Automate finite și expresii regulate

$a^* b^*$

$\{a, b\}^*$

Teorema

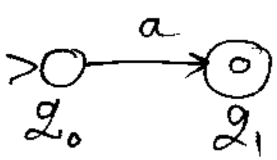
Un limbaj este regulat $\iff$ acceptat de un A.Finit.

dem.

$\Rightarrow$ (l. regulat $\Rightarrow$ L(A.F.))

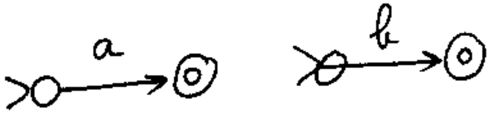
clasa l. regulate este clasa minimă de lbaje care conține $\emptyset$ și mulțimile $\{a\}, \forall a \in \Sigma$, închisă în rap. cu op. de reuniune, concatenare, Kleene Star.

Evident $\emptyset$, $\{a\}$ sunt acceptate AFN.

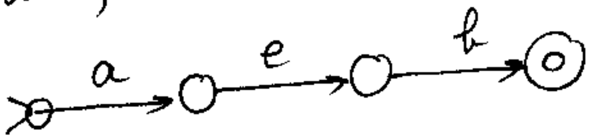


Din Th. de închidere, mulțimea lbajelor acceptate de A.F. este închisă în rap. reuniunea, concatenarea, Kleene star $\Rightarrow$ orice lbaj regulat acceptat de A.F.

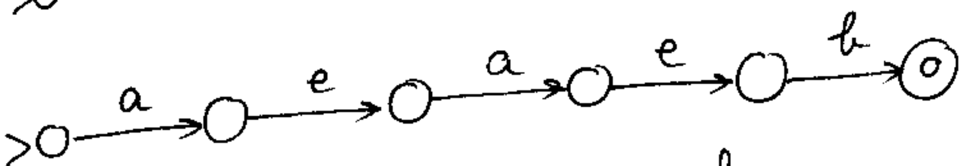
ex: $(ab \cup aab)^*$

1) 

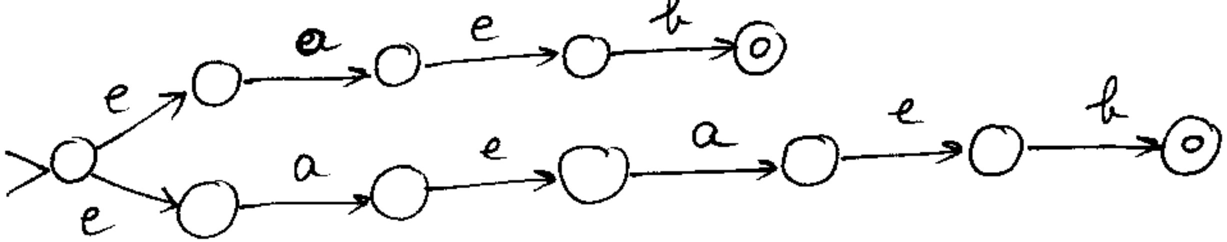
ab ; aab

2) 

