Transformari Geometrice 2D

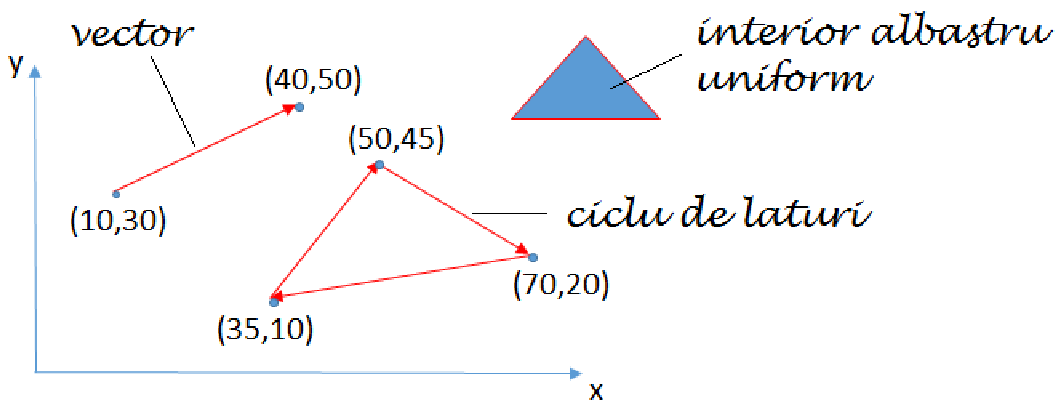
Prof. univ. dr. ing. Florica Moldoveanu

Curs *Elemente de Grafică pe Calculator* – UPB, Automatică şi Calculatoare
2020-2021

Transformari geometrice(1)

Obiectele 2D/3D sunt reprezentate prin:

- **Date geometrice**: coordonatele varfurilor, raportate la un sistem de coordonate carteziene 2D sau 3D;
- **Atribute topologice**, care definesc modul in care sunt conectate varfurile (laturi, ciclul de laturi al unei feţe, ş.a.);
- **Atribute de aspect**: culoarea, tipul de interior pentru suprafete 2D, atribute de material pentru suprafete 3D (ex: reflexia/refractia luminii de catre suprafata), s.a.



Transformarile geometrice se aplica coordonatelor varfurilor obiectului si nu afecteaza atributele sale!

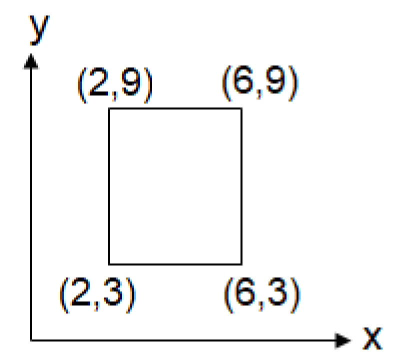
Transformari geometrice (2)

- Sunt operatii fundamentale in sinteza imaginilor
- Folosite pentru:
  - Redarea desenelor/obiectelor 2D/3D la diferite marimi
  - Compunerea desenelor/scenelor 3D din mai multe obiecte
  - Realizarea animatiei
  - Transformarea obiectelor dintr-un sistem de coordinate in alt sistem de coordonate
  - Etc.

Transformari geometrice 2D (1)

Sunt transformari ale obiectelor definite in sistemul de coordonate carteziene XOY, numite şi obiecte 2D. Fiecare vârf al unui obiect 2D este definit printr-o pereche de coordonate (x,y).

Transformarile geometrice 2D elementare



- Translaţia
- Scalarea faţă de origine
- Rotaţia faţă de origine
- Forfecarea faţă de origine
- Oglindirile faţă de axele principale şi faţă de origine

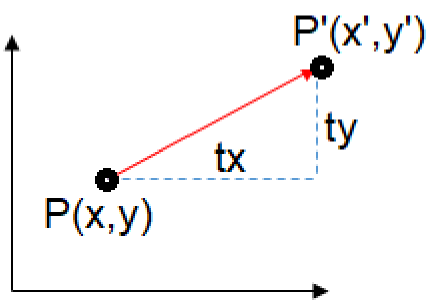
Orice alta transformare se obtine prin compunerea a 2 sau mai multe transformari elementare

