

Test 2 - Analiza Algoritmilor

Timp de lucru: 90 minute

Punctaj total: 18 pct

1. Fie un vector pe care se pot efectua următoarele operații:
 - **add** – va adăuga un element pe ultima poziție (puteți ignora redimensionarea acestuia, știm deja că are un cost amortizat constant)
 - **sumLast** – șterge ultimele $n/2$ elemente din vector și adaugă un nou element la final reprezentat de suma lor
 - **sumFirst** – șterge primele $n/2$ elemente din vector și adaugă un nou element la început, reprezentat de suma lor (în urma operației elementele vectorului ar trebui să înceapă tot de la poziția 0)
 - a. (2 pct) Implementați metodele sumLast și sumFirst astfel încât să respecte condițiile de mai sus.
 - b. (3 pct) Calculați costul amortizat al celor 3 metode folosind oricare dintre metodele studiate.
2. (5 pct) Fie următorul algoritm care verifică dacă un număr este palindrom. Demonstrați corectitudinea acestuia folosind un invariant la ciclare.

```
Palindrom(x) {  
    reverse = 0  
    copy = x  
  
    while (copy != 0) {  
        reverse = reverse * 10 + copy % 10  
        copy = copy / 10  
    }  
  
    return x == reverse  
}
```

3. (8 pct) Fie tipul de date **Int LIST** definit prin constructorii de bază:

$[] : \rightarrow \text{Int LIST}$
 $x:L : \text{Int} * \text{Int LIST} \rightarrow \text{Int LIST}$

Se consideră operatorii:

head : $\text{Int LIST} \setminus \{[]\} \rightarrow \text{Int}$ // primul element
++ : $\text{Int LIST} * \text{Int LIST} \rightarrow \text{Int LIST}$ //append
maxelem : $\text{Int LIST} \rightarrow \text{Int}$ // maximum element
minelem : $\text{Int LIST} \rightarrow \text{Int}$ // minimum element
sorted : $\text{Int LIST} \rightarrow \text{Bool}$ // verifică dacă argumentul este o listă sortată crescător

Și următoarele axiome:

(H2) $\text{head}(x:L) = x$
(A1) $[] ++ B = B$
(A2) $(x:A) ++ B = x:(A++B)$
(M1) $\text{maxelem}([]) = -\infty$
(M2) $\text{maxelem}(x:L) = \max(x, \text{maxelem}(L))$
(m1) $\text{minelem}([]) = \infty$
(m2) $\text{minelem}(x:L) = \min(x, \text{minelem}(L))$
(S1) $\text{sorted}([]) = \text{True}$
(S2) $\text{sorted}(x:L) = L == [] \mid \mid \text{sorted}(L) \ \&\& \ x \leq \text{head}(L)$

Demonstrați următoarea proprietate prin inducție structurală:

(P) $\text{sorted}(A) \ \&\& \ \text{sorted}(B) \ \&\& \ \text{maxelem}(A) \leq \text{minelem}(B) \rightarrow \text{sorted}(A ++ B)$

!!! Operatorii matematici au funcționalitatea obișnuită !!!

!!! $\min(x, y) \rightarrow$ minimul dintre x și y

!!! $\max(x, y) \rightarrow$ maximul dintre x și y