*) = b = 2 + \sqrt{2}$. Valoarea corespunzătoare a argumentului $x_*$ al funcţiei iniţiale $f$ este

$$x_* = Qy_* = C^t \cdot s(0, 1, 0)^t = s(0, \tfrac{\sqrt{2}}{2}, -\tfrac{\sqrt{2}}{2})^t, \quad s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza locală, anul I, profil mecanic, 2013-2014

**I.** a) Prin calcul direct obţinem $A^2 = \begin{pmatrix} 3&3&3\\3&3&3\\3&3&3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1&1&1\\1&1&1\\1&1&1 \end{pmatrix} = 3A$. Au loc egalităţile

$$A^n = A \cdot A^{n-1} = A \cdot 3^{n-2}A = 3^{n-2}A^2 = 3^{n-2} \cdot 3A = 3^{n-1}A,\ \forall n \geq 2,$$

deci s-a demonstrat prin inducţie egalitatea $A^n = 3^{n-1}A$, $\forall n \geq 2$.

b) Dezvoltând în serie exponenţiala matricei $A$ şi folosind egalitatea demonstrată la punctul a), obţinem succesiv

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!} A^n = I + tA + \sum_{n\geq 2} \frac{t^n}{n!} A^n = I + tA + \sum_{n\geq 2} \frac{t^n \cdot 3^{n-1}}{n!} A \\ &= I + tA + \frac{1}{3} \cdot \sum_{n\geq 2} \frac{(3t)^n}{n!} A = I + tA + \frac{1}{3} \cdot [(1 + 3t + \sum_{n\geq 2} \frac{(3t)^n}{n!})A - (1 + 3t)A] \\ &= I + tA + \frac{1}{3} \cdot [e^{3t} A - (1 + 3t)A)] = I - \frac{1}{3} A + \frac{e^{3t}}{3} A = I - \frac{e^{3t} - 1}{3} A. \end{aligned}$$

c) Fie $x = (x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3$. Atunci $Ax = (x_1+x_2+x_3)\cdot(1, 1, 1)^t$. Prin calcul direct, folosind biliniaritatea produsului scalar real, rezultă $\langle Ax, Ax\rangle = 3(x_1 + x_2 + x_3)^2$.

d) Folosind monotonia strict crescătoare funcţiilor pătrat şi radical, obţinem

$$\begin{aligned} ||A||_2 &= \sup\{\sqrt{\langle Ax, Ax\rangle} \mid ||x||_2 = 1\} = \sup\{\sqrt{3(x_1 + x_2 + x_3)^2} \mid ||x||_2 = 1\} \\ &= \sqrt{3}\sqrt{\sup\{(x_1 + x_2 + x_3)^2 \mid ||x||_2 = 1\}}. \end{aligned}$$

Avem deci de maximizat lagrangianul $L(x) = (x_1 + x_2 + x_3)^2$ supus la legătura

$$||x||_2 = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = 1 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

Folosind ultima egalitate, problema de extrem revine la a calcula

$$\sup\{1 + 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0\}.$$

Această problemă de extrem este cu legături, deci asociem lagrangianul extins

$$\tilde{L}(x; \lambda) = 1 + 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) + \lambda \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1).$$

Pentru a afla punctele critice, calculăm diferenţiala totală

$$d_{x;\lambda}\tilde{L} \equiv (2(x_2+x_3)+\lambda\cdot x_1\ ,\ 2(x_3+x_1)+\lambda\cdot x_2\ ,\ 2(x_1+x_2)+\lambda\cdot x_3\ ;\ x_1^2+x_2^2+x_3^2-1).$$

Egalând cele patru componente cu 0, rezultă sistemul $\begin{cases} 2(x_2 + x_3) + \lambda \cdot x_1 = 0 \\ 2(x_3 + x_1) + \lambda \cdot x_2 = 0 \\ 2(x_1 + x_2) + \lambda \cdot x_3 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0. \end{cases}$

Sumând primele trei ecuaţii, obţinem $(\lambda + 4)(x_1 + x_2 + x_3) = 0$. Distingem două cazuri:

(i) Dacă $\lambda = -4$, din subsistemul liniar rezultă $x_1 = x_2 = x_3 = t \in \mathbb{R}$, care înlocuite în ultima ecuaţie implică $t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, deci rezultă punctele critice $p_\pm = \pm(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

(ii) Dacă $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, din subsistemul liniar rezultă $\lambda = 2$, deci apare o nouă mulţime de puncte critice $\Gamma$ formată din tripletele $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ care satisfac sistemul

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Observăm că $\Gamma$ nu conţime puncte de extrem, deoarece toate tripletele $x \in \Gamma$ satisfac $Ax = 0$, deci $\sqrt{\langle Ax, Ax\rangle} = 0$, pe când, spre exemplu, $x = p_+ \notin \Gamma$ satisface condiţia $||x||_2 = 1$, şi produce o valoare superioară a lagrangianului faţă de valoarea nulă, $\sqrt{\langle Ax, Ax\rangle} = 1 > 0$; prin urmare tripletele din $\Gamma$ produc valori inferioare comparativ cu $p_+$, deci nu sunt puncte de maxim. Verificăm că punctele critice $A_\pm$ sunt puncte de maxim pentru lagrangian. Matricea derivatelor parţiale de ordinul doi (hessiana) asociată lagrangianului în punctele $A_\pm$ este $H := Hess(L)|_{A_\pm} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ şi are minorii principali

$$\Delta_1 = -4, \Delta_2 = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 12, \Delta_3 = \det H = 0,$$

deci conform criteriului Sylvester, produce o formă pătratică negativ semidefinită, şi deci $A_\pm$ sunt puncte de maxim local pentru lagrangian. Valoarea comună a lagrangianului în aceste puncte este $L(p_\pm) = 3$ şi deci $||A|| = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$.

*Altfel (soluţie geometrică).* Calculul valorii $||A||_2$ revine la rezolvarea problemei de extrem

$$||A||_2 = \sqrt{3} \cdot \sup\{|x_1 + x_2 + x_3| \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\},$$

deci aflarea valorii maxime a modulului parametrului $a \in \mathbb{R}$ pentru care intersecţia dintre planul variabil $\pi : \ x_1 + x_2 + x_3 = a$ şi sfera $\Sigma : \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ este nevidă. Distanţa de la centrul sferei $O(0, 0, 0)$ la plan este $d = |a|/\sqrt{3}$ şi variază în intervalul $[0, r]$, unde $r = 1$ este raza sferei. Deci $d$ atinge valoarea maximă atunci când planul este tangent sferei în capetele $p_\pm$ ale diametrului sferei care are direcţia $\bar{n} \equiv (1, 1, 1)$ perpendiculară pe planul $\pi$. Intersectând sfera cu dreapta $x_1 = x_2 = x_3$ de direcţie $\bar{n}$ ce trece prin centrul sferei (dreapta suport a acestui diametru), obţinem $p_\pm = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. Pe de altă parte, egalitatea $d = r$ se rescrie $|a|/\sqrt{3} = 1$, deci $a = \pm\sqrt{3}$, şi deci $||A||_2 = \sqrt{3} \cdot | \pm \sqrt{3}| = 3$, extrem atins în punctele $p_\pm$.

**II.** a) Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = z^4 - x^4 - y^4$. Cum $f \in \mathcal{C}^\infty$, este necesar ca $\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$, deci $z \neq 0$.

b) Derivând relaţia dată în raport cu $x$, obţinem

$$4z^3 \frac{\partial z}{\partial x} - 4x^3 = 0, \tag{8}$$

de unde $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x^3}{z^3}$. Analog, derivând relaţia dată în raport cu $y$, rezultă

$$4z^3 \frac{\partial z}{\partial y} - 4y^3 = 0, \tag{9}$$

şi $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{y^3}{z^3}$. Relaţia cerută $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$ este echivalentă cu $x^4 + y^4 = z^4$, care este adevărată prin ipoteză.

c) Din $z^4(1, 0) = 1$ rezultă $z(1, 0) = \pm 1$. Avem $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 0) = \frac{1}{\pm 1} = \pm 1$, $\frac{\partial z}{\partial y}(1, 0) = 0$, de unde $df(1, 0)(x - 1, y) = \pm(x - 1)$. Derivând (8) în raport cu $x$, rezultă

$$12z^2 \left(\tfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 4z^3 \tfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 12x^2 = 0, \ \ \tfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \tfrac{12x^2 - 12z^2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}{4z^3},$$

iar $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1,0) = \frac{1-12\cdot 1}{\pm 4} = \mp\frac{11}{4}$. Derivând (9) în raport cu $y$, rezultă $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(1,0) = 0$. Avem $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^3}{z^3}$, şi $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-3x^3}{z^4}\frac{\partial z}{\partial y}$, deci $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,0) = 0$. Prin urmare

$$d^2 f(1,0)(x-1,y) = \mp\tfrac{11}{4}(x-1)^2,$$

iar polinomul Taylor cerut este $\pm(1 + (x-1) - \frac{11}{8}(x-1)^2)$.

**III.** a) Pentru $x \neq 0$, funcţia se rescrie $f(x,y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\left(\frac{y}{x}\right)^{2k} x^3 = x^3 \cos\frac{y}{x}$.

b) Derivatele parţiale cerute sunt $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

c) Deoarece $\left|\frac{x^3 \cos\frac{y}{x}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \frac{|x^3|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{|x|^3}{|x|} \leq x^2$ tinde către 0 când $(x,y) \to (0,0)$, rezultă că funcţia $f$ este diferenţiabilă Frechét.

**IV.** a) Prin calcul direct, rezultă:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix},\ A^3 = \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix},\ A^4 = O_4 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

b) Pentru $v = (0,0,0,1)^t \in \mathbb{R}^4$, obţinem succesiv

$$Av = (0,0,1,0)^t,\ A^2v = (0,1,0,0)^t,\ A^3v = (1,0,0,0)^t,$$

iar maricea $M = [v, Av, A^2v, A^3v] = \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\ 0&0&1&0\\ 0&1&0&0\\ 1&0&0&0 \end{pmatrix}$ asociată familiei $\mathcal{F} = \{v, Av, A^2v, A^3v\}$ este nesingulară ($\det M = 1 \neq 0$), deci $\mathcal{F}$ este bază în $\mathbb{R}^4$, în particular familie liniar independentă.

c) Fie combinaţia liniară nulă

$$k_0 v + k_1 T^1 v + \ldots + k_{p-1} T^{p-1} v = 0,$$

unde $k_0, \ldots, k_{p-1} \in \mathbb{R}$. Ţinând cont că $T^k = 0$, $\forall k \geq p$ şi aplicând succesiv egalităţii de mai sus transformările $T^{p-1}$, $T^{p-2}, \ldots, T^1$, $T^0 = Id$, obţinem anularea coeficienţilor combinaţiei liniare ($k_0 = 0, k_1 = 0, \ldots, k_{p-1} = 0$), deci cei $p$ vectori $\{v, Tv, T^2v, \ldots, T^{p-1}v\}$ sunt liniar independenţi.

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza interuniversitară, anul I, profil electric, 2002-2003

**I.** a) Obţinem

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} s_n(x) &= \lim_{x\to 0}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{x}{k(k+1)}\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{x}{k(k+1)}}\cdot\frac{1}{k(k+1)}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} = s_n(0),\end{aligned}$$

deci $s_n$ este continuă în $x = 0$.

b) Fie $x \in [0,1]$. Vom folosi pentru demonstrarea convergenţei uniforme a şirului $(s_n)_n$ criteriul lui Cauchy. Dacă $x = 0$, atunci

$$|s_{n+p}(0)-s_n(0)| = \left|1 - \frac{1}{n+p+1} - 1 + \frac{1}{n+1}\right| = \left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1}\right| < \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Dacă $x \in (0,\, 1]$, atunci:

$$|s_{n+p}(x) - s_n(x)| = \left|\frac{1}{x}\sum_{k=n+1}^{n+p} \ln(1 + \frac{x}{k(k+1)})\right| \leq$$

$$\leq \left|\tfrac{1}{x}\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{x}{k(k+1)}\right| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1} \to 0,$$

când $n \to \infty$, unde s-a folosit inegalitatea $\ln(1+\alpha) \leq \alpha,\ \alpha > 0$. Rezultă că pe intervalul $[0,1]$, seria $(s_n)_n$ converge uniform.

c) Ştim că

$$(\ln(1+y))' = \frac{1}{1+y} = 1-y+y^2-y^3+\ldots \Rightarrow \ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \ldots,\ |y| < 1.$$

Atunci $\ln\left(1 + \frac{x}{k(k+1)}\right) = \frac{x}{k(k+1)} - \frac{x^2}{2k^2(k+1)^2} + \frac{x^3}{3k^3(k+1)^3} - \ldots$, deci

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\cdot\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{x}{k(k+1)}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} - \frac{x}{2k^2(k+1)^2} + \frac{x^2}{3k^3(k+1)^3} - \cdots = \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} - x\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k^2(k+1)^2} + x^2\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3k^3(k+1)^3} - \ldots,\end{aligned}$$

deci

$$\begin{aligned}s(x) &= \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1} - x\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k^2(k+1)^2} + x^2\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3k^3(k+1)^3} - \ldots\right) = \\ &= 1 - x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k^2(k+1)^2} + x^2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3k^3(k+1)^3} - \ldots.\end{aligned}$$

Atunci $\frac{s(x)-s(0)}{x} = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k^2(k+1)^2} + x\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3k^3(k+1)^3} - \ldots.$

Notând $E(x) = \frac{s(x)-s(0)}{x} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k^2(k+1)^2}$, obţinem

$$E(x) = x\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3k^3(k+1)^3} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x}{4k^4(k+1)^4} + \ldots\right).$$

Atunci $\lim_{x\to 0} E(x) = 0$, deci $s'(0) + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k^2(k+1)^2}}_{\text{conv.}} = 0$ şi prin urmare funcţia $s$ este derivabilă în $x = 0$.

**II.** a) $a_0 \in (0,\,1)$, $a_n = \ln(1+a_{n-1})$, $n \geq 1$. Demonstrăm prin inducţie proprietatea $P(n):\ a_n \in (0,1)$, $\forall n \geq 0$. Avem $P(0):\ a_0 \in (0,1)$ (adevărat). Aratăm $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Fie $P(n)$ adevarată; aratăm $P(n+1):\ a_{n+1} \in (0,1)$. Dar $a_{n+1} = \ln(1+a_n) \in (0, \ln 2) \subset (0,1)$, deci $P(n+1)$ are loc. Prin urmare avem $a_n \in (0,1)$, $\forall n \geq 0$, deci $\{a_n\}$ unde $n \in \mathbb{N}^*$ este şir mărginit. Studiem monotonia şirului şi avem: $a_{n+1} - a_n = \ln(1+a_n) - a_n = \ln(\frac{1+a_n}{e^{a_n}})$. Dar $e^x \geq x+1$, $\forall x \geq 0$, deci

$$e^{a_n} \geq a_n + 1 \Leftrightarrow \frac{a_n+1}{e^{a_n}} \leq 1 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1+a_n}{e^{a_n}}\right) \leq 0 \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n \leq 0,$$

deci $\{a_n\}$ şir descrescător. Prin urmare şirul este convergent. Fie $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Trecând la limită în relaţia de recurenţă, rezultă $l = \ln(1+l) \Rightarrow e^l = 1+l$, deci $l = 0$. În final obţinem

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2(x+1)} = \frac{1}{2}.$$

b) Folosind punctul a), rezultă că seriile $\sum\limits_{n\geq 0} a_n^2$ şi $\sum\limits_{n\geq 0}(a_n - a_{n+1})$ au aceaşi natură, conform criteriului de comparaţie. Dar

$$\sum_{n\geq 0}(a_n - a_{n+1}) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(a_k - a_{k-1})\right) = \lim_{n\to\infty}(a_0 - a_n) = a_0 \in (0,1),$$

deci $\sum\limits_{n\geq 0}(a_n - a_{n+1})$ este convergentă şi deci şi seria $\sum\limits_{n\geq 0} a_n^2$ este convergentă.

**III.** a) Pentru $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, obţinem $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $A^n - I_n = A^n - I_n^n = (A - I_n)(A^{n-1} + A^{n-2} + \cdots + A + I_n)$. Dar $A^n = 0$, deci $(I_n - A)((A^{n-1} + A^{n-2} + \cdots + A + I_n) = I_n$; prin urmare $I_n - A$ este inversabilă şi $(I_n - A)^{-1} = A^{n-1} + A^{n-2} + \cdots + A + I_n$.

**IV.** a) Fie $A$ matricea lui $f$ în bază canonică. Fie $\lambda$ valoare proprie a lui $f$, iar $X \neq 0$ un vector propriu asociat. Atunci

$$AX = \lambda X \Rightarrow A^2X = \lambda^2 X \Rightarrow AX = \lambda^2 X \Rightarrow (\lambda - \lambda^2)X = 0 \Rightarrow \lambda = \lambda^2 \Rightarrow \lambda \in \{0,1\}.$$

Dacă $v$ este un vector propriu corespunzator lui $\lambda = 0$, atunci

$$Av = 0 \Leftrightarrow f(v) = 0 \Leftrightarrow v \in \text{Ker } f,$$

deci subspaţiul propriu corespunzător lui $\lambda = 0$ este $\text{Ker } f$. Dacă $v$ este un vector propriu corespunzător lui $\lambda = 1$, atunci $Av = v \Leftrightarrow f(v) = v \Leftrightarrow v \in \operatorname{Im} f$. Reciproc, fie $v \in \operatorname{Im} f$ deci există $u \in \mathbb{R}^n$ astfel incât $v = f(u)$. Folosind $f = f^2$, rezultă $f(u) = f^2(u)$, deci $v = f(v) \Leftrightarrow f(v) = 1 \cdot v$ şi deci $v$ este vector propriu corespunzător lui $\lambda = 1$. Din dubla incluziune demonstrată mai sus rezultă că subspaţiul vectorilor proprii corespunzător $\lambda = 1$ este $\operatorname{Im} f$.

b) Fie $v \in \text{Ker } f + \operatorname{Im} f \Rightarrow \begin{cases} f(v) = 0 \\ f(v) = v \end{cases} \Leftrightarrow v = 0$, deci $\text{Ker } f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$, incluziunea inversă fiind banală. Are loc evident incluziunea $\text{Ker } f + \operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}^n$. Demonstrăm incluziunea inversă: fie $v \in \mathbb{R}^n$, atunci

$$f(v - f(v)) = f(v) - f^2(v) = (f - f^2)(v) = 0$$

şi deci $v - f(v) \in \operatorname{Ker} f$. Am obţinut astfel

$$v = (v - f(v)) + f(v) \in \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$$

şi deci $\mathbb{R}^n \subset \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$. Deoarece rădăcinile complexe ale polinomului caracteristic asociat lui $f$ sunt toate reale, rezultă că $f$ este jordanizabilă. Dacă $J_* = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{pmatrix}$ este o celulă Jordan dintr-o matrice Jordan $J$ asociată lui $f$ iar $C$ este matricea de trecere de la bază iniţială la bază jordanizatoare, din $J^2 = (CAC^{-1})(CAC^{-1}) = CA^2C^{-1} = CAC^{-1} = J$, rezultă $J^2 = J$. Pe de altă parte, în caz că ordinul celulei $J_*$ este $\geq 2$, observăm că $J_*^2 \neq J_*$, deoarece

$$J_*^2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda^2 \end{pmatrix} \neq J_*$$

Deci toate celulele Jordan sunt de ordinul 1; prin urmare $f$ este diagonalizabilă.

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
### Faza interuniversitară, anul I, profil mecanic, 2002-2003

**I.** a) Se observă că deoarece $\alpha > 0$, folosind regula l'Hospital şi substituţia $t = \frac{1}{x^2}$, avem:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^\alpha} = \lim_{t \to \infty} \frac{t^{\alpha/2}}{e^t} = 0.$$

b) Folosind punctul a) pentru $\alpha = 1$, obţinem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{e^{-1/y^2}}{y} = 0.$$

c) Fie $\alpha(x,y) = \frac{f(x,y) - f(0,0) - 0(x-0) - 0(y-0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Notăm $\sqrt{x^2+y^2} = t$ şi obţinem, folosind punctul a) pentru $\alpha = 1$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \alpha(x,y) = \lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \dfrac{e^{-1/t^2}}{t} = 0$. Rezultă că $f$ este diferenţiabilă Frechét în $(0,0)$.

d) Avem dezvoltarea în serie

$$f(x,0) = e^{-1/x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{x^2}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n! \cdot x^{2n}}, \; x \neq 0,$$

deci

$$\begin{aligned} \int_1^{100} f(x,0)\,dx &= \int_1^{100} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n! \cdot x^{2n}} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \int_1^{100} x^{-2n} dx = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \left. \frac{x^{-2n+1}}{-2n+1} \right|_1^{100} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(1-2n)} \cdot \left(100^{-2n+1} - 1\right). \end{aligned}$$

Limitând eroarea (restul), obţinem

$$\left|\frac{(-1)^n}{n!\,(1-2n)}\right| = \frac{1}{n!\,(2n-1)} < 10^{-3} \Rightarrow n!\,(2n-1) > 1000,$$

deci $n_{\min} = 5$. Rezultă $\displaystyle\int_1^{100} f(x,0)\,dx \simeq \sum_{n=0}^{5} \frac{(-1)^n}{n!\,(1-2n)}\big(100^{-2n+1}-1\big)$.

**II.** a) Pentru $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, obţinem $\rho = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$, deci raza de convergenţă este $\rho = 1$. Pe frontiera mulţimii $(-1,1)$, avem cazurile:

i) Pentru $x=-1$, seria devine $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}$ divergentă.

ii) Pentru $x=1$, seria devine $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}$ convergentă (crit. Leibniz).

În concluzie, mulţimea de convergenţă este $(-1,1]$. Studiem convergenţa uniformă seriei cu criteriul lui Cauchy. Avem

$$|f_{n+1}(x)+\ldots+f_{n+p}(x)| = \left|(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} + (-1)^{n+1}\frac{x^{n+2}}{n+2} + \ldots + (-1)^{n+p-1}\frac{x^{n+p}}{n+p}\right| =$$

$$= |x|^{n+1}\cdot\left|\frac{1}{n+1} - \frac{x}{n+2} + \frac{x^2}{n+3} - \ldots + (-1)^{p-1}\frac{x^p}{n+p}\right| \le$$

$$\le \left|\frac{1}{n+1} - \frac{x}{n+2} + \frac{x^2}{n+3} - \ldots + (-1)^{p-1}\frac{x^p}{n+p}\right|.$$

Dacă $p = 2k+1$, atunci

$$\left|\frac{1}{n+1} - \frac{x}{n+2} + \frac{x^2}{n+3} - \cdots + (-1)^{p-1}\frac{x^p}{n+p}\right| =$$

$$= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{x}{n+2}\right) + \ldots + \left(\frac{x^{2k-1}}{n+2k-1} - \frac{x^{2k}}{n+2k}\right) + \frac{x^{2k+1}}{n+2k+1} =$$

$$= \frac{1}{n+1} - \left(\frac{x}{n+2} - \frac{x^2}{n+3}\right) - \ldots - \left(\frac{x^{2k}}{n+2k} - \frac{x^{2k+1}}{n+2k+1}\right) < \frac{1}{n+1}.$$

Analog se tratează cazul $p = 2k$. În concluzie, seria este uniform convergentă pe $[0,1]$.

b) $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$, $x \in (-1,1]$. Pentru $x \in (-1,1)$ avem

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-x)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \frac{1}{1+x},$$

deci $S(x) = \displaystyle\int \frac{1}{1+x}dx = \ln(1+x) + C$. Dar $S(0) = 0 \Rightarrow C = 0$, şi prin urmare $S(x) = \ln(1+x), \forall x \in (-1,1)$. Pentru $x=1$, $\displaystyle\lim_{x\nearrow 1} S(x) = S(1) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

c) Descompunem în fracţii simple termenul general al seriei:

$$\frac{1}{n\,(n+2)^2}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+2}+\frac{C}{(n+2)^2}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}A+B=0\\4A+2B+C=0\\4A=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}A=1/4\\B=-1/4\\C=-1/2,\end{array}\right.$$

deci seria se rescrie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\,(n+2)^2}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+2}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+2)^2}.$$

Dar $S(1)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}=\ln 2$, iar

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+2}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}-1+\frac{1}{2}=\ln 2-\frac{1}{2}\\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+2)^2}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}-1+\frac{1}{4}=\frac{\pi^2}{12}-\frac{3}{4},\end{aligned}$$

deci $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n\,(n+2)^2}=\dfrac{1}{4}\ln 2-\dfrac{1}{4}\ln 2+\dfrac{1}{8}-\dfrac{\pi^2}{24}+\dfrac{3}{8}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi^2}{24}.$

d) Calculăm integrala improprie

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1\ln x\cdot\ln(1+x)\,dx=\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\ \varepsilon>0}}\int_\varepsilon^1\ln x\cdot\ln(1+x)\,dx=\\&=\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\ \varepsilon>0}}\int_\varepsilon^1\ln x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot x^n dx=\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\ \varepsilon>0}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\underbrace{\int_\varepsilon^1\ln x\cdot x^n dx}_{I_{n,\,\varepsilon}}.\end{aligned}$$

Calculăm $I_{n,\,\varepsilon}$ folosind integrarea prin părţi:

$$\begin{aligned}I_{n,\,\varepsilon}&=\int_\varepsilon^1\ln x\cdot\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'dx=\ln x\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}\bigg|_\varepsilon^1-\int_\varepsilon^1\frac{1}{x}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}dx=\\&=\ln\varepsilon\cdot\frac{\varepsilon^{n+1}}{n+1}-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\bigg|_\varepsilon^1=\ln\varepsilon\cdot\frac{\varepsilon^{n+1}}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{\varepsilon^{n+1}}{(n+1)^2},\end{aligned}$$

deci

$$\begin{aligned}I&=\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\ \varepsilon>0}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\ln\varepsilon\cdot\frac{\varepsilon^{n+1}}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{\varepsilon^{n+1}}{(n+1)^2}\right)=\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(0-\frac{1}{(n+1)^2}+0\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\,(n+1)^2},\end{aligned}$$

serie convergentă conform criteriului Leibniz, deci integrala este convergentă.

Pentru a calcula suma seriei obţinute, descompunem termenul general al acesteia în fracţii simple:

$$\frac{1}{n\left(n+1\right)^2} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{(n+1)^2} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 2A+B+C=0 \\ A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=-1, \end{cases}$$

şi deci $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\left(n+1\right)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\left(n+1\right)^2}$. Obţinem

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = -\ln 2 \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = -\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} - 1\right) = -\ln 2 + 1 \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\left(n+1\right)^2} = -\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} - 1\right) = -\frac{\pi^2}{12} + 1 \end{cases}$$

deci $I = -\ln 2 + \ln 2 - 1 + \frac{\pi^2}{12} - 1 = \frac{\pi^2}{12} - 2$.

**III.** a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Determinăm forma diagonală a matricii $A$. Aflăm valorile proprii rezolvând ecuaţia caracteristică:

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2+\lambda)^2(1-\lambda) = 0;$$

obţinem $\lambda_1 = -2$, $(m_{\lambda_1} = 2)$; $\lambda_2 = 1$, $(m_{\lambda_2} = 1)$. Vectorii proprii asociaţi se determină rezolvând sistemul caracteristic, pentru fiecare valoare proprie în parte.

i) Pentru $\lambda_1 = -2$, avem $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a+b+c=0$; alegem vectorii proprii liniar independenţi $v_1 = (1,0,-1)^t$; $v_2 = (1,-1,0)^t$.

ii) Pentru $\lambda_2 = 1$, avem $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a+b+c=0 \\ a-2b+c=0 \\ a+b-2c=0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $a = b = c$; alegem un vector propriu $v_3 = (1,1,1)^t$.

Atunci matricele diagonală şi modală (de schimbare de bază) sunt, respectiv

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad C = [v_1, v_2, v_3] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Ţinând cont de egalităţile echivalente $D = C^{-1}AC \Leftrightarrow A = CDC^{-1}$, rezultă

$$A^n = CD^nC^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n \cdot 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n \cdot 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} \cdot 2^n + 1 & (-1)^{n+1} \cdot 2^n + 1 & (-1)^{n+1} \cdot 2^n + 1 \\ (-1)^{n+1} \cdot 2^n + 1 & (-1)^{n+1} \cdot 2^n + 1 & (-1)^{n+1} \cdot 2^n + 1 \\ (-1)^{n+1} \cdot 2^n + 1 & (-1)^{n+1} \cdot 2^n + 1 & (-1)^{n+1} \cdot 2^n + 1 \end{pmatrix}.$$

*Metoda 2.* Se observă că $A = U - 2I_3$, unde $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, şi că $UI_3 = I_3U$, deci $A^n = (U - 2I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} U^{n-k} \left(-2I_3\right)^k = \sum_{k=0}^{n} (-2)^k U^{n-k}$. Se poate verifica uşor prin inducţie că avem $U^k = 3^{k-1}U$, $\forall k \geq 1$. Deci

$$A^n = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} (-2)^k 3^{n-k-1}}_{T} \cdot U + (-2)^n \cdot I_3.$$

Prin calcul direct, obţinem

$$T = \frac{1}{3} \left( \sum_{k=0}^{n-1} 3^{n-k}(-2)^k + (-2)^n - (-2)^n \right) = \frac{1}{3} \left( \sum_{k=0}^{n} 3^{n-k}(-2)^k \right) - \frac{(-2)^n}{3},$$

deci $T = \frac{1}{3}(3-2)^n - \frac{(-2)^n}{3}$ iar $A^n = \frac{1-(-2)^n}{3} U + (-2)^n I_3$.

b) $e^A = C \cdot e^D \cdot C^{-1}$, iar $e^D = \begin{pmatrix} e^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & e^1 \end{pmatrix}$.

c) valorile proprii au fost calculate la punctul a).

d) Se observă că $C^{-1}A^nC = D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n \cdot 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n \cdot 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, deci valorile proprii ale matricei $A^n$ sunt $\{(-1)^n \cdot 2^n, 1\}$. Conform criteriului Sylvester, $A^n$ defineşte o formă pătratică pozitiv definită dacă şi numai dacă aceste valori proprii sunt strict pozitive, deci pentru $n$ par.

**IV.** a) $T(A) = A^t$. Avem

$$T(\alpha A + \beta B) = (\alpha A + \beta B)^t = \alpha A^t + \beta Bt = \alpha \cdot T(A) + \beta \cdot T(B),\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

deci $T$ este aplicaţie liniară.

b) Notăm

$$e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Atunci

$$\begin{cases} T\left(e_{11}\right)=e_{11}=1\cdot e_{11}+0\cdot e_{12}+0\cdot e_{21}+0\cdot e_{22}\Rightarrow [T(e_{11})]_B=(1,0,0,0)^t\\ T(e_{12})=e_{21}=0\cdot e_{11}+0\cdot e_{12}+1\cdot e_{21}+0\cdot e_{22}\Rightarrow [T(e_{12})]_B=(0,0,1,0)^t\\ T(e_{21})=e_{12}=0\cdot e_{11}+1\cdot e_{12}+0\cdot e_{21}+0\cdot e_{22}\Rightarrow [T(e_{21})]_B=(0,1,0,0)^t\\ T(e_{22})=e_{22}=0\cdot e_{11}+0\cdot e_{12}+0\cdot e_{21}+1\cdot e_{22}\Rightarrow [T(e_{22})]_B=(0,0,0,1)^t, \end{cases}$$

deci $[T]_B=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=B.$

c) Polinomul caracteristic asociat matricei $B$ este

$$P(\lambda)=\det(B-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0&0\\0&-\lambda&1&0\\0&1&-\lambda&0\\0&0&0&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2(\lambda^2-1)=(\lambda-1)^3(\lambda+1),$$

deci valorile proprii sunt $\lambda_1=1$ ($\mu_1=3$); $\lambda_2=-1$ ($\mu_2=1$). Determinăm vectorii proprii:

i) Pentru $\lambda=1$, avem $\left(\begin{smallmatrix}0&0&0&0\\0&-1&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}a\\b\\c\\d\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\\0\end{smallmatrix}\right)\Leftrightarrow b=c;\ \ a,c,d\in\mathbb{R}$, deci

$$(a,b,c,d)=a(1,0,0,0)+c(0,1,1,0)+d(0,0,0,1),\ a,c,d\in\mathbb{R}.$$

Se observă că

$$[e_{11}]=(1,0,0,0)^t,\ [e_{12}+e_{21}]=(0,1,1,0)^t,\ [e_{22}]=(0,0,0,1)^t,$$

deci o bază în subspaţiul propriu $S_{\lambda=1}$ asociat este $\{e_{11},e_{12}+e_{21},e_{22}\}$.

ii) Pentru $\lambda=-1$, avem

$$\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow (a,b,c,d)=(0,b,-b,0)=b(0,1,-1,0),\quad b\in\mathbb{R}.$$

Se observă că $[e_{12}-e_{21}]=(0,1,-1,0)^t$, deci o bază în $S_{\lambda=-1}$ este $\{e_{22}\}$.

d) $W=\{A\in V\mid T(A)=A\}$. Avem

$$T\left(A\right)=A\Leftrightarrow A^t=A\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\Leftrightarrow b=c,$$

de unde rezultă $W=\{A\in V\mid A=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\b&d\end{smallmatrix}\right)\}$. O bază în $W$ este prin urmare $\{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right);\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right);\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\}$, deci $\dim_{\mathbb{R}}W=3$.

*Metoda 2.* Se observă că $W=S_{\lambda=1}$, deci o bază în acest subspaţiu este

$$B_{S_{\lambda=1}}=\left\{e_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},e_{12}+e_{21}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},e_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}.$$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza interuniversitară, anul I, profil mecanic, 2003-2004

**I.** a) Notăm $a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}$. Atunci $s_\alpha(x) = 1 + \sum\limits_{n\geq 1} a_n x^n$ şi raza de convergenţă a seriei de puteri este $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{\alpha - n}\right| = 1$. Folosind relaţia din enunţ pentru $x \rightsquigarrow t$, cu $|t| \leq |x| < \rho$ şi integrând, obţinem

$$(1+t)\cdot {s_\alpha}'(t) = \alpha \cdot s_\alpha(t) \Leftrightarrow \frac{{s_\alpha}'(t)}{s_\alpha(t)} = \frac{\alpha}{1+t} \Rightarrow \int_0^x \frac{{s_\alpha}'(t)}{s_\alpha(t)}dt = \alpha\int_0^x \frac{1}{1+t}dt \Leftrightarrow$$
$$\ln(s_\alpha(x)) = \alpha\cdot\ln(1+x) \Leftrightarrow s_\alpha(x) = (1+x)^\alpha,$$

deci $s_\alpha$ este o funcţie care se dezvoltă în serie de puteri pe intervalul $(-\rho,\rho)$, unde $\rho = 1$.

b) Pentru $\alpha = -\frac{1}{2}$, avem

$$a_n = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n\right)}{n!} = \frac{(-1)^n\cdot 1\cdot 3\cdot\dots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!} = \frac{(-1)^n\cdot(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}.$$

c) Se ştie că $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum\limits_{n\geq 1}\frac{(-1)^n\cdot(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}\cdot x^n$, pentru $|x|<1$. Înlocuind $x \to x^2$, obţinem $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + \sum\limits_{n\geq 1}\frac{(-1)^n\cdot(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}\cdot x^{2n}$, şi apoi, înlocuind $x\to a\sin x$, rezultă

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2\sin^2 x}} = 1 + \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n\cdot(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}\cdot a^{2n}\cdot(\sin x)^{2n}.$$

Atunci integrala din enunţ devine

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1+a^2\sin^2 x}}dx = \frac{\pi}{2} + \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n\cdot(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}\cdot a^{2n}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,dx.$$

Pentru calculul lui $I_n$ facem schimbarea de variabilă $\sin^2 x = t$ (deci $x = \arcsin\sqrt{t}$, $dx = \frac{1}{\sqrt{1-t}}\cdot\frac{1}{2}\cdot t^{-1/2}dt$) şi obţinem

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 t^n(1-t)^{-1/2}\cdot\frac{1}{2}\cdot t^{-1/2}dt = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{n-\frac{1}{2}}(1-t)^{-1/2}dt = \frac{1}{2}\cdot B\left(n+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{n!} = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^2\cdot n!}\cdot\left(n-\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^2\cdot n!}\cdot\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdot\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right) = \dots = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^2\cdot n!}\cdot\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\ldots\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi(2n-1)(2n-3)\ldots 1}{2^{n+3}\cdot n!} = \frac{\pi(2n-1)!!}{2^{n+3}\cdot n!}. \end{aligned}$$

Prin urmare,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1+a^2\sin^2 x}} = \frac{\pi}{2} + \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n\cdot(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}\cdot a^{2n}\cdot\frac{\pi\,(2n-1)!!}{2^{n+3}\cdot n!} =$$

$$= \tfrac{\pi}{2} + \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n\cdot[(2n-1)!!]^2}{2^{2n+3}\cdot(n!)^2}\cdot a^{2n}.$$

**II.** a) Studiem extremele funcţiei $f_{ab}(x,y) = ax+by^2$ , $a,\ b\in\mathbb{R}$. Punctele critice sunt soluţiile sistemului

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_{ab}}{\partial x} \equiv a = 0 \\ \dfrac{\partial f_{ab}}{\partial y} \equiv 2by = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \text{ sau } y=0. \end{cases}$$

Dacă $a=0$, $b=0$, atunci $f_{ab}(x,y)=0$ constantă. Dacă $a=0$, $b\in\mathbb{R}$ atunci punctele critice sunt de forma $(x,0)$. În aceste puncte, hessiana funcţiei $f$ este $H_{f_{ab}}(x,0) = \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&2b\end{smallmatrix}\right)$, deci $d^2f_{ab}(x,0)=2b\cdot dy^2$. Dacă $b>0$, atunci avem o infinitate de puncte de minim local; dacă $b<0$, atunci avem o infinitate de puncte de maxim local.

b) Avem $f_{1,1}(x,y)=x+y^2$; ţinând cont de restricţia $x^2+y^2-1=0$, obţinem lagrangianul extins $\mathcal{L}(x,y) = x+y^2-\lambda(x^2+y^2-1)$. Punctele critice satisfac sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = 1-2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y} = 2y-2\lambda y = 0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2\lambda} \\ y(1-\lambda)=0 \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$

Dacă $\lambda=1$, atunci $x=\frac12 \Rightarrow \frac14+y^2=1\Rightarrow y^2=\frac34\Rightarrow y=\pm\frac{\sqrt3}{2}$. Dacă $\lambda\neq 1$, atunci $y=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm1\Rightarrow\lambda=\pm\frac12$. Distingem deci următoarele cazuri:

i) $(x,y)\in\left\{\left(\frac12,\pm\frac{\sqrt3}{2}\right)\right\}$, $\lambda=1$. Matricea hessiană asociată este

$$H_{\mathcal{L}}(1/2;\pm\sqrt3/2) = \left(\begin{smallmatrix}-2\lambda & 0\\ 0 & 2-2\lambda\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}-2&0\\0&0\end{smallmatrix}\right),$$

deci $d^2\mathcal{L}\left(\frac12;\pm\frac{\sqrt3}{2}\right) = -2dx^2$; prin urmare $\left(\frac12,\frac{\sqrt3}{2}\right)$ şi $\left(\frac12,-\frac{\sqrt3}{2}\right)$ sunt puncte de maxim local.

ii) $(x,y)=(1,0)$, $\lambda\in\left\{\pm\frac12\right\}$. Matricea hessiană asociată este $H_{\mathcal{L}}(1,0)=\left(\begin{smallmatrix}-1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, deci $d^2\mathcal{L}(1,0)=-dx^2+dy^2$, şi deci $(1,0)$ nu este punct de extrem local.

iii) $(x,y)=(-1,0)$, $\lambda\in\{\pm\frac12\}$. Matricea hessiană este $H_{\mathcal{L}}(-1,0)=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&3\end{smallmatrix}\right)$; minorii Jacobi sunt $\begin{cases}\Delta_1=1>0\\ \Delta_2=3>0\end{cases}$,deci $(-1,0)$ este punct de minim local.

c) Fie $\mathcal{L}_{ab}(x,y) = ax + by - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$. Punctele critice se obţin din sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}_{ab}}{\partial x} = a - 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}_{ab}}{\partial y} = 2by - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{2\lambda} \\ y\,(b - \lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Dacă $y = 0$ atunci $x = \pm 1 \Rightarrow \frac{a}{2\lambda} = \pm 1 \Rightarrow a = \pm 2\lambda$, deci $\lambda = \pm \frac{a}{2}$.
Dacă $\lambda = b$ atunci $x = \frac{a}{2\lambda} = \frac{a}{2b}$, iar $x^2 + y^2 = 1$ implică $\frac{a^2}{4b^2} + y^2 = 1$, deci

$$y^2 = 1 - \tfrac{a^2}{4b^2} \Rightarrow y = \sqrt{1 - \tfrac{a^2}{4b^2}} \text{ dacă } 1 - \tfrac{a^2}{4b^2} \geq 0.$$

Matricea hessiană asociată lagrangianului este $H_{\mathcal{L}_{ab}}(x,y) = \begin{pmatrix} -2\lambda & 0 \\ 0 & 2(b-\lambda) \end{pmatrix}$, iar în punctele critice avem

$$H_{\mathcal{L}_{ab}}(1,0) = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & 2b-a \end{pmatrix},\ H_{\mathcal{L}_{ab}}(-1,0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 2b+a \end{pmatrix},\ H_{\mathcal{L}_{ab}}\left(\tfrac{a}{2b}, \pm\sqrt{1 - \tfrac{a^2}{4b^2}}\right) = \begin{pmatrix} -2b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Distingem cazurile:

i) $b \neq 0$, $a \neq 0$, $a \neq \pm 2b$; pe lângă două puncte de extrem $\left(\frac{a}{2b}, \pm\sqrt{1 - \frac{a^2}{4b^2}}\right)$ mai există un punct de extrem în mulţimea $\{(\pm 1, 0)\}$.

ii) $b \neq 0$, $a \neq 0$, $a = \pm 2b$; există exact două puncte de extrem: $(\pm 1, 0)$.

iii) $b \neq 0$, $a = 0$; există 4 puncte de extrem: $(\pm 1, 0)$ şi $(0, \pm 1)$.

iv) $b = 0$, $a = 0$; nu există puncte de extrem.

v) $b = 0$, $a \neq 0$; există exact două puncte de extrem: $(\pm 1, 0)$.

Condiţia pentru exact 2 puncte de extrem local este ($b = 0$ şi $a \neq 0$) sau ($b \neq 0$, $a \neq 0$ şi $a \in \{\pm 2b\}$).

**III.** a) Avem $\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$. Atunci

$$\begin{aligned} L &= \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 - x_3 = 0,\ x_1 - x_2 = 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2, x_3 = 3x_1\right\} \\ &= \{x_1 \cdot (1,1,3) \mid x_1 \in \mathbb{R}\} = Span(\{(1,1,3)\}). \end{aligned}$$

Rezultă $y \in L^\perp \Leftrightarrow x_1 y_1 + x_1 y_2 + 3x_1 y_3 = 0,\ \forall x_1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x_1(y_1 + y_2 + 3y_3) = 0,\ \forall x_1 \in \mathbb{R}$, deci $y \in L^\perp \Leftrightarrow y_1 + y_2 + 3y_3 = 0$.

Demonstrăm că $L \cap L^\perp = \{0\}$. Fie $y = (y_1, y_2, y_3) \in L \cap L^\perp$. Atunci

$$\begin{cases} y \in L \Leftrightarrow (y_1, y_2, y_3) = (y_1, y_1, 3y_1) \\ y \in L^\perp \Leftrightarrow y_1 + y_2 + 3y_3 = 0. \end{cases}$$

Din cele două condiţii rezultă $11y_1 = 0$, deci $y_1 = 0 \Rightarrow y = 0$, iar $L \cap L^\perp = \{0\}$. Fie $x \in \mathbb{R}^3$. Atunci avem descompunerea

$$x = (a, a, 3a) + (x_1 - a, x_2 - a, x_3 - 3a). \tag{10}$$

Pentru ca $(x_1 - a, x_2 - a, x_3 - 3a) \in L^\perp$, este necesar ca

$$x_1 - a + x_2 - a + 3\,(x_3 - 3a) = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 + 3x_3 = 11a,$$

deci $a = \frac{x_1+x_2+3x_3}{11}$. Prin urmare orice $x \in \mathbb{R}^3$ se scrie unic ca $x = y + z$, unde $y \in L$, $z \in L^{\perp}$. Rezultă $\mathbb{R}^3 \subset L + L^{\perp}$. Se observă că incluziunea inversă este banală, deci $L + L^{\perp} = \mathbb{R}^3$, şi deoarece $L \cap L^{\perp} = \{0\}$, cele două subspaţii sunt suplementare.

b) Căutăm o bază pentru nucleul aplicaţiei $T(x) = 11\,(x - pr_L x)$. Folosind descompunerea (10), rezultă

$$pr_L x = (a, a, 3a) = \left(\frac{x_1 + x_2 + 3x_3}{11}, \frac{x_1 + x_2 + 3x_3}{11}, \frac{3\,(x_1 + x_2 + 3x_3)}{11}\right),$$

deci

$$\begin{aligned} T(x) &= 11\left(\frac{10x_1 - x_2 - 3x_3}{11}, \frac{10x_2 - x_1 - 3x_3}{11}, \frac{2x_3 - 3x_1 - 3x_2}{11}\right) = (\lambda-1)^3(\lambda+1) \\ &= (10x_1 - x_2 - 3x_3, 10x_2 - x_1 - 3x_3, 2x_3 - 3x_1 - 3x_2)\,. \end{aligned}$$

Aflăm $\operatorname{Ker} T$; impunem $T(x) = 0$, ce conduce la sistemul omogen compatibil simplu nedeterminat (rangul sistemului este 2):

$$T(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 10x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ 10x_2 - x_1 - 3x_3 = 0 \\ 2x_3 - 3x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 \\ x_3 = 3x_1,\ x_1 \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x = \left(\begin{smallmatrix} a \\ a \\ 3a \end{smallmatrix}\right),\ a \in \mathbb{R},$$

deci $\operatorname{Ker} T = L$ şi $B = \{(1, 1, 3)\}$ este o bază în $\operatorname{Ker} T$.

c) $T$ nu este injectivă, deoarece $\operatorname{Ker} T \neq \{0\}$.

d) Matricea formei pătratice

$$g\,(x_1, x_2, x_3) = 10x_1^2 - 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 10x_2^2 - 6x_2x_3 + 2x_3^2$$

este $A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & -3 \\ -1 & 10 & -3 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$. Aplicăm metoda valorilor proprii. Avem

$$\det\,(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 10-\lambda & -1 & -3 \\ -1 & 10-\lambda & -3 \\ -3 & -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\,(\lambda - 11)^2 = 0,$$

deci valorile proprii sunt $\lambda_1 = 11$, $(m_{\lambda_1} = 2)$; $\lambda_2 = 0$, $(m_{\lambda_2} = 1)$, iar forma canonică este $g(x) = 11x_1'^2 + 11x_2'^2$.

**IV.** a) Avem $\det A = 2 - a$, deci $\det A = 0 \Leftrightarrow a = 2$. În acest caz există minorul nenul $\left|\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right| = -1 \neq 0 \Rightarrow$ rang $A = 2 \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} T = \dim \mathbb{R}^3 - rang(A) = 3 - 2 = 1$. În concluzie, $\dim \operatorname{Ker} T = 1 \Leftrightarrow a = 2$.

b) Nucleul este caracterizat de sistemul liniar omogen

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = -x_1 \\ x_2 = -x_1,\ x_1 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

deci $\text{Ker } T = \{(x_1, -x_1, -x_1) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$. O bază în $\text{Ker } T$ este $\{(1, -1, -1)\}$, iar o bază ortonormată în $\text{Ker } T$ este $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$. Fie $(y_1, y_2, y_3) \in \text{Im}\, T$. Atunci

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = y_1 \\ x_1 + x_3 = y_2 \\ x_1 + x_2 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow y_1 = y_3 + y_2, \quad y_2, y_3 \in \mathbb{R}.$$

Obţinem $\text{Im}\, T = \{(y_1, y_2, y_3) \mid y_1 = y_2 + y_3, y_2, y_3 \in \mathbb{R}\}$, deci o bază în $\text{Im}\, T$ este $\{(1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$; ortonormăm această bază, folosind procedeul Gram-Schmidt; obţinem:

$$\begin{cases} v_1{}' & = v_1 = (1, 0, 1) \\ v_2{}' & = v_2 - pr_{v_1{}'} v_2 = v_2 - \dfrac{\langle v_2, v_1{}' \rangle}{\langle v_1{}', v_1{}' \rangle} v_1{}' = (1, 1, 0) - \dfrac{1}{2}(1, 0, 1) = \\ & = \left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right) \cdot 2 = (1, 2, -1). \end{cases}$$

Normând, obţinem

$$v_1{}'' = \frac{1}{||v_1{}'||} v_1{}' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad v_2{}'' = \frac{1}{||v_2{}'||} v_2{}' = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right),$$

deci o bază ortonormată a subspaţiului $\text{Im}\, T$ este $B_{\text{Im}\, T}{}' = \{v_1{}'', v_2{}''\}$.

c) Polinomul caracteristic al matricii $A$ este

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} a - \lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)\left[-\lambda^2 + \lambda(a + 1) + 2 - a\right].$$

Din condiţia ca $\lambda = 2$ să fie valoare proprie, rezultă $P(2) = 0 \Leftrightarrow 3a = 0 \Leftrightarrow a = 0$. Prin urmare, matricea $A$ are coeficienţii: $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Atunci

$$B = A^2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right),$$

matrice simetrică ($B = B^t$), care determină o formă pătratică. Minorii Jacobi ai matricii $B$ sunt

$$\Delta_1 = 2 > 0, \quad \Delta_2 = 4 - 1 = 3 > 0, \quad \Delta_3 = 8 + 1 + 1 - 2 - 2 - 2 = 4 > 0,$$

deci $B = A^2$ determină o formă pătratică pozitiv definită.

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ ”TRAIAN LALESCU”
### Faza interuniversitară, anul I, profil electric, 2004-2005

**I.** a) Pentru matricea $[f_1] = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, polinomul caracteristic asociat este

$$P_1(\lambda) = \det([f_1] - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 7 - \lambda & 2 & -2 \\ 2 & 4 - \lambda & -1 \\ -2 & -1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 3)^2(\lambda - 9),$$

deci $P_1(\lambda) = 0$ conduce la valorile proprii $\lambda_1 = 3$ ($\mu_{\lambda_1} = 2$), $\lambda_2 = 9$ ($\mu_{\lambda_2} = 1$).

Analog, pentru $[f_2] = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, avem

$$P_2(\lambda) = \det([f_2] - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ 2 & -\lambda & -2 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda + 4),$$

Ecuaţia caracteristică $P_2(\lambda) = 0$ produce valorile proprii $\lambda_1 = 2$ ($\mu_{\lambda_1} = 2$), $\lambda_2 = -4$ ($\mu_{\lambda_2} = 1$).

b) Avem $\det[f_1] = 81$. Fie $g$ operatorul rădăcină pătrată căutat, care satisface egalitatea $g^2 = f_1$. Se observă că spectrul lui $f_1$ este format din valori pozitive $\sigma([f_1]) = \{3, 3, 9\}$, deci $f_1$ admite rădăcină pătrată. Mai exact, fie $B$ este baza diagonalizatoare a lui $f_1$ de la punctul a), iar $[f_1]_B = D = C^{-1}[f_1]C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ este matricea lui $f_1$ relativ la această bază, unde $C$ este matricea de schimbare de bază. Atunci operatorul $g$ a cărui matrice relativ la $B$ este $[g]_B = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ satisface egalitatea $[g]_B^2 = [f_1]_B$. Dar ultima egalitate este independentă de bază, deci $g^2 = f_1$.

Pe de altă parte, observăm că $\det[f_2] = -16$. Dacă ar exista $g$ astfel încât $g^2 = f_2$, atunci am avea $-16 = \det[f_2] = \det[g^2] = (\det[g])^2 > 0$, deci $-16 > 0$, contradicţie. Rezultă că $f_2$ nu admite rădăcină pătrată.

c) Căutăm $X$ pentru operatorul $f_1$. Determinăm matricea $C$ a vectorilor proprii: Pentru $\lambda_1 = 3$, avem

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b - 2c = 0 \\ 2a + 2b - c = 0 \\ -2a - b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow c = 2a + b, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

iar $v_1 = (0, 1, 1)^t$, $v_2 = (1, 0, 2)^t$ formează o bază a subpaţiului propriu. Analog, pentru $\lambda_2 = 9$ avem

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -1 \\ -2 & -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -a + b - c = 0 \\ 2a - 5b - c = 0 \\ -2a - b - 5c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2c \\ b = -c \end{cases}, \quad c \in \mathbb{R},$$

iar $v_3 = (2, 1, -1)^t$ formează o bază a subpaţiului propriu. Rezultă matricea diagonalizatoare $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ şi matricea diagonală $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. Atunci $A_{f_2} = CDC^{-1}$, deci

$$X^2 = CDC^{-1} = CDC^{-1}CDC^{-1} = (CDC^{-1})^2 \Rightarrow X = \pm(CDC^{-1}).$$

Alegem

$$X = CDC^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 42 & 15 & -15 \\ 12 & 18 & -6 \\ -12 & -6 & 18 \end{pmatrix}.$$

**II.** a) Avem $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\displaystyle\int_0^x |\sin(uy)|du}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{|\sin(xy)|}{1} = 0 = f(0,0)$, deci $f$ este continuă în origine.

b) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{0-0}{x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{0-0}{y} = 0$.

c) Fie $\alpha(x,y) = \frac{f(x,y)-f(0,0)-0\cdot x-0\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{\displaystyle\int_0^x |\sin(uy)|du}{x\sqrt{x^2+y^2}}$. Atunci

$$|\alpha(x,y)| = \frac{\left|\displaystyle\int_0^x |\sin(uy)|du\right|}{|x|\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\left|\displaystyle\int_0^x |\sin(uy)|du\right|}{x^2},$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\displaystyle\int_0^x |\sin(uy)|du}{x^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{|\sin(xy)|}{2x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{|\sin(xy)|}{|xy|}\cdot\frac{y}{2}\cdot(\pm 1) = 0,$$

deci $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \alpha(x,y) = 0$ şi prin urmare $f$ este diferenţiabilă Frechét în $(0,0)$.

e) $(x,y)\to(\infty,\infty)$, deci există $k\in\mathbb{N}$ astfel încât $k\pi \leq xy \leq k\pi + \frac{\pi}{2}$; atunci conform cu d), avem $\frac{2k}{k\pi+\frac{\pi}{2}} \leq f(x,y) \leq \frac{2k+1}{k\pi}$; trecând la limită $k\to\infty$, rezultă inegalităţile $\frac{2}{\pi} \leq \lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} f(x,y) \leq \dfrac{2}{\pi}$. În concluzie, $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} f(x,y) = \dfrac{2}{\pi}$.

**III.** Calculăm invarianţii $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5\\ -1 & 1 & -3\\ -5 & -3 & 25\end{pmatrix} = 16 \neq 0$ şi $\delta = \begin{vmatrix} 1 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix} = 0$, deci conica este nedegenerată, nu are centru şi este gen parabolic, prin urmare este o parabolă. Pentru reprezentarea grafică a conicei în sistemul de coordonate $xOy$, obţinem vârful $V'(2,1)$ la intersecţia conicei cu axa de simetrie a acesteia:

$$\begin{cases} g(x,y) = 0\\ 1\cdot\frac{\partial g}{\partial x} + (-1)\frac{\partial g}{\partial y} = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y+3)^2 - 16(x-1) = 0\\ 4x-4y-4 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\\ y = 1.\end{cases}$$

Translatând sistemul de coordonate în $O'' = V$ ($xOy \to x''O''y''$) ecuaţia conicei devine $x''^2 - 2x''y'' + y''^2 - 8x'' - 8y'' = 0$. Făcând rotaţia de unghi

$$\theta = \text{arctg}\,(-\tfrac{a_{11}}{a_{12}}) = \text{arctg}\,1 = \tfrac{\pi}{4}$$

a noului sistem de coordonate ($x''O''y'' \to x'O'y'$, $O' = O''$) descrisă de relaţiile

$$\begin{cases} x'' = (x'-y')/\sqrt{2}\\ (x'+y')/\sqrt{2},\end{cases}$$

ecuaţia conicei se rescrie: $y'^2 = 4\sqrt{2}x'$. Deci graficul conicei relativ la sistemul de coordonate roto-translatat $x'O'y'$ se află în semiplanul $x' \geq 0$ (vezi desenul).

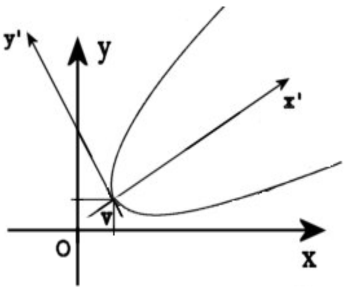


**Figura 1.**

**IV.** a) Fie $\varepsilon_0 = e^{-1}$; $n_0 \geq n$; $p = n_0! + 1 \in \mathbb{N}$, $x = 1$. Demonstrăm inegalitatea

$$\Sigma := |f_{n_0}(1) + f_{n_0+1}(1) + \ldots + f_{n_0+p}(1)| \geq e^{-1}.$$

Se observă că

$$|f_{n_0}(1) + f_{n_0+1}(1) + \ldots + f_{n_0+p}(1)| = e^{-1}\left(\frac{1}{n_0!} + \frac{1}{(n_0+1)!} + \ldots + \frac{1}{(n_0+p)!}\right)$$
$$> e^{-1} \cdot \frac{p}{n_0!} = e^{-1} \cdot \frac{n_0! + 1}{n_0!} = e^{-1}\left(1 + \frac{1}{n_0!}\right) \geq e^{-1},$$

deci suma $\Sigma$ nu este uniform convergentă pe $[0, +\infty)$.

b) Fie $p = \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2^2} \cdot \ldots \cdot \cos\frac{x}{2^n}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Atunci

$$2p\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) = \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2^2} \cdot \ldots \cdot \cos\frac{x}{2^{n-1}} \cdot \sin\frac{x}{2^{n-1}} =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2^2} \cdot \ldots \cdot \cos\frac{x}{2^{n-2}} \cdot \sin\frac{x}{2^{n-2}} = \ldots = \frac{1}{2^{n-1}}\sin x,$$

deci $p = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2^n}}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} p = \lim\limits_{n\to\infty} \sin x \cdot \dfrac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{\sin x}{x}$.

c) Fie $f_n(x) = \frac{1}{2^n} \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2^n}$. Dacă $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, atunci $|f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n} \cdot \left|\frac{x}{2^n}\right| < \frac{\pi/2}{2^{2n}} = \frac{\pi}{2^{2n+1}}$. Cum $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\pi}{2^{2n+1}}$ este convergentă, rezultă $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ absolut şi uniform convergentă pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

d) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2} f(x)dx = \lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}} \underbrace{\int_{\pi/6}^{\alpha} f(x)dx}_{I_\alpha}$, $\alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Pentru $I_\alpha$, $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ este uniform convergentă pe intervalul $\left[\frac{\pi}{6}, \alpha\right]$, deci

$$\int_{\pi/6}^{\alpha} f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{\pi/6}^{\alpha} f_n(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{\pi/6}^{\alpha}\frac{1}{2^n} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2^n}\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{6\cdot 2^n}}^{\frac{\alpha}{2^n}} \operatorname{tg} y dy =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} -\ln(\cos y)\Big|_{\frac{\pi}{6\cdot 2^n}}^{\frac{\alpha}{2^n}} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\ln\left(\cos\frac{\pi}{6\cdot 2^n}\right)}_{S_1} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\ln\left(\cos\frac{\alpha}{2^n}\right)}_{S_2},$$

unde

$$S_1 = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\cos\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{6\cdot 2}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{\pi}{6\cdot 2^{n-1}}\right) = \ln\left(\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}}\right) = \ln\left(\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\right)$$

$$S_2 = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\cos\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}\right) = \ln\left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}\right).$$

Atunci

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}} I_\alpha = \lim_{\substack{\alpha\to\frac{\pi}{2}\\ \alpha<\frac{\pi}{2}}}\left(\ln\left(\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\right) - \ln\left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}\right)\right) = \ln\left(\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\right) - \ln\left(\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}}\right) = \\ &= \ln\left(\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{2}/2}{\pi/4}\right) = \ln\left(\frac{3\sqrt{3}}{\pi}\right) - \ln\left(\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\right) = \ln\left(\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ ”TRAIAN LALESCU”
### Faza interuniversitară, anul I, profil mecanic, 2004-2005

**I.** a) Avem $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d$. Sistemul care are drept soluţii punctele critice ale funcţiei $f$, este $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+a=0 \\ 2y+b=0 \\ 2z+c=0. \end{cases}$

b) Punctele critice ale funcţiei sunt soluţiile sistemului

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x+a=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y+b=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 2z+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{a}{2} = -1 \\ y = -\dfrac{b}{2} = -2 \\ z = -\dfrac{c}{2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=4 \\ c=-6. \end{cases}$$

Avem $f(-1,-2,3) = 0 \Leftrightarrow 14+d=0 \Leftrightarrow d=14$. Deoarece $H_f = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, rezultă

$$d^2f(-1,-2,3) = 2(dx^2+dy^2+dz^2) > 0,$$

deci $(-1,-2,3)$ este punct de minim al funcţiei $f$ pentru $a=2, b=4, c=-6, d=14$.

c) Restrângem pătratele în $f$ şi obţinem:

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z+14 = (x+1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2.$$

d) i) Fie $g(x,y,z) = f(x,y,z)-1 = (x+1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2-1$. Verificăm ipotezele teoremei funcţiilor implicite pentru $g(x,y,z)$ în raport cu $z$ şi cu punctul $(-1,-2,2)$:

- $g(-1,-2,2) = 0 + 0 + 1 - 1 = 0$.
- $g \in C^1$.
- $\frac{\partial g}{\partial z} = 2(z-3) \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial z}(-1,-2,2) = -2 \neq 0$.

Conform teoremei, există o vecinătate $U \in \vartheta((-1,-2))$, o vecinătate $V \in \vartheta(2)$ şi o funcţie unică $z = z(x,y)$ asfel încât $z(-1,-2) = 2$, $z(x,y) \in V$ şi $g(x,y,z(x,y)) = 0$, $\forall (x,y) \in U$.

ii) Avem $dz(-1,-2) = \frac{\partial z}{\partial x}(-1,-2)dx + \frac{\partial z}{\partial y}(-1,-2)dy$. Derivând relaţia

$$g(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z + 11 = 0$$

în raport cu $x$, rezultă:

$$2(x+1) + 2(z-3)\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x+1}{z-3},$$

deci $\frac{\partial z}{\partial x}(-1,-2) = 0$. Procedând analog în raport cu $y$, avem $2(y+2)+2(z-3)\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, deci $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y+2}{z-3}$ şi $\frac{\partial z}{\partial x}(-1,-2) = 0$. Prin urmare $dz(-1,-2) = 0$.

iii) $x + 1 + (z-3)\frac{\partial z}{\partial x} = 0$. Derivând această egalitate în raport cu $y$, rezultă $\frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + (z-3)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$, deci $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(-1,-2) = -\frac{\frac{\partial z}{\partial y}(-1,-2)\frac{\partial z}{\partial x}(-1,-2)}{-1} = 0$.