- Scalarea /rotaţia compusa cu translatie
- Forfecare față de un punct oarecare din plan, etc

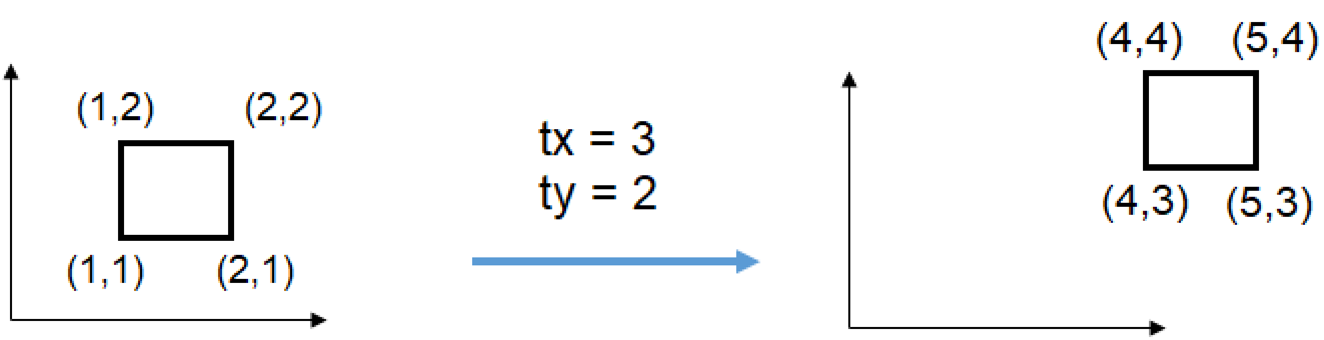
Transformari geometrice 2D elementare (1)

- Translatia (1)

Este definita printr-un vector, T[tx,ty].

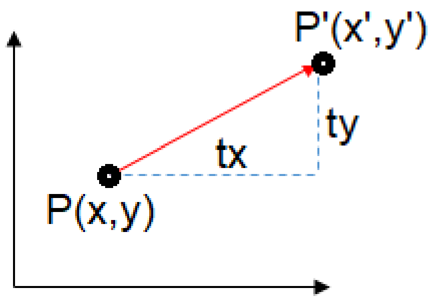


$$x' = x + tx$$
$$y' = y + ty$$



Transformari geometrice 2D elementare (2)

- Translatia (2)



$$x' = x + tx$$
$$y' = y + ty$$

➢ Se doreste o reprezentare matriciala a transformarii, pentru compunerea sa cu alte transformari, de ex. translatie şi scalare: compunerea transformarilor se realizeaza prin înmultirea matricilor transformarilor elementare.

➢ Un punct din plan, P(x,y), se reprezintă în coordonate carteziene printr-un vector [x, y] sau $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

→ Nu exista o matrice M, de 2x2, astfel încat sa exprimam translatia prin:

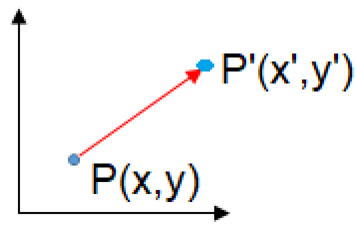
[x’, y’] = [x, y] * M sau $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = M * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Transformari geometrice 2D elementare (3)

