Extensii ale M. Turing

1° Permitem ca banda de intrare să fie nelimitată stg/dr.

2° Permitem m. multe benzi

3° Permitem m. multe capete pe bandă

4° Banda poate fi bidimensională

Banda nelimitată stg/dr.

$M = (K, \Sigma, \delta, s)$

O config. (q, w, a, u), $q \in K$, $w, u \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$

unde w nu începe cu #

u nu se termină #

$(q, w, a, u) \overset{Not}{=} (q, w\underline{a}u)$

$\vdash_M$ este similară celei pt M.T. Standard

O dif. este că dc $\delta(q, a) = (p, L) \Rightarrow (q, \underline{a}u) \vdash_M (p, \underline{\#}au)$

$\delta(q, a) = (p, R)$, $(q, \#\underline{a}u) \vdash_M (p, \underline{a}u)$

Lema

Fie $M_1 = (K_1, \Sigma_1, \delta_1, s_1)$ o M.T. cu bandă nelimitată stg/dr. Atunci există o M.T. standard $M_2 = (K_2, \Sigma_2, \delta_2, s_2)$ a.î. $\forall\, w \in (\Sigma_1 - \{\#\})^*$ există rel:

a) Dacă M_1 se oprește pt w,

$$(s_1, w\underline{\#}) \vdash^*_{M_1} (h, u\underline{a}v) \quad , u, v \in \Sigma_1^*, \ a \in \Sigma_1$$

atunci M_2 se oprește pt w,

$$(s_2, \#w\underline{\#}) \vdash^*_{M_2} (h, \#u\underline{a}v)$$

b) Dacă M_1 nu se oprește, nici M_2 nu se oprește pt w.

Def.

Spunem că o M.T. $M = (K, \Sigma, \delta, s)$ cu banda nelim. stg/dr. calculează o fcție $f : \Sigma_0^* \to \Sigma_1^*$, $\Sigma_0, \Sigma_1 \not\ni \#$, dc. și numai dc. $\forall\, w \in \Sigma_0^*$

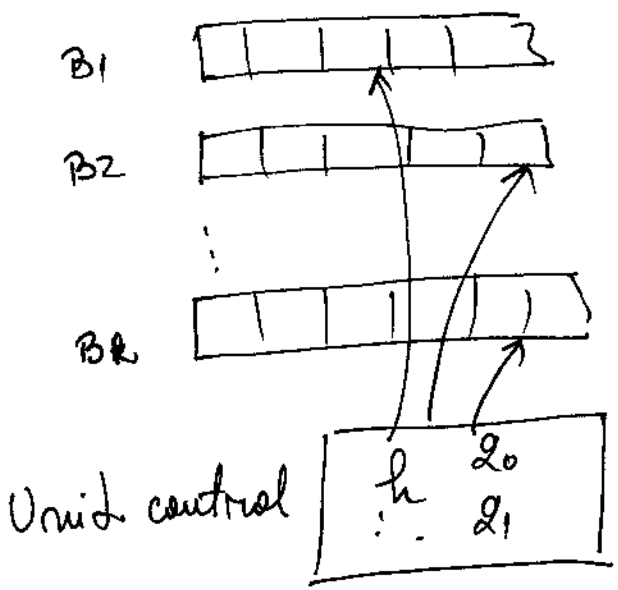
$f(w) = u \Rightarrow (s, \#w\underline{\#}) \vdash^*_M (h, u\underline{\#})$

Teorema

Orice funcție calculabilă, limbaj care este acceptat sau decis de o M.T. cu bandă nelimitată stg/dr este calc. respectiv limbajul este acceptat sau decis de o M.T. standard.

Mai multe benzi

Pt. ∀ $k>0$ fixat, o M.T. cu k benzi constă dintr-o unit. de control și k benzi (limitate stg.). Fiecare bandă este conectată la unit. de control printr-un cap de citire/scriere.



