# Automate finite și expresii regulate

$a^* b^*$

$\{a, b\}^*$

## Teorema

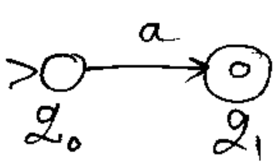
Un limbaj este regulat $\Leftrightarrow$ acceptat de un A.Finit.

dem.

$\Rightarrow$ (l. regulat $\Rightarrow$ L(A.F.))

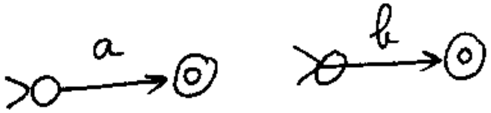
clasa l. regulate este clasa minimă de lbaje care conține $\emptyset$ și mulțimile $\{a\}$, $\forall a \in \Sigma$, închisă în rap. cu opțiile de reuniune, concatenare, Kleene Star.

Evident $\emptyset$, $\{a\}$ sunt acceptate AFN.

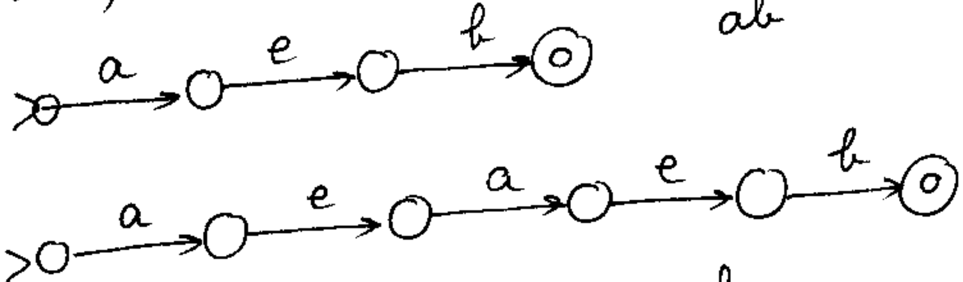



Din Th. de închidere, mulțimea lbajelor acceptate de A.F. este închisă în rap. reuniunea, concatenarea, Kleene Star $\Rightarrow$ orice lbaj regulat acceptat de A.F.

ex: $(ab \cup aab)^*$

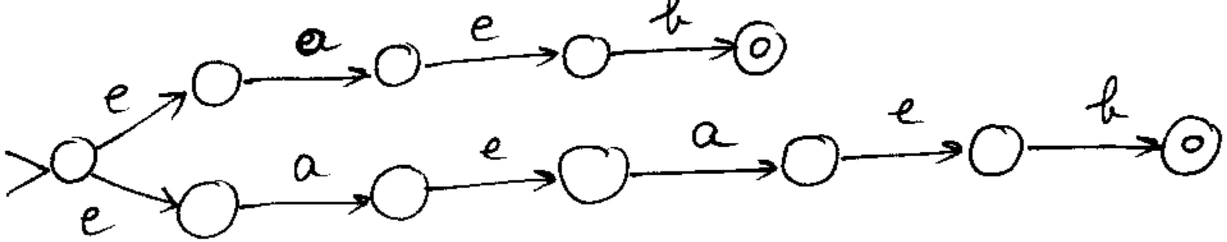
1) 

$ab$ ; $aab$

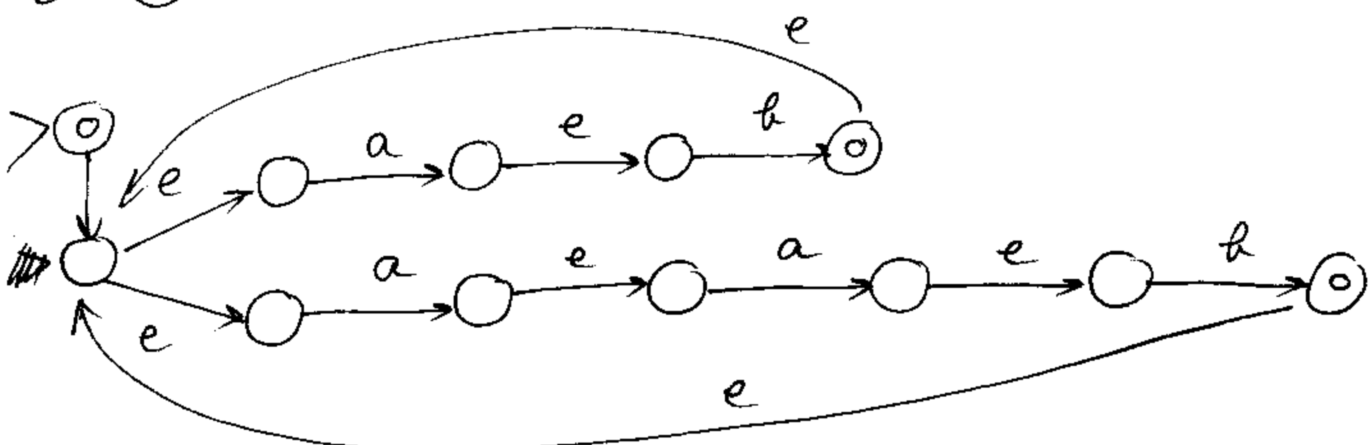
2) 

$ab$

$aab$

3) 

$ab \cup aab$

4) 

$(ab \cup aab)^*$

$\Leftarrow$

Fie $M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$

Trebuie să arăt că $\exists$ un limbaj $R$ regulat a.î. $L(M) = R$.

