I. Spaţii vectoriale. Subspaţii. Subspaţiul generat de o familie de vectori

1. Care dintre următoarele submulţimi formează un subspaţiu vectorial în spaţiul vectorial indicat?

   (a) $U = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \geq 0\}$, $V = \mathbb{R}^2$, $\Bbbk = \mathbb{R}$.

   (b) $U = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x^2+y^2 = 0\}$, $V = \Bbbk^2$, unde corpul $\Bbbk$ este pe rând unul dintre corpurile $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_2$ sau $\mathbb{Z}_5$.

   (c) $U = \{A \mid det(A) = 0\}$, $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\Bbbk = \mathbb{R}$.

   (d) $U = \{A \mid tr(A) = 0\}$, $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\Bbbk = \mathbb{R}$.

   (e) $U = \{A \mid A^2 = 0_2\}$, $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\Bbbk = \mathbb{R}$.

   (f) $U = \{P \mid P(1) = P'(1) = 0\}$, $V = \mathbb{R}[X]$, $\Bbbk = \mathbb{R}$.

   (g) $U = \{v \in \mathbb{Z}_2^n \mid v$ conţine doar un număr par de componente nenule$\}$, $V = \mathbb{Z}_2^n$, $\Bbbk = \mathbb{Z}_2$.

2. Verificaţi dacă:

   (a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \in \mathsf{Ker}(\begin{pmatrix} 3 & -5 & -3 \\ 6 & -2 & 0 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix})$

   (b) $\begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} \in \mathsf{Im}(\begin{pmatrix} 3 & -5 & -9 \\ 8 & 7 & -6 \\ -5 & -8 & 3 \\ 2 & -2 & -9 \end{pmatrix})$

   (c) $\begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathsf{Sp}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \\ -3 \end{pmatrix}\right\}$

   (d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathsf{Sp}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

   (e) $X \in \mathsf{Sp}\{1 + 2X + X^2, 2 + X^2\}$

3. Pentru fiecare dintre matricele A de mai jos, determinaţi $\mathsf{Ker}(A)$ şi $\mathsf{Im}(A)$:

   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -4 & 2 & -6 \\ -3 & -2 & -7 \end{pmatrix}$

   (c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -8 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

4. Arătaţi că pentru orice subspaţiu $U \subseteq \mathbb{R}^n$ există o matrice A cu n coloane astfel încât $U = \mathsf{Ker}(A)$. Determinaţi pentru fiecare dintre subspaţiile de mai jos o asemenea matrice:

   (a) $U = \mathsf{Sp}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$

   (b) $U = \mathsf{Sp}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

   (c) $U = \mathsf{Sp}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

5. Fie v_1, v_2 vectori într-un spaţiu vectorial V şi $U \subseteq V$ un subspaţiu vectorial care conţine atât pe v_1 cât şi pe v_2. Arătaţi că $\mathsf{Sp}\{v_1, v_2\} \subseteq U$ (în particular, rezultă de aici că $\mathsf{Sp}\{v_1, v_2\}$ este ***cel mai mic*** subspaţiu vectorial din V care conţine cei doi vectori). Generalizare.