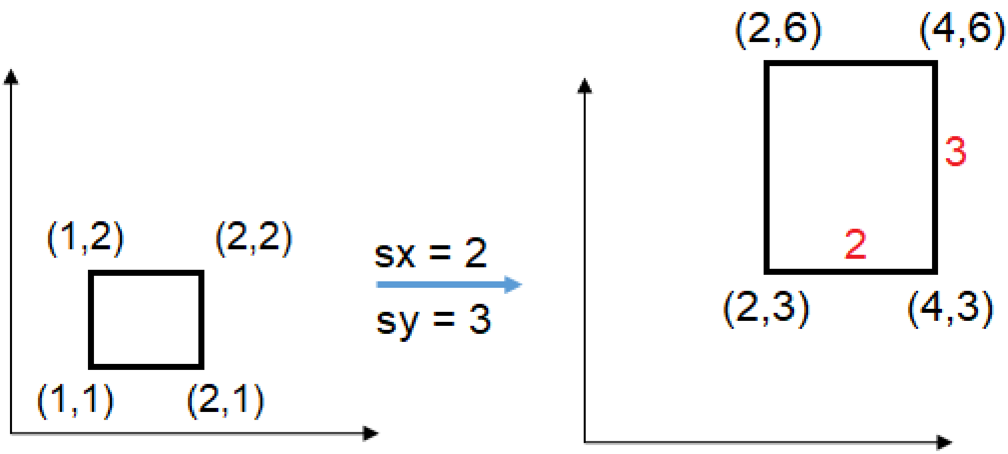
Scalarea fata de origine

Este definita prin 2 numere reale, de regula pozitive:

- sx - scalarea pe axa OX
- sy - scalarea pe axa OY



x' = x * sx
y' = y * sy



Reprezentarea matriciala

$$[x' \quad y'] = [x \quad y] * \begin{bmatrix} sx & 0 \\ 0 & sy \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sx & 0 \\ 0 & sy \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

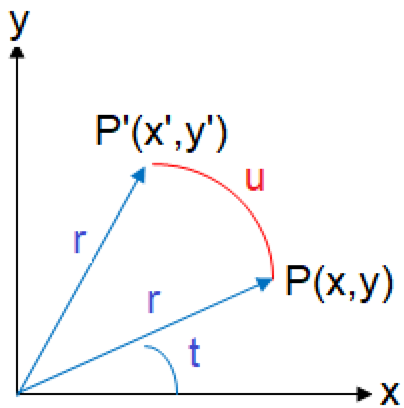
Efecte:

- Daca sx sau sy sau ambii sunt >1: marire si îndepartare de origine
- Daca sx sau sy sau ambii sunt <1: micsorare si apropiere de origine

➢ sx = sy , scalare uniforma: nu modifica forma obiectului

Transformari geometrice 2D elementare (4)

Rotaţia fata de origine



x = r*cos(t)
y = r*sin(t)

Relatia dintre coordonatele carteziene si coordonatele polare ale unui punct P(x,y)

x' = r*cos(t+u) = r*(cos(t)*cos(u) – sin(t)*sin(u)) = x*cos(u) – y*sin(u)
y' = r*sin(t+u) = r*(cos(t)*sin(u) + sin(t)*cos(u)) = x*sin(u) + y*cos(u)

Rotatia fata de origine

x' = x*cos(u) - y*sin(u)
y' = x*sin(u) + y*cos(u)

$$[x' \;\; y'] = [x \;\; y] * \begin{bmatrix} \cos(u) & \sin(u) \\ -\sin(u) & \cos(u) \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(u) & -\sin(u) \\ \sin(u) & \cos(u) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Transformari geometrice 2D fata de un punct oarecare din plan (1)

Scalarea fata de un punct oarecare din plan

- Punctul fix al transformării este un punct oarecare F(xf,yf) – coordonatele sale nu se modifica prin aplicarea transformării.

- P(x,y) este punctul transformat

- **Scalarea se aplica vectorului FP [x-xf, y-yf]. Prin scalare se transforma în FP' [x'-xf, y'-yf]:**

➢ Inlocuim in expresia scalarii fata de origine (x,y) cu (x-xf, y-yf) si (x',y') cu (x'-xf, y'-yf):

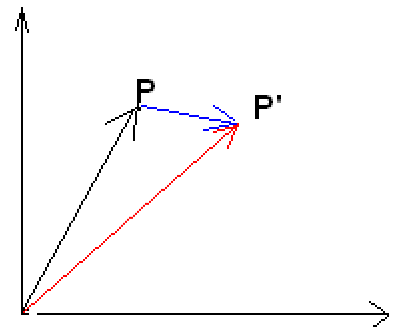
x' – xf = sx*(x-xf)

y' – yf = sy*(y – yf)

Rezultă:

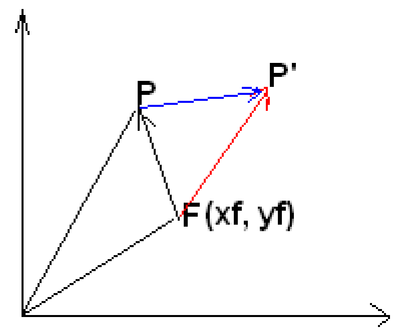
x' = x*sx + xf –xf*sx

y' = y*sy + yf –yf*sy



Scalarea fata de origine

x' - 0 = sx (x - 0)
y' - 0 = sy (y - 0)



Scalarea fata de un punct F

x' - xf = sx (x - xf)
y' - yf = sy (y - yf)

Nu poate fi exprimata în coordonate carteziene printr-o matrice de 2x2!

Transformari geometrice 2D fata de un punct oarecare din plan(2)

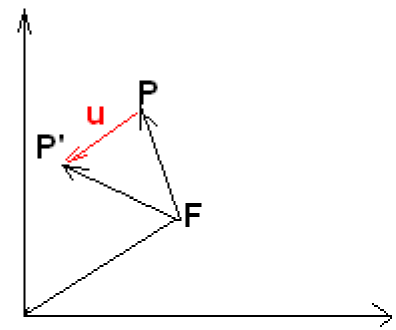
Rotatia fata de un punct oarecare din plan

- Punctul fix al transformarii este F(xf,yf)
- P(x,y) este punctul transformat
- **Rotatia se aplica vectorului FP [x-xf, y-yf], in jurul lui F.**

  Rezulta vectorul FP'[x' – xf, y' – yf]

  x' – xf = (x-xf)* cos(u) - (y – yf) * sin(u)

  y' – yf = (x-xf)* sin(u) + (y – yf) * cos(u)



Rotatia fata de un punct F din plan

Rezultă:

x' = x*cos(u) – y*sin(u) + xf – xf*cos(u) + yf*sin(u)

y' = x*sin(u) + y*cos(u) + yf – xf*sin(u) – yf*cos(u)

Nu poate fi exprimata in coordonate carteziene printr-o matrice de 2x2!

Compunerea transformarilor geometrice

De ce este necesară?

- Pentru a putea aplica o singura transformare care înglobeaza o secvenţă de transformari elementare, în locul aplicării fiecarei transformări din secventa; de ex., se aplică tuturor vârfurilor o transformare care înglobează scalare (S), rotatie (R) si translatie (T) în loc să se aplice fiecarui varf secventa de transformari elementare.

- Daca **P** este punctul transformat si **Pt** punctul obtinut prin aplicarea transformarii compuse:

  Pt = M * **P**, unde P si Pt sunt vectori coloana,

  în loc de P' = S * P; P" = R * P'; Pt = T * P" unde M = T * R * S

- Matricea unei transformari compuse se obtine prin înmultirea matricilor transformarilor elementare.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = S*R*P = \begin{bmatrix} sx & 0 \\ 0 & sy \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \cos(u) & -\sin(u) \\ \sin(u) & \cos(u) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = R*S*P = \begin{bmatrix} \cos(u) & -\sin(u) \\ \sin(u) & \cos(u) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} sx & 0 \\ 0 & sy \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Deoarece: R*S # S*R

Reprezentarea transformarilor geometrice 2D în coordonate omogene(1)

- **Translatia nu poate fi reprezentata în coordonate carteziene printr-o matrice!**
- **Aceasta impune reprezentarea transformarilor în coordonate omogene.**

Coordonate omogene:

Un punct din plan, P(x,y), se reprezinta in coordonate omogene printr-un vector

[xw, yw, w] sau $\begin{bmatrix} xw \\ yw \\ w \end{bmatrix}$ xw = x * w; yw = y * w; w – orice numar real

Exemplu: P(2, 0.5) → [2, 0.5, 1], [4, 1, 2], [20, 5, 10]

Transformarea din coordonate omogene in coordonate carteziene:

[xw yw w] → P(x, y), unde:

- pentru w #0, x = xw/w, y = yw/w
- pentru w =0, P este un punct la infinit

Exemple: [1, 0, 0] este un punct la infinit pe directia axei OX,
[a, a, 0] este un punct la infinit pe directia dreptei [0,0] → [a,a]

Reprezentarea transformarilor elementare 2D în coordonate omogene

In OpenGL se folosesc vectori coloană pentru a reprezenta puncte din plan sau din spaţiu.