Convenții:

1) Șirul de intrare este plasat pe 1ma bandă, aliniat la stg, cu capul pe
pe # care delim. dreapta șirul.

2) Celelalte benzi sunt inițial vide

3) La sf. opților → rezultatul 1ma bandă

? M.T. cu K benzi

$\#w\underline{\#} \rightarrow \#w\#w\underline{\#}$, w nu conține #.

La început: 1ma Bandă : $\#w\underline{\#}$
2a Bandă : $\underline{\#}$

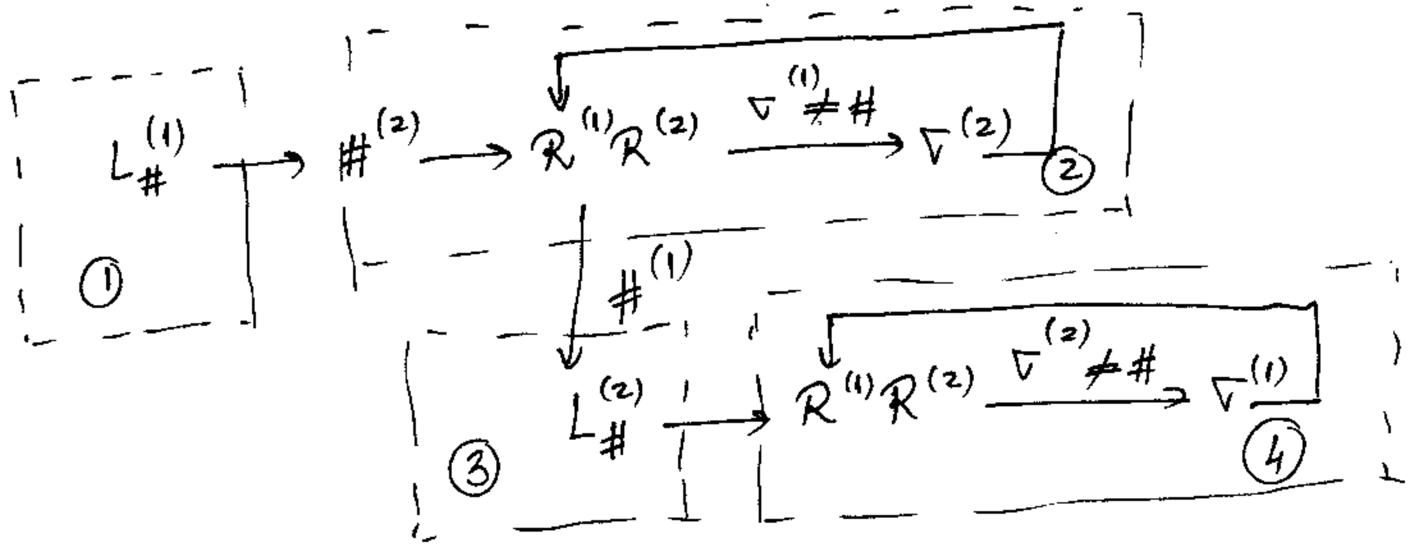
După (1) 1ma Bandă : $\underline{\#}w\#$
2a Bandă : $\underline{\#}$

După (2) 1ma Bandă : $\#w\underline{\#}$
2a Bandă : $\#w\underline{\#}$

După (3) 1ma Bandă : $\#w\underline{\#}$
2a Bandă : $\underline{\#}w\#$

După (4):   1ma bandă : $\#w\#w\underline{\#}$

2a bandă : $\#w\underline{\#}$



Def.

Configurația unei M.T. cu $k>0$ benzi este $(q, w_1\underline{a_1}u_1, w_2\underline{a_2}u_2, \ldots, w_k\underline{a_k}u_k)$.

