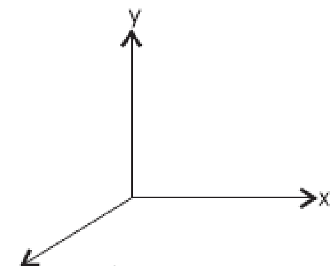
Transformari geometrice 3D

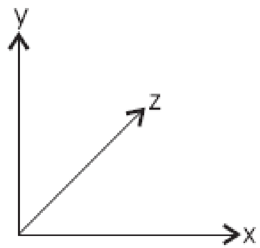
Prof. univ. dr. ing. Florica Moldoveanu

Curs *Elemente de Grafică pe Calculator* – UPB, Automatică şi Calculatoare
2020-2021

Sisteme de coordonate carteziene 3D



dreapta



stânga

Sisteme de coordonate carteziene 3D

i, j, k: versorii directiilor axelor sistemului de coordonate

dreapta: k = (i x j)/|i x j|

stanga: k = (j x i)/|j x i|

Sistemul de coordonate în care este descrisa scena într-o aplicatie OpenGL: sistem de coordonate carteziene 3D dreapta.

Transformările geometrice 3D elementare

- Translaţia
- Scalarea faţă de origine
- Rotaţiile în jurul axelor principale ale sistemului de coordonate
- Oglindirea faţă de un plan principal al sistemului de coordonate
- Forfecarea faţă de originea sistemului de coordonate

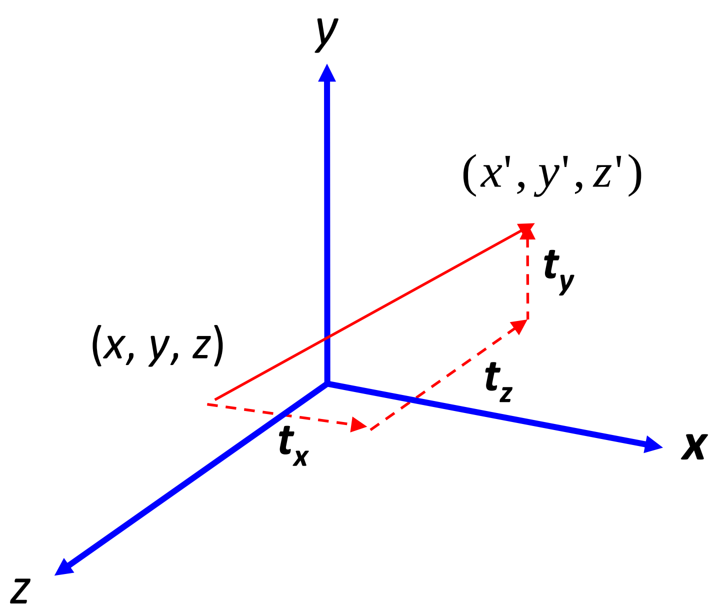
Considerăm punctele din spaţiu reprezentate prin vectori coloană, în coordonate omogene, pentru a respecta conventia din OpenGL:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

M este matricea de transformare a punctului (x, y, z), în coordonate omogene

Translaţia

Definita printr-un vector T[tx,ty,tz]



$$x' = x + t_x$$

$$y' = y + t_y$$

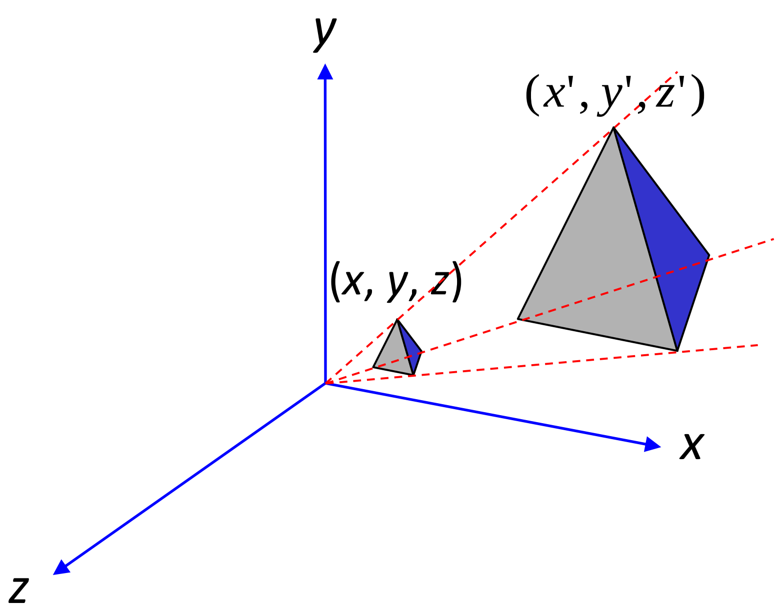
$$z' = z + t_z$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

