

Exerciții Decidabilitate

October 2018

1. Fie 3 mulțimi A, B și $C \subseteq N$ despre care știm ca:

- (a) $A \leq_T B$
- (b) Mulțimea B este recursiv-numărabilă
- (c) Mulțimea C este decidabilă

Ce putem spune sigur despre mulțimea $A \setminus C$ (este decidabilă, semidecidabilă, nedecidabilă)? Justificați.

2. Fie predicatele $A, B, C : R \rightarrow \{0, 1\}$. Știind că A este decidabil, $A \cup \overline{B}$ este nedecidabil și $C \cup B$ este semidecidabil, ce puteți spune despre predicatul $A \cup C$?
3. Ce puteți spune despre decidabilitatea următoarei variante a problemei $k-PCP$?
Se dau 2 liste ce conțin fiecare câte n cuvinte formate cu caractere din același alfabet $\Sigma (|\Sigma| > 1)$, $X = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ și $W = \langle w_1, w_2, \dots, w_n \rangle$ și un număr natural k . Există un șir format din cel mult k indici din mulțimea $\{1..n\}$, care eventual se pot repeta, i_1, i_2, \dots, i_j ($j \leq k$) astfel încât $x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_j} = w_{i_1}w_{i_2}\dots w_{i_j}$?
4. Se consideră $A = \{\text{mulțimea cuvintelor din dicționarul unei limbi}\}$. Mulțimea A este numărabilă sau nenumărabilă?
5. Se consideră $B = \{\text{roșu, galben, albastru}\}$. Mulțimea $C = \{\text{cuvintele obținute prin concatenarea de oricâte ori a elementelor mulțimii } B\}$ este numărabilă sau nenumărabilă? Justificați răspunsurile.
6. Fie mulțimea $A = \{x | \exists y, z, t, y \neq z \neq t, a.i. (x, y), (x, z), (x, t) \in B, y = z^2\}$, unde $B \subseteq N \times N$ este recursiv numărabilă. Demonstrați ca A este recursiv numărabilă.
7. Fie A o submulțime infinită din $N \times N$. Se cunoaște programul generator $Q_A \in P_{0,1}$ pentru A , care la fiecare apel returnează un element din A . Arătați că există programul P astfel încât

$$P(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ \perp, & x \notin A \end{cases}$$

8. Dați un exemplu de mulțime nerecursivă și demonstrați pe scurt că aceasta este într-adevăr nerecursivă.
9. Definiți o mulțime recursiv-numărabilă care nu este recursivă și demonstrați că așa este.
10. Fie mulțimile $A, B, C \subseteq N$. Știind că:

- (a) $A \cap B = B \cap C = A \cap C = \phi$
- (b) $A \cup B \cup C = N$
- (c) A, B, C sunt mulțimi recursiv-numerabile

demonstrați că A, B, C sunt recursive.

11. Fie problema BIN care testează oprirea unui program pe inputuri binare astfel:

Se oprește un program arbitrar P' pe un input arbitrar w' de forma $\{0,1\}^$? Inputul w' e format numai din 1 și 0 (ex: 111, 10, 0, 01010 etc.).*

Demonstrați (ne)decidabilitatea problemei BIN , prin reducerea Turing a acesteia de la/la o problema cunoscută.