**II.** a) Avem $\frac{\partial f}{\partial x} = -\sin(x+y) - 1$; $\frac{\partial f}{\partial y} = -\sin(x+y)$.

b) Obţinem

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} [(\sin(x+y)+1)^2 + \sin^2(x+y)]\mathbf{d}x = \\
&= \int_0^{2\pi} 2\frac{1-\cos(2x+2y)}{2}\mathbf{d}x + 2(-\cos(x+y))\Big|_0^{2\pi} + x\Big|_0^{2\pi} = \\
&= x\Big|_0^{2\pi} - \frac{\sin(2x+2y)}{2}\Big|_0^{2\pi} - 2\cos(2\pi+y)\Big|_0^{2\pi} + 2\cos y\Big|_0^{2\pi} + 2\pi = \\
&= 2\pi - \frac{\sin(4\pi+2y)}{2}\Big|_0^{2\pi} + \frac{\sin(2y)}{2}\Big|_0^{2\pi} + 2\pi = 4\pi.
\end{aligned}$$

c) $E(y) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(u^2(x,y) + v^2(x,y))\,dx$. $E'(y) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(2u\frac{\partial u}{\partial x} + 2v\frac{\partial v}{\partial y})\,dx$. Dar $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial v}{\partial x}$ şi $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$ (din ipoteză), deci

$$E'(y) = \int_0^{2\pi}(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial x})\,dx = uv|_0^{2\pi} = u(2\pi,y)\cdot v(2\pi,y) - u(0,y)v(0,y).$$

Folosind $u(2\pi,y) = u(0,y)$ şi $v(2\pi,y) = v(0,y)$, rezultă

$$E'(y) = 0 \Rightarrow E(y) = C,\ C \in \mathbb{R}.$$

**III.** a) Fie $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} T$. Atunci $T(A) = 0 \Leftrightarrow a_{11} + a_{22} = 0$, deci

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} T &= \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix} \middle| \, a_{11}, a_{12}, a_{21} \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \left\{ a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a_{11}, a_{12}, a_{21} \in \mathbb{R} \right\},\end{aligned}$$

deci $\dim \operatorname{Ker} T = 3$. Deoarece pentru orice $a \in \mathbb{R}$ şi $A = \left( \begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right)$ avem $T(A) = a$, rezultă $\operatorname{Im} T = \mathbb{R}$. Deci $\dim \operatorname{Im} T = 1$, iar $\dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T = \dim M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow 3+1 = 4$ (adevărat).

b) Fie $B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. $B \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f \Rightarrow f(B) = O_2$ şi există $C = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ a.î. $f(C) = B$. Dar

$$f(B) = 0_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \\ a + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(C) = B \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = a \\ \alpha + \beta = b \\ \alpha + \beta = b \\ \beta = c \end{cases} \Leftrightarrow b = a + c.$$

Rezultă $a = b = c = 0$, deci $B = O_2$. Incluziunea inversă este imediată: $\operatorname{Ker} f$ şi $\operatorname{Im} f$ conţin $O_2$ în calitate de subspaţii netriviale ale lui $V$, deci aceaşi calitate o are şi intersecţia lor. Incluziunea $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f \subset V$ are loc imediat (suma a doua subspaţii este subspaţiu, deci în particular este submulţime). Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in V$; atunci: $A = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}}_{\in \operatorname{Ker} f} + \underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}}_{\in \operatorname{Im} f}$. Rezultă $V \subset \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$. În concluzie $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = V$.

c) Pentru $B = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$, avem

$$(f \circ f)(B) = f(f(B)) = f \begin{pmatrix} a & T(B) \\ T(B) & b \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} a & a+b \\ a+b & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ a+b & b \end{pmatrix} = f(B).$$

Prin inducţie, se demonstrează că $f^n = f$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. În particular obţinem $g = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{2005 \text{ ori}} = f$. Construim imaginile vectorilor bazei

$$E = \left\{ m_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \, m_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \, m_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

prin transformarea $g$:

$$\begin{aligned}
g(m_1) &= \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow [g(m_1)]_E = (1,1,2)^t\\
g(m_2) &= \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow [g(m_2)]_E = (0,0,1)^t\\
g(m_3) &= \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow [g(m_3)]_E = (0,0,0)^t,
\end{aligned}$$

deci matricea lui $g$ relativ la baza $E$ este $[g]_E = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

**IV.** a) Fie $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$. Atunci

$$\begin{aligned}
P \in L_1 \quad &\Leftrightarrow \begin{cases} P(1) = 0\\ P(-1) = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0\\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = -a_0\\ a_3 = -a_1\end{cases} \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow P(x) = a_0(1-x^2) + a_1(x-x^3),
\end{aligned}$$

Rezultă că o bază a subspaţiului vectorial $L_1$ este $B = \{1-x^2, x-x^3\}$. Deoarece $P(2) = P(-2)$, obţinem analog

$$P \in L_2 \Leftrightarrow a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = a_0 - 2a_1 + 4a_2 - 8a_3 \Rightarrow a_1 = -4a_3,$$

deci

$$P \in L_2 \Leftrightarrow P(x) = a_0 - 4a_3x + a_2x^2 - a_3x^3 = a_0 + a_2x^2 + a_3(x^3 - 4x),$$

şi deci o bază a subspaţiului vectorial $L_2$ este $\{1, x^2, x^3 - 4x\}$. Fie $P \in L_1 \cap L_2$. Atunci $a_0 + a_1x - a_0x^2 - a_1x^3 = a_0 - 4a_3x + a_2x^2 + a_3x^3$, deci

$$\begin{cases} a_1 = -4a_3\\ a_2 = -a_0\\ a_3 = -a_1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_3 = 0\\ a_2 = -a_0\end{cases} \Leftrightarrow P(x) = a_0 - a_0x^2 = a_0(1-x^2),$$

şi deci o bază în $L_1 \cap L_2$ este $\{1-x^2\}$ şi $\dim(L_1 \cap L_2) = 1$. Fie

$$P \in L_1 + L_2 = L(1-x^2, x-x^3) + L(1, x^2, x^3-4x) = L(1-x^2, x-x^3, 1, x^2, x^3-4x),$$

deci

$$ax^3+bx^2+cx+d = a_0+a_1x-a_0x^2-a_1x^3+\alpha_0-4\alpha_3x+\alpha_2x^2+\alpha_3x^3 \in L(1,x^2,x,x^3) = \mathbb{R}_3[x].$$

Rezultă $\dim L_1 + L_2 = \dim P_3 = 4$. Se observă că acest rezultat se poate obţine şi aplicând teorema Grassmann:

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim(L_1) + \dim(L_2) - \dim(L_1 \cap L_2) \Leftrightarrow 4 = 2 + 3 - 1.$$

b) Deoarece $Q \in L_2 \Leftrightarrow b_1 = -4b_3$, deci

$$\langle R(x), Q(x)\rangle = 0 \Leftrightarrow a_0b_0 + a_1(-4b_3) + a_2b_2 + a_3b_3 = 0,\ \forall b_0, b_1, b_3 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_0b_0 + b_3(a_3 - 4a_1) + a_2b_2 = 0,\ \forall b_0, b_3, b_2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0,\ a_2 = 0 \\ a_3 = 4a_1 \end{cases} \Leftrightarrow R(x) = a_1x + 4a_1x^3 = a_1(x + 4x^3),\ a_1 \in \mathbb{R}.$$

Rezultă că o bază în $L_2^\perp$ este $\{x + x^3\}$, $\dim L_2^\perp = 1$. Aratăm că $L_1 + L_2 \neq P_3$. Se observă că:

$$L_1 + L_2^\perp = L(1 - x^2, x - x^3) + L(x + x^3) = L(1 - x^2, x - x^3, x + x^3),$$

deci $\dim L_1 + L_2^\perp \leq 3 < 4 = \dim P$, şi prin urmare $L_1 + L_2^\perp \neq P_3$.

c) Determinăm o bază în $L_2{}'$. Avem

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in L_2{}' \Leftrightarrow \begin{cases} P(2) = 0 \\ P(-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -4a_3 \\ a_0 = -4a_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$P(x) = 4a_2 - 4a_3x + a_2x^2 + a_3x^3 = a_2(x^2 - 4) + a_3(x^3 - 4x),\ a_2, a_3 \in \mathbb{R}.$$

De asemenea, pentru $(L_2{}')^\perp = \{R(x) \in P_3 \mid \langle R(x), Q(x)\rangle = 0, \forall Q \in L_2{}'\}$,

$$R = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in (L_2{}')^\perp = \{R \in P_3 \mid \langle R(x), P_1(x)\rangle = 0, \langle R(x), P_2\rangle = 0\}$$

se rescrie

$$\begin{cases} a_2 - 4a_0 = 0 \\ a_3 - 4a_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow R(x) = a_0 + a_1x + 4a_0x^2 + 4a_1x^3 = a_0(1 + x^2) + 4a_1(x + x^3),$$

deci o bază în $(L_2{}')^\perp$ este $\{1 + x^2,\ x + x^3\}$. Privitor la suma celor două subspaţii, avem

$$\begin{aligned} L_1 + (L_2{}')^\perp &= L(1 - x^2, x - x^3) + L(1 + x^2, x + x^3) = \\ &= L(1 - x^2, 1 + x^2, x - x^3, x + x^3) = L(1, x, x^2, x^3) = P_3, \end{aligned}$$

deci $L_1 + (L_2{}')^\perp = P_3$ şi $\dim L_1 + (L_2{}')^\perp = 4$.

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ ”TRAIAN LALESCU”
### Faza interuniversitară, anul I, profil electric, 2005-2006

**I.** a) Observăm că:

$$(\alpha - e^{ix})(\alpha - e^{-ix}) = \alpha^2 - \alpha e^{-ix} - \alpha e^{ix} + 1 = \alpha^2 - \alpha(e^{ix} + e^{-ix}) + 1 = \alpha^2 - 2\alpha\cos x + 1.$$

Rezultă $\frac{\sin x}{\alpha^2 - 2\alpha\cos x + 1} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{\alpha - e^{ix}} - \frac{1}{\alpha - e^{-ix}}\right)$. Fie $g(\alpha) = \frac{1}{\alpha - e^{ix}} - \frac{1}{\alpha - e^{-ix}}$. Atunci $g'(\alpha) = \frac{-1}{(\alpha - e^{ix})^2} + \frac{1}{(\alpha - e^{-ix})^2}$, şi în general

$$\begin{aligned} g^{(n)}(0) &= \left.\frac{(-1)^n \cdot n!}{(\alpha - e^{ix})^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1} \cdot n!}{(\alpha - e^{-ix})^{n+1}}\right|_{\alpha=0} = \\ &= (-1)^n \cdot n! \left(\frac{1}{(-1)^{n+1} \cdot e^{ix(n+1)}} - \frac{1}{(-1)^{n+1} \cdot e^{-ix(n+1)}}\right) = \\ &= n! \left(\frac{1}{e^{-ix(n+1)}} - \frac{1}{e^{ix(n+1)}}\right) = n!(e^{ix(n+1)} - e^{-ix(n+1)}) = n! \cdot 2i\sin((n+1)x). \end{aligned}$$

Rezultă $\frac{\sin x}{\alpha^2-2\alpha\cos x+1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n!\cdot\sin(n+1)x}{n!}\cdot\alpha^n$, deci $\frac{\alpha\sin x}{\alpha^2-2\alpha\cos x+1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sin(n+1)x\cdot\alpha^n$.

b) Notând $I=\displaystyle\int_{-x}^{x}\sin(nt)\cdot\sin(kt)\,dt$, avem

$$\begin{aligned} I &= \int_{-x}^{x}\frac{\cos(kt-nt)-\cos(kt+nt)}{2}\,dt=\frac{\sin t(k-n)}{2(k-n)}\Big|_{-x}^{x}-\frac{\sin t(k+n)}{2(k+n)}\Big|_{-x}^{x}= \\ &= \frac{\sin(x(k-n))+\sin(x(k-n))}{2(k-n)}-\frac{\sin(x(k+n))+\sin(x(k+n))}{2(k+n)}= \\ &= \frac{\sin(x(k-n))}{k-n}-\frac{\sin(x(k+n))}{k+n}. \end{aligned}$$

c) Obţinem succesiv $I_n(\alpha)=\displaystyle\int_{-x}^{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\sin((n+1)x)\cdot\alpha^n\right)\cdot\sin nx\ \ dx=$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\int_{-x}^{x}\sin((n+1)x)\cdot\sin nx\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin(x(2n+1))}{2n+1}\right),$$

conform punctului b), pentru $k=n+1$.

**II.** a) $F(a)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\right)\cdot\frac{1}{\cos x}\ \ dx$, $|a|<1$. Obţinem

$$\begin{aligned} F'(a) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-a\cos x}{1+a\cos x}\cdot\frac{\cos x(1-a\cos x)+(1+a\cos x)\cos x}{(1-a\cos x)^2}\cdot\frac{1}{\cos x}\,dx= \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{1-a^2\cos^2 x}\ \ dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}-a^2}\,dx=\lim_{\varepsilon\to\infty}\int_0^{\varepsilon}\frac{2\ \ dt}{t^2+1-a^2}, \end{aligned}$$

unde am efectuat substituţia $\operatorname{tg} x=t$. Dar $|a|<1\Rightarrow 1-a^2>0$, deci

$$\begin{aligned} F'(a) &= \lim_{\varepsilon\to\infty}2\cdot\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{1-a^2}}\right)\Big|_0^{\varepsilon} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\cdot\lim_{\varepsilon\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-a^2}}\right)\right)=\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}. \end{aligned}$$

b) Conform punctului a), $F'(a)=\dfrac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}$. Atunci $F(a)=\displaystyle\int\frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}\,da=$ $\pi\arcsin a+C$. Dar $F(0)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}0\,dx=0$, deci $C=0\Rightarrow F(a)=\pi\arcsin a$.

**III.** a) Fie $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\in\mathbb{R}$ a.î.

$$\begin{aligned} &\alpha_1 l_1(u)+\alpha_2 l_2(u)+\alpha_3 l_3(u)+\alpha_4 l_4(u)=0,\ \forall u\in\mathbb{R}^4\Leftrightarrow \\ &\quad\Leftrightarrow 4\alpha_1 l_1(u)+s_1\alpha_2 l_2(u)+s_2\alpha_3 l_3(u)+s_3\alpha_4 l_4(u)=0,\ \ \forall u\in\mathbb{R}^4. \end{aligned}$$

Relaţiile lui Vièté:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{4} x_i = 4, \quad \sum\limits_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{4} x_i \cdot x_j = 6 \\ \sum\limits_{\substack{i,j,k=1\\ i\neq j\neq k}}^{4} x_i \cdot x_j \cdot x_k = 4 \\ x_1x_2x_3x_4 = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_1 & = 4 \\ s_2 & = s_1^2 - 2\sum x_i \cdot x_j = 16 - 12 = 4 \\ s_3 & = 4s_2 - 6s_1 + 16 + 8\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}\right) \\ & = 32 - 24 + 8 \cdot \frac{4}{-8} = 4, \end{cases}$$

implică $4\alpha_1 u_1 + 4\alpha_2 u_2 + 4\alpha_3 u_3 + 4\alpha_4 u_4 = 0,\ \forall u \in \mathbb{R}^4 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$, deci $l_j(u)$ sunt liniar independente.

b) Din definiţie, $Q(u) = \sum\limits_{l=1}^{4} s_{l-1}u_1u_2 + \sum\limits_{l=1}^{4} s_l u_2 u_l + \sum\limits_{l=1}^{4} s_{l+1}u_3u_l + \sum\limits_{l=1}^{4} s_{l+2}u_4u_l$, deci

$$\begin{aligned} Q(u) &= s_0u_1^2 + s_1u_1u_2 + s_2u_1u_3 + s_3u_1u_4 + s_1u_2u_1 + s_1u_2^2 + s_3u_2u_3 + s_4u_2u_4 + \\ &\quad + s_2u_3u_1 + s_3u_3u_2 + s_4u_3^2 + s_5u_3u_4 + s_3u_4u_1 + s_4u_4u_2 + s_5u_4u_3 + s_6u_4^2 = \\ &= s_0u_1^2 + 2s_1u_1u_2 + s_2(u_2^2 + 2u_1u_3) + s_3(2u_1u_4 + 2u_2u_3) + \\ &\quad + s_4(2u_2u_4 + u_3^2 + u_3^2) + 2s_5u_3u_4 + s_6u_4^2. \end{aligned}$$

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{4} l_j^2 &= \sum_{j=1}^{4}(u_1 + x_ju_2 + x_j^2u_3 + x_j^3u_4)^2 = \sum_{j=1}^{4}(u_1^2 + x_j^2u_2^2 + x_j^4u_3^2 + x_j^6u_4^2 + 2x_ju_1u_2 + \\ &\quad + 2x_j^2u_1u_3 + 2xj^3u_1u_4 + 2x_j^3u_2u_3 + 2x_j^2u_2u_4 + 2x_j^5u_3u_4) = \\ &= s_0u_1^2 + s_2(u_2^2 + 2u_1u_3) + 2s_3(u_1u4 + u_2u_3) + 2s_4(u_3^2 + u_2u_4) + 2s_5u_3u_4 + s_6u_4^2. \end{aligned}$$

Rezultă $Q(u) = \sum\limits_{j=1}^{4} l_j^2$.

c) $A = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \\ s_3 & s_4 & s_5 & s_6 \end{pmatrix}$, unde $\begin{cases} s_0 = 4 \\ s_1 = 4 \\ s_2 = 4 \\ s_3 = 4 \end{cases}$. Obţinem

$$\begin{cases} s_4 - 4s_3 + 6s_2 - 4s_1 - 32 = 0 \Rightarrow s_4 = 16 - 24 + 16 + 32 = 40 \\ s_5 - 4s_4 + 6s_3 - 4s_2 - 8s_1 = 0 \Rightarrow s_5 = 160 - 24 + 16 + 32 = 184 \\ s_6 - 4s_5 + 6s_4 - 4s_3 - 8s_2 = 0 \Rightarrow s_6 = 736 - 240 + 16 + 32 = 544, \end{cases}$$

deci $A = 4\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 10 & 46 \\ 1 & 10 & 46 & 136 \end{pmatrix}$. Pentru aducerea la forma canonică a formei pătratice

$Q(u) = 4(u_1^2 + 2u_1u_2 + 2u_1u_3 + 2u_1u_4 + u_2^2 + 2u_2u_3 + 20u_2u_4 + 10u_3^2 + 92u_3u_4 + 136u_4^2)$

folosim metoda Gauss; se obţine:

$$\begin{aligned}
Q(u) &= 4[(u_1+u_2+u_3+u_4)^2+9u_3^2+135u_4^2+18u_2u_4+90u_3u_4] = \\
&= 4[(u_1+u_2+u_3+u_4)^2+9(u_3^2+15u_4^2+2u_2u_4+10u_3u_4)] = \\
&= 4\{(u_1+u_2+u_3+u_4)^2+9[(u_3+5u_4)^2+2u_2u_4-10u_4^2]\} = \\
&= 4\{(u_1+u_2+u_3+u_4)^2+9(u_3+5u_4)^2+9[-10(u_4-\tfrac{u_2}{2\sqrt{5}})^2+10\cdot\tfrac{u_2^2}{20}]\} = \\
&= 4x_1^2+9x_2^2-90x_3^2+\tfrac{9}{2}x_4^2, \quad \text{deci signatura este } (3,1).
\end{aligned}$$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza interuniversitară, anul I, profil mecanic, 2005-2006

**I.** a) Avem $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3y^3}{x^4+y^4}, & \text{pentru } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{pentru } (x,y)=(0,0)\end{cases}$. Calculăm $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^3y^3}{x^4+y^4}$.

Dar $\left|\frac{x^3y^3}{x^4+y^4}\right| \leq \left|\frac{x^3y^3}{2x^2y^2}\right| = \left|\frac{xy}{2}\right|$, iar $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\left|\frac{xy}{2}\right|=0$, rezultă $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^3y^3}{x^4+y^4}=0=f(0,0)$ şi deci $f$ este continuă în $(0,0)$.

b) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{0-0}{x}=0$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{0-0}{y}=0$.

c) Fie $\alpha(x,y)=\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x^3y^3}{(x^4+y^4)\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x^2y^2}{x^4+y^4}\cdot\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Atunci

$$|\alpha(x,y)|=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{2x^2y^2}{x^4+y^4}\cdot\frac{\sqrt{2|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\sqrt{|xy|}\leq\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{|x|\,|y|}.$$

Dar membrul drept tinde spre 0 pentru $x\to0, y\to0$, deci $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\alpha(x,y)=0$, deci $f$ este diferenţiabilă Fréchet în $(0,0)$.

d) Avem $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n},n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\frac{1}{n^4}+n^4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{n^8+1}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ şi seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ este convergentă, deci seria dată este convergentă.

**II.** a) Avem $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}(2x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2^{2n+1}}}2\sin^{2n+1}x\cdot\cos^{2n+1}x\,dx$, deci folosind schimbarea de variabilă $\sin x=y$ (care implică $\cos x=y', dx=dy$), obţinem $I_n=\displaystyle\int_0^1 2^{2n+1}y^{2n+1}\cdot(1-y^2)^n\,dy$. Notând $y^2=z$ ($\Rightarrow y=z^{1/2}, dy=\frac{1}{2}z^{-1/2}dz$), rezultă

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^1 2z^nz^{1/2}(1-z)^n\frac{1}{2}z^{-1/2}\,dz=\int_0^1 z^n(1-z)^n\,dz=B(n-1,n-1)= \\
&= \frac{\Gamma(n-1)\cdot\Gamma(n-1)}{\Gamma(2n-2)}=\frac{(n-2)!(n-2)!}{(2n-3)!},\quad n\geq2.
\end{aligned}$$

Pentru $n=0 \Rightarrow I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\,dx = -\frac{\cos(2x)}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1+1}{2} = 1.$
Pentru $n=1$, avem

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(2x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)(1-\cos^2(2x)\,dx = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(2x)\cdot \sin(2x)\,dx = 1 + \frac{\cos^3(2x)}{6}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 + \frac{-1-1}{6} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

b) $I_n = \int_a^b (x-a)^n(b-x)^n\,dx$. Notăm $x = a+(b-a)t \in [0,1]$ şi obţinem

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 (b-a)^n t^n (b-a)^n (1-t)^n (b-a)\,dt = \\ &= (b-a)^{2n+1}\int_0^1 t^n(1-t)^n\,dt = (b-a)^{2n+1}\cdot B(n-1,n-1) = \\ &= (b-a)^{2n+1}\cdot \frac{(n-2)!\cdot(n-2)!}{(2n-3)!};\;\; n\geq 2. \end{aligned}$$

Pentru $n=0 \Rightarrow I_0 = \int_a^b \,dx = x|_a^b = b-a$. Pentru $n=1$, avem

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_a^b (x-a)(b-x)\,\mathrm{d}dx = \int_a^b (xb - x^2 - ab + ax)\,dx = \\ &= \frac{-x^3}{3}\Big|_a^b + \frac{x^2}{2}(b+a)\Big|_a^b - abx\,\Big|_a^b = -\frac{(b^3-a^3)}{3} + \frac{(b^2-a^2)(b+a)}{2} - ab(b-a). \end{aligned}$$

c) Obţinem

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{I_n} &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(b-a)^{2n+1}((n-2)!)^2}{(2n-3)!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n} = \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(b-a)^{2n+3}(n-1)!(n-1)!}{(2n-1)!}\cdot\frac{(2n-3)!}{(b-a)^{2n+1}(n-2)!(n-2)!} = \\ &= (b-a)^2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)^2}{(2n-2)(2n-1)} = \frac{(b-a)^2}{4}. \end{aligned}$$

**III.** a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, deci $F$ bază a lui $\mathbb{R}^3$. Pentru coordonatele lui $v$, avem $v = \alpha(1,1,0)+\beta(1,1,1)+\gamma(1,0,0)$, deci

$$\begin{cases} 1 = \alpha+\beta+\gamma \\ 2 = \alpha+\beta \\ 3 = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 3 \\ \gamma = -1 \end{cases} \Rightarrow v = (-1)\cdot(1,1,0) + 3\cdot(1,1,1) + (-1)\cdot(1,0,0).$$

b) $T_m(v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & m \\ 1 & 0 & 1 \\ m & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3m \\ 4 \\ m+2 \end{pmatrix}$.

c) Luăm $m = 0$, deci $A_0 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Obţinem forma diagonală

$$\det(A_0 - \lambda I_3) = \left|\begin{smallmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{smallmatrix}\right| = -\lambda^3 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = \sqrt{2} \\ \lambda_3 = -\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow D_0 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{smallmatrix}\right).$$

Aflăm vectorii proprii ai matricei $A$:

$$\lambda_1 = 0 \quad \Rightarrow \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a + c = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$$

$$\lambda_2 = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \left(\begin{smallmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \Rightarrow \begin{cases} -a\sqrt{2} + b = 0 \\ a - b\sqrt{2} + c = 0 \\ b - c\sqrt{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = c \\ b = a\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{smallmatrix}\right),$$

$$\lambda_3 = -\sqrt{2} \quad \Rightarrow \left(\begin{smallmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \Rightarrow \begin{cases} a\sqrt{2} + b = 0 \\ a + b\sqrt{2} + c = 0 \\ b + c\sqrt{2} = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -a\sqrt{2} \\ a = c \end{cases} \Rightarrow v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{smallmatrix}\right),$$

deci $C_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Avem $A_0 = C_0 D_0 C_0^{-1} \Rightarrow A_0^{2006} = C_0 D_0^{2006} C_0^{-1}$, de unde rezultă

$$C_0^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}, D_0^{2006} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{1003} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{1003} \end{pmatrix}$$

şi deci

$$A_0^{2006} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{1003} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{1003} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

**IV.** a) 1) Verificăm axiomele produsului scalar:

- pozitivitate: $g(x,x) = \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2 + x_3^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^3$ şi

$$g(x,x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0 \Leftrightarrow x = (0,0,0);$$

- simetrie: $g(x,y)=g(y,x)$ (evident);
- aditivitate în primul argument:

$$g(x+y,z)=(x_1+y_1)z_1+\tfrac{1}{2}[(x_1+x_2)z_2+(x_2+y_2)z_1]+(x_2+y_2)z_2+$$
$$+(x_3+y_3)z_3=x_1z_1+\tfrac{1}{2}(x_1z_2+x_2z_1)+x_2z_2+x_3z_3+y_1z_1+\tfrac{1}{2}(y_1z_2+y_2z_1)+$$
$$+y_2z_2+y_3z_3=g(x,z)+g(y,z);$$

- omogenitate în primul argument:

$$g(\lambda x,y)=\lambda x_1y_1+\frac{1}{2}(\lambda x_1y_2+\lambda x_2y_1)+\lambda x_2y_2+\lambda x_3y_3=\lambda\cdot g(x,y).$$

Deci $g(x,y)$ este produs scalar pe $V$.

b) Vom utiliza procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt

$$\begin{aligned}
v_1 &= (1,0,0)\\
v_2 &= (0,1,0)-\frac{g((0,1,0),(1,0,0))}{g((1,0,0),(1,0,0))}\cdot(1,0,0)=(0,1,0)-\frac{0+\frac{1}{2}(0+1)+0+0}{1+\frac{1}{2}(0+0)+0+0}\cdot(1,0,0)=\\
&=(0,1,0)-\left(\frac{1}{2},0,0\right)=\left(-\tfrac{1}{2},1,0\right);\\
v_3 &= (0,0,1)-\frac{g((0,0,1),(1,0,0))}{g((0,0,1),(0,0,1))}\cdot(1,0,0)-\frac{g((0,0,1),(0,1,0))}{g((0,1,0),(0,1,0))}\cdot(0,1,0)=\\
&=(0,0,1)-0\cdot(1,0,0)-0\cdot(0,1,0)=(0,0,1),
\end{aligned}$$

deci $E'=\{v_1,v_2,v_3\}$ este baza ortogonalizată.

c) $\cos\theta=\frac{g(e_1,e_2)}{\sqrt{g(e_1,e_1)}\cdot\sqrt{g(e_2,e_2)}}=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{1}}=\frac{1}{2}$.

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ ”TRAIAN LALESCU”
### Faza naţională, anul I, profil cercetare, 2007-2008

**II.** a) ”$\Rightarrow$” Presupunem că $V=\operatorname{Ker} f+\operatorname{Im} f$. Fie $v\in\operatorname{Im} f\Rightarrow\exists u\in V$ astfel încât $f(u)=v$. Dar $u=x+y$ unde $x\in\operatorname{Ker} f$ şi $y\in\operatorname{Im} f\Rightarrow f(x)=0$ şi $y=f(z)$, deci

$$v=f(u)=f(x+y)=f(x)+f(y)=0+f^2(z)=f^2(z)\Rightarrow v\in\operatorname{Im} f^2$$

Rezultă $\operatorname{Im} f\subset\operatorname{Im} f^2$ (*). Pentru a arăta incluziunea inversă ($\operatorname{Im} f^2\subset\operatorname{Im} f$), fie $v\in\operatorname{Im} f^2\Rightarrow\exists u\in V$ astfel încât $f^2(u)=v\Rightarrow v=f(f(u))\Rightarrow v\in\operatorname{Im} f$, şi deci $\operatorname{Im} f^2\subset\operatorname{Im} f$ (**). Din (*) şi (**), rezultă $\operatorname{Im} f=\operatorname{Im} f^2$.

b) ”$\Rightarrow$” Presupunem adevărată egalitatea $\operatorname{Ker} f\cap\operatorname{Im} f=\{0\}$. Demonstrăm egalitatea $\operatorname{Ker} f=\operatorname{Ker} f^2$ prin dublă incluziune. Avem

$$v\in\operatorname{Ker} f\Rightarrow f(v)=0\Rightarrow f^2(v)=0\Rightarrow v\in\operatorname{Ker} f^2,$$

deci am obţinut $\operatorname{Ker} f\subset\operatorname{Ker} f^2$. Reciproc, avem

$$v\in\operatorname{Ker} f^2\Rightarrow f^2(v)=0\Rightarrow f(f(v))=0\Rightarrow f(v)\in\operatorname{Ker} f;$$

cun însă $f(v) \in \operatorname{Im} f$, rezultă

$$f(v) \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\} \Rightarrow f(v) = 0 \Rightarrow v \in \operatorname{Ker} f;$$

am obţinut astfel incluziunea $\operatorname{Ker} f^2 \subset \operatorname{Ker} f$. Concluzionăm că are loc egalitea dorită, $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.

"$\Leftarrow$" Presupunem $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$. Fie $v \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f \Rightarrow f(v) = 0$ şi există $x \in V$ a.î. $f(x) = v$. Dar $f^2(x) = f(v) = 0 \Rightarrow x \in \operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow v = 0$, deci $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.

**III.** Aflăm valorile proprii ale matricii $A = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(a) & b \cdot \operatorname{sh}(a) \\ \frac{\operatorname{sh}(a)}{b} & \operatorname{ch}(a) \end{pmatrix}$. Avem

$$\det(A + \lambda I_2) = \begin{vmatrix} \operatorname{ch}(a) - \lambda & b \cdot \operatorname{sh}(a) \\ \frac{\operatorname{sh}(a)}{b} & \operatorname{ch}(a) - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\operatorname{ch}(a) - \lambda)^2 = (\operatorname{sh}(a))^2,$$

deci $\lambda \in \{\operatorname{ch}(a) \pm \operatorname{sh}(a)\}$. Determinăm câte o bază în subspaţiile proprii:

i) pentru $\lambda = \operatorname{ch}(a) - \operatorname{sh}(a)$, $a \neq 0$, avem

$$(A - \lambda I_2)\, v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(a) & b \cdot \operatorname{sh}(a) \\ \frac{\operatorname{sh}(a)}{b} & \operatorname{ch}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sh}(a)\,(a_1 + ba_2) = 0 \Leftrightarrow a_1 = -ba_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_2 \begin{pmatrix} -b \\ 1 \end{pmatrix},\ a_2 \in \mathbb{R}.$$

ii) pentru $\lambda = \operatorname{ch}(a) + \operatorname{sh}(a)$, $a \neq 0$, avem

$$(A - \lambda I_2)v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\operatorname{sh}(a) & b \cdot \operatorname{sh}(a) \\ \frac{\operatorname{sh}(a)}{b} & -\operatorname{sh}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b_1 = b \cdot b_2,\ b_2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = b_2 \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix},\ b_2 \in \mathbb{R}.$$

$T$ trebuie să fie matrice cu vectori proprii ai lui $A$, de exemplu

$$T = \begin{pmatrix} -b & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(a) - \operatorname{sh}(a) & 0 \\ 0 & \operatorname{ch}(a) + \operatorname{sh}(a) \end{pmatrix}.$$

iii) Din ii) rezultă $A = T \cdot B \cdot T^{-1} \Rightarrow A^n = T \cdot B^n \cdot T^{-1}$. Avem

$$B = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(a) - \operatorname{sh}(a) & 0 \\ 0 & \operatorname{ch}(a) + \operatorname{sh}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^a + e^{-a}}{2} - \frac{e^a - e^{-a}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{e^a + e^{-a}}{2} + \frac{e^a - e^{-a}}{2} \end{pmatrix},$$

deci $B = \begin{pmatrix} e^{-a} & 0 \\ 0 & e^a \end{pmatrix}$, iar $\det T = -2b \neq 0$ şi $T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1/b & 1 \\ 1/b & 1 \end{pmatrix}$. Obţinem succesiv

$$A^n = \begin{pmatrix} -b & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-na} & 0 \\ 0 & e^{na} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2b} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2b} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(na) & b \operatorname{sh}(na) \\ \frac{1}{b} \operatorname{sh}(na) & \operatorname{ch}(na) \end{pmatrix}.$$

**IV.** a) Avem $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$; $u_0 = 0$. Arătăm că

$$\int_{n+1}^{2n+1} \frac{1}{x} dx \leq u_n \leq \int_{n}^{2n} \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow \ln(2n+1) - \ln(n+1) \leq u_n \leq \ln(2n) - \ln n. \quad (11)$$

Pentru a demonstra inegalitatea (11), vom aplica succesiv teorema lui Lagrange funcţiei $\ln x$.

$$\begin{cases} \text{pe } [n, n+1] & \Rightarrow \exists c_n \in (n, n+1) \text{ a.î. } \ln(n+1) - \ln n = \dfrac{1}{c_n} \\ \text{pe } [n+1, n+2] & \Rightarrow \exists c_{n+1} \in (n+1, n+2) \text{ a.î. } \ln(n+2) - \ln(n+1) = \dfrac{1}{c_{n+1}} \\ \ldots \\ \text{pe } [2n-1, 2n] & \Rightarrow \exists c_{2n-1} \in (2n-1, 2n) \text{ a.î. } \ln(2n) - \ln(2n-1) = \dfrac{1}{c_{2n-1}} \end{cases}$$

Sumând, obţinem $\frac{1}{c_n} + \cdots + \frac{1}{c_{2n-1}} = \ln(2n) - \ln n$. Dar

$$\frac{1}{c_n} + \cdots + \frac{1}{c_{2n-1}} \geq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n},$$

deci $u_n \leq \ln(2n) - \ln n$. Analog, aplicând teorema pe intervalele $[n+1, n+2]$, $\ldots$,$[2n, 2n+1]$ se obţine şi cealaltă inegalitate. Rezultă $\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \leq u_n \leq \ln\left(\frac{2n}{n}\right)$, deci conform criteriului cleştelui, obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ln 2$, deci şirul $u_n$ este convergent.

b) Folosind rezultatul de la punctul a), avem

$$\sum_{n=0}^{\infty} (u_{n+1} - u_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = \lim_{n\to\infty} u_{n+1} - u_0 = \lim_{n\to\infty} u_{n+1} = \ln 2.$$

c) Seria de puteri se rescrie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (u_{n+1} - u_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \right) x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \cdot x^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot x^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\sqrt{x}\right)^{2n}}_{S_1} - \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n}_{S_2}.$$

Pentru $S_1$, notăm $\sqrt{x} = t$. Atunci $S_1 = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} t^{2n}$. Dar, pentru $s$ satisfăcând $|s| \leq |t| < 1$, avem

$$\sum_{n=0}^{\infty} s^{2n} = \frac{1}{1-s^2} \Rightarrow \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} s^{2n} ds = \int_0^t \frac{1}{1-s^2} dt \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right|,$$

şi deci $S_1 = \frac{1}{2t} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln \left| \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right| = f(x)$.

Pentru $S_2$, avem $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$. Înlocuind $x$ cu $s$, pentru $|s| \leq |x| < 1$ avem

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} s^n dx = \int_0^x \frac{1}{1-s} ds \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln|1-x|\,.$$

Rezultă $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n+1} = -\dfrac{1}{x}\ln|1-x| = -2g(x)$, deci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (u_{n+1} - u_n)\, x^n = f(x) + g(x)$.

d) Folosond rezultatul de la punctul b), obţinem:

$$\lim_{x\to 1} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} (u_{n+1} - u_n)\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (u_{n+1} - u_n) = \ln 2.$$

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
### Faza naţională, anul I, profil electric, 2007-2008

**I.** a) Demonstrăm că $[x] + [x + \frac{1}{2}] = [2x]$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Distingem cazurile:
i) $x \in \left[k,\, k + \frac{1}{2}\right] \Rightarrow$ relaţia devine $k + k = 2k$, (adevărat).
ii) $x \in \left[k + \frac{1}{2}, k + 1\right] \Rightarrow$ relaţia devine $k + (k+1) = 2k + 1$ (adevărat).

Rezultă $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$.

b) Fie

$$\begin{aligned} S_n(x) \quad &= \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{x + 2^k}{2^{k+1}}\right] = \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{x}{2^{k+1}} + \frac{1}{2}\right] = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\left[2 \cdot \frac{x}{2^{k+1}}\right] - \left[\frac{x}{2^{k+1}}\right]\right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\left[\frac{x}{2^k}\right] - \left[\frac{x}{2^{k+1}}\right]\right), \end{aligned}$$

deci $S_n(x) = [x] - \left[\frac{x}{2^{n+1}}\right]$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left([x] - \left[\frac{x}{2^{n+1}}\right]\right) = \begin{cases} [x], & x \geq 0 \\ [x] + 1, & x < 0. \end{cases}$$

Cum $f$ nu este funcţie continuă, seria $S_n(x)$ nu este uniform convergentă.

c) Funcţiile discontinue $g_n(x) = \begin{cases} g(x), & x \neq 0 \\ g(0) + \frac{1}{n}, & x = 0 \end{cases}$ aproximează oricât de bine funcţia diferenţiabilă arbitrară $g(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

**II.** Avem

$$V = \{M \in M_n(\mathbb{C}) \mid \exists A, \in M_n(\mathbb{C}), M = AB - BA\} = \{[A, B] \mid A, B \in M_n(\mathbb{C})\}.$$

Dar $Tr(AB) = Tr(BA)$, deci pentru orice matrice $M$ de forma $M = AB - BA \in V$, avem $Tr(M) = Tr(AB - BA) = 0$. Rezultă $V \subset W$, unde

$$W = \{A|Tr(A) = 0\} = \{A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \mid a_{n,n} = -(a_{11} + \cdots + a_{n-1,n-1})\}.$$

Fiind descrisă de o ecuaţie omogenă, submulţimea $W \subset M_n(\mathbb{C})$ este subspaţiu vectorial, iar o bază a lui $W$ este

$$B = \{E_{ij} \mid i \neq j; i, j \in \overline{1,n}\} \cup \{F_i \mid i = \overline{1, n-1}\},$$

unde

$$E_{ij} = \{(m_{kl})|m_{kl} = \delta^i_k \delta^j_l\},\ F_i = \{(m_{kl})|m_{kl} = \delta^k_i \delta^k_i - \delta^i_n \delta^l_n\}$$

şi unde s-a folosit notaţia (simbolul lui Kronecker) $\delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

Prin calcul direct se verifică egalităţile

$$[E_{ij}, E_{lk}] = \begin{cases} E_{il}, & j \neq k \\ F_j, & j = k, i = l = n, \end{cases}$$

deci $B \subset V \Rightarrow W \subset V$. Rezultă $V = W$, şi deci

$$\dim V = \dim W = \text{ card } B = (n^2 - n) + n - 1 = n^2 - 1.$$

**III.** a) Forma polară $\mathcal{A}$ asociata lui $\varphi$ se obţine prin dedublare:

$$\mathcal{A}(x, y) = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 3x_3 y_3 + \frac{1}{2}(x_1 y_2 + y_1 x_2) + \frac{1}{2}(x_1 y_3 + x_3 y_1) + \frac{1}{2}(x_2 y_3 + x_3 y_2),$$

pentru orice $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Verificăm pentru $\mathcal{A}$ proprietăţile produsului scalar:

i) Pozitivitate:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x, x) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 x_2 + x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_2^2 + 2x_3^2 = \\ &= \tfrac{1}{2}((x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2) + x_2^2 + 2x_2^3 \geq 0; \\ \mathcal{A}(x, x) &= 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0 \Rightarrow x = 0. \end{aligned}$$

ii) Simetrie: $\mathcal{A}(x, y) = \mathcal{A}(y, x)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^3$ (evident);

iii) Omogenitate în primul argument: $\mathcal{A}(\lambda x, y) = \lambda A(x, y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^3$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ (evident);

iv) Aditivitate în primul argument:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x + \bar{x}, y) &= (x_1 + \bar{x}_1)y_1 + 2(x_2 + \bar{x}_2)\bar{y}_2 + 3(x_3 + \bar{x}_3)\bar{y}_3 + \tfrac{1}{2}[(x_1 + \bar{x}_1)y_3 + (x_3 + \bar{x}_3)y_1] \\ &\quad + \tfrac{1}{2}[(x_1 + x_1)y_2 + (x_2 + \bar{x}_2)y_1] = \mathcal{A}(x, y) + \mathcal{A}(\bar{x}, y),\ \forall x, \bar{x}, y \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Deci $\mathcal{A}$ este un produs scalar şi avem $||x|| = \sqrt{\mathcal{A}(x, x)}$, $\forall x \in \mathbb{R}^3$. Prin urmare,

$$||e_1|| = \sqrt{\mathcal{A}(e_1, e_1)} = 1,\ ||e_2|| = \sqrt{\mathcal{A}(e_2, e_2)} = \sqrt{2},\ ||e_3|| = \sqrt{\mathcal{A}(e_3, e_3)} = \sqrt{3},$$

iar $\cos(\widehat{e_1, e_2}) = \frac{\mathcal{A}(e_1, e_2)}{||e_1|| \cdot ||e_2||} = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza naţională, anul I, profil mecanic, 2007-2008

**I.** a) Sfera are centrul $O(0,0,0)$. Dreapta $(D)$ care trece prin $O$ şi este perpendiculară pe $(H)$ taie planul în centrul $P$ al cercului. Atunci

$$\{P\} = (S) \cap (H) : \begin{cases} \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow P = (1,1,1).$$

Raza sferei este $R = \sqrt{9} = 3$, iar distanţa de la 0 la $(H)$ este $d = \frac{|0+0+0-3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \sqrt{3}$, deci aplicând teorema lui Pitagora, raza cercului de secţiune $(C)$ este

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{9-3} = \sqrt{6}.$$

b) O asemenea sferă are centrul pe drepta $(D)$, deci centrul acesteia este un punct $M(t,t,t) \in (D)$. Condiţia $d(M,(H))^2 + r^2 = R^2$ se rescrie

$$\left(\frac{|t+t+t-3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\right)^2 + 6 = R^2 \Leftrightarrow R = \sqrt{6 + 3(t-1)^2}.$$

Prin urmare, ecuaţiile sferelor din enunţ sunt:

$$(x-t)^2 + (y-t)^2 + (z-t)^2 = 3(t-1)^2 + 6,\ t \in \mathbb{R}.$$

c) Condiţia $R = 6$ se rescrie:

$$6 = \sqrt{6 + 3(t-1)^2} \Leftrightarrow 10 = (t-1)^2 \Leftrightarrow t \in \{t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{10}\}.$$

Exista două soluţii:

$$(x - t_k)^2 + (y - t_k)^2 + (z - t_k)^2 = 6,\ k = \overline{1,2}.$$

**II.** Alegem $X = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$; prin calcul direct, obţinem $X^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & \alpha\beta+\beta\gamma \\ 0 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^2 \end{pmatrix}$.
Relaţia din enunţ conduce la sistemul

$$\begin{cases} \alpha^2 + a\alpha + b = 0 \\ \alpha\beta + \beta\gamma + a\beta = 0 \\ \gamma^2 + a\gamma + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \in \{\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}\} \\ \gamma \in \{\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}\} \\ \beta(\alpha + \gamma + a) = 0. \end{cases}$$

Alegem $\alpha = \alpha_0 = \frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$; $\gamma = \gamma_0 = \frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$ şi obţinem $\alpha + \gamma + a = 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, deci rezultă familia infinită de soluţii $\left\{ \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & \beta \\ 0 & \alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_0 \end{pmatrix} \middle| \beta \in \mathbb{R} \right\}$.

**III.** a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Avem $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} \neq 0$, deoarece alegând $x_n = y_n = \frac{1}{n} \to 0$ pentru $n \to \infty$, obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2\frac{1}{n^2}}{2\frac{1}{n^2}} = 1$, deci funcţia $f$ nu este continuă în $(0,0)$. Calculăm derivatele parţiale ale funcţiei în origine:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{0-0}{x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{0-0}{y} = 0. \end{cases}$$

Pentru $(x,y) \neq (0,0)$, obţinem $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2(y^2-x^2y)}{(x^2+y^2)^2}, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2(x^2-y^2x)}{(x^2+y^2)^2}.$
Nefiind continuă în origine, rezultă $f$ nu este diferenţiabila în origine.

b) Obţinem succesiv

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ f\left(\sin\frac{t}{2}, \cos\frac{t}{2}\right)\right]^n dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{1}\right)^n dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n\, dt.$$

Dacă $n = 2k+1$, atunci $\quad I_{2k+1} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2k+1}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t)^k \sin t\, dt.$

Cu schimbarea de variabilă $\cos t = y$, obţinem $I_{2k+1} = \displaystyle\int_0^1 (1-y^2)^k\, dy.$

Cu o nouă schimbare de variabilă $y^2 = u$ (deci $y = u^{\frac{1}{2}}$ şi $dy = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du$), rezultă

$$\begin{aligned} I_{2k+1} &= \int_0^1 (1-u)^k \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}}\, du = \frac{1}{2}\int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}(1-u)\, du = \\ &= \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, k+1\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\cdot\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\frac{3}{2})} = \\ &= \frac{1}{4}\frac{\sqrt{\pi}\cdot k!}{\Gamma(k+\frac{3}{2})} = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{\pi}\cdot k!}{(k+\frac{1}{2})\Gamma(k+\frac{1}{2})} = \\ &= \frac{1}{4}\frac{\sqrt{\pi}\cdot k!}{(k+\frac{1}{2})(k-\frac{1}{2})\Gamma(k-\frac{1}{2})} = \cdots = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{\pi}\cdot k!}{(k+\frac{1}{2})(k-\frac{1}{2})\ldots\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = \\ &= \frac{1}{2}\frac{k!}{\frac{2k+1}{2}\frac{2k-1}{2}\ldots\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{k!2^{k+1}}{(2k+1)!!} = \frac{k!2^k}{(2k+1)!!}. \end{aligned}$$

Dacă $n = 2k$, atunci $I_{2k} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2k}\, dt$. Cu schimbarea de variabilă $\sin t = y$ (deci $t = \arcsin y$ şi $dt = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy$), obţinem $I_{2k} = \displaystyle\int_0^1 y^{2k}(1-y^2)^{-\frac{1}{2}}\, dy$, iar cu schimbarea de variabilă $y^2 = u$ (deci $y = \sqrt{u}$ şi $dy = \frac{du}{2\sqrt{u}}$), rezultă

$$\begin{aligned} I_{2k} &= \int_0^1 u^k (1-u)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}}\, du = \frac{1}{2}\int_0^1 u^{k-\frac{1}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}\, du = \\ &= \frac{1}{2} B\left(k+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(k+1)} = \frac{1}{2}\frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Gamma(k+\frac{1}{2})}{k!} = \\ &= \cdots = \frac{1}{2}\frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2}(k-\frac{1}{2})\ldots\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{k!} = \frac{1}{2^{k+3}}\frac{\pi(2k-1)!!}{k!}. \end{aligned}$$

In concluzie $I_n = \begin{cases} \frac{k!2^k}{(2k+1)!!}, & n = 2k+1 \\ \frac{\pi(2k-1)!!}{2^{k+3}k!}, & n = 2k, n \geq 1. \end{cases}$

c) Obţinem $g_n(x) = \frac{1}{2n}\frac{2x^2 n}{x^4+n^2} = \frac{x^2}{x^4+n^2}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^2}{x^4+n^2} = 0$, de unde $g(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Notăm $h(x) = \frac{x^2}{x^4+n^2}$. Pentru a determina $\sup_{x\in\mathbb{R}} h(x)$, calculăm $h'(x) = \frac{2x(n^2-x^4)}{(x^4+n^2)^2}$ şi avem $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, \pm\sqrt{n}\}$. Din tabelul de variaţie al funcţiei $h$ rezultă: $\sup_{x\in\mathbb{R}} h(x) = h(-\sqrt{n}) = h(\sqrt{n}) = \frac{1}{2n} \to 0$ pentru $n \to \infty$, deci şirul de funcţii $\{g_n\}$ converge uniform la $g$.

**IV.** Termenul general al seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\alpha^n}{n^\beta \sin\frac{1}{n}}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ este $a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\alpha^n}{n^\beta \sin\frac{1}{n}}$. Aplicând criteriul raportului, obţinem:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^\beta \sin\frac{1}{n+1}}\,\frac{n^\beta \sin\frac{1}{n}}{\alpha^n}\right| = |\alpha| \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\beta-1}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\,\frac{\frac{1}{n+1}}{\sin\frac{1}{n+1}} = |\alpha|.$$

Distingem urmatoarele cazuri:

i) Dacă $|\alpha| < 1 \Rightarrow$ serie convergentă (absolut convergentă).

ii) Dacă $|\alpha| > 1 \Rightarrow$ serie divergentă.

iii) Dacă $|\alpha| = 1 \Rightarrow$ avem subcazurile:

iii.1) Pentru $\alpha = -1$ seria devine $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^\beta \sin\frac{1}{n}}$. Dacă $\beta > 0 \Rightarrow$ serie convergentă (criteriul lui Leibniz); dacă $\beta < 0 \Rightarrow$ serie divergentă, deoarece nu există limita $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^\beta \sin\frac{1}{n}}$ (criteriul de necesitate);

iii.2) Pentru $\alpha = 1$, seria se rescrie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\beta \sin\frac{1}{n}}$. Aplicăm criteriul logaritmic şi obţinem: $l = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n^\beta \sin\frac{1}{n})}{\ln n} = \beta + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(\sin\frac{1}{n})}{\ln n}$. Dar

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\sin\frac{1}{x})}{\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\sin\frac{1}{x}}\left(-\cos\frac{1}{x}\right) = -1,$$

deci $l = \beta - 1$. Dacă $\beta - 1 > 1$ atunci seria este convergentă. Dacă $\beta - 1 < 1$ atunci seria este divergentă.

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
### Faza naţională, anul I, profil cercetare * rezerva #2, 2007-2008

**I.** Fie $\lambda \in \mathbb{C}$ o rădăcină a polinomului caracteristic $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) \in \mathbb{C}[\lambda]$ al matricii $A$. Dacă $v \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ este un vector propriu asociat lui $\lambda$, atunci folosind relaţiile $Av = \lambda v$ şi $A^3 = A$, avem $0 = (A^3 - A)v = A^3 v - Av = \lambda^3 v - \lambda v = (\lambda^3 - \lambda)v$, deci $(\lambda^3 - \lambda)v = 0$. Dar $v \neq 0$, deci $\lambda^3 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{0, \pm 1\} \subset \mathbb{R}$. Deci matricea

$A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ este jordanizabilă, iar spectrul matricii este $\sigma(A) = \{0, \pm 1\}$. Arătăm că $A$ este diagonalizabilă. Fie $\lambda \in \sigma(A) = \{0, \pm 1\}$ o valoare proprie a matricii. Dacă prin absurd ar exista un vector *principal* ataşat unui vector propriu $v \neq 0$ asociat acestei valori proprii, atunci ar avea loc relaţia $(A - \lambda I_n)p = v \Leftrightarrow Ap = \lambda p + v$, deci, folosind egalitatea $\lambda^3 = \lambda$, obţinem

$$\begin{aligned}\lambda p + v &= Ap = A^3 p = A^2(\lambda p + v) = \lambda A \cdot Ap + \lambda^2 v = \lambda A(\lambda p + v) + \lambda^2 v = \\ &= \lambda^2 Ap + 2\lambda^2 v = \lambda^2(\lambda p + v) + 2\lambda^2 v = \lambda^3 p + 3\lambda^2 v = \lambda p + 3\lambda^2 v.\end{aligned}$$

Deci $\lambda p + v = \lambda p + 3\lambda^2 v \Leftrightarrow v = 3\lambda^2 v \Leftrightarrow (3\lambda^2 - 1)v = 0$. Dar $\lambda \in \{0, \pm 1\}$, deci $3\lambda^2 - 1 \neq 0$, iar $v \neq 0$, deci ultima egalitate nu poate avea loc, contradicţie. Rezultă că $\lambda$ nu poate admite vectori principali, ci doar vectori proprii. Prin urmare $A$ este diagonalizabilă şi pentru orice $\lambda \in \sigma(A)$ avem egalităţile

$$\dim S_\lambda = \mu_\lambda = n - \text{ rang } (A - \lambda I_n), \tag{12}$$

unde $S_\lambda \subset \mathbb{R}^n$ este subspaţiul propriu asociat valorii proprii $\lambda$ şi $\mu_\lambda$ este multiplicitatea algebrică a lui $\lambda$ (ordinul de multiplicitate al lui $\lambda$ ca rădăcină a polinomului caracteristic $P(\lambda)$). Folosind relaţia (12) pentru fiecare valoare proprie distinctă $\lambda \in \sigma(A) = \{0, \pm 1\}$, obţinem

$$\begin{cases} \mu_{\lambda=0} &= n - \text{ rang } (A - 0 \cdot I_n) \\ \mu_{\lambda=1} &= n - \text{ rang } (A - 1 \cdot I_n) \\ \mu_{\lambda=-1} &= n - \text{ rang } (A - (-1) \cdot I_n). \end{cases}$$

Sumând cele trei egalităţi şi folosind egalitatea $n = \mu_{\lambda=0} + \mu_{\lambda=1} + \mu_{\lambda=-1}$, rezultă

$$n = 3n - (\text{ rang } (A) + \text{ rang } (A - I_n) + \text{ rang } (A + I_n))$$

şi deci $\text{rang } (A) + \text{ rang } (A - I_n) + \text{ rang } (A + I_n) = 2n$.

**II.** a) Notând $e^{-x} = t$, seria dată se rescrie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$. Noua serie are ca domeniu de convergenţă $|t| < 1 \Leftrightarrow |e^{-x}| < 1 \Leftrightarrow -x < 0 \Leftrightarrow x > 0$. Pe mulţimea de convergenţă, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$, deci $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1 - e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x - 1}$, care evident este o funcţie continuă şi indefinit derivabilă.

b) Evident da, deoarece $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$ este uniform convergentă pentru $x > 0$ şi seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-n)e^{-nx}$ este de asemenea uniform convergentă pentru $x > 0$.

c) Seria se rescrie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(1 - e^{-n}\right) e^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(e^{-n} - e^{-2n}\right)$. Avem

$$\int_1^2 \frac{e^x}{e^x - 1} dx = \int_1^2 \left( \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_1^2 e^{-nx} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left. \frac{e^{-nx}}{-n} \right|_1^2 + 1$$

deci $\ln\left(e^x-1\right)\Big|_1^2 = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n}-e^{-2n}}{n}$, de unde rezultă

$$\ln(e^2-1)-\ln(e-1) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n}-e^{-2n}}{n} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{e^2-1}{e-1}\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n}-e^{-2n}}{n}\right)+1.$$

Prin urmare $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n}-e^{-2n}}{n} = \ln\left(e+1\right)-1 = \ln\left(\frac{e+1}{e}\right)$.

**III.** Fie $\mathcal{A}$ mulţimea în cauză. Fie A şi B două puncte ale mulţimii $\mathcal{A}$; notăm $r_1 = \frac{AB}{2}$; atunci $\Gamma_1 = C(0, r_1) \subset \mathcal{A}$ conform ipotezei. Fie $C, D$ pe cercul $\mathcal{C}\left(0, \frac{\mathrm{AB}}{2}\right)$ astfel încât $CD||AB$ şi $\mathrm{dist}(CD, AB) = \frac{r}{2}$ (vezi figura).

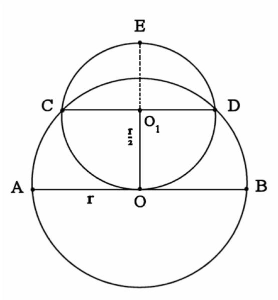


**Figura 2.**

Construim cercul de diametru $CD$, centru $O_1$. Din teorema lui Pitagora, rezultă $CO_1 = \sqrt{r^2-\frac{r^2}{4}} = \frac{r\sqrt{3}}{2}$. Fie $E$ un punct al noului cerc, ales astfel încât $E$, $O_1$, $O$ coliniare. Atunci $OE = \frac{r}{2}+\frac{r\sqrt{3}}{2} = \frac{r\left(1+\sqrt{3}\right)}{2}$. Analog construim în partea opusă punctului $F$. Rezultă $EF = r\left(1+\sqrt{3}\right)$; notăm $r_2 = \frac{EF}{2}$. Considerăm în cele ce urmează cercul $\Gamma_2 = C\left[0, r_2\right]$ de diametru $EF$, care va fi inclus în $\mathcal{A}$ şi construim analog cercurile $\Gamma_k = C(0, r_k) \subset \mathcal{A}$, $k \geq 0$ de rază $r_k = r\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^{k-1}$. Deoarece $\Gamma_k \subset \mathcal{A}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ şi $\lim_{k\to\infty} r_k = \infty$, rezultă că mulţimea $\mathcal{A}$ nu poate fi mărginită.

**IV.** $f_a\left(x_1, x_2, x_3\right) = \left(x_1, ax_1+x_2, \frac{a^2}{2}x_1+ax_2+x_3\right)$.

a) Verificăm liniaritatea lui $f_a$:

$$\begin{aligned} f_a(\alpha x+\beta y) &= f_a\left(\alpha x_1+\beta y_1, \alpha x_2+\beta y_2, \alpha x_3+\beta y_3\right) = \\ &= (\alpha x_1+\beta y_1, a\alpha x_1+a\beta y_1+\alpha x_2+\beta y_2, \\ &\qquad \tfrac{a^2}{2}\alpha x_1+\tfrac{a^2}{2}\alpha y_1+a\alpha x_2+a\alpha y_2+\alpha x_3+\beta y_3) = \\ &= \alpha\left(x_1, ax_1+x_2, \tfrac{a^2}{2}x_1+ax_2+x_3\right)+ \\ &\qquad +\beta\left(y_1, ay_1+y_2, \tfrac{a^2}{2}y_1+ay_2+y_3\right) = \alpha f_a(x)+\beta f_a(y), \end{aligned}$$

pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, x, y \in \mathbb{R}^3$, deci $f_a$ este endomorfism.

b) Fie $M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ \frac{a^2}{2} & a & 1 \end{pmatrix}$ şi $G = \{M_a \mid a \in \mathbb{R}\}$. Deoarece

$$M_a M_b = M_b M_a = M_{a+b} \in G,$$

rezultă că $G$ este parte stabilă faţă de înmulţirea matricilor. $I_3$ este element neutru şi $M_a^{-1} = M_{-a}$; obţinem că $(G, \cdot)$ formează grup comutativ. Calculăm suma de matrice $S_n = I + \frac{1}{1!}M_a + \frac{1}{2!}M_a^2 + \cdots + \frac{1}{n!}M_a^n$. Prin inducţie, se demonstrează că avem

$$M_a^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ na & 1 & 0 \\ \frac{n^2a^2}{2} & na & 1 \end{pmatrix}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Rezultă

$$S_n = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} & 0 & 0 \\ \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{2}{2!} + \cdots + \frac{n}{n!}\right) a & 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} & 0 \\ \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2k!}\right) a^2 & \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k!}\right) a & \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \end{pmatrix}.$$

Fie $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}$. Şirul $(a_n)_n$ este convergent şi $\lim_{n\to\infty} a_n = e$. De asemenea şirul

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{2}{2!} + \cdots + \frac{n}{n!}\right) a = \left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}\right) a$$

este convergent şi $\lim_{n\to\infty} b_n = (1+e)\,a$. Fie

$$c_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2k!}\right) a^2 = \frac{a^2}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k-1)!} = \frac{a^2}{2} \left[1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{(k-2)!} + \frac{1}{(k-1)!}\right)\right].$$

Acest şir este convergent şi $\lim_{n\to\infty} c_n = \dfrac{a^2}{2}(1 + e + e - 1) = a^2 e$. În final, şirul $S_n$ este convergent şi avem $\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ (1+e)a & e & 0 \\ a^2 e & (1+e)a & e \end{pmatrix}$.

c) Pentru $a = 0$, avem $M_{a=0} = 0_3$, matrice diagonală, cu valoarea proprie triplă $\lambda = 0$ şi subspaţiul propriu $S_{\lambda=0} = \mathbb{R}^3$. Discutăm cazul $a \neq 0$. Avem

$$\det(M_a - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ a & 1-\lambda & 0 \\ \frac{a^2}{2} & a & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 = 0,$$

deci $\lambda = 1$ este valoare proprie, cu multiplicitatea algebrică $m_\lambda = 3$. Rezolvăm sistemul caracteristic asociat:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ \frac{a^2}{2} & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} ma = 0 \\ m\dfrac{a^2}{2} + na = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = n = 0 \\ p \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, p \in \mathbb{R},$$

deci dimensiunea spaţiului propriu este 1, iar vectorii proprii ai matricii $A$ asociaţi valorii proprii $\lambda = 1$ sunt de forma $(0,0,p)^t$. Deoarece subspaţiul propriu $S_{\lambda=1}$ are dimensiunea $1 < 3 = m_\lambda$, rezultă că matricea $A$ nu este diagonizabilă.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza naţională, anul I, profil mecanic * rezerva #1, 2007-2008

**I.** a) Avem $A = \frac{B+B^t}{2} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 8 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, iar $\tilde{A} = A + I_3 = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -4 \\ 2 & 9 & 2 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.
Verificăm axiomele produsului scalar pentru $p(X,Y) = X^t\tilde{A}Y$.

i) aditivitate în primul argument: folosind distributivitatea înmulţirii faţă de adunare, obţinem

$$\begin{aligned} p(X_1+X_2,Y) &= (X_1+X_2)^t\tilde{A}Y = X_1^t\tilde{A}Y + X_2^t\tilde{A}Y \\ &= p(X_1,Y) + p(X_2,Y),\ \forall X_1,X_2,Y \in M_{3,1}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

ii) omogenitatea în primul argument:

$$p(kX,y) = (kX)^t\tilde{A}Y = kX^t\tilde{A}Y = kp(X,Y),\ \forall X,Y \in M_{3,1}(\mathbb{R}),\ \forall k \in \mathbb{R}.$$

iii) simetria, folosind egalitatea $\tilde{A}^t = \tilde{A}$, avem:

$$p(X,Y) = X^t\tilde{A}Y = (X^t\tilde{A}Y)^t = Y^t\tilde{A}(X^t)^t = Y^t\tilde{A}X = p(Y,X),\ \forall X,Y \in M_{3,1}(\mathbb{R}),$$

unde s-au folosit proprietăţile: $(BC)^t = C^tB^t, (C^t)^t = C$ şi $X^t\tilde{A}Y \in M_{1\times1}(\mathbb{R})$, deci are loc egalitatea $X^t\tilde{A}Y = (X^t\tilde{A}Y)^t$.

iv) pozitivitatea: $p(X,X) = X^t\tilde{A}X$. Notând $\tilde{\varphi}(x) = p(X,X)$, se observă că minorii Jacobi ai matricii $\tilde{A}$ sunt pozitivi, $\tilde{\Delta}_1 = 6 > 0$, $\tilde{\Delta}_2 = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 50 > 0$, $\tilde{\Delta}_3 = \det\tilde{A} = 100 > 0$, deci forma pătratică $\tilde{\varphi}$ este pozitiv definită, şi avem

$$p(X,X) = \tilde{\varphi}(X) > 0,\ \forall X \neq 0; \qquad p(X,X) = 0 \Leftrightarrow X = 0.$$

Se observă că $p$ este dedublata formei pătratice pozitiv definite $\tilde{\varphi}$ (forma polară asociată) adică $p(X,Y) = \frac{1}{2}(\tilde{\varphi}(X+Y) - \tilde{\varphi}(X) - \tilde{\varphi}(Y))$.

Proprietăţile i)-iv) arată că $p$ este produs scalar.

O bază formată din vectori proprii ai matricii $A$ se obţine din generatori ale celor trei subspaţii proprii, obţinuţi în urma rezolvării sistemelor caracteristice asociate celor două valori proprii distincte:

i) Pentru $\lambda = 0$, avem

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 8 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2b \\ b \\ -2b \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ b \in \mathbb{R},$$

deci alegem $v_1 = (-2, 1, -2)^t$;

ii) Pentru $\lambda = 9$, avem

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2a+2c \\ c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ a, c \in \mathbb{R},$$

de unde $u_2 = (1, 2, 0)^t$, $u_3 = (0, 2, 1)^t$. Se observă că $\langle u_2, u_3 \rangle \neq 0$ ($u_2 \not\perp u_3$). Ortogonalizăm familia de vectori $\{u_2, u_3\}$ folosind procedeul Gram-Schmidt, şi obţinem noua familie (ortogonală) $\{v_2, v_3\}$, unde $v_2 = u_2 = (1, 2, 0)^t$, iar

$$v_3 = u_3 - pr_{v_2} u_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{5} \begin{pmatrix} -4/5 \\ 2/5 \\ 5/5 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Deoarece subspaţiile proprii asociate unei matrici simetrice sunt ortogonale, cei trei vectori $\{v_1, v_2, v_3\}$ formează o familie ortogonală. Normând cei trei vectori, obţinem baza ortonormată $B' = \{w_1, w_2, w_3\}$, unde $w_k = ||v_k||^{-1} \cdot v_k$, $k = \overline{1,3}$, deci

$$w_1 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)^t, \ w_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)^t, \ w_3 = \left(-\frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}}\right)^t,$$

iar matricea asociată lui $\varphi$ relativ la $B'$ este $[\varphi]_{B'} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Se verifică uşor că $[\varphi]_{B'} = C^t A C$, unde $C = [w_1, w_2, w_3]_{\{l_1, l_2, l_3\}} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

b) Minorii Jacobi asociaţi formei pătratice $\varphi(X) = X^t A X$ sunt

$$\Delta_1 = 5 > 0, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 36 > 0, \ \Delta_3 = \det A = 0 \geq 0,$$

deci $\varphi$ este pozitiv semidefinită, $\varphi(X) \geq 0$, $\forall X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$. Valorile proprii ale matricii $A$ se află rezolvând ecuaţia caracteristică

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow -\lambda(\lambda - 9)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{0, 9\} = \sigma(A),$$

deci $\lambda_1 = 0$ ($\mu_1 = 1$) şi $\lambda_2 = 9$ ($\mu_2 = 2$).

c) Ecuaţia din enunţ se rescrie

$$X^t A X + A_1 X - 22 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{(x, y, 1)}_{X^t} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 8 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}}_{X} + \underbrace{(10, 4, -8)}_{A_1} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}}_{X} - 22 = 0.$$

Efectuând calculele, rezultă

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 + 2x + 8y - 25 = 0 \Leftrightarrow (x, y, 1) \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 4 \\ 1 & 4 & -25 \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Deci punctele $p(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ale căror coordonate satisfac ecuaţia determină o conică $\Gamma$ ai cărei invarianţi furnizaţi de metricea $M$ ce descrie conica, sunt

$$\Delta = \det M = -972 \neq 0, \;\; \delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 36 > 0, \;\; I = 5 + 8 = 13.$$

Deoarece $\Delta \neq 0$ iar $\delta \neq 0$ ($\delta > 0$), conica $\Gamma$ este o conică nedegenerată de tip eliptic (deci cu centru de simetrie), prin urmare $\Gamma$ este o elipsă.

**II.** a) Verificăm proprietăţile produsului scalar:

i) simetria: $S(f, g) = S(g, f), \forall f, g \in V = C^\infty([-1, 1], \mathbb{R})$;

ii) aditivitatea în primul argument: $S(f, g + h) = S(f, g) + S(f, h), \forall f, g, h \in V$;

iii) omogenitatea în primul argument: $S(\alpha f, g) = \alpha S(f, g), \forall f, g \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$;

iv) pozitivitatea: $S(f, f) \geq 0, \forall f \in V$; $S(f, f) = 0 \Leftrightarrow f = 0_V$.