Idee

Reprezint $L(M)$ ca reuniunea unui nr. finit de limbaje simple.

Fie $K = \{q_1, \dots, q_n\}$

$s = q_1$

Pt. $i, j = 1, \dots, n$ și $k = 1, \dots, n+1$, $R(i,j,k)$ este mulțimea tuturor șirurilor din $\Sigma^*$ care duc $M$ din $q_i$ în $q_j$ fără să treacă prin nicio stare intermediară mai mare sau egală cu $k$ ($i, j$ pot fi $> k$).

$$R(i,j,k) = \{ x \in \Sigma^* \mid (q_i, x) \vdash_M^* (q_j, e) \text{ și dc. }$$

$$(q_i, x) \vdash_M^* (q_l, y),\ y \in \Sigma^*,$$

$$\text{atunci } l < k \text{ sau } y = e \text{ și } l = j$$

$$\text{sau } y = x \text{ și } l = i$$

Pt $K = n+1$

$R(i,j,n+1) = \{ x \in \Sigma^* \mid (q_i, x) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (q_j, e) \}$

$\Rightarrow L(M) = \cup \{ R(1,j,n+1) \mid q_j \in F \}$

<u>Important</u> $\to$ fiecare $R(i,j,k)$ este regulat. și deci și $L(M)$ (def. prin $\cup$).

<u>Dem. prin inducție după $K$</u>

Pt $K=1$.

$$R(i,j,1) = \begin{cases} \{ \sigma \in \Sigma, \ \delta(q_i, \sigma) = q_j \}, & i \neq j \\ \{e\} \cup \{ \sigma \in \Sigma \mid \delta(q_i, \sigma) = q_j \}, & i = j \end{cases}$$

Fiec. astfel de mulțime este finită $\Rightarrow$ regulată.

Pt $K = 1, \dots, n$, având în vedere că mulțimile $R(i,j,K)$ au fost def. fiecare $R(i,j,K+1)$ poate fi def. în termenii chajelor def. anterior:

$R(i,j,k+1) = R(i,j,k) \cup R(i,k,k)R(k,k,k)^{*}R(k,j,k)$

Pt a trece din $q_i$ în $q_j$ fără a trece prin stări intermediare $> k$,

${}^{\text{n}}$ trebuie fie:

1° să treacă din $q_i \to q_j$ fără a trece prin st. intermed $> k-1$ <u>sau</u>

2° să treacă din (a) $q_i \to q_k$,

(b) $q_k \to q_k$ repetat

(c) $q_k \to q_j$

fără a trece prin stări intermed. $> k-1$.

Fiec $R(i,j,k)$ este regulat $\Rightarrow$ $R(i,j,k+1)$ regulat.

# Demonstrații ale regularității limbajelor

Ex: $\Sigma = \{0, .., 9\}$

$L \subseteq \Sigma^*$ mulțimea reprezentărilor întregilor pozitivi divizibili cu 2 sau 3.

$0, 3, 6, 12 \in L$

$1, 03, 00 \notin L$

? L regulat.

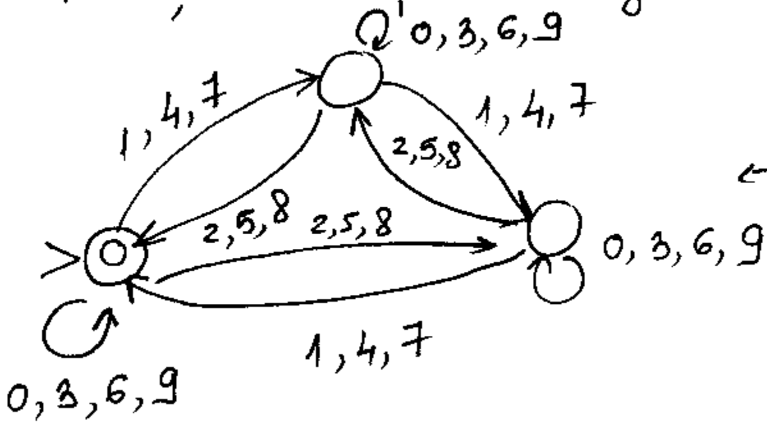
$L_1 \rightarrow$ mulțimea întregilor pozitivi

$L_1 = 0 \cup \{1, .., 9\}\Sigma^* \Rightarrow$ regulat fiind descris printr-o E.R.