Lema

Fie $k>0$ și M_1 o M.T. cu k-benzi, cu alf. Σ_1 și st. init. s_1. Atunci există o M.T.S. $M_2 = (K_2, \Sigma_2, \delta_2, s_2)$ a.î. $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$ și $\forall w \in (\Sigma_1 - \{\#\})^*$,

a) Dacă M_1 se oprește pt w,

$$(s_1, \#w\underline{\#}, \underline{\#}, \dots, \underline{\#}) \vdash^*_{M_1} (h, w_1\underline{a_1}u_1, \dots, w_k\underline{a_k}u_k)$$

pt. anumiți $w_1, \dots, w_k, u_1, \dots, u_k, a_1, \dots, a_k$, atunci M_2 se oprește pt w

$$(s_2, \#w\underline{\#}) \vdash^*_{M_2} (h, w_1\underline{a_1}u_1)$$

b) Dc. M_1 se agață pt w, atunci M_2 se agață pt w.

c) Dc. M_1 nu se oprește pt w, nici M_2 nu se oprește.

Teorema

Orice funcție care este calculată, orice limbaj acceptat / decis de o M.T. cu K benzi, este calculată respectiv limbaj acceptat / decis de o M. T. stand.

Mai multe capete pe bandă

Într-un pas, pot citi /scrie, muta indep. pe bandă.

Convenție → dc 2 capete încearcă să scrie lucruri diferite pe ac. pătrat.

Teorema

M. T. cu mai multe capete este echivalentă cu M. T. standard.

Bandă cu 2 dimensiuni

Se extind efecti M.T. → suprascrie simb. din poz. crtă

→ deplasează L, R, U, D

Teoremă

M.T. cu bandă cu 2 dimensiuni poate fi simulată de o M.T. standard.

M.T. Nedeterministă

Def.
O M.T. Nedeterministă este un tuplu $M = (K, \Sigma, \Delta, s)$, $K, \Sigma, s \to$ ac. semnif. ca în cazul M.T. Standard, $\Delta \subseteq (K \times \Sigma) \times ((K \cup \{h\}) \times (\Sigma \cup \{L, R\}))$.

Def.
Config, $\vdash_M$, $\vdash_M^*$ $\to$ def. similar cu M.T.S.

Obs:
$\vdash_M$ => o relație

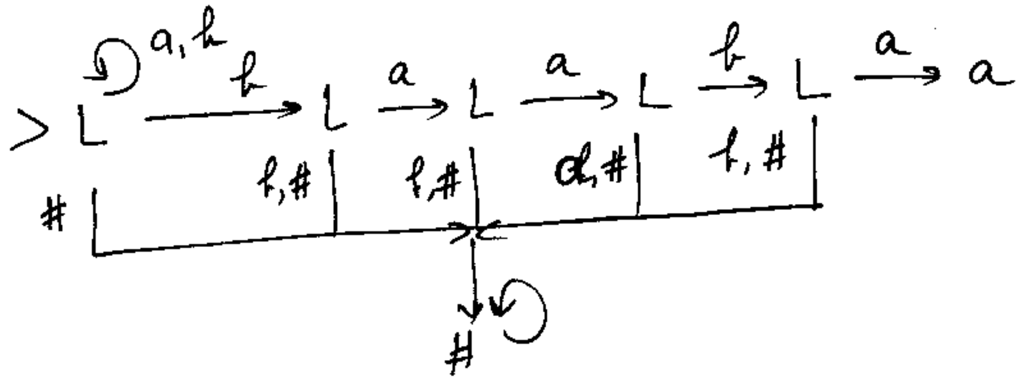
Cum o MTN poate avea 2 rezultate dif. pt ac. intrare => ? rezultat.

Soluție 1. => MTN. ca acceptor (doar dc se oprește, nu ce rămâne pe bandă)

Soluție 2 => la calculul unei fcții → acelaşi rezult pe toate căile ex:

$L = \{ w \in \{a, b\}^* \mid$ w conține cel puțin o apariție a subșirului $abaab \}$.

Intrarea M.T. $\Rightarrow$ $\#w\#$, scanează dr-stg. și alege nedet. un poz. în care verifică baaba



ex:

Un număr compus $\rightarrow$ produsul a 2 nr. naturale, fiecare mai mari > 1.