Primele trei proprietăţi se verifică fără dificultate. Pentru a patra proprietate, observăm că $S(f, f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f^2(x)dx$. Deoarece $f$ continuă pe $[-1, 1]$, rezultă $f^2$ continuă pe $[-1, 1]$, deci există $m = \displaystyle\min_{x \in [-1,1]} f^2(x) \geq 0$. Atunci $\displaystyle\int_{-1}^{1} f^2(x)dx \geq 2m \geq 0$, deci $S(f, f) \geq 0, \forall f \in V$. Dacă $f \equiv 0$, atunci $\langle f, f\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} 0dx = 0$. Reciproc, admitem că $\langle f, f\rangle = 0$. Dacă, prin absurd, presupunem $f \not\equiv 0$, atunci $\exists x_0 \in [-1, 1]$ a.î. $f(x_0) \neq 0$, deci $f^2(x_0) > 0$. Atunci, folosind continuitatea lui $f^2$, rezultă proprietatea

$$\forall \varepsilon > 0, \exists [c, d] \subset [a, b],\ c < d, \text{ astfel încât } f^2(x) \geq f^2(x_0) - \varepsilon,\ \forall x \in [c, d].$$

Alegând $\varepsilon = f^2(x_0)/2$, obţinem

$$0 = \int_a^b f^2(x)\, dx \geq \int_c^d f^2(x)dx \geq \int_c^d \frac{f^2(x_0)}{2}dx = \frac{1}{2}f^2(x_0) \cdot (d - c) > 0,$$

deci s-a obţinut inegalitatea $0 > 0$, contradicţie. Rezultă $\langle f, f\rangle = 0 \Rightarrow f \equiv 0$, şi prin urmare $\langle f, f\rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0_V$.

b) Ortogonalizăm familia $\{f_1, f_2, f_3\}$ folsind procedeul Gram-Schmidt. Obţinem

$$g_1 = f_1;\; g_2 = f_2 - pr_{g_1} f_2 = f_2 - \frac{\langle f_2, g_1\rangle}{\langle g_1, g_1\rangle} g_1;$$
$$g_3 = f_3 - pr_{g_1} f_3 - pr_{g_2} f_3 = f_3 - \frac{\langle f_3, g_1\rangle}{\langle g_1, g_1\rangle} g_1 - \frac{\langle f_3, g_2\rangle}{\langle g_2, g_2\rangle} g_2.$$

Deci

$$\begin{cases} g_1(x) & = 1,\;\; g_2(x) = x - \left(\displaystyle\int_{-1}^{1} x \cdot 1dx\right) \cdot \left(\displaystyle\int_{-1}^{1} a^2 dx\right)^{-1} \cdot 1 = x - 0 \cdot 1 = x, \\ g_3(x) & = x^2 - \left(\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2 \cdot 1dx\right) \cdot \left(\displaystyle\int_{-1}^{1} 1^2 dx\right)^{-1} \cdot 1 - \\ & \quad - \left(\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2 \cdot xdx\right) \cdot \left(\displaystyle\int_{-1}^{1} x \cdot xdx\right)^{-1} \cdot x = x^2 - \dfrac{1}{3} \cdot 1 - 0 \cdot x = x^2 - \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Normăm familia $\{g_1, g_2, g_3\}$ şi obţinem familia $\{h_1, h_2, h_3\}$, $h_k = ||g_k||^{-1} g_k$, $k = \overline{1,3}$; avem

$$\begin{cases} ||g_1|| = \left(\int_{-1}^{1} 1^2 dx\right)^{1/2} = \sqrt{2}, \quad ||g_2|| = \left(\int_{-1}^{1} x \cdot x dx\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \\ ||g_3|| = \left(\int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{8}{45}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}. \end{cases}$$

Rezultă deci familia ortonormată $\{h_1, h_2, h_3\}$, unde

$$\left\{ h_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}},\ h_2(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot x,\ h_3(x) = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \right\}.$$

c) Avem $P(u,v) = S(x^2 - u - vx, x^2 - u - vx) = \int_{-1}^{1} (x^2 - u - vx)^2 dx$, deci

$$\begin{aligned} P(u,v) &= \int_{-1}^{1} (x^4 + u^2 + v^2x^2 - 2x^2u - 2vx^3 + 2uvx) dx = \\ &= \left.\frac{x^5}{5}\right|_{-1}^{1} + u^2 \cdot x|_{-1}^{1} + v^2 \cdot \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1} - 2u \cdot \left.\tfrac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1} - 2v \cdot \left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{1} + 2uv \cdot \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{1} \end{aligned}$$

şi prin urmare

$$P(u,v) = \frac{2}{5} + 2u^2 + \frac{2}{3}v^2 - \frac{4u}{3}. \tag{13}$$

Obţinem $\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial u} \equiv 4u - \frac{4}{3} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial v} \equiv \frac{4}{3}v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1/3 \\ v = 0 \end{cases}$, deci $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ este punct critic pentru funcţia $p$. Matricea hessiană asociată lui $p$ este $H_p = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4/3 \end{smallmatrix}\right)$; deci $H_p(\frac{1}{3}, 0) = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4/3 \end{smallmatrix}\right)$ este pozitiv definită, şi deci $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ este punct de minim unic.

*Metoda 2.* Din egalitatea (13), avem $P(u,v) = 2u^2 - \frac{4u}{3} + \frac{2}{3}v^2 + \frac{2}{5}$. Restrângem pătratul în $u$ şi obţinem

$$P(u,v) = 2\left(u - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}v^2 + \frac{8}{45} \geq \frac{8}{45}.$$

Deci funcţia $P$ îşi atinge minimul (valoarea $\frac{8}{45}$) în $(u,v) = \left(\frac{1}{3}, 0\right)$. Se observă că $\pi = \{f \in V = C^1([-1,1], \mathbb{R}) \mid f(x) = x^2 - u - vx;\ u, v \in \mathbb{R}\} \subset V$ este un 2-plan afin în $V$ (deci submulţime închisă), care nu conţine funcţia nulă $0_V$, şi că $P(u,v)$ este *pătratul distanţei* de la $0_V$ la un vector oarecare din $H \subset V$. Atunci pentru $(u,v) = (u_0, v_0)$ se obţine funcţia din $V$: $w_0 = x^2 - u_0 - v_0 x \in V$, care minimizează pătratul distanţei de la $0_V$ la vectorii din $\pi$: $||w_0||^2 = \min\limits_{w \in \pi} ||w||^2 = d(0,\pi)^2$.

**III.** $f(x) = \int_0^x e^{\operatorname{tg}^n t} dt$. Efectuăm schimbarea de variabilă $\operatorname{tg} t = u$ ($t = \operatorname{arctg} u$, $dt = \frac{du}{1+u^2}$) şi obţinem $f(x) = \int_0^x e^{u^n} \cdot \frac{1}{1+u^2} du \Rightarrow f'(x) = e^{x^n} \cdot \frac{1}{1+x^2}$. Atunci, integrând prin părţi, rezultă

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 \frac{x^{n-1}\cdot f(x)}{e^{x^n}}dx + \frac{1}{ne}f(1) = \int_0^1 \left(\frac{e^{-x^n}}{-n}\right)' \cdot f(x)dx + \frac{1}{ne}f(1) = \\ &= -\frac{e^{-x^n}}{n}f(x)\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{-x^n}}{n}\cdot f'(x)dx + \frac{1}{ne}f(1) = \\ &= -\frac{f(1)}{ne} + 0 + \int_0^1 \frac{e^{-x^n}}{n}\cdot e^{x^n}\cdot \frac{1}{1+x^2}dx + \frac{1}{ne}f(1) = \\ &= \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{1}{n}\cdot \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4n}. \end{aligned}$$

**IV.** $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4y}{x^4+y^4}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$. Se observă că avem $x^2+y^2=0$ dacă şi numai dacă $x=0$ şi $y=0$. Atunci folosind inegalitatea $x^4 \leq x^4+y^4$, obţinem

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left|\frac{x^4y}{x^4+y^4}\right| = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^4}{x^4+y^4}\cdot |y| \leq \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} |y| = 0 \Rightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0 = f(0,0),$$

deci $f$ este continuă în origine. De asemenea, avem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\Rightarrow 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0,\ \ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\Rightarrow 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0.$$

Fie $\alpha(x,y) = \frac{f(x,y)-f(0,0)-0-0}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^4y}{(x^4+y^4)\sqrt{x^2+y^2}}$. Atunci $|\alpha(x,y)| = \frac{x^4|y|}{(x^4+y^4)\sqrt{x^2+y^2}}$. Alegem $x_n = y_n = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$, şi obţinem $\alpha\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n^4}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{2}{n^4}\cdot\sqrt{\frac{2}{n^2}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0$, deci $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \alpha(x,y) \neq 0$, deci $f$ nu este diferenţiabilă Frechét în $(0,0)$.

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza naţională, anul I, profil mecanic * rezerva #2, 2007-2008

**I.** a) Avem $f(x,y) = (2x+y, x+2y)$. Atunci

$$f(x,y) = (x,y) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y = x \\ x+2y = y \end{cases} \Leftrightarrow x = -y.$$

b) Fie dreapta de ecuaţie $y = ax+b$. Atunci

$$f(x,y) = f(x,ax+b) = (x,ax+b) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+ax+b = x \\ x+2ax+2b = ax+b, \end{cases}$$

de unde rezultă

$$x(1+a)+b = 0,\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0, \end{cases}$$

deci doar prima bisectoare $y = x$ este dusă punct cu punct în ea însăşi de aplicaţia $f$.

c) Laturile pătratului determinat de punctele $O(0,0)$, $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $B\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $C\left(\sqrt{2}, 0\right)$ se află pe dreptele:

$$\begin{cases} AC: \dfrac{y-0}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \dfrac{x-\sqrt{2}}{\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}} \Leftrightarrow y = \sqrt{2} - x \Rightarrow x + y = \sqrt{2} \Leftrightarrow (x,y) = (t, \sqrt{2} - t), t \in \mathbb{R} \\ BC: \dfrac{y-0}{-\dfrac{1}{\sqrt{2}}} = \dfrac{x-\sqrt{2}}{\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}} \Rightarrow y = x - \sqrt{2} \Rightarrow x - y = \sqrt{2} \Leftrightarrow (x,y) = (t, t - \sqrt{2}), t \in \mathbb{R} \\ OA: y = x \Leftrightarrow (x,y) = (t,t), t \in \mathbb{R}, \\ OB: y = -x \Leftrightarrow (x,y) = (t,-t), t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

iar suprafaţa pătratului $OABC$ este descrisă de inegalităţile:

$$y \leq x, \quad y \leq -x, \quad x + y \leq \sqrt{2}, \quad x - y \leq \sqrt{2}.$$

Imaginile celor patru drepte sunt descrise parametric astfel:

$$\begin{aligned} f(AC): \ & (x,y) = f(t, \sqrt{2} - t) = (t + \sqrt{2}, -t + 2\sqrt{2}), t \in \mathbb{R} \\ f(BC): \ & (x,y) = f(t, t\sqrt{2}) = (3t - \sqrt{2}, 3t - 2\sqrt{2}), t \in \mathbb{R} \\ f(OA): \ & (x,y) = f(t,t) = (3t, 3t), t \in \mathbb{R} \\ f(OB): \ & (x,y) = f(t,-t) = (t,-t), t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Eliminând variabila $t$ din ecuaţiile de mai sus, punctele $(x,y)$ ale celor patru imagini sunt descrise de ecuaţiile carteziene

$$\begin{cases} f(AC): \ y = -x + 3\sqrt{2}, & f(BC): \ y = x - \sqrt{2} \\ f(OA): \ y = x, & f(OB): \ y = -x, \end{cases}$$

**II.** Rezolvăm ecuaţia matriceală $X^2 + aX + bI_2 = O_2$. Fie $X = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Atunci $X^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta\gamma & \alpha\beta + \beta\gamma \\ \alpha\gamma + \delta\gamma & \beta\gamma + \delta^2 \end{pmatrix}$, iar ecuaţia matriceală devine:

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta\gamma + a\alpha + b & \alpha\beta + \beta\gamma + a\beta \\ \alpha\gamma + \delta\gamma + a\gamma & \beta\gamma + \delta^2 + a\delta + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta\gamma + a\alpha + b = 0, & \beta\left(\alpha + \beta + a\right) = 0 \\ \gamma(\alpha + \delta + a) = 0, & \beta\gamma + \delta^2 + a\delta + b = 0. \end{cases}$$

Distingem cazurile:

i) Dacă $\beta = \gamma = 0$, atunci obţinem sistemul $\begin{cases} \alpha^2 + a\alpha + b = 0 \\ \delta^2 + a\delta + b = 0 \end{cases}$ care are maxim 4 soluţii reale, deci se obţin maxim 4 matrice $X$.

ii) Dacă $\alpha+\delta+a=0$, atunci sistemul devine $\begin{cases} \alpha^2+a\alpha+(\beta\gamma+b)=0 \\ \delta^2+a\delta+(\beta\gamma+b)=0=0 \end{cases}$, iar a doua ecuaţie se verifică uşor că devine echivalentă cu prima (înlocuind $\delta=-a-\alpha$ în a doua ecuaţie, se obţine prima ecuaţie). Discriminantul primei ecuaţii (cu necunoscuta $\alpha$) este $\Delta=a^2-4(\beta\gamma+b)$ şi se observă că există o infinitate de perechi $(\beta,\gamma)$ pentru care $\Delta>0$, deci care produc soluţii $X$. În concluzie în acest caz obţinem o infinitate de soluţii.

*Observaţie.* Problema se poate rezolva şi folosind relaţia

$$X^2-Tr(X)\cdot X+\det X\cdot I_2=0.$$

**III.** a) $I=\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx$. Efectuăm schimbarea de variabilă $x^2=t$ (deci $x=t^{1/2}$ şi $dx=\frac{1}{2}\cdot t^{-1/2}dt$); obţinem

$$I=\int_0^\infty e^{-t}\cdot\frac{1}{2}\cdot t^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{2}\cdot\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{-t}dt=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

b) Derivând $I(\alpha)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{\alpha^2}{x^2}\right)}dx$ în raport cu $\alpha$, obţinem

$$\begin{aligned}
I'(\alpha) &= \int_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{\alpha^2}{x^2}\right)}\cdot\frac{-2\alpha}{x^2}dx=\int_0^\infty e^{-\left(x+\frac{\alpha}{x}\right)^2+2\alpha}\cdot\left(-\frac{2\alpha}{x^2}\right)dx\\
&= e^{2\alpha}\cdot\int_0^\infty e^{-\left(x+\frac{\alpha}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{2\alpha}{x^2}\right)dx=2e^{2\alpha}\cdot\int_0^\infty e^{-\left(x+\frac{\alpha}{x}\right)^2}\left(1-\frac{\alpha}{x^2}-1\right)dx\\
&= 2e^{2\alpha}\left(\int_0^\infty e^{-\left(x+\frac{\alpha}{x}\right)^2}\left(1-\frac{\alpha}{x^2}\right)dx-\int_0^\infty e^{-\left(x+\frac{\alpha}{x}\right)^2}dx\right)\\
&= 2e^{2\alpha}\left(\sqrt{\pi}-\int_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{\alpha^2}{x^2}\right)-2\alpha}dx\right)=2e^{2\alpha}\left(\sqrt{\pi}-e^{-2\alpha}\cdot I(\alpha)\right),
\end{aligned}$$

deci $I'(\alpha)=2\sqrt{\pi}\cdot e^{2\alpha}-2I(\alpha)$, şi deci $I'(\alpha)+2I(\alpha)=2\sqrt{\pi}e^{2\alpha}$, ecuaţie diferenţială liniară de ordinul întâi. Rezolvăm ecuaţia omogenă asociată

$$\begin{aligned}
I'(\alpha)+2I(\alpha)=0 \quad &\Leftrightarrow \frac{I'(\alpha)}{I(\alpha)}=-2\Leftrightarrow\int\frac{I'(\alpha)}{I(\alpha)}=\int -2d\alpha\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow \ln(I(\alpha))=-2\alpha+\ln C_1\Rightarrow I(\alpha)=C_1\cdot e^{-2\alpha}.
\end{aligned}$$

Căutăm o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene iniţiale, de forma: $I_p(\alpha)=C_1(\alpha)e^{-2\alpha}$. Înlocuind în ecuaţie, obţinem

$$C_1{}'(\alpha)\cdot e^{-2\alpha}+C_1(\alpha)\cdot(-2)e^{-2\alpha}+2C_1(\alpha)e^{-2\alpha}=2\sqrt{\pi}e^{2\alpha},$$

deci $C_1{}'(\alpha)=2\sqrt{\pi}\cdot e^{4\alpha}\Rightarrow C_1(\alpha)=2\sqrt{\pi}\frac{e^{4\alpha}}{4}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{4\alpha}$, şi deci $I_p(\alpha)\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot e^{4\alpha}$, iar $I(\alpha)=C_1\cdot e^{-2\alpha}+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot e^{4\alpha}$, $C_1\in\mathbb{R}$. Impunem condiţia iniţială

$$I(0)=\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}\Rightarrow C_1+\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\pi}\Leftrightarrow C_1=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

şi deci $I(\alpha) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(e^{-2\alpha} + e^{4\alpha}\right)$.

**IV.** a) $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1+tx)}{1+t^2}dt,\ x \geq 0$, deci $F'(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+tx}\cdot\frac{t}{1+t^2}dt + \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}$.

b) Notăm $I = \displaystyle\int_0^x \frac{t}{(1+tx)(1+t^2)}dt$. Descompunem integrandul în fracţii simple:

$$\frac{t}{(1+tx)(1+t^2)} = \frac{A}{1+tx} + \frac{Bt+C}{1+t^2} \Rightarrow A = \frac{-x}{1+x^2},\ B = \frac{1}{1+x^2},\ C = \frac{x}{1+x^2},$$

deci

$$\begin{aligned} I &= \frac{-x}{1+x^2}\int_0^x \frac{dt}{1+tx} + \frac{1}{1+x^2}\int_0^x \frac{t+x}{1+t^2}dt = \\ &= \frac{-x}{1+x^2}\,\frac{\ln(1+tx)}{x}\Big|_0^x + \frac{1}{1+x^2}\,\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)\Big|_0^x + \frac{x}{1+x^2}\operatorname{arctg} t\,\Big|_0^x = \\ &= \frac{-\ln\left(1+x^2\right)}{1+x^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}\ln\left(1+x^2\right) + \frac{x}{1+x^2}\cdot\operatorname{arctg} x. \end{aligned}$$

Obţinem

$$F'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}\ln(1+x^2) + \frac{x}{1+x^2}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{2}\left(\ln\left(1+x^2\right)\cdot\operatorname{arctg} x\right)'$$

deci $F(x) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\cdot\operatorname{arctg} x + C$. Dar, din forma iniţială a lui $F(x)$, avem $F(0) = 0$, deci rezultă $C = 0$, şi deci $F(x) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\cdot\operatorname{arctg} x$.

c) Avem $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(1+\operatorname{tg} x)dx$. Folosind schimbarea de variabilă $\operatorname{tg} x = t$ (deci $x = \operatorname{arctg} t$ şi $dx = \frac{dt}{1+t^2}$), rezultă $I = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t)\frac{dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}dt = F(1)$. Folosind punctul b), obţinem $F(1) = \frac{1}{2}\cdot\ln 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}\ln 2$, şi deci $I = \frac{\pi}{8}\ln 2$.

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
### Faza naţională, anul I, profil mecanic * rezerva #3, 2007-2008

**I.** a) Notând cu $V$ volumul tetraedrului, obţinem

$$V = \tfrac{1}{6}\langle\bar{c}, \bar{a}\times\bar{b}\rangle = \tfrac{1}{6}||\bar{c}||\cdot||\bar{a}\times\bar{b}||\cdot\cos\left(\widehat{\bar{c}, \bar{a}\times\bar{b}}\right),$$

deci $V = \frac{1}{2}\left|\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|\right|\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}||\bar{a}||\cdot\left|\left|\bar{b}\right|\right|\sin\widehat{(\bar{a},\bar{b})} = \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

b) Cei trei vectori liniar independenţi determină o bază în $V_3$ (cardinalul familiei de vectori coincide $\dim V_3 = 3$). Matricea endomorfismului $f$ relativ la această bază este $A = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & m\end{smallmatrix}\right)$, iar $f$ injectivă $\Leftrightarrow$ $rang(A) = \dim V_3 \quad\Leftrightarrow\quad \det A \neq 0,\ m \in \mathbb{R}^*$. Spectrul lui $f$ rezultă rezolvând ecuaţia caracteristică asociată matricii $A$:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow -(\lambda-1)^2(\lambda - m) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \sigma(f) = \{1, m\}.$$

Distingem cazurile:

i) $m = 1 \Rightarrow \lambda_1 = 1$ (cu multiplicitatea algebrică $\mu_1 = 3$); sistemul caracteristic este

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R},$$

deci dimensiunea subspaţiului propriu este $2 \neq \mu_1$, şi deci $f$ nu este endomorfism diagonalizabil.

ii) $m \neq 1 \Rightarrow \lambda_1 = 1$ ($\mu_1 = 2$) cu sistemul caracteristic

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & m-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se rezolvă ca mai sus, $\{e_1, e_2\}$ formează bază în subspaţiul propriu $S_{\lambda_1}$, iar multiplicităţile algebrică şi geometrică sunt egale ($\dim S_{\lambda_1} = 2 = \mu_1$). În acest caz, pentru $\lambda_2 = m \neq \lambda_1$ ($\mu_2 = 1$), avem sistemul caracteristic

$$\begin{pmatrix} 1-m & 0 & 1 \\ 0 & 1-m & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c/(m-1) \\ c/(m-1) \\ c \end{pmatrix} = \frac{c}{m-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ m-1 \end{pmatrix},$$

deci o bază în subspaţiul propriu $S_{\lambda_2}$ este $B_2 = \{(1, 1, m-1)^t\}$ şi avem $\dim S_{\lambda_2} = 1 = \mu_2$. Rezultă $f$ endomorfism diagonalizabil. În concluzie, $f$ este endomorfism diagonalizabil dacă şi numai dacă $m \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B = A + A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Avem

$$\begin{aligned} X^t B X &= (x, y, 1) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = (2x+1, 2y+1, x+y+2) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= 2x^2 + x + 2y^2 + y + x + y + 2. \end{aligned}$$

Condiţia $X^t B X = 3$ se rescrie

$$2x^2 + 2y^2 + 2x + 2y = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x + y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 1,$$

deci s-a obţinut o ecuaţie carteziană care descrie cercul de centru $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ şi rază 1.

**II.** a) Avem $A = \begin{pmatrix} -10 & 2 & 1 \\ -70 & 14 & 7 \\ 40 & -8 & -4 \end{pmatrix}$; $Y = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid \exists x \in \mathbb{R}^3 \text{ cu } Ax = y\}$. Atunci

$$Ax = y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -10 & 2 & 1 \\ -70 & 14 & 7 \\ 40 & -8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = y_1 \\ -70x_1 + 14x_2 + 7x_3 = y_2 \\ 40x_1 - 8x_2 - 4x_3 = y_3. \end{cases}$$

Dar $\det A = \begin{vmatrix} -10 & 2 & 1 \\ -70 & 14 & 7 \\ 40 & -8 & -4 \end{vmatrix} = 0$, iar $rang(A) = 1$, deci din condiţia de compatibilitate a sistemului (anularea a doi determinanţi caracteristici), rezultă

$$y_1 = \frac{y_2}{7} = \frac{y_3}{-4} \Leftrightarrow y = (t, 7t, -4t) = t\underbrace{(1, 7, -4)}_{y_*},\ t \in \mathbb{R} \Rightarrow Y = L(y_*) \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} Y = 1.$$

b) Fie $T : R \to R$ endomorfismul asociat matricii $B$. Se observă că $Y = \operatorname{Im} T$. Dacă $y \in Y$ atunci $\exists x \in R$ şi $Bx = y$, deci $B^2 x = By$, deci $y \in \operatorname{Ker} T$. Rezultă $\operatorname{Im} T \subset \operatorname{Ker} T$, deci $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} T \leq \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker} T$. Dar din teorema dimensiunii, avem

$$n = \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker} T + \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} T \geq 2 \cdot \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} T \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} Y \leq \frac{n}{2}.$$

**III.** Determinăm punctele critice ale funcţiei $f(x, y) = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)} - x^2 - y^2$. Avem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xe^{-x^2-y^2} + (x^2+y^2) \cdot e^{-x^2-y^2} \cdot (-2x) - 2x = 0 \\ 2ye^{-x^2-y^2} + (x^2+y^2) \cdot e^{-x^2-y^2} \cdot (-2y) - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x[e^{-x^2-y^2}(1 - x^2 - y^2) - 1] = 0 \\ 2y[e^{-x^2-y^2}(1 - x^2 - y^2) - 1] = 0. \end{cases}$$

Deci avem următoarele cazuri: sau $(0, 0)$ este punct critic, sau

$$e^{-x^2-y^2}(1 - x^2 - y^2) = 1 \Leftrightarrow e^{x^2+y^2} = 1 - (x^2 + y^2).$$

În cel de-al doilea caz, notăm $x^2 + y^2 = t$ şi obţinem $e^t = 1 - t \Leftrightarrow e^t + t = 1$. Dar $e^t$ este funcţie crescătoare, $t$ este funcţie crescătoare, deci ecuaţia are solutie unică $t = 0$, ceea ce conduce la $x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ şi $y = 0$. În concluzie, singurul punct critic este $(0, 0)$. În acest punct, matricea hessiană a funcţiei $f$ este $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, deci nu produce informaţii asupra punctului critic. Notând însă $x^2 + y^2 = t \geq 0$, rescriem $f(x, y) = g(t) = te^{-t} - t = t(e^{-t} - 1)$. $g'(t) = e^{-t} - te^{-t} - 1 \leq 0$ pentru $t \geq 0$ deci $g$ este funcţie descrescătoare pe $[0, +\infty)$ şi prin urmare $(x, y) = (0, 0)$ (corespunzător valorii $t = 0$) este punct de maxim global.

a) $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)2^{2n}} x^{2n+1} = x \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)2^{2n}} (x^2)^n$. Notăm $x^2 = t$, şi din criteriul raportului (D'Alambert) rezultă raza de convergenţă a seriei de puteri, $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+3)2^{2n+2}}{(2n+1)\, 2^{2n}} = 4 \Rightarrow r = 4$. Dar $t = x^2$, deci intervalul de convergenţă este $I = (0, 4) \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow x \in (-2, 2)$. Examinăm capetele intervalului. Dacă $x = -2 \Rightarrow S(x) = -2 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2n+1}$ divergentă conform criteriului comparaţiei ($S(x) \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ divergentă). Dacă $x = 2$, analog, $S(x)$ divergentă. Rezultă că mulţimea de convergenţă a seriei $S(x)$ este $(-2, 2)$.

b) Avem $S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)\,x^{2n}}{(2n+1)2^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{4}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{x^2}{4}} = \frac{4}{4-x^2}$, deci pentru $x$ în domeniul de convergenţă uniformă, obţinem $S(x) = 4\int_0^x \frac{dt}{4-t^2} = \ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right| + C$, unde $C$ =const. Dar $S(0) = 0$, deci $C = 0$. Rezultă $S(x) = \ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right|$.

c) $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\,2^{2n}}$. Avem $S = S(1)$ şi seria de puteri $S(x)$ este convergentă pentru $x \in (-2, 2)$, deci seria numerică $S$ este convergentă, şi avem $S = S(1) = \ln 3$.

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
### Faza naţională, anul I, profil electric, 2008-2009

**I.** a) Fie $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n, x \in [0, 1)$. Atunci $f'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$, $x \in [0, 1)$. Cum $a_n \geq 0$, rezultă $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in [0, 1)$. Pentru $N \in \mathbb{N}$ fixat, avem inegalităţile $\sum_{n=0}^{N} a_n x^n \leq f(x) \leq L, \forall x \in [0, 1)$, de unde $\lim_{x\to 1} \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \leq L$. Rezultă că şirul sumelor parţiale $s_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ este mărginit, seria $\sum_{n\geq 0} a_n$ este convergentă şi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq L. \tag{14}$$

Pe de altă parte, $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \leq \sum_{n\geq 0} a_n, \forall x \in [0, 1)$, de unde $\lim_{x\nearrow 1} f(x) \leq \sum_{n\geq 0} a_n$ şi

$$L \leq \sum_{n\geq 0} a_n. \tag{15}$$

Din (14) şi (15), rezultă că $\sum_{n\geq 0} a_n = L$.

b) Exemplu: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$. Avem $a_n = (-1)^n$ şi $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1$, deci raza de convergenţă este 1. Se constată că

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x}, \quad x \in (-1, 1).$$

Deci avem $f(x) = \frac{1}{1+x}$ şi $\lim_{x\nearrow 1} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$. Dar $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ nu este convergentă.

**II.** a) Observăm că $f_1(x) = \displaystyle\int_a^x f_0(t)dt$, iar

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \int_a^x f_1(t)dt = \int_a^x \left(\int_a^t f_0(y)dy\right)dt = \int_a^x -\frac{\partial(x-t)}{\partial t}\left(\int_a^t f_0(y)dy\right)dt = \\ &= -(x-t)\int_a^t f_0(y)dy\Big|_{t=a}^{t=x} + \int_a^x (x-t)f_0(t)dt = \int_a^x (x-t)f_0(t)dt. \end{aligned}$$

Se poate demonstra prin inducţie că $f_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\displaystyle\int_a^x (x-t)^{n-1}f_0(t)dt, n \geq 1$. Atunci

$$|f_n(x)| = \frac{1}{(n-1)!}\left|\int_a^x (x-t)^{n-1}f_0(t)dt\right| \leq \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}\,|f_0(t)|dt.$$

Deoarece funcţia $f_0(t)$ este continuă pe compactul $[a,b]$, există $M > 0$, astfel încât $|f_0(t)| \leq M, \forall t \in [a,b]$. Deci

$$|f_n(x)| \leq \frac{M}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}dt = \frac{M}{(n-1)!}\left(\frac{-(x-t)^n}{n}\right)\Big|_{t=a}^{t=x} = \frac{M}{n!}(x-a)^n \leq \frac{M}{n!}(b-a)^n.$$

Cum $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{M(b-a)^n}{n!}$ este evident convergentă, din Criteriul lui Weirstrass rezultă că $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ este absolut şi uniform convergentă pe $[a,b]$.

b) Avem

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty}(f_1(x) + f_2(x) + ...f_n(x)) = \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\int_a^b f_0(t)dt + \int_a^b (x-t)f_0(t)dt + ... + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b (x-t)^{n-1}f_0(t)dt\right] = \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_a^b \left[1 + (x-t) + ... + \tfrac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\right] f_0(t)dt = \\ &= \int_a^b \lim_{n\to\infty}\left[1 + (x-t) + ... + \tfrac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\right] f_0(t)dt = \int_a^b e^{x-t}f_0(t)dt = e^x\int_a^b e^{-t}f_0(t)dt. \end{aligned}$$

**III.** Cum $P_i$ sunt sunt toate pe aceeaşi circumferinţă, presupunem că ele sunt toate pe un cerc. Atunci $P_1P_2P_iP_j (i < j)$ este un patrulater inscriptibil şi din teorema lui Ptolemeu, rezultă că $a_{12}a_{ij} + a_{1j}a_{i2} = a_{1i}a_{2j},\ i < j$. Cum $(a_{ij})$ este matrice antisimetrică, putem scrie $a_{12}a_{ij} = a_{2i}a_{1j} + a_{1i}a_{2j}, i,j = \overline{1,n}$. Dacă $A_i$ este linia $i$ din matricea $A$, avem că $a_{12}A_i = a_{2i}A_1 + a_{1i}A_2,\quad i = \overline{1,n}$, ceea ce conduce la concluzia $rang(A) \leq 2$. Întrucât $A$ nu este matrice identic nulă şi este antisimetrică, rezultă rang $(A) \geq 2$, deci $rang(A) = 2$.

Pentru funcţia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, f(x) = ax$, avem Ker $f = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$, dim( Ker $f) = n - 2$, iar Im $f = \{y \in \mathbb{R}^n \mid Ax = y\}$, dim( Im $f) = 2$.

**IV.** Din ipoteză avem $Ax = 0$ pentru $x \neq 0$; rezultă rang $(A) < n$. Dacă rang $(A) < n-1$ atunci rang $(A_i) \leq n-1$, deci $\det A_i = 0$ pentru $i = \overline{1,n}$. Presupunem $rang(A) = n-1$. Fără a pierde generalitatea putem presupune că

$$a_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i a_i, \tag{16}$$

cu $\alpha_i \in \mathbb{R}$ şi $x = (\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}, -1)^t$, de unde

$$B_x = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i b_i - b_n = A_y, \tag{17}$$

pentru $y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Scriind matricele pe coloane, calculăm

$$\begin{aligned}\det A_1 &= \det\left(b_1|a_2...a_{n-1} \textstyle\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i a_i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \left(b_1|a_2...a_{n-1}|a_i\right) = \\ &= \alpha_1 det\left(b_1|a_2...a_{n-1}|a_1\right) = det\left(a_1|a_2...a_{n-1}| - \alpha_1 b_1\right).\end{aligned}$$

Similar pentru $i = 2, ..., n-1$ rezultă $\det A_i = \det\left[a_1|a_2...a_{n-1}| - \alpha_i b_i\right]$. Deci

$$\sum_{i=1}^{n-1} \det A_i = \det\left(a_1|a_2...a_{n-1}| - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i b_i\right), \ \sum_{i=1}^{n} \det A_i = \det\left(a_1|a_2...a_{n-1}|b_n - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i b_i\right).$$

Conform (17), ultima coloană este $-A_y$, deci conform cu (16) - o combinaţie liniară a coloanelor $a_1, ..., a_{n-1}$, de unde concluzia: $\sum_{i=1}^{n} \det A_i = 0$.

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
### Faza naţională, anul I, profil mecanic, 2008-2009

**I.** a) Avem:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x,y) - f(0,y)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 \cdot \cos\frac{y}{x^2} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} x^2 \cdot \underbrace{\cos\frac{y}{x^2}}_{finit} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,y) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,y+h) - f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0.\end{aligned}$$

b) Fie $y_0 \in \mathbb{R}$ arbitrar, fixat. Fie

$$\begin{aligned}\alpha(x,y) &= \frac{f(x,y) - f(0,y_0) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y_0)\cdot x - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,y_0)\cdot(y-y_0)}{\sqrt{x^2 + (y-y_0)^2}} \\ &= \frac{x^3 \cdot \cos\dfrac{y}{x^2} - 0 - 0 - 0}{\sqrt{x^2 + (y-y_0)^2}} = \frac{x^3 \cdot \cos\dfrac{y}{x^3}}{\sqrt{x^2 + (y-y_0)^2}}.\end{aligned}$$

Se observă că are loc majorarea $|\alpha(x,y)| = \dfrac{|x^3|\cdot\left|\cos\dfrac{y}{x^3}\right|}{\sqrt{x^2+(y-y_0)^2}} \leq \dfrac{x^3}{|x|} = x|x|$, iar $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to y_0}} x|x| = 0$, deci $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to y_0}} |\alpha(x,y)| = 0$. Prin urmare $f$ este diferenţiabilă Frechét în punctul $(0, y_0)$.

c) Avem $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2\cos\dfrac{y}{x^2} + 2y\sin\dfrac{y}{x^2}, x \neq 0$, deci $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\partial f}{\partial x}$ nu există ($\sin(\infty)$ nu există). În concluzie $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ nu este continuă în $(0,y)$. Dar $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -x\sin\dfrac{y}{x^2}$, deci $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\partial f}{\partial y} = \lim\limits_{x\to 0} -x\underbrace{\sin\dfrac{y}{x^2}}_{\text{finit}} = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,y)$, deci $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ este funcţie continuă in $(0,y)$.

d) Obţinem succesiv $\operatorname{grad} g = \left(\dfrac{\partial g}{\partial x}, \dfrac{\partial g}{\partial y}, \dfrac{\partial g}{\partial z}\right)$; $f(r,1) = \begin{cases} r^3\cdot\cos\frac{1}{r^2}, r\neq 0\\ 0, r = 0.\end{cases}$

Prin calcul direct, rezultă

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = \left[3r^2\cos\frac{1}{r^2} - \sin\frac{1}{r^2}(-2)\right]\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}2x = \\
&= \left[3(x^2+y^2+z^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2+z^2} + 2\sin\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right]\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\\
\frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} = \left[3(x^2+y^2+z^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2+z^2} + 2\sin\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right]\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\\
\frac{\partial g}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} = \left[3(x^2+y^2+z^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2+z^2} + 2\sin\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right]\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},
\end{aligned}$$

în punctul $(x,y,z)\neq(0,0,0)$. Se observă uşor că $\operatorname{grad} g(0,0,0) = (0,0,0)$.

**II.** a) Efectuăm schimbarea de variabilă $t = x + s$. Atunci

$$f(x) = e^{\frac{x^2}{2}}\int_0^\infty e^{-\frac{(s+x)^2}{2}}\,ds = e^{\frac{x^2}{2}}\int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{2}-xs-\frac{x^2}{2}}\,ds = \int_0^\infty e^{\frac{-s^2}{2}-xs}\,ds.$$

Rezultă

$$\begin{aligned}
xf(x) &= x\int_0^\infty e^{-xs}e^{\frac{-s^2}{2}}\,ds = \int_0^\infty xe^{-xs}e^{\frac{-s^2}{2}}\,ds = \int_0^\infty (-e^{-xs})_s{}'e^{\frac{-s^2}{2}}\,ds = \\
&= \underbrace{-e^{-xs}e^{\frac{-s^2}{2}}\Big|_0^\infty}_{\text{-0+1}} + \int_0^\infty e^{-xs}e^{\frac{-s^2}{2}}(-s)\,ds == 1 - \int_0^\infty se^{-xs-\frac{s^2}{2}}\,ds < 1.
\end{aligned}$$

Inegalitatea $0 < xf(x)$ este evidentă.

b) $f'(x) = xe^{\frac{x^2}{2}}\displaystyle\int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + e^{\frac{x^2}{2}}\left(-e^{\frac{-x^2}{2}}\right) = xe^{\frac{x^2}{2}}\int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt - 1 = xf(x) - 1.$

c) Evident, din a) şi b).

d) Prin calcul direct, obţinem

$$f(0)=\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt=\int_0^\infty e^{-\left(\frac{t}{\sqrt2}\right)^2}\,dt \overset{\frac{t}{\sqrt2}=y}{=} \sqrt2\cdot\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy \overset{y^2=z}{=} \sqrt2\cdot\frac12\cdot\Gamma\left(\frac12\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

**III.** a) Evident $f(x,y,z)=(4x+6y,\ 3x-5y,\ 3x-6y+z)$.

b) Cum $f(x)=Ax$, $A=\begin{pmatrix}4&3&3\\6&-5&-6\\0&0&1\end{pmatrix}^t$, rezultă $f^n(x)=A^n\cdot x$, ceea ce conduce la determinarea numărului natural $n$ şi a numerelor reale $a_1,...,a_n$ cu proprietatea

$$a_n\cdot A^n+a_{n-1}\cdot A^{n-1}+...+a_1\cdot A+a_0\cdot I_3=0.$$

Polinomul caracteristic al matricei $A$ fiind $P_A(x)=-\lambda^3+39\cdot\lambda-38$, aplicând teorema Cayley-Hamilton se obţine egalitatea matriceală $-A^3+39\cdot A-38\cdot I_3=0_3$. Deci $n=3$ şi $a_3=-1, a_2=0, a_1=39$ şi $a_0=-38$.

c) Din $f(u)=u$, dacă $u=(x,y,z)$, rezultă $\begin{cases}3x+6y=0\\3x-6y=0\\3x-6y=0\end{cases}$, de unde $x=y=0$. Atunci $U=\{(0,0,z)|z\in\mathbb{R}\}$.

**IV.** $S_\lambda: x^2+y^2+z^2-4(\lambda+1)x-2(3\lambda-2)y+2(\lambda-5)z-14\lambda+33=0$.

a) $S_\lambda:(x-2\lambda-2)^2+(y-3\lambda+2)^2+(z-\lambda+5)^2-14\lambda^2=0$. Rezultă că, pentru $\lambda\neq0$, $S_\lambda:(centru\ (2\lambda+2,3\lambda-2,\lambda-5), raza\ |\lambda|\sqrt{14})$. Pentru $\lambda=0$, avem $(x-2)^2+(y+2)^2+(z-5)^2=0\Rightarrow$ este punctul $(2,-2,5)$.

b) Centrul sferelor este $(2\lambda+2,\ 3\lambda-2,\ \lambda-5)=(x,y,z)$, de unde dreapta cerută este: $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z+5}{1}=\lambda$.

c) Determinăm punctul comun al sferelor $S_\lambda$:

$$\lambda(-4x-6y+2z-14)+(x^2+y^2+z^2-4x+4y-10z+33)=0,\forall\lambda\in\mathbb{R}.$$

Obţinem $\begin{cases}-4x-6y+2z-14=0\\(x-2)^2+(y+2)^2+(z-5)^2=0\end{cases}$, deci $(2,-2,5)$ este punctul comun al sferelor $S_\lambda$. Planul tangent la sferele $S_\lambda$ este $2x+3y-z+7=0$.

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
### Faza naţională, anul I, profil electric, 2009-2010

**I.** Dacă $f$ este şi derivabilă, atunci

$$f'(x)=2\cdot\sqrt{f(x)}\Rightarrow\frac{f'(x)}{2\cdot\sqrt{f(x)}}=1\Rightarrow\sqrt{f(x)}=x+c\Rightarrow f(x)=(x+c)^2.$$

Dar $f(0)=0\Rightarrow f(x)=x^2$, deci toate soluţiile problemei sunt

$$f_1(x)=\begin{cases}0, & x\in(-\infty,0]\\x^2, & x\in(0,\infty)\end{cases},\quad f_2(x)=x^2,$$

$$f_3(x)=\begin{cases}x^2, & x\in(-\infty,0]\\0, & x\in(0,\infty)\end{cases},\quad f_4(x)=0.$$

**II.** Are loc dezvoltarea în serie Taylor $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n$.

a) Avem

$$\begin{aligned}\int_0^x e^{x-t}f(t)dt &= \int_0^x e^{x-t}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}t^n dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot e^x\cdot\int_0^x e^{-t}t^n dt\end{aligned}.$$

Notăm $I_n = \int_0^x e^{-t}t^n dt$. Integrăm prin părţi şi obţinem relaţia de recurenţă $I_n=-e^{-x}x^n+nI_{n-1}$, de unde $I_n=-e^{-x}(x^n+nx^{n-1}+...+n!)+n!$ Atunci

$$\begin{aligned}\int_0^x e^{x-t}f(t)dt &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot\left[(-x^n-nx^{n-1}-...-n!)+n!e^x\right] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}f^{(n)}(0)\left(e^x-1-\frac{x}{1!}-...-\frac{x^n}{n!}\right).\end{aligned}$$

b) Se alege $f(x)=e^{-x}$ şi înlocuind în relaţia de la punctul a) se obţine imediat relaţia cerută.

**III.** a) Folosind proprietăţile produsului vectorial, avem

$$T(\vec v_1+\vec v_2)=\vec a\times(\vec v_1+\vec v_2)=\vec a\times\vec v_1+\vec a\times\vec v_2=T(\vec v_1)+T(\vec v_2),$$
$$T(k\vec v)=\vec a\times(k\vec v)=k(\vec a\times\vec v)=kT(\vec v),\ \forall k\in\mathbb{R},$$

de unde $T$ este aplicaţie liniară. Ecuaţia $\vec a\times\vec v=\vec 0$ admite soluţiile $\vec v=\lambda\vec a,\ \lambda\in\mathbb{R}$, deci $Ker\ T=\{\lambda\vec a\mid\lambda\in\mathbb{R}\}$ (mulţimea vectorilor colieari cu $\vec a$). Fie $\vec y=T(\vec v)$. Atunci $\vec y=\vec a\times\vec v$, deci $Im\ T=\{\vec y\mid\vec y\perp\vec a\}$.

b) Fie $\theta_1=(\widehat{\vec v_1,\vec v_2})$, $\theta_2=(\widehat{T\vec v_1,T\vec v_2})$, unde $\vec v_k=T\vec u_k=\vec a\times\vec u_k$, $k\in\{1,2\}$. Folosind faptul că unghiul format de doi vectori nu depinde de lungimile vectorilor, că $T$ este aplicţie liniară şi că produsul vectorial este biliniar, putem presupune că vectorii $\vec u_1,\vec u_2$ sunt versori. În plus, deoarece avem $T\vec w=||\vec a||\left(\frac{\vec a}{||\vec a||}\times\vec w\right)$ şi transformarea liniară de scalare omogenă de factor $||\vec a||$ conservă unghiurile, putem presupune că $\vec a$ este versor. În aceste condiţii, notând $c_k=\cos(\widehat{\vec u_k,\vec a}), k\in\{1,2\}$, folosind bilinearitatea produsului scalar şi egalitatea $\vec a\times(\vec a\times\vec w)=\langle\vec a,\vec w\rangle\vec a-\langle\vec a,\vec a\rangle\vec w$, avem

$$\begin{aligned}\langle T\vec v_1,T\vec v_2\rangle &= \langle\vec a\times(\vec a\times\vec u_1),\vec a\times(\vec a\times\vec u_2)\rangle = \\ &= \langle\langle\vec a,\vec u_1\rangle\vec a-\langle\vec a,\vec a\rangle\vec u_1,\langle\vec a,\vec u_2\rangle\vec a-\langle\vec a,\vec a\rangle\vec u_2\rangle = \\ &= \langle c_1\vec a-\vec u_1,c_2\vec a-\vec u_2\rangle=\langle\vec u_1,\vec u_2\rangle-c_1c_2.\end{aligned}$$

Analog, folosind proprietatea de rulare a produsului mixt şi antisimetria produsului vectorial, avem

$$\begin{aligned}\langle\vec v_1,\vec v_2\rangle &= \langle\vec a\times\vec u_1,\vec a\times\vec u_2\rangle=\langle\vec u_1,(\vec a\times\vec u_2)\times\vec a\rangle = \\ &= -\langle\vec u_1,\vec a\times(\vec a\times\vec u_2)\rangle=-\langle\vec u_1,\langle\vec a,\vec u_2\rangle\vec a-\langle\vec a,\vec a\rangle\vec u_2\rangle = \\ &= -\langle\vec u_1,c_2\vec a-\vec u_2\rangle=\langle\vec u_1,\vec u_2\rangle-c_1,c_2,\end{aligned}$$

şi deci $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2\rangle = \langle T\vec{v}_1, T\vec{v}_2\rangle$. Din relaţia $\langle \vec{a}, T\vec{w}\rangle = \langle \vec{a}, \vec{a}\times\vec{w}\rangle = 0$ rezultă unghiul $\widehat{\vec{a}, T\vec{w}} = \frac{\pi}{2}, \forall \vec{w} \in V_3$; obţinem $||T\vec{v}_k|| = ||\vec{a}\times\vec{v}_k|| = ||\vec{a}||\cdot||\vec{v}_k||\cdot\sin(\widehat{\vec{a}, T\vec{u}_k}) = ||\vec{v}_k||$. Prin urmare

$$\cos\theta_2 = \frac{\langle T\vec{v}_1, T\vec{v}_2\rangle}{||T\vec{v}_1||\cdot||T\vec{v}_2||} = \frac{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2\rangle}{||\vec{v}_1||\cdot||\vec{v}_2||} = \cos\theta_1,$$

deci transformarea $T$ conservă unghiurile (este conformă).

c) Fie $S(\vec{v})$ liniară cu proprietatea $S(\vec{v}) \perp \vec{v}$, deci $S(\vec{v})\times\vec{v} = \vec{0}$, $\forall \vec{v}\in V_3$. Fie $A$ matricea unică, $A \in M_3(\mathbb{R})$ cu proprietatea $S(\vec{v}) = A\vec{v}$. Notăm $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,3}}$. Impunând condiţia de ortogonalitate, obţinem

$$\begin{cases} a_{21}v_1v_3 + a_{22}v_2v_3 + a_{23}v_3^2 - a_{31}v_1v_2 - a_{32}v_2^2 - a_{33}v_2v_3 = 0, \\ a_{11}v_1v_3 + a_{12}v_2v_3 + a_{13}v_3^2 - a_{31}v_1^2 - a_{32}v_1v_2 - a_{33}v_1v_3 = 0, \\ a_{11}v_1v_2 + a_{12}v_2^2 + a_{13}v_2v_3 - a_{21}v_1^2 - a_{22}v_1v_2 - a_{23}v_1v_3 = 0,\ \forall v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Alegând $\vec{v} = (1,0,0), \vec{v} = (0,0,1), \vec{v} = (0,1,0)$, obţinem

$$a_{21} = a_{31} = 0,\ \ a_{12} = a_{32} = 0,\ \ a_{13} = a_{23} = 0$$

şi înlocuind, obţinem $a_{11} = a_{22} = a_{33} = \lambda \in \mathbb{R}$. Deci $S(\vec{v}) = \lambda\vec{v}, \lambda \in \mathbb{R}$.

**IV.** Fie $\{v_1, v_2, ..., v_{n+1}\}$ vectori proprii. Cum oricare $n$ dintre ei sunt liniari independenţi, rezultă că al $(n+1)$-lea vector este liniar dependent de ceilalţi $n$ aleşi. Există deci $\alpha_1, ...\alpha_n \in \mathbb{R}$, nu toţi nuli, a.î. $v_{n+1} = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$. Presupunem că $\alpha_1 \neq 0$. Pe de altă parte, $T(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots, T(v_{n+1}) = \lambda_{n+1}v_{n+1}$, unde $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ sunt valori proprii, deci

$$\alpha_1 T(v_1) + ... + \alpha_n T(v_n) = \lambda_{n+1}(\alpha_1 v_1 + \alpha_n v_n) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha_1\lambda_1 v_1 + ... + \alpha_n\lambda_n v_n = \alpha_1\lambda_{n+1}v_1 + ... + \lambda_{n+1}\alpha_n v_n \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{n+1}) = 0 \\ \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_{n+1}) = 0 \\ \ldots \\ \alpha_n(\lambda_n - \lambda_{n+1}) = 0. \end{cases}$$

Dar $\alpha_1 \neq 0$, deci $\lambda_1 = \lambda_{n+1}$. Cum acelaşi raţionament se poate repeta pe orice combinaţie a celor $n+1$ vectori, rezultă $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n+1} = \lambda$. Deci $T = \lambda I$, unde $I$ este aplicaţia identică.

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza naţională, anul I, profil mecanic, 2009-2010

**I.** a) $\sqrt{2|xy|} \leq \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow 2|xy| \leq x^2+y^2 \Rightarrow (|x|-|y|)^2 \geq 0,\ \forall(x,y) \neq (0,0)$.

b) Folosind punctul a), obţinem $\dfrac{|x|^a|y|^b}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot|x|^{a-\frac{1}{2}}\cdot|y|^{b-\frac{1}{2}} \underset{x,y\to 0}{\longrightarrow} 0$. Rezultă egalităţile $\lim\limits_{x,y\to 0} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, deci $f$ este continuă în origine.

c) Obţinem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0.$$

d) Pentru $a=4$ şi $b=1$, avem $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n},n\right)(x+1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\sqrt{n^4+1}}(x+1)^n$. Notăm $a_n=\frac{1}{n^2\sqrt{n^4+1}}$. Să observăm că $\lim_{n\to 0}\frac{a_n}{a_{n+1}}=1$, de unde raza de convergenţă este 1, deci $x+1\in(-1,1), x\in(-2,0)$. Dacă $x=-2$, avem $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\sqrt{n^4+1}}(-1)^n$ (convergentă cu criteriul Leibniz). Dacă $x=0$, avem $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\sqrt{n^4+1}}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ convergentă, şi din criteriul comparaţiei, rezultă $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\sqrt{n^4+1}}$ convergentă. În concluzie mulţimea de convergenţă este $[-2,0]$.

**II.** Considerăm integrala $I(0)=\int_0^{\infty} e^{-(x+\frac{y}{x})^2}dx,\ y\geq 0$.

a) Avem $I(y)=\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (cu funcţia $\Gamma$). Se observă că $I(y)\leq I(0)$ pentru $y\geq 0$. Rezultă că $I(y)$ este convergentă, pentru orice $y\in[0,+\infty)$.

b) Derivând în raport cu parametrul $y$, rezultă

$$I'(y)=\int_0^{\infty} e^{-(x+\frac{y}{x})^2}\cdot\left[-2\left(x+\frac{y}{x}\right)\right]\cdot\frac{1}{x}dx,$$

de unde

$$\begin{aligned}I'(y)+4I(y) &= \int_0^{\infty} e^{-(x+\frac{y}{x})^2}\left(2-\frac{2y}{x^2}\right)dx=2\int_0^{\infty} e^{-(x+\frac{y}{x})^2}\left(x+\frac{y}{x}\right)'_x dx=\\ &=2\int_0^{a} e^{-(x+\frac{y}{x})^2}\cdot\left(x+\frac{y}{x}\right)'_x dx+2\int_a^{\infty} e^{-(x+\frac{y}{x})^2}\cdot\left(x+\frac{y}{x}\right)'_x dx=\\ &=-2\int_{a+\frac{y}{a}}^{\infty} e^{-u^2}du+2\int_{a+\frac{y}{a}}^{\infty} e^{-u^2}du=0,\end{aligned}$$

unde s-a folosit substituţia $x+\frac{y}{x}=u$. Rezultă că $I'(y)=-4I(y),\ \forall y\geq 0$.

c) Deoarece $\frac{I'(y)}{I(y)}=-4$, rezultă $\int\frac{I'(y)}{I(y)}dy=-4\int dy\Rightarrow \ln I(y)=-4y+\ln C$, deci $I(y)=C\cdot e^{-4y},(\forall)y\geq 0$. Dar $I(0)=\int_0^{\infty} e^{-x^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Rightarrow C=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, deci $I(y)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot e^{-4y}$.

**III.** a) Verificarea că $T$ este lineară este trivială.

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} T &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid T(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^3; \mid (2x_2 - x_3, -2x_1 + 2x_3, x_1 - 2x_2) = 0\} = \\ &= \{(2\alpha, \alpha, 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \\ \operatorname{Im} T &= \{y \in \mathbb{R}^3 \mid T(x) = y\} = \{y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3; \mid 2y_1 + y_2 + 2y_3 = 0\}.\end{aligned}$$

b) Proprietatea cerută reprezintă un caz particular al problemei omologe de la profilul electric, pentru vectorul $a = -2i - j - 2k \equiv (-2, -1, -2)$. În acest caz, matricea asociată lui $T : V_3 \to V_3, T(v) = a \times v$ relativ la baza canonică $\{i, j, k\}$, coincide cu cea din enunţul problemei date.

c) Avem $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Atunci $I_3 + A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $(I_3 + A)^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Rezultă

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 8 & -6 & 0 \\ 6 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix}.$$

Valorile proprii ale matricii $Q$ sunt soluţiile ecuaţiei caracteristice

$$det(Q - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow -5\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda + 5 = 0,$$

deci $(1 - \lambda)(5\lambda^2 + 8\lambda + 5) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} \in \mathbb{C}$. Deci singura valoare proprie reală este $\lambda = 1$. Fie $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ vector propriu corespunzător valorii proprii $\lambda = 1$, deci

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{4}{5} & -\frac{8}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c = a \\ b = \frac{a}{2},\ a \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow v = a\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{C}.$$

**IV.** $\pi : (2m + 1)x + (3 - 4m)y + 3z - 2 = 0$.

a) Vectorul normal la plan are componentele $n \equiv (2m + 1, 3 - 4m, 3)$. Condiţia ca planul $\pi_1$ să conţină $Ox$ şi să fie perpendicular pe $\pi$ este echivalentă cu condiţiile $O(0, 0, 0) \in \pi_1$, $\pi_1 || i \equiv (1, 0, 0)$, $\pi_1 || n$, deci

$$\pi_1 : \begin{vmatrix} x - 0 & y - 0 & z - 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2m + 1 & 3 - 4m & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3y - z(3 - 4m) = 0.$$

Analog obţinem $\pi_2 : 3x - z(2m + 1) = 0$, $\pi_3 : (3 - 4m)x - y(2m + 1) = 0$.

b) Se observă că vectorii $n_1 \equiv (0, 3, 4m - 3)$ şi $n_2 \equiv (3, 0, -2m - 1)$ care sunt normali respectiv la planele $\pi_1$ şi $\pi_2$, sunt necoliniari, deci planele $\pi_1$ şi $\pi_2$ sunt concurente după o dreaptă $\Delta$. De asemenea, notând cu $e_1, e_2, e_3$ expresiile care anulate dau respectiv ecuaţiile planelor $\pi_1, \pi_2, \pi_3$, se observă că $e_1 \cdot \frac{-(2m+1)}{3} + e_2 \cdot \frac{3-4m}{3} = e_3$, deci $\pi_3$ aparţine fasciculului de plane determinat de $\pi_1$ şi $\pi_2$, deci conţine dreapta $\Delta$,. Rezultă ca $\pi_1$, $\pi_2$ şi $\pi_3$ sunt plane concurente după dreapta $\Delta$.

c) Eliminând parametrul $m$ din ecuaţiile dreptei $\Delta$ (ecuaţiile planelor $\pi_1$ şi $\pi_2$), rezultă ecuaţia planului în care se află conţinută această dreaptă, atunci când $m$ variază:

$$m = \frac{3y - 3z}{-4z} = \frac{3x - z}{2z} \Rightarrow 6x - 3y - 5z = 0.$$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza naţională, anul I, profil electric, 2010-2011

**II.** Notăm $f(y) = \int_0^y \sqrt{x^4 + (y-y^2)^2}dx$. Atunci

$$\begin{aligned} f''(y) &= \int_0^y \frac{1}{\sqrt{x^4+(y-y^2)^2}}(y-y^2)(1-2y)dx + \sqrt{y^4+(y-y^2)^2} \\ &= y\left((1-y)(1-2y)\int_0^y \frac{1}{\sqrt{x^4+(y-y^2)^2}}dx + \sqrt{2y^2-2y+1}\right). \end{aligned}$$

Dacă $y \le \frac{1}{2}$ atunci $f'(y) \ge 0$; dacă $y > \frac{1}{2}$, vom demonstra că avem tot $f'(y) \ge 0$. Cum $\frac{1}{\sqrt{x^4+(y-y^2)^2}} \le \frac{1}{y-y^2}$, rezultă $\int_0^y \frac{1}{\sqrt{x^4+(y-y^2)^2}}dx \le \int_0^y \frac{1}{y-y^2}dx = \frac{1}{1-y}$, deci

$$f'(y) \ge 1-2y+\sqrt{2y^2-2y+1} = 1-y+\sqrt{2y^2-2y+1}-y = 1-y+\frac{(y-1)^2}{y+\sqrt{2y^2-2y+1}} \ge 0;$$

prin urmare $f'(y) \ge 0$. Rezultă deci $f'(y) \ge 0$, $\forall y \in [0,1]$ şi deci $f$ este crescătoare. Aşadar valoarea maximă a lui $f(y)$ este $f(1) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

**III.** Fie $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ matricea transformării $T$ relativ la baza canonică a lui $\mathbb{R}^2$. Atunci

$$\langle T(x,y),(x,y)\rangle = 0,\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \langle (ax+by, cx+dy),(x,y)\rangle = 0,\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

$$\Leftrightarrow ax^2+(b+c)xy+dy^2 = 0,\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a=d=0 \\ b=-c \end{cases} \Leftrightarrow A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{smallmatrix}\right),\ b\in\mathbb{R}.$$

Fie $B = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ matricea transformării $S$ relativ la baza canonică a lui $\mathbb{C}^2$. Atunci

$$\begin{aligned} &\langle T(x,y),(x,y)\rangle = 0,\ \forall (x,y)\in\mathbb{C}^2 \Leftrightarrow \langle (ax+by, cx+dy),(x,y)\rangle = 0,\ \forall (x,y)\in\mathbb{C}^2 \\ &\quad\Leftrightarrow a|x|^2+by\bar{x}+cx\bar{y}+d|y|^2 = 0,\ \forall (x,y)\in\mathbb{C}^2 \Leftrightarrow a=b=c=d=0 \Leftrightarrow A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right). \end{aligned}$$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza naţională, anul I, profil mecanic, 2010-2011

**I.** a) Matricea endomorfismului $T_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ relativ la baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$ este $M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ a^2/2 & a & 1 \end{pmatrix}$, matrice nesingulară, deci $T_a$ este transformare bijectiva. Prin urmare $\text{Ker}\,(T_a) = \{(0,0,0)\}$, iar $\text{Im}\,(T_a) = \mathbb{R}^3$.

b) Polinomul caracteristic $P_{M_a}(\lambda) = \det(M_a - \lambda I_3) = -(\lambda - 1)^3$ are o singură radacină distinctă triplă $\lambda = 1$ reală, deci o valoare proprie a lui $T_a$ cu multiplicitate algebrică trei. Subspaţiul propriu asociat acestei valori proprii este

$$S_{\lambda=1} = \text{Ker } (T_a - I_3) = \{(t, 0, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

În particular, dacă $a = 0$, atunci $M_a = I_3$ este matrice diagonală, deci o bază diagonalizatoare este chiar baza canonică $\{e_1, e_2, e_3\}$ a spaţiului vectorial $\mathbb{R}^3$. Pentru $a \neq 0$, dimensiunea subspaţiului propriu $S_\lambda$ este unu, deci multiplicitatea geometrică a valorii proprii $\lambda = 1$ diferă de cea algebrică, şi deci $T_a$ este endomorfism jordanizabil, însă ne-diagonalizabil.

c) Prin calcul direct, obţinem $M_a \cdot M_b = M_{a+b}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, din care rezultă egalitatea $M_a^n = M_{na}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ şi în particular $M_a^{-1} = M_{-a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ a^2/2 & -a & 1 \end{pmatrix}$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

d) Dacă $a = 0$, atunci $M_a = I_3$ este matrice diagonală, limita şirului $S_n$ există şi este $e^{M_a} = e^{I_3} = e \cdot I_3$. Dacă $a \neq 0$, atunci $M_a$ este jordanizabilă; notâd cu $T$ matricea jordanizatoare (formată dintr-un vector propriu şi doi vectori principali) şi cu $J$ forma canonică Jordan asociată lui $M_a$, avem $J = T^{-1} M_a T$, care implică $e^{M_a} = T e^J T^{-1}$.

**II.** a) Dreapta admite ecuaţiile parametrice $(x, y, z) = (t+a, bt-2, 3t+a-b)$, $t \in \mathbb{R}$ şi este inclusă în planul $(P_1)$ dacă punctele acesteia satisfac ecuaţia planului, deci

$$(t + a) + (bt - 2) + (3t + a - b) - 4 = 0, \ \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (b + 4)t + (2a - b - 6) = 0, \ \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} b + 4 = 0 \\ 2a - b - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4. \end{cases}$$

b) Ecuaţiile perpendicularei din $A$ pe planul $(P_2)$ sunt: $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-2}{2}$, iar intersecţia acesteia cu planul $(P_2)$ este punctul $A'(\frac{7}{9}, -\frac{22}{9}, \frac{14}{9})$.

c) Cele trei plane se intersectează în punctele ale căror coordonate sunt date de soluţia sistemului

$$\begin{cases} x + y + z = 4, \\ x + 2y + 2z = -1, \\ x + 7y + 7z = -m. \end{cases}$$

Matricea coeficienţilor necunoscutelor are determinantul zero, are rangul 2, iar sistemul este compatibil dacă determinantul caracteristic al celei de-a treia ecuaţii este nul, deci

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 7 & -m \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 26 - m = 0 \Leftrightarrow m = 26.$$

Deci pentru $m \neq 26$ planele nu au puncte comune (se taie două câte două după trei drepte paralele), iar pentru $m = 26$ sistemul fiind compatibil simplu nedeterminat, planele se intersectează după dreapta $D = (P_1) \cap (P_2)$, deci fac parte fasciculul de plane concurente în $D$.

**III.** a) Obţinem succesiv:

$$\left| x^2 y^2 \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right| \leq x^2 y^2 \cdot \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = x^2 y^2 \underset{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}}{\longrightarrow} 0,$$

deci $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ şi deci funcţia $f$ este continuă în origine. Cum $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, rezultă imediat că $f$ este diferenţiabilă în origine.

b) Avem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2xy^2 \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^3y^4}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

şi deci $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = 0$. Analog obţinem $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 0$.

c) Deoarece $f_n(x) = \begin{cases} \frac{x(n^2x^2-1)}{n^2x^2+1}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, obţinem $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = f(x)$, unde $f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$. Fie $g_n(x) = f_n(x) - f(x) = \begin{cases} \frac{-2x}{n^2x^2+1}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Atunci $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x)| \leq \dfrac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, de unde $f_n$ converge uniform la $f$.

**IV.** a) Notând $y = x^2$, seria se rescrie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{3^n}{n} y^n$. Criteriul raportului produce $R = \frac{1}{3}$ pentru seria în $y$, deci raza de convergenţă a seriei date este $r = \frac{1}{\sqrt{3}}$ iar mulţimea de convergenţă este $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ (folosind criteriul Leibniz). Fie $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{3^n}{n} x^{2n}$, $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$. Atunci

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot 3^n \cdot 2 \cdot x^{2n-1} = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot 3^n \cdot x^{2n-1},$$

de unde $xf'(x) = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot (\sqrt{3}x)^{2n}$. Cum $\frac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \forall x \in (-1,1)$, rezultă

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot [(\sqrt{3}x)^2]^n = -\frac{1}{1+3x^2} + 1 = \frac{3x^2}{1+3x^2}.$$

Atunci $xf'(x) = \frac{6x^2}{1+3x^2}$, de unde $f'(x) = \frac{6x}{1+3x^2}$ şi $f(x) = \ln(1+3x^2) + C$, $C \in \mathbb{R}$. Dar $f(0) = 0$ (cu definiţia) şi $f(0) = \ln(1 + 3 \cdot 0^2) + C = C$, de unde rezultă $C = 0$. Prin urmare $f(x) = \ln(1 + 3x^2)$.

b) Deoarece $\left|(-1)^{n-1} \frac{3^n}{n} x^{2n}\right| \leq \frac{3^n}{n} \cdot \frac{1}{3^{2n}} = \frac{1}{n \cdot 3^n}$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n \cdot 3^n}$ este convergentă (cu criteriul raportului), rezultă că seria este uniform convergentă.

c) Calculăm $I$ folosind integrarea prin părţi. Obţinem succesiv:

$$\begin{aligned}
I &= x\ln(1+3x^2)\Big|_0^{1/\sqrt{3}} - \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{6x^2}{1+3x^2}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\ln 2 - 2\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{3x^2}{1+3x^2}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\ln 2 - 2x\Big|_0^{1/\sqrt{3}} + 2\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{1+3x^2}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\ln 2 - \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(x\sqrt{3})\Big|_0^{1/\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln 2 - \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{4}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Pe de altă parte, folosind punctul a), putem calcula

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{1/\sqrt{3}} \ln(1+3x^2)dx = \int_0^{1/\sqrt{3}} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^n}{n}x^{2n}dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^n}{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\Big|_0^{1/\sqrt{3}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{n(2n+1)}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Egalând expresiile obţinute în (18) şi (19), obţinem rezultatul cerut.

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
## Faza naţională, anul I, profil electric, 2011-2012

**I.** Cum $\{1, x, x^2, x^3\}$ este bază în spaţiul polinoamelor de grad cel mult 3, rezultă că trebuie să impunem condiţia de ortogonalitate a lui $p(x)$ cu elementele bazei. Dar $\langle p(x), x\rangle = 0$ şi $\langle p(x), x^3\rangle = 0$ datorită imparităţii, deci, impunând $\langle p(x), 1\rangle = 0$ şi $\langle p(x), x^2\rangle = 0$, găsim $a = \frac{-3}{35}$ iar $b = \frac{6}{7}$.

**II.** a) Folosind proprietăţile de aditivitate şi omogenitate ale transpunerii, se obţin egalităţile

$$\begin{cases} T_\alpha(A+B) = T_\alpha(A) + T_\alpha(B), & \forall A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \\ T_\alpha(kA) = kT_\alpha(A), & \forall k \in \mathbb{R},\ \forall A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}). \end{cases}$$

b) Componentele imaginilor prin $T_\alpha$ ale matricelor $\{\underbrace{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)}_{m_{11}}, \underbrace{\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)}_{m_{12}}, \underbrace{\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)}_{m_{21}}, \underbrace{\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)}_{m_{22}}\}$,

$$\begin{cases} T_\alpha(m_{11}) = \left(\begin{smallmatrix}1+\alpha&0\\0&0\end{smallmatrix}\right) = (1+\alpha)m_{11} & \Rightarrow [T_\alpha(m_{11})] = (1+\alpha, 0, 0, 0)^t \\ T_\alpha(m_{12}) = \left(\begin{smallmatrix}0&1\\\alpha&0\end{smallmatrix}\right) = m_{12} + \alpha m_{21} & \Rightarrow [T_\alpha(m_{12})] = (0, 1, \alpha, 0)^t \\ T_\alpha(m_{21}) = \left(\begin{smallmatrix}0&\alpha\\1&0\end{smallmatrix}\right) = \alpha m_{12} + m_{21} & \Rightarrow [T_\alpha(m_{21})] = (0, \alpha, 1, 0)^t \\ T_\alpha(m_{22}) = \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1+\alpha\end{smallmatrix}\right) = (1+\alpha)m_{22} & \Rightarrow [T_\alpha(m_{22})] = (0, 0, 0, 1+\alpha)^t \end{cases}$$

produc coloanele matricei $B = [T_\alpha] = \begin{pmatrix} 1+\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\alpha \end{pmatrix}$.

c) Polinomul caracteristic al matricei $B$ este

$$P_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_4) = ((1+\alpha) - \lambda)^2((1-\lambda)^2 - \alpha^2) = (\lambda - (1+\alpha))^3(\lambda - (1-\alpha)).$$

d) Rădăcinile polinomului caracteristic sunt $1+\alpha$ şi $1-\alpha$. Distingem cazurile: (i) $\lambda = 0$, caz în care $T_\alpha$ admite valoarea proprie $\lambda_* = 1$ (cu multiplicitatea algebrică 4), iar $B = I_4$ (matrice diagonalizanilă, aflată în formă diagonală, iar baza diagonalizatoare este, spre exemplu, baza canonică $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ a spaţiului $\mathbb{R}^4$). În cazul (ii), când $\alpha \neq 0$, valorile proprii distincte ale transformării $T_\alpha$ sunt: $\lambda_1 = 1+\alpha$ (triplă) şi $\lambda_2 = 1-\alpha$ (simplă), iar $B - \lambda_1 I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, cu rangul 1, deci multiplicitatea geometrică (dimensiunea subspaţiului propriu) este $4-1 = 3$, deci egală cu multiplicitatea algebrică a valorii proprii. Multiplicităţile concid şi pentru valoarea proprie simplă $\lambda_2$, deci $T_\alpha$ este diagonalizabilă şi în cazul (ii). Prin urmare, pentru orice valoare $\alpha \in \mathbb{R}$, $T_\alpha$ este diagonalizabilă. În cazul (ii), rezolvând cele două sisteme caracteristice, obţinem baze în subspaţiile proprii: $S_{1+\alpha} = Span(u_1 = e_1, u_2 = e_4, u_3 = (0,1,1,0))$, şi $S_{1-\alpha} = Span(u_4 = (0,1,-1,0))$. Deci baza diagonalizatoare este, în cazul (ii), $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$.