$L_2 \rightarrow$ mulțimea repez. întregilor pozitivi divizibili cu 2.

$L_2 = L_1 \cap \Sigma^*\{0, 2, 4, 6, 8\}$

$L_3$ - mulțimea repr. întregilor pozitivi divizibili cu 3.




$\leftarrow M$

$L_3 = L_1 \cap L(M)$

$L = L_2 \cup L_3$

ex:

$\Sigma = \{a, b\}$

$L \subseteq \Sigma^*$, $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|$ impară, w conține un nr par de 'a'$\}$.

? L regulat

$L_1 \to$ mulțimea șirurilor de lg. impară $z(zz)^*$

$L_2 \to$ mulțimea șirurilor cu un nr. par de 'a' : $b^*(a b^* a b^*)^*$

$L = L_1 \cap L_2$

## Proprietăți ale limbajelor regulate

1° Pe măsură ce un șir parcurs stg $\to$ dr, cantitatea de mem. necesară pt a determina la sf. dc șirul este în lbaj $\to$ finită, fixată apriori, depend. de lbaj și nu de șirul particular.

$\{a^n b^n \mid n \geq 0\} \Rightarrow \nexists$ A.F.

2° L. regulate cu nr. infinit de șiruri au submulțimi infinite cu o anumită structură repetitivă care se dat. '*' din E.R., respectiv ciclu din diagrama de stări a A.F.

$\{a^p \mid p$ nr prim$\} \Rightarrow$ nu este regulat

## Teorema (Lema de pompare)

Fie L un limbaj regulat infinit. Atunci există ~~șirurile x, y, z~~ ~~a.î. y ≠ e și~~ $n \geq 1$ a.î. $\forall w \in L$, $|w| \geq n$ poate fi scris $w = xyz$ a.î. $y \neq e$, $|xy| < n$ și $xy^i z \in L$, $\forall i \geq 0$.

dem.

L regulat $\Rightarrow \exists$ AFD M care-l acceptă, $L = L(M)$

Pp. M are n stări, și fie w, $|w| \geq n$ ($L \to$ infinit, $\exists\, w$, $|w| \geq n$)

Fie $\ell = |w|$

$w = \sigma_1 \dots \sigma_\ell$, $\sigma_i \in \Sigma$, $\ell \geq n$

Fie calculele lui M pt w:

$$(q_0, \sigma_1 \dots \sigma_\ell) \vdash_M (q_1, \sigma_2 \dots \sigma_\ell) \vdash_M \dots \vdash_M (q_{\ell-1}, \sigma_\ell) \vdash_M (q_\ell, e)$$

$q_0 \to$ st. inițială

$q_\ell \to$ st. finală

$l \geq n$

M are n stări $\xrightarrow{\text{principiul cutiei}}$ $\exists\, i,j$ a.î. $0 \leq i < j \leq l$, $q_i = q_j$

Șirul $\sigma_i \dots \sigma_j$ duce M din $q_i$ înapoi în $q_i$ => nu este vid pt. că $i+1 \leq j$.

Dar atunci acest șir poate fi scos din w sau orice nr. de repetări ale șirului pot fi introd. în w după al j-lea simbol. => M accept. șirul.

M acceptă $\underbrace{\sigma_1 \dots \sigma_i}_{x} (\underbrace{\sigma_{i+1} \dots \sigma_j}_{y})^p \underbrace{\sigma_{j+1} \dots \sigma_l}_{z}$, $p \geq 0$.

$$(q_0, xy^pz) \vdash_M^* (q_i, y^pz) \vdash_M^* (q_i, y^{p-1}z) \vdash_M^* \dots \vdash_M^* (q_i, z) \vdash_M^* (q_l, e)$$

De notat $|xy| \leq n$

Ex:

$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ nu este regulat

pp. $L \rightarrow$ regulat, infinit $\xRightarrow{L.P.}$

$w = a^n b^n \in L$

$w = xyz$, $|xy| \leq n$, $y \neq e$

$y = a^i$, $i > 0$

$xz = a^{n-i} b^n \notin L$

$\Rightarrow$ contradicție

ex:

$L = \{a^p \mid p \text{ prim}\}$

pp. $L \rightarrow$ regulat, infinit $\xRightarrow{L.P.}$

$x = a^q$, $y = a^r$, $z = a^s$, $q, s \geq 0$, $r > 0$

$a^{q+i\cdot r+s} \in L \Rightarrow q + i\cdot r + s \Rightarrow$ nr prim $\forall\, i \geq 0 \Rightarrow$ imposibil