Translaţia

$$[x'\ y'\ 1] = [x\ y\ 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & 1 \end{bmatrix} \quad \text{sau} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Scalarea faţă de origine

$$[x'\ y'\ 1] = [x\ y\ 1]\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{sau} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotaţia faţa de origine

$$[x'\ y'\ 1] = [x\ y\ 1]\begin{bmatrix} \cos(u) & \sin(u) & 0 \\ -\sin(u) & \cos(u) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{sau} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(u) & -\sin(u) & 0 \\ \sin(u) & \cos(u) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformarile inverse ale transformarilor elementare

T(tx, ty): matricea translatiei, in coordonate omogene

S(0, 0, sx, sy): matricea scalarii fata de origine, in coordonate omogene

R(0,0,u): matricea rotatiei fata de origine, in coordonate omogene

Transformarile inverse sunt:

$T(tx, ty)^{-1} = T(-tx, -ty)$

$S(0, 0, sx, sy)^{-1} = S(0, 0, 1/sx, 1/sy)$

$R(0,0, u)^{-1} = R(0, 0, -u)$

Transformari geometrice 2D compuse(1)

Exemple de transformari compuse: scalarea/rotatia fata de un punct oarecare din plan.

- Matricea transformarii compuse se obtine prin înmulțirea matricilor urmatoarelor transformari elementare:
  - Translaţia prin care punctul fix al transformării ajunge în origine: T(-xf, -yf);
  - Scalarea / rotaţia faţă de origine: S(0,0,sx,sy)/R(0,0,u);
  - Translaţia inversă celei de la punctul 1: T(xf, yf).

[x' y' 1] = [x y 1] * T(-xf, -yf) * S(0,0,sx,sy)/R(0,0,u) * T(xf, yf)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = T(xf, yf) * S(0,0,sx,sy)/R(0,0,u) * T(-xf, -yf) * \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformari geometrice 2D compuse(2)

Scalarea faţă de punctul F(xf,yf)

$$[x'\ y'\ 1] = [x\ y\ 1]\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_f & -y_f & 1 \end{bmatrix}}_{T(-xf,\ -yf)}\underbrace{\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{S(0,\ 0,\ sx,\ sy)}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_f & y_f & 1 \end{bmatrix}}_{T(xf,\ yf)}$$

Matricea transformarii compuse:

M = T(-xf, -yf) * S(0, 0, sx, sy) * T(xf, yf)

Aplicarea transformarii compuse:

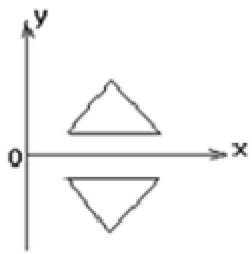
[x' y' 1] = [x y 1] * M

Alte transformari geometrice 2D(1)
Simetria (Oglindirea)

Față de axa OX:

$x' = x$

$y' = -y$

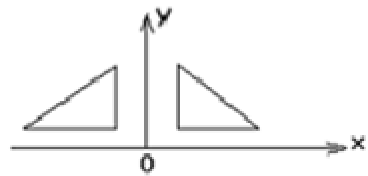


$$[x'\,y'\,1] = [x\,y\,1]\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \text{ sau } \begin{bmatrix}x'\\ y'\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ 1\end{bmatrix}$$

Față de axa OY:

$x' = -x$

$y' = y$

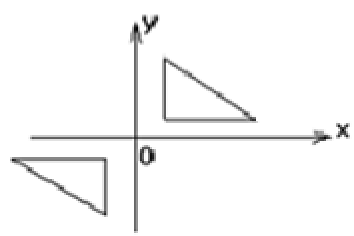


$$[x'\,y'\,1] = [x\,y\,1]\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \text{ sau } \begin{bmatrix}x'\\ y'\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ 1\end{bmatrix}$$

Față de origine:

$x' = -x$

$y' = -y$

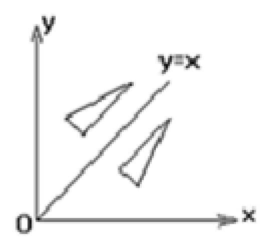


$$[x'\,y'\,1] = [x\,y\,1]\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \text{ sau } \begin{bmatrix}x'\\ y'\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ 1\end{bmatrix}$$

Față de dreapta y=x:

$x' = y$

$y' = x$



$$[x'\,y'\,1] = [x\,y\,1]\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \text{ sau } \begin{bmatrix}x'\\ y'\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ 1\end{bmatrix}$$

Alte transformari geometrice elementare 2D(2) Oglindirea faţă de o dreaptă oarecare

Se exprimă ca transformare compusa prin înmulţirea matricilor urmatoarelor transformari:

1. O translaţie, astfel încât dreapta sa treaca prin origine: T(tx,ty)

2. O rotaţie faţă de origine, a.î. dreapta să se suprapună peste una dintre axele principale: R(0,0,u)

3. Oglindirea faţă de axa principală peste care a fost suprapusă dreapta: O

4. Rotaţia inversă celei de la punctul 2: R^{-1} **=** R(0,0,-u)

5. Translaţia inversă celei de la punctul 1: T^{-1} = T(-tx,-ty)

În notaţie matricială: $\mathbf{M = T * R* O* R^{-1} *T^{-1}}$ (folosind vectori linie) **sau**

$\mathbf{M = T^{-1} * R^{-1} *O *R *T}$ (folosind vectori coloana)

Deduceti elementele matricilor T, R, O, atunci cand dreapta este data printr-un punct, (xd, yd)

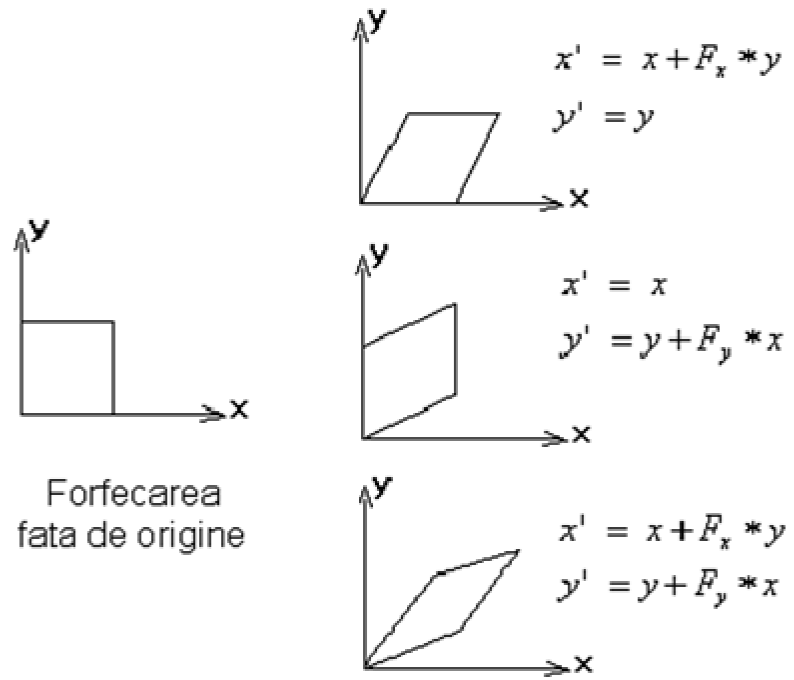
şi o directie, D[a, b].

Alte transformari geometrice 2D (3)
Forfecarea

Forfecarea față de origine – transformare elementara- este definita prin 2 numere reale:

Fx: factorul de forfecare pe axa OX

Fy: factorul de forfecare pe axa OY



Forfecarea fata de origine

Deduceti formele matriciale ale transformarilor de forfecare față de origine

Forfecarea fata de un punct oarecare din plan, (xf,yf) , exprimata ca transformare compusa:

1. Translatie prin care punctul (xf, yf) ajunge in origine
2. Forfecarea fata de origine
3. Translatia inversa celei de la pasul 1