**IV.** a) Cum $x_{n+1} - x_n = \frac{-x_n^3}{1+\sqrt{1-x_n^2}} < 0$, şirul este descrescător, deci există $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Trecând la limită în relaţia de recurenţă, obţinem $l = 0$.

b) Aplicăm criteriul Raabe-Duhamel. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n(1 - \sqrt{1-x_n^2}) = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} nx_n^2 = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n^2}},$$

şi cu criteriul Stolz-Cesàro, limita devine

$$\tfrac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 x_{n+1}^2}{x_n^2 - x_{n+1}^2} = \tfrac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(1 - x_n^2) = \frac{1}{2} < 1,$$

deci seria este divergentă.

c) Aplicăm din nou criteriul Raabe-Duhamel şi ţinem cont de rezultatele obţinute la punctele a) şi b), anume $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n^2 = 1$. Astfel,

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n^3}{x_{n+1}^3} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{\sqrt{1-x_n^2}^3} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1 - \sqrt{1-x_n^2}^3}{\sqrt{1-x_n^2}^3}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\frac{1-(1-x_n^2)^3}{1+\sqrt{1-x_n^2}^3} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} n(1 - 1 + 3x_n^2 - 3x_n^4 + x_n^6)$$

$$= \tfrac{1}{2}\lim_{n\to\infty} nx_n^2(3 - 3x_n^2 + x_n^4) = \frac{3}{2} > 1,$$

deci seria este convergentă.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza naţională, anul I, profil mecanic, 2011-2012

**I.** a) Condiţia de perpendicularitate permite să alegem ca vector normal la plan vectorul director al dreptei, $\vec{n} \equiv (b, c, a)$. Planul conţine punctul

$$M_0(a + c - \tfrac{b}{2}, a - \tfrac{c}{2}, -\tfrac{a}{2}),$$

deci are ecuaţia: $b(X - (a + c - \frac{b}{2})) + c(Y - (a - \frac{c}{2})) + a(Z - (-\frac{a}{2}) = 0$, care se rescrie

$$bX + cY + aZ + \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca) = 0.$$

b) Se observă că proiecţia $N$ a punctului $M$ pe $(\pi)$ se află la intersecţia cu $(\pi)$ a dreptei $(D')$, care conţine punctul $M(a, b, c)$ şi are vectorul său director coliniar cu vectorul normal $\vec{n} \equiv (b, c, a)$ la $(\pi)$. Deci coordonatele lui $N$ sunt date de sistemul liniar

$$\begin{cases} \frac{X-a}{b} = \frac{Y-b}{c} = \frac{Z-c}{a} \\ bX + cY + aZ + \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca) = 0. \end{cases}$$

Soluţia sistemului este $N(a - \frac{b}{2}, b - \frac{c}{2}, c - \frac{a}{2})$. Punctul $N$ înjumătăţeşte segmentul $MP$, unde $P$ este simetricul punctului $M$ faţă de planul $(\pi)$, deci coordonatele sale sunt medii aritmetice ale coordonatelor punctelor $M(a, b, c)$ şi $P$; prin urmare avem:

$$\begin{cases} x_N = (x_M + x_P)/2 \\ y_N = (y_M + y_P)/2 \\ z_N = (z_M + z_P)/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_P = 2x_N - x_M = a - b \\ y_P = 2y_N - y_M = b - c \\ z_P = 2z_N - z_M = c - a. \end{cases}$$

Atunci

$$\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ b-c \\ c-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Simetrizarea faţă de planul $(\pi)$ fiind descrisă de matricea din relaţie, rezultă liniaritatea acestei aplicaţii.

c) Matricea este singulară, de rang 2, deci defectul transformarii $f$ este $3 - 2 = 1$.

**II.** a) Matricea asociată familiei de vectori relativ la baza canonică este $C = [B_m] = \begin{pmatrix} 1+m & 2 & 2 \\ 2 & 1+m & 2 \\ 2 & 2 & 1+m \end{pmatrix}$ are determinantul $\det C = (m + 5)(m - 1)^2$, deci $B_m$ este bază în $\mathbb{R}^3$ pentru $\det C \neq 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}\backslash\{-5, 1\}$. Coordonatele lui $v$ relativ la $B_{-1}$ sunt date de $[B_{-1}]^{-1}[v] = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

b) Pentru orice $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, forma pătratică $Q(x) = \varphi(x, x)$ se rescrie

$$Q(x) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1+m & 2 & 2 \\ 2 & 1+m & 2 \\ 2 & 2 & 1+m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (1 + m)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1).$$

Pentru $m = 1$, avem $Q$ degenerată, pozitiv semidefinită cu signatură $(+, 0, 0)$, deoarece se poate rescrie

$$Q(x) = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 2(x_1 + x_2 + x_3)^2.$$

c) Notând $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, avem $M = [B_0] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2U - I_3$. Dar $U^{k+1} = 3U^k$, $\forall k \geq 1$ iar $UI_3 = I_3U = U$, deci pentru $n \geq 1$ putem utiliza binomul lui Newton,

$$\begin{aligned} M^n &= (2U - I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (2U)^{n-k}(-I_3)^k = \sum_{k=0}^{n-1} [C_n^k (2U)^{n-k}(-I_3)^k] + (-I_3)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} [C_n^k 2^{n-k}(-1)^k U^{n-k}] + (-1)^n I_3 = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k 2^{n-k}(-1)^k 3^{n-k-1}]U + (-1)^n I_3 \\ &= \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k 6^{n-k}(-1)^k]U + (-1)^n I_3 = \frac{1}{3}\{[\sum_{k=0}^{n} C_n^k 6^{n-k}(-1)^k] - C_n^n(-1)^n\}U + (-1)^n I_3 \\ &= \frac{1}{3}\{[6 + (-1)]^n - (-1)^n\}U + (-1)^n I_3 = \frac{1}{3}[5^n - (-1)^n]U + (-1)^n I_3. \end{aligned}$$

Pentru $n = 2012$, obţinem $M^{2012} = \underbrace{\frac{1}{3}(5^{2012} - 1)}_{\alpha} U + I_3 = \begin{pmatrix} 1+\alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1+\alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1+\alpha \end{pmatrix}$.

**III.** a) Punctele critice se obţin ca soluţii ale sistemului

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy(1 + x) = 0 \\ x^2(1 + 3y) = 0. \end{cases}$$

Se obţin soluţiile $(0, y)$, $\forall y \in \mathbb{R}$ şi $(-1, -\frac{1}{3})$.

Cum $d^2f(0, y) = 2ye^{3y}dx^2$, rezultă că, dacă $y > 0$, punctul $(0, y)$ este punct de minim local al funcţiei, dacă $y < 0$, punctul $(0, y)$ este punct de maxim local al funcţiei, iar $(0, 0)$ nu este punct de extrem.

Pentru $(-1, -\frac{1}{3})$, avem $d^2f(-1, -\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}e^{-3}dx^2 + 3e^{-3}dy^2 > 0$, de unde acesta este punct de minim local pentru $f$.

b) Rezultă imediat din faptul că $(-1, -\frac{1}{3})$ este punct de minim local al funcţiei şi $f(-1, -\frac{1}{3}) = -\frac{1}{3}e^{-3}$.

c) Presupunem că funcţia admite un punct de extrem global. Avem astfel 3 posibilităţi:

1) Dacă acesta ar fi punctul $(0, y)$, $y > 0$, atunci ar trebui ca $f(x, y) \geq f(0, y) = 0$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}$, ceea ce este evident fals, este suficient să alegem un $y$ negativ.

2) Dacă acesta ar fi punctul $(0, y)$, $y < 0$, atunci ar trebui ca $f(x, y) \leq f(0, y) = 0$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}$, din nou fals.

3) Dacă $(-1, -\frac{1}{3})$ ar fi punct de minim global, atunci ar trebui să aibă loc inegalitatea $f(x, y) \geq f(-1, -\frac{1}{3}) = -\frac{1}{3}e^{-3}$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}$. Pentru a demonstra contrariul, alegem $x = \frac{a}{2}$, $y = -\frac{a}{3}$, $a > 0$. Avem deci $\frac{a^3}{4} \leq e^{-3}$, $\forall a > 0$, ceea ce este evident fals.

**IV.** a) Folosim inducţia matematică. Avem de demonstrat inegalitatea strictă $\frac{\sqrt{a_1} \cdot a_{2n+1}}{\sqrt{a_{2n+1}} \cdot a_{2n+2}} < \frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_{2n+3}}}$, sau, echivalent, $a_{2n+1}a_{2n+3} < a_{2n+2}^2$. Fiind vorba de o progresie aritmetică de raţie $r > 0$, relaţia este adevărată.

b) Notăm $u_n = \frac{a_1 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{2n-1}}{a_2 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_{2n}}$ Folosind punctul a) şi notând cu $r > 0$ raţia progresiei, avem $0 < u_n < \sqrt{\frac{a_1}{a_{2n+1}}} = \frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_1 + 2nr}}$, deci folosind criteriul cleştelui, rezultă $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Atunci obţinem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{2n-1}}{a_2 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_{2n}} \cdot \frac{1}{a_{2n+2}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_1 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{2k-1}}{a_2 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_{2k}} \cdot \frac{1}{a_{2k+2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{r}(u_k - u_{k+1}) = \frac{1}{r} \lim_{n\to\infty} (u_1 - u_{n+1}) = \frac{1}{r}(u_1 - \lim_{n\to\infty} u_{n+1})$$

$$= \frac{1}{r} u_1 = \frac{1}{r} \cdot \frac{a_1}{a_3} \cdot \frac{1}{a_5}.$$

c) Folosim criteriul Raabe-Duhamel. Avem

$$\lim_{n\to\infty} n \left( \frac{a_{2n+2}}{a_{2n+1}} - 1 \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{nr}{a_1 + 2nr} = \frac{1}{2} < 1,$$

deci seria este divergentă.

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
## Faza naţională, anul I, profil teoretic, 2012-2013

**I.** $Av, \ldots, A^{n-1}v$ sunt vectori proprii pentru $A^n$. Notând $P = [v, Av, \ldots, A^{n-1}v]$, matricea $P$ este inversabilă şi are loc egalitatea $A^n P = \lambda P$.

**II.** Oricare ar fi $\alpha$ din $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, funcţia $f_\alpha(x) = f(\alpha + x) - f(x)$ este constantă. Oricare ar fi $\alpha$ din $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ şi oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, are loc $f(x+\alpha) - f(\alpha) = f(x) - f(0)$. Funcţia $x \to f(x) - f(0)$ satisface ecuaţia funcţională a lui Cauchy, iar $f$ continuă implică $f(x) - f(0) = ax$, oricare ar fi $x$ din $\mathbb{R}$. Obţinem $f(x) = ax + b$ cu $a \in \mathbb{Q}$ şi $b \in \mathbb{R}$.

**III.** Notând cu $\mu_A$ polinomul minimal al lui $A$, avem $\mu_A \mid x^{2^k} + 1$. Polinomul $x^{2^k} + 1$ este ireductibil iar $\mu_A = x^{2^k} + 1$. Notând cu $P_A$ polinomul caracteristic al lui $A$, avem $P_A = (x^{2^k} + 1)^r$, iar $n = 2^k r \geq 2^k$.

**IV.** Notăm $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{n^2x^2 - [nx]^2}{(1+x^2)(1+[nx]^2)} dx$ şi $\ell = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n} I_n$. Cu schimbarea de variabilă $nx = t$ se obţine $\ell = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n} J_n$, unde $J_n = \displaystyle\int_1^n \frac{t^2 - [t]^2}{(n^2+t^2)(1+[t]^2)} dt$.

Se observă că $J_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} J_{n,k}$, unde $J_{n,k} = \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{t^2 - k^2}{(n^2+t^2)(k^2+1)} dt$ şi

$$J_{n,k} > \frac{1}{(k+1)(n^2 + (k+1)^2)} > \int_{k+1}^{k+2} \frac{dt}{t(n^2+t^2)}.$$

Au loc relaţiile

$$\frac{n^2}{\ln n} J_n > \frac{1}{\ln n} \left( \ln \frac{n+1}{\sqrt{2n^2+2n+1}} - \ln 2 + \ln \sqrt{n^2+4} \right); \tag{20}$$

$$J_{n,k} < \frac{1}{k(n^2+k^2)} + \frac{1}{3k^2(n^2+k^2)} < \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t(n^2+t^2)} + \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{3t^2(n^2+t^2)}.$$

De asemenea, are loc relaţia

$$\frac{n^2}{\ln n}J_n < \frac{\ln\sqrt{n^2+1}}{\ln n} + \frac{5}{2\ln n} + \frac{1}{n\ln n}\operatorname{arctg}\frac{1}{n}. \tag{21}$$

Din (20) şi (21) rezultă $\ell = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{\ln n}J_n = 1$.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza naţională, anul I, profil electric, 2012-2013

**I.** La momentul arbitrar $t$, vectorii de poziţie ai punctelor $M_1(t)$ şi $M_2(t)$ sunt: $\bar{r}_{M_1} = \bar{r}_{A_1} + t\bar{v}_1$, $\bar{r}_{M_2} = \bar{r}_{B_1} + t\bar{v}_2$. Deci punctele $M_1$ şi $M_2$ au coordonatele: $M_1(t) = (t,t,t)$, $M_2(t) = (1+t,t,-t)$. Un punct arbitrar de pe dreapta $M_1M_2$ are vectorul de poziţie de forma $\bar{r} = (1-s)\bar{r}_{M_1} + s\bar{r}_{M_2}$, $s\in\mathbb{R}$. Deci punctele suprafeţei $S$ au coordonatele $(x,y,z)$ date prin relaţiile:

$$S: \begin{cases} x = (1-s)t + s(1+t) \\ y = (1-s)t + st \\ z = (1-s)t - st \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t+s \\ y = t \\ z = t - 2st, \quad t,s\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

(ecuaţiile parametrice). Din primele două relaţii obţinem $t = y$ şi $s = x - y$ care introduse în a treia dau ecuaţia implicită

$$S: \; z = y - 2y(x-y) \quad \Leftrightarrow \quad 2y^2 - 2xy + y - z = 0,$$

care este ecuaţia unei cuadrice. Matricea formei pătratice asociate, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, are valorile proprii $\lambda_1 = 1+\sqrt{2} > 0$, $\lambda_2 = 1-\sqrt{2} < 0$ şi $\lambda_3 = 0$. Matricea extinsă a coeficienţilor are determinantul $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \neq 0$, deci fiind nesingulară, suprafaţa $S$ este o cuadrică nedegenerată. Rezultă că $S$ este un paraboloid hiperbolic.

**II.** Notăm cu $n = \dim V$. Fie $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o bază in $V$. Fie $A$ matricea $n\times n$ asociată formei biliniare $F$ in raport cu baza $B$, cu elementele $a_{ij} = F(e_i, e_j)$, $i,j = 1,2,\ldots,n$. Fie $T_A$ un operator liniar $T_A : \; E \to E$, astfel încât în $B$ are matricea $A$, deci $T_A(x) = A\cdot X$, $\forall X = (x_1,x_2,\ldots,x_n)^t \in \mathbb{R}^n$, unde $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ sunt coeficienţii lui $x\in V$ relativ la baza $B$. Avem $T_A(e_i) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ji}e_j = \sum\limits_{j=1}^{n} F(e_i,e_j)$, $i = 1,2,\ldots,n$. Atunci $T_A(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} F(x,e_j)e_j$, $x\in V$. Prin urmare $V_1 = \operatorname{Ker}\,(T_A)$. Analog, $V_2 = \operatorname{Ker}\,(T_{A^t})$, unde $A^t$ este transpusa matricii $A$. Din teorema rangului şi din relaţiile $\dim \operatorname{Im}\,(T_A) = \operatorname{rang}\,(A)$ şi $\dim\operatorname{Im}\,(T_{A^t}) = \operatorname{rang}\,(A^t)$, obţinem

$$\dim V_1 = \dim V - \dim\operatorname{Im}\,(T_A), \qquad \dim V_2 = \dim V - \dim\operatorname{Im}\,(T_{A^t}).$$

Cum însă Im $(T_A) =$ Im $(T_{A^t})$, rezultă $\dim V_1 = \dim V_2$.

**III.** a) Un calcul simplu arată că

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \ldots = \int_0^1 (x^n - x^{n+1} + x^{n+2} - \ldots)dx = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx.$$

b) Notând $S = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \ldots \right)^2$, obţinem:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx \right) \left( \int_0^1 \frac{y^n}{1+y}dy \right) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y)} \left( \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n \right) dxdy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y)(1-xy)} dxdy = \int_0^1 \frac{1}{1+x} \left( \int_0^1 \frac{1}{(1+y)(1-xy)} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} \left( \frac{\ln 2 - \ln(1-x)}{(1+x)} \right) dx = \left( \frac{(1-x)\ln(1-x)}{2(1+x)} + \frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{\ln 2}{1+x} \right) \Bigg|_0^1 \\ &= \ln 2. \end{aligned}$$

**IV.** Fie $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ fixat. Din condiţia dată rezultă $f(x+\alpha) - f(x) \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}, \forall x \in \mathbb{R}$. Deci putem considera funcţia continuă $g_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_\alpha(x) = f(x+\alpha) - f(x)$. Aceasta ia valori doar în mulţimea numerelor iraţionale. Din continuitate rezultă că această funcţie este constantă, deci $g_\alpha(x) = g_\alpha(0)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, ceea ce este echivalent cu relaţia

$$f(x+\alpha) - f(x) = f(\alpha) - f(0), \ \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}. \tag{22}$$

Pentru $x_0$ fixat şi $\alpha$ variabil în $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, rezultă relaţia

$$f(x_0 + \alpha) - f(x) = f(x_0) - f(0). \tag{23}$$

Funcţia $h_{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h_{x_0}(\alpha) = f(x_0 + \alpha) - f(\alpha)$, este continuă pe $\mathbb{R}$ şi constantă pe $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, deci constantă pe $\mathbb{R}$. Astfel relaţia (23) are loc pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$ deci şi (22) are loc pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$.

Avem de determinat funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, care satisfac relaţia

$$f(x+y) - f(x) = f(y) - f(0), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Funcţia $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $A(x) = f(x) - f(0)$ verifică ecuaţia lui Cauchy $A(x+y) = A(x) + A(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ în care soluţiile continue sunt $A(x) = ax$, $x \in \mathbb{R}$. Deci $f(x) = ax + b$, $\forall x \in \mathbb{R}$, cu care revenind obţinem $a(x-y) \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, $\forall x - y \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, care are loc d.n.d. $a \in \mathbb{Q}$ (deoarece dacă prin absurd $a \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, atunci pentru $x - y = \frac{1}{a} \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, obţinem $a(x-y) = a \cdot \frac{1}{a} = 1 \ni \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ şi deci $a(x-y) \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, ceea ce contrazice ipoteza). În concluzie $f(x) = ax + b$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{R}$.

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
### Faza naţională, anul I, profil mecanic, 2012-2013

**I.** a) Avem $\frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n-1}}{2n-1}$, $|t| < 1$, deci mulţimea de convergenţă a seriei este $(-1, 1)$.

b) Obţinem $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \frac{1}{(2x+1)^{2k}}$.

c) Au loc relaţiile

$$f(x) < \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2x+1)^{2k}} = \frac{1}{3} \frac{1}{(2x+1)^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{(2x+1)^2}} = \frac{1}{3} \frac{1}{4x^2+4x} = \frac{1}{12} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right),$$

deci $f(x+n) < \frac{1}{12} \left( \frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1} \right)$. Prin urmare,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(x+n) < \frac{1}{12} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1} \right) = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{x},$$

şi deci $\sum_{n=0}^{\infty} f(x+n) < \frac{1}{12x}$, $x > 0$.

**II.** a) Interiorul domeniului este $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 < 1\}$. Avem un singur punct critic $(0,0)$, care nu este punct de extrem local. Pentru punctele de extrem local pe frontiera domeniului (problema de extrem cu legătura $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$) considerăm lagrangianul

$$\Phi(x,y,\lambda) = x^2 + 2\sqrt{3}\, xy - y^2 + 4 + \lambda(x^2+y^2-1),$$

iar anularea componentelor gradientului conduce la sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} \equiv 2x + 2\sqrt{3}y + 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} \equiv 2\sqrt{3}x - 2y + 2\lambda y = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \equiv x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

cu soluţiile $\lambda \in \{\pm 2\}$. Pentru $\lambda = 2$, obţinem punctele de minim $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ şi $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, cu valoarea asociată $f(\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2$. Pentru $\lambda = -2$, obţinem punctele de maxim $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ şi $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, cu valoarea asociată $f(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm\frac{1}{2}) = 6$. Avem deci dubla inegalitate $2 \leq f(x,y) \leq 6$, pentru orice $(x,y) \in \bar{D}$.

*Altfel.* Pentru $x^2 + y^2 = 1$ luăm $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$ şi considerăm funcţia $g(t) = f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + 2\sqrt{3} \sin t \cos t - \sin^2 t + 4$, care se poate rescrie

$$g(t) = \cos 2t + \sqrt{3} \sin 2t + 4 = 2\cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) + 4 \in [2,6].$$

b) Se observă că mulţimea căutată este cea a punctelor pentru care $f(x,y) = 0$ şi $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$, deci este formată din soluţiile sistemului

$$\begin{cases} x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 + 4 = 0 \\ y \neq \sqrt{3}x. \end{cases}$$

Dar dreapta $y = \sqrt{3}x$ nu întâlneşte hiperbola $x^2+2\sqrt{3}xy-y^2+4 = 0$, şi deci mulţimea căutată este hiperbola $M = \{(x, y) \mid x^2+2\sqrt{3}xy-y^2+4 = 0\}$. Prin derivare, obţinem $y' = -\dfrac{x + \sqrt{3}y}{\sqrt{3}x - y} = \dfrac{x + \sqrt{3}y}{y - \sqrt{3}x}$. Punctele critice ale funcţiei implicite verifică sistemul

$$\begin{cases} x + \sqrt{3}y = 0 \\ x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 + 4 = 0. \end{cases}$$

Obţinem soluţiile $(-\sqrt{3}, 1)$ şi $(\sqrt{3}, -1)$, iar $y(-\sqrt{3}) = 1$ şi $y(\sqrt{3}) = -1$. Derivând $y'$, rezultă $y'' = \dfrac{(1 + \sqrt{3}y')(y - \sqrt{3}x) - (x + \sqrt{3}y)(y' - \sqrt{3})}{(y - \sqrt{3}x)^2}$ şi deci

$$\begin{cases} y''(-\sqrt{3}) = \dfrac{1 + \sqrt{3}\cdot 0)(1 + 3) - 0}{(1 + 3)^2} = \dfrac{1}{4} > 0 \\ y''(\sqrt{3}) = \dfrac{1 + \sqrt{3}\cdot 0)(-1 - 3) - 0}{(-1 - 3)^2} = -\dfrac{1}{4} < 0, \end{cases}$$

de unde $(-\sqrt{3}, 1)$ este punct de minim, iar $(\sqrt{3}, -1)$ este punct de maxim.

**III.** a) Identificând coeficienţii matriceali ai parametrilor $a, b \in \mathbb{R}$ din egalitatea $M = aA + bB$, obţinem $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$ care satisfac egalităţile $A^2 = B^2 = I_2$ şi $AB + BA = O_2$.

b) Prin calcul direct, rezultă $M^{2n} = (a^2 + b^2)^n I_2$ şi $M^{2n+1} = (a^2 + b^2)^n M$.

c) Notăm $\alpha = (a^2 + b^2)^n$ şi $N_k = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k} M^k$. Atunci

$$\begin{aligned} N_k &= \left(M + \frac{1}{3}M^3 + \frac{1}{5}M^5 + \ldots + \frac{1}{2n-1}M^{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2}M^2 + \frac{1}{4}M^4 + \ldots + \frac{1}{2n}M^{2n}\right) \\ &= \left(\alpha + \frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^5}{5} + \ldots + \frac{\alpha^{2n-1}}{2n-1}\right) M - \left(\frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{4} + \ldots + \frac{\alpha^{2n}}{2n}\right) I_2, \end{aligned}$$

deci $\displaystyle\lim_{n\to\infty} N_k = \ln\sqrt{\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}} M - \ln\frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}} I_2.$

**IV.** a) Dacă dreapta $D$ are ecuaţia vectorială $\bar{r} = \bar{r}_1 + t\bar{d}_1$, $t \in \mathbb{R}$, unde $\bar{r}_1$ este vectorul de poziţie al unui punct de pe dreaptă şi $\bar{d}_1$ este vectorul director al dreptei $D$, atunci distanţa de punctul $M(x, y, z)$ al cărui vector de poziţie este $\bar{r}_M = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, se poate calcula folosind formula: $d(M, D) = \dfrac{||(\bar{r} - \bar{r}_1) \times \bar{d}_1||}{||\bar{d}_1||}$.
Pentru dreapta $D_1$ avem $\bar{r}_1 = \bar{0}$, $\bar{d}_1 = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$, iar pentru dreapta $D_2$, avem $\bar{r}_2 = \bar{i}$, $\bar{d}_2 = \bar{i}+\bar{j}-\bar{k}$. Obţinem $||\bar{d}_1|| = ||\bar{d}_2|| = \sqrt{3}$, iar condiţia $d(M, D_1) = d(M, D_2)$ devine $||(\bar{r} - \bar{r}_1) \times \bar{d}_1|| = ||(\bar{r} - \bar{r}_2) \times \bar{d}_2||$. Vectorii din relaţie sunt

$$(\bar{r} - \bar{r}_1) \times \bar{d}_1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (y - z)\bar{i} + (z - x)\bar{j} + (x - y)\bar{k}$$

$$(\bar{r} - \bar{r}_2) \times \bar{d}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x-1 & y & z \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-y - z)\bar{i} + (z + x - 1)\bar{j} + (x - y - 1)\bar{k}.$$

Din egalarea normelor celor doi vectori rezultă ecuaţia carteziană implicită căutată $S:\ 2yz + 2zx - 2x + y + 1 = 0$.

b) Ecuaţia căutată este $X^t\cdot(A+A^t)\cdot X - 32 = 0$. Avem $A+A^t = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Prin calcul direct, obţinem ecuaţia $4x^2+8y^2+2z^2-32 = 0$, care se rescrie $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}-1 = 0$. Se determină proiecţia $C_0$ pe planul orizontal $xOy$ a centrului de simetrie $C$ al elipsei care se obţine prin intersecţia dintre elipsoidul obţinut anterior de ecuaţie $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}-1 = 0$ şi planul $x + y + z - 2 = 0$. Rezolvând sistemul format, rezultă $C_0(\frac{3}{14}, \frac{5}{14}, 0)$ şi deci centrul de simetrie al elipsei de intersecţie este $C(\frac{3}{14}, \frac{5}{14}, \frac{10}{7})$.

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
### Faza naţională, anul I, profil teoretic, 2013-2014

**I.** Fie mulţimea $E_f = \{x \in I \mid f(x) = 0, f'(x) \neq 0\}$. Funcţia $g$ este derivabilă pe $I\backslash E_f$. Construim o familie de mulţimi $(A_x)_{x\in E_f}$ de intervale deschise cu proprietăţile $x \in A_x$, $A_x \cap A_y = \emptyset$, $\forall x \neq y$. Funcţia $x \in E_f \to q_x \in A_x \cap \mathbb{Q}$ este injectivă, deci mulţimea $E_f$ este cel mult numărabilă.

**II.** Descompunând $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$ şi 2, 19, 53 fiind numere prime, rezolvarea ecuaţiei în $\mathbb{Z}_{2014}$ este echivalentă cu rezolvarea ecuaţiei în $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_{19}$, $\mathbb{Z}_{53}$, deci ecuaţia are 3 soluţii.

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
### Faza naţională, anul I, profil electric, 2013-2014

**I.** Restricţia lui $f$ la $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ este o funcţie de clasă $\mathcal{C}^1$. Un eventual punct de extrem este fie punct critic, fie $(0,0)$. Din

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = -e^{-x-y} + a\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -e^{-x-y} + a\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0, \end{cases}$$

rezultă $x = y \neq 0$ şi $e^{-2x} = \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x}{|x|}$, şi deci $x = y > 0$, $e^{-2x} = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Apar două cazuri: $a < \sqrt{2}$ şi $a \geq \sqrt{2}$.

Cazul I: $a \geq \sqrt{2}$. Nu avem puncte critice, deci doar $(0,0)$ poate fi punct de extrem local. Cum $f(x,y) = e^{-x-y} + \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2} + (a-\sqrt{2})\sqrt{x^2+y^2}$, folosind inegaitatea din enunţ şi $\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2} \geq |x+y|$, obţinem $f(x,y) \geq 1-x-y+|x+y|+0 \geq 1 = f(0,0)$, deci $(0,0)$ este punct de minim global.

Cazul II: $a < \sqrt{2}$. Avem un punct critic $(c,c)$, cu $c = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt{2}}{a} > 0$. Eventuale puncte de extrem nu pot fi decât $(c,c)$ sau $(0,0)$. Cum $a = e^{-2c}\sqrt{2}$, putem scrie

$$f(x,y) = e^{-2c}(e^{2c-x-y} + \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2})$$

şi folosind inegalitatea sugerată şi $\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2} \geq |x+y|$, obţinem

$$f(x,y) \geq e^{-2c}(1+2c-x-y+|x+y|) \geq e^{-2c}(1+2c) = f(c,c),$$

deci $(c,c)$ este punct de minim global.

Pe de altă parte, arătăm că $(0,0)$ nu este punct de extrem local. Avem egalitatea $f(x,x)-f(0,0) = e^{-2x} + a\sqrt{2}|x| - 1$. Dacă $x<0$, evident $f(x,x)-f(0,0)>0$, deci $(0.0)$ nu poate fi punct de maxim local. Dacă $x>0$, atunci

$$f(x,x)-f(0,0) = e^{-2x} + a\sqrt{2}x - 1 = x\left(\frac{e^{-2x}-1}{x} + a\sqrt{2}\right).$$

Deoarece $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{-2x}-1}{x} + a\sqrt{2}\right) = -2 + a\sqrt{2} < 0$, există $r>0$ cu proprietatea

$$\frac{e^{-2x}-1}{x} + a\sqrt{2} < 0, \quad \forall x \in (-r,r)\setminus\{0\},$$

de unde $f(x,x)-f(0,0)<0$, $\forall x \in (0,r)$, deci $(0,0)$ nu poate fi nici punct de minim local pentru $f$.

**II.** i) Calculăm integrala folosind integrarea prin părţi şi obţinem $\dfrac{1}{n^2}[(-1)^n(a+2b\pi)-a] = \dfrac{1}{n^2}$, de unde $a=-1$, $b=\dfrac{1}{2\pi}$.

ii) Folosim formula lui Parseval $\dfrac{a_0^2}{2} + \sum\limits_{n\geq 1} a_n^2 + b_n^2 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$, unde $a_0$,$a_n$, $b_n$, $n \in \mathbb{N}^\star$ sunt coeficienţii seriei Fourier trigonometrice ai funcţiei $f:(-\pi,\pi)\to\mathbb{R}$.

Dezvoltăm în serie Fourier trigonometrică funcţia impară $f(x)=x$, $x\in(-\pi,\pi)$. Obţinem $a_0=0$, $a_n=0$ şi $b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin(nx)dx = 2\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Cum $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \dfrac{2\pi^2}{3}$, din formula Parseval rezultă

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

**III.** Folosim formulele

$$4\sin^3 x = 3\sin x - \sin 3x, \quad \sin(x+y) = \sin x\cos y + \sin y\cos x.$$

Atunci $T(f)(x) = I_1(f)\sin x + I_2\cos x + I_3(f)\sin 3x + I_4(f)\cos 3x$, unde

$$I_1(f) = \int_0^{2\pi} 3\cos y f(y)dy, \qquad I_2(f) = \int_0^{2\pi} 3\sin y f(y)dy,$$
$$I_3(f) = \int_0^{2\pi} -\cos 3y f(y)dy, \quad I_4(f) = \int_0^{2\pi} -\sin 3y f(y)dy.$$

a) Funcţiile $\{\sin x, \cos x, \sin 3x, \cos 3x\}$ fiind liniar independente în $V$, rezultă

$$f \in \text{Ker } T \Leftrightarrow I_1(f) = I_2(f) = I_3(f) = I_4(f) = 0.$$

Alegem funcţiile $\{\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin 1007x, \cos 1007x\}$, care satisfac cerinţele.

b) Orice vector propriu este de forma $f(x) = a\sin x + b\cos x + c\sin 3x + d\cos 3x$. Prin calcul direct, obţinem

$$I_1(f) = 3\pi b, \quad I_2(f) = 3\pi a, \quad I_3(f) = -\pi d, \quad I_4(f) = -\pi c.$$

Din relaţia $T(f) = \lambda f$, cu $\lambda \in \mathbb{R}^\star$ valoare proprie şi $f$ vector propriu, obţinem sistemul

$$\lambda a = 3\pi b, \quad \lambda b = 3\pi a, \quad \lambda c = -\pi d, \quad \lambda d = -\pi c.$$

Rezultă $(\lambda^2 - 9\pi^2)ab = 0$ şi $(\lambda^2 - \pi^2)cd = 0$. Dacă $\lambda \notin \{\pm\pi, \pm 3\pi\}$, rezultă $f = 0$, care nu convine. Atunci $\lambda_1 = \pi$, $\lambda_2 = -\pi$, $\lambda_3 = 3\pi$, $\lambda_4 = -3\pi$ cu vectorii proprii corespunzători

$$\begin{aligned} &f_1(x) = a(\sin 3x - \cos 3x), \quad f_2(x) = a(\sin 3x + \cos 3x),\\ &f_3(x) = a(\sin x + \cos x), \qquad f_4(x) = a(\sin x - \cos x), \quad a \in \mathbb{R}^\star. \end{aligned}$$

**IV.** Vom nota cu diag $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ matricea diagonală care are coeficienţii $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pe diagonală.

Pentru $c$ minim, $c = a + b - n$, luăm $A =$ diag $(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$, cu 1 considerat de $a$ ori şi $B =$ diag $(0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1)$, cu 1 considerat de $b$ ori. Atunci, cum $2n - a - b \leq n$, rezultă că în matricea $A \cdot B$ rămân $a + b - n$ de 1 şi rang $(A \cdot B) = c$.

Pentru $c = a + b - n + 1$, păstrăm matricea $B$, dar luăm $A[0, 1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0]$, cu 1 repetat de $a$ ori şi rang $(A \cdot B) = c$.

Continuăm la fel până la $c$ maxim.

Pentru $c = a$, $A =$ diag $(0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1)$, cu 1 repetat de $a$ ori şi cum $a \leq b$, rezultă că şi în acest ultim caz, rang $(A \cdot B) = c$.

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza naţională, anul I, profil mecanic, 2013-2014

**I.** a) Se pune problema existenţei derivatelor parţiale de ordin 1 ale lui $f$ în punctul $(0,0)$. Cum $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, există aceste funcţii.

b) Obţinem

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin(xy)\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \frac{xy(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Dar $\left|\dfrac{xy(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\right| \leq \dfrac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \dfrac{|xy|}{|y|} = |x| \to 0$ când $(x, y) \to (0, 0)$, deci $f$ este diferenţiabilă Frechét în $(0, 0)$.

c) Avem

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} y\cos(xy)\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \sin(xy)\dfrac{4xy^2}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0)\\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} x\cos(xy)\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \sin(xy)\dfrac{-4xy^2}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0)\\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

de unde rezultă

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{-y-0}{y-0} = -1; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x-0}{x-0} = 1.$$

d) Seria de studiat este $\sum_{n\geq 1} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{n^{\alpha+\beta}}\right)\frac{n^{-2\alpha+2\beta}-1}{n^{-2\alpha+2\beta}+1}}_{a_n}$. Dacă $\alpha=\beta$, atunci $a_n=0$ iar suma este 0, deci seria este convergentă. Dacă $\alpha+\beta>1$, atunci $\sum_{n\geq 1}|a_n| \leq \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{\alpha+\beta}}$, deci seria este absolut convergentă. Altfel, seria este divergentă.

**II.** Avem $I'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+a^2\cos^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}+a^2}\frac{1}{\cos^2 x}dx$. Cu schimbarea de variabilă $\operatorname{tg} x = t$, obţinem $\int_0^{\infty}\frac{1}{t^2+1+a^2}dt = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$. Prin integrare, rezultă $I(a) = \frac{\pi}{2}\ln(a+\sqrt{1+a^2})+C$. Din relaţiile $I(0) = \int_0^{\pi/2} 0dx = 0$ şi $I(0) = \frac{\pi}{2}\ln(1)+C = C$, obţinem $C=0$. Prin urmare $I(a) = \frac{\pi}{2}\ln(a+\sqrt{1+a^2})$.

**III.** a) Determinarea punctelor staţionare (critice) ale funţiei $f$ conduce la rezovarea sistemului $\begin{cases} 1+(x+y)(-2x)=0 \\ 1+(x+y)(-2y)=0 \end{cases}$. Obţinem $x=\pm y$. Dacă $x=y$, avem soluţiile $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ şi $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$, iar când $x=-y$, nu avem soluţii ale sistemului. Se obţine $d^2f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})(x,y)<0$, deci $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ este punct de maxim local, iar $d^2f(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})(x,y)>0$, deci $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ este punct de minim local.

b) Punctele staţionare ale funcţiei $f$ cu legătura $x^2+y^2=2$ sunt $(1,1)$ şi $(-1,-1)$. $f_{\min} = -\frac{1}{\sqrt{e}}$, iar $f_{\max} = \frac{1}{\sqrt{e}}$. Pentru determinarea imaginii, trecem în coordonate polare $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$. $(x,y)\in D$ duce la $\theta\in[0,2\pi]$, $\rho\in[0,\sqrt{2}]$. Prin urmare avem $f(x,y)=\rho e^{-\rho^2}(\cos\theta+\sin\theta)$. Atunci $|f(x,y)|\leq \rho e^{-\rho^2}|\cos\theta+\sin\theta|$. Dar $|\cos\theta+\sin\theta|\leq\sqrt{2}$ iar $\max_{\rho\in[0,\sqrt{2}]}\rho e^{-\rho^2}$ se atinge pentru $\rho=\frac{1}{\sqrt{2}}$ şi este $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$. Aşadar $|f(x,y)|\leq\frac{1}{\sqrt{e}}$ şi imaginea cerută este $[-\frac{1}{\sqrt{e}},\frac{1}{\sqrt{e}}]$.

**IV.** a) Obţinem $d(A,\pi)=\frac{4}{3}=r_1$ şi $d(B,\pi)=\frac{2}{3}=r_2$, iar distanţa dintre centre este $d(A,B)=\sqrt{4+36+4}=2\sqrt{11}>r_1+r_2$, deci sferele sunt exterioare.

b) Punctul căutat $C$ se află la intersecţia planului $\pi$ cu dreapta $AQ$, unde $Q$ este simetricul punctului $B$ faţă de planul $\pi$. Avem $CB=CQ$, pentru un punct arbitrar $M\in\pi$ avem $MB=MQ$, iar din inegalitatea triunghiului, $AQ\leq AM+MQ$. Folosind aceste relaţii, obţinem

$$AM+MB=AM+MQ\leq AQ=AC+CQ=AC+CB,$$

deci $C$ este punctul care minimizează suma $AM+MB$ pentru $M\in\pi$. Determinăm punctul $C$. În prealabil aflăm proiecţia $P$ a lui $B$ pe planul $\pi$, $\{P\}=\pi\cap d$, unde $d$ este dreapta ce trece prin $B$ şi are direcţia care este normală la $\pi$, $\vec{n}\equiv(2,1,-2)$, deci

$P$ este soluţia sistemului:

$$P: \begin{cases} 2x+y-2z+5=0 \\ \frac{x-0}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4/9 \\ y=7/9 \\ z=22/9. \end{cases}$$

Simetricul $Q$ al lui $B$ faţă de $\pi$ este simetricul lui $B$ faţă de punctul $P$. Se observă că $P$ înjumătăţeşte segmentul $BQ$, deci coordonatele lui $P$ sunt semisumele coordonatelor lui $B$ şi $Q$. Atunci avem

$$Q: \begin{cases} x_P=(x_B+x_Q)/2 \\ y_p=(y_B+y_Q)/2 \\ z_P=(z_B+z_Q)/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_Q=2x_p-x_B=-8/9 \\ y_Q=2y_P-y_B=5/9 \\ z_Q=2z_P-z_B=26/9. \end{cases}$$

Punctul căutat $C$ se află la intersecţia lui $\pi$ cu dreapta $AQ$, unde $A(2,-5,0)$, $Q(-\frac{8}{9},\frac{5}{9},\frac{26}{9})$, $\overline{AQ}\equiv(-\frac{26}{9},\frac{50}{9},\frac{26}{9})||(13,-25,-13)$, deci

$$C: \begin{cases} 2x+y-2z+5=0 \\ \frac{x-2}{13}=\frac{y+5}{-25}=\frac{z-0}{-13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2/27 \\ y=-35/27 \\ z=52/27, \end{cases}$$

deci punctul $M\in\pi$ în care se atinge minimul distanţei $AM+MB$ este $C(\frac{2}{27},-\frac{35}{27},\frac{52}{27})$.

**V.** a) Avem $\langle\vec{u},\vec{v}\times\vec{w}\rangle=\frac{3}{2}=2\langle\vec{a},\vec{b}\times\vec{c}\rangle$, deci volumul cerut este $\frac{3}{4}$.

b) Cum $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}\in V_3$ sunt trei vectori liberi necoplanari, rezultă că ei formează o bază. Matricea endomorfismului în această bază este $\begin{pmatrix} 0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$. Valorile proprii sunt $\{2,-1,-1\}$, iar vectorii proprii corespunzători, $\{(1,1,1),(1,0,-1),(0,1,-1)\}$. Deci $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ este vector propriu al endomorfismului şi $T^{2014}(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})=2^{2014}(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$.

# Rezolvări

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza locală, anul II, profil mecanic, 2001-2002

**I.** a) Avem $\operatorname{Im} f \overset{not}{=} Y(x,y) = e^x \sin y$. Cum $\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0$, rezultă că $Y$ este funcţie armonică.

$$f'(z) = \frac{\partial Y}{\partial y} + i \cdot \frac{\partial Y}{\partial x} = e^x \cos y + i \cdot e^x \sin y,$$

iar pentru $y = 0$, $f'(x) = e^x \Rightarrow f(x) = e^x + C \Rightarrow f(z) = e^z + C$. Din $f(0) = 1$, rezultă $1 + C = 1 \Rightarrow C = 0$. Funcţia olomorfă căutată este $f(z) = e^z$.

b) $\operatorname{Re} f \overset{not}{=} X(x,y) = \varphi(x^2+y^2)$. Notăm $t(x,y) = x^2+y^2$. Atunci:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \varphi'(t)\frac{\partial t}{\partial x} = \varphi'(t)2x, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = \varphi'(t)\frac{\partial t}{\partial y} = \varphi'(t)2y,$$
$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \varphi''(t)4x^2 + \varphi'(t)2, \quad \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = \varphi''(t)4y^2 + \varphi'(t)2,$$

de unde $\Delta X = 4(x^2+y^2)\varphi''(t) + 4\varphi'(t)$. Impunem $\Delta X = 0$ şi obţinem

$$t\varphi''(t) + \varphi'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)} = -\frac{1}{t} \Rightarrow \ln\varphi'(t) = -\ln t + \ln C_1,\ C_1 > 0,$$

deci $\varphi'(t) = \frac{C_1}{t} \Rightarrow \varphi(t) = C_1 \ln t + C_2, C_2 \in \mathbb{R}$. Dacă

$$X(x,y) = C_1 \ln(x^2+y^2) + C_2, C_1 > 0, C_2 \in \mathbb{R},$$

atunci $X$ este funcţie armonică. Avem

$$f'(z) = \frac{\partial X}{\partial x} - i\frac{\partial X}{\partial y} = C_1\frac{2x}{x^2+y^2} - iC_2\frac{2y}{x^2+y^2},$$

iar pentru $y = 0$, rezultă

$$f'(x) = C_1\frac{2}{x} \Rightarrow f(x) = 2C_1 \ln x + C_3, C_3 \in \mathbb{R} \Rightarrow f(z) = 2C_1 \ln z + C_3.$$

**II.** a) Căutăm $A, B \in \mathbb{C}$ astfel încât $f(z) = \dfrac{z}{z^2-1} \equiv \dfrac{A}{z-1} + \dfrac{B}{z+1}$ , $A, B \in \mathbb{C}$.

Obţinem $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$, deci $f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right)$.

i) Dacă $0 < |z-1| < 2$, atunci

$$\begin{aligned} f(z) &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{z-1} - \tfrac{1}{(z-1)+2}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{z-1} - \tfrac{1}{2(\frac{z-1}{2}+1)}\right) \overset{|z-1|<2}{=} \\ &= \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{z-1} - \tfrac{1}{2}\left(1 - \tfrac{z-1}{2} + \left(\tfrac{z-1}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{z-1}{2}\right)^3 + ... + (-1)^n \cdot \left(\tfrac{z-1}{2}\right)^n + ...\right)\right] = \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{z-1} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{z-1}{2^3} - \tfrac{(z-1)^2}{2^4} + ... + (-1)^{n+1} \cdot \tfrac{(z-1)^n}{2^{n+2}} + ... . \end{aligned}$$

ii) Dacă $|z-1|>2$, atunci

$$\begin{aligned} f(z) &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{z-1}-\tfrac{1}{(z-1)+2}\right)=\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{z-1}-\tfrac{1}{(z-1)(1+\frac{2}{z-1})}\right)\overset{|z-1|>2}{=}\\ &=\tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{z-1}-\tfrac{1}{z-1}\left(1-\tfrac{2}{z-1}+\left(\tfrac{2}{z-1}\right)^2-\left(\tfrac{2}{z-1}\right)^3+...+(-1)^n\cdot\left(\tfrac{2}{z-1}\right)^n+...\right)\right]=\\ &=\tfrac{1}{(z-1)^2}-\tfrac{2}{(z-1)^3}+\tfrac{2^2}{(z-1)^4}-...+(-1)^{n+1}\cdot\tfrac{2^{n-1}}{(z-1)^{n+1}}+... .\end{aligned}$$

iii) Dacă $|z|<1$, atunci

$$\begin{aligned} f(z) &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{z-1}-\tfrac{1}{z+1}\right)\overset{|z|<1}{=}\\ &=\tfrac{1}{2}\left[(-1-z-z^2-...-z^n-...)-(1-z+z^2-z^3+...+(-1)^n\cdot z^n+...)\right]=\\ &=\tfrac{1}{2}\left(-2-2z^2-2z^4-...-2z^{2n}-...\right)=-1-z^2-z^4-...-z^{2n}-... .\end{aligned}$$

b) $I_1=\displaystyle\int_{|z|=R>0}\frac{z}{z^2-1}dz$. Mulţimea punctelor din planul complex asociate relaţiei $|z|=R$, formează cercul $\mathcal{C}((0,0),R)$. Se disting trei cazuri:

i) $R\in(0,1)\Rightarrow I_1=0$ (conform *teoremei fundamentale Cauchy*).

ii) $R=1\Rightarrow I_1=\pi i\left[Rez\left(\dfrac{z}{z^2-1},-1\right)+Rez\left(\dfrac{z}{z^2-1},1\right)\right]=\pi i\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\right)=\pi i.$

iii) $R>1\Rightarrow I_1=2\pi i\left[Rez\left(\dfrac{z}{z^2-1},-1\right)+Rez\left(\dfrac{z}{z^2-1},1\right)\right]=2\pi i.$

Calculăm $I_2=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{5+4\sin x}\,dx$. Facem schimbarea de variabilă $e^{ix}=z$; rezultă:

$$I_2=\int_{|z|=1}\frac{1}{5+4\frac{z^2-1}{2iz}}\frac{1}{iz}\,dz=\int_{|z|=1}\frac{1}{2z^2+5iz-2}\,dz.$$

Notăm $g(z)=\frac{1}{2z^2+5iz-2}$; punctele singulare ale funcţiei $g$ sunt $z_1=\frac{-i}{2}$ şi $z_2=-2i$. În interiorul cercului $|z|=1$ este situat doar $z_1$. Cum acesta este pol de ordinul 1, din teorema rezidurilor rezultă

$$I_2=2\pi iRe_z(g,z_1)=2\pi i\frac{1}{3i}=\frac{2\pi}{3}.$$

**IV.** Rezolvăm problema Cauchy

$$y''-2y'+y=\sin(t)+4e^{-t}+2e^t, y(0)=0, y'(0)=2.$$

Aplicăm transformarea Laplace ecuaţiei diferenţiale. Obţinem

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}[y'']-2\mathcal{L}[y']+\mathcal{L}[y]=\mathcal{L}[\sin(t)]+4\mathcal{L}[e^{-t}]+2\mathcal{L}[e^t]\Leftrightarrow\\ &p^2\mathcal{L}[y]-2-2p\mathcal{L}[y]+\mathcal{L}[y]=\tfrac{1}{p^2+1}+\tfrac{4}{p+1}+\tfrac{2}{p-1}\Leftrightarrow\\ &(p-1)^2\mathcal{L}[y]=2+\tfrac{1}{p^2+1}+\tfrac{4}{p+1}+\tfrac{2}{p-1}\Leftrightarrow\\ &\mathcal{L}[y]=\underbrace{\frac{2}{(p-1)^2}}_{A(p)}+\underbrace{\frac{1}{(p-1)^2(p^2+1)}}_{B(p)}+\underbrace{\frac{4}{(p+1)(p-1)^2}}_{C(p)}+\underbrace{\frac{2}{(p-1)^3}}_{D(p)}.\end{aligned}$$

Observăm că $A(p) = \mathcal{L}[2te^t]$ şi $D(p) = \mathcal{L}[t^2e^t]$. Avem

$$B(p) = \frac{1}{(p-1)^2(p^2+1)} = \frac{a}{p-1} + \frac{b}{(p-1)^2} + \frac{cp+d}{p^2+1},$$

de unde obţinem $a = -\frac{1}{2},\ \ b = \frac{1}{2},\ \ c = \frac{1}{2},\ \ d = 0$, deci avem

$$B(p) = \mathcal{L}\left[-\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}te^t + \frac{1}{2}\cos t\right].$$

Analog, pentru

$$C(p) = \frac{4}{(p+1)(p-1)^2} = \frac{\alpha}{p+1} + \frac{\beta}{p-1} + \frac{\gamma}{(p-1)^2},$$

obţinem $\alpha = 1,\ \beta = -1,\ \gamma = 2$, deci $C(p) = \mathcal{L}[e^{-t} - e^t + 2te^t]$. Atunci

$$\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[2te^t - \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}te^t + \frac{1}{2}\cos t + e^{-t} - e^t + 2te^t + t^2e^t],$$

deci $y = -\frac{3}{2}e^t + e^{-t} + \frac{1}{2}\cos t + \frac{9}{2}te^t + t^2e^t$.

b) Rezolvăm problema Cauchy $\begin{cases} x' = -3x - y \\ y' = x - y \end{cases}, \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 1. \end{cases}$

Aplicând transformata Lapalce sistemului de ecuaţii diferenţiale; obţinem

$$\begin{cases} \mathcal{L}[x'] = -3\mathcal{L}[x] - \mathcal{L}[y] \\ \mathcal{L}[y'] = \mathcal{L}[x] - \mathcal{L}[y] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p\mathcal{L}[x] - 1 = -3\mathcal{L}[x] - \mathcal{L}[y] \\ p\mathcal{L}[y] - 1 = \mathcal{L}[x] - \mathcal{L}[y] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (p+3)\mathcal{L}[x] + \mathcal{L}[y] = 1 \\ -\mathcal{L}[x] + (p+1)\mathcal{L}[y] = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{L}[x] = \frac{p}{(p+2)^2} \\ \mathcal{L}[y] = \frac{p+4}{(p+2)^2}. \end{cases}$$

Prin urmare,

$$\begin{cases} \mathcal{L}[x] = \dfrac{p}{(p+2)^2} = \dfrac{p+2-2}{(p+2)^2} = \dfrac{1}{p+2} - 2\dfrac{1}{(p+2)^2} = \mathcal{L}[e^{-2t} - 2te^{-2t}] \\ \mathcal{L}[y] = \dfrac{p+4}{(p+2)^2} = \dfrac{p+2+2}{(p+2)^2} = \dfrac{1}{p+2} + 2\dfrac{1}{(p+2)^2} = \mathcal{L}[e^{-2t} + 2te^{-2t}], \end{cases}$$

de unde rezultă $x = e^{-2t}(1-2t)$, $y = e^{-2t}(1+2t)$.

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ ”TRAIAN LALESCU”
## Faza locală, anul II, profil mecanic, 2002-2003

**I.** a) Fie $u(x,y) = e^x\cos y$. Funcţia $u$ este armonică deoarece are loc egalitatea $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \equiv e^x\cos y - e^x\cos y = 0$. Obţinem $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = e^x\cos y + ie^x\sin y$; $y = 0$ implică $f'(x) = e^x \Rightarrow f(x) = e^x + C,\ C \in \mathbb{C}$. Substituim $x \to z$ şi rezultă $f(z) = e^z + C,\ C \in \mathbb{C}$. Egalitatea $f(0) = 1$ implică $C = 0$, deci $f(z) = e^z$.

b) Notăm $v(x,y) = \varphi(t(x,y))$, unde $t(x,y) = \frac{y}{x}$. Impunem funcţiei $v$ să fie armonică; rezultă

$$\varphi''(t)\frac{1}{x^2}\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right)+\frac{2y}{x^3}\varphi'(t)=0 \Leftrightarrow \varphi''(t)(t^2+1)=-2t\varphi'(t) \Leftrightarrow \frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)}=\frac{-2t}{t^2+1}.$$

Integrând în ambii membri ai egalităţii, avem

$$\int\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)}dt=-\int\frac{2t}{t^2+1}dt \Rightarrow \ln(\varphi'(t))=\ln(t^2+1)+\ln C_1, C_1>0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi'(t)=\frac{C_1}{t^2+1} \Rightarrow \int\varphi'(t)dt=C_1\int\frac{1}{t^2+1}dt \Rightarrow \varphi(t)=C_1\cdot \text{arctg}\, t+C_2, C_2\in\mathbb{R}.$$

Rezultă deci $v(x,y)=C_1\cdot \text{arctg}\,\left(\frac{y}{x}\right)+C_2$. Atunci

$$f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{C_1\cdot x}{x^2+y^2}-i\frac{y\cdot C_2}{x^2+y^2}.$$

Obţinem succesiv

$$y=0\Rightarrow f'(z)=\frac{C_1}{x}\Rightarrow f(x)=C_1\ln x+C_3;\ \ x\to z\Rightarrow f(z)=C_1\ln z+C_3,\ C_3\in\mathbb{C}.$$

**II.** a) Folosind egalităţile $e^{1/z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}, \forall z\in\mathbb{C}$; $\frac{1}{1-z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n,\ |z|<1$, rezultă

$$\begin{aligned} f(z) &= e^{1/z}\tfrac{1}{1-z}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{1}{n!z^n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)=\cdots+\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots\frac{1}{n!}+\cdots\right)+\\ &+\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots\frac{1}{n!}+\cdots\right)+z\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots\frac{1}{n!}+\cdots\right),\end{aligned}$$

deci $I_1=\int\limits_{|z|=R}f(z)dz=2\pi i\cdot \text{Rez}\,(f,0)=2\pi i(e-1)$.

b) $I_2=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{x^6+1}dx$. Efectuăm întâi schimbarea de variabilă $x^3=y$ (deci $3x^2dx=dy$) şi obţinem $I_2=\frac{1}{3}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{y^2+1}$.

Fie $g(z)=\frac{1}{z^2+1}$. Fie $\gamma=\gamma_R\cup[-R,R], R>1$ (vezi figura).

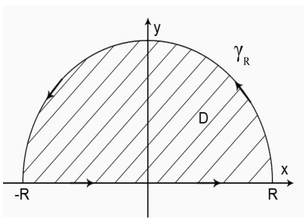


**Figura 3.**

Atunci $\displaystyle\int_\gamma g(z)dz = 2\pi i \,\mathrm{Rez}\,(g,i) \Leftrightarrow \int_{\gamma_R} g(z)dz + \int_{-R}^{R} g(x)dx = 2\pi i\,\mathrm{Rez}\,(g,i)$.

Pentru $R \to \infty$, egalitatea devine: $\underbrace{\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} g(z)dz}_{=0} + \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = 2\pi i\,\mathrm{Rez}\,(g,i)$.

Rezultă $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = 2\pi i \frac{1}{2i}$, deci $I_2 = \frac{\pi}{3}$.

**III.** a) $y'' - 2y' + y = e^t \cos 2t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. Aplicăm transformarea Laplace ecuaţiei şi notăm $Y = \mathcal{L}[y]$; rezultă

$$\mathcal{L}[y''](p) - 2\mathcal{L}[y'](p) + \mathcal{L}[y](p) = \mathcal{L}[e^t \cos 2t](p) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow p^2Y(p) - p - 1 - 2(pY(p) - 1) + Y(p) = \mathcal{L}[\cos 2t](p-1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow p^2Y(p) = \frac{p-1}{(p-1)^2 + 4} \Leftrightarrow (p-1)Y(p) = 1 + \frac{1}{(p-1)^2+4},$$

deci

$$Y(p) = \frac{p^2 - 2p + 6}{(p-1)(p^2-2p+5)} = \frac{A}{p-1} + \frac{B(p-1)+C}{p^2-2p+5} \Rightarrow \begin{cases} A + B = 1 \\ -2A - 2B + C = -2 \\ 5A + B - C = 6, \end{cases}$$

şi deci $A = 5/4, B = -1/4, C = 0$. Rezultă

$$Y(p) = \frac{5}{4}\frac{1}{p-1} - \frac{1}{4}\frac{p-1}{(p-1)^2+4} \Rightarrow y(t) = \frac{5}{4}e^t - \frac{1}{4}e^t \cos 2t.$$

b) Rezolvăm ecuaţia $x(t) + x'(t) - 2\displaystyle\int_0^t x(s)\sin(t-s)ds = \cos t + sht$, cu condiţia $x(0) = 1$. Deoarece $\displaystyle\int_0^t x(s)\sin(t-s)ds = x(t) * \sin t$, ecuaţia se rescrie

$$x(t) + x'(t) - 2x(t) * \sin t = \cos t + sht.$$

Aplicăm transformarea Laplace ecuaţiei şi notăm $X = L[x]$; obţinem:

$$\mathcal{L}[x(t)](p) + \mathcal{L}[x'(t)](p) - 2\mathcal{L}[x(t)](p)\cdot\mathcal{L}[\sin t](p) = \mathcal{L}[\cos t] + \mathcal{L}[sht] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow X(p) + pX(p) - 1 - 2X(p)\frac{1}{p^2+1} = \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p^2-1} \Rightarrow X(p) = \frac{p}{p^2-1} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p+1},$$

unde $\begin{cases} A + B = 1 \\ A - B = 0 \end{cases} \Rightarrow A = B = \frac{1}{2}$, şi deci $X(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p+1}\right)$; prin urmare $x(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} = cht$.

**IV.** a) Pentru $n \geq 1$, calculăm

$$\begin{aligned} a_n + ib_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\cdot e^{inx}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x(a+in)}dx = \frac{1}{\pi}\frac{e^{x(a+in)}}{a+in}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi(a+in)}\left(e^{x(a+in)} - e^{-x(a+in)}\right) = \frac{1}{\pi(a+in)}\left(e^{\pi a}(-1)^n - e^{-\pi a}(-1)^n\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{\pi}\frac{1}{a+in}\cdot\frac{e^{\pi a} - e^{-\pi a}}{2}\cdot 2 = \frac{(-1)^n\,(a-in)\,sh(\pi a)\cdot 2}{\pi(a^2+n^2)}, \end{aligned}$$

de unde rezultă $a_n = \frac{(-1)^n \cdot a \cdot sh(\pi a) \cdot 2}{\pi(a^2+n^2)}$, $b_n = \frac{(-1)^n \cdot n \cdot sh(\pi a) \cdot 2}{\pi(a^2+n^2)}$. Pentru $n = 0$, avem

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}dx = \frac{1}{\pi}\frac{e^{ax}}{a}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi a}\left(e^{\pi a} - e^{-\pi a}\right) = \frac{2 \cdot sh(\pi a)}{\pi a}.$$

Rezultă că dezvolarea în serie Fourier trigonometrică pentru funcţia cerută este:

$$f(x) = \frac{sh(\pi a)}{\pi a} + \sum_{n\geq 1}\left[\frac{(-1)^n \cdot a \cdot sh(\pi a)\cdot 2}{\pi(a^2+n^2)}\cos(nx) + \frac{(-1)^{n+1}\cdot n \cdot sh(\pi a)\cdot 2}{\pi(a^2+n^2)}\sin(nx)\right].$$

b) Pentru $n \geq 1$, calculăm $a_n + ib_n = \frac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - a\cos x}{1 - 2a\cos x + a^2} \cdot e^{inx}dx$. Notând $e^{ix} = z$ şi folosind egalităţile obţinem

$$a_n + ib_n = \frac{1}{\pi}\int_{|z|=1} \frac{1 - a\frac{z^2+1}{2z}}{1 - 2a\frac{z^2+1}{2z} + a^2} \cdot z^n \frac{dz}{iz} = \frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=1} \frac{(2z - az^2 - a)z^{n-1}}{-az^2 + z(a^2+1) - a}dz.$$

Fie $g(z) = \frac{(2z-az^2-a)z^{n-1}}{-az^2+z(a^2+1)-a}$; funcţia $g$ are două puncte singulare $z_1 = a$ şi $z_2 = \frac{1}{a}$, poli de ordinul I. Dar, deoarece condiţia iniţială cere $|a| < 1$, rezultă că doar $z_1$ este în interiorul drumului $|z| = 1$ şi $\displaystyle\int_{|z|=1} g(z)dz = 2\pi i \cdot \text{Rez}\,(g, a)$. Dar

$$\text{Rez}\,(g,a) = \lim_{z\to a}(z-a)\frac{(2z - az^2 - a)z^{n-1}}{-a(z-a)\left(z - \frac{1}{a}\right)} = \frac{(2a - a^3 - a)a^{n-1}}{1 - a^2}.$$

Rezultă $a_n + ib_n = \frac{1}{2i\pi}2\pi i \cdot a^n = a^n$, şi deci $a_n = a^n$, $b_n = 0$, $n \geq 1$. Pentru $n = 0$, avem $a_0 = \frac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - a\cos x}{1 - 2\cos x + a^2}dx$. Notând $e^{ix} = z$, obţinem

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{|z|=1} \frac{1 - a\frac{z^2+1}{2z}}{1 - 2a\frac{z^2+1}{2z} + a^2}\frac{dz}{iz} = \frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=1}\frac{-az^2 + 2z - a}{[-az^2 + z(a^2+1) - a] - z}dz.$$

Notăm $g(z) = \frac{-az^2+2z-a}{[-az^2+z(a^2+1)-a]-z}$; pentru $g$, $z_1 = a$ şi $z_2 = \frac{1}{a}$, $z_3 = 0$ sunt poli de ordinul I şi cum $\gamma : |z| = 1$, rezultă

$$\int_{|z|=1} g(z)dz = 2\pi i\left(\text{Rez}\,(g,a) + \text{Rez}\,(g,0)\right).$$

Cele două reziduuri din membrul drept sunt

$$\text{Rez}\,(g,a) = \lim_{z\to a}(z-a)\frac{-az^2 + 2z - a}{-a(z-a)\left(z-\frac{1}{a}\right)z} = \frac{-a^3 - a}{(1-a^2)\,a} = 1,$$

$$\text{Rez}\,(g,0) = \lim_{z\to 0}\frac{-az^2 + 2z - a}{-a(z-a)\left(z-\frac{1}{a}\right)z} = \frac{-a}{-a} = 1,$$

deci $a_0 = \frac{1}{2\pi i}2\pi i \cdot 2 = 2$. Prin urmare dezvoltarea cerută este $f(x) = 1 + \displaystyle\sum_{n\geq 1} a^n \cos nx$.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza locală, anul II, profil mecanic, 2003-2004

**I.** Vezi subiectul I.1 de la profil mecanic, faza locală, 2004-2005.

**II.** Folosind egalitatea $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, ecuaţia se rescrie: $\cos z = 5$ şi deci $e^{iz} + e^{-iz} = 10$. Notând $e^{iz} = \alpha$, obţinem $\alpha + \frac{1}{\alpha} - 10 = 0 \Leftrightarrow \alpha \in \{5 \pm 2\sqrt{6}\}$. Distingem cazurile:

i) $e^{iz} = 5 + 2\sqrt{6} \Rightarrow iz = Ln(5 + 2\sqrt{6}) = 5 + 2\sqrt{6} + i(0 + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$, deci $z = \frac{5+2\sqrt{6}}{i} + 2k\pi = 2k\pi - i(5 + 2\sqrt{6}), k \in \mathbb{Z}$.

ii) $e^{iz} = 5 - 2\sqrt{6} \Rightarrow iz = Ln(5 - 2\sqrt{6}) = 5 - 2\sqrt{6} + i(0 + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$, deci $z = 2k\pi - i(5 - 2\sqrt{6}), k \in \mathbb{Z}$.