T(t_x, t_y, t_z)

Scalarea faţă de origine

Definita prin 3 numere reale: Sx,Sy, Sz – factorii de scalare pe cele 3 axe



$$S_x = S_y = S_z \quad \Rightarrow \quad \text{scalare uniforma}$$

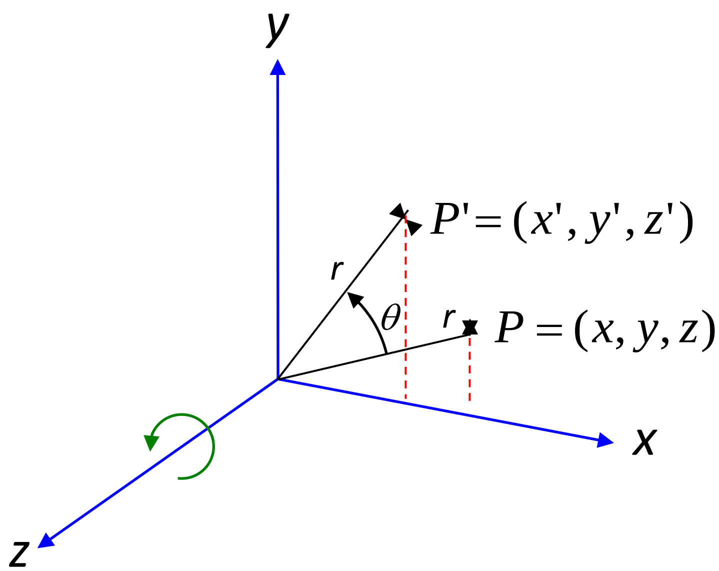
altfel, scalare neuniforma

$$x' = x \cdot s_x$$
$$y' = y \cdot s_y$$
$$z' = z \cdot s_z$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$S(s_x, s_y, s_z)$

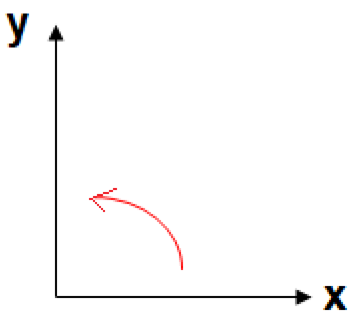
Rotaţia pozitivă (trigonometrica) în jurul axei oz



Este o rotaţie într-un plan de z constant (prin rotaţie nu se modifică coordonata z).

Rotatia in planul XOY:

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$
$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$$
$$z' = z = 0$$



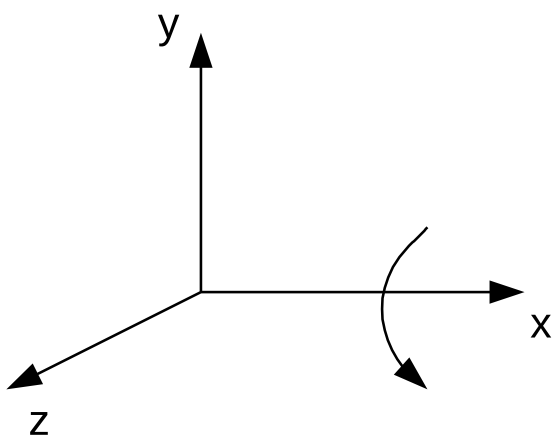
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$R_z(\theta)$

Rotatia punctului P(x,y,z) in jurul axei Oz cu unghiul θ:

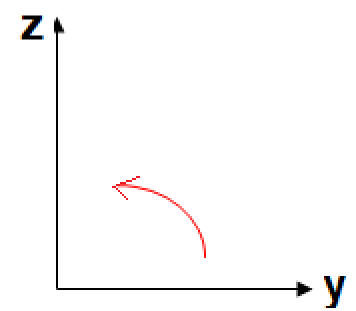
$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$
$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$$
$$z' = z$$

Rotaţia pozitivă în jurul axei ox



Rotatia in planul Y0Z

$$y' = y\cos\theta - z\sin\theta$$
$$z' = y\sin\theta + z\cos\theta$$
$$x' = x = 0$$

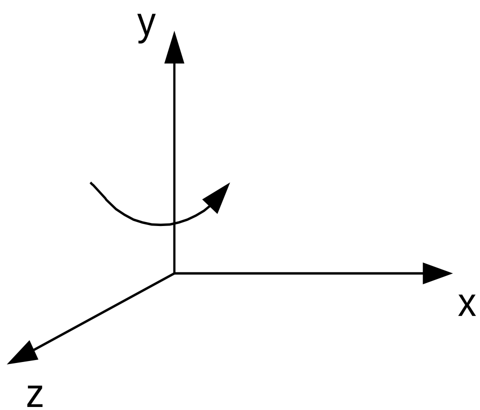


Rotatia punctului P(x,y,z) in jurul axei Ox cu unghiul θ:

$$x' = x$$
$$y' = y\cos\theta - z\sin\theta$$
$$z' = y\sin\theta + z\cos\theta$$

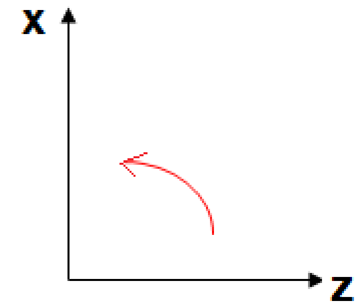
$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotaţia pozitivă în jurul axei oy



Rotatia in planul ZOX

$$z' = z\cos\theta - x\sin\theta$$
$$x' = x\cos\theta + z\sin\theta$$
$$y' = y = 0$$



Rotatia punctului P(x,y,z) in jurul axei Oy cu unghiul θ:

$$x' = x\cos\theta + z\sin\theta$$
$$y' = y$$
$$z' = -x\sin\theta + z\cos\theta$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Alte transformari geometrice 3D elementare

Oglindirea faţă de un plan principal al sistemului de coordonate

$$O_{xoy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

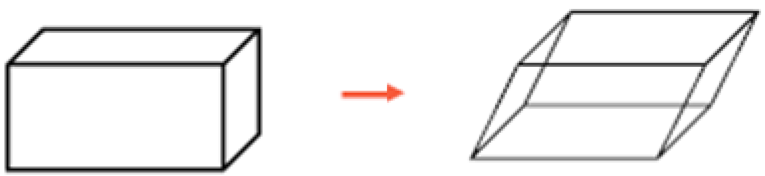
Forfecarea faţă de origine

- **Pe axa OZ: modifica x si y proportional cu z;** Fx, Fy - factorii de forfecare

  x' = x + Fx*z

  y' = y + Fy*z

  z' = z



- **Analog pentru forfecarea pe axa OX si pe axa OY**

- **Cazul general (forfecarea pe toate cele 3 axe):**

  x' = x + y* d + z*g

  y' = x*b + y + z*i

  z' = x*c + y*f + z

$$[x' \;\; y' \;\; z' \;\; 1] = [x \;\; y \;\; z \;\; 1] * \begin{vmatrix} 1 & b & c & 0 \\ d & 1 & f & 0 \\ g & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Transformari geometrice 3D compuse

Exemple:

1. Scalarea faţă de un punct oarecare, F(xf, yf, zf):

T(xf,yf,xf)*S(sx,sy,sz)*T(-xf,-yf,-zf)

2. **Rotatia cu unghiul u in jurul unei drepte paralele cu o axa a sistemului de coordonate**:

1. Translatia obiectului astfel incat dreapta sa se suprapuna pe axa sistemului de coordonate paralela cu dreapta.

2. Rotatia obiectului in jurul axei sistemului de coordonate - R(u): $R_x(u)/R_y(u)/ R_z(u)$

3. Translatia inversa celei din pasul 1.

Rezulta:

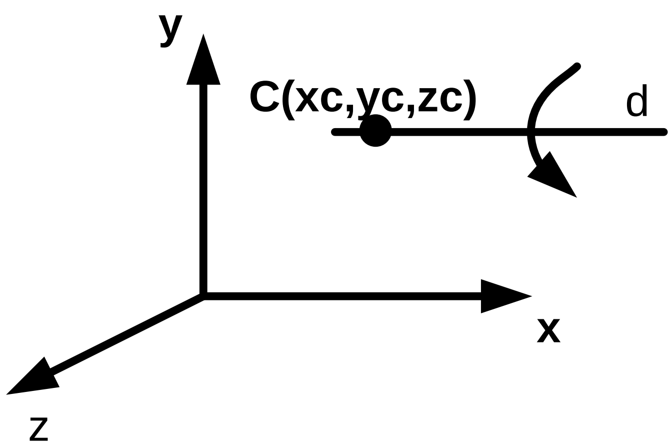
M = T(xd, yd, zd) * R(u) * T(-xd, -yd, -zd)

u : unghiul de rotatie

xd, yd, zd : un punct de pe dreapta in jurul careia se efectueaza rotatia

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x'} \\ \mathbf{y'} \\ \mathbf{z'} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} = M * \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Rotaţia în jurul unei drepte paralele cu axa OX



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = T(xc, yc, zc)\, R_X(u)\, T(-xc, -yc, -zc) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotatia în jurul unei drepte oarecare (1)

Se considera dreapta data printr-un punct (xd, yd, zd) si directia sa, D[a, b, c].

1. Translatie prin care dreapta va trece prin origine: T(-xd, -yd, -zd)
2. Alinierea dreptei cu una dintre axele principale, de ex. cu axa OZ:

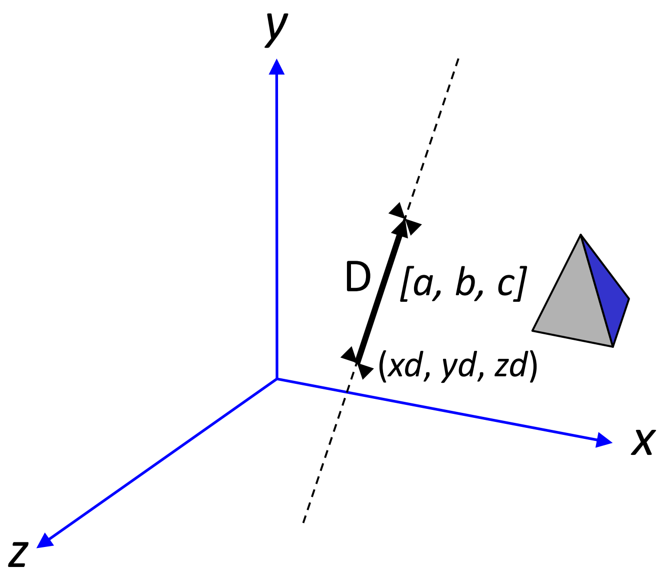
   2.1. Rotatie in jurul axei OX, cu un unghi ux, prin care dreapta ajunge in planul XOZ: Rx(ux)

   2.2. Rotatie in jurul axei OY, cu un unghi uy, prin care dreapta se suprapune pe axa OZ: Ry(uy)
3. Rotatia cu unghiul dat, u, in jurul axei pe care s-a aliniat dreapta: rotatie in jurul axei OZ : Rz(u)
4. Transformarea inversa celei din pasul 2:

   4.1. Rotatie in jurul axei OY, cu unghiul –uy: Ry(-uy)

   4.2. Rotatie in jurul axei OX, cu unghiul –ux: Rx(-ux)
5. Transformarea inversa celei de la pasul 1: T(xd, yd, zd)

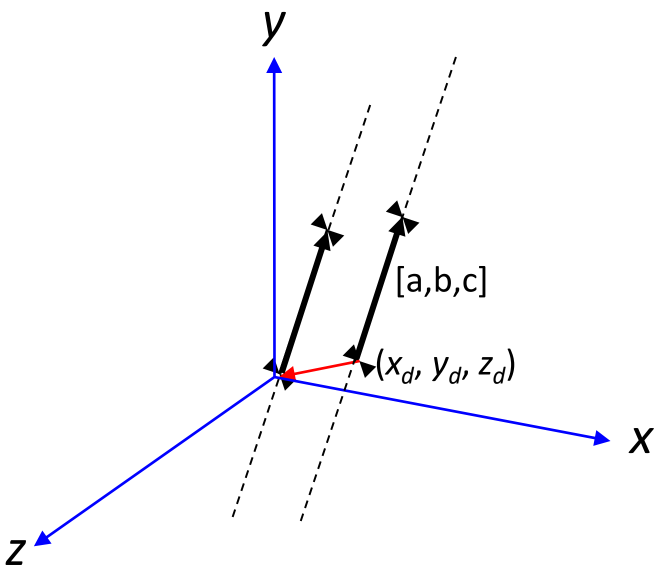
Rotatia in jurul unei drepte oarecare (2)



1. Translatie astfel incat dreapta sa treaca prin origine
2. Aliniere dreapta cu una dintre axe
3. Rotatia cu unghiul dat in jurul axei pe care s-a aliniat
4. Transformarea inversa de la punctul 2
5. Transformarea inversa de la punctul 1

Rotatia in jurul unei drepte oarecare (3)

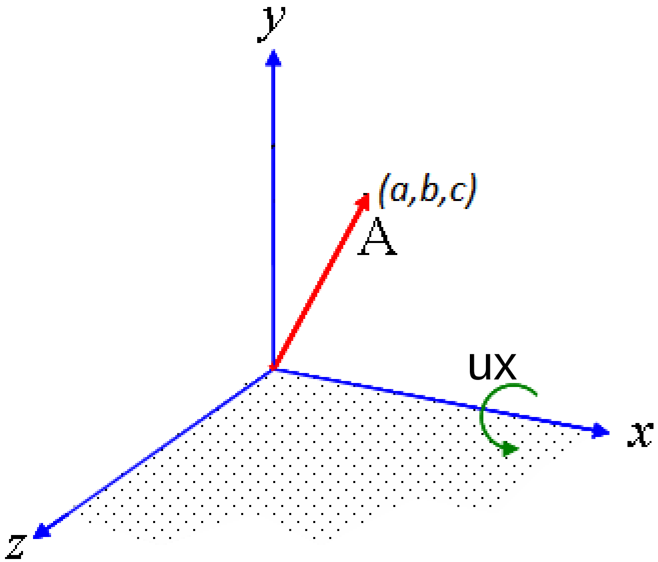
1. Translaţie

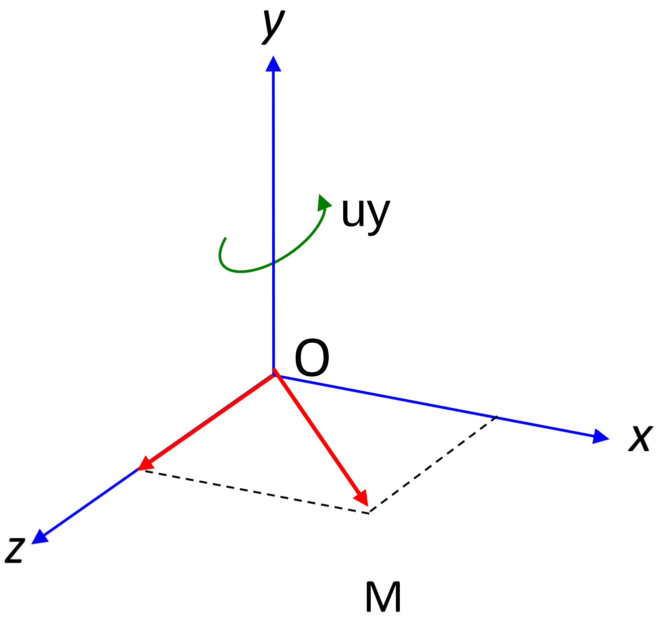


$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -xd \\ 0 & 1 & 0 & -yd \\ 0 & 0 & 1 & -zd \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotatia in jurul unei drepte oarecare (4)