4, 6, 8, 9, 10 $\rightarrow$ nr. comp.

1, 3, 5, 7, 11 $\rightarrow$ nu sunt.

$L = \{ I^n \mid n$ nr compus $\}$

1° Alege nedet. 2 nr. $p, q > 1$, transformă $\# I^n \underline{\#} \longrightarrow \# I^n \# I^p \# I^q \underline{\#}$

2° Ut. M.T. multiplicative $\rightarrow \# I^n \# I^p \# I^q \underline{\#} \longrightarrow \# I^n \# I^{p \cdot q} \underline{\#}$

3° Verifică $I^n = I^{p \cdot q}$

Mașina

$G \rightarrow$ M.T. care generează un șir I

$P \rightarrow$ M.T. multiplicare

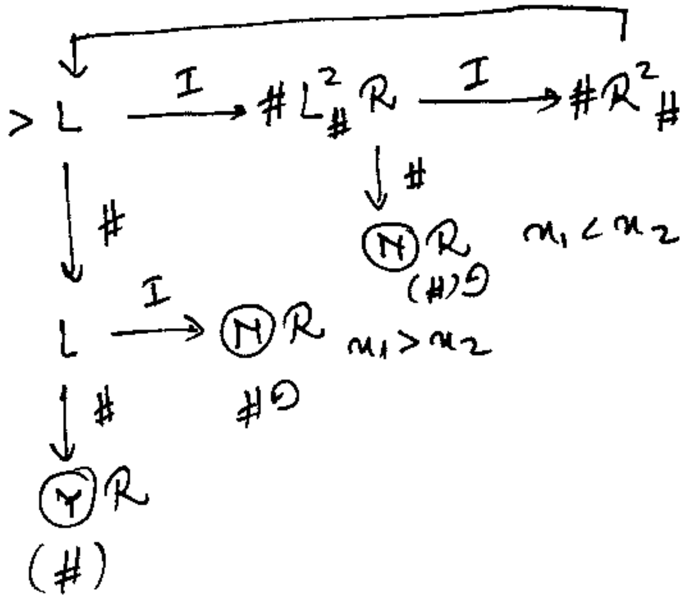
$E \rightarrow$ M.T. care test egalit.