**III.** $I = \displaystyle\int_{4x^2+9y^2=36} \frac{\sin z}{z^2(z^2+1)} dz$. Ecuaţia carteziană a domeniului de integrare se rescrie: $4x^2 + 9y^2 = 36 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, deci se integrează pe o elipsă. Fie $g(z) = \frac{\sin z}{z^2(z^2+1)}$. Avem $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z^2(z^2+1)} = \lim_{z\to 0} \left(\frac{\sin z}{z}\right) \cdot \frac{1}{z(z^2+1)} = \infty$, deci $z_1 = 0$ este pol de ordinul 1 pentru funcţia $g$; $z_2 = i$ şi $z_3 = -i$ sunt de asemenea poli de ordinul 1. Atunci $I = 2\pi i(\text{ Rez } (g, 0) + \text{ Rez } (g, i) + \text{ Rez } (g, -i))$. Calculăm reziduurile:

$$\text{Rez } (g, 0) = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z(z^2+1)} = 1, \quad \text{Rez } (g, 1) = \lim_{z\to i} \frac{\sin z}{z(z^2+i)} = \frac{\sin i}{(-1)\cdot 2i},$$

$$\text{Rez } (g, -i) = \lim_{z\to -i} \frac{\sin z}{z(z^2-i)} = \frac{\sin(-i)}{(-1)\cdot(-2i)} = \frac{\sin i}{-2i}$$

şi deci

$$I = 2\pi i \left(1 - \frac{\sin i}{2i} - \frac{\sin i}{2i}\right) = 2\pi i - 2\pi \sin i = 2\pi \left(i - \frac{e^{-1} - e}{2i}\right) = \pi i \left(2 + \frac{1}{e} - e\right).$$

**IV.** Avem

$$f(z) = \frac{1}{z^2+z-6} = \frac{1}{(z+3)(z-2)} = \frac{A}{z+3} + \frac{B}{z-2} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ -2A + 3B = 1, \end{cases}$$

deci $A = -\frac{1}{5}, B = \frac{1}{5}$, şi deci $f(z) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z+3}\right)$. Distingem următoarele cazuri:

i) $|z| < 2$. Au loc dezvoltările în serie:

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{-2\left(1 - \frac{z}{2}\right)} = -\frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n, \quad \frac{1}{z+3} = \frac{1}{3\left(1 + \frac{z}{3}\right)} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n (-1)^n,$$

deci

$$f(z) = \frac{1}{5} \cdot \left[-\frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n - \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n (-1)^n\right] = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left(-\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1}}\right).$$

ii) $2 < |z| < 3$. Avem

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)} = \frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n, \quad \frac{1}{z+3} = \frac{1}{3\left(1+\frac{z}{3}\right)} = \frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{3}\right)^n,$$

de unde rezultă $f(z) = \frac{1}{5}\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}} - \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{3^{n+1}}\right]$.

iii) Pentru $|z| > 3$, avem

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z\left(1-\dfrac{2}{z}\right)} = \frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n, \quad \frac{1}{z+3} = \frac{1}{z\left(1+\dfrac{3}{z}\right)} = \frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3}{z}\right)^n,$$

deci $f(z) = \frac{1}{5}\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}} - \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{z^{n+1}}\right] = \frac{1}{5}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n-(-1)^n\cdot 3^n}{z^{n+1}}$.

iv) Pentru $|z-2| < 1$, avem

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{z-2+5} = \frac{1}{5\left(\dfrac{z-2}{5}+1\right)} = \frac{1}{5}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{5}\right)^n,$$

deci $f(z) = \frac{1}{5}\left[\frac{1}{z-2} - \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-2)^n}{5^{n+1}}\right]$.

**V.** $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^2(x^2+b^2)}$, $a > b > 0$. Construim drumul $\gamma = \gamma_R \cup [-R, R]$ (vezi Figura 3). Fie $g(z) = \dfrac{1}{(z^2+a^2)^2(z^2+b^2)}$. Avem

$$\begin{cases} \int_\gamma g(z)dz = 2\pi i\cdot\sum\limits_{k=1}^{2}\text{Rez }(g,\alpha_k) \\ \int_\gamma g(z)dz = \int_{\gamma_R} g(z)dz + \int_{-R}^{R} g(x)dx \end{cases}$$

iar pentru $R\to\infty$ obţinem $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx = 2\pi i(\text{ Rez }(g,ia) + \text{ Rez }(g,ib))$. Dar $z = ia$ este pol de ordinul 2 pentru $g$, deci

$$\begin{aligned}\text{Rez }(g,ia) &= \lim_{z\to ia}\left((z-ia)^2\cdot\frac{1}{(z-ia)^2(z+ia)^2(z^2+b^2)}\right)' = \\ &= \lim_{z\to ia}\left[\frac{-2}{(z+ia)^3(z^2+b^2)} - \frac{2z}{(z+ia)^2(z^2+b^2)^2}\right] = \\ &= \frac{-2}{(-i)a^3\cdot 8\cdot(b^2-a^2)} - \frac{2ia}{4(-1)a^2\cdot(b^2-a^2)^2} = \frac{b^2-3a^2}{4ia^3(b^2-a^2)^2}.\end{aligned}$$

De asemenea $z = ib$ este pol de ordinul întâi pentru $g$, deci

$$\text{Rez }(g,ib) = \lim_{z\to ib}\frac{1}{(z^2+a^2)^2(z+ib)} = \frac{1}{(a^2-b^2)^2\cdot 2ib}.$$

Rezultă $J = 2\pi i\left(\dfrac{b^2-3a^2}{4ia^3(b^2-a^2)^2} + \dfrac{1}{(a^2-b^2)^2\cdot 2ib}\right) = \dfrac{\pi(b^3-3a^2b+2a^3)}{2a^3b(a^2-b^2)^2}$.

**VI.** $a_n + ib_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{e^{inx}}{1-2a\cos x + a^2}dx$. Notând $e^{ix} = z$, obţinem

$$a_n + ib_n = \int_{|z|=1} \frac{z^n}{1-2a\frac{z^2+1}{2z}+a^2}\frac{dz}{iz} = \frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{z^n}{-az^2+z(a^2+1)-a}dz.$$

Fie $g(z) = \frac{z^n}{-az^2+z(a^2+1)-a}$. Atunci $z_1 = a$ şi $z_2 = \frac{1}{a}$ sunt puncte singulare ale funcţiei $g$ (poli de ordin 1). Pentru $a \in \mathbb{R}, |a| \neq 1$, distingem cazurile

i) Dacă $|a| < 1$, atunci $|z_1| = |a| < 1$, $|z_2| = \left|\frac{1}{a}\right| > 1$ şi deci putem evalua integrala $\displaystyle\int_{|z|=1} g(z)dz = 2\pi i \operatorname{Rez}(g,a)$ unde $\operatorname{Rez}(g,a) = \displaystyle\lim_{z\to a}\frac{z^n}{-2az+a^2+1} = \frac{a^n}{-a^2+1}$ deci $a_n + ib_n = \frac{1}{i}2\pi i\frac{a^n}{1-a^2} = \frac{2\pi a^n}{1-a^2}$. Rezultă $a_n = \frac{2\pi a^n}{1-a^2}$, $b_n = 0$.

ii) Dacă $|a| > 1$, atunci $|z_1| = |a| > 1, |z_2| = \left|\frac{1}{a}\right| < 1$ şi deci evaluăm integrala $\displaystyle\int_{|z|=1} g(z)dz = 2\pi i \operatorname{Rez}(g, 1/a)$. Dar

$$\operatorname{Rez}(g,\tfrac{1}{a}) = \lim_{z\to\frac{1}{a}}\frac{z^n}{-2az+a^2+1} = \frac{\frac{1}{a^n}}{-2+a^2+1} = \frac{1}{a^n(a^2-1)},$$

deci $a_n + ib_n = \frac{1}{i}2\pi i\frac{1}{a^n(a^2-1)} = \frac{2\pi}{a^n(a^2-1)} \Rightarrow a_n = \frac{2\pi}{a^n(a^2-1)}, b_n = 0$.

**VII.** Rezolvăm sistemul $\begin{cases} x' = x - y + 2\sin t \\ y' = 2x - y \end{cases}$ cu condiţiile iniţiale $\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0. \end{cases}$

*Metoda 1.* Din prima ecuaţie, obţinem $y = x + 2\sin t - x'$. Înlocuind în a doua ecuaţie, rezultă $x' + 2\cos t - x'' = 2x - x - 2\sin t + x' \Leftrightarrow x'' + x - 2\sin t - 2\cos t = 0$. Rezolvăm ecuaţia omogenă $x'' + x = 0$. Polinomul caracteristic $r^2 + 1 = 0$ are rădăcinile $r \in \{\pm i\}$, deci quasipolinoamele asociate sunt $\varphi_1(t) = \cos t$, $\varphi_2(t) = \sin t$.
Căutăm o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene de forma: $x_0(t) = C_1(t)\cos t + C_2(t)\sin t$. Din sistemul $\begin{cases} C'_1(t)\cos t + C'_2(t)\sin t = 0 \\ -C'_1(t)\cos t + C'_2(t)\sin t = 2\sin t + 2\cos t \end{cases}$, rezultă

$$C'_2(t) = \sin 2t + \cos 2t + 1, \text{ deci } C_2(t) = -\tfrac{\cos 2t}{2} + \tfrac{\sin 2t}{2} + t.$$

Înlocuind în prima ecuaţie, avem: $C'_1(t)\cos t + 2\sin^2 t + 2\cos^2 t\sin t = 0$, deci

$$C'_1(t) = -2\sin^2 t + 2\sin t\cos t = \cos 2t - 1 - \sin 2t \Rightarrow C_1(t) = \frac{\sin 2t}{2} - t + \frac{\cos 2t}{2}.$$

Prin urmare, soluţia particulară este

$$\begin{aligned} x_0(t) &= \frac{\sin 2t\cos t}{2} - t\cos t + \frac{\cos 2t\cos t}{2} + \frac{\sin 2t\sin t}{2} - \frac{\cos 2t\sin t}{2} + t\sin t = \\ &= \frac{\sin 2t}{2}(\cos t + \sin t) - t(\cos t - \sin t) + \frac{\cos 2t}{2}(\cos t - \sin t). \end{aligned}$$

Soluţia generală a ecuaţiei neomogene este

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{\sin 2t}{2}(\cos t + \sin t) - t(\cos t - \sin t) + \frac{\cos 2t}{2}(\cos t - \sin t).$$

Condiţia $x(0) = 0$ implică $C_1 + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{2}$, şi folosind prima ecuaţie, avem $y(0) = 0 \Rightarrow x'(0) = 0 \Rightarrow C_2 + 1 - 1 - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2}$. În concluzie

$$x(t) = \frac{1}{2}(\sin t - \cos t) + \frac{\sin 2t}{2}(\cos t + \sin t) - t(\cos t - \sin t) + \frac{\cos 2t}{2}(\cos t - \sin t).$$

Din prima ecuaţie se obţine uşor $y(t)$.

*Metoda 2.* Aplicând transformarea Laplace sistemului şi notând $X = \mathcal{L}[x]$, $Y = \mathcal{L}[y]$, obţinem:

$$\begin{cases} pX = X - Y + \frac{2}{p^2+1} \\ pY = 2X - Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (p-1)X + Y = \frac{2}{p^2+1} \\ -2X + (p+1)Y = 0. \end{cases}$$

Discriminantul acestui sistem liniar în necunoscutele $X, Y$, este $\Delta = p^2 + 1 \neq 0$. Sistemul este compatibil determinat, cu soluţiile: $X = \frac{2(p+1)}{(p^2+1)^2}$ şi $Y = \frac{4}{(p^2+1)^2}$. Pentru determinarea lui $x(t)$, notăm $g_1(p) = \frac{2(p+1)}{(p^2+1)^2}e^{pt}$; se observă că $p = \pm i$ sunt poli de ordinul 2, şi avem

$$\text{Rez}\,(g_1, i) = \lim_{p\to i}\left(\frac{2(p+1)}{(p^2+1)^2}e^{pt}\right) = 2\lim_{p\to i}\frac{\left(e^{pt} + (p+1)te^{pt}\right)(p+i)^2 - (p+1)e^{pt}\cdot 2(p+i)}{(p+i)^4},$$

deci $\text{Rez}\,(g_1, i) = \frac{e^{it}(t-it+1)}{2i}$. Analog, $\text{Rez}\,(g_1, -i) = \frac{e^{-it}(-t-it-1)}{2i}$, deci

$$x(t) = t\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} - it\frac{e^{it} + e^{-it}}{2i} + \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = t\sin t - t\cos t + \sin t.$$

Pentru determinarea lui $y(t)$, notăm $g_2(p) = \frac{4}{(p^2+1)^2}e^{pt}$. Se observă că $p = \pm i$ sunt poli de ordinul 2 pentru $g_2$, deci

$$\text{Rez}\,(g_2, i) = 4\lim_{p\to -i}\left(\frac{e^{pt}}{(p^2+1)^2}\right) = 4\cdot\lim_{p\to i}\frac{e^{pt}t(p+1)^2 - e^{Pt}\cdot 2(p+i)}{(p+i)^4} = e^{it}(-t-i),$$

şi $\text{Rez}\,(g_2, -i) = e^{-it}(-t+i)$. Atunci

$$y(t) = -t(e^{it} + e{-}^{it}) - i(e^{it} - e{-}^{it}) = -2t\cos t + 2\sin t.$$

*Observaţie.* Problema se poate rezolva şi folosind matricea exponenţială.

**VIII.** $F(p) = \frac{p+1}{p^2+2p+\alpha}$. Discriminantul polinomului $p^2+2p+\alpha$ este $\Delta = 4(1-\alpha)$. Distingem trei cazuri:

i) Dacă $1 - \alpha < 0$, deci $\alpha > 1$, atunci $p^2 + 2p + \alpha = 0 \Leftrightarrow p \in \{-1 \pm i(\alpha - 1)\}$. Obţinem $F(p) = \frac{p+1}{(p+1)^2+\alpha-1}$, deci funcţia original este $e^{-t}\cos\left(\sqrt{\alpha-1}t\right)$.

ii) Dacă $1 - \alpha = 0$, deci $\alpha = 1$, atunci $F(p) = \frac{p+1}{(p+1)^2} = \frac{1}{p+1}$, iar funcţia original este $e^{-t}$.

iii) Dacă $1-\alpha>0$, atunci $p^2+2p+\alpha=0 \quad \Leftrightarrow p\in\{p_{1,2}\}=\{-1\pm\sqrt{1-\alpha}\}$.
Atunci $F(p)=\frac{p+1}{(p-p_1)(p-p_2)}=\frac{A}{p-p_1}+\frac{B}{p-p_2}$, unde $\begin{cases} A+B=1 \\ -Ap_2-Bp_1=1 \end{cases} \Leftrightarrow A=B=\frac{1}{2}$.
Rezultă $F(p)=\frac{1}{2}\frac{1}{p-p_1}+\frac{1}{2}\frac{1}{p-p_2}$. Prin urmare funcţia original este

$$\frac{1}{2}e^{p_1t}+\frac{1}{2}e^{p_2t}=\frac{1}{2}e^{-t}\left(e^{\sqrt{1-\alpha}t}+e^{-\sqrt{1-\alpha}t}\right)=e^{-t}\cdot ch(\sqrt{1-\alpha}t).$$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza locală, anul II, profil electric, 2004-2005

**I.** Calculăm $I=\displaystyle\int_\Gamma z^2\cdot e^{\frac{2z}{z+1}}dz,\quad \Gamma=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-\frac{1}{2}|=R\},\quad R\neq\frac{3}{2};\quad R>0.$
Fie $g(z)=z^2\cdot e^{\frac{2z}{z+1}}$; pentru $g$, singurul punct singular este $z=-1$, care este punct singular esenţial. Rez $(g,-1)=c_{-1}$ coeficient din dezvoltarea în serie Laurent a lui $g$ în jurul lui $z=-1$. Se observă că avem

$$\begin{aligned} e^{\frac{2z}{z+1}} &= e^{\frac{2(z+1-1)}{z+1}}=e^{2-\frac{2}{z+1}}=e^2\cdot e^{-\frac{2}{z+1}}=e^2\cdot S. \\ z^2\cdot e^{\frac{2z}{z+1}} &= (z+1-1)^2\cdot e^2\cdot S=e^2\left[(z+1)^2-2(z+1)+1\right]\cdot S, \end{aligned}$$

unde

$$\begin{aligned} S &= 1+\frac{-2}{1!\,(z+1)}+\frac{(-2)^2}{2!\,(z+1)^2}+\cdots+\frac{(-2)^n}{n!\,(z+1)^n}+\cdots \\ &= 1-\frac{2}{1!\,(z+1)}+\frac{2^2}{2!\,(z+1)^2}+\cdots+\frac{(-1)^n\cdot 2^n}{n!\,(z+1)^n}+\cdots \end{aligned}$$

deci

$$c_{-1}=\left(\frac{2^3}{3!}-\frac{2^3}{2!}-\frac{2}{1!}\right)e^2=\left(\frac{4}{3}-4-2\right)e^2=\left(\frac{4}{3}-6\right)e^2=-\frac{14e^2}{3}.$$

Considerăm cercul $\left|z-\frac{1}{2}\right|=R$ de centru $\left(\frac{1}{2},0\right)$ şi rază $R$. Distingem cazurile:
i) dacă $R<\frac{3}{2}$, atunci $I=0$;
ii) dacă $R>\frac{3}{2}$, atunci $\;I=2\pi i\cdot$ Rez $(g,-1)=2\pi i-\frac{14e^2}{3}=-\frac{28\pi i}{3}e^2$.

**II.** Avem $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi<x\leq 0 \\ \pi/2, & 0<x<\pi \end{cases}$. Dezvoltarea în serie trigonometrică Fourier a funcţiei $f$ este $\frac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n\geq 1}a_n\cdot\cos(nx)+b_n\cdot\sin(nx)$, unde

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi}{2}\cos(nx)\,dx=\frac{1}{2}\left.\frac{\sin(nx)}{n}\right|_0^{\pi}=0, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi}{2}\sin(nx)\,dx=-\frac{1}{2}\left.\frac{\cos(nx)}{n}\right|_0^{\pi}=\frac{1}{2n}\left((-1)^{n+1}+1\right), \\ a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi}{2}dx=\frac{1}{2}\cdot x|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

deci $f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n}\left((-1)^{n+1}+1\right)\cdot \sin(nx), \forall x\in(-\pi,\pi)$. Seria se rescrie

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cdot \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\left((-1)^{n+1}+1\right)\cdot \sin(nx) = \\ &= \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\left(\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2n+1}\cdot 2\sin(nx) + \sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n}\cdot 0\cdot \sin(nx)\right) = \\ &= \tfrac{\pi}{4} + \sum_{n\geq 0}\frac{1}{2n+1}\sin(nx). \end{aligned}$$

Din formula Parseval, $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n\geq 1}\left(a_n^2+b_n^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\,2}(x)dx$, rezultă

$$\begin{aligned} &\frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}\left((-1)^{n+1}+1\right)^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi^2}{4}dx \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}\cdot\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^2}\cdot 4 = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{4}\cdot x\Big|_0^{\pi} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi^2}{8} + \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{8}. \end{aligned}$$

**III.** Aplicăm transformarea Laplace ecuaţiei; notând $\mathcal{L}[x(t)](p) = X(p)$, obţinem:

$$p^3X(p) - p^2 - p + 1 - 2\left(p^2X(p) - p - 1\right) - pX(p) - 1 + 2X(p) = 5\cdot\frac{2}{p^2+4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (p^3 - 2p^2 - p + 2)\cdot X(p) - p^2 + p + 2 = \frac{10}{p^2+4},$$

deci $X(p) = \frac{1}{p-1} + \frac{10}{(p-1)(p+1)(p-2)(p^2+4)}$. Dar

$$\frac{10}{(p-1)(p+1)(p-2)(p^2+4)} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p-2} + \frac{Dp+E}{p^2+4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad A=-1,\ B=\frac{1}{3},\ C=\frac{5}{12},\ D=\frac{1}{4},\ E=\frac{1}{2},$$

deci rezultă

$$X(p) = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p-1} + \frac{1}{3}\frac{1}{p+1} + \frac{5}{12}\frac{1}{p-2} + \frac{1}{4}\frac{p}{p^2+4} + \frac{1}{2}\frac{1}{p^2+4},$$

şi prin urmare $x(t) = \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{5}{12}e^{2t} + \frac{1}{4}\cos(2t) + \frac{1}{4}\sin(2t)$.

**IV.** Avem $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\cos(tx)\,dx = \frac{1}{1+t^2}$. Folosind formula inversă a transformării Fourier prin cosinus, rezultă $f(x) = \frac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\underbrace{\frac{1}{1+t^2}\cos(tx)}_{\text{pară}}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\cos(tx)dt.$

Fie drumul închis $\gamma = \gamma_R \cup [-R, R]$, $R > 1$ (vezi Figura 3). Fie $g(z) = \frac{1}{1+z^2} \cdot e^{izx}$. Aplicând teorema reziduurilor, obţinem

$$\int_\gamma g(z)dz = 2\pi i \cdot \text{Rez}\,(g, i) \Leftrightarrow \int_{\gamma_R} g(z)dz + \int_{-R}^{R} g(x)dx = 2\pi i \cdot \text{Rez}\,(g, i).$$

Pentru $R \to \infty$, egalitatea devine $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} g(z)dz + \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = 2\pi i\ \text{Rez}\,(g, i)$, şi deoarece $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} g(z)dz = 0$ (lema lui Jordan), rezultă $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = 2\pi i\,\text{Rez}\,(g, i)$. Dar $z = i$ este pol de ordinul 1 pentru $g$, deci

$$\text{Rez}\,(g, i) = \lim_{z\to i} (z - i) \frac{e^{izx}}{(z - i)(z + i)} = \frac{e^{-x}}{2i} = \frac{1}{2e^x i} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + x^2} e^{ixt} dx = 2\pi i \frac{1}{2e^x i} = \frac{\pi}{e^x}.$$

Dar $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + x^2} \cos(tx)\, dx = \text{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + x^2} e^{ixt} dx\right)$, deci avem

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{e^x} = \frac{1}{e^x} = e^{-x}.$$

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
## Faza locală, anul II, profil mecanic, 2004-2005

**I.** a) Notăm $u(x, y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$. Atunci

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\ \ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2},\ \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2x^3 - 6xy^2}{(x^2 + y^2)^3} - \frac{2x(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3} = 0,$$

deci $u$ este armonică. Obţinem succesiv

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial t} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + i\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$y = 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x} + C_1 \Rightarrow f(z) = \frac{1}{z} + C_1;\ C_1 \in \mathbb{C}.$$

Condiţia $f(1) = 1$ implică $1 + C_1 = 1 \Rightarrow\ \ C_1{=}0$, deci $f(z) = \frac{1}{z}$.

b) Notăm $u(x, y) = \varphi(t)$, $t(x, y) = \frac{x^2+y^2}{x}$. Impunem condiţia de armonicitate funcţiei $u$. Avem $\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(t) \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(t) \cdot \frac{2y}{x}$, iar condiţia $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ se rescrie

$$\varphi''(t) \cdot \left(\tfrac{x^2-y^2}{x^2}\right)^2 + \varphi'(t) \cdot \tfrac{2x^3-(x^2-y^2)\cdot 2x}{x^4} + \varphi''(t)\tfrac{4y^2}{x^2} + \varphi'(t)\tfrac{2}{x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varphi''(t) \cdot \tfrac{x^2+y^2}{x} + 2\varphi'(t) = 0 \Leftrightarrow \varphi''(t) \cdot t + 2\varphi'(t) = 0 \Rightarrow \tfrac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)} = -\tfrac{2}{t},$$

unde am notat $t = \frac{x^2-y^2}{x^2}$. Integrând ambii membrii ai egalităţii, rezultă:

$$\textstyle\int \frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)} dt = -2\int \frac{1}{t} dt \Leftrightarrow \ln(\varphi'(t)) = -2\ln|t| + \ln C_1,\ C_1 > 0 \Rightarrow$$

$$\textstyle\varphi'(t) = \frac{C_1}{t^2},\ C_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow \int \varphi'(t)dt = C_1 \int \frac{1}{t^2} dt \Leftrightarrow$$

$$\textstyle\Leftrightarrow \varphi(t) = -\frac{C_1}{t} + C_2,\ C_2 \in \mathbb{R}$$

şi deci $u(x,y) = -\frac{C_1}{t} + C_2$. Obţinem succesiv $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{C_1(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} - i\frac{-2C_1xy}{(x^2+y^2)^2}$; $y = 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{C_1}{x^2} \Rightarrow \quad f(x) = -\frac{C_1}{x} + C_3$, deci $f(z) = -\frac{C_1}{z} + C_3,\ C_3 \in \mathbb{C}$.

**II.** a) *Metoda 1.* Aplicând transformarea Laplace şi notând $\mathcal{L}[x](p) = X(p)$, $\mathcal{L}[y](p) = Y(p)$, sistemul devine:

$$\begin{cases} pY(p) + 2X(p) - Y(p) = 0 \\ 2\left(pX(p) - \frac{1}{2}\right) + p^2Y(p) + 1 = 2\frac{1}{p^2} - \frac{p}{p^2+4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (p-1)\,Y(p) + 2X(p) = 0 \\ pY(p) + 2X(p) = \frac{2}{p^3} - \frac{p}{p^2+4}. \end{cases}$$

Scăzând a doua ecuaţie din prima, rezultă:

$$-Y(p) = -\frac{2}{p^3} + \frac{p}{p^2+4} \Leftrightarrow Y(p) = 2\frac{1}{p^3} - \frac{1}{2}\frac{2}{p^2+4},$$

deci $y(t) = t^2 - \frac{1}{2}\sin(2t)$. Din prima ecuaţie a sistemului iniţial, rezultă

$$x(t) = \frac{y(t)-y'(t)}{2} = \frac{t^2-2t}{2} - \frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{\cos(2t)}{2}.$$

*Observaţie.* Determinarea lui $x(t)$ se putea face şi aflând $X(p)$ şi apoi originalul transformatei Laplace.

*Metoda 2.* Rezolvăm sistemul: $\begin{cases} y' + 2x - y = 0 \\ 2x' + y'' = 2t - \cos(2t) \end{cases}$. Înlocuind în a doua ecuaţie pe $x$ extras din prima, avem:

$$2x = y - y' \Rightarrow 2x' = y' - y'' \Rightarrow y' = 2t - \cos(2t) \Rightarrow y = t^2 - \frac{\sin(2t)}{2} + C_1.$$

Cum $y(0) = 0$, rezultă $C_1$=0, deci $y = t^2 - \frac{\sin(2t)}{2}$. Analog metodei 1, obţinem $x(t) = \frac{t^2-2t}{2} - \frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{\cos(2t)}{2}$.

b) Rezolvăm ecuaţia $\varphi(t) - \displaystyle\int_0^t e^{t-u}(t-u)\varphi(u)du = \cos t$. Aplicăm transformarea Laplace ecuaţiei integrale, făcând observaţia că $\displaystyle\int_0^t e^{t-u}(t-u)\varphi(u)du = e^t \cdot t * \varphi(t)$. Obţinem

$$\mathcal{L}[\varphi(t)](p) - \mathcal{L}[e^t \cdot t](p) \cdot \mathcal{L}[\varphi(t)](p) = \mathcal{L}[\cos t](p) \Leftrightarrow \frac{p^2-2p}{(p-1)^2} \cdot \mathcal{L}[\varphi(t)](p) = \frac{p}{p^2+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[\varphi(t)](p) = \frac{(p-1)^2}{(p^2+1)(p-2)} = \frac{Ap+B}{p^2+1} + \frac{C}{p-2} \Rightarrow \begin{cases} A + C = 1 \\ -2A + B = -2 \\ -2B + C = 1. \end{cases}$$

Rezultă $A = \frac{4}{5},\ B = -\frac{2}{5},\ C = \frac{1}{5}$, deci

$$\mathcal{L}[\varphi(t)](p) = \frac{4}{5}\frac{p}{p^2+1} - \frac{2}{5}\frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{5}\frac{1}{p-2} \Rightarrow \varphi(t) = \frac{4}{5}\cos t - \frac{2}{5}\sin t + \frac{1}{5}e^{2t}.$$

**III.** a) Calculăm integrala $\displaystyle\int_{|z|=2} (z^2+2z+1)e^{\frac{1}{z-1}}dz$. Fie $g(z) = (z^2+2z+1)e^{\frac{1}{z-1}}$. Se observă că $z = 1$ este punct singular esenţial pentru $g$. Folosind egalităţile

$$\begin{cases} e^{\frac{1}{z-1}} = 1 + \dfrac{1}{1!(z-1)} + \dfrac{1}{2!(z-1)^2} + \cdots + \dfrac{1}{n!(z-1)^n} + \cdots, \\ z^2 + 2z + 1 = (z-1)^2 + 4z = (z-1)^2 + 4(z-1) + 4, \end{cases}$$

funcţia $g$ se rescrie:

$$g(z) = \left[(z-1)^2 + 4(z-1) + 4\right] \cdot \left(1 + \frac{1}{1!(z-1)} + \frac{1}{2!(z-1)^2} + \cdots + \frac{1}{n!(z-1)^n} + \cdots\right),$$

deci $c_{-1} = \frac{1}{3!} + \frac{4}{2!} + \frac{4}{1!} = \frac{1}{6} + 6 = \frac{37}{6} \Rightarrow \displaystyle\int_{|z|=2} g(z)dz = 2\pi i Rez(g,1) = \frac{37\pi i}{3}$.

b) Notăm integrala definită căutată prin $b_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin(2nx)}{5+3\sin x}dx,\ n \in \mathbb{N}^*$. Construim $a_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2nx)}{5+3\sin x}dx$ şi observăm că $a_n + ib_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{e^{i2nx}}{5+3\sin x}dx$. Notând $e^{ix} = z$, rezultă

$$a_n + ib_n = \int_{|z|=1} \frac{z^{2n}}{5 + 3\frac{z^2-1}{2iz}} \frac{dx}{iz} = \int_{|z|=1} \frac{2z^{2n}}{10iz + 3z^2 - 3}dx.$$

Fie $g(z) = \frac{2z^{2n}}{3z^2+10iz-3}$. Pentru $g$, $z_1 = -\frac{i}{3}$ şi $z_2 = -3i$ sunt poli de ordinul 1. Dar $|z_1| = \frac{1}{3} < 1$ şi $|z_2| = 3 > 1$, deci $\displaystyle\int_{|z|=1} g(z)dx = 2\pi i \cdot \text{Rez}\left(g, -\frac{i}{3}\right)$. De asemenea, obţinem:

$$\text{Rez}\left(g, -\frac{i}{3}\right) = \lim_{z\to -\frac{i}{3}} \left(z + \frac{i}{3}\right) \frac{z^{2n}}{3\left(z+\frac{i}{3}\right)(z+3i)} = \frac{\left(-\frac{i}{3}\right)^{2n}}{8i} = \frac{i^{2n-1}}{3^{2n}\cdot 8}.$$

Rezultă $a_n + ib_n = 4\pi i \frac{i^{2n-1}}{3^{2n}\cdot 8} = \frac{\pi(-1)^n}{3^{2n}\cdot 2}$, deci $\begin{cases} a_n = \frac{\pi(-1)^n}{3^{2n}\cdot 2} \\ b_n = 0 \end{cases}$ şi $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin(2nx)}{5+3\sin x}dx = 0$.

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
### Faza locală, anul II, profil electric, 2005-2006

**I.** a) $I = \displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{1+z^3}$; $\gamma = Fr(D)$, unde $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R, 0 < \arg z < \pi\}$ (vezi Figura 3). Fie $g(z) = \frac{1}{1+z^3}$. Funcţia are 3 puncte singulare (poli de ordinul 1): $z_1 = -1$, $z_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ şi $z_3 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$. Dar $I_m(z_3) = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$, deci $z_3 \notin Int(\gamma)$. Pe de altă parte, $|z_1| = |z_2| = 1$. Distingem trei cazuri: i) $0 < R < 1 \Rightarrow I = 0$. ii) $R = 1 \Rightarrow I = \pi i(\text{Rez}\,(g,-1) + \text{Rez}\,(g,z_2))$. Prin calcul direct obţinem:

$$\begin{cases} \text{Rez}\,(g,-1) = \displaystyle\lim_{z\to -1} \frac{(z+1)}{1+z^3} = \frac{1}{3} \\ \text{Rez}\,(g,z_2) = \displaystyle\lim_{z\to\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)} (z-z_2)\cdot\frac{1}{(z+1)(z-z_2)(z-z_3)} = \frac{1}{3z_2^2} = \frac{-i\sqrt{3}-1}{6}, \end{cases}$$

deci $I = \frac{\pi i(1-i\sqrt{3})}{6}$. iii) $R > 1 \Rightarrow 2\pi i(\text{Rez}\,(g,-1) + \text{Rez}\,(g,z_2)) = \frac{\pi i(1-i\sqrt{3})}{3}$.

b) Calculăm $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}$. Construim $\gamma = [0,R] \cup \gamma_R \cup \overline{AO}$.

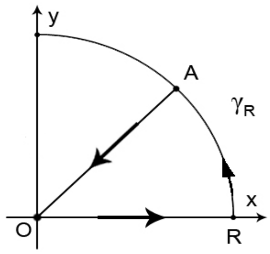


**Figura 5.**

Alegem $R > 1$ şi observăm că în interiorul lui $\gamma$ nu se află decât un un punct singular al funcţiei $g(z)$ (vezi punctul a)) şi anume $z_2$. Atunci

$$\int_\gamma g(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Rez}\,(g, z_2) = 2\pi i\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{6}\right).$$

Pe de altă parte, avem $\displaystyle\int_\gamma g(z)\,dz = \int_0^R g(x)\,dx + \int_{\gamma_R} g(z)\,dz + \int_{AO} g(z)\,dz$. Pentru a calcula $\displaystyle\int_{A0} g(z)\,dz$, parametrizăm $AO$, $z = (R-\rho)\cdot e^{2\pi i/3}$, $\rho \in [0, R]$ şi deci $dz = -e^{\frac{2\pi i}{3}}\,d\rho$, de unde rezultă

$$\int_{AO} g(z)\,dz = -\int_0^R \frac{1}{1+(R-\rho)^3\cdot e^{2\pi i}}\cdot e^{\frac{2\pi i}{3}}\,d\rho = -e^{\frac{2\pi i}{3}}\int_0^r \frac{dr}{1+r^3}.$$

Prin urmare,

$$\int_\gamma g(z)\,dz = -e^{\frac{2\pi i}{3}}\int_0^R \frac{dx}{1+x^3} + \int_{\gamma_R} g(z)\,dz + \int_0^R \frac{dx}{1+x^3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\int_0^R \frac{dx}{1+x^3}\right)(1-e^{\frac{2\pi i}{3}}) + \int_{\gamma_R} g(z)\,dz = 2\pi i\left(\frac{-i\sqrt{3}-1}{6}\right).$$

Trecând la limită $R \to \infty$ în această relaţie, rezultă:

$$(1-e^{\frac{2\pi i}{3}})\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3} + \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} g(z)\,dz = 2\pi i\left(\frac{-i\sqrt{3}-1}{6}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \frac{2\pi i}{6} \Leftrightarrow \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}.$$

**II.** Avem $\displaystyle\int_0^\infty g(u)\cdot\sin(ut)\,du = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\sin\frac{t}{4}, & 0 < t < 2\pi \\ \frac{\pi}{4}, & t = 2\pi \\ 0, & t > 2\pi. \end{cases}$. Utilizând formula inversei transformării Fourier prin sinus, obţinem:

$$\begin{aligned} g(u) &= \tfrac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\pi}{2}\cdot \sin\frac{t}{4}\sin(ut)\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\frac{t}{4}-ut)-\cos(\frac{t}{4}+ut)}{2}\,dt = \\ &= \frac{1}{2}\left( \frac{\sin(\frac{t}{4}-u)}{\frac{1}{4}-u}\Bigg|_0^{2\pi} - \frac{\sin(\frac{t}{4}+ut)}{\frac{1}{4}+u}\Bigg|_0^{2\pi}\right) = 2\left(\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-2\pi u}{1-4u} - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi u\right)}{1+4u}\right) = \\ &= 2\left(\frac{\cos(2\pi u)}{1-4u} - \frac{\cos(2\pi u)}{1+4u}\right) = \frac{16u\cdot\cos(2\pi u)}{1-16u^2}. \end{aligned}$$

*Observaţie.* Considerând formula transformării Fourier prin sinus sub forma $\hat{f}_s(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\displaystyle\int_0^\infty f(x)\sin(\xi x)\,dx$, atunci rezultatul este $g(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{16u\cdot\cos(2\pi u)}{1-16u^2}$.

**III.** $x'' - 2x' + x = e^t$; $x(0) = 0$; $x'(0) = 1$. Aplicând ecuaţiei date transformarea Laplace si notând: $X(p) = [\mathcal{L}(f)](p)$, rezultă

$$p^2X(p) - 1 - 2pX(p) + X(p) = \frac{1}{(p-1)^3} \Leftrightarrow X(p)(p-1)^2 = 1 + \frac{1}{p-1} = \frac{p}{p-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X(p)(p-1)^2 = 1 + \frac{1}{p-1} = \frac{p}{p-1} \Leftrightarrow X(p) = \frac{p}{(p-1)^3}.$$

Fie $G(p) = \frac{p}{(p-1)^3}\cdot e^{pt}$; $p = 1$ este pol de ordinul 3 pentru $G$, deci

$$\text{Rez}\,(G,1) = \frac{1}{2}\lim_{p\to 1}(pe^{pt})'' = \frac{1}{2}(t^2+2t)e^t \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}(t^2+2t)e^{2t}.$$

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
### Faza locală, anul II, profil mecanic, 2005-2006

**I.** a) $\text{Im}\,(f(z)) = \text{arctg}\,\left(\frac{y}{x}\right)$, $f(1) = 0$. Notăm $v(x,y) = \text{arctg}\,\left(\frac{y}{x}\right)$. Verificăm armonicitatea funcţiei $v$. Obţinem succesiv:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2+y^2} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \end{cases} \Rightarrow \Delta v = 0,$$

deci $v$ este armonică. Atunci $f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} + i(-\frac{y}{x^2+y^2})$. Pentru $y = 0$ obţinem $f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f(x) = \ln x + C$, şi efectuând substituţia $x \to z$ rezultă $f(z) = \ln z + C$. Dar $f(1) = 0 \Leftrightarrow C = 0$, deci $f(z) = \ln z$.

b) $\text{Re}\,(f(z)) = \varphi\left(\frac{x^2+y^2}{x}\right)$. Notăm $u(x,y) = \varphi\left(\frac{x^2+y^2}{x}\right) = \varphi(t)$, unde am notat $t(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x}$. Atunci

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(t)\cdot\dfrac{\partial t}{\partial x} = \varphi'(t)\cdot\dfrac{x^2-y^2}{x^2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(t)\cdot\dfrac{\partial t}{\partial y} = \varphi'(t)\cdot\dfrac{2y}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi''(t)\cdot\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2}\right)^2 + \varphi'(t)\cdot\dfrac{2y^2}{x^3} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \varphi''(t)\cdot\dfrac{4y^2}{x^2} + \varphi'(t)\cdot\dfrac{2}{x}. \end{cases}$$

Impunem condiţia ca $u$ să fie armonică, şi obţinem

$$\Delta u = 0 \quad \Leftrightarrow \varphi''(t)\left(\frac{x^4 - 2x^2y^2 + y^4}{x^4} + \frac{4y^2}{x^2}\right) + \varphi'(t)\left(\frac{2y^2}{x^3} + \frac{2}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varphi''(t) \cdot \frac{(x^2+y^2)^2}{x^4} + \frac{2(x^2+y^2)}{x^3} \cdot \varphi'(t) = 0 \Leftrightarrow \varphi''(t) \cdot t + 2\varphi'(t) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)} = -\frac{2}{t} \Leftrightarrow \ln(\varphi'(t)) = -2\ln t + \ln C = \ln\left(\frac{C}{t^2}\right) \Rightarrow \varphi'(t) = \frac{C}{t^2},$$

deci $\varphi(t) = -\frac{C}{t} + D,\ \ C, D \in \mathbb{R}$.. Dacă $\varphi(t) \neq -\frac{C}{t} + D$, atunci nu putem construi $f$ olomorfă cu $\operatorname{Re}(f(z) = \varphi(t)$. Dacă $\varphi(t) = -\frac{C}{t} + D$, atunci

$$\varphi(\tfrac{x^2+y^2}{x}) = -\tfrac{Cx}{x^2+y^2} + D = u(x,y).$$

Obţinem $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{C(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} - i\frac{2Cxy}{(x^2+y^2)^2}$. Pentru $y = 0$ avem $f'(x) = \frac{C}{x^2}$, deci $f(x) = -\frac{C}{x} + E$, $E \in \mathbb{R}$. Substituind $x \to z$ rezultă $f(z) = -\frac{C}{z} + E,\ \ z \neq 0$; $C, E \in \mathbb{C}$.

**II.** a) $I_1 = \displaystyle\int_{|z|=r} z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz$. Fie $g(z) = z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right)$; $z = 0$ punct singular (esenţial) pentru $g$. Folosind dezvoltarea $\sin\left(\frac{1}{z}\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \left(\frac{1}{z}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}$, obţinem

$$z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{2n-1}(2n+1)!} = z - \frac{1}{z \cdot 3!} + \frac{1}{z^2 \cdot 5!} - \cdots,$$

deci $c_1 = -\frac{1}{3!} \Rightarrow \operatorname{Rez}(g, 0) = -\frac{1}{6}$. Din teorema reziduurilor rezultă

$$I_1 = 2\pi i \cdot \operatorname{Rez}(g,0) = -\tfrac{2\pi i}{6} = -\tfrac{\pi i}{3}.$$

b) $I_2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^{2006}} dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^{2006}}$. Fie $g(z) = \frac{1}{(z^2+1)^{2006}}$; $\gamma = \gamma_R \cup [-R, R]$, $R > 1$, unde $\gamma_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ (vezi Figura 3). Pe de-o parte, $\displaystyle\int_\gamma g(z)dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Rez}(g, i)$. Dar are loc egalitatea

$$\int_\gamma g(z)dz = \int_{\gamma_R} g(z)dz + \int_{-R}^{R} g(x)dx,$$

relaţie care pentru $R \to \infty$ conduce la $\displaystyle\int_\gamma g(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx$, de unde rezultă $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = 2\pi i \cdot \operatorname{Rez}(g,i)$. Deoarece $z = i$ este pol de ordinul 2006 pentru $g$, avem

$$\operatorname{Rez}(g,i) = \frac{1}{2005!} \cdot \lim_{z \to i}\left(\frac{1}{(z+i)^{2006}}\right)^{(2005)} = \frac{1}{2005!} \cdot \frac{2006 \cdot 2007 \cdot \cdots \cdot 4010}{2^{4011} \cdot i}$$

şi deci $I_2 = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{2005!} \cdot \frac{2006 \cdot 2007 \cdot \cdots \cdot 4010}{2^{4011} \cdot i} = \frac{4010! \cdot \pi}{(2005!)^2 \cdot 2^{4011}}$.

**III.** a) $\varphi''(t)+\int_0^t e^{2(t-u)}\cdot\varphi'(u)du=e^{2t},\quad \varphi(0)=\varphi'(0)=0$. Aplicând ecuaţiei date transformarea Laplace, rezultă

$$\mathcal{L}[\varphi''(t)](p)+\mathcal{L}[e^{2t}*\varphi'(t)](p)=\frac{1}{p-2}\Leftrightarrow p^2\cdot\mathcal{L}[\varphi(t)](p)+\frac{1}{p-2}\cdot p\cdot\mathcal{L}[\varphi(t)]=\frac{1}{p-2}.$$

Notăm $\mathcal{L}[\varphi(t)]=\Phi(p)$ şi obţinem $p(p^2-2p+1)\cdot\Phi(p)=1$, deci

$$\Phi(p)=\frac{1}{p(p-1)^2}. \tag{24}$$

Fie $G(p)=\frac{e^{pt}}{p(p-1)^2}$; pentru $G$ avem polii $p=0$ (pol de ordinul 1) şi $p=1$ (pol de ordinul 2), deci

$$\begin{cases}\text{Rez }(g,0)=\lim\limits_{p\to0}\dfrac{e^{pt}}{(p-1)^2}=1\\[2ex] \text{Rez }(g,1)=\lim\limits_{p\to1}\left(\dfrac{e^{pt}}{p}\right)'=\lim\limits_{p\to1}\dfrac{te^{pt}\cdot p-e^{pt}}{p^2}=e^t(t-1).\end{cases}$$

Aplicând egalităţii (24) transformarea Laplace inversă, rezultă

$$\varphi(t)=\text{ Rez }(g,0)+\text{ Rez }(g,1)\quad\Rightarrow\quad\varphi(t)=1+e^t(t-1).$$

b) Folosind definiţia transformării Fourier, obţinem $\hat{f}(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cdot e^{i\xi x}dx$; rezultă

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi)&=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}e^{i\xi x}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(\frac{x^2}{2}-i\xi x)}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(\frac{x^2}{2}-ix\xi-\frac{\xi^2}{2}+\frac{\xi^2}{2})}dx\\ &=e^{-\frac{\xi^2}{2}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(\frac{x-i\xi}{\sqrt{2}})^2}dx=e^{-\frac{\xi^2}{2}}\cdot\sqrt{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy=\sqrt{2\pi}\cdot e^{-\frac{\xi^2}{2}},\end{aligned}$$

unde s-a folosit substituţia $y=\frac{x-i\xi}{\sqrt{2}}$ şi egalitatea $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy=\sqrt{\pi}$.

*Observaţie.* Dacă se foloseşte definiţia alternativă a transformării Fourier $\hat{f}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cdot e^{i\xi x}dx$, rezultă $\hat{f}(e^{-x^2/2})=e^{-\xi^2/2}$.

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
### Faza locală, anul II, profil electric, 2006-2007

**I.** a) Derivând ecuaţia $xy''-(x+z)y'+y=0$, rezultă $xy'''-(x+1)y''=0$. Notând $y''=z$, obţinem $xz'=(x+1)z\Rightarrow\frac{z'}{z}=1+\frac{1}{x}$. Deci

$$\ln|z|=x+\ln|x|+\ln C_1,\ C_1>0\Leftrightarrow\ln|z|=\ln|xe^xC_1|\Rightarrow z=\pm C_1xe^x,$$

şi deci se obţine ecuaţia diferenţială $y''=xe^xC_1,\ C_1\in\mathbb{R}$. Integrând rezultă

$$y' = C_1 \int xe^x dx + C_2 = C_1 e^x (x+1) + C_2$$

şi deci $y = C_1 e^x (x+2) + C_2 + C_3,\ C_1 > 0, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

b) $x^2 y'' - xy' + y = \ln x, x > 0$ este ecuaţie diferenţială de tip Euler, deci facem schimbarea de variabilă $y(x) = z(\ln x)$; obţinem

$$x^2 \left( z''(\ln x) \cdot \frac{1}{x^2} - z'(\ln x) \cdot \frac{1}{x^2} \right) - xz'(\ln x)\frac{1}{x} + z(\ln z) = xz''(\ln x) - 2z'(\ln x) + z(\ln x) = \ln x.$$

Notând $\ln x = t$, obţinem $z''(t) - 2z'(t) + z(t) = t$, ecuaţie diferenţială liniară cu coeficienţi constanţi de ordinul 2. Ecuaţia caracteristică asociată este:

$$r^2 - 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r-1)^2 = 0,$$

deci $r_1 = r_2 = 1$ iar quasipolinoamele asociate sunt $z_1(t) = e^t$ şi $z_2(t) = te^t$. Căutam în cele ce urmează o soluţie particulară de forma: $z_0(t) = C_1(t)e^t + C_2(t)te^t$. Înlocuind, rezultă sistemul liniar în necunoscutele ${C_1}'(t)$ şi ${C_2}'(t)$:

$$\begin{cases} C'_1(t)e^t + C'_2(t)te^t = 0 \\ C'_1(t)e^t + C'_2(t)te^t(t+1) = t. \end{cases}$$

Prin scădere obţinem: $C_2(t)e^t = t \Rightarrow {C_2}'(t) = te^{-t}$, deci

$$C_2(t) = \int te^t\, dt = -te^{-t} + \int e^{-t}\, dt = -te^{-t} - e^{-t} = -e^{-t}(t+1).$$

Înlocuind în prima ecuaţie, rezultă ${C_1}'(t)e^t + t^2 = 0 \Rightarrow {C_1}'(t) = -t^2 e^{-t}$, deci

$$\begin{aligned} C_1(t) &= \int -t^2 e^{-t}\, dt = t^2 e^{-t} - \int 2te^{-t}\, dt = t^2 e^{-t} - \int 2te^{-t}\, dt = \\ &= t^2 e^{-t} + 2te^{-t} - 2\int e^{-t}\, dt = t^2 e^{-t} + 2te^{-t} + 2e^{-t} = e^{-t}(t^2 + 2t + 2). \end{aligned}$$

Prin urmare $z_0(t) = t^2 + 2t + 2 - t^2 - t = t + 2$. Soluţia generală este

$$z(t) = k_1 e^t + k_2 te^t + t + 2,\ k_{1,2} \in \mathbb{R},$$

şi deci $y(x) = k_1 x + k_2 \ln x \cdot x + \ln x + 2,\ k_{1,2} \in \mathbb{R}$.

**II.** Sistemul $\begin{cases} x' = 2x + 2z \\ y' = 2x - 2z \\ z' = 2x - 2y \end{cases}$ se rescrie $X' = AX$, unde $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Aflăm valoriile proprii ale matricei $A$. Ecuaţia caracteristică asociată este:

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 2 \\ 2 & -\lambda & -2 \\ 2 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(8-\lambda^2) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{2, \pm 2\sqrt{2}\}.$$

Aflăm vectorii proprii asociaţi fiecărei valori proprii:

i) pentru $\lambda_1 = 2$, avem

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2c = 0 \\ a - b - c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = b \\ b \in \mathbb{R} \end{cases},$$

deci $(a,b,c)^t = b\underbrace{(1,1,0)}_{v_1}{}^t$.

ii) pentru $\lambda_2 = 2\sqrt{2}$, avem

$$\begin{pmatrix} 2-2\sqrt{2} & 0 & 2 \\ 2 & -2\sqrt{2} & -2 \\ 2 & -2 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (1-\sqrt{2})a + c = 0 \\ a - \sqrt{2}b - c = 0 \\ a - b - \sqrt{2}c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = (\sqrt{2}+1)b \\ c = b, \ b \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

deci $(a,b,c)^t = b\underbrace{(\sqrt{2}+1,1,1)}_{v_2}{}^t$.

iii) pentru $\lambda_3 = -2\sqrt{2}$, avem

$$\begin{pmatrix} 2+2\sqrt{2} & 0 & 2 \\ 2 & 2\sqrt{2} & -2 \\ 2 & -2 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (1+\sqrt{2})a + c = 0 \\ a + \sqrt{2}b - c = 0 \\ a - b + \sqrt{2}c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = (1-\sqrt{2})b \\ c = b, \ b \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

deci $(a,b,c)^t = b\underbrace{(1-\sqrt{2},1,1)}_{v_3}{}^t$. Deci soluţia generală a sistemului diferenţial omogen dat este:

$$X = C_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{2\sqrt{2}t}\begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{-2\sqrt{2}t}\begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

**III.** Fie $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $v(x,y) = \varphi(x^2 - y^2)$.

a) $v$ armonică d.n.d. $\Delta v = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$.

Notăm $t(x,y) = x^2 - y^2$ şi obţinem

$$4x^2\varphi''(t) + 2\varphi'(t) + 4y^2\varphi''(t) - 2\varphi'(t) = 0 \Leftrightarrow \varphi''(t)(4x^2+4y^2) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \varphi''(t) = 0 \Rightarrow \varphi'(t) = C_1 \Rightarrow \varphi(t) = C_1 t + C_2, \ C_{1,2} \in \mathbb{R} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v(x,y) = C_1(x^2 - y^2) + C_2, \ C_{1,2} \in \mathbb{R}.$$

b) $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Avem

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -2yC_1 + i2C_1 x.$$

Pentru $y = 0$, obţinem

$$f'(x) = 2iC_1 x \Rightarrow f(x) = 2iC_1\frac{x^2}{2} + C_2 = x^2 iC_1 + C_2.$$

Înlocuind apoi $x$ cu $z$, rezultă $f(z) = z^2 iC_1 + C_2, \ C_{1,2} \in \mathbb{C}$.

c) Folosind teorema fundamentală Cauchy, obţinem

$$\int_{|z|=1} \frac{(z^2 iC_1 + C_2)\sin z}{z^2}\,dz = \underbrace{\int_{|z|=1} iC_1 \sin z\,dz}_{=0(\text{T.fundam.Cauchy})} + \int_{|z|=1} C_2\frac{\sin z}{z^2}\,dz = C_2\int_{|z|=1}\frac{\sin z}{z^2}\,dz.$$

Pentru $g(z)=\dfrac{\sin z}{z^2}$, avem $\lim\limits_{z\to 0} g(z)=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}\dfrac{1}{z}=\infty$, deci $z=0$ este pol de ordinul 1. Prin urmare $\frac{\sin z}{z^2}=\frac{z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}\cdots}{z^2}=\frac{z}{z^2}-\frac{z}{3!}+\frac{z^3}{5!}+\ldots$, deci $c_{-1}=1$ şi deci $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{\sin z}{z^2}\,dz=1$. Rezultatul este $0+C_2=C_2$.

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
### Faza locală, anul II, profil mecanic, 2006-2007

**I.** a) Avem $\operatorname{Re} f(z)=e^x(x\cos y-y\sin y)$. Se observă uşor că $\operatorname{Re} f$ este functie armonică, deci

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial(\operatorname{Re} f)}{\partial x}-i\frac{\partial(\operatorname{Re} f)}{\partial y}= \\ &= e^x(x\cos y-y\sin y+\cos y)-ie^x(-x\sin y-\sin y-y\cos y). \end{aligned}$$

Pentru $y=0$ obţinem $f'(x)=e^x(x+1)$, deci $f(x)=e^x+C_1$ schimbând $x\to z$ rezultă $f(z)=ze^z+C_1$. Dar $f(0)=0$, deci $C_1=0\Rightarrow f(z)=ze^z$.

b) $\operatorname{Re} f=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. $\operatorname{Re} f$ trebuie sa fie armonică, deci $\Delta(\operatorname{Re} f)=0$. Notând $t(x,y)=\frac{y}{x}$, rezultă $\varphi''(t)\frac{y^2}{x^4}+\varphi'(t)\left(\frac{2y}{x^3}\right)+\varphi''(t)\left(\frac{1}{x^2}\right)=0$. Această ecuaţie se rescrie

$$\varphi''(t)(t^2+1)+2t\varphi'(t)=0\Leftrightarrow\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)}=-\frac{2t}{t^2+1}.$$

Integrând în ambii membri obţinem $\ln(\varphi'(t))=-\ln(t^2+1)\ln C_1,\ \ C_1>0$, deci $\varphi'(t)=\frac{C_1}{t^2+1}\Rightarrow\varphi(t)=C_1\operatorname{arctg} t+C_2$, şi deci

$$f'(z)=\frac{\partial(\operatorname{Re} f)}{\partial x}-i\frac{\partial(\operatorname{Re} f)}{\partial y}=C_1\frac{-y}{x^2+y^2}-iC_1\frac{x}{x^2+y^2},$$

iar pentru $y=0$ obţinem $f'(x)=-iC_1\frac{1}{x}\Rightarrow f(x)=iC_1\ln x+C_3$; schimbând $x\to z$ rezultă $f(z)=-iC_1\ln z+C_3,\ C_{1,3}\in\mathbb{C}$.

**II.** a) $f(z)=\frac{1}{z^2+z-6}=\frac{1}{(z+3)(z-2)}=\frac{A}{z+3}+\frac{B}{z-2}=-\frac{1}{5}\frac{1}{z+3}+\frac{1}{5}\frac{1}{z-2}$. Distingem următoarele cazuri:

i) Dacă $|z|<2$, atunci

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-2} &= \frac{-1}{2(1-\frac{z}{2})}=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+...+\frac{z^n}{2^n}+\ldots\right) \\ \frac{1}{z+3} &= \frac{1}{3(\frac{z}{3}+1)}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{z}{3}+\frac{z^2}{9}+...+\frac{(-1)^n z^n}{3^n}+\ldots\right). \end{aligned}$$

Rezultă

$$f(z)=-\frac{1}{15}\left(1-\frac{z}{3}+\frac{z^2}{9}+...+\frac{(-1)^n z^n+\ldots}{3^n}\right)-\frac{1}{10}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+...+\frac{z^n}{2^n}+\ldots\right).$$

ii) Dacă $2 < |z| < 3$, atunci $\dfrac{1}{z-2} = \dfrac{1}{z(1-\frac{2}{z})} = \dfrac{1}{z}\left(1 + \dfrac{2}{z} + \left(\dfrac{2}{z}\right)^2 + ... + \left(\dfrac{2}{z}\right)^n + \dots\right)$ şi $\dfrac{1}{z+3} = \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{z}{3} + \dfrac{z^2}{9} + ...\right)$. Rezultă

$$f(z) = -\frac{1}{15}\left(1 - \frac{z}{3} + \frac{z^2}{9} + ... + \frac{(-1)^n z^n}{3^n} + \dots\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + ... + \frac{2^n}{z^{n+1}} + \dots\right).$$

iii) Dacă $|z| > 3$, atunci

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + ... + \frac{2^n}{z^n} + \dots, \quad \frac{1}{z+3} = \frac{1}{z(1+\frac{3}{z})} = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{3}{z} + \left(\frac{3}{z}\right)^2 + ...\right).$$

Rezultă

$$f(z) = -\frac{1}{5}\left(\frac{1}{z} - \frac{3}{z^2} + \frac{9}{z^3} + ... + \frac{(-1)^n 3^n}{z^{n+1}} + ...\right) + \frac{1}{5}(\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + ... + \frac{2^n}{z^n} + ...).$$

iv) Dacă $|z-2| > 1$, atunci $\left|\frac{1}{z-2}\right| < 1$, iar $\frac{1}{z+3} = \frac{1}{(z-2)+5}$ şi deci apare discuţia:

iv.1) Dacă $1 < |z-2| < 5$, atunci $\frac{1}{z+3} = \frac{1}{5(\frac{z-2}{5}+1)} = \frac{1}{5} \cdot \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2)^n(-1)^n}{5^n}$ şi deci

$$f(z) = \frac{1}{5}\frac{1}{z-2} - \frac{1}{25} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-2)^n}{5^n}.$$

iv.2) Dacă $|z-2| > 5$, atunci

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{(z-2)(1+\frac{5}{z-2})} = \frac{1}{z-2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^n}{(z-2)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^n}{(z-2)^n}$$

şi deci $f(z) = \frac{1}{5}\frac{1}{z-2} - \frac{1}{5}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^n}{(z-2)^{n+1}}$.

b) Ecuaţia $\sin z = 2$ se rescrie $\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2$, deci $e^{iz} - e^{-iz} = 4i$. Notând $e^{iz} = t$, obţinem $t - \frac{1}{t} = 4i$, sau echivalent, $t^2 - 4it - 1 = 0$. Soluţiile ecuaţiei de gradul doi sunt $t_{1,2} = i(2 \pm \sqrt{3})$. Rezolvând ecuaţiile $e^{iz} = t_{1,2}$, obţinem

$$z \in \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i(2 \pm \sqrt{3}) \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

**III.** a) $I_1 = \displaystyle\int_{|z|=R} z^3 e^{\frac{1}{z-1}}\, dz$, $R > 0$, $R \neq 1$. Funcţia $g(z) = z^3 e^{\frac{1}{z-1}}$ are $z = 1$ punct singular esenţial, iar $e^{\frac{1}{z-1}} = 1 + \frac{1}{1!(z-1)} + ... + \frac{1}{n!(z-1)^n} + ...$, deci

$$\begin{aligned} z^3 e^{\frac{1}{z-1}} &= (z-1+1)^3 e^{\frac{1}{z-1}} = ((z-1)^3 + (z-1)^2 + 3(z-1) + 1)e^{\frac{1}{z-1}} = \\ &= ((z-1)^3 + (z-1)^2 + 3(z-1) + 1)\left(1 + \frac{1}{1!(z-1)} + ... + \frac{1}{n!(z-1)+} + ...\right), \end{aligned}$$

deci $c_{-1} = \frac{1}{4!} + 3\frac{1}{3!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{1!} = \frac{1}{24} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 1 = \frac{73}{24}$, de unde rezultă Rez $(g, 1) = \frac{73}{24}$.
Distingem cazurile:

i) Dacă $R < 1$ atunci $I_1 = 0$ (teorema fundamentală Cauchy);

ii) Dacă $R > 1$ atunci $I_1 = 2\pi i$ Rez $(g, 1) = 2\pi i \cdot \frac{73}{24} = \frac{73\pi i}{12}$.

b) $I_2 = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{1 - 2a\cos x + a^2}$ pentru $a \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 0, 1\}$. Observăm că $I_2$ este pară, deci $I_2 = \frac{1}{2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{1 - 2a\cos x + a^2}$. Notând $e^{ix} = z$ obţinem

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{1 - 2a\frac{z^2+1}{2z} + a^2} = \frac{1}{2i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{-az^2 + z(a^2+1) - a}.$$

Fie $g(z) = \frac{dz}{-az^2+z(a^2+1)-a}$. Funcţia $g$ are doi poli $z_1 = a$, iar Rez $(g, a) = \frac{1}{1-a^2}$ şi $z_2 = \frac{1}{a}$, iar Rez $(g, \frac{1}{a}) = \frac{1}{a^2-1}$. Distingem cazurile:

i) Dacă $|a| < 1$ atunci $z_1 \in Int(\gamma)$ şi $z_2 \in Ext(\gamma)$, deci

$$I_2 = \frac{1}{2i} \cdot 2\pi i \text{ Rez } (g, a) = \pi\frac{1}{1-a^2}.$$

ii) Dacă $|a| > 1$ atunci $z_1 \in Ext(\gamma)$ şi $z_2 \in Int(\gamma)$, deci

$$I_2 = \frac{1}{2i} \cdot 2\pi i \text{ Rez } (g, \tfrac{1}{a}) = \pi\frac{1}{a^2-1}.$$

**IV.** $\begin{cases} x' - 4x - y = -36t \\ y' + 2x - y = -2e^t \end{cases}$, unde $z(0) = 0$, $y(0) = 1$. Aplicăm transformarea Laplace şi obţinem

$$\begin{cases} pX(p) - 4X(p) - Y(p) = -36\dfrac{1}{p^2} \\ pY(p) - 1 + 2X(p) - Y(p) = -\dfrac{2}{p^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (p-4)X - Y = \dfrac{-36}{p^2} \\ (p-1)Y + 2X = 1 - \dfrac{2}{p-1} = \dfrac{p-3}{p-1}. \end{cases}$$

Discriminantul sistemului liniar obţinut este

$$\Delta = \begin{vmatrix} p-4 & -1 \\ 2 & p-1 \end{vmatrix} = (p-4)(p-1) + 2 = p^2 - 5p + 4 + 2 = p^2 - 5p + 6,$$

iar minorii asociaţi necunoscutelor sunt:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \frac{-36}{p^2} & -1 \\ \frac{p-3}{p-1} & p-1 \end{vmatrix} = \frac{-36(p-1)^2 + p}{p^2(p-1)}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} p-4 & \frac{-36}{p^2} \\ p-1 & \frac{p-3}{p-1} \end{vmatrix} = \frac{(p-3)(p-4)}{p-1} + \frac{72}{p^2},$$

deci

$$X(p) = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-36p^2 + 72p - 36 + p^3 - 3p^2}{p^2(p-1)(p-2)(p-3)} = \frac{p^3 - 39p^2 + 72p - 36}{p^2(p-1)(p-2)(p-3)}.$$

Realizăm descompunerea în fracţii simple

$$X = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p-1} + \frac{D}{p-2} + \frac{E}{p-3} \tag{25}$$

şi folosind expresia (25) a lui $X$ rezultă succesiv

$$\begin{cases} p=0 \Rightarrow & -36=-6B \Rightarrow B=6 \\ p=1 \Rightarrow & 1-39+72-36=2C \Rightarrow -2=2C \Rightarrow C=-1 \\ p=2 \Rightarrow & 8-39\cdot 4+72\cdot 2-36=4\cdot(-1)\,D \Rightarrow -40=-4D \Rightarrow D=10 \\ p=3 \Rightarrow & 27-39\cdot 9+72\cdot 3-36=18E \Rightarrow -144=18E \Rightarrow E=8 \\ p=-1 \Rightarrow & -40-72-36=-A+B-\dfrac{C}{2}+\dfrac{D}{-3}+\dfrac{E}{-4} \Rightarrow \\ & \Rightarrow A=148+6+\dfrac{1}{2}-\dfrac{10}{3}-2=\dfrac{895}{6}, \end{cases}$$

deci, aplicând relaţiei (25) transformarea Laplace inversă, rezultă

$$x(t)=A+B\cdot t+C\cdot e^t+D\cdot e^{2t}+E\cdot e^{3t}=\frac{895}{6}+6t-e^t+10e^{2t}+8e^{3t}.$$

Înlocuind $x$ în prima ecuaţie a sistemului, rezultă $y$.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza locală, anul II, profilele mecanic şi electric, 2007-2008

**I.** Folosind transformarea Laplace, obţinem

$$p^3\cdot Y(p)+\tfrac{241}{27}-3p\cdot Y(p)+2Y(p)=\mathcal{L}[x^2e^x](p)=\mathcal{L}[x^2](p-1)=\frac{2}{(p-1)^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (p^3-3p+2)\cdot Y(p)=\frac{2}{(p-1)^3}-\frac{241}{27},$$

deci $Y(p)=\frac{2}{(p-1)^5\cdot(p+2)}-\frac{241}{27}\cdot\frac{1}{(p-1)^2\cdot(p+2)}$. Funcţia $G_1(p)=\frac{2}{(p-1)^5\cdot(p+2)}\cdot e^{pt}$ are polii $p_1=1$ (pol de ordinul 5) şi $p_2=-2$ (pol de ordinul 1), deci

$$\begin{cases} \text{Rez}\,(G_1,-2)=\lim\limits_{p\to-2}\dfrac{2}{(p-1)^2}\cdot e^{pt}=-\dfrac{2}{3^5}\cdot e^{-2t} \\ \text{Rez}\,(G_1,1)=\dfrac{1}{4!}\lim\limits_{p\to1}\left(\dfrac{2e^{pt}}{p+2}\right)^{(4)}=\dfrac{1}{12}\cdot e^t\left(\dfrac{t^4}{3}-\dfrac{4t^2}{9}+\dfrac{4t^2}{9}-\dfrac{8t}{27}+\dfrac{8}{81}\right). \end{cases}$$

Funcţia $G_2(p)=\frac{1}{(p-1)^2\cdot(p+2)}\cdot e^{pt}$ are polii $p_1=1$ (pol de ordinul 2) şi $p_2=-2$ (pol de ordinul 1), deci

$$\begin{cases} \text{Rez}\,(G_2,-2)=\lim\limits_{p\to-2}\dfrac{1}{(p-1)^2}\cdot e^{pt}=\dfrac{e^{-2t}}{9} \\ \text{Rez}\,(G_2,1)=\lim\limits_{p\to1}(\dfrac{e^{pt}}{p+2})'=e^t\cdot t\cdot\dfrac{1}{3}-e^t\cdot\dfrac{1}{9}=e^t(\dfrac{t}{3}-\dfrac{1}{9}), \end{cases}$$

deci

$$\begin{aligned} y(t) &= \text{Rez}\,(G_1,-2)+\text{Rez}\,(G_1,1)-\frac{241}{27}[\text{Rez}\,(G_2,-2)+\text{Rez}\,(G_2,1)]=\\ &=\frac{25}{243}e^{-2t}+e^t\left(\frac{t^4}{36}-\frac{t^3}{27}+\frac{t^2}{27}-\frac{972}{12\cdot 27}t-\frac{956}{81\cdot 12}\right). \end{aligned}$$

*Observaţie.* Exerciţiul se poate rezolva şi folosind teoria de la ecuaţiile diferenţiale de ordinul 2, cu coeficienţi constanţi, neomogene.