2. Aliniere *D* cu axa OZ



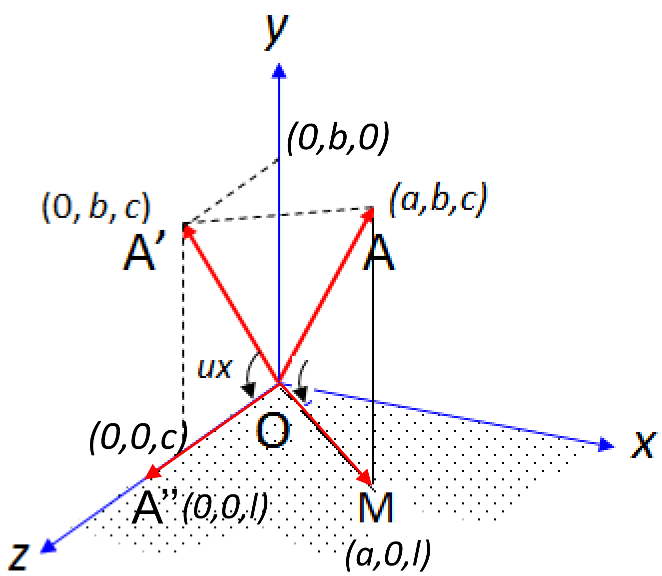


Rotatia vectorului OA in jurul axei OX cu un unghi ux, prin care OA ajunge in planul XOZ, obtinandu-se vectorul OM: Rx(ux)

Rotatia vectorului OM in jurul axei OY, cu un unghi uy, prin care OM se suprapune pe axa OZ: Ry(uy)

Rotatia in jurul unei drepte oarecare (5)

2. 1. Rotatia in jurul axei OX



$R_x(ux)$

A' – proiectia lui A in planul YOZ

Lungime (OA) = L; lungime (OA') = l;

$$\mathrm{L} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\mathrm{l} = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$\sin(ux) = \frac{b}{l}$$

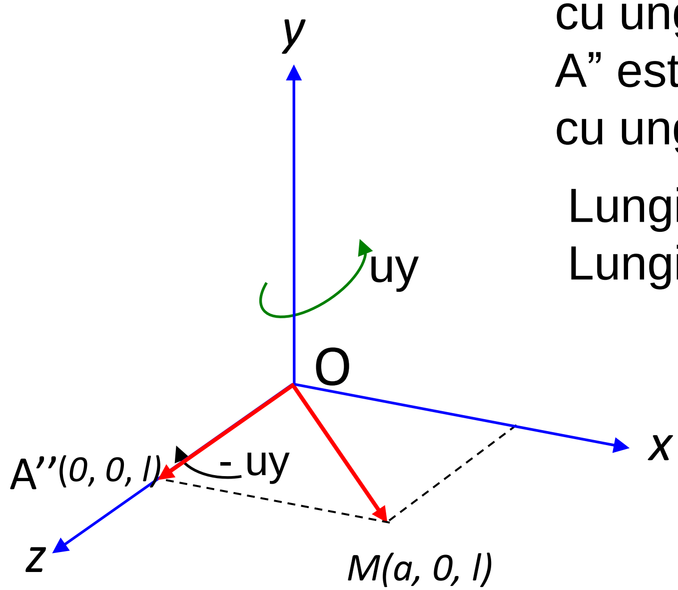
b = l*sin(ux)
c = l*cos(ux)

$$\cos(ux) = \frac{c}{l}$$

Prin rotatia lui OA in jurul axei Ox cu unghiul ux, acesta va ajunge in planul XOZ

Rotatia in jurul unei drepte oarecare (6)

2. 2. Rotatia in jurul axei OY



$\boldsymbol{R_y}$**(uy)**

M este punctul obtinut prin rotatia lui A in jurul axei Ox, cu unghiul ux.
A" este punctul obtinut prin rotatia lui A' in jurul axei Ox, cu unghiul ux