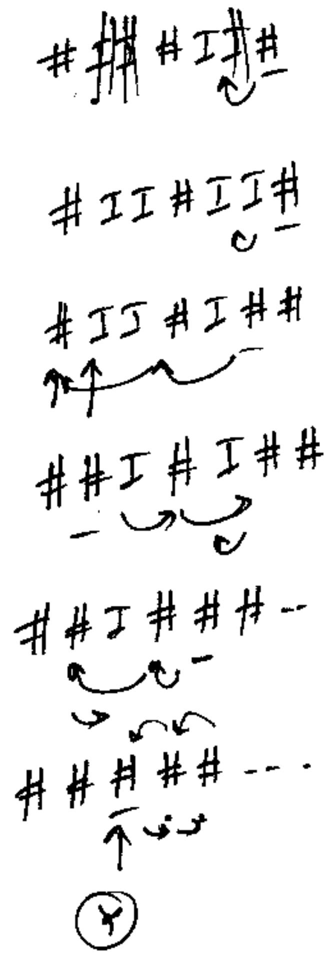
$M = GGPE$

G: generează I^p, $p \geq 2$

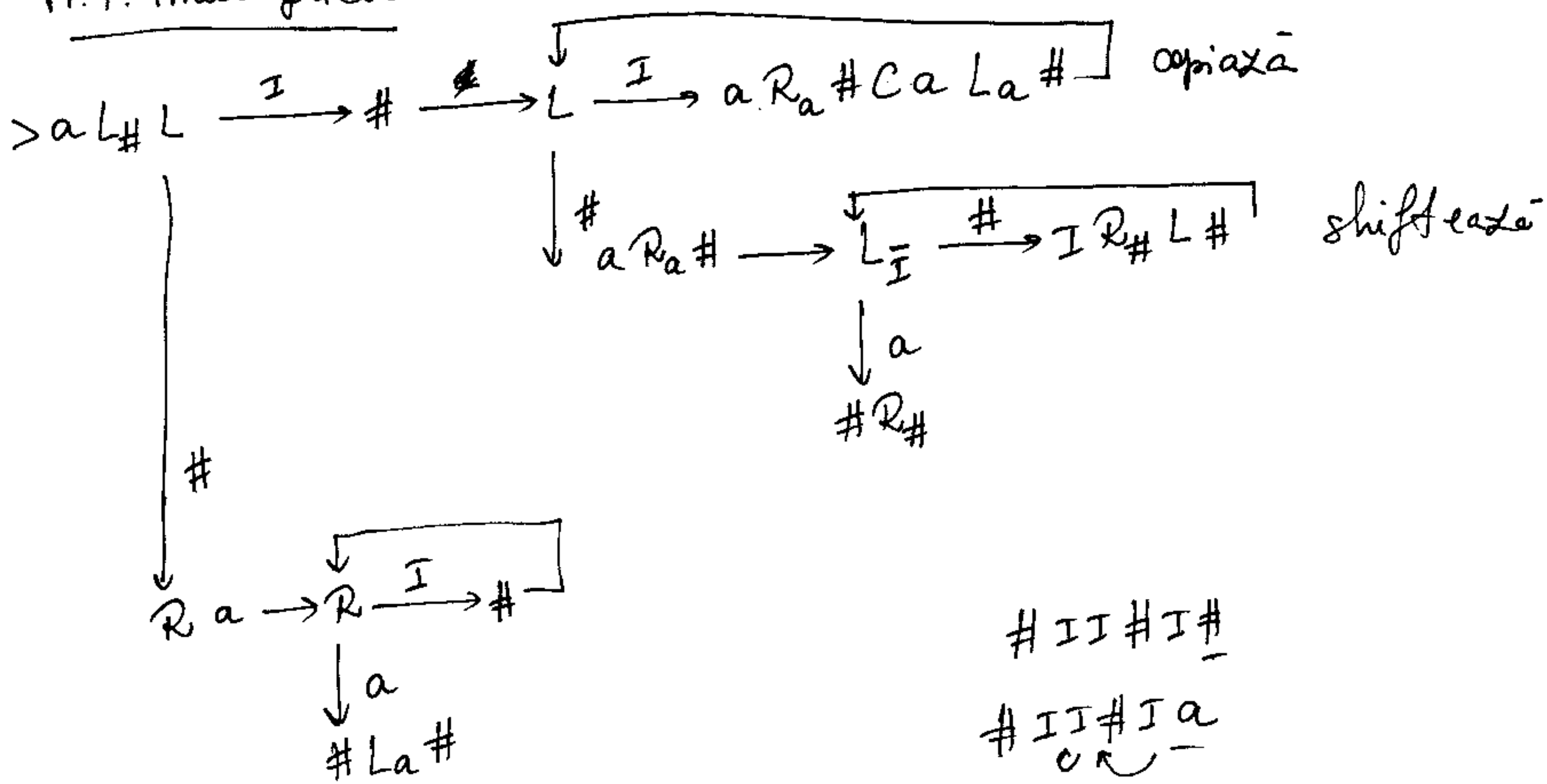
$$\begin{tikzcd} > RIR \arrow[r] & IR \arrow[loop above, "\#"] \arrow[r, "\#"'] & \# \end{tikzcd}$$

Masina E.





M.T. multiplicare



##II#
a
a###

#II#I#
#II#Ia
#I##Ia
#a##I#
#a##I#Ia
####I#Ia

Teorema

Pt orice M.T.M. M_1 putem construi o M.T. standard echivalentă.