**II.** Sistemul se rescrie $Y'=AY$, $A=\begin{pmatrix}4&-2&2\\-5&7&-5\\-6&6&-4\end{pmatrix}$; $Y(0)=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$. Rezolvăm ecuaţia caracteristică asociată matricii $A$; obţinem: $\det(A-\lambda I_3)=0 \Leftrightarrow (2-\lambda)^2\cdot(3-\lambda)=0$, deci valorile proprii sunt $\lambda_1=2$ $(m_{\lambda_1}=2)$ şi $\lambda_2=3$ $(m_{\lambda_2}=1)$. Pentru a afla subspaţiile proprii asociate valorilor proprii, rezolvăm sistemele caracteristice:

• pentru $\lambda_1=2$, avem $\begin{pmatrix}2&-2&2\\-5&5&-5\\-6&6&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow b=a+c$, deci $(a,b,c)=a(1,1,0)+c(0,1,1)$, $a,c\in\mathbb{R}$ şi deci obţinem doi vectori proprii liniar independenţi $v_1=(0,1,1)^t$ şi $v_2=(1,1,0)^t$;

• pentru $\lambda_2=3$, avem $\begin{pmatrix}1&-2&2\\-5&4&-5\\-6&6&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}3a+c=0\\5a+2b=0\end{cases}$, deci $(a,b,c)=\dfrac{a}{2}(2,-5,-6)$, $a\in\mathbb{R}$, deci obţinem un vector propriu liniar independent, $v_3=(2,-5,-6)^t$. Soluţia generală a sistemului este

$$Y(x)=C_1\cdot e^{2x}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+C_2\cdot e^{2x}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+C_3\cdot e^{3x}\begin{pmatrix}2\\-5\\-6\end{pmatrix},$$

soluţie care se rescrie

$$Y(x)=C_1\begin{pmatrix}0\\e^{2x}\\e^{2x}\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}e^{2x}\\e^{2x}\\0\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}2e^{3x}\\-5e^{3x}\\-6e^{3x}\end{pmatrix},\quad C_1,C_2,C_3\in\mathbb{R}. \tag{26}$$

Impunând condiţia iniţială $Y(0)=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ rezultă $\begin{cases}C_2+2C_3=1\\C_1+C_2-5C_3=0\\C_1-6C_3=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_3=0\\C_2=1\\C_1=-1\end{cases}$

care, prin inlocuire în (26), conduc la soluţia $Y(x)=\begin{pmatrix}e^{2x}\\0\\-e^{2x}\end{pmatrix}$.

*Observaţie.* Sistemul se poate rezolva şi folosind transformarea Laplace.

**III.** Notăm $v(x,y)=\text{Im}\,(f(z))=\ln(x^2+y^2)+x-2y$. Verificăm armonicitatea funcţiei $v$; obţinem:

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}+1;\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}-2;\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2};\quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2};$$

rezultă $\Delta v = 0$ deci $v$ armonică. Atunci

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2y}{x^2+y^2} - 2 + i(\frac{2x}{x^2+y^2} + 1).$$

Pentru $y = 0$ avem $f'(x) = i(\frac{2}{x} + 1)$, deci $f(x) = 2i \cdot \ln(x) + ix + C$, $C \in \mathbb{R}$. Substituind $x \to z$, rezultă $f(z) = 2i \cdot \ln(z) + iz + C$, $C \in \mathbb{C}$. Determinăm constanta $C$: $f(1+i) = -i - 3 + 2i \cdot \ln\sqrt{2} \Rightarrow 2i \cdot \ln(1+i) + i - 1 + C = -i - 3 + 2i \cdot \ln\sqrt{2}$. Dar $\ln(1+i) = \ln\sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, deci obţinem

$$2i \cdot \ln\sqrt{2} - \tfrac{\pi}{2} - 4k\pi + i - 1 + C = -i - 3 + 2i \cdot \ln\sqrt{2},$$

de unde rezultă $C = -2i - 2 + \frac{\pi}{2} + 4k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, şi deci

$$f(z) = 2i(\ln z - 1) + iz - \tfrac{\pi}{2} + 4k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**IV.** $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{4 - \sin^2 x}$. Notând $e^{ix} = z$, se observă că

$$\begin{aligned} I &= \int_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{4 - (\frac{z^2-1}{2iz})^2} = \int_{|z|=1} \frac{\frac{dx}{iz}}{(2 - \frac{z^2-1}{2iz})(2 + \frac{z^2-1}{2iz})} = \\ &= \int_{|z|=1} \frac{4iz}{(-z^2+4iz+1)(z^2+4iz-1)} dz. \end{aligned}$$

Căutăm singularităţile funcţiei $g(z) = \frac{4iz}{(-z^2+4iz+1)(z^2+4iz-1)}$. Avem

$$-z^2 + 4iz + 1 = 0 \Leftrightarrow z \in \left\{i(2 \pm \sqrt{3})\right\}, \quad z^2 + 4iz - 1 = 0 \Leftrightarrow z \in \left\{i(\pm\sqrt{3} - 2)\right\}.$$

Se observă că $|z_1| = 2 - \sqrt{3} < 1$; $|z_2| = 2 + \sqrt{3} > 1$; $|z_3| = 2 - \sqrt{3} < 1$; $|z_4| = 2 + \sqrt{3} > 1$; deci $z_1$ şi $z_3$ sunt poli de ordinul 1 în interiorul domeniului $|z| = 1$. Reziduurile funcţiei $g$ în cei doi poli sunt:

$$\begin{cases} \text{Rez}\ (g, z_1) = \displaystyle\lim_{z \to z_1} \frac{4iz(z - z_1)}{-(z - z_1)(z - z_2)(z^2 + 4iz - 1)} = \frac{4iz_1}{(z_2 - z_1)(z_1^2 + 4iz_1 - 1)} = \frac{1}{4i\sqrt{3}} \\ \text{Rez}\ (g, z_3) = \displaystyle\lim_{z \to z_3} \frac{4iz(z - z_3)}{(-z^2 + 4iz + 1)(z - z_3)(z - z_4)} = \frac{4iz_3}{(-z_3^2 + 4iz_3 + 1)(z_3 - z_4)} = \frac{1}{4i\sqrt{3}}, \end{cases}$$

deci

$$I = 2\pi i(\text{ Rez}\ (g, z_1) + \text{ Rez}\ (g, z_2)) = 2\pi i\left(\frac{1}{4i\sqrt{3}} + \frac{1}{4i\sqrt{3}}\right) = 2\pi i \cdot \frac{2}{4i\sqrt{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}.$$

**V.** $J = \displaystyle\int_{|z|=R} z^2 \cdot e^{\frac{1}{z-1}} dz$, $R > 0, R \neq 1$. Fie $g(z) = z^2 \cdot e^{\frac{1}{z-1}}$. Se observă că $z = 1$ este punct singular esenţial pentru $g$. Atunci Rez $(g, 1) = c_{-1}$ = coeficientul lui $\frac{1}{z-1}$ din dezvoltarea în serie Laurent a funcţiei $g$ în jurul lui $z = 1$. Folosind dezvoltarea

$$e^{\frac{1}{z-1}} = 1 + \frac{1}{1!(z-1)} + \frac{1}{2!(z-1)^2} + \cdots + \frac{1}{n!(z-1)^n} + \cdots,$$

obţinem

$$\begin{aligned} & z^2 e^{\frac{1}{z-1}} = [(z - 1 + 1)^2] e^{\frac{1}{z-1}} = [(z-1)^2 + 2(z-1) + 1] e^{\frac{1}{z-1}} = \\ & = [(z-1)^2 + 2(z-1) + 1]\Big(1 + \tfrac{1}{1!(z-1)} + \tfrac{1}{2!(z-1)^2} + \tfrac{1}{3!(z-1)^3} + \cdots + \tfrac{1}{n!(z-1)^n} + \cdots\Big), \end{aligned}$$

deci $c_{-1} = \frac{1}{3!} + \frac{2}{2!} + \frac{1}{1!} = \frac{1}{6} + 2 = \frac{13}{6}$.

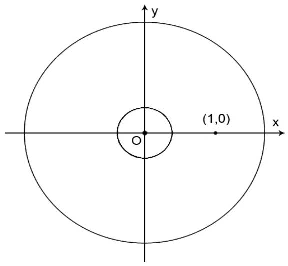


**Figura 6.**

Distingem două cazuri (vezi figura):

i) Dacă $R \in (0,1)$, atunci $J = 0$ (teorema fundamentală a lui Cauchy);
ii) Dacă $R > 1$, atunci $J = 2\pi i \operatorname{Rez}(g,1) = 2\pi i \cdot \frac{13}{6} = \frac{13\pi i}{3}$.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza locală, anul II, profil electric, 2008-2009

**I.** Valorile proprii ale matricii $A$ se obţin rezolvând ecuaţia caracteristică

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow -\lambda(\lambda+3)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{-3, 0\}.$$

Atunci soluţia sistemului este de forma:

$$Y = (m+nt)e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + e^{\lambda_2 t}\begin{pmatrix} d \\ r \\ s \end{pmatrix} = (m+nt)e^{-3t}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ r \\ s \end{pmatrix}.$$

Punând condiţia $Y' = AY$, rezultă $n = 0$, $c = -a-b$, $r = s = d$, deci fără a reduce generalitatea, pentru $a = 1$ obţinem

$$Y = e^{-3t}\begin{pmatrix} a \\ b \\ -a-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ d \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{-3t}+d \\ be^{-3t}+d \\ (-a-b)e^{-3t}+d \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Impunând condiţia iniţială $y(0) = (0,-1,1)^t$, rezultă

$$\begin{cases} a+d=0 \\ b+d=-1 \\ -a-b+d=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-1 \\ d=0 \end{cases} \Rightarrow Y = e^{-3t}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -e^{-3t} \\ e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

*Metoda 2.* Ca la metoda anterioară, aflăm $\sigma(A) = \{0,-3\}$. Pentru $\lambda_1 = 0$ ($\mu_1 = 2$), obţinem sistemul caracteristic

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a+b+c=0 \\ a-2b+c=0 \\ a+b-2c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ c \in \mathbb{R},$$

deci alegem $v_1 = (1, 1, 1)^t$. Pentru $\lambda_2 = 3$ ($\mu_2 = 1$), obţinem sistemul caracteristic

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a + b + c = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ a, b \in \mathbb{R},$$

deci alegem $v_2$ şi $v_3$ liniar independenţi, spre exemplu $v_2 = (1, 0, -1)^t$, $v_3 = (0, 1, -1)^t$. Atunci

$$Y = ce^{0t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + ae^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + be^{-3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ c, a, b \in \mathbb{R}.$$

În continuare se procedează ca în metoda anterioară.

*Metoda 3.* Notând $Y(t) = (x(t), y(t), z(t))^t$, sistemul se rescrie

$$\begin{cases} x' = -2x + y + z \\ y' = x - 2y + z \\ z' = x + y - 2z \end{cases} \Rightarrow x' + y' + z' = 0 \Rightarrow x + y + z = k \Rightarrow \begin{cases} x' = -3x + k \\ y' = -3y + k \\ z' = -3z + k. \end{cases}$$

Rezolvăm ecuaţia diferenţială liniară $x' = -3x + k$. Soluţia ecuaţiei omogene asociate $x' = -3x$ este $x = ae^{-3t}$, iar o soluţie particulară $x_P = a(t)e^{-3t}$ va satisface ecuaţia neomogenă doar dacă $a'(t)e^{-3t} = k \Leftrightarrow a'(t) = ke^{3t} \Rightarrow (t) = \frac{ke^{3t}}{3} + m$. Alegem $m = 0$, deci $x_P = \frac{k}{3}$ şi deci $x = ae^{-3t} + \frac{k}{3}$. Analog $y = be^{-3t} + \frac{k}{3}$, $z = ce^{-3t} + \frac{k}{3}$.

Înlocuind în prima ecuaţie, rezultă $a + b + c = 0$, şi deci notând $d = \frac{k}{3}$, avem

$$Y(t) = (ae^{-3t} + d, be^{-3t} + d, (-a - b)e^{-3t} + d),$$

deci soluţia (27). Rezolvarea continuă ca în metoda 1.

**II.** b) Rezolvăm prin reducere la absurd. Presupunem că există o soluţie a ecuaţiei date, care admite un maxim interior pozitiv. Atunci există $x_0 \in (a, b)$, astfel încât $y(x_0) > 0$; $y'(x_0) = 0$; $y''(x_0) < 0$, deci pentru $x = x_0$ avem

$$r(x_0, y'(x_0))y''(x_0) + p(x_0, y'(x_0)) \cdot y'(x_0) = q(x_0, y'(x_0))y(x_0),$$

şi deci $r(x_0, 0) \cdot y''(x_0) = q(x_0, 0) \cdot y(x_0)$, deci

$$\frac{r(x_0, 0)}{q(x_0, 0)} = \frac{y(x_0)}{y''(x_0)} < 0. \tag{28}$$

Pe de altă parte, din ipoteză, $q(x_0, 0) > 0$; $r(x_0, 0) \geq 0$, deci

$$\frac{r(x_0, 0)}{q(x_0, 0)} \geq 0. \tag{29}$$

Din (28) şi (29) rezultă contradicţia. Analog se tratează cazul minimului interior negativ.

**III.** Restrângând pătratele, ecuaţia cercului se rescrie

$\Gamma : x^2 + y^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \Gamma : (x + 1)^2 + y^2 = 1$. Fie $g(z) = z^2 e^{\frac{2z}{z+1}}$.

Rezultă că $z=-1$ este punct singular esenţial şi $z=-1$ se află în interiorul drumului $\Gamma$, deci $\displaystyle\int_\Gamma g(z)dz = 2\pi i\cdot \text{Rez}\ (g,-1)$. Dar

$$\begin{aligned} g(z) &= z^2 e^{\frac{2z}{z+1}} = (z+1-1)^2 e^{\frac{2(z+1-1)}{z+1}} = [(z+1)^2-2(z+1)+1]e^2\cdot e^{-\frac{2}{z+1}} = \\ &= e^2[(z+1)^2-2(z+1)+1]\left[1+\frac{-2}{1!(z+1)}+\frac{(-2)^2}{2!(z+1)^2}+\frac{(-2)^3}{3!(z+1)^3}+\cdots\right], \end{aligned}$$

deci $\text{Rez}\ (g,-1) = e^2\left(-\frac{8}{3!}-\frac{8}{2!}-\frac{2}{1!}\right) = -e^2\cdot\frac{22}{3}$. Rezultă $\displaystyle\int_\Gamma g(z)dz = -\frac{44\pi i e^2}{3}$.

**IV.** a) Notăm $X = Ref = \varphi(t)$, $t=\frac{x^2+y^2}{x}$. Pentru a putea obţine $f$ olomorfă cu $Ref = X$ dat, impunem condiţia de armonicitate: $\Delta x = \frac{\partial^2 x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial y^2} = 0$. Avem

$$\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial x} = \varphi'(t)\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2}; \qquad \frac{\partial x}{\partial y} = \varphi'(t)\cdot\frac{2y}{x}; \\ &\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} = \varphi''(t)\cdot\left(\frac{x^2-y^2}{x^2}\right)^2+\varphi'(t)\cdot\frac{2y^2}{x^3};\ \ \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = \varphi''(t)\cdot\frac{4y^2}{x^2}+\varphi'(t)\cdot\frac{2}{x}. \end{aligned}$$

Deci

$$\begin{aligned} \Delta x = 0 \quad &\Leftrightarrow \varphi''(t)\cdot\frac{(x^2+y^2)^2}{x^4}+\varphi'(t)\cdot\frac{2}{x}\cdot\frac{x^2+y^2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow t\cdot\varphi''(t)+\varphi'(t)\cdot 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \tfrac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)} = -\tfrac{2}{t} \Rightarrow \ln(\varphi'(t)) = -2\ln t+\ln C_1 \Rightarrow \ln\varphi' = \ln\left(\frac{C_1}{t^2}\right) \\ &\Rightarrow \varphi'(t) = \frac{C_1}{t^2} \Rightarrow \varphi(t) = -\frac{C_1}{t}+C_2. \end{aligned}$$

Rezultă $X = -\frac{C_1 x}{x^2+y^2}+C_2$. Avem

$$f'(z) = \frac{\partial X}{\partial x} - i\frac{\partial X}{\partial y} = C_1\cdot\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} - i\cdot\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}C_1.$$

Pentru $y=0$, rezultă

$$f'(x) = C_1\cdot\frac{1}{x^2} \Rightarrow f(x) = -\frac{C_1}{x}+C_3 \Rightarrow f(z) = -\frac{C_1}{z}+C_3;\ C_1\in\mathbb{R},\ C_3\in\mathbb{C}.$$

b) Fie $g(z) = \left(-\frac{C_1}{z}+C_3\right)^3\cdot\sin z = \left(-\frac{C_1^3}{z^3}+3\frac{C_1^2}{z^2}C_3-3\frac{C_1}{z}C_3^2+C_3^3\right)\cdot\sin z$. Deci $z=0$ este punct singular esenţial pentru $g$ şi rezultă

$$g(z) = \left(-\frac{C_1^3}{z^3}+3\frac{C_1^2}{z^2}C_3-3\frac{C_1}{z}C_3^2+C_3^3\right)\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right),$$

deci $\text{Rez}\ (g,0) = 3C_1^2C_3$ şi prin urmare $\displaystyle\int_{|z|=R} g(z)dz = 6\pi i C_1^2 C_3$.

**V.** Efectuăm schimbarea de variabilă $e^{ix} = z$ şi obţinem

$$I = \int_{|z|=1} \frac{1}{\left(3 + \frac{z^2+1}{2z}\right)^2} \cdot \frac{dz}{iz} = \frac{4}{i} \int_{|z|=1} \frac{z}{\left(z^2 + 6z + 1\right)^2} dz.$$

Fie $g(z) = \frac{z}{(z^2+6z+1)^2}$. Atunci $z_1 = -3 + 2\sqrt{2}$ şi $z_2 = -3 - 2\sqrt{2}$ sunt poli de ordinul 2 pentru $g$, dar doar $z_1$ se află în interiorul drumului $|z| = 1$. Avem

$$\text{Rez}\,(g, z_1) = \lim_{z \to z_1} \left[ (z - z_1)^2 \cdot \frac{z^2}{(z - z_1)^2 (z - z_2)^2} \right]' = \frac{-z_1 - z_2}{(z_1 - z_2)^3} = \frac{3}{64\sqrt{2}},$$

deci $I = \frac{4}{i} \cdot 2\pi i \cdot \frac{3}{64\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{8\sqrt{2}}$.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ”TRAIAN LALESCU”
Faza locală, anul II, profil mecanic, 2008-2009

**I.** a) şi b) coincid cu subiectul **IV** punctul a) de la profilul electric.

**II.** a) Funcţia $f$ se rescrie:

$$f(z) = (z-1)^3 \cdot e^{\frac{1}{z-1}} = (z-1)^3 \cdot \left( 1 + \frac{1}{1!(z-1)} + \frac{1}{2!(z-1)^2} + \cdots + \frac{1}{n!(z-1)^n} + \cdots \right).$$

Atunci $\text{Rez}\,(f, 1) = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$.

b) $\sin z = i \Leftrightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = i \Leftrightarrow e^{iz} - e^{-iz} = -2$. Notăm $e^{iz} = a \Rightarrow a - \frac{1}{a} = -2 \Leftrightarrow a^2 + 2a - 1 = 0$ şi obţinem $\Delta = 4 + 4 = 8 \Rightarrow a_1 = \frac{-2+2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} - 1,\ a_2 = -\sqrt{2} - 1$; atunci $e^{iz} = a_1 = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow iz = \ln(\sqrt{2} - 1) = \ln(\sqrt{2} - 1) + i \cdot 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, deci $z = -i \ln(\sqrt{2} - 1) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Analog se tratează cazul $e^{iz} = a_2$.

**III.** Efectuăm schimbarea de variabilă $e^{ix} = z$; rezultă

$$I_n = \int_{|z|=1} \frac{(1 - a^2)z^n}{1 - 2a \cdot \frac{z^2+1}{2z} + a^2} \cdot \frac{dz}{iz} = \frac{1 - a^2}{i} \int_{|z|=1} \frac{z^n}{-az^2 + z(a^2 + 1) - a} dz.$$

Fie $g(z) = \frac{z^n}{-az^2+z(a^2+1)-a}$. Dacă $a = 0$, atunci $g(z) = \frac{z^n}{z} = z^{n-1}$ şi distingem cazurile:

- pentru $n \geq 1 \Rightarrow I_n = 0$;
- pentru $n = 0 \Rightarrow g(z) = \frac{1}{z} \Rightarrow \text{Rez}\,(g, 0) = 1 \Rightarrow I_0 = \frac{1}{i} \cdot 2\pi i \cdot 1 = 2\pi$.

Dacă $a \neq 0$, atunci $-az^2 + z(a^2 + 1) - a = 0$, deci $z_1 = \frac{1}{a}$ şi $z_2 = a$ sunt poli de ordinul 1. Distingem cazurile:

- dacă $|a| < 1$, atunci $z_2 \in Int(|z| = 1) \Rightarrow I_n = \frac{1-a^2}{i} \cdot 2\pi i \cdot \text{Rez}\,(g, a)$; dar

$$\text{Rez}\,(g, a) = \lim_{z \to a} (z-a) \frac{z^n}{-a(z - a)(z - \frac{1}{a})} = \frac{a^n}{1 - a^2} \Rightarrow I_n = \frac{1 - a^2}{i} \cdot 2\pi i \cdot \frac{a^n}{1 - a^2} = 2\pi a^n;$$

- dacă $|a| > 1$, atunci $z_1 \in Int(|z| = 1) \Rightarrow I_n = \frac{1-a^2}{i} \cdot 2\pi i \cdot \text{Rez}\,(g; 1/a)$; dar
$$\text{Rez}\left(g, \frac{1}{a}\right) = \lim_{z \to \frac{1}{a}} \left(z - \frac{1}{a}\right) \cdot \frac{z^n}{-a\,(z-a)\left(z - \frac{1}{a}\right)} = \frac{\frac{1}{a^n}}{-a\left(\frac{1}{a} - a\right)} = \frac{1}{a^n\,(a^2-1)},$$
şi rezultă $I_n = \left(1 - a^2\right) \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{a^n(a^2-1)} = -\frac{2\pi}{a^n}$;
- cazul $|a| = 1$ este exclus din ipoteză.

**IV.** Avem sistemul diferenţial $\begin{cases} x' + y = t \\ x + y' = 1 \end{cases}$. Aplicăm transformarea Laplace sistemului şi notăm $\mathcal{L}[x(t)](p) = X(p)$, $\mathcal{L}[y(t)](p) = Y(p)$. Obţinem
$$\begin{cases} pX(p) - 1 + Y(p) = \dfrac{1}{p^2} \\[2mm] X(p) + pY(p) + 1 = \dfrac{1}{p} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} pX(p) + Y(p) = \dfrac{p^2+1}{p^2} \\[2mm] X(p) + pY(p) = \dfrac{1-p}{p}. \end{cases}$$
Reducem $Y(p)$ şi rezultă $(p^2-1)X(p) = \dfrac{p^2+1}{p} - \dfrac{1-p}{p} \Rightarrow (p^2-1)X(p) = p+1$, deci $X(p) = \frac{p+1}{p^2-1} = \frac{1}{p-1} \Rightarrow x(t) = e^t$. Folosind prima ecuaţie a sistemului, deducem $e^t + y = t \Rightarrow y = t - e^t$, deci soluţia este $x(t) = e^t$, $y(t) = t - e^t$.

*Metoda 2.* Sistemul se rescrie
$$\underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}_{X'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} + \underbrace{\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}}_{b}.$$
Soluţia generală a sistemului omogen asociat $X_0{}' = AX_0$ este $X_0(t) = e^{At} \cdot k$, $k \in \mathbb{R}^2$. Pentru $A$ obţinem valorile proprii $\{\pm 1\}$ şi baza diagonalizatoare $\left\{v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right\}$. Deoarece $C^{-1}AC = D$, unde $C = [v_1, v_2] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, rezultă $A = CDC^{-1} \Rightarrow At = C\,(Dt)\,C^{-1}$, deci
$$\begin{aligned} X_0 &= e^{At} = Ce^{Dt}C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} e^t + e^{-t} & -e^t + e^{-t} \\ -e^t + e^{-t} & e^t + e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch}\, t & -\text{sh}\, t \\ -\text{sh}\, t & \text{ch}\, t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
Pentru $k = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, obţinem $X_0 = k_1 \begin{pmatrix} \text{ch}\, t \\ -\text{sh}\, t \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -\text{sh}\, t \\ \text{ch}\, t \end{pmatrix}$. Acelaşi rezultat se obţine şi sub forma combinaţiilor liniare,
$$X_0 = \alpha e^{\lambda_1 t} v_1 + \beta e^{\lambda_2 t} v_2 = \alpha e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
de unde obţinem, pentru $\alpha = \frac{k_1 - k_2}{2}$, $\beta = \frac{k_1 + k_2}{2}$ rezultatul de sus.

Pentru a afla soluţia sistemului neomogen dat, aplicăm metoda variaţiei constantelor. Înlocuind în sistem $X_P(t) = e^{At} \cdot k(t)$, obţinem $e^{At} \cdot k'(t) = b(t)$, deci
$$k'(t) = e^{-At}b(t) = (e^{At})^{-1} \cdot b(t) = \begin{pmatrix} \text{ch}\, t & \text{sh}\, t \\ \text{sh}\, t & \text{ch}\, t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \cdot \text{ch}\, t + \text{sh}\, t \\ t \cdot \text{sh}\, t + \text{ch}\, t \end{pmatrix},$$

şi prin urmare

$$k(t) = \begin{pmatrix} t \cdot \text{sh}\, t \\ t \cdot \text{ch}\, t \end{pmatrix} \Rightarrow X_P(t) = e^{At}k(t) = \begin{pmatrix} \text{ch}\, t & -\text{sh}\, t \\ -\text{sh}\, t & \text{ch}\, t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \cdot \text{sh}\, t \\ t \cdot \text{ch}\, t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}.$$

Rezultă soluţia generală a sistemului,

$$X(t) = X_0(t) + X_P(t) = k_1 \begin{pmatrix} \text{ch}\, t \\ -\text{sh}\, t \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -\text{sh}\, t \\ \text{ch}\, t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix},$$

deci $X(t) = \begin{cases} x(t) = k_1 \cdot \text{ch}\, t - k_2 \cdot \text{sh}\, t \\ y(t) = -k_1 \cdot \text{ch}\, t + k_2 \cdot \text{sh}\, t + t \end{cases}$. Folosind condiţiile iniţiale, obţinem

$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = \text{ch}\, t + \text{sh}\, t = e^t \\ y(t) = -\text{sh}\, t - \text{ch}\, t + t = t - e^t. \end{cases}$$

*Metoda 3.* Eliminăm $y$ din sistem. Derivăm prima ecuaţie şi scădem din ecuaţia rezultată ecuaţia a doua. Obţinem $x'' - x = 0$. Ecuaţia caracteristică asociată $r^2 - 1 = 0$ are rădăcinile $\{\pm 1\}$ cu quasipolinoamele asociate $\{e^{\pm t}\}$, deci soluţia acestei ecuaţii este $x(t) = ae^t + be^{-t}$. Înlocuind în a doua ecuaţie a sistemului, rezultă $y'(t) = 1 - (ae^t + be^{-t}) \Rightarrow y(t) = t - ae^t + be^{-t}$. Condiţiile iniţiale $x(0) = 1$, $y(0) = -1$ conduc la sistemul liniar

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ -a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = e^t \\ y(t) = t - e^t. \end{cases}$$

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
### Faza locală, anul II, profil electric, 2009-2010

**I.** Ecuaţia algebrică $r^3 + r^2 + 2r = 0$ are soluţiile $r_1 = 0, r_2 = 1, r_3 = -2$, de unde soluţia ecuaţiei omogene este $\bar{y}(x) = c_1 + c_2 \cdot e^x + c_3 \cdot e^{-x}$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. Pentru determinarea soluţiei particulare, folosim metoda variaţiei constantelor, astfel căutăm soluţia $y_p(x) = c_1(x) + c_2(x) \cdot e^x + c_3(x) \cdot e^{-x}$, unde funcţiile $c_i(x)$ se determină rezolvând sistemul

$$\begin{cases} {c_1}'(x)e^x + & {c_2}'(x)e^{-2x} + {c_3}'(x)e^{-2x} & = 0 \\ & {c_2}'(x)e^x - {c_3}'(x)e^{-2x} & = 0 \\ & {c_2}'(x)e^x + 4{c_3}'(x)e^{-2x} & = \ln(e^x + 1) \end{cases}$$

Obţinem

$${c_3}'(x) = \frac{1}{6}e^x \ln(1 + e^x), \quad {c_2}'(x) = \frac{1}{3}e^{-x} \ln(e^x + 1) \quad {c_1}'(x) = -\frac{1}{2} \ln(1 + e^x).$$

Pe rând, rezultă

$$\begin{aligned}
c_3(x) &= \frac{1}{6}\int e^{2x}\ln(1+e^x)\,dx \overset{\mathrm{e^x=t}}{=} \frac{1}{6}\int t\ln(t+1)\,dt \overset{\text{prin părţi}}{=} \\
&= \frac{t^2-6}{12}\ln(t+1) - \frac{1}{4}(t-1)^2 = \frac{e^{2x}-6}{12}\ln(e^x+1) - \frac{1}{4}(e^x-1)^2, \\
c_2(x) &= \frac{1}{3}\int e^{-x}\ln(e^x+1), dx = \frac{1}{3}\int e^{-x}(\ln(e^{-x}+1)+1)dx = \\
&= \tfrac{1}{3}\int e^{-x}\ln(e^{-x}+1)\,dx + \int xe^{-x}\,dx = \\
&= \frac{1}{3}(e^{-x}+1-e^{-x}\ln(e^{-x}+1)) + \frac{1}{3}e^{-x}(x+1),
\end{aligned}$$

$$c_1(x) = -\tfrac{1}{2}\int \ln(1+e^x)\,dx \overset{\mathrm{e^x=t}}{=} -\frac{1}{2}\int \frac{\ln(t+1)}{t}\,dt$$

şi dezvoltând în serie Taylor în jurul lui $t=0$ şi apoi integrând, obţinem

$$c_1(x) = -\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}\cdot e^{x\cdot(n+1)}.$$

Soluţia ecuaţiei diferenţiale este

$$\begin{aligned}
y(x) = \quad & C_1 + C_2e^x + C_3e^{-2x} - \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}e^{x(n+1)} - \frac{1}{4}e^{-2x}(e^x-1)^2 + \\
& + \frac{1}{3}(2+x+e^x-\ln(e^{-x}+1)) + \frac{1-6e^{-2x}}{12}\ln(e^x+1).
\end{aligned}$$

Impunând condiţiile Cauchy, se determină constantele $C_1, C_2, C_3$.

**II.** Notăm Re $(f(x)) = u(x,y)$. Impunem condiţia ca funcţia $u(x,y)$ să fie armonică. Dacă $t = \frac{x^2+y^2}{x}$, din armonicitate obţinem $\varphi''(t)t^2 + \varphi''(t)2t = 0$, de unde $\varphi(t) = \dfrac{-C_1}{t} + C_2,\ \ C_{1,2}\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{C_1(x^2-y^2)}{(x^2-y^2)^2} - i\frac{2yC_1}{(x^2-y^2)^2}, \\
f'(x) &= \frac{C_1}{x^2} \Rightarrow f(x) = \frac{-C_1}{x} + C_3,\ \ C_3\in\mathbb{R}, \\
f(z) &= \frac{C_1}{z} + C_3,\ \ C_{1,3}\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

**III.** a) Folosind formula Euler, avem $\operatorname{tg}(z) = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{i(e^{iz}-e^{-iz})} = \dfrac{5i}{3}$. Notând $e^{iz}=t$, obţinem ecuaţia $8t^2+2=0$ de unde $t=\pm\frac{i}{2}$. Rezolvând ecuaţiile $e^{iz}=\pm\frac{i}{2}$, obţinem mulţimea soluţiilor

$$\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi+i\ln 2\ \middle|\ k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{3\pi}{2}+2k\pi+i\ln 2\ \middle|\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

b) Efectuăm substituţia $e^{ix} = z$. Integrala devine

$$I = \frac{1}{2}\int_{|z|=1} \frac{(z^2+1)^2}{z^2(-3z^2+10iz+3)} dz.$$

Notăm $g(z) = \dfrac{(z^2+1)^2}{z^2(-3z^2+10iz+3)}$. Pentru $g$, $z_1 = 0$ este pol de ordinul II, $z_2 = \frac{i}{3}$ şi $z_3 = 3i$ sunt poli de ordinul I. Folosind teorema reziduurilor, rezultă $I = \pi i(Rez(g,0) + Rez(g, \frac{i}{3}))$. Dar $Rez(g,0) = \frac{-10i}{9}$, şi $Rez(g, \frac{i}{3}) = \frac{8i}{9}$, deci

$$I = \pi i\left(\frac{-10i}{9} + \frac{8i}{2}\right) = \pi i\frac{-2i}{9} = \frac{2\pi}{9}.$$

**IV.** a) Dacă $r < 1$, atunci integrala se anulează (teorema fundamentală Cauchy). Dacă $r = 1$, folosind teorema semireziduurilor, obţinem $I = \pi i \operatorname{Rez}\left(\dfrac{z^2 e^z}{(z-1)^{n+1}}, 1\right)$. Cum $z = 1$ este pol de ordin $n+1$, rezultă că

$$\operatorname{Rez}\left(\frac{z^2\cdot e^z}{(z-1)^{n+1}}, 1\right) = \frac{1}{n!}\cdot \lim_{z\to 1}(z^2\cdot e^z)^{(n)} \overset{\text{inducţie}}{=} \frac{(n^2+n+1)\cdot e}{n!}.$$

Deci $I = \dfrac{\pi\cdot i\cdot(n^2+n+1)\cdot e}{n!}$. Dacă $r > 1$, atunci folosim teorema reziduurilor şi obţinem

$$I = 2\pi\, i \operatorname{Rez}\left(\frac{z^2 e^z}{(z-1)^{n+1}}, 1\right) = \frac{2\pi i(n^2+n+1)e}{n!}.$$

b) Observăm că funcţia $f(x) = \dfrac{x\sin x}{x^2+a^2}$ este pară, deci $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$. Notăm

$$J = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+a^2}\sin x\,dx, \quad I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{x^2+a^2}\cos x\,dx.$$

Calculăm

$$I + iJ = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cdot e^{i\cdot x}}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i\cdot \sum_{\substack{z_k - poli\\ \operatorname{Im}(z_k)>0}} \operatorname{Rez}\left(\frac{z\cdot e^{i\cdot z}}{z^2+a^2}, z_k\right).$$

Dacă $a > 0$, atunci

$$I + iJ = \pi i \operatorname{Rez}\left(\frac{ze^{iz}}{z^2+a^2}, ai\right) = \pi i\cdot \lim_{z\to ai}\frac{ze^{iz}}{z+ai} = \pi i\cdot\frac{e^{-a}}{2} \quad\Rightarrow\quad I = 0,\ J = \frac{\pi e^{-a}}{2}.$$

Dacă $a = 0$, atunci

$$I + iJ = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x}dx = \frac{1}{2}\cdot\pi i\cdot \operatorname{Rez}\left(\frac{e^{i\cdot z}}{z}, 0\right) = \frac{\pi i}{2} \quad\Rightarrow\quad I = 0,\ J = \frac{\pi}{2}.$$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza locală, anul II, profil mecanic, 2009-2010

**I.** a) Impunem condiţia de armonicitate $\Delta F = 0$. Obţinem $F''(t)t + F'(t) = 0$, de unde $F(t) = 2c_1\sqrt{t} + c_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Rezultă

$$F(t(x,y)) = 2c_1\sqrt{\sqrt{x^2+y^2} - x} + c_2,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

b) Prin calcul direct, obţinem

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{c_1}{\sqrt{\sqrt{x^2+y^2} - x}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - 1\right) - i\frac{c_1}{\sqrt{\sqrt{x^2+y^2} - x}}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Pentru $y = 0$, avem $f'(z) = \frac{c_1}{\sqrt{|x|-x}}\left(\frac{x}{|x|-1}\right)$. Cum $x \geq 0$ nu este posibil, rezultă $x < 0$, deci

$$f'(x) = \frac{c_1}{\sqrt{-2x}}(-2) \quad \Rightarrow \quad f(z) = 2\sqrt{2}c_1\sqrt{-z} + c_3,\ c_3 \in \mathbb{R}.$$

**II.** a) $z = 2$ este punct singular esenţial al funcţiei $f$, deci $Rez(f,2) = c_{-1}$ (coeficientul seriei Laurent). Cum

$$\begin{aligned} f(z) &= [(z-2)+2]^3 \cdot \left(1 + \frac{1}{(z-2)1!} + \frac{1}{(z-2)^2 2!} + ... + \frac{1}{(z-2)^n n!} + ...\right) = \\ &= [(z-2)^3 + 6(z-2)^2 + 12(z-2) + 8] \cdot \\ &\cdot \left(1 + \frac{1}{(z-2)1!} + \frac{1}{(z-2)^2 2!} + \cdots + \frac{1}{(z-2)^n n!} + \ldots\right), \end{aligned}$$

rezultă $c_{-1} = \dfrac{1}{4!} + \dfrac{6}{3!} + \dfrac{12}{2!} + \dfrac{8}{1!} = \dfrac{361}{24}$.

b) Rezolvare identică cu subiectul 3) a) de la profilul electric.

**III.** Obţinem $I = \displaystyle\int_{\frac{x^2}{\frac{4}{25}} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1} \frac{\text{tg }(z)}{z^2(z^2+1)}dz$. Pentru funcţia

$$g(z) = \frac{\text{tg } z}{z^2(z^2+1)} = \frac{\sin z}{z^2(z^2+1)\cos z},$$

punctele singulare sunt $z = 0$ (pol de ordinul I) şi soluţiile ecuaţiei $\cos z = 0$.

$$\cos z = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0 \overset{e^{iz}=t}{\Leftrightarrow} t^2 + 1 = 0 \Rightarrow t = \pm i.$$

$e^{iz} = i \Rightarrow iz = \text{Ln } i = i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ , $k \in \mathbb{R}$ de unde $z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (poli de ordinul I şi) $z = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (poli de ordinul I). Dar ne sunt necesare doar punctele singulare aflate în interiorul elipsei, deci

$$I = 2\pi i(Rez(g,0)) = 2\pi i \lim_{z\to 0} \frac{\text{tg } z}{z(z^2+1)} = 2\pi i \lim_{z\to 0} \frac{\text{tg } z}{z}\frac{1}{z^2+1} = 2\pi i.$$

**IV.** Avem

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x - a}{1 - 2a\cos x + a^2} dx \overset{e^{ix}=z}{=} \frac{1}{2i} \int_{|z|=1} \frac{z^2 - 2az + 1}{z[-az^2 + z(a^2+1) - a]} dz.$$

Funcţia $g(z) = \dfrac{z^2 - 2az + 1}{z[-az^2 + z(a^2+1) - a]}$ are trei puncte singulare: $z_1 = 0, z_2 = \frac{1}{a}$ şi $z_3 = a$. Impunem condiţia $a \neq 0$. Cum $|a| < 1$, folosind teorema rezidurilor, avem

$$J = \frac{1}{2i} 2\pi i \left(Rez(g, 0) + Rez(g, a)\right) = \pi \left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{a}\right) = 0.$$

Dacă $a = 0$, atunci $J = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx = \sin x \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$

**V.** Folosim transformarea Laplace:

$$\begin{cases} p^2\mathcal{L}[x] - \mathcal{L}[y] = \frac{1}{p^2} \\ p^2\mathcal{L}[y] - \mathcal{L}[x] = \frac{1}{p}. \end{cases}$$

Rezultă că

$$\mathcal{L}[x] = \frac{1}{p(p-1)(p^2+1)} = -\frac{1}{p} + \frac{1}{2(p-1)} + \frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{p^2+1},$$

de unde $x = -t + \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t$. Analog, $\mathcal{L}[y] = \frac{p^2-p+1}{p^2(p-1)(p^2+1)}$ şi descompunând în fracţii simple, determinăm $y$.

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
### Faza locală, anul II, profil electric, 2010-2011

**I.** *Metoda I.* Determinăm valorile proprii ale matricei $A$. Din ecuaţia caracteristică $\det(A - \lambda I_3) = 0$, rezultă valorile proprii (cu multiplicităţile algebrice aferente) $\lambda_1 = 1$, $m_a(\lambda_1) = 2$ şi $\lambda_2 = -1$, $m_a(\lambda_2) = 1$. Vectorii proprii ce formează baze în cele două subspaţii proprii asociate acestor valori proprii sunt $v_{11} = (1,0,1)^t, v_{12} = (0,1,0)^t$; $v_{21} = (-1,0,1)^t$. Deci soluţia generală a sistemului diferenţial este

$$Y = C_1\, e^x (1,0,1)^t + C_2\, xe^x (0,1,0)^t + C_3\, e^{-x}(-1,0,1)^t, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

*Metoda 2.* Folosim transformarea Laplace. Astfel,

$$\begin{cases} \mathcal{L}[y_1{}'] = \mathcal{L}[y_3] \\ \mathcal{L}[y_2{}'] = \mathcal{L}[y_2] \\ \mathcal{L}[y_3{}'] = \mathcal{L}[y_1] \end{cases}, \quad \text{unde} \quad \begin{cases} y_1(0) = a \\ y_2(0) = b \\ y_3(0) = c \end{cases}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Din ecuaţia a doua rezultă $\mathcal{L}[y_2] = \frac{b}{p-1}$, de unde $y_2 = be^x$. Obţinem

$$\begin{cases} p\mathcal{L}[y_1] - a = \mathcal{L}[y_3] \\ p\mathcal{L}[y_3] - c = \mathcal{L}[y_1] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{L}[y_3] = \frac{a+cp}{p^2-1} \\ \mathcal{L}[y_1] = \frac{ap+c}{p^2-1}. \end{cases}$$

Rezultă deci $y_3 = \frac{c-a}{2} \cdot e^x + \frac{a+c}{2} e^{-x}$, iar $y_1 = \frac{a+c}{2} e^x + \frac{a-c}{2} e^{-x}$.

*Metoda 3.* Sistemul diferenţial poate fi scris sub forma $\begin{cases} y_1{}' = y_3 \\ y_2{}' = y_2 \\ y_3{}' = y_1 \end{cases}$. Din ecuaţia a doua, rezultă $\frac{y_2{}'}{y_2} = 1$, deci $\ln y_2 = x + \ln C_1 \Rightarrow y_2 = C_1 \cdot e^x$. Prima şi a treia ecuaţie conduc la $y_3{}'' = y_3 \Leftrightarrow y_3{}'' - y_3 = 0$. Ecuaţia algebrică asociată $r^2 - 1 = 0$ are ca rădăcini $r_1 = 1$ şi $r_2 = -1$, de unde $y_3 = C_2 e^x + C_3 e^{-x}$. Atunci

$$y_1 = y_3{}' = C_2 e^x - C_3 e^{-x},\ C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

**II.** a) Derivăm ecuaţia în raport cu $x$. Obţinem

$$2xy'' + (x^2+1)y''' - 2y' - 2xy'' + 2y' = 2x \Leftrightarrow (x^2+1)y''' = 2x \Leftrightarrow y''' = \frac{2x}{x^2+1}.$$

Integrând, obţinem $y'' = \ln(x^2+1) + C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$ care conduce la

$$y_1{}' = x\ln(x^2+1) - 2x + 2\,\mathrm{arctg}\, x + C_1 x + C_2,\quad C_2 \in \mathbb{R},$$

şi deci, în final,

$$y = \frac{x^2-1}{2} \cdot \ln(x^2+1) - \frac{3x^2}{2} + 2x\,\mathrm{arctg}\, x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 \cdot x + C_3.$$

Verificând ecuaţia iniţială, rezultă $C_1 + C_3 = 1$, de unde $C_3 = 1 - C_1$. Prin urmare

$$y = \frac{x^2-1}{2} \cdot \ln(x^2+1) - \frac{3x^2}{2} + 2x\,\mathrm{arctg}\, x + 1 + C_1\left(\frac{x^2}{2} - 1\right) + C_2 \cdot x.$$

b) Ecuaţia $x^2y'' + xy' + \lambda y = 0$ este de tip Euler. Folosind substituţia $y(x) = z(\ln x)$, obţinem $z''(\ln x) + \lambda z(\ln x) = 0$. Notând $\ln x = t$, obţinem ecuaţia diferenţială de ordinul 2, cu coeficienţi constanţi, liniară şi omogenă $z''(t) + \lambda z(t) = 0$. Rezolvarea ecuaţiei algebrice $r^2 + \lambda = 0$ conduce la cazurile: $\lambda < 0$, $\lambda = 0$, $\lambda > 0$. Examinăm aceste cazuri.

Cazul I. $\lambda < 0 \Rightarrow r^2 = -\lambda \Rightarrow r_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$, deci

$$z(t) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}t} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}t},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Rezultă $y(x) = C_1 x^{\sqrt{-x}} + C_2 x^{-\sqrt{-x}}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Impunând condiţiile iniţiale, obţinem $C_1 = C_2 = 0$.

Cazul II. $\lambda = 0 \Rightarrow r = 0$, deci $z(t) = C_1 + C_2 t$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ de unde obţinem $y(x) = C_1 + C_2\ln(x)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Impunând condiţiile iniţiale, rezultă $C_1 = C_2 = 0$.

Cazul III. $\lambda > 0 \Rightarrow r^2 = -\lambda \Rightarrow r_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$, deci

$$z(t) = C_1\cos(\sqrt{\lambda}t) + C_2\sin(\sqrt{\lambda}t),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

de unde obţinem $y(x) = C_1\cos(\sqrt{\lambda}\ln x) + C_2\sin(\sqrt{\lambda}\ln x)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Impunând condiţiile iniţiale, rezultă sistemul

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_1\cos(\sqrt{\lambda}) + C_2\sin(\sqrt{\lambda}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2\sin(\sqrt{\lambda}) = 0. \end{cases}$$

Dacă $\lambda \in \{k^2\pi^2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$, atunci $C_2$ nu este neapărat nulă, deci soluţia astfel determinată nu este identic nulă pe intervalul $(0, \infty)$.

**III.** Avem $I = \displaystyle\int_{\Gamma:|z|^2-2\,\mathrm{Re}\ z=0} \frac{z^3 e^{z/(z-1)}}{(z-1)^2} dz$. Drumul $\Gamma : |z|^2 - 2\,\mathrm{Re}\ z = 0$ este cercul de centru $(1, 0)$ şi rază 1. Fie $f(z) = \frac{z^3 e^{z/(z-1)}}{(z-1)^2}$. Se observă că $z_0 = 1$ este singurul punct singular şi este punct singular esenţial. Din teorema reziduurilor, rezultă $I = 2\pi i \cdot \mathrm{Rez}\ (f, 1)$. Atunci

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{(z-1+1)^3}{(z-1)^2} \cdot e^{1+\frac{1}{z-1}} = \frac{(z-1)^3 + 3(z-1)^2 + 3(z-1) + 1}{(z-1)^2} \cdot e \cdot e^{\frac{1}{z-1}} \\ &= e\left[(z-1) + 3 + 3 \cdot \tfrac{1}{z-1} + \tfrac{1}{(z-1)^2}\right] \cdot \left(1 + \tfrac{1}{1!(z-1)} + \tfrac{1}{2!(z-1)^2} + \dots\right), \end{aligned}$$

deci $\mathrm{Rez}\ (f, 1) = e\left(\frac{1}{2!} + \frac{3}{1!} + 3\right) = \frac{13e}{2}$ şi $I = 13i\pi e$.

**IV.** Fie $I_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos x \cos(nx)}{13 - 12\cos x} dx$ şi $J_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos x \sin(nx)}{13 - 12\cos x} dx$, $n \in \mathbb{N}$. Calculăm $I_n + iJ_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos x \cdot e^{inx}}{13 - 12\cos x} dx$, $n \in \mathbb{N}$. Folosind substituţia $e^{ix} = z$, obţinem

$$I_n + iJ_n = \int_{|z|=1} \frac{(z^2+1)z^{n-1}}{2i(13z - 6z^2 - 6)} dz = \frac{1}{2i} \int_{|z|=1} g(z) dz.$$

Funcţia $g(z) = \dfrac{(z^2+1)z^{n-1}}{13z - 6z^2 - 6}$ are: 1) două puncte singulare: $z_1 = \frac{2}{3}, z_2 = \frac{3}{2}$, dacă $n \geq 1$; 2) trei puncte singulare $z_1 = \frac{2}{3}, z_2 = \frac{3}{2}, z_3 = 0$, dacă $n = 0$.

Cazul 1) Dacă $n \geq 1$, atunci

$$I_n + iJ_n = \frac{1}{2i} \cdot 2\pi i \cdot \mathrm{Rez}\ \left(g, \frac{2}{3}\right) = \pi\,\mathrm{Rez}\ \left(g, \frac{2}{3}\right) = \frac{13}{45} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot \pi.$$

Cazul 2) Dacă $n = 0$, atunci

$$I_0 + iJ_0 = \frac{1}{2i} \cdot 2\pi i \left[\mathrm{Rez}\ \left(g, \frac{2}{3}\right) + \mathrm{Rez}\ (g, 0)\right] = \pi\left(\frac{13}{30} - \frac{1}{6}\right) = \frac{4\pi}{15}.$$

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza locală, anul II, profil mecanic, 2010-2011

**I.** Funcţiile $u(x,y)$ şi $v(x,y)$ trebuie să fie armonice. Obţinem

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = F'(t) \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = F'(t)\left(-\frac{y}{x^2}\right), \tag{30}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = F'(t) \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = F'(t) \cdot \frac{1}{x}, \tag{31}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = F''(t) \cdot \frac{y^2}{x^4} + F'(t)\frac{2y}{x^3}, \tag{32}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = F''(t) \cdot \frac{1}{x^2}. \tag{33}$$

Dar $\Delta u = 0$ şi $\Delta v = 0$, deci suma expresiilor (32) şi (33) este nulă. Rezultă deci

$$\frac{1}{x^2} \cdot F''(t)\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right) + F'(t)\cdot\frac{2y}{x^3} = 0 \Rightarrow F''(t)(t^2+1) + F'(t)\cdot 2t = 0.$$

Integrând, rezultă $\ln F'(t) = -\ln(t^2+1) + \ln C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}$, deci

$$F'(t) = \frac{C_1}{t^2+1} \quad \Rightarrow \quad F(t) = C_1 \operatorname{arctg} t + C_2,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Scăzând din (30) expresia (31) înmulţită cu $i$, rezultă

$$\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{C_1 x^2}{x^2+y^2}\left(-\frac{y}{x^2} - i\frac{1}{x}\right).$$

Dar $\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = f'(z)$ şi $\frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} = f'(z)$, deci $f'(z) - if'(z) = \frac{C_1 x^2}{y^2+x^2}\left(-\frac{y}{x^2} - i\frac{1}{x}\right)$. Pentru $y = 0$, avem $f'(x)(1-i) = C_1\left(-\frac{i}{x}\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{-C_1 i}{x(1-i)} = \frac{C_3}{x}$, unde $C_3 = \frac{-C_1 i}{1-i}$. Atunci $f(x) = C_3 \ln x + C_4$, deci $f(z) = C_3 Ln\ z + C_4$.

**II.** a) Avem $f(z) = (z-3+3)^3 \cdot e^{1/(z-3)}$, deci

$$f(z) = \left[(z-3)^3 + 9(z-3)^2 + 27(z-3) + 27\right]\cdot\left[1 + \frac{1}{1!(z-3)} + \frac{1}{2!(z-3)^2} + \ldots\right],$$

de unde rezultă Rez $(f,3) = \frac{1}{4!} + \frac{9}{3!} + \frac{27}{2!} + \frac{27}{1!} = \frac{303}{8}$.

b) Folosind formula lui Euler $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ şi substituţia $e^{iz} = t$, obţinem $t^2 + 4t - 1 = 0$, de unde $t_1 = \frac{-4+2\sqrt{5}}{2} = -2+\sqrt{5}$ şi $t_2 = -2-\sqrt{5}$. De asemenea, $e^{iz} = -2\pm\sqrt{5}$ implică $iz = \text{Ln}\,(-2\pm\sqrt{5}) = \ln|-2\pm\sqrt{5}| + i\cdot k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. Considerând ramura principală, rezultă $z = -i\ln|-2\pm\sqrt{5}|$.

**III.** Ecuaţia $9x^2 + 25y^2 = 225$ descrie o elipsă de ecuaţie $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Punctele singulare ale funcţiei $f(z) = \frac{\sin z}{z^2(z^2+4)}$ sunt $z_1 = 0, z_2 = 2i, z_3 = -2i$. Folosind teorema reziduurilor, rezultă că $I = 2\pi i($ Rez $(f,0) +$ Rez $(f,2i) +$ Rez $(f,-2i))$. Cum toate punctele singulare sunt poli de ordinul 1, rezultă

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i\left(\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}\cdot\frac{1}{z^2+4} + \lim_{z\to 2i}\frac{\sin z}{z^2(z+2i)} + \lim_{z\to -2i}\frac{\sin z}{z^2(z-2i)}\right) \\ &= 2\pi i\left(\frac{1}{4} + \frac{\sin(2i)}{-16i} + \frac{\sin(-2i)}{16i}\right) = 2\pi i\left(\tfrac{1}{4} + \frac{e^{2i}-e^{-2i}}{16}\right). \end{aligned}$$

**IV.** Considerăm integrala $J_n = \displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\sin(nx)}{b - ia\cos x}\,dx,\ a > 0, b > 0, x \in \mathbb{N}$. Calculând $I_n + iJ_n$, obţinem $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{e^{inx}}{b-ia\cos x}\,dx$. Folosim substituţia $e^{ix} = z$ şi rezultă $I_n + iJ_n = \frac{2}{i}\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{z^n}{2zb - ia(z^2+1)}dz$. Fie $g(z) = \frac{z^n}{2zb-ia(z^2+1)}$. Ecuaţia $-iaz^2 + 2zb - ia = 0$ are discriminantul $\Delta = 4(a^2+b^2)$, şi rădăcinile $z_1 = \frac{-b+\sqrt{a^2+b^2}}{ia}$ şi $z_2 = \frac{-b-\sqrt{a^2+b^2}}{ia}$, care sunt sunt puncte singulare ale lui $g$. Cum $a > 0, b > 0$, rezultă că $|z_1| < 1$ şi $|z_2| > 1$, deci $I_n + iJ_n = \frac{2}{i} \cdot 2\pi i \cdot \text{Rez}\,(g, z_1)$. Cum $z_1$ este pol de ordinul I, avem

$$\text{Rez}\,(g, z_1) = \lim_{z \to z_1} \frac{z^n}{-ia(z - z_2)} = \frac{z_1^n}{-ia(z_1 - z_2)} = \frac{\left(\frac{-b+\sqrt{a^2+b^2}}{ia}\right)^n}{-ia \cdot \frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{ia}} = -\frac{(-b + \sqrt{a^2 + b^2})^n}{i^n \cdot a^n \cdot 2\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Atunci

$$\begin{aligned} I_n + iJ_n &= 4\pi \left( -\frac{(-b + \sqrt{a^2 + b^2})^n}{i^n \cdot a^n \cdot 2\sqrt{a^2 + b^2}} \right) = -\frac{2\pi(-b + \sqrt{a^2 + b^2})^n}{i^n \cdot a^n \cdot 2\sqrt{a^2 + b^2}} = \\ &= \frac{2\pi i^n(-b + \sqrt{a^2 + b^2})^n}{a^n\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{2\pi \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \dfrac{\pi}{2}\right)^n (-b + \sqrt{a^2 + b^2})^n}{a^n\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{2\pi \left(\cos \frac{n\pi}{2} + i \sin \dfrac{n\pi}{2}\right) (-b + \sqrt{a^2 + b^2})^n}{a^n\sqrt{a^2 + b^2}}, \end{aligned}$$

de unde $I_n = \dfrac{2\pi \cos \frac{n\pi}{2} (-b + \sqrt{a^2 + b^2})^n}{a^n\sqrt{a^2 + b^2}}$.

**V.** *Metoda 1.* Rezolvăm ecuaţia omogenă ataşată. Din ecuaţia algebrică asociată $r^2 + 4 = 0$, rezultă $r_1 = 2i$ şi $r_2 = -2i$, de unde soluţia ecuaţiei omogene este $y_{om} = C_1 \cdot \cos(2t) + C_2 \sin(2t)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Căutăm o soluţie particulară de forma $y_p = C_1(t) \cos(2t) + C_2(t) \sin(2t)$ folosind metoda variaţiei constantelor. Obţinem

$$\begin{cases} C_1{}'(t) \cos(2t) + C_2{}'(t) \sin(2t) = 0 \\ -2C_1{}'(t) \sin(2t) + 2C_2{}'(t) \cos(2t) = 4(\cos(2t) - \sin(2t)) \end{cases}$$

sistem liniar care se rezolvă în raport cu $C_{1,2}(t)$ şi apoi se integrează

$$\begin{cases} C_2{}'(t) = 2\cos^2(2t) - \sin(4t) \\ C_1{}'(t) = 2\sin^2(2t) - \sin(4t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2(t) = t + \frac{\sin(4t)+\cos(4t)}{4} \\ C_1(t) = t + \frac{\cos(4t)-\sin(4t)}{4} \end{cases},$$

de unde rezultă

$$\begin{aligned} y_p &= t\cos 2t + t\sin 2t + \tfrac{\cos(4t)\cos(2t)-\sin(4t)\cos(2t)+\sin(4t)\sin(2t)+\cos(4t)\sin(2t)}{4} \\ &= t\cos 2t + t\sin 2t + \tfrac{\cos(4t-2t)+\sin(2t-4t)}{4} = t\cos 2t + t\sin 2t + \tfrac{\cos 2t - \sin 2t}{4}. \end{aligned}$$

Soluţia generală este $y = y_{om} + y_p$. Impunând condiţiile iniţiale, obţinem sistemul $\begin{cases} C_1 + \frac{1}{4} = 1 \\ 2C_2 + 1 + \frac{1}{2} = 3 \end{cases}$, de unde $C_1 = \frac{3}{4}$ şi $C_2 = \frac{3}{4}$.

*Metoda 2.* Se foloseşte transformarea Laplace.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza locală, anul II, profilele electric şi mecanic, 2011-2012

**I.** a) Impunem condiţia $\Delta\varphi = 0$. Obţinem $9\varphi''(t)(x^2+y^2)^2 = 0$, de unde $\varphi''(t) = 0$ şi $\varphi(t) = at + b$, $a, b$ constante reale.

b) $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$=$a(3x^2 - 3y^2) + 6aixy$, de unde $f'(x) = 3ax^2$, şi deci rezultă $f(z) = az^3 + c$, unde $c$ este o constantă complexă.

**II.** a) Avem $\quad \dfrac{z}{\sin z} = \dfrac{z - \pi + \pi}{\sin(z - \pi + \pi)} = \dfrac{(z-\pi)+\pi}{-\sin(z-\pi)}, \quad$ deci

$$\frac{z}{\sin z} = \frac{(z-\pi)+\pi}{-(z-\pi)\left(1 - \frac{(z-\pi)^2}{3!} + \frac{(z-\pi)^4}{5!} - \dots\right)} = c_{-1}\frac{1}{z-\pi} + c_0 + c_1(z-\pi) + \dots,$$

de unde $c_{-1} = -\pi$ şi $c_0 = -1$.

b) Ecuaţia $\sin z = 0$ are soluţiile $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, dar în interiorul drumului cerut se află doar $\pi$. Cum anterior am obţinut dezvoltarea în serie Laurent a funcţiei în jurul lui $\pi$, rezultă că integrala este egală cu $2\pi i \,\mathrm{Rez}\,(g, \pi)$=$2\pi i c_{-1}$=$-2\pi^2 i$.

**III.** Calculăm $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^n e^{int} dt$. Făcând schimbarea de variabilă $e^{it} = z$, integrala devine

$$I = \int_{|z|=1} \left(1 - \frac{z^2+1}{2z}\right)^n \cdot z^n \cdot \frac{dz}{iz} = \frac{1}{2^n i}\int_{|z|=1} \frac{(2z - z^2 - 1)^n}{z} dz = \frac{1}{2^n i}\cdot 2\pi i \cdot (-1)^n = \pi\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}.$$

Integrala cerută este partea imaginară a lui $I$, deci 0.

**IV.** Obţinem, folosind fie metoda valorilor proprii, fie metoda transformării Laplace, $y = 2\sin t - 2t\cos t$ şi $x = t\sin t - t\cos t + \sin t$.

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ ”TRAIAN LALESCU”
Faza locală, anul II, profil electric, 2012-2013

**I.** Apare discuţia după $R$. Dacă $R < 1$, integrala este 0 (Teorema fundamentală Cauchy). Dacă $R > 1$, $I = 2\pi i \,\mathrm{Rez}\,(f, 1)$. Cum $z = 1$ este punct singular esenţial, aflăm dezvoltarea în serie Laurent a funcţiei în jurul acestui punct. Astfel,

$$(z-1)^{2012}\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{z-1+1}{z-1}\right) = (z-1)^{2012}\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\frac{1}{z-1}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(z-1)^{2012}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\frac{1}{z-1}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\frac{1}{z-1}\right)\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(z-1)^{2012}\left(\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{(\pi/4)^{2n}}{(z-1)^{2n}(2n)!} - \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{(\pi/4)^{2n+1}}{(z-1)^{2n+1}(2n+1)!}\right),$$

de unde $\mathrm{Rez}\,(f, 1) = c_{-1} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2013}\frac{1}{2013!}$ şi $I = -\dfrac{i\pi^{2014}\sqrt{2}}{4^{2013}2013!}$.

**II.** a) Din condiţia de armonicitate rezultă $a = b$.

b) Notăm cu $t(x,y) = x^2 - y^2$. Impunând condiţia $\Delta \operatorname{Re} f = 0$, obţinem $\varphi''(t) = 0$, de unde $\varphi(t) = At + B$, $A, B \in \mathbb{R}$. Se obţine $f(z) = aze^z + Az^2 + C$, $C \in \mathbb{C}$. Atunci $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{x(\cos 2x + 1)}{x^2 - 6x + 13} dx = I_1 + I_2$, unde

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 - 6x + 13} dx, \qquad I_2 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos 2x}{x^2 - 6x + 13} dx.$$

**III.** Avem

$$I_1 = \lim_{\varepsilon\to\infty} \frac{1}{4}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{2x - 6 + 6}{x^2 - 6x + 13} dx = \frac{1}{4}\lim_{\varepsilon\to\infty} \ln\left(\frac{\varepsilon^2 - 6\varepsilon + 13}{\varepsilon^2 + 6\varepsilon + 13}\right) +$$
$$+ \frac{3}{4}\lim_{\varepsilon\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{\varepsilon - 3}{2}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{-\varepsilon - 3}{2}\right)\right) = 0 + \frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

Pentru calculul integralei $I_2$, considerăm integrala $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{2ix}}{x^2 - 6x + 13} dx$. Pentru $f(z) = \dfrac{ze^{2iz}}{z^2 - 6z + 13}$, punctele singulare sunt $3 \pm 2i$, poli de ordinul 1. Cum doar $3+2i$ este în semiplanul superior şi $\operatorname{Rez}(f, 3+2i) = \dfrac{3 + 2i}{4i} e^{6i-4}$, rezultă $J = \dfrac{\pi}{2}(3+2i)e^{6i-4}$. Dar $I_2 = \dfrac{1}{2} Re(J)$, deci $I_2 = \dfrac{\pi}{4} e^{-4}(3\cos 6 - 2\sin 6)$.

**IV.** a) Valorile proprii sunt $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 14$, iar vectorii proprii corespunzători acestora sunt $v_1 = (3,0,2)^t$, $v_2 = (0,3,1)^t$, respectiv $v_3 = (2,1,-3)^t$. Soluţia generală este

$$y_1(t) = 3C_1 + 2C_3e^{14t}, \quad y_2(t) = 3C_2 + C_3e^{14t}, \quad y_3(t) = 2C_1 + C_2 - 3C_3e^{14t}.$$

b) $\sin z = 5C_1 + 4C_2 = 10$, de unde $z \in \{\ln(10 \pm 3\sqrt{11}) + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
### Faza locală, anul II, profil mecanic, 2012-2013

**I.** A se vedea problema I de la profilul electric.

**II.** a) Din condiţia de armonicitate rezultă $a = b$.

b) Obtinem $f(z) = aze^z + c$, unde $c$ este o constantă complexă.

**III.** Se cere $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(\frac{\pi}{2}x)}{x^4 + 2x^2 + 1} dx$. Calculăm $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{i\frac{\pi}{2}x}}{x^4 + 2x^2 + 1} dx$. Pentru $f(z) = \dfrac{ze^{i\frac{\pi}{2}z}}{z^4 + 2z^2 + 1}$, $z = i$ este singurul punct singular aflat în semiplanul superior şi este pol de ordin doi. Avem $\operatorname{Rez}(f, i) = \displaystyle\lim_{z\to i}\left(\frac{ze^{i\frac{\pi}{2}z}}{(z+i)^2}\right)' = \frac{\pi e^{-\frac{\pi}{2}}}{8}$. Integrala $J = 2\pi i \operatorname{Rez}(f, i)$, iar $I = Im(J) = \dfrac{\pi^2}{4} e^{-\frac{\pi}{2}}$.

**IV.** Valorile proprii sunt $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$, iar vectorii proprii corespunzători acestora sunt $v_1 = (1, -1, 0)^t$, $v_2 = (1, 1, 2)^t$, respectiv $v_3 = (-1, -1, 1)^t$. Atunci soluţia generală a sistemului este $Y(t) = C_1 e^{-2t} v_1 + C_2 e^{2t} v_2 + C_3 e^{-t} v_3$. Impunând condiţiile iniţiale, se determină constantele $C_i$, $i = \overline{1,3}$.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza locală, anul II, profil electric, 2013-2014

**I.** Ecuaţia $z^3 \sin z = 0$ are soluţiile $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. În interiorul drumului $|z| = 7$ se află $z = 0$, care este pol de ordin 4, $z = \pm\pi$ şi $z = \pm 2\pi$, care sunt poli de ordin 1. Avem

$$\begin{aligned} \text{Rez } (f, \pi) &= \lim_{z \to \pi} (z - \pi) \frac{1}{z^3 \sin z} = \frac{1}{\pi^3} \lim_{z \to \pi} \frac{z - \pi}{\sin(z - \pi + \pi)} = \\ &= \tfrac{1}{\pi^3} \lim_{z \to \pi} \frac{z - \pi}{-\sin(z - \pi)} = -\frac{1}{\pi^3}. \end{aligned}$$

Analog, Rez $(f, -\pi) = \dfrac{1}{\pi^3}$, Rez $(f, 2\pi) = -\dfrac{1}{8\pi^3}$, iar Rez $(f, -2\pi) = \dfrac{1}{8\pi^3}$. Pentru aflarea reziduului în 0, aflăm dezvoltarea în serie Laurent a funcţiei în jurul lui 0. Astfel, $\dfrac{1}{z^3 \sin z} = \dfrac{1}{z^3 \cdot z \cdot (1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots)} = \dfrac{1}{z^4}(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots)$. Obţinem $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 - \frac{a_0}{3!} = 0 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{6}$, $a_3 - \frac{a_1}{3!} \Rightarrow a_3 = 0$, $a_4 - \frac{a_2}{3!} \Rightarrow a_4 = \frac{1}{36}$, etc. Deci Rez $(f, 0) = a_3 = 0$. Integrala este 0.