Lungime (OM) = Lungime (OA) = L
Lungime (OA") = Lungime (OA') = l

a = L*sin(-uy)

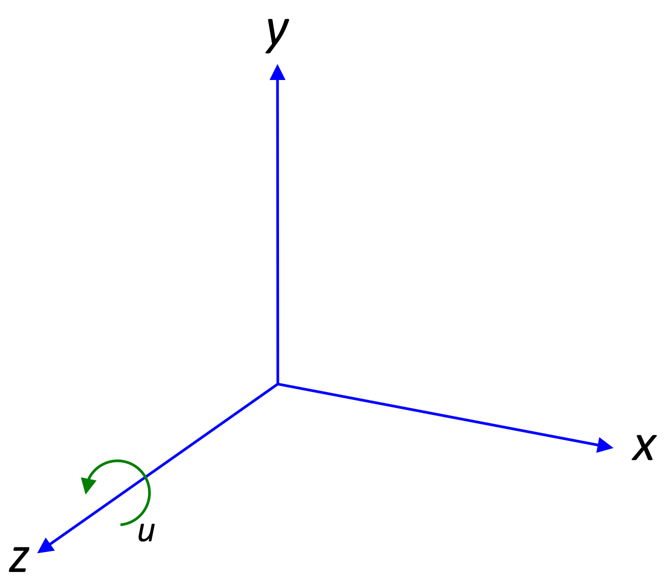
l = L*cos(-uy)

$$\sin(-uy) = a / L -> \sin(uy) = -a / L$$

$$\cos(-uy) = \cos(uy) = l / L$$

Rotatia in jurul unei drepte oarecare (7)

3. Rotatia in jurul axei OZ cu unghiul dat

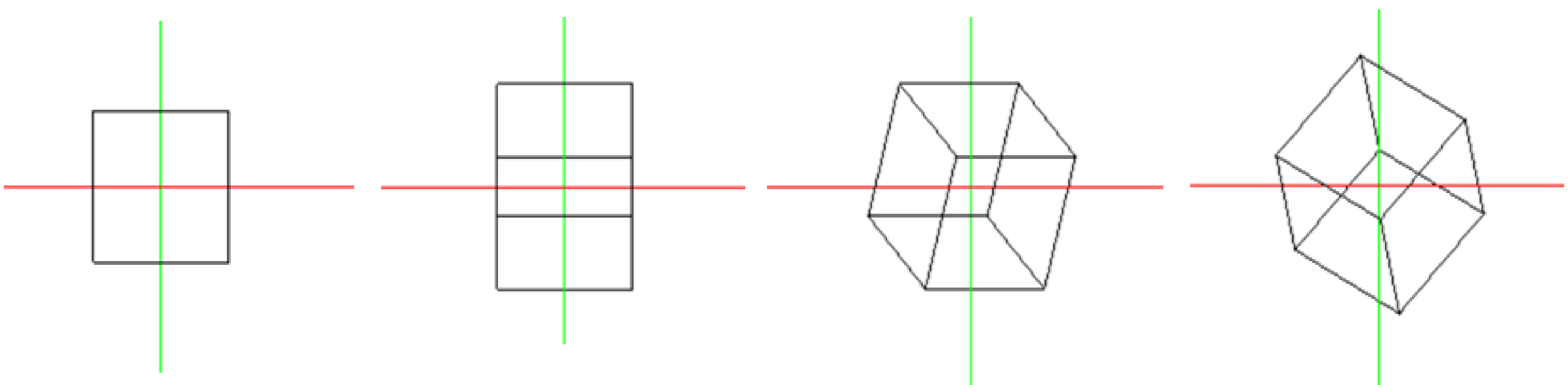


$$R_z(u) = \begin{bmatrix} \cos(u) & -\sin(u) & 0 & 0 \\ \sin(u) & \cos(u) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplu: rotatia unui cub (1)

Cub centrat in originea sistemului de coordonate XYZ

Proiectie ortografica in XOY: (x,y,z) → (x’ = x; y’ = y)

