$$member\left(a, preorder(insert(a,t))\right) = true$$

Cazul de baza: $t \ = \ leaf$

$$member\left(a, preorder(insert(a, leaf))\right) = member\left(a, preorder(node(leaf, a, leaf))\right)$$
$$= member\left(a, cons\left(a, append(preorder(leaf), preorder(leaf))\right)\right)$$
$$= (a == a) || \dots = true$$

Ipoteza de inductie: presupunem $P(t_1), P(t_2)$ adevarate.

Pasul de inductie: $t = node(t_1, x, t_2)$. Trebuie sa aratam:

$$member\left(a, preorder\left(insert(a, node(t_1, x, t_2))\right)\right) = true$$

Avem doua cazuri, care corespund cazurilor din a doua axioma de la insert.

Cazul 1: $a \ < \ x$. Suntem in primul caz al axiomei 2 de la insert.

$$member\left(a, preorder(node(insert(a, t_1), x, t_2))\right) =$$

$$member\left(a, cons\left(x, append\left(preorder(insert(a, t_1)), preorder(t_2)\right)\right)\right) =$$

$$(a == x) \ || \ member\left(a, append\left(preorder(insert(a, t_1)), preorder(t_2)\right)\right)$$

Presupunem adevarata urmatoarea proprietate (o sa o demonstrez la final prin inductie):

$$member(a, l_1) \Rightarrow member(a, append(l_1, l_2))$$

Aplic aceasta proprietate pentru $l_1 = preorder(insert(a, t_1))$ si $l_2 = preorder(t_2)$. Din ipoteza de inductie, avem ca $member(l_1) = true \ \Rightarrow member(a, append(l_1, l_2)) = true$. Dar $member(a, append(l_1, l_2))$ este chiar al doilea termen din expresia SAU de mai sus, deci toata expresia este adevarata.

Cazul 2: $a \geq x$. Folosim axioma 2 de la insert, de data aceasta suntem pe ramura de else.

$$member\left(a, preorder\left(node(t_1, x, insert(a, t_2))\right)\right) =$$

$$member\left(a, cons\left(x, append\left(preorder(t_1), preorder(insert(a, t_2))\right)\right)\right) =$$

$$(a == x) \ || \ member\left(a, append\left(preorder(t_1), preorder(insert(a, t_2))\right)\right)$$

Presupun adevarata urmatoarea proprietate:

$$member(a, l_2) \Rightarrow member(a, append(l_1, l_2))$$

Aplic aceasta proprietate pentru $l_1 = preorder(t_1)$ si $l_2 = preorder\big(insert(a, t_2)\big)$. Cum $member(a, l_2) = true$ din ipoteza de inductie, inseamna ca si al doilea termen al expresiei SAU de mai sus, adica $member\big(a, append(l_1, l_2)\big)$ este true, deci toata expresia se evalueaza la true.

Mai avem de demonstrat cele doua proprietati pe care le-am presupus. Ambele se rezolva usor, cu inductie dupa l_1. O scriu doar pe prima, cealalta se rezolva similar.

$$member(a, l_1) \Rightarrow member\big(a, append(l_1, l_2)\big)$$

Caz de baza: $l_1 = []$. $member(a, l_1) = false$, falsul implica orice, deci implicatia este adevarata.

Pasul de inductie: $l_1 = cons(e, l_1)$

$$(a == e) \,||\, member(a, l_1) \Rightarrow member\Big(a, cons\big(e, append(l_1, l_2)\big)\Big)$$

$$(a == e) \,||\, member(a, l_1) \Rightarrow (a == e) \,||\, member\big(a, append(l_1, l_2)\big),$$

ceea ce rezulta imediat din ipoteza de inductie.