**II.** a) Din $\Delta F = 0$, rezultă $a - b + (b^2 - a^2)\cos(ax)\,\text{sh}\,(by) = 0$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, de unde $a = b$.

b) Cum $u, v$ sunt funcţii armonice, $3u + 5v$ este tot o funcţie armonică, deci $a = b$. Derivând în raport cu $x$ şi $y$, obţinem sistemul $\begin{cases} 3\frac{\partial u}{\partial x} + 5\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} \\ 3\frac{\partial u}{\partial y} + 5\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y}. \end{cases}$

Folosind relaţiile Cauchy-Riemann, sistemul este echivalent cu $\begin{cases} 3\frac{\partial u}{\partial x} - 5\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial x} \\ 3\frac{\partial u}{\partial y} + 5\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}, \end{cases}$

de unde $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{3\frac{\partial F}{\partial x} + 5\frac{\partial F}{\partial y}}{34}$ $\quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{3\frac{\partial F}{\partial y} - 5\frac{\partial F}{\partial x}}{34}$. Atunci $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} - i\dfrac{\partial u}{\partial x}$, iar pentru $y = 0$, obţinem $f'(x) = \dfrac{6ax + 5a\cos ax}{34} - i\dfrac{3ax\cos ax - 10ax}{34}$ şi

$$f(x) = \frac{ax^2}{34}(3 + 5i) + \frac{\sin ax}{34}(5 - 3i) + \mathcal{C}.$$

Deoarece $f(0) = 0$, rezultă $f(z) = \dfrac{az^2}{34}(3 + 5i) + \dfrac{\sin az}{34}(5 - 3i)$.

**III.** Calculăm

$$J_k = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{(x^2 + 1)^2} dx = 2\pi i \,\text{Rez}\, \left( \frac{e^{ikz}}{(z^2 + 1)^2}, i \right) = 2\pi i \lim_{z \to i} \left( \frac{e^{ikz}}{(z + i)^2} \right)' = \frac{\pi}{2} e^{-k}(k+1).$$

Atunci
$$I_k = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos kx}{(x^2+1)^2}dx = Re(J_k) = \frac{\pi}{2}e^{-k}(k+1),\ k=\overline{1,n}.$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} I_1 + I_2 + \dots I_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n} e^{-k}(k+1)$. Dar $\left(\sum_{k=0}^{n+1} x^k\right)' = \left(\frac{1-x^{n+2}}{1-x}\right)'$, sau, echivalent, $\sum_{k=1}^{n+1} kx^{k-1} = \frac{-(n+2)x^{n+1}(1-x)+1-x^{n+2}}{(1-x)^2}$. Înlocuind $x = e^{-1}$ şi punând $n \to \infty$, obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} e^{-k}(k+1) = \frac{1}{(1-e^{-1})^2}$.

**IV.** Metoda cea mai uşoară de rezovare a sistemului este aplicarea transformării Laplace. Sistemul devine

$$\begin{cases} (p-5)\mathcal{L}[x](p) + \mathcal{L}[y](p) = \dfrac{1}{p^2+1} \\ (p-3)\mathcal{L}[y](p) - \mathcal{L}[x](p) = \dfrac{p}{p^2+1}, \end{cases}$$

de unde $\mathcal{L}[y](p) = \frac{p^2-5p+1}{(p^2+1)(p-4)^2}$, iar $y(t) = \frac{1}{289}(-75\cos t - 40\sin t + 75e^{4t} - 51te^{4t})$ şi
$$x(t) = y'(t) - 3y(t) - \cos t = \frac{1}{289}(195\sin t - 104\cos t + 24e^{4t} - 51te^{4t}).$$

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
### Faza locală, anul II, profil mecanic, 2013-2014

**I.** Integrala este 0. (a se vedea soluţia problemei I, profil electric, faza locală, 2013-2014).

**II.** a) Din $\Delta F = 0$, rezultă $a = b$.

b) Cum $u, v$ sunt funcţii armonice, $5u+3v$ este tot o funcţie armonică, deci $a = b$. Derivând în raport cu $x$ şi $y$, obţinem sistemul $\begin{cases} 5\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} \\ 5\frac{\partial u}{\partial y} + 3\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y}. \end{cases}$

Folosind relaţiile Cauchy-Riemann, sistemul este echivalent cu $\begin{cases} 5\frac{\partial u}{\partial x} - 3\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial x} \\ 5\frac{\partial u}{\partial y} + 3\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}, \end{cases}$

de unde rezultă $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{5\frac{\partial F}{\partial x} + 3\dfrac{\partial F}{\partial y}}{34}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{5\frac{\partial F}{\partial y} - 3\frac{\partial F}{\partial x}}{34}$. Atunci $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial x}$, iar pentru $y = 0$, obţinem $f'(x) = \frac{10ax}{34} + i\frac{6ax}{34}$, $f(x) = \frac{ax^2}{34}(5+3i)) + \mathcal{C}$ şi cum $f(0) = 0$, avem $f(z) = \frac{az^2}{34}(5+3i)$.

**III.** Calculăm

$$\begin{aligned} J &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 e^{ix}}{(x^2-6x+13)^2} dx = 2\pi i \,\text{Rez}\left(\frac{z^2e^{iz}}{(z^2-6z+13)^2}, 3+2i\right) \\ &= 2\pi i \lim_{z\to i}\left(\frac{z^2e^{iz}}{(z-3+2i)^2}\right)' = 2\pi i \frac{24-23i}{32}e^{3i-2} = \frac{\pi}{16}e^{-2}(24i+23)(\cos 3 + i\sin 3), \end{aligned}$$

de unde integrala cerută este $Re(J) = \dfrac{\pi e^{-2}}{16}(23\cos 3 - 24\sin 3)$.

**IV.** A se vedea soluţia problemei IV, profil electric, faza locală, 2013-2014.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza interuniversitară, anul II, profil electric, 2002-2003

**I.** $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\, dx$. Considerăm conturul $\gamma = \gamma_R \cup [-R,-r] \cup (-\gamma_r) \cup [r,R]$, $R > 1$, $r < 1$ (vezi figura).

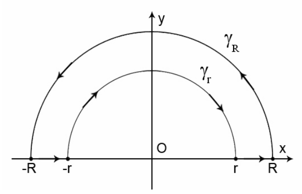


**Figura 4.**

Fie $g(z) = \frac{(\ln z)^2}{1+z^2}$. Pentru funcţia $\ln z$ (funcţie complexă multiformă) considerăm ramura $\ln z = \ln|z| + i\cdot \arg z$, $0 < \arg z < \pi$, şi avem $\displaystyle\int_\gamma g(z)\,dz = 2\pi i$ Rez $(g, i)$. Dar

$$\int_\gamma g(z)\,dz = \int_{\gamma_R} g(z)\,dz + \int_{-R}^{-r} \frac{(\ln|x|+i)}{1+x^2} g(z)\,dx - - \int_{\gamma_r} g(z)\,dz + \int_r^R \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\,dx.$$

Trecând la limită ($r \to 0,\ R \to \infty$) obţinem

$$\begin{aligned} 2\pi i\,\text{Rez}\,(g,i) &= \lim_{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}} \int_{\gamma_R} g(z)\,dz + + \int_{-\infty}^{0} \frac{(\ln|x|+i\pi)^2}{1+x^2}\,dx - \\ &\quad - \lim_{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}} \int_{\gamma r} g(z)\,dz + \int_0^\infty \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\,dx. \end{aligned}$$

Din $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{z}{1+z^2} = \lim_{z\to\infty}\frac{z}{1+z^2} = 0$, rezultă $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} g(z)\,dz = 0$, $\displaystyle\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_r} g(z)\,dz = 0$, deci egalitatea devine $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\frac{(\ln|x|+i\pi)^2}{1+x^2}\,dx + \int_0^\infty \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\,dx = 2\pi i\,\text{Rez}\,(g,i)$, care se rescrie

$$\int_0^\infty \frac{(\ln x + i\pi)^2}{1+x^2}\,dx + \int_0^\infty \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\,dx = 2\pi i\,\text{Rez}\,(g,i) \tag{34}$$

Dar Rez $(g,i)=\lim\limits_{z\to i}(z-i)\cdot\dfrac{(\ln z)^2}{(z-i)(z+i)}=\dfrac{-\pi^2}{8i}$, deci înlocuind membrul drept şi dezvoltând pătratul în prima integrală, (34) devine

$$2\int_0^\infty \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\,dx-\pi^2\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx+2\pi i\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx=-\frac{\pi^3}{4},$$

de unde rezultă

$$\int_0^\infty \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\,dx-\pi^2\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx=-\frac{\pi^3}{4},\quad \int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx=0.$$

Cum $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx=\operatorname{arctg} x\Big|_0^\infty=\frac{\pi}{2}$, rezultă $\displaystyle 2\int_0^\infty \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi^3}{2}-\frac{\pi^3}{4}$, deci $\displaystyle\int_0^\infty \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi^3}{8}$.

**III.** a) $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<\lambda\\ 0, & x>\lambda.\end{cases}$ Avem $\displaystyle\int_0^\infty |f(x)|\,dx=\int_0^\lambda dx=\lambda\in\mathbb{R}_+^*$, deci $f\in L^1((0,+\infty),\mathbb{C})$ şi deci $f$ admite transformată Fourier prin cosinus. Analog se procedează şi pentru funcţia $g$.

b) Transformatele Fourier directă şi inversă prin cosinus sunt date respectiv de formulele

$$F_c(\xi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos(\xi x)\,dx,\quad f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_c(\xi)\cos(\xi x)\,d\,\xi,$$

deci

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(x)g(x)\,dx &=\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\int_0^\infty (g(x)\int_0^\infty F_c(\xi)\cos(\xi x)\,d\xi)\,dx=\\ &=\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_c(\xi)(\int_0^\infty g(x)\cos(\xi x)\,dx)\,d\xi.\end{aligned}$$

Dar $G_c(\xi)=\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_0^\infty g(x)\cos(\xi x)\,dx$, deci $\displaystyle\int_0^\infty g(x)\cos(\xi x)\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}G_c(\xi)$; deci in final obţinem $\displaystyle\int_0^\infty f(x)g(x)\,dx=\int_0^\infty F_c(\xi)G_c(\xi)\,d\xi$.

c) Avem $F_c(\xi)=\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_0^\lambda \cos(\xi x)\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(\lambda\xi)}{\xi}$ si $G_c(\xi)=\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\tfrac{\sin(\mu\xi)}{\xi}$; de asemenea observăm că $f(x)\cdot g(x)=\begin{cases}1, & 0<x<\min(\lambda,\mu)\\ 0, & x>\min(\lambda,\mu)\end{cases}$. Utilizând rezultatul de la punctul b), avem

$$\begin{aligned}&\tfrac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(\lambda t)\cdot\sin(\mu t)}{t^2}\,dt=\int_0^\infty f(x)g(x)\,dx\min(\lambda,\mu)\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow\int_0^\infty \frac{\sin(\lambda t)\cdot\sin(\mu t)}{t^2}\,dt=\frac{\pi}{2}\min(\lambda,\mu).\end{aligned}$$

**IV.** a) $f(x)=\frac{a\cos x-a^2}{1-2a\cos x+a^2}$, $-1<a<1$. Coeficienţii seriei Fourier trigonometrice a funcţiei $f$ sunt daţi de:

$$\begin{aligned} a_n+ib_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a\cos x-a^2}{1-2a\cos x+a^2}e^{inx}\,dx = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{|z|=1}\frac{a\frac{z^2+1}{2z}-a^2}{1-2a\cos\frac{z^2+1}{2z}+a^2}\cdot z^n\cdot\frac{dz}{iz} = \frac{a}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{(z^2-2za+1)z^{n-1}}{-az^2+z(a^2+1)-a}\,dz. \end{aligned}$$

Pentru $n\geq 1$, fie

$$g(z)=\frac{(z^2-2za+1)z^{n-1}}{-a(z-\frac{1}{a})(z-a)};$$

polii funcţiei $g$ sunt $z_1=\frac{1}{a}$, $z_2=a$. Dar $a\in(-1,1)$, deci $z_2=a\in Int(|z|=1)$, $z_1=\frac{1}{a}\in Ext(|z|=1)$; rezultă

$$\text{Rez }(g,a)=\lim_{z\to a}\frac{(z^2-2za+1)z^{n-1}}{-a(z-\frac{1}{a})}=a^{n-1},$$

şi deci $\int_{|z|=1} g(z)\,dz = 2\pi i\cdot a^{n-1}$. Rezultă $a_n+ib_n=\frac{a}{2\pi i}\cdot 2\pi i\cdot a^{n-1}=a^n$, deci $a_n=a^n$ şi $b_n=0$ pentru $n\geq 1$.

Pentru $n=0$ se observă că funcţia

$$h(z)=\frac{z^2-2za+1}{-az(z-\frac{1}{a})(z-a)}$$

are polii $z_1=0$, $z_2=\frac{1}{a}$ si $z_3=a$ (pol de ordinul 1), iar $\frac{1}{a}\in Ext(|z|=1)$; obţinem

$$\begin{cases} \text{Rez }(h,0)=\lim\limits_{z\to a}\dfrac{z^2-2za+1}{-az^2+z(a^2+1)-a}=-\dfrac{1}{a} \\ \text{Rez }(h,a)=\lim\limits_{z\to a}\dfrac{z^2-2za+1}{-az(z-\frac{1}{a})}=\dfrac{1-a^2}{-a(a^2-1)}=\dfrac{1}{a}, \end{cases}$$

rezultă $\int_{|z|=1} h(z)\,dz = 2\pi i\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\right)=0 \Rightarrow a_0+ib_0=0\Rightarrow a_0=0$. În final obţinem $f(x)=\sum_{n\geq 1} a^n\cos(nx)$.

b) Aplicăm formula Parseval: $\frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq 1}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$, care se rescrie

$$\sum_{n\geq 1} a^{2n}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} a^2\left(\frac{\cos x-a}{1-2a\cos x+a^2}\right)^2 dx. \tag{35}$$

Dar pentru $a\in(-1,1)$ avem $\sum_{n\geq 1}(a^2)^n=\sum_{n\geq 0}(a^2)^n-1=\frac{1}{1-a^2}-1=\frac{a^2}{1-a^2}$, deci înlocuind în membrul stâng din (35) rezultă:

$$\frac{a^2}{1-a^2}=\frac{a^2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\cos x-a}{1-2a\cos x+a^2}\right)^2 dx \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\cos x-a}{1-2a\cos x+a^2}\right)^2=\frac{\pi}{1-a^2}.$$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza interuniversitară, anul II, profil mecanic, 2002-2003

**I.** 1) Impunem condiţia ca $v(x,y)$ să fie armonică

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \varphi'(t)\cdot\frac{\partial t}{\partial x} = \varphi'(t)\cdot 2\frac{x}{y},\ \ \frac{\partial v}{\partial y} = \varphi'(t)\cdot\frac{\partial t}{\partial y} = \varphi'(t)\cdot\frac{y^2-x^2}{y^2};$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \varphi''(t)\cdot 4\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \varphi'(t)\cdot 2\cdot\frac{1}{y},\ \ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \varphi''(t)\cdot\frac{\left(y^2-x^2\right)^2}{y^4} + \varphi'(t)\cdot\frac{2x^2}{y^3},$$

unde $t = \frac{x^2+y^2}{y}$. Atunci

$$\begin{aligned}\Delta v = 0\ \ &\Leftrightarrow \varphi''(t)\cdot\frac{(x^2+y^2)^2}{y^4} + 2\cdot\frac{\left(x^2+y^2\right)}{y^3}\cdot\varphi'(t) = 0\\ &\Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{y}\cdot\varphi''(t) + 2\varphi'(t) = 0\\ &\Leftrightarrow t\cdot\varphi''(t) + 2\varphi'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)} = -\frac{2}{t},\end{aligned}$$

deci $\ln\left(\varphi'(t)\right) = -2\ln(t) + \ln C_1 \Rightarrow \ln(\varphi'(t)) = \ln\left(\frac{C_1}{t^2}\right) \Rightarrow \varphi'(t) = \frac{C_1}{t^2}$, şi deci $\varphi(t) = -\frac{C_1}{t} + C_2$. Dacă $\varphi(t) \neq -\frac{C_1}{t} + C_2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, atunci $v(x,y)$ nu este armonică, deci nu se poate construi $f$. Dacă $\varphi(t) = -\frac{C_1}{t} + C_2$, atunci

$$v(x,y) = -\frac{C_1 y}{x^2+y^2} + C_2 \Rightarrow f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} = C_1\cdot\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + i\cdot C_1\cdot\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2};$$

Pentru $y = 0$, avem $f'(x) = -\frac{C_1}{x^2} \Rightarrow f(x) = \frac{C_1}{x} + C_3$; înlocuind $x$ cu $z$, obţinem $f(z) = \frac{C_1}{z} + C_3$.

b) Pentru a calcula integrala $I = \displaystyle\int_\gamma \frac{e^{1/z}}{(1-z)^2}dz$, unde $\gamma:\ |z| = r,\ r > 0,\ r \neq 1$ (vezi Figura 3); notăm $f(z) = \frac{e^{1/z}}{(1-z)^2}$. Se observă că $f$ are două puncte singulare: $z = 0$ (punct esenţial) şi $z = 1$ (pol de ordin 2). Avem Rez $(f,0) = c_{-1}$ din dezvoltarea în serie Laurent a lui $f$ în jurul lui 0. Observăm că funcţia $f$ se rescrie $f(z) = e^{1/z}\cdot\frac{1}{(1-z)^2} = e^{1/z}\cdot\left(\frac{1}{1-z}\right)'$, deci

$$f(z) = \left(1 + \frac{1}{z\cdot 1!} + \frac{1}{z^2\cdot 2!} + \cdots + \frac{1}{z^n\cdot n!} + \cdots\right)\left(1 + 2z + 3z^2 + \cdots + nz^{n-1} + \cdots\right)$$

pentru $|z| < 1$; atunci rezultă

$$c_{-1} = \frac{1}{1!} + \frac{2}{2!} + \frac{3}{3!} + \cdots + \frac{n}{n!} + \cdots = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = e,$$

deci Rez $(f,0) = e$. Pe de altă parte,

$$\text{Rez }(f,1) = \lim_{z\to 1}\left[(z-1)^2\cdot\frac{e^{1/z}}{(1-z)^2}\right] = \lim_{z\to 1} e^{1/z}\left(-\frac{1}{z^2}\right) = -e.$$

Pentru raza cercului $\gamma$, apare discuţia:

a) dacă $r < 1 \Rightarrow I = 2\pi i \cdot$ Rez $(f, 0) = 2\pi i e$;

b) dacă $r > 1 \Rightarrow I = 2\pi i \cdot ($ Rez $(f, 0) +$ Rez $(f, 1)) = 0$.

**II.** Avem $r \in [0, 1)$; $f(\theta) = \frac{1-r^2}{2(1-2r\cos\theta+r^2)}$. Ca să determinăm coeficienţii $a_n$ şi $b_n$ ai seriei trigonometrice Fourier, calculăm $a_n + ib_n = \frac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cdot e^{in\theta} d\theta$; obţinem

$$a_n + ib_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2} \cdot e^{in\theta} d\theta = \frac{1-r^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{in\theta}}{1-2r\cos\theta+r^2} d\theta.$$

Efectuăm schimbarea de variabilă $e^{i\theta} = z$, (deci $\cos\theta = \frac{z^2+1}{2z}$ şi $d\theta = \frac{dz}{iz}$) şi rezultă

$$a_n + ib_n = \frac{1-r^2}{2\pi}\int_{|z|=1} \frac{z^n}{1-2r\cdot\frac{z^2+1}{2z}+r^2} \cdot \frac{dz}{iz} = \frac{1-r^2}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{z^n}{z-r(z^2+1)+r^2 z} \cdot dz.$$

Fie $g(z) = \frac{z^n}{-rz+z(1+r^2)-r}$. Punctele singulare ale funcţiei $g$ sunt $z_1 = r$ şi $z_2 = \frac{1}{r}$, dar cum $r \in [0, 1)$, rezultă că $z_1 \in Int\,(\gamma)$, iar $z_2 \in Ext\,(\gamma)$; $z_1$ este pol de ordinul unu, deci

$$\text{Rez } (g, r) = \lim_{z \to r} (z - r) \cdot \frac{z^n}{-r\,(z-r)\left(z-\frac{1}{r}\right)} = \frac{r^n}{-r\left(r-\frac{1}{r}\right)} = \frac{r^n}{1-r^2}.$$

Atunci $a_n + ib_n = 2\pi i \cdot \frac{1-r^2}{2\pi i} \cdot \frac{r^n}{1-r^2} = r^n$, de unde $a_n = r^n$ şi $b_n = 0$. Pentru $n = 0$, rezultă $a_0 = 1$, de unde obţinem dezvoltarea în serie trigonometrică Fourier a funcţiei $f$, $f(\theta) = \frac{1}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cdot \cos(n\theta)$.

**III.** a) Folosim definiţia transformatei Fourier $\hat{f}(\lambda) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{i\lambda x} dx$ de unde rezultă $\hat{f}_c(\lambda) = \displaystyle\int_0^{\infty} f(x) \cdot \cos(\lambda x)\, dx$. Pentru $f(x) = \frac{1}{(x^2+4)^2}$, avem

$$\hat{f}_c(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2+4)^2} \cdot \cos(\lambda x) dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+4)^2} \cdot \cos(\lambda x) dx,$$

unde s-a folosit paritatea integrandului. Notăm $\hat{f}_c(\lambda) = I_1$, şi construim integrala definită improprie $I_2 = \frac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+4)^2} \sin(\lambda x) dx$. Atunci

$$I_1 + iI_2 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+4)^2} \cdot e^{i\lambda x} dx.$$

Fie $\gamma : \gamma_R \cup [-R, R]$; $R > 2$ (vezi Figura 3). Fie $g(z) = \frac{1}{(z^2+4)^2} \cdot e^{i\lambda z}$. Atunci, din teorema reziduurilor, obţinem $\displaystyle\int_\gamma g(z) dz = 2\pi i \cdot$ Rez $(g, 2i)$. Dar

$$\int_\gamma g(z) dz = \int_{\gamma_R} g(z) dz + \int_{-R}^{R} g(x) dx = 2\pi i \cdot \text{Rez } (g, 2i). \tag{36}$$

Din lema lui Jordan, avem $\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} g(z)dz = 0$, deci relaţia (36) conduce pentru $R\to\infty$ la egalitatea $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = 2\pi i\cdot$ Rez $(g,2i)$. Dar $z=2i$ este pol de ordin doi, deci

$$\text{Rez }(g,2i) = \lim_{z\to 2i}\left[(z-2i)^2\cdot\frac{e^{i\lambda z}}{(z-2i)^2(z+2i)^2}\right]' = \lim_{z\to 2i}\frac{e^{i\lambda z}(i\lambda z-2\lambda-2)}{(z+2i)^3} = e^{-2\lambda}\cdot\frac{2\lambda+1}{32i}.$$

Atunci

$$I_1+iI_2 = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i\cdot e^{-2\lambda}\cdot\frac{2\lambda+1}{32i} = \frac{\pi(2\lambda+1)}{32\cdot e^{2\lambda}},$$

de unde rezultă $\hat{f}_c(\lambda) = I_1 = \frac{\pi(2\lambda+1)}{32\cdot e^{2\lambda}}$.

b) Obţinem $\hat{g}_s(\lambda) = \int_0^\infty \frac{x}{(x^2+4)^2}\cdot\sin(\lambda x)dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin(\lambda x)}{(x^2+4)^2}dx.$

Notăm $J_2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin(\lambda x)}{(x^2+4)^2}dx$ şi construim $J_1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos(\lambda x)}{(x^2+4)^2}dx$. Calculăm

$$J_1+iJ_2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{(x^2+4)^2}\cdot e^{i\lambda x}dx.$$

Fie $h(z) = \frac{z}{(z^2+4)^2}\cdot e^{i\lambda z}$. Printr-o construcţie similară cu cea de la punctul a), obţinem $J_1+iJ_2 = 2\pi i\cdot$ Rez $(h,2i)$. Cum $z=2i$ este pol de ordinul doi pentru $h(z)$, avem

$$\begin{aligned}\text{Rez }(h,2i) &= \lim_{z\to 2i}\left[(z-2i)^2\cdot\frac{ze^{i\lambda z}}{(z+2i)^2(z-2i)^2}\right]'\\ &= \lim_{z\to 2i}\frac{e^{i\lambda z}\left(z^2i\lambda - z - 2\lambda z + 2i\right)}{(z+2i)^3} = \frac{\lambda e^{-2\lambda}}{8}.\end{aligned}$$

Rezultă $J_1+iJ_2 = 2\pi i\cdot\frac{\lambda e^{-2\lambda}}{8} = \frac{\pi i\lambda}{4e^{2\lambda}}$, de unde $J_2 = \frac{\pi\lambda}{4e^{2\lambda}}$ şi deci $\hat{g}_s(\lambda) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi\lambda}{4e^{2\lambda}} = \frac{\pi\lambda}{8e^{2\lambda}}$.

**IV.** Aplicăm transformarea Laplace ecuaţiei integrale. Notând $\mathcal{L}[\varphi] = \mathcal{L}[\varphi(t)](p)$, avem

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}[\varphi(t)](p) - \mathcal{L}\left[\int_0^t e^{t-u}(t-u)\varphi(u)du\right](p) = \mathcal{L}[\cos t](p)\\ &\Leftrightarrow \mathcal{L}[\varphi] - \mathcal{L}\left[e^t\cdot t*\varphi(t)\right] = \frac{p}{p^2+1} \Leftrightarrow \mathcal{L}[\varphi] - \mathcal{L}\left[e^t\cdot t\right]\cdot\mathcal{L}[\varphi] = \frac{p}{p^2+1}\\ &\Leftrightarrow \mathcal{L}[\varphi] - \frac{1}{(p-1)^2}\cdot\mathcal{L}[\varphi] = \frac{p}{p^2+1} \Leftrightarrow \frac{p^2-2p}{(p-1)^2}\cdot\mathcal{L}[\varphi] = \frac{p}{p^2+1}\\ &\Leftrightarrow \mathcal{L}[\varphi] = \frac{(p-1)^2}{(p-2)(p^2+1)} = \frac{A}{p-2} + \frac{Bp+C}{p^2+1}.\end{aligned}$$

Obţinem $A=\frac{1}{5},\ B=\frac{4}{5},\ C=-\frac{2}{5}$. Înlocuind $A,B,C$ în descompunerea lui $\mathcal{L}[\varphi]$ în fracţii simple, rezultă

$$\mathcal{L}[\varphi] = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p-2} + \frac{4}{5}\cdot\frac{p}{p^2+1} - \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{p^2+1} = \frac{1}{5}\mathcal{L}[e^{2t}] + \frac{4}{5}\mathcal{L}[\cos t] - \frac{2}{5}\mathcal{L}[\sin t].$$

Deci $\varphi(t) = \frac{1}{5}e^{2t} + \frac{4}{5}\cos t - \frac{2}{5}\sin t$.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza interuniversitară, anul II, profil mecanic, 2003-2004

**I.** $I = \int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^{2004}} dx$. Cum $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^{2004}}$ este funcţie pară, rezultă $I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^{2004}} dx$. Fie $g(z) = \frac{1}{(z^2+1)^{2004}}$ şi $\gamma = \gamma_R \cup [-R, R]$, $R > 1$ (vezi Figura 3). Din teorema reziduurilor, avem $\int_\gamma g(z)dz = 2\pi i \cdot$ Rez $(g, i)$. Dar $\int_\gamma g(z)dz = \int_{\gamma_R} g(z)dz + \int_{-R}^{R} g(x)dx = 2\pi i \cdot$ Rez $(g, i)$. Pentru $R \to \infty$, deoarece $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} g(z)dz = 0$ (lema lui Jordan), rezultă $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = 2\pi i \cdot$ Rez $(g, i)$. Dar $z = i$ este pol de ordin 2004 pentru $g(z)$, deci

$$\begin{aligned}
\text{Rez }(g,i) &= \lim_{z\to i} \frac{1}{2003!} \left[ (z-i)^{2004} \cdot \frac{1}{(z-i)^{2004} \cdot (z+i)^{2004}} \right]^{(2003)} \\
&= \frac{1}{2003!} \cdot \lim_{z\to i} \left( \frac{-2004}{(z+i)^{2005}} \right)^{(2002)} = \frac{1}{2003!} \lim_{z\to i} \left( \frac{(-2004)(-2005)}{(z+i)^{2006}} \right)^{(2001)} \\
&= \cdots = \frac{1}{2003!} \cdot \lim_{z\to i} \frac{(-1)^{2003} \cdot 2004 \cdot 2005 \cdot \cdots \cdot 4006}{(z+i)^{4007}} \\
&= -\frac{(4006)!}{(2003!)^2} \cdot \frac{1}{2^{4007} \cdot i^{4007}} = \frac{(4006)!}{(2003!)^2} \cdot \frac{1}{2^{4007} \cdot i}.
\end{aligned}$$

Rezultă $I = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \cdot \frac{(4006)!}{(2003!)^2} \cdot \frac{1}{2^{4007} . i} = \frac{\pi (4006)!}{2^{4007} . (2003!)^2}$.

**II.** Calcuăm $\Delta v$, pentru funcţia $v(x, y) = e^x \cdot \sin y - \frac{y}{x^2+y^2}$.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y + \frac{y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y - \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = e^x \cos y + \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = e^x \sin y + \frac{2y(x^2+y^2)^2 - 2xy \cdot 2(x^2+y^2) \cdot 2x}{(x^2+y^2)^4} = e^x \sin y + \frac{2y^3 - 6x^2 y}{(x^2+y^2)^3};$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -e^x \sin y + \frac{2y(x^2+y^2)^2 - (y^2-x^2) \cdot 2(x^2+y^2) \cdot 2y}{(x^2+y^2)^4} = -e^x \sin y + \frac{6x^2 y - 2y^3}{(x^2+y^2)^3}.$$

Deci $\Delta v = 0 \Rightarrow v$ este armonică. Obţinem succesiv

$$\begin{aligned}
&f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)} + i \left[ e^x \sin y + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \right]; \\
&y = 0 \Rightarrow f'(x) = e^x - \frac{1}{x^2} \Rightarrow f(x) = e^x + \frac{1}{x} + C,\ C \in \mathbb{R}; \\
&x \Rightarrow z \Rightarrow f(z) = e^z + \frac{1}{z} + C,\ C \in \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Impunem condiţia $f(1) = e \Rightarrow e + 1 + C = e \Rightarrow C = -1$; funcţia olomorfă căutată este $f(z) = e^z + \frac{1}{z} - 1$.

**III.** Determinăm coeficienţii seriei trigonometrice Fourier pentru funcţia $f(\theta) = \frac{a \sin \theta}{a^2 - 2a \cos \theta + 1}$, $|a| < 1$; calculăm

$$a_n + ib_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cdot e^{i\theta n} d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a \sin \theta}{a^2 - 2a \cos \theta + 1} \cdot e^{in\theta} d\theta.$$

Schimbarea de variabilă $e^{i\theta} = z$ conduce la relaţiile $\sin \theta = \frac{z^2-1}{2iz}$; $\cos \theta = \frac{z^2+1}{2z}$; $e^{in\theta} = z^n$; $d\theta = \frac{dz}{iz}$; deci obţinem

$$a_n + ib_n = \frac{1}{\pi} \int_{|z|=1} \frac{a \cdot \frac{z^2-1}{2iz}}{a^2 - 2a \cdot \frac{z^2+1}{2z} + 1} \cdot z^n \cdot \frac{dz}{iz} = -\frac{a}{2\pi} \int_{|z|=1} \frac{\left(z^2 - 1\right) z^n}{z\left(-az^2 + za^2 + z - a\right)} dz.$$

Fie $g(z) = \frac{(z^2-1)z^{n-1}}{-az^2 - za^2 + z - a}$. Distingem, în funcţie de valorile parametrului $n \in \mathbb{N}$, următoarele cazuri:

*Cazul 1.* Pentru $n \geq 1$ funcţia $g$ are două puncte singulare $z_1 = a$; $z_2 = \frac{1}{a}$ care sunt poli de ordinul întâi, dar cum $|a| < 1$, rezultă $\displaystyle\int_{|z|=1} g(z) dz = 2\pi i \cdot \text{Rez}\ (g, a)$. Dar

$$\text{Rez}\ (g, a) = \lim_{z \to a} (z - a) \cdot \frac{(z^2 - 1) z^{n-1}}{-a(z - a)\left(z - \frac{1}{a}\right)} = \frac{\left(a^2 - 1\right) \cdot a^{n-1}}{-a\left(a - \frac{1}{a}\right)} = -a^{n-1},$$

de unde $a_n + ib_n = -\frac{a}{2\pi} \cdot 2\pi i \cdot \left(-a^{n-1}\right) = i \cdot a^n$, şi deci $a_n = 0$; $b_n = a^n$, $n \geq 1$.

*Cazul 2.* $n = 0 \Rightarrow g(z) = \frac{z^2-1}{z(-az^2+za^2+z-a)}$ are trei puncte singulare: $z_1 = 0$; $z_2 = a$; $z_3 = \frac{1}{a}$ şi avem $\displaystyle\int_{|z|=1} g(z) dz = 2\pi i (\text{Rez}\ (g, 0) + \text{Rez}\ (g, a))$. Calculăm cele două reziduuri

$$\begin{cases} \text{Rez}\ (g, 0) = \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{z^2 - 1}{-az^2 + za^2 + z - a} = \dfrac{1}{a} \\ \text{Rez}\ (g, a) = \lim\limits_{z \to a} (z - a) \cdot \dfrac{z^2 - 1}{z\,(-a)\,(z - a)\left(z - \frac{1}{a}\right)} = \dfrac{a^2 - 1}{-a^2\left(a - \frac{1}{a}\right)} = -\dfrac{1}{a}, \end{cases}$$

de unde $\displaystyle\int_{|z|=1} g(z) dz = 0 \Rightarrow a_0 = 0$. Dezvoltarea în serie trigonometrică Fourier este deci $f(\theta) = \displaystyle\sum_{n \geq 1} a^n \cdot \sin(n\theta)$.

**IV.** Vom folosi definiţiile

$$\hat{f}_c(\lambda) = \int_0^\infty f(x) \cdot \cos(\lambda x) dx, \quad \hat{f}_s(\lambda) = \int_0^\infty f(x) \cdot \sin(\lambda x) dx.$$

Notăm $I_1 = \hat{f}_c(\lambda) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-at} \cdot \cos(\lambda t)\, dt$, $I_2 = \hat{f}_s(\lambda) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-at} \cdot \sin(\lambda t)\, dt$. Atunci

$$I_1 + iI_2 = \int_0^\infty e^{-at} \cdot e^{i\lambda t} dt = \int_0^\infty e^{t(-a+i\lambda)} dt = \left.\frac{e^{t(-a+i\lambda)}}{-a + i\lambda}\right|_0^\infty = 0 - \frac{1}{-a + i\lambda} = \frac{1}{a - i\lambda},$$

deci $I_1 + iI_2 = \frac{a+i\lambda}{a^2+\lambda^2}$, de unde rezultă $I_1 = \frac{a}{a^2+\lambda^2}$ şi $I_2 = \frac{\lambda}{a^2+x^2}$.

**V.** Notăm $\mathcal{L}\left[x\right](p) = X(p)$ şi $\mathcal{L}[y](p) = Y(p)$. Aplicând transformarea Laplace sistemului, acesta devine:

$$\begin{cases} p^2X(p) - 2 + 2pX(p) + X(p) + p^2Y(p) - p + 2 + pY(p) - p = \dfrac{1}{p} \\ 2pX(p) + 2X(p) + p^2Y(p) - p + 2 + 2pY(p) - 2 = \dfrac{2}{p^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (p+1)^2 \cdot X(p) + (p^2+p)Y(p) = \dfrac{2p^2+1}{p} \\ 2(p+1) \cdot X(p) + (p^2+2p)Y(p) = \dfrac{p^3+2}{p^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (p+1)X(p) + pY(p) = \dfrac{2p^2+1}{p(p+1)} \\ 2(p+1)X(p) + \left(p^2+2p\right)Y(p) = \dfrac{p^3+2}{p^2}. \end{cases} \tag{37}$$

Reducem $X(p)$ şi obţinem

$$p^2 \cdot Y(p) = \frac{p^3+2}{p^2} - \frac{4p^2+2}{p(p+1)} \Rightarrow Y(p) = \frac{1}{p} + \frac{2}{p^4} - \frac{4p^2+2}{p^3(p+1)}.$$

Funcţia $G(p) = \frac{4p^2+2}{p^3(p+1)}e^{pt}$, are polii $p = 0$ (pol de ordin 3) şi $p = -1$ (pol de ordinul 1), şi avem

$$\begin{cases} \text{Rez }(G,-1) = \lim\limits_{p\to-1} \dfrac{4p^2+2}{p^3}e^{pt} = -6e^{-t} \\ \text{Rez }(G,0) = \lim\limits_{p\to0} \dfrac{1}{2!}\left(\dfrac{4p^2+2}{p+1} \cdot e^{pt}\right)'' = 6 - 2t + t^2, \end{cases}$$

deci $y(t) = 1 + \frac{t^3}{3} + 6e^{-t} - 6 + 2t + t^2 = \frac{1}{3}t^3 + t^2 + 2t - 5 + 6e^{-t}$. Revenim la sistemul (37) şi reducem $Y(p)$; obţinem

$$p(p+1)X(p) = \frac{\left(2p^2+1\right)(p+2)}{p(p+1)} - \frac{p^3+2}{p^2} = \frac{2p^3+4p^2+p+2}{p(p+1)} - \frac{p^3+2}{p^2} = \frac{p^4+3p^3+p^2-2}{p^2(p+1)},$$

de unde rezultă

$$X(p) = \frac{p^4+3p^3+p^2-2}{p^3(p+1)^2} = \frac{p^2(p+1)^2+p^3-2}{p^3(p+1)^2} = \frac{1}{p} + \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{2}{p^3(p+1)^2}.$$

Funcţia $G(p) = \frac{2e^{pt}}{p^3(p+1)^2}$ are polii $p = 0$ (pol de ordinul trei) şi $p = -1$ (pol de ordinul doi); calculăm $\text{Rez }(G,0) = \lim\limits_{p\to0}\left(\dfrac{e^{pt}}{(p+1)^2}\right)''$; obţinem

$$\begin{aligned} \text{Rez }(G,0) &= \lim_{p\to0}\left(\frac{te^{pt}(p+1)^2 - e^{pt}\cdot 2(p+1)}{(p+1)^4}\right)' = \lim_{p\to0}\left(\frac{e^{pt}\left(tp+t-2\right)}{(p+1)^3}\right)' \\ &= \lim_{p\to0}\frac{\left[te^{pt}\left(tp+t-2\right) + e^{pt}\cdot t\right](p+1)^3 - e^{pt}\cdot 3(tp+t-2)(p+1)^2}{(p+1)^6} \\ &= t(t-2) + t - 3(t-2) = t^2 - 4t + 6; \end{aligned}$$

analog, $\text{Rez}\,(G,-1) = 2\lim\limits_{p\to -1}\left(\dfrac{e^{pt}}{p^3}\right)' = 2\lim\limits_{p\to -1}\dfrac{te^{pt}\cdot p^3 - e^{pt}\cdot 3p^2}{p^6} = 2\dfrac{te^{-t}(-1)-3e^{-t}}{1}.$

În concluzie, obţinem soluţia

$$x(t) = 1 + te^{-t} - t^2 + 4t - 6 + 2e^{-t}(t+3) = e^t(3t+6) - t^2 + 4t - 5.$$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza interuniversitară, anul II, profil mecanic, 2004-2005

**I.** a) Acelaşi subiect cu faza interunversitară, profil electric (19.05.2007); folosim $u(x,y) = \varphi(\frac{y}{x})$; se obţine rezultatul $f(z) = -iC_1 \ln z + C_3$, $C_3 \in \mathbb{C}$.

b) $I = \displaystyle\int_{|z-1|=r} z^2\cdot \sin\left(\frac{\pi}{z}\right)dz$, $r\in(0,2)$, $r\neq 1$. Avem conturul $|z-1| = r$, cercul $C((1,0),r)$ (vezi figura).

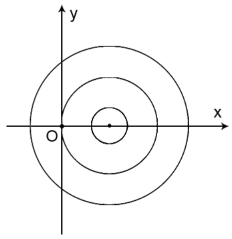


**Figura 7.**

Fie $g(z) = z^2\sin(\frac{\pi}{2})$; atunci $z=0$ este punct singular esenţial pentru $g$ şi avem $\text{Rez}\,(g,0) = C_{-1}$ coeficientul lui $\frac{1}{z}$ din dezvoltarea în serie Laurent a lui $g$ în jurul lui $z=0$. Avem

$$\sin\left(\frac{\pi}{z}\right) = \frac{\pi}{z} - \frac{\pi^3}{z^3\cdot 3!} + \frac{\pi^5}{z^5\cdot 5!} - \cdots + \frac{(-1)^n\pi^{2n+1}}{z^{2n+1}\cdot(2n+1)!} + \cdots,$$

deci $z^2\sin\left(\frac{\pi}{z}\right) = \pi z - \frac{\pi^3}{z\cdot 3!} + \frac{\pi^5}{z^3\cdot 5!} + \cdots$, de unde rezultă $c_{-1} = -\frac{\pi^3}{3!}$. Distingem două cazuri în calculul integralei:

i) $r\in(0,1) \Rightarrow I = 0$ (teorema fundamentală a lui Cauchy);

ii) $r\in(1,2) \Rightarrow I = 2\pi i\cdot \text{Rez}\,(g,0) = 2\pi i\cdot\frac{-\pi^3}{6} = \frac{-\pi^4 i}{3}$.

**II.** $f:(-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$, $f(t) = \frac{\pi}{2sh\pi}\cdot e^t$. Vom dezvolta $f$ în serie Fourier complexă, apoi vom obţine seria Fourier trigonometrică.

$$\begin{aligned}
c_{-n} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\pi}{2sh\pi}\cdot e^t\cdot e^{int}dt = \frac{1}{4sh\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{t(1+in)}dt = \frac{1}{4sh\pi}\left(\left.\frac{e^{t(1+in)}}{1+in}\right|_{-\pi}^{\pi}\right) = \\
&= \frac{1}{4sh\pi}\cdot\frac{e^{\pi(1+in)} - e^{-\pi(1+in)}}{1+in} = \frac{1}{4sh\pi}\cdot(-1)^n\cdot\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{1+in} = \\
&= \frac{(-1)^n}{2(1+in)} = \frac{(-1)^n(1-in)}{2(1+n^2)}.
\end{aligned}$$

Rezultă $a_n = \frac{(-1)^n}{1+n^2}$ şi $b_n = \frac{(-1)^{n+1}\cdot n}{1+n^2}$, iar $c_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow a_0 = 1$. Prin urmare, seria Fourier trigonometrică este:

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n\geq 1}\left[\frac{(-1)^n}{1+n^2}\cdot\cos(nt) + \frac{(-1)^{n+1}\cdot n}{1+n^2}\cdot\sin(nt)\right].$$

Pentru $t=0$, obţinem $f(0) = \frac{1}{2} + \underbrace{\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{1+n^2}}_{S}$, deci $S = f(0) - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2sh\pi} - \frac{1}{2}$.

**III.** $x'' - 2x' + 5x = e^t\cos 2t,\ \ x(0) = x'(0) = 1$. Aplicând transformarea Laplace ecuaţiei date, rezultă $\mathcal{L}[x''](p) - 2\mathcal{L}[x'](p) + 5\mathcal{L}[x](p) = \mathcal{L}[e^t\cos 2t](p)$. Deci, notând $X(p) = \mathcal{L}[x](p)$, avem

$$p^2X(p) - p - 1 - 2(pX(p) - 1) + 5X(p) = \mathcal{L}[\cos 2t](p-1) = \frac{(p-1)}{(p-1)^2+4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (p^2 - 2p + 5)X(p) - p + 1 = \frac{p-1}{p^2-2p+5} \Leftrightarrow X(p) = \frac{p-1}{p^2-2p+5} + \frac{p-1}{(p^2-2p+5)^2},$$

deci $X(p) = \mathcal{L}[e^t\cos 2t](p) + \frac{p-1}{(p^2-2p+5)^2}$. Notăm $G(p) = \frac{(p-1)e^{pt}}{(p^2-2p+5)^2}$. Ecuaţia $p^2 - 2p + 5 = 0$ are rădăcinile $p_{1,2} = 1 \pm 2i$, care sunt poli de ordinul 2. Obţinem:

$$\begin{cases} \text{Rez}\,(G, 1+2i) = \lim\limits_{p\to 1+2i}\left(\dfrac{(p-1)e^{pt}}{(p-1+2i)^2}\right)' = \dfrac{e^{(1+2i)t}t}{8i} \\ \text{Rez}\,(G, 1-2i) = \lim\limits_{p\to 1-2i}\left(\dfrac{(p-1)e^{pt}}{(p-1-2i)^2}\right)' = \dfrac{e^{(1-2i)t}t}{-8i}, \end{cases}$$

deci

$$\begin{aligned} x(t) &= e^t\cos 2t + \frac{e^{(1+2i)t}t}{8i} - \frac{e^{(1-2i)t}t}{8i} = \\ &= e^t\cos 2t + e^t t\frac{(e^{2it} - e^{-2it})}{2i}\frac{1}{4} = \\ &= e^t\cos 2t + \frac{e^t t\sin(2t)}{4}. \end{aligned}$$

**IV.** Pentru a obţine rezultatul corect folosim definiţia transformatei prin sinus $\hat{f}_s(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin(\xi x)\,dx$. În acest caz definiţia transformării Fourier este $\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{i\xi x}\,dx$. Cum $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ este funcţie impară rezultă că funcţia $f(x)\sin(\xi x)$ este pară, deci

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(x)\sin(\xi x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(x)\sin(\xi x)\,dx.$$

Pe de altă parte $f(x)\cos(\xi x)$ este funcţie impară, deci $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)\cos(\xi x)\,dx = 0$.

Atunci $i\cdot\hat f(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(x)(\cos(\xi x)+i\sin(\xi x))\,dx$, şi deci

$$\begin{aligned}
\hat f(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot i}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\xi x}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot i}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-x^2/2}e^{i\xi x}\,dx=\\
&= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot i}\int_{-\infty}^{\infty}(e^{-x^2/2})'e^{i\xi x}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot i}\left(e^{-x^2/2}e^{i\xi x}\Big|_{-\infty}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/2}i\xi e^{i\xi x}\,dx\right)=\\
&= \tfrac{\xi}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/2}e^{i\xi x}\,dx=\frac{\xi}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(\frac{x^2}{2}-i\xi x)}\,dx=\\
&= \tfrac{\xi}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(\frac{x-i\xi}{\sqrt2})^2-\frac{\xi}{2}^2}\,dx=\frac{\xi e^{-\frac{\xi^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(\frac{x-i\xi}{\sqrt2})^2}\,dx=\\
&= \frac{\xi e^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\sqrt2\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}\,dy=\xi e^{-\xi^2/2}.
\end{aligned}$$

unde am efectuat substituţia $x-i\xi=\sqrt2 y$. Deci transformarea Fourier prin sinus a funcţiei $f(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}$ coincide cu funcţia.

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"

### Faza interuniversitară, anul II, profil electric, 2005-2006

**I.** a) Verificăm armonicitatea funcţiei $v(x,y)=e^{-x}(x\sin y-y\cos y)$. Calculăm derivatele parţiale:

$$\frac{\partial v}{\partial x}=e^{-x}(\sin y-x\sin y+y\cos y),\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=e^{-x}(x\cos y-\cos y+y\sin y),$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=-e^{-x}(2\sin y-x\sin y+y\cos y),\quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=e^{-x}(2\sin y-x\sin y+y\cos y),$$

de unde rezultă $\Delta v=0$, deci $v$ este armonică.

b) Determinăm funcţia olomorfă $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$. Avem

$$f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}=e^{-x}(x\cos y-\cos y+y\sin y)+ie^{-x}(\sin y-x\sin y+y\cos y).$$

Pentru $y=0$, $f'(x)=e^{-x}(x-1)$, deci

$$f(x)=\int e^{-x}(x-1)dx=-e^{-x}(x-1)+\int e^{-x}dx=-e^{-x}(x-1)-e^{-x}+C=-xe^{-x}+C.$$

Substituţia $x\to z$ conduce la $f(z)=-ze^{-z}+C$, iar $f(0)=0\Leftrightarrow C=0$, deci $f(z)=-ze^{-z}$.

c) Avem $I=\displaystyle\int_{|z|=r}\frac{f(\frac1z)}{1-z}dz=\int_{|z|=r}\frac{-\frac1z e^{-1/z}}{1-z}dz=\int_{|z|=r}\frac{e^{-1/z}}{z(z-1)}dz$. Numerele complexe $z\in\mathbb{C}\equiv\mathbb{R}^2$ care satisfac condiţia $|z|=r$ au drept margini în planul complex punctele cercului $C((0,0),r)$. Distingem trei situaţii (vezi figura): i) $0<r<1$; ii) $r=1$; iii) $r>1$.

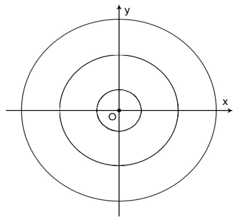


**Figura 8.**

Fie $g(z) = \frac{e^{-1/z}}{z(z-1)}$. Observăm că $z = 0$ şi $z = 1$ sunt singularităţi ale lui $g$, $z = 0$ este punct singular esenţial şi $z = 1$ este pol de ordinul 1. Atunci

$$\text{Rez }(g, 1) = \lim_{z \to 1} \frac{e^{-1/z}}{z} = \frac{e^{-1}}{1} = \frac{1}{e},$$

iar Rez $(g, 0) = c_{-1}$ este coeficentul lui $\frac{1}{z}$ din dezvoltarea în serie Laurent a lui $g$ în jurul lui $z = 0$. Folosind $e^{-1/z} = 1 - \frac{1}{z \cdot 1!} + \frac{1}{z^2 \cdot 2!} - \frac{1}{z^3 \cdot 3!} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{1}{z^n \cdot n!} + \cdots$, obţinem

$$\frac{e^{-1/z}}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2 \cdot 1!} + \frac{1}{z^3 \cdot 2!} - \cdots + (-1)^n \cdot \frac{1}{z^{n+1} \cdot n!} + \cdots .$$

Pe de altă parte avem $\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -1 - z - z^2 - \cdots - z^n - \cdots$, $|z| < 1$. Rezultă

$$g(z) = \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2 \cdot 1!} + \frac{1}{z^3 \cdot 2!} - \cdots + (-1)^n \cdot \frac{1}{z^{n+1} \cdot n!} + \cdots \right) (-1 - z - z^2 - \cdots - z^n - \cdots),$$

deci $c_{-1} = -1 + \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \cdots = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$.

i) Dacă $0 < r < 1$, atunci $I = 2\pi i \cdot$ Rez $(g, 0) = -\frac{2\pi i}{e}$.

ii) Dacă $r = 1$, atunci $I = 2\pi i \cdot$ Rez $(g, 0) + \pi i \cdot$ Rez $(g, 1) = -\frac{2\pi i}{e} + \frac{\pi i}{e} = -\frac{\pi i}{e}$.

iii) Dacă $r > 1$, atunci $I = 2\pi i($ Rez $(g, 0) +$ Rez $(g, 1)) = 2\pi i(\frac{1}{e} - \frac{1}{e}) = 0$.

**II.** Dezvoltarea în serie Fourier a funcţiei $f$ este

$$f(x) = \tfrac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cdot \cos x + b_n \cdot \sin x).$$

Se observă că $f(x) = ch(ax)$ este funcţie pară, deci coeficienţii seriei sunt $b_n = 0$, $n \geq 1$; $a_n = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^\pi ch(ax) \cdot \cos(nx)dx$, $n \geq 0$. Integrând prin părţi, obţinem

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{n} ch(ax) \cdot \sin(nx) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi sh(ax) \cdot \frac{a}{n} \cdot \sin(nx)dx \right] = \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ sh(ax) \cdot \frac{a}{n^2} \cdot \cos(nx) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi ch(ax) \cdot \frac{a^2}{n^2} \cdot \cos(nx)dx \right] = \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{a}{n^2} \cdot sh(a\pi) \cdot (-1)^n - \frac{a^2}{n^2} \int_0^\pi ch(ax) \cdot \cos(nx)dx \right]. \end{aligned}$$

Obţinem astfel relaţia

$$a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{a}{n^2} \cdot sh(a\pi) \cdot (-1)^n - \frac{a^2}{n^2} \cdot a_n \Leftrightarrow a_n = \frac{2a \cdot sh(a\pi) \cdot (-1)^n}{\pi(n^2 + a^2)};$$

de asemenea, $a_0 = \frac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi ch(ax)dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{sh(ax)}{a}\Big|_0^\pi = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{sh(a\pi)}{a}$. Atunci $f$ are seria trigonometrică Fourier asociată

$$f(x) = \frac{1}{\pi a}\cdot sh(a\pi) + \sum_{n\geq 1}\frac{2a(-1)^n}{\pi(n^2+a^2)}\cdot sh(a\pi)\cdot\cos(nx)$$

Pentru determinarea sumei seriei $S_1 = \displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2+a^2}$, luăm $x=\pi$ în dezvoltarea în serie Fourier a lui $f$. Rezultă $ch(a\pi) = \frac{1}{\pi a}\cdot sh(a\pi) + \frac{2a\cdot sh(a\pi)}{\pi}\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2+a^2}$, deci

$$S_1 = \frac{ch(a\pi) - \frac{1}{\pi a}\cdot sh(a\pi)}{\frac{2a\cdot sh(a\pi)}{\pi}} = \frac{\pi a\cdot ch(a\pi) - sh(a\pi)}{2a^2\cdot sh(a\pi)}.$$

Pentru determinarea sumei seriei $S_2 = \displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n^2+a^2)^2}$ vom folosi formula lui Parseval

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n^2+b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx.$$

În cazul nostru, avem

$$\frac{2sh^2(a\pi)}{\pi^2a^2} + \sum_{n\geq 1}\frac{4a^2\cdot sh^2(a\pi)}{\pi^2(n^2+a^2)^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} ch^2(ax)dx. \tag{38}$$

Calculăm integrala din membrul drept. Folosind paritatea funcţiei $ch$, obţinem

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} ch^2(ax)dx &= 2\int_0^\pi ch^2(ax)dx = 2\int_0^\pi\left(\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}\right)^2 dx = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\pi (e^{2ax}+2+e^{-2ax})dx = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2ax}}{2a}\Big|_0^\pi + 2x\Big|_0^\pi - \frac{e^{-2ax}}{2a}\Big|_0^\pi\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2a\pi}-1}{2a} + 2\pi - \frac{e^{-2a\pi}-1}{2a}\right) = \frac{1}{2a}sh(2a\pi)+\pi,\end{aligned}$$

deci (38) se rescrie $\frac{2sh^2(a\pi)}{\pi^2a^2} + \frac{4a^2sh^2(a\pi)}{\pi^2}\cdot\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a\pi}\cdot sh(2a\pi)+1$, şi deci

$$S_2 = \frac{\frac{1}{2a\pi}\cdot sh(2a\pi) + 1 - \frac{2sh^2(a\pi)}{\pi^2a^2}}{\frac{4a^2sh^2(a\pi)}{\pi^2}} = \frac{-4sh^2(a\pi) + 2\pi^2a^2 + \pi a\cdot sh(2a\pi)}{4a^4\cdot sh^2(a\pi)}.$$

*Metoda 2.* Determinăm suma seriei $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2+a^2}$. Considerăm $f:(-\pi,\pi)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\pi}{2sh(a\pi)}\cdot e^{ax}$. Atunci coeficientul $c_{-n}$ din dezvoltarea funcţiei $f$ în serie Fourier complexă este

$$\begin{aligned} c_{-n} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\pi}{2sh(a\pi)}\cdot e^{ax+inx}dx = \frac{1}{4sh(a\pi)}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x(a+in)}dx = \\ &= \frac{1}{4sh(a\pi)}\cdot\left.\frac{e^{x(a+in)}}{a+in}\right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{4sh(a\pi)}\cdot\frac{e^{\pi(a+in)}-e^{-\pi(a+in)}}{a+in} = \\ &= \frac{1}{4sh(a\pi)}\cdot\frac{(-1)^n\cdot(e^{\pi a}-e^{-\pi a})}{a+in} = \frac{(-1)^n\cdot sh(\pi a)}{2sh(\pi a)}\cdot\frac{1}{a+in} = \frac{(-1)^n}{2}\cdot\frac{a-in}{a^2+n^2}, \end{aligned}$$

deci $a_n = \frac{(-1)^n\cdot a}{a^2+n^2}$; $b_n = \frac{(-1)^{n+1}\cdot n}{a^2+n^2}$; $a_0 = \frac{1}{a}$. Aplicând formula Parseval, rezultă

$$\frac{1}{2a^2}+\sum_{n\geq 1}\frac{a^2+n^2}{(a^2+n^2)^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\pi^2}{4sh^2(a\pi)}\cdot e^{2ax}dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2a^2}+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{4sh^2(a\pi)}\cdot\frac{e^{2a\pi}-e^{-2a\pi}}{2a} = \frac{\pi\cdot sh(a\pi)\cdot ch(a\pi)}{2a\cdot sh^2(a\pi)} = \frac{\pi\cdot ch(a\pi)}{2a\cdot sh(a\pi)}.$$

Obţinem în final $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi\cdot ch(a\pi)}{2a\cdot sh(a\pi)} - \frac{1}{2a^2} = \frac{\pi a\cdot ch(a\pi)-sh(a\pi)}{2a^2\cdot sh(a\pi)}$.

**III.** $\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)\cdot\cos(\omega t)dt = \frac{1}{(1+\omega^2)^2}$, $\omega > 0$. Folosind inversa transformării Fourier şi paritatea funcţiei din membrul drept, rezultă

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+\omega^2)^2}\cdot\cos(\omega t)d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+\omega^2)^2}\cdot\cos(\omega t)d\omega.$$

Pentru calculul ultimei integrale, notăm $I_1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+\omega^2)^2}\cdot\cos(\omega t)d\omega$ şi $I_2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+\omega^2)^2}\cdot\sin(\omega t)d\omega$. Se observă că $I_1$ este partea reală a integralei $I_1+iI_2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega t}}{(1+\omega^2)^2}d\omega$. Construim drumul $\gamma = \gamma_R\cup[-R,R]$ (vezi Fig. 3), unde $\gamma_R : x^2+y^2 = R^2$, $y > 0$, $R > 1$. Fie $g(z) = \frac{e^{itz}}{(1+z^2)^2}$. Deoarece $\gamma$ este drum închis, aplicând teorema reziduurilor, rezultă

$$\int_{\gamma} g(z)dz = 2\pi i\cdot \text{Rez }(g,i) \Leftrightarrow \int_{\gamma_R} g(z)dz + \int_{-R}^{R} g(x)dx = 2\pi i\cdot\text{Rez }(g,i).$$

Trecând la limită $R\to\infty$, obţinem $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} g(z)dz + \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = 2\pi i\cdot\text{Rez }(g,i)$.

Limita din membrul stâng este 0 (lema lui Jordan), deci $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = 2\pi i\cdot\text{Rez }(g,i)$.

Prin urmare $I_1+iI_2 = 2\pi i\cdot\text{Rez }(g,i)$. Dar $z = i$ este pol de ordinul 2, deci

$$\begin{aligned} \text{Rez }(g,i) &= \lim_{z\to 1}\left[(z-i)^2\cdot\frac{e^{itz}(i+z)}{(z-i)^2(z+i)^2}\right]' = \lim_{z\to i}\frac{e^{itz}\cdot it(z+i)^2+e^{itz}\cdot z(z+i)}{(z+i)^4} = \\ &= \lim_{z\to 1}\frac{e^{itz}(itz-t-2)}{(z+i)^3} = \frac{e^{-t(-t-t-2)}}{-8i} = \frac{e^{-t}(t+1)}{4i}. \end{aligned}$$

Atunci avem $I_1 + iI_2 = 2\pi i \cdot \frac{e^{-t}(t+1)}{4i} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{t+1}{e^t}$ şi deci $I_1 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{t+1}{e^t}$; prin urmare $f(t) = \frac{1}{\pi} \cdot I_1 = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{t+1}{e^t} = \frac{t+1}{2e^t}$.

*Observaţie.* Dacă s-a folosit formula cu $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ în faţa integralei, atunci $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot I_1$.

**IV.** $y'' + 4y = f(t)$, $y(0) = a, y'(0) = a$, $f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [2,3] \\ 0, & t \notin [2,3] \end{cases}$. Aplicăm ecuaţiei date transformarea Laplace şi notăm $\mathcal{L}[y](p) = Y(p)$. Obţinem

$$p^2Y(p) - a + 4Y(p) = \mathcal{L}[f(t)](p). \tag{39}$$

Dar $\mathcal{L}[f(t)](p) = \displaystyle\int_2^3 1 \cdot e^{-pt}dt = -\frac{e^{-pt}}{p}\Big|_2^3 = \frac{1}{p}(e^{-2p} - e^{-3p})$, deci din relaţia (39), rezultă $Y(p)(p^2 + 4) = a + \frac{1}{p}(e^{-2p} - e^{-3p})$, deci

$$Y(p) = \frac{a}{p^2 + 4} + \frac{e^{-2p} - e^{-3p}}{p(p^2 + 4)}. \tag{40}$$

Se observă că pentru $G(p) = \frac{e^{-2p} - e^{-3p}}{p(p^2+4)} \cdot e^{pt}$, $p = 0$; $p = 2i$; $p = -2i$ sunt poli de ordinul 1, deci

$$\begin{cases} \text{Rez }(G,0) = \lim\limits_{p\to 0} \dfrac{(e^{-2p} - e^{-3p})e^{pt}}{p^2+4} = 0 \\ \text{Rez }(G,2i) = \lim\limits_{p\to 2i} e^{pt} \cdot \dfrac{e^{-2p} - e^{-3p}}{p(p+2i)} = \dfrac{e^{-4i} - e^{-6i}}{-8} \cdot e^{2it} = \dfrac{e^{2i(t-3)} - e^{2i(t-2)}}{8} \\ \text{Rez }(G,-2i) = \lim\limits_{p\to -2i} e^{pt} \cdot \dfrac{e^{-2p} - e^{-3p}}{p(p-2i)} = e^{-2it} \cdot \dfrac{e^{4i} - e^{6i}}{-8} = \dfrac{e^{-2i(t-3)} - e^{-2i(t-2)}}{8}. \end{cases}$$

şi deci Rez $(G,0)+$ Rez $(G,2i)+$ Rez $(G,-2i) = \frac{\cos(2t-6) - \cos(2t-4)}{4}$. Atunci, aplicând transformarea Laplace inversă in relaţia (40), rezultă

$$y(t) = \tfrac{a}{2}\sin(2t) + \tfrac{\cos(2t-6) - \cos(2t-4)}{4}.$$

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ ”TRAIAN LALESCU”

Faza interuniversitară, anul II, profil mecanic, 2005-2006

**I.** a) $u(x,y) = \varphi(x^2 - y^2)$ unde $f(0) = 0$; $f(i) = -1$. Funcţia $u$ trebuie să fie armonică deci vom impune condiţia $\Delta u = 0$. Notăm $t(x,y) = x^2 - y^2$ şi obţinem:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(t) \cdot 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(t) \cdot (-2y),$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi''(t) \cdot 4x^2 + 2\varphi', \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \varphi''(t) \cdot 4y^2 - 2\varphi',$$

de unde rezultă $4(x^2+y^2)\varphi''(t) = 0$, deci $\varphi''(t) = 0 \Rightarrow \varphi(t) = C_1t + C_2$, unde $C_{1,2} \in \mathbb{R}$. Prin urmare $u(x,y) = C_1(x^2 - y^2) + C_2$, iar $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = 2C_1x + 2iC_2y$. Pentru

$y = 0$ avem $f'(x) = 2C_1 \Rightarrow f(x) = C_1x^2 + C_3$ unde $C_3 \in \mathbb{R}$. Cu substituţia $x \to z$ rezultă $f(z) = C_1z^2 + C_3$. Punând condiţiile date, obţinem:

$$\begin{cases} f(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0 \\ f(i) = -1 \Rightarrow -C_1 + C_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_3 = 0 \\ C_1 = 0, \end{cases}$$

deci $f(z) = z^2$.

b) Funcţia $g(z) = \frac{f(z)\cdot e^{2/z}}{z^2-z} = \frac{z^2e^{2/z}}{z(z-1)} = \frac{ze^{2/z}}{z-1}$ are $z = 1$ pol de ordinul 1, deci Rez $(g, 1) = \lim\limits_{z\to1} ze^{2/z} = e^2$.

c) $z = 0$ este punct singular esenţial pentru $g$, deci Rez $(g, 0) = c_{-1}$ este coeficientul lui $\frac{1}{z}$ din dezvoltarea în serie Laurent a lui $g$ în jurul lui 0. Avem $e^{2/z} = 1 + \frac{2}{z\cdot 1!} + \frac{2^2}{z^2\cdot 2!} + ... + \frac{2^n}{z^n\cdot n!} + ...$, deci

$$\begin{cases} ze^{2/z} = z + \dfrac{2}{1!} + \dfrac{2^2}{z\cdot 2!} + ... + \dfrac{2^n}{z^{n-1}\cdot n!} + ... \\ \dfrac{1}{z-1} = -\dfrac{1}{1-z} = -1 - z - z^2 - ... - z^n - ..., \end{cases}$$

unde $|z| < 1$; rezultă

$$\frac{ze^{2/z}}{z-1} = \left(z + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{z\cdot 2!} + ... + \frac{2^n}{z^{n-1}\cdot n!} + ...\right)(-1 - z - z^2 - .... - z^n - ...),$$

deci $c_{-1} = -\frac{2^2}{2!} - \frac{2^3}{3!} - ... - \frac{2^n}{n!} - ... = 3 - e^2 \Rightarrow$ Rez $(g, 0) = 3 - e^2$.

d) $\displaystyle\int_{|z|=1} g(z)\,dz = 2\pi i(\text{ Rez }(g,0)) + \text{ Rez }(g,1)) = 2\pi i(e^2 + 3 - e^2) = 6\pi i.$

**II.** $f(x) = \frac{\sin x}{5+4\cos x}$, pentru $x \in (-\pi, \pi)$. Calculăm

$$a_n + ib_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{5+4\cos x}\cdot e^{inx}\,dx == \frac{1}{\pi}\int_{|z|=1} \frac{\frac{z^2-1}{2iz}}{5+4\cdot\frac{z^2+1}{2z}}\cdot z^n\cdot\frac{dz}{iz},$$

deci

$$a_n + ib_n = -\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1} \frac{(z^2-1)z^{n-1}}{2z^2+5z+2}\,dz, \quad n \geq 1. \tag{41}$$

Fie $g(z) = \frac{(z^2-1)z^{n-1}}{2z^2+5z+2}$, unde s-au folosit relaţiile

$$e^{ix} = z, \quad dx = \frac{dz}{iz}, \quad \sin x = \frac{z^2-1}{2iz}, \quad \cos x = \frac{z^2+1}{iz}.$$

Rădăcinile polinomului $2z^2 + 5z + 2 = 0$ sunt:

$$z_1 = -\tfrac{1}{2} \in Int(|z| = 1), \quad z_2 = -2 \in Ext(|z| = 1).$$

Considerăm doar $z_1 = -\frac{1}{2}$, care este pol de ordinul 1, deci

$$\text{Rez}\left(g, -\frac{1}{2}\right) = \lim_{z\to-\frac{1}{2}}\left(z + \frac{1}{2}\right)\frac{(z^2-1)z^{n-1}}{2(z+\frac{1}{2})(z+2)} = (-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n+1}} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

Deci $a_n + ib_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ şi prin urmare $a_n = 0$, $b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.
Dar $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{5 + 4\cos x}\,dx = 0$, deci $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cos(nx)$.