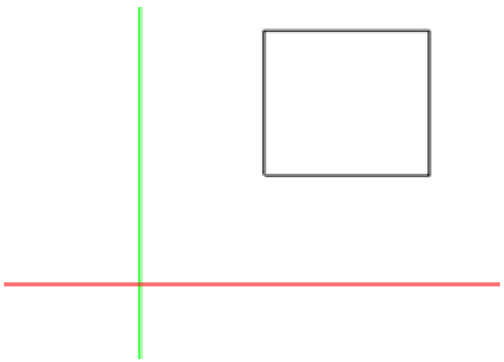


Pozitia initiala rotX(-0.5) rotY(0.5)* rotX(-0.5) rotZ(-0.5)*rotY(0.5)* rotY(-0.5)

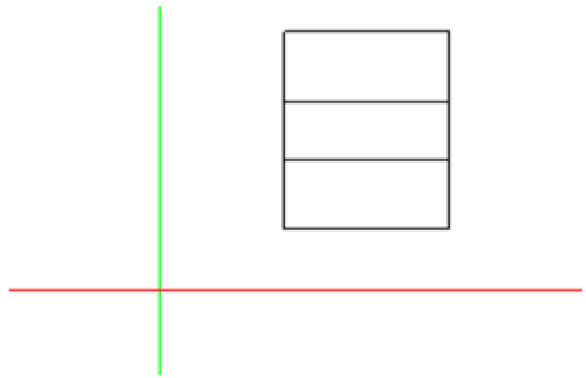
Exemplu: rotatia unui cub (2)

Cub cu centrul in (100, 100, 0)

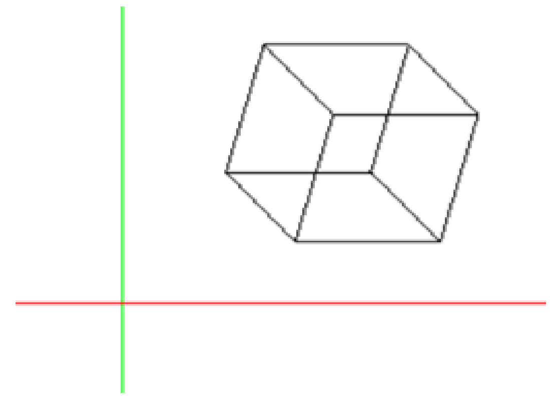
Proiectie ortografica in XOY



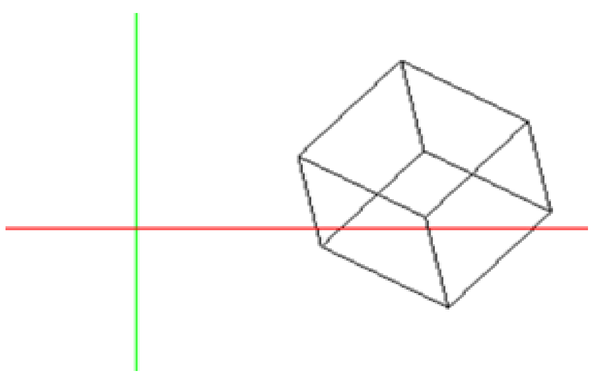
Pozitia initiala



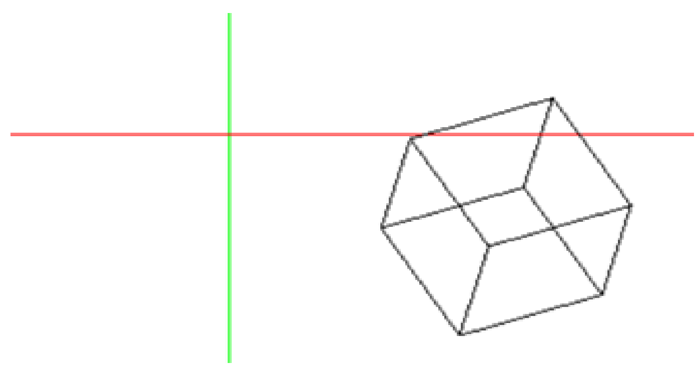
rotX(-0.5)



rotY(0.5)*rotX(-0.5)



rotZ(-0.5)*rotY(0.5)*rotX(-0.5)



rotZ(-0.5)*rotZ(-0.5)*rotY(0.5)*rotX(-0.5)