**III.** a) Transformata Fourier a funcţiei este:

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/a^2} \cdot e^{i\xi x}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\frac{x^2}{a^2} - i\xi x)}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\frac{x^2}{a^2} - i\xi x - \frac{\xi^2 a^2}{4} + \frac{\xi^2 a^2}{4})} = \\ &= e^{-\frac{\xi^2 a^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\frac{x}{a} - \frac{i\xi}{2})^2}\,dx = e^{-\frac{\xi^2 a^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \cdot a\,dy = ae^{-\frac{\xi^2 a^2}{4}}\sqrt{\pi},\end{aligned}$$

unde s-a făcut substituţia $\frac{x}{a} - \frac{i\xi}{2} = y$.

b) Considerăm definiţiile iniţiale ale transformatelor Fourier prin cosinus şi respectiv prin sinus:

$$\hat{f}_c(\xi) = \int_0^{\infty} f(x)\cos(\xi x)\,dx, \quad \hat{f}_s(\xi) = \int_0^{\infty} f(x)\sin(\xi x)\,dx.$$

Calculăm

$$\begin{aligned}\hat{f}_c(\xi) + i\hat{f}_s(\xi) &= \int_0^{\infty} e^{-x} e^{i\xi x}\,dx = \int_0^{\infty} e^{x(i\xi - 1)}\,dx = \frac{e^{x(i\xi-1)}}{i\xi - 1}\bigg|_0^{\infty} = \\ &= 0 - \frac{1}{i\xi - 1} = \frac{1 + i\xi}{\xi^2 + 1} = \frac{1}{\xi^2 + 1} + i\frac{\xi}{\xi^2 + 1},\end{aligned}$$

deci $\hat{f}_c(\xi) = \frac{1}{\xi^2+1}$ şi $\hat{f}_s(\xi) = \frac{\xi}{\xi^2+1}$. *Observaţie.* Pentru definiţia transformatei Fourier cu coeficientul $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ in faţă, obţinem: $\hat{f}_c(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\xi^2+1}$ şi $\hat{f}_s(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\xi}{\xi^2+1}$.

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
## Faza interuniversitară, anul II, profil electric, 2006-2007

**I.** a) Impunem condiţia ca $u(x,y)$ să fie armonică. Prin calcul direct, notând $t(x,y) = \frac{y}{x}$, obţinem:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(t) \cdot (-\frac{y}{x^2}),\ \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(t) \cdot \frac{1}{x}.$$

Atunci $\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y^2} = \varphi''(t) \cdot \left(\frac{y^2}{x^4} + \frac{1}{x^2}\right) + 2\frac{y}{x^3} \cdot \varphi'(t) = 0$, iar $\Delta u = 0 \Leftrightarrow \varphi''(t) \cdot (t^2 + 1) + 2t \cdot \varphi'(t) = 0$, deci

$$\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)} = -\frac{2t}{t^2 + 1} \Rightarrow \ln|\varphi'(t)| = -\ln(t^2 + 1) + \ln C_1,\ C_1 > 0,$$

$$\varphi'(t) = \frac{C_1}{t^2 + 1} \Rightarrow \varphi(t) = C_1 \cdot \text{arctg}\,(t) + C_2,\ C_1 \in \mathbb{R}^*,\ C_2 \in \mathbb{R},$$

deci prelungind prin continuitate şi ţinând cont că $\varphi(t) = C_2$ este soluţie, rezultă $u(x,y) = C_1 \cdot \text{arctg}\,\left(\frac{y}{x}\right) + C_2,\ C_{1,2} \in \mathbb{R}$. Atunci $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{yC_1}{x^2+y^2} - i\frac{xC_1}{x^2+y^2}$, deci pentru $y = 0$ obţinem $f'(x) = -\frac{iC_1}{x}$, deci $f(x) = -iC_1 \ln x + C_3,\ C_{1,3} \in \mathbb{R}$. Efectuăm substituţia $x \to t$ şi obţinem $f(z) = -iC_1 \cdot \ln z + C_3,\ C_{1,3} \in \mathbb{C}$.

b) $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$. Fie $\gamma = \gamma_R \cup [-R, R]$ şi $D$ domeniul mărginit de $\gamma$, unde $\gamma_R = \{z \in \mathbb{C} | |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$, unde $R > 1$ (vezi Figura 3). Fie $g(z) = \frac{z^2+1}{z^4+1}$. Atunci, ţinând cont că $\left\{z \in \mathbb{C} | z^4 + 1 = 0\right\} \cap D = \{\pm\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\}$, avem

$$\int_\gamma g(z)dz = 2\pi i \left( \text{Rez } \left(g, \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \text{Rez } \left(g, -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right). \tag{42}$$

Dar $\displaystyle\int_\gamma g(z)dz = \int_{\gamma_R} g(z)dz + \int_{-R}^{R} g(x)dx$ . Trecând relaţia la limită pentru $R \to \infty$, şi ţinând cont de egalitatea (42) şi de faptul că $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} g(z)dz = 0$ (lema lui Jordan), rezultă $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = 2\pi i \left( \text{Rez } \left(g, \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}}_{z_1}\right) + \text{Rez } \left(g, \underbrace{-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}}_{z_2}\right)\right)$.

Dar $z_1, z_2$ sunt poli de ordinul 1, şi avem

$$\begin{cases} \text{Rez } (g, z_1) = \displaystyle\lim_{z\to z_1} (z - z_1) \cdot \frac{z^2+1}{z^4+1} = \frac{z_1^2+1}{4z_1^3} = \frac{1}{2i\sqrt{2}} \\ \text{Rez } (g, z_2) = \displaystyle\lim_{z\to z_2} (z - z_2) \cdot \frac{z^2+1}{z^4+1} = \frac{z_2^2+1}{4z_2^3} = \frac{1}{2i\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Prin urmare, $I = 2\pi i \cdot \frac{2}{2i\sqrt{2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} = \pi\sqrt{2}$.

**II.** Se observă că $f(t) = \frac{\sin t}{5+3\cos t}$ este periodică cu perioada principală $2\pi$. Considerăm restricţia $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, care se dezvoltă în serie Fourier

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt),\ t \in [-\pi, \pi].$$

Calculăm $a_n + ib_n = \frac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin t}{5+3\cos t} \cdot e^{int}dt$. Notând $e^{it} = z$ şi ţinând cont că $\sin t = \frac{z^2-1}{2iz}$, $\cos t = \frac{z^2+1}{2z}$, obţinem

$$a_n + ib_n = \frac{1}{\pi} \int_{|z|=1} \frac{\frac{z^2-1}{2iz}}{5 + \frac{3(z^2+1)}{2z}} \cdot z^n \cdot \frac{dz}{iz} = -\frac{1}{\pi} \int_{|z|=1} \frac{z^{n-1}(z^2-1)}{3z^2+10z+3}dz.$$

Se observă că integrandul, funcţia $g(z) = \frac{z^{n-1}(z^1-1)}{3z^2+10z+3}$, $n \geq 1$ are două singularităţi, $z_1 = -\frac{1}{3} \in Int(|z| = 1)$ şi $z_2 = -3 \notin Int(|z| = 1)$, prin urmare are loc egalitatea

$$\int_{|z|=1} g(z)dz = 2\pi i \cdot \text{Rez } \left(g, -\frac{1}{3}\right).$$

Dar $z = -\frac{1}{3}$ este pol de ordinul 1, deci $\text{Rez}\left(g, -\frac{1}{3}\right) = \lim\limits_{z \to -\frac{1}{3}} \dfrac{z^{n-1}(z^2-1)}{3(z+3)} = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n \cdot \dfrac{1}{3}$.
Rezultă

$$\int_{|z|=1} g(z)dz = 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{3}$$

şi deci $a_n + ib_n = -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{2\pi i}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{2(-1)^{n+1}}{3^{n+1}} i$, de unde obţinem coeficienţii seriei Fourier,

$$\left\{\begin{array}{l} b_n = \dfrac{2(-1)^{n+1}}{3^{n+1}}, \quad a_n = 0, \quad n \geq 1 \\ a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\dfrac{\sin t}{5+3\cos t}}_{\text{impară}} dt = 0 \end{array}\right. \Bigg| \Rightarrow f(t) = \sum_{n\geq 1} \frac{2(-1)^{n+1}}{3^{n+1}} \cdot \sin(nt).$$

b) Pentru a găsi acea funcţie complexă ataşată funcţiei $f$ pe care să o putem dezvolta in serie Laurent, folosind relaţia $e^{it} = z$ şi relaţiile $\sin t = \frac{z^2-1}{2iz}$, $\cos t = \frac{z^2+1}{2z}$, observăm că $f$ se rescrie

$$f(z) = \frac{z^2-1}{2iz} \cdot \frac{2z}{10z + 3z^2 + 3} = \frac{1}{i} \cdot \frac{z^2-1}{3z^2+10z+3} = \frac{1}{3i}\left(1 - \frac{\frac{10}{3}z + 2}{z^2 + \frac{10}{3}z + 1}\right).$$

Descompunem funcţia din paranteză în fracţii simple:

$$\frac{\frac{10}{3}z+2}{z^2+\frac{10}{3}z+1} = \frac{A}{z+\frac{1}{3}} + \frac{B}{z+3} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A + B = \frac{10}{3} \\ 3A + \frac{B}{3} = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A = \frac{1}{3} \\ B = 3 \end{array}\right.$$

şi deci $f(z) = \frac{1}{3i}\left(1 - \frac{\frac{1}{3}}{z+\frac{1}{3}} - \frac{3}{z+3}\right)$. Singura coroană pe care putem dezvolta funcţia $f$ în serie Laurent este $\frac{1}{3} < |z| < 3$. Pentru $|z| > \frac{1}{3}$ (deci $\left|\frac{1}{3z}\right| < 1$), avem

$$\frac{\frac{1}{3}}{z+\frac{1}{3}} = \frac{1}{3z+1} = \frac{1}{3z(1+\frac{1}{3z})} = \frac{1}{3z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{1}{3^n \cdot z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{1}{3^{n+1} \cdot z^{n+1}},$$

deci $\dfrac{\frac{1}{3}}{z+\frac{1}{3}} = \displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{3^n \cdot z^n}$, iar pentru $|z| < 3$ ($\Leftrightarrow \left|\frac{z}{3}\right| < 1$), avem

$$\frac{3}{z+3} = \frac{1}{\frac{z}{3}+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{z^n}{3^n} = 1 + \sum_{n\geq 1}(-1)^n \cdot \frac{z^n}{3^n},$$

şi deci pentru $|z| \in (\frac{1}{3}, 3)$, obţinem

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{3i}\left(1 - \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{3^n \cdot 2^n} - 1 - \sum_{n\geq 1}(-1)^n \cdot \frac{z^n}{3^n}\right) \\ &= \frac{1}{3i} \cdot \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{3^n}\left(\frac{1}{z^n} - z^n\right) = \frac{1}{3i} \cdot \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{3^n}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right) \\ &= \frac{1}{3}\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{3^n} \cdot \frac{(z^n - \frac{1}{z^n})}{2i} \cdot 2. \end{aligned}$$

Folosind egalitatea $\frac{1}{2i}(z^n - \frac{1}{z^n}) = \sin(nt)$, rezultă $f(t) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1}} \cdot 2\sin(nt)$, $\forall z \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \in (\frac{1}{3}, 3)\}$.

**III.** $x(t) = \cos t + \int_0^t (t-\tau)\cdot e^{t\tau} x(\tau) d\tau$. Aplicând transformarea Laplace, obţinem $\mathcal{L}[x(t)](p) = \mathcal{L}[\cos t](p) + \mathcal{L}[te^t * x(t)](p)$. Notăm $\mathcal{L}[x(t)](p) = X(p)$ şi rezultă

$$X(p) = \frac{p}{p^2+1} + \mathcal{L}[te^t](p)\cdot X(p) = \frac{p}{p^2+1} + \mathcal{L}[t](p-1)\cdot X(p) = \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{(p-1)^2}\cdot X(p),$$

deci $X(p)(1 - \frac{1}{(p-1)^2}) = \frac{p}{p^2+1}$ şi prin urmare

$$X(p) = \frac{(p-1)^2}{(p-2)(p^2+1)} = \frac{\frac{1}{5}}{p-2} + \frac{\frac{4}{5}p - \frac{2}{5}}{p^2+1} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p-2} + \frac{4}{5}\cdot\frac{p}{p^2+1} - \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{p^2+1}$$

Aplicând transformarea Laplace inversă, rezultă $x(t) = \frac{1}{5}e^{2t} + \frac{4}{5}\cos t - \frac{2}{5}\sin t$.

**IV.** Utilizând inversa transformării Fourier prin cosinus avem

$$\begin{aligned}
\varphi(u) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\pi}{2}\cos x \cdot \cos(ux) dx = \int_0^\pi \frac{\cos(x+ux) + \cos(x-ux)}{2} dx \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(x+ux)}{1+u}\Big|_0^\pi + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(x-ux)}{1-u}\Big|_0^\pi = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(u\pi)}{1+u} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(u\pi)}{1-u} \\
&= \frac{1}{2}\sin(u\pi)\left(\frac{1}{1-u} - \frac{1}{1+u}\right) = \frac{1}{2}\sin(u\pi)\cdot\frac{2u}{1-u^2} = \frac{u}{1-u^2}\sin(u\pi).
\end{aligned}$$

*Observaţie.* Dacă se utilizează definiţia transformării Fourier cu $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ în faţa integralei, atunci $\varphi(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi \frac{\pi}{2}\cos x \cdot \cos(ux) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{u}{1-u^2}\cdot\sin(u\pi)$.

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
### Faza interuniversitară, anul II, profil mecanic, 2006-2007

**I.** $v(x,y) = \text{arctg } (\frac{y}{x})$; $f(1) = 0$. Rezolvare identică celei de la faza locală (15.04.2006).

**II.** $I = \int_{|z|=R} \frac{e^{1/z}}{z(1-z)} dz$, $R > 0, R \neq 1$. Funcţia $g(z) = \frac{e^{1/z}}{z(1-z)}$ are două puncte singulare: $z = 0$ (punct singular esenţial) şi $z = 1$ (pol de ordinul 1). Atunci Rez $(g, 1) = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{e^{1/z}}{z(1-z)} = -e$, iar Rez $(g, 0) = c_{-1}$ = coeficientul lui $\frac{1}{z}$ din dezvoltarea în serie Laurent a lui $g$ în jurul lui $z = 0$. Folosind egalităţile

$$\begin{cases} \dfrac{e^{1/z}}{z} = \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z^2\cdot 1!} + \dfrac{1}{z^3\cdot 2!} + \cdots + \dfrac{1}{z^{n+1}\cdot n!} + \cdots \\ \dfrac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots, \quad |z| < 1; \end{cases}$$

rezultă $g(z) = \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2 \cdot 1!} + \cdots\right)(1 + z + z^2 + \cdots)$, deci $c_{-1} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots = e$. Distingem două cazuri:

a) $0 < R < 1 \Rightarrow I = 2\pi i \cdot \text{Rez}\,(g, 0) = 2\pi i e$;

b) $R > 1 \Rightarrow I = 2\pi i(\text{Rez}\,(g, 0) + \text{Rez}\,(g, 1)) = 2\pi i(e - e) = 0$.

**III.** $y'' - 2y' + y = t,\ \ y(0) = 1;\ y'(0) = 1$. Aplicăm ecuaţiei date transformarea Laplace şi notăm $\mathcal{L}[y(t)](p) = Y(p)$; rezultă

$$p^2 Y(p) - p - 1 - 2pY(p) + 2 + Y(p) = \frac{1}{p^2} \Rightarrow (p^2 - 2p + 1)Y(p) = p - 1 + \frac{1}{p^2},$$

deci

$$Y(p) = \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p^2(p-1)^2}. \tag{43}$$

Se observă că $F(p) = \frac{e^{pt}}{p-1}$ are polul $p = 1$ de ordinul 1, deci

$$\text{Rez}\,(F, 1) = \lim_{p \to 1}(p - 1)\frac{e^{pt}}{p - 1} = e^t.$$

Funcţia $G(p) = \frac{1}{p^2(p-1)^2}e^{pt}$ are polii $p = 0$ şi $p = 1$, ambii de ordinul 2. Atunci

$$\begin{cases} \text{Rez}\,(G, 0) \lim\limits_{p \to 0}\left(\dfrac{e^{pt}}{(p-1)^2}\right)' = \lim\limits_{p \to 0}\dfrac{te^{pt} \cdot (p-1)^2 - e^{pt} \cdot 2(p-1)}{(p-1)^4} = \dfrac{-t-2}{-1} = t + 2 \\[2ex] \text{Rez}\,(G, 1) = \lim\limits_{p \to 1}\left(\dfrac{e^{pt}}{p^2}\right)' = \lim\limits_{p \to 1}\dfrac{te^{pt} \cdot p^2 - e^{pt \cdot 2p}}{p^4} = \dfrac{te^t - 2e^t}{1} = e^t(t - 2) \end{cases}$$

deci aplicând egalităţii (43) transformarea Laplace inversă, rezultă

$$y(t) = \text{Rez}\,(F, 1) + \text{Rez}\,(G, 0) + \text{Rez}\,(G, 1),$$

deci $y(t) = e^t + t + 2 + e^t(t - 2) = e^t(t - 1) + t + 2$.

**IV.** $f(x) = e^{-x^2/2}$. Aplicând funcţiei $f$ transformarea Fourier, rezultă

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}e^{i\xi x}dx = \sqrt{2\pi}e^{-\xi^2/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = e^{-\xi^2/2};$$

se rezolvă identic cu problema 3b) a fazei locale. *Observaţie.* Considerând altă constantă în faţa integralei din definţia transformatei Fourier, rezultatul diferă.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"

Faza naţională, anul II, profilele electric şi mecanic, 2007-2008

**I.** a) Avem $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + e^x \cos y$. Pentru a arăta că $u$ este aplicaţie armonică, verificăm că are loc egalitatea $\Delta u = 0$. Obţinem succesiv:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2} + e^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2} - e^x \sin y,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} + e^x \cos y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} - e^x \cos y,$$

deci $\Delta$u $=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. În concluzie $u$ este aplicaţie armonică.

b) Funcţia căutată este de forma $f(x,y)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$. Notând $z=x+iy$ şi folosind faptul că $f$ este olomorfă, obţinem:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2x}{x^2+y^2}+e^x\cos y-i\left(\frac{2y}{x^2+y^2}-e^x\sin y\right).$$

Pentru $y=0$, obţinem $f(x)=\frac{2}{x}+e^x$ deci $f(x)=2\ln x+e^x+C$. Efectuând substituţia $x\to z$ rezultă $f(z)=2\ln z+e^z+C$. Din condiţia $f(1)=e$, obţinem $e+C=e$ deci $C=0$. Prin urmare funcţia olomorfă cerută este $f(z)=2\ln z+e^z$.

c) Obţinem $I=\displaystyle\int_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=R}\frac{f(z)-2\ln z}{z^2(z-i)}dz=\int_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=R}\frac{e^z}{z^2(z+i)}dz$. Se observă că: $z=0$ este pol de ordin 2 iar $z=-i$ este pol de gradul 1. Deoarece $\left|\frac{1}{2}-0\right|=\frac{1}{2}$, $\left|\frac{1}{2}-(-i)\right|=\frac{\sqrt{5}}{2}$, avem $R\in(0,+\infty)\backslash\left\{\frac{1}{2},\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$. Distingem trei cazuri: $R<\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}<R<\frac{\sqrt{5}}{2}$; $R>\frac{\sqrt{5}}{2}$. Notând $g(z)=\frac{e^z}{z^2(z+i)}$, obţinem

i) Dacă $R<\frac{1}{2}$, conform teoremei fundamentale Cauchy, rezultă $I=0$.

ii) Dacă $\frac{1}{2}<R<\frac{\sqrt{5}}{2}$, atunci $I=2\pi i\,\text{Rez}\,(g,0)$. Obţinem

$$\text{Rez}\,(g,0)=\lim_{z\to0}\left(z^2\frac{e^z}{z^2\,(z+i)}\right)'=\lim_{z\to0}\frac{e^z(z+i-i)}{z^2(z+i)^2}=1-i\Rightarrow I=2\pi i(1-i).$$

iii) Dacă $R>\frac{\sqrt{5}}{2}$, atunci $I=2\pi i(\,\text{Rez}\,(g,0)+\,\text{Rez}\,(g,-i))$. Avem

$$\text{Rez}\,(g,0)=1-i,\ \ \text{Rez}\,(g,-i)=\lim_{z\to-i}(z+i)\frac{e^z}{z^2(z+i)}=\frac{e^{-i}}{-1}=e^{-i}=-\cos1+i\sin1.$$

Deci $I=2\pi i(1-i-\cos1+i\sin1)=2\pi i[1-\cos1+i(\sin1-1)]$.

**II.** $I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\sin x\cdot e^{inx}}{(13-15\cos x)^2}dx$. Pentru $|z|=1$, putem scrie $z=e^{ix}$, deci

$$\cos x=\tfrac{z^2+1}{2z},\ \sin x=\tfrac{z^2-1}{2z},\ dz=zidx.$$

Obţinem $I=\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{\frac{z^2-1}{2iz}z^n}{(13-15\cos x)^2}\frac{dz}{iz}=(-2)\int_{|z|=1}\frac{(z^2-1)z^n}{(5z^2-26z+5)^2}dz.$

Fie $g(z)=\frac{(z^2-1)z^n}{(5z^2-26z+5)^2}$. Rezultă că $z_1=5$ şi $z_2=\frac{1}{5}$ sunt sigularităţi pentru $g$. Cum doar $z_2=\frac{1}{5}$ se află în interiorul drumului, calculăm doar reziduul lui $g$ în $z_2=\frac{1}{5}$ (pol de gradul 2). Avem

$$\begin{aligned}\text{Rez}\,\left(g,\frac{1}{5}\right)&=\lim_{z\to5}\left[\left(z-\frac{1}{5}\right)^2\frac{(z^2-1)z^n}{25\left(z-\frac{1}{5}\right)^2(z-5)^2}\right]'=\\&=\lim_{z\to5}\frac{1}{25}\frac{nz^{n+2}-5(n+2)z^{n+1}+(2-n)z^n+5nz^{n-1}}{(z-5)^3}=\frac{-n}{24\cdot5^{n+1}}.\end{aligned}$$

Rezultă $I=(-2)2\pi i\frac{-n}{24\cdot5^{n+1}}=\frac{+n\pi i}{6\cdot5^{n+1}}$.

**III.** Aplicăm transformarea Laplace ecuaţiei diferenţiale şi obţinem

$$p^2X(p) - 1 - 2pX(p) + X(p) = \frac{1}{p-1} \Rightarrow X(p) = \frac{p}{(p-1)^3}.$$

Fie $G(p) = \frac{p}{(p-1)^3}e^{pt}$. Dar $p = 1$ este pol de gradul 3 pentru $G$, deci

$$\text{Rez }(G, 1) = \frac{1}{2!}\lim_{p\to 1}\left[(p-1)^3\frac{p\cdot e^{pt}}{(p-1)^3}\right]'' = \frac{1}{2}e^t(t^2+2t).$$

Rezultă $x(t) = \frac{1}{2}e^t(t^2+2t)$.

**IV.** *Varianta 1.* i) Polinomul caracteristic $det(A-\lambda I_3) = 0$ are ca rădăcini valorile proprii $\lambda_1 = 2; \lambda_2 = -2; \lambda_3 = -1$. Aflăm vectorii proprii:

- $\lambda_1 = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b = a \\ c = 2a \\ a \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix};$
- $\lambda_2 = -2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = -a,\ a \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};$
- $\lambda_3 = -1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b = a \\ c = -a,\ a \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

ii) Soluţia generală a sistemului diferenţial este

$$y(t) = C_1\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \\ 0 \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}.\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

iii) Impunem condiţiile iniţiale; obţinem $\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 0 \\ C_1 - C_2 + C_3 = 0 \\ 2C_1 - C_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = \frac{1}{3} \\ C_3 = -\frac{1}{3}. \end{cases}$

Soluţia sistemului este

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}\left(e^{2t} - e^{-t}\right), \\ y(t) = \frac{1}{3}\left(e^{2t} - e^{-t}\right) = x(t), \\ z(t) = \frac{1}{3}\left(2e^{2t} + e^{-t}\right). \end{cases} \tag{44}$$

*Varianta 2.* Folosim transformarea Laplace şi sistemul devine:

$$\begin{cases} pX(p) = -X(p) + Y(p) + Z(p) \\ pY(p) = X(p) - Y(p) + Z(p) \\ pZ(p) = X(p) + Y(p) + Z(p) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(p) = \frac{1}{p^2-p-2} \\ Y(p) = X(p) = \frac{1}{p^2-p-2} \\ Z(p) = pX(p) = \frac{p}{p^2-p-2}. \end{cases}$$

Avem $X(p)=\frac{1}{(p+1)(p-2)}=\frac{-1}{3}\cdot\frac{1}{p+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p-2}$, iar

$$\begin{aligned} x(t) &= \text{Rez}\,(X(p)e^{tp},1)+\text{Rez}\,(X(p)e^{tp},2)= \\ &= \lim_{p\to-1}(p+1)\,X(p)e^{tp}+\lim_{p\to2}(p+2)\,X(p)e^{tp}= \\ &= \lim_{p\to1}-\tfrac{1}{3}e^{tp}+\lim_{p\to2}\frac{1}{3}e^{tp}=-\frac{e^{-t}}{3}+\frac{e^{2t}}{3} \end{aligned}$$

şi deci $x(t)=-\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{2t}$. Analog se obţine $y(t)=x(t)$, iar

$$Z(p)=\frac{1}{p^2-p-2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p+1}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{p-2}\Rightarrow z(t)=\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{2}{3}e^{2t},$$

deci se obţine aceeaşi soluţie (44).

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ ”TRAIAN LALESCU”
Faza naţională, anul II, profil electric, 2008-2009

**I.** Identic cu subiectul 1) de la profil mecanic.

**II.** a) Dacă $f:D\to\mathbb{C}$ este olomorfă şi $D$ este disc deschis în $\mathbb{C}$, rezultă $f$ analitică. Fie $z_0$ centrul discului $D$ şi $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ dezvoltarea lui $f$ in jurul lui $z_0$. Fie $F(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\frac{(z-z_0)^{n+1}}{n+1}$; cum $F'(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n=f(z)$, rezultă că $F$ este o primitivă a lui $f$. Fie $F$ şi $G$ două primitive a lui $f$ pe discul $D$, deci $F'(z)=f(z)$ şi $G'(z)=f(z),\forall z\in D\Rightarrow(F-G)'(z)=0,\forall z\in D$. Cum $D$ este conex, avem $F-G=constant$.

b) Fie $\gamma:[a,b]\to D,\gamma(a)=z_1$ şi $\gamma(b)=z_2$ arc simplu orientat în $D$. Dacă $F$ este o primitivă a lui $f$, atunci

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)dz &= \textstyle\int_\gamma F'(z)dz=\displaystyle\int_a^b F'(\gamma(t))\gamma\prime(t)dt= \\ &= F(\gamma(t))\Big|_a^b=F(\gamma(b))-F(\gamma(a))=F(z_2)-F(z_1). \end{aligned}$$

c) Avem

$$\begin{aligned} a+ib &= -\cos z\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}+i}=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+i\right)+1=-\frac{e^{i(\frac{\pi}{2}+i)}+e^{-i(\frac{\pi}{2}+i)}}{2}+1= \\ &= -\tfrac{e^{-1+i\frac{\pi}{2}}+e^{1-i\frac{\pi}{2}}}{2}+1=-\frac{-e^{-1}(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})+e^{1}(\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2})}{2}+1= \\ &= \tfrac{i(e^1-e^{-1})}{2}+1=1+i\,\text{sh}\,1,\ \text{de unde } a=1,b=\text{sh}\,1. \end{aligned}$$

**III.** Seria Fourier ataşată funcţiei $f$ este determinată la profilul mecanic - punctul 2b), $f(z) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \sum_{n\geq 1} \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}} \cos(nx), x \in [-\pi, \pi]$. Cum

$$\left| \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}} \cos(nx) \right| = \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}} |\cos(nx)| \leq \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}}$$

şi $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}}$ este convergentă, din criteriul Weierstrass, rezultă că seria Fourier este uniform şi absolut convergentă pe $\mathbb{R}$. Obţinem

$$\int_{|z|=3} \frac{dx}{5 - 4\cos z} = 2\pi i \left( \text{Rez} \left( \frac{1}{5 - 4\cos z}, i \ln 2 \right) + \text{Rez} \left( \frac{1}{5 - 4\cos z}, -i \ln 2 \right) \right) =$$

$$= 2\pi i \left( \frac{1}{4\sin(i \ln 2)} + \frac{1}{4\sin(-i \ln 2)} \right) = 0.$$

*Notă.* Ecuaţia $5 - 4\cos z = 0$ este rezolvată la punctul 2a - profilul mecanic.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ”TRAIAN LALESCU”
Faza naţională, anul II, profil mecanic, 2008-2009

**I.** a) Rescriem ecuaţia sub formă de sistem diferenţial de ordinul întâi,

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = z \\ z' + (2a-1)z + (a^2+3)y + (a^2+3a)x = 1. \end{cases}$$

Notând $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ şi $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -(a^2+3a) & -(a^2+3) & -(2a-1) \end{pmatrix}$, studiem stabilitatea sistemului $X' = AX$. Polinomul caracteristic al matricei $A$ este

$$P_A(\lambda) = -\lambda^3 - \lambda^2(2a-1) - \lambda(a^2+3) - (a^2+3a),$$

iar ecuaţia caracteristică $P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 + \lambda^2(2a-1) + \lambda(a^2+3) + a^2 + 3a = 0$. Observăm că $\lambda_1 = -a$ este soluţie, iar $\lambda_{2,3}$ sunt soluţiile ecuaţiei

$$\lambda^2 + (a-1)\lambda + 3 + a = 0.$$

Condiţia de stabilitate impune $-a < 0, a - 1 > 0, 3 + a > 0$, de unde $a > 1$.

b) Dacă $a = 1$, ecuaţia devine $x''' + x'' + 4x' + 4x = 1$. Aplicăm *transformarea Laplace* şi obţinem $(p+1)(p^2+4)\mathcal{L}[x] = \frac{1}{p}$, de unde

$$\mathcal{L}[x] = \frac{1}{p(p+1)(p^2+4)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{Cp+D}{p^2+4}.$$

Aducem la acelaşi numitor şi identificând coeficienţii numărătorilor, rezultă

$$A = \frac{1}{4}, B = -\frac{1}{5}, C = -\frac{1}{20}, D = -\frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}e^{-t} - \frac{1}{20}\cos(2t) - \frac{1}{10}\sin(2t).$$

**II.** a) Folosind *formulele Euler*, ecuaţia devine $\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\dfrac{5}{4}$, de unde rezultă $e^{iz}+e^{-iz}=\dfrac{5}{2}$. Notăm $e^{iz}=t$ şi obţinem $2t^2-5t+2=0$, cu soluţiile $t_1=2$ şi $t_2=\dfrac{1}{2}$. Atunci $e^{iz}=2\Leftrightarrow iz=\ln 2+i\cdot 2k\pi, k\in\mathbb{Z}$, şi $e^{iz}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow iz=-\ln 2+i\cdot 2k\pi, k\in\mathbb{Z}$, de unde mulţimea soluţiilor ecuaţiei este $\{\pm i\ln 2+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$.

b) Funcţia $f$ este periodică, cu perioada principală $2\pi$, deci putem considera $f:(-\pi,\pi)\to\mathbb{R}$. Atunci

$$a_n+ib_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{5-4\cos t}\cdot e^{int}dt\overset{e^{it}=z}{=}\frac{1}{\pi}\int_{|z|=1}\frac{z^n}{i(-2z^2+5z-2)}dz,$$

deci $a_n+ib_n=-\dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{z^n}{2z^2-5z+2}dz$. Fie $g(z)=\dfrac{z^n}{2z^2-5z+2}$. Punctele singulare ale funcţiei $g$ sunt $z_1=\dfrac{1}{2}$ şi $z_2=2$ (poli de ordinul I). Cum $|z_2|=2>1$, rezultă că $a_n+ib_n\overset{T.rez}{=}-\dfrac{1}{\pi i}\cdot 2\pi i\cdot Rez\left(g,\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{3\cdot 2^{n-1}}$. Atunci $a_n=\dfrac{1}{3\cdot 2^{n-1}}$ şi $b_n=0, n\geq 0$. Rezultă $f(t)=\dfrac{1}{3}+\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}\cos(nt),\ t\in(-\pi,\pi)$.

c) Folosim *teorema reziduurilor* pentru calculul integralei complexe. Funcţia $g(z)=\dfrac{1}{5-4\cos z}$ admite ca puncte singulare toate soluţiile ecuaţiei $\cos z=\dfrac{5}{4}$, care au fost determinate la punctul a), şi anume $z=2k\pi\pm i\ln 2,\ k\in\mathbb{Z}$ (poli de ordinul I). Vom lua în calcul doar acele puncte singulare aflate în interiorul drumului $|z-i|=1$, şi anume $z=i\ln 2$. Atunci

$$\int_{|z-1|=1}\frac{dz}{5-4\cos z}=2\pi i\cdot Rez\left(\frac{1}{5-4\cos z}, i\ln 2\right)=2\pi i\cdot\frac{1}{4\sin(i\ln 2)}=\frac{\pi i}{2}\cdot\frac{2i}{\frac{1}{2}-2}=\frac{2\pi}{3}.$$

**III.** a) "$\Rightarrow$" Dacă $(a,b)$ este punct de echilibru, atunci $\varphi(t)=(a,b)$ este soluţie a sistemului, de unde $0=f(a,b)$ şi $0=g(a,b)$. "$\Leftarrow$" Dacă $f(a,b)=0$ şi $g(a,b)=0\Rightarrow$ $(a,b)$ soluţie a sistemului, de unde $(a,b)$ este echilibru.

b) Presupunem că există două orbite $\varphi_1$ şi $\varphi_2$ cu Im $\varphi_1=$ Im $\varphi_2$ care nu sunt disjuncte. Rezultă că există $t_1,t_2$ astfel încât $\varphi_1(t_1)=\varphi_2(t_2)$. Fie $T=t_2-t_1$. Atunci $\varphi(t)=\varphi_2(t+T)$ este o soluţie a sistemului şi cum $\varphi(t_1)=\varphi_2(t_2)=\varphi_1(t_1)$, din *teorema fundamentală*, rezultă $\varphi\equiv\varphi_1$. Pe de altă parte, $\varphi_2(t+T)=\varphi_1(t)$ pentru orice $t$, deci cele două orbite $\varphi_1$ şi $\varphi_2$ coincid.

c) Sistemul este echivalent cu $x''+x=0$. Polinomul caracteristic asociat $r^2+1=0$ are rădăcinile $r=\pm i$, deci soluţia ecuaţiei este $x=C_1\cos t+C_2\sin t,\ C_{1,2}\in\mathbb{R}$. Dar $x'=y$, deci $y=-C_1\sin t+C_2\cos t,\ C_{1,2}\in\mathbb{R}$.

**IV.** a) Vom calcula $I_k=\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{z^k}dz$. Avem

$$\frac{f(z)}{z^k}=\frac{a_0+a_1z+...+a_nz^n}{z^k}=a_0\cdot\frac{1}{z^k}+a_1\cdot\frac{1}{z^{k-1}}+...+a_{k-1}\cdot\frac{1}{z}+a_k+...+a_n\cdot z^{n-k},$$

de unde, din *teorema reziduurilor*, rezultă

$$I_k = 2\pi i \cdot \text{Rez}\left(\frac{f(z)}{z^k}, 0\right) = 2\pi i \cdot a_{k-1}.$$

Calculăm $J_k = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})e^{-ikt}dt$; folosnd substituţia $e^{it} = z$, rezultă

$$J_k = \int_{|z|=1} f(z) \cdot z^{-k} \cdot \frac{dz}{iz} = \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^{k+1}}dz = \frac{1}{i} \cdot I_{k+1} = \frac{1}{i} \cdot 2\pi i \cdot a_k = 2\pi a_k.$$

b) Demonstrăm întâi că $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)^2 dx = -i\int_0^{\pi} f(e^{it})^2 e^{it}dt$. Fie $\gamma : |z| = 1,\ \text{Im}\, z > 0$. Atunci, conform *teoremei fundamentale Cauchy*, avem $\displaystyle\int_{\gamma} f(z)^2 dz + \int_{-1}^{1} f(x)^2 dx = 0$, de unde

$$\int_{-1}^{1} f(x)^2 dx = -\int_{\gamma} f(z)^2 dz \overset{z=e^{it}}{=} -\int_0^{\pi} f(e^{it})^2 \cdot ie^{it}dt = -i\int_0^{\pi} f(e^{it})^2 \cdot e^{it}dt.$$

Demonstrăm că $\displaystyle\int_0^1 f(x)^2 dx \le 2\pi \sum_{k=0}^{n} a_k^2$. Observăm că

$$\int_0^1 f(x)^2 dx \le \int_{-1}^{1} f(x)^2 dx = -i\int_0^{\pi} f(e^{it})^2 e^{it}dt.$$

Atunci $\displaystyle\left|\int_0^1 f(x)^2 dx\right| \le \left|-i\int_0^{\pi} f(e^{it})^2 e^{it}dt\right|$ şi obţinem

$$\int_0^1 f(x)^2 dx \le \left|\int_0^{\pi} f(e^{it})^2 e^{it}dt\right| \le \int_0^{\pi} |f(e^{it})^2 e^{it}|dt = \int_0^{\pi} |f(e^{it})^2|dt \le \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{it})|^2 dt.$$

Deoarece

$$|f(e^{it})|^2 = f(e^{it}) \cdot \overline{f(e^{it})} = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k e^{ikt}\right) \cdot \overline{\left(\sum_{p=0}^{n} a_p e^{ipt}\right)} = \sum_{k,p=0}^{n} a_k a_p e^{it(k-p)},$$

rezultă

$$\int_0^1 f(x)^2 dx \le \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k,p=0}^{n} a_k a_p e^{it(k-p)}\right) dt = \sum_{k,p=0}^{n} a_k a_p \int_{-\pi}^{\pi} e^{it(k-p)}dt.$$

Dacă $k = p$, atunci $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{it(k-p)}dt = \int_{-\pi}^{\pi} 1dt = 2\pi$. Dacă $k \ne p$, atunci

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{it(k-p)}dt = \left.\frac{e^{it(k-p)}}{i(k-p)}\right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{\pi i(k-p)} - e^{-\pi i(k-p)}}{i(k-p)} = \frac{2}{k-p} \cdot \sin(\pi(k-p)) = 0.$$

În concluzie, $\displaystyle\int_0^1 f(x)^2 dx \le 2\pi \sum_{k=0}^{n} a_k^2$.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza naţională, anul II, profilele electric şi mecanic, 2009-2010

**I.** a) *Metoda 1.* Înmulţim ecuaţia diferenţială cu $t$. Obţinem ecuaţia Bessel $t^2x''(t) + tx'(t) + t^2x(t) = 0$, cu $\nu = 0$, a cărei soluţie este

$$x(t) = C \cdot J_0(t) = C\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \frac{t}{2}^{2n}.$$

Impunând condiţia iniţială $x(0) = 1$, rezultă $C = 1$, de unde soluţia unică

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \frac{t}{2}^{2n}.$$

*Metoda 2.* Fie $x(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ soluţie a ecuaţiei diferenţiale. Atunci

$$x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n t^{n-1} \text{ şi } x''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)t^{n-2},$$

deci obţinem $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)t^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1}$. Identificând coeficienţii seriilor, se obţine $a_1 = 0$, $a_{2n+1} = 0$, $2^2n^2a_{2n} = -a_{2n-2}$, de unde $a_{2n} = \dfrac{(-1)^n a_0}{2^{2n}(n!)^2}$. Din condiţia iniţială se obţine $a_0 = 1$, de unde rezultă $a_{2n} = \dfrac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}$. Soluţia este deci $x(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n}$, a cărei rază de convergenţă este $\infty$.

b) Folosim transformarea Laplace. Atunci

$$\begin{cases} p\mathcal{L}[x] & = 2\mathcal{L}[x] + \mathcal{L}[y] + 2\mathcal{L}[z] \\ p\mathcal{L}[y] & = -\mathcal{L}[x] - 2\mathcal{L}[z] \\ p\mathcal{L}[z] - 1 & = \mathcal{L}[x] + \mathcal{L}[y] + 2\mathcal{L}[z] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (p-2)\mathcal{L}[x] - \mathcal{L}[y] - 2\mathcal{L}[z] & = 0 \\ \mathcal{L}[x] + \mathcal{L}[y] + 2\mathcal{L}[z] & = 0 \\ -\mathcal{L}[x] - \mathcal{L}[y] + (p-2)\mathcal{L}[z] & = 0, \end{cases}$$

de unde $\mathcal{L}[x] = -\mathcal{L}[y] = \frac{2}{(p-2)(p-1)}$ şi $\mathcal{L}[z] = \frac{1}{p-2}$. Rezultă soluţia

$$x = 2(e^{2t} - e^t),\ y = 2(e^t - e^2t),\ z = e^{2t}.$$

**II.** Din relaţia $u(x,y) + v(x,y) = \varphi(\frac{y}{x})$, notând $\frac{y}{x} = t(x,y)$ obţinem:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = \varphi'(t)\left(\frac{-y}{x^2}\right), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = \varphi'(t)\frac{1}{x} \tag{45}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \varphi''(t)\frac{y^2}{x^4} + \varphi'(t)\frac{2y}{x^3}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \varphi''(t)\frac{1}{x^2}.$$

Cum $u$ şi $v$ sunt funcţii armonice, impunem $\Delta u + \Delta v = 0 \Rightarrow$

$$\varphi''(t)\frac{1}{x^2}\left(\frac{y^2}{x^2} + 1\right) + 2\frac{1}{x^2}\frac{y}{x}\varphi'(t) = 0.$$

Împărţinând la $\frac{1}{x^2}$, obţinem $(t^2+1)\varphi''(t)+2t\varphi'(t)=0$, de unde

$$\varphi(t)=C_1 \operatorname{arctg}(t)+C_2,\ C_{1,2}\in\mathbb{R}.$$

Înlocuind $\varphi$ în relaţiile (45) şi folosind relaţiile Cauchy-Riemann, obţinem:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=C_1\frac{-y}{x^2+y^2},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}=C_1\frac{x}{x^2+y^2},$$

de unde $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{C_1}{2}\frac{x-y}{x^2+y^2}$ şi $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{C_1}{2}\frac{-x-y}{x^2+y^2}$. Atunci

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{C_1}{2}\frac{x+y}{x^2+y^2}-i\frac{C_1}{2}\frac{x-y}{x^2+y^2}.$$

Pentru $y=0$ avem $f'(x)=\frac{-C_1}{2}\frac{1}{x}-i\frac{C_1}{2}\frac{1}{x}=-\frac{C_1}{2}(1+i)\frac{1}{x}$, de unde

$$f(x)=-\frac{C_1}{2}(1+i)\ln x+C_3,\ C_3\in\mathbb{R},$$

deci $f(z)=-\frac{C_1}{2}(1+i)\ln(z)+C_3$, $C_3\in\mathbb{C}$. Impunând condiţiile iniţiale, obţinem $C_3=0$ şi $C_1=2i$. Rezultă $f(z)=(1-i)\ln(z)$.

**III.** Aplicăm transformarea Laplace ecuaţiei integrale; obţinem

$$p\mathcal{L}[x]-2\mathcal{L}[x]\mathcal{L}[\cos t]=\mathcal{L}[t]\mathcal{L}[\sin t],$$

de unde $\mathcal{L}[x]=\frac{1}{p^3(p^2-1)}$. Considerăm funcţia $G(p)=\frac{e^{-pt}}{p^3(p^2-1)}$. Pentru $G$, $p=0$ este pol triplu, iar $p=\pm1$ sunt poli simpli. Atunci

$$x=\text{Rez}\,(G,0)+\text{Rez}\,(G,1)+\text{Rez}\,(G,-1)=\text{ch}\,t-\frac{t^2+2}{2}.$$

**IV.** Funcţia $f$ este periodică, deci este suficient să considerăm $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$. Seria Fourier trigonometrică a lui $f$ este

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq1}[a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)].$$

Calculăm $a_n+ib_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{cos^2x}{5+4\sin x}\cdot e^{inx}\,dx$. Folosind schimbarea de variabilă $e^{ix}=z$, obţinem $a_n+ib_n=\frac{1}{4\pi}\int_{|z|=1}\frac{(z^2+1)^2\cdot z^{n-2}}{2z^2+5iz-2}\,dz.$.

Cazul I. Dacă $n\geq2$, atunci funcţia $g(z)=\frac{(z^2+1)^2\cdot z^{n-2}}{2z^2+5iz-2}$ admite două puncte singulare: $z_1=\frac{-i}{2}$ şi $z_2=-2i$. Cum $|z_2|=2>1$, rezultă că

$$\begin{aligned}a_n+ib_n&=\frac{1}{4\pi}\cdot2\pi i\cdot\text{Rez}\left(g,\frac{-i}{2}\right)=\frac{i}{2}\cdot\frac{3}{16}\cdot\frac{(-i)^{n-2}}{i\cdot2^{n-2}}=\\&=\frac{(-1)^{n-2}\cdot3}{2^{n+3}}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{n-2}=\\&=\frac{(-1)^{n-2}\cdot3}{2^{n+3}}\cdot\left(\cos\frac{(n-2)\pi}{2}+i\sin\frac{(n-2)\pi}{2}\right),\end{aligned}$$

de unde, pentru $n\geq2$, avem

$$a_n=\frac{(-1)^{n-2}\cdot3}{2^{n+3}}\cdot\cos\frac{(n-2)\pi}{2},\qquad b_n=\frac{(-1)^{n-2}\cdot3}{2^{n+3}}\cdot\sin\frac{(n-2)\pi}{2}.$$

Cazul II. Pentru $n = 1$, avem funcţia $g(z) = \frac{(z^2+1)^2}{z(2z^2+5iz-2)}$, iar $z_1 = 0$, $z_2 = \frac{-i}{2}$, $z_3 = -2i$ sunt poli simpli ai functiei $g$. Cum $z_3$ nu este în interiorul drumului $|z| = 1$, rezultă că

$$a_1 + ib_1 = \frac{1}{4\pi} \cdot 2\pi i \left( \text{Rez } (g, 0) + \text{ Rez } \left( g, \frac{-i}{2} \right) \right) = \frac{i}{2} \left( \frac{-1}{2} + \frac{3}{8} \right) = \frac{i}{2} \cdot \frac{-1}{8} = \frac{-i}{16},$$

de unde $a_1 = 0$ şi $b_1 = \frac{-1}{16}$.

Cazul III. Pentru $n = 0$ avem $g(z) = \frac{(z^2+1)^2}{z^2(2z^2+5iz-2)}$, pentru care $z_1 = 0$ este pol dublu, iar $z_2 = \frac{-i}{2}$, $z_3 = -2i$ sunt poli simpli. Atunci

$$\begin{aligned} a_0 + ib_0 &= \frac{1}{4\pi} \cdot 2\pi i \left( \text{Rez } (g, 0) + \text{ Rez } \left( g, \frac{-i}{2} \right) \right) \\ &= \frac{i}{2} \left( \frac{-5i}{4} + \frac{3i}{4} \right) = \frac{i}{2} \cdot \frac{-i}{2} = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

de unde $a_0 = \frac{1}{4}$. Rezultă că seria Fourier trigonometrică cerută este

$$\begin{aligned} f(x) = \;& \frac{1}{8} + \left( \frac{-1}{16} \right) \cdot \sin x + \sum_{n \geq 2} \left[ \frac{(-1)^{n-2} \cdot 3}{2^{n+3}} \cdot \cos \frac{(n-2)\pi}{2} \cdot \cos(nx) \right. \\ & \left. + \frac{(-1)^{n-2} \cdot 3}{2^{n+3}} \cdot \sin \frac{(n-2)\pi}{2} \cdot \sin(nx) \right]. \end{aligned}$$

## CONCURSUL DE MATEMATICĂ ”TRAIAN LALESCU”
### Faza naţională, anul II, profilele electric şi mecanic, 2010-2011

**I.** a) Impunem condiţia ca $u$ să fie armonică, deci $\Delta u = 0$. Cum $u$ nu depinde de $\theta$, rezultă $\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$. Notăm $t = \text{ tg } (\theta)$. Deoarece $\frac{\partial u}{\partial \theta} = \varphi(t) \frac{1}{\cos^2 \theta}$ şi $\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \varphi'' \frac{1}{\cos^4 \theta} + \varphi'(t) \cdot \frac{2 \sin \theta}{\cos^2 \theta}$, de unde condiţia de armonicitate se reduce la $\varphi''(t) + 2\varphi'(t) \cdot \sin \theta \cos \theta = 0$. Cum însă $2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta = \frac{2 \text{ tg } \theta}{1 + \text{ tg }^2 \theta} = \frac{2t}{1+t^2}$, rezultă $\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)} = -\frac{2t}{1+t^2}$ şi integrând, rezultă $\varphi'(t) = \frac{C_1}{1+t^2}, C_1 \in \mathbb{R}$ şi deci $\varphi(t) = C_1 \text{ arctg } (t) + C_2, C_2 \in \mathbb{R}$. Deci

$$u(\rho, 0) = C_1 \theta + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Folosind sistemul Cauchy-Riemann în coordonate polare, rezultă imediat că

$$v(\rho, \theta) = -C_1 \ln \rho + C_3, \; C_1, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Atunci $f(z) = C_1 \theta + C_2 + i(-C_1 \ln \rho + C_3)$, $z = \rho e^{i\theta}$.

b) Cazul I. Dacă $a \neq 0$, atunci distingem următoarele cazuri: I.1) dacă $r < a$, avem $I = 2\pi i \cdot$ Rez $(f, 0)$. Cum $z = 0$ este pol de ordinul întâi, rezultă Rez $(f, 0) = e^{-1/a} \cdot \frac{1}{a^2}$; I.2) dacă $r > a$, atunci $I = 2\pi i \cdot ($ Rez $(f, 0) +$ Rez $(f, a))$. Dar $z = a$ este punct singular esenţial şi Rez $(f, a) = c_{-1}$. Avem

$$e^{\frac{1}{z-a}} = 1 + \frac{1}{1!(z-a)} + \frac{1}{2!(z-a)^2} + \ldots + \frac{1}{n!(z-a)^n} + \ldots$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z-a)+a} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z-a}{a}} = \frac{1}{a} \left( 1 - \frac{z-a}{a} + \left( \frac{z-a}{a} \right)^2 - \ldots \right)$$

şi deci

$$f(z) = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{z-a}{a} + \left(\frac{z-a}{a}\right)^2 - \dots\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{1}{(z-a)^2} + \frac{1}{1!(z-a)^3} + \dots + \frac{1}{n!(z-a)^{n+2}} + \dots\right),$$

de unde $c_{-1} = \frac{1}{a}\left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{1!a^2} - \frac{1}{2!a^3} + \dots\right) = -\frac{1}{a^2}\, e^{-1/a}$. Rezultă $I = 0$.

Cazul II. Dacă $a = 0$, atunci $I = \int_{|z|=r} \frac{e^{1/z}}{z^3} dz = 2\pi i \cdot \text{Rez}\,(f, 0)$. Dar $z = 0$ este punct singular esenţial şi $c_{-1} = 0$, de unde $I = 0$.

**II.** Avem $\int_0^t 4e^{4(t-u)}\varphi'(u)du = 4e^{4t} * \varphi'(t)$. Aplicând transformarea Laplace şi proprietăţile acesteia, obţinem

$$p^2\mathcal{L}[\varphi(t)] + 4\cdot\frac{1}{p-4}\cdot p\mathcal{L}[\varphi(t)] = \frac{5}{p^2+25} \quad\Rightarrow\quad \frac{p(p^2-4p+4)}{p-4}\cdot\mathcal{L}[\varphi(t)] = \frac{5}{p^2+25},$$

deci $\mathcal{L}[\varphi(t)] = \frac{(p-4)5}{p(p-2)^2(p^2+25)}$. Fie $G(p) = \frac{(p-4)5}{p(p-2)^2(p^2+25)}\cdot e^{pt}$. Pentru $G$, $p = 0$ şi $p = \pm 5i$ sunt poli de ordinul întâi, iar $p = 2$ este pol de ordinul doi. Atunci $\varphi(t) = \text{Rez}\,(G, 0) + \text{Rez}\,(G, 5i) + \text{Rez}\,(G, -5i) + \text{Rez}\,(G, 2)$.

**III.** Folosind inversa transformatei Fourier prin sinus, obţinem

$$\varphi(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \underbrace{\frac{u}{(u^2+a^2)^2}\cdot\sin(ut)}_{\text{funcţie pară}}\,du = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{u\sin(ut)}{(u^2+a^2)^2}du.$$

Fie $J = \int_{-\infty}^\infty \underbrace{\frac{ue^{iut}}{(u^2+a^2)^2}}_{f(u)} du = 2\pi i\cdot\text{Rez}\,(f, ai)$. Cum $u = ai$ este pol de ordinul doi, rezultă Avem $\text{Rez}\,(f, ai) = \frac{te^{-at}}{4a}$, de unde $J = \frac{\pi i te^{-at}}{2a}$, iar $\varphi(t) = \frac{te^{-at}}{2a}$.

**IV.** a) Calculăm

$$\begin{aligned} a_n + ib_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\,\text{sh}\,\pi}\cdot e^{x+inx}dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2\,\text{sh}\,\pi}\cdot\left.\frac{e^{x+inx}}{1+in}\right|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi\cdot 2\,\text{sh}\,\pi}\cdot\frac{1}{1+in}\left(e^{\pi}(-1)^n - e^{-\pi}(-1)^n\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2\,\text{sh}\,\pi}\cdot\frac{1}{1+in}\cdot(-1)^n\cdot 2\,\text{sh}\,\pi = \frac{(-1)^n(1-in)}{\pi(1+n^2)}, \end{aligned}$$

de unde $a_n = \frac{(-1)^n}{\pi(1+n^2)}$ şi $b_n = \frac{n(-1)^{n+1}}{\pi(1+n^2)}$, $n \geq 1$.

Calculăm $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi \cdot 2\operatorname{sh}\pi}\cdot 2\operatorname{sh}\pi = \frac{1}{\pi}$ şi rezultă

$$f(z) = \frac{1}{\pi} + \sum_{n\geq 1}\left[\frac{(-1)^n}{\pi(1+n^2)}\cdot\cos(nx) + \frac{n(-1)^{n+1}}{\pi(1+n^2)}\cdot\cos(nx)\right], \quad x\in(-\pi,\pi).$$

b) Pentru obţinerea primei sume $S_1$, luăm $x = 0$ în dezvoltarea în serie de la punctul a). Obţinem

$$f(0) = \frac{1}{\pi} + \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{\pi(1+n^2)} \Leftrightarrow \frac{1}{2\operatorname{sh}\pi} = \frac{1}{\pi}(1+S_1)$$

şi deci $S_1 = \frac{\pi}{2\operatorname{sh}\pi} - 1$. Pentru obţinerea celei de-a doua sume $S_2$, folosim relaţia lui Parseval,

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx.$$

În cazul nostru, avem $a_n^2 + b_n^2 = \frac{1+n^2}{\pi^2(1+n^2)^2} = \frac{1}{\pi^2}$, deci relaţia devine

$$\frac{1}{2\pi^2} + S_2\cdot\frac{1}{\pi^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\operatorname{sh}\pi}\cdot e^{2x}dx,$$

de unde rezultă $S_2 = \pi\operatorname{ch}\pi - \frac{1}{2}$.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ”TRAIAN LALESCU”
Faza naţională, anul II, profilele electric şi mecanic, 2011-2012

**I.** Integrala poate fi scrisă ca $I_1 + I_2$, unde

$$I_1 = \int_0^{2\pi}\frac{\cos 2012x}{3+2\cos x}dx, \quad I_2 = \int_0^{2\pi}\frac{\sin 2012x}{3+2\cos x}dx.$$

Calculăm $I_1 + iI_2 = \int_0^{2\pi}\frac{e^{i\cdot 2012x}}{3+2\cos x}dx$. Schimbând $e^{ix} = z$, obţinem

$$I_1 + iI_2 = \frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{z^{2012}}{z^2+3z+1}dz = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)^{2012},$$

de unde $I_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)^{2012}$, iar $I_2 = 0$.

**II.** $z = 0$ este punct singular esenţial şi $Rez(f,0)$ este coeficientul lui $\frac{1}{z}$ din dezvoltarea în serie Laurent a funcţiei în jurul lui 0. Cum însă

$$z^{2012}\sin\left(\frac{1}{z}\right)=z^{2012}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{1}{z^{2n+1}(2n+1)!},$$

rezultă $c_{-1}=\frac{1}{2013!}$ şi $I=\frac{2\pi i}{2013!}$.

**III.** a) $f(t)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty e^{-a\omega}\sin(\omega t)d\omega=\dfrac{2t}{\pi(a^2+t^2)}$, $t>0$.

b) Cum $f(t)=\widehat{g}_s(\omega)$, rezultă că $g(\omega)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty f(t)\sin(\omega t)dt=\dfrac{2}{\pi}e^{-a\omega}$.

**IV.** $f(t)=\eta(t)$.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"
Faza naţională, anul II, profil inginerie, 2012-2013

**I.** a) Se verifcă faptul ca funcţia dată este armonică şi se obţine $f(z)=ze^{nz}$.

b) Notând $\operatorname{Im} g=t(x,y)$, condiţia $\Delta(Ref)=0$ implică

$$\varphi''(t)\left[\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2\right]+\varphi'(t)\Delta t=0.$$

Dar $g$ este olomorfă, deci $\operatorname{Im} g$ este armonică. Prin urmare, avem $\varphi''(t)=0$, de unde $\varphi(t)=at+b$.

c) Înlocuind $f$ în integrală, aceasta devine $\displaystyle\int_{|z|=R}\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2(z+2i)}dz$. Notăm $g(z)$ funcţia de sub integrală. Aceasta are două puncte singulare: $z=0$ punct esenţial şi $z=-2i$ pol de ordinul 1. Obţinem $\operatorname{Rez}\,(g,-2i)=-\dfrac{e^{-\frac{1}{2i}}}{4}$, iar cum

$$\frac{e^{1/z}}{z^2}\frac{1}{z+2i}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3 1!}+\frac{1}{z^4 2!}+\dots\right)\left(1-\frac{z}{2i}+\frac{z^2}{(2i)^2}-\dots\right),$$

avem $\operatorname{Rez}\,(g,0)=\frac{1}{2i}(-\frac{1}{2i}+\frac{1}{1!(2i)^2}-\frac{1}{2!(2i)^3}+\dots)=\frac{1}{4}(1-\frac{1}{2i}+\frac{1}{2!(2i)^2}-\dots)=\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2i}}$.

Dacă $R<2$, atunci $I=2\pi i\operatorname{Rez}\,(g,0)=\dfrac{\pi i}{2}e^{-\frac{1}{2i}}$.

Dacă $R=2$, atunci $I=2\pi i\operatorname{Rez}\,(g,0)+\pi i\operatorname{Rez}\,(g,-2i)=\dfrac{\pi i}{4}e^{-\frac{1}{2i}}$.

Dacă $R>2$, atunci $I=2\pi i(\operatorname{Rez}\,(g,0)+\operatorname{Rez}\,(g,-2i))=0$.

**II.** Aplicăm transformarea Laplace. Obţinem $(p+1)^2\mathcal{L}[x(t)]=1+\mathcal{L}\left[\dfrac{e^{-t}}{t+1}\right]$, de unde rezultă

$$\mathcal{L}[x(t)]=\frac{1}{(p+1)^2}+\frac{1}{(p+1)^2}\mathcal{L}\left[\frac{e^{-t}}{t+1}\right]=\mathcal{L}[te^{-t}]+\mathcal{L}[te^{-t}]\mathcal{L}\left[\frac{e^{-t}}{t+1}\right].$$

Atunci

$$\begin{aligned} x &= te^{-t}+te^{-t}\star\frac{e^{-t}}{t+1}=te^{-t}+\int_0^t(t-x)e^{-t+x}\frac{e^{-x}}{x+1}dx\\ &= te^{-t}+e^{-t}\int_0^t(t-x)\frac{1}{x+1}dx=e^{-t}(t+1)\ln(t+1). \end{aligned}$$

**III.** a) Calculăm $a_n + ib_n = \frac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{inx}}{5-4\sin x}dx$. Cu schimbarea de variabilă $e^{ix} = z$, obţinem

$$\begin{aligned} a_n + ib_n &= \tfrac{1}{\pi}\int_{|z|=1} \frac{z^n}{-2z^2+5iz+2}dz = \frac{1}{\pi}2\pi i \operatorname{Rez}\left(f, \frac{i}{2}\right) \\ &= \frac{2}{3}\frac{i^n}{2^n} = \frac{2}{3}\frac{(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})^n}{2^n} = \frac{2}{3}\frac{(\cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2})}{2^n}, \end{aligned}$$

de unde $a_n = \dfrac{\cos\frac{n\pi}{2}}{3\cdot 2^{n-1}}$, $a_0 = \dfrac{2}{3}$, $b_n = \dfrac{\sin\frac{n\pi}{2}}{3\cdot 2^{n-1}}$ şi rezultă seria Fourier trigonometrică

$$\frac{1}{3} + \sum_{n\geq 1} \frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{3\cdot 2^{n-1}}\cos nx + \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{3\cdot 2^{n-1}}\sin nx.$$

b) Integrala cerută este $a_{2n+1} = 0$.

**IV.** a) Obţinem

$$\widehat{f_k}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}x^k e^{i\lambda x}dx = \int_{-\infty}^{0} x^k e^{i\lambda x + x}dx + \int_0^{\infty} x^k e^{i\lambda x - x}dx.$$

Notăm prima integrală cu $I_k$ şi cea de-a două cu $J_k$. Integrând prin părţi, obţinem $I_k = -\dfrac{k}{1+i\lambda}I_{k-1}$, de unde $I_k = (-1)^k\dfrac{k!}{(1+i\lambda)^k}I_0 = \dfrac{(-1)^k\cdot k!}{(1+i\lambda)^{k+1}}$. Analog, avem $J_k = \dfrac{k!}{(1-i\lambda)^{k+1}}$.

b) Avem $\widehat{g}(\lambda) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{(2k)!}e^{i\lambda x}dx = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k)!}\widehat{f}_{2k}(\lambda)$. Cum $\widehat{f_k}(\lambda)$ a fost calculat la punctul a), rezultă $\hat{g}(\lambda) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{(1+i\lambda)^{2k}} + \frac{1}{(1-i\lambda)^{2k}}\right)$, de unde

$$\hat{g}(1) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{(1+i)^{2k}} + \frac{1}{(1-i)^{2k}}\right) = \sum_{k=0}^{n}\left[\left(\frac{1}{2i}\right)^k + \left(\frac{-1}{2i}\right)^k\right] = \frac{1-(\frac{1}{2i})^{n+1}}{1-\frac{1}{2i}} + \frac{1-(\frac{-1}{2i})^{n+1}}{1+\frac{1}{2i}}.$$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ”TRAIAN LALESCU”
Faza naţională, anul II, profil inginerie, 2013-2014

**I.** Soluţia propusă se obţine folosind transformarea Laplace. Cum

$$\mathcal{L}[ty](p) = -\mathcal{L}'[y](p), \quad \mathcal{L}[ty''](p) = -2p\mathcal{L}[y](p) - p^2\mathcal{L}'[y](p), \quad \mathcal{L}[\operatorname{ch} t](p) = \frac{p}{p^2-1},$$

se obţine ecuaţia diferenţială

$$(1-p^2)\mathcal{L}'[y](p) - 2p\mathcal{L}[y](p) = \frac{-2p}{p^2-1}$$

sau, echivalent, $((1-p^2)^2\mathcal{L}[y](p))' = 2p$. Integrând, rezultă $\mathcal{L}[y](p) = \dfrac{p^2+C}{(p^2-1)^2}$, unde $C$ este o constantă reală arbitrară. Funcţia $G(p) = \mathcal{L}[y](p)e^{pt}$ are polii dubli $p = \pm 1$. Reziduurile corespunzătoare sunt

$$Rez(G,1) = \frac{(1-C)e^t + (1+C)te^t}{4}, \quad Rez(G,-1) = \frac{-(1-C)e^{-t} + (1+C)te^{-t}}{4},$$

deci soluţia este $k_1 t \operatorname{ch} t + k_2 \operatorname{sh} t$, unde $k_1 = \frac{1+C}{2}$, iar $k_2 = \frac{1-C}{2}$.

**II.** Calculăm $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$. Avem

$$a_n + ib_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos x}\cos(\sin x)e^{inx}dx, \; n \geq 0.$$

Folosind schimbarea de variabilă $e^{ix} = z$, rezultă

$$a_n + ib_n = \frac{1}{\pi}\int_{|z|=1} e^{\frac{z^2+1}{2z}} \cos\left(\frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{z^n}{iz}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}(e^z + e^{\frac{1}{z}})z^{n-1}dz.$$

Pentru $n = 0$, obţinem $a_0 = 2$, iar pentru $n \geq 1$, $a_n = \dfrac{1}{n!}$ şi $b_n = 0$.

**III.** Se observă că $\bar{z} = \dfrac{1}{z}$. Pentru $n = 0$, integrala de calculat este $2\pi i Rez(f,0)$. Folosind dezvoltarea în serie Laurent a funcţiei $\sin\dfrac{2}{z}$ în jurul lui 0, integrala devine $\dfrac{-4\pi}{a+1}$. Pentru $n \geq 1$, calculăm separat integralele

$$I_1 = \int_{|z|=1}\frac{z\sin z}{z^{2n}+a}dz, \quad I_2 = \int_{|z|=1}\frac{\sin\frac{2}{z}}{z^{2n}+a}dz.$$

Pentru calculul lui $I_1$, avem $2n$ poli de ordinul întâi situaţi în interiorul drumului, astfel că este de preferat calculul reziduului în punctul de la infinit. Obţinem $I_1 = 0$. Analog se obţine şi $I_2 = 0$.

**IV.** Membrul stâng este o transformată Fourier prin cosinus şi folosind formula de inversiune obţinem $f(x) = \dfrac{1}{2|a|^3}e^{-|a|x}(|a|x+1)$.

# Index