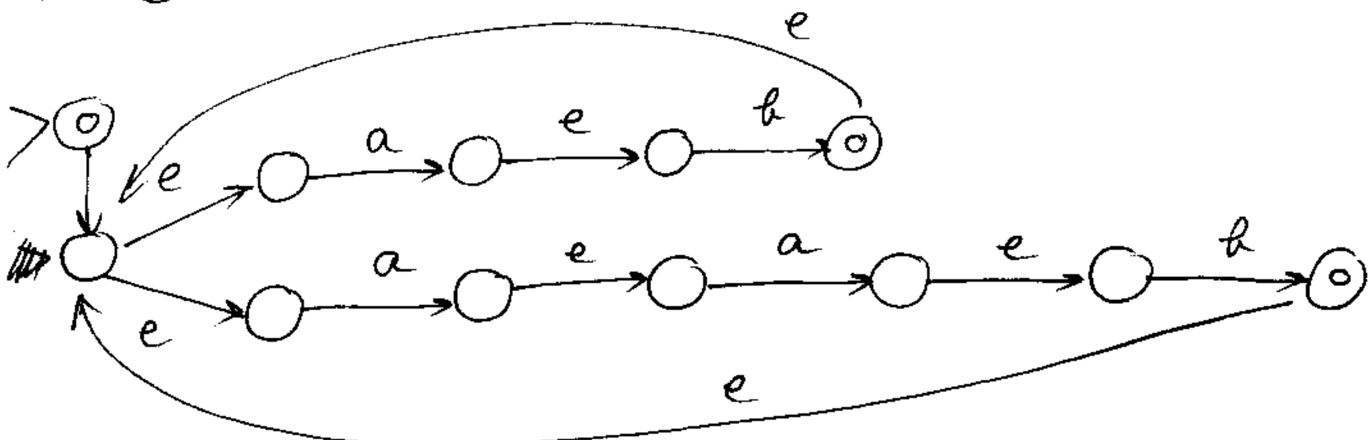
ab



aab

3) 

$ab \cup aab$

4) 

$(ab \cup aab)^*$

$\Leftarrow$

Fie $M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$

Trebuie să arăt că $\exists$ un limbaj R regulat a.î. $L(M) = R$.

<u>Idee</u>

Reprezint $L(M)$ ca reuniunea unui <u>nr. finit</u> de limbaje simple.

Fie $K = \{q_1, \dots, q_n\}$

$s = q_1$

Pt $i, j = 1, \dots, n$ și $k = 1, \dots, n+1$, $R(i,j,k)$ este mulțimea tuturor șirurilor din Σ^* care duc M din q_i în q_j fără să treacă prin nicio stare intermediară mai mare sau egală cu k (i, j pot fi $> k$).

$R(i,j,k) = \{x \in \Sigma^* \mid (q_i, x) \vdash_M^* (q_j, e)$ și dc.

$(q_i, x) \vdash_M^* (q_\ell, y),\ y \in \Sigma^*,$

atunci $\ell < k$ sau $y = e$ și $\ell = j$

sau $y = x$ și $\ell = i$

Pt $K = n+1$

$R(i,j,n+1) = \{ x \in \Sigma^* \mid (q_i, x) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (q_j, e) \}$

$\Rightarrow$ $L(M) = \cup \{ R(1,j,n+1) \mid q_j \in F \}$

Important $\rightarrow$ fiecare $R(i,j,K)$ este regulat. și deci și $L(M)$ (def. prin $\cup$).

Dem. prin inducție după K

Pt $K = 1$.

$$R(i,j,1) = \begin{cases} \{ \sigma \in \Sigma, \ \delta(q_i, \sigma) = q_j & , i \neq j \\ \{e\} \cup \{ \sigma \in \Sigma \mid \delta(q_i, \sigma) = q_j \}, & i = j \end{cases}$$

Fiec. astfel de mulțime este finită $\Rightarrow$ regulată.

Pt $K = 1, \dots, n$, având în vedere că mulțimile $R(i,j,K)$ au fost def. fiecare $R(i,j,K+1)$ poate fi def. în termenii Chajelor def. anterior:

$$R(i,j,k+1) = R(i,j,k) \cup R(i,k,k)R(k,k,k)^{*}R(k,j,k)$$

Pt a trece din q_i în q_j fără a trece prin stări intermediare $> k$,

m trebuie fie:

1° să treacă din $q_i \to q_j$ fără a trece prin st. intermed $> k-1$ <u>sau</u>

2° să treacă din (a) $q_i \to q_k$,

(b) $q_k \to q_k$ repetat

(c) $q_k \to q_j$

fără a trece prin stări intermed. $> k-1$.

Fiec $R(i,j,k)$ este regulat $\Rightarrow$ $R(i,j,k+1)$ regulat.

Demonstrații ale regularității limbajelor

Ex: $\Sigma = \{0, .., 9\}$

$L \subseteq \Sigma^*$ mulțimea reprezentărilor întregilor pozitivi divizibili cu 2 sau 3.

$0, 3, 6, 12 \in L$

$1, 03, 00 \notin L$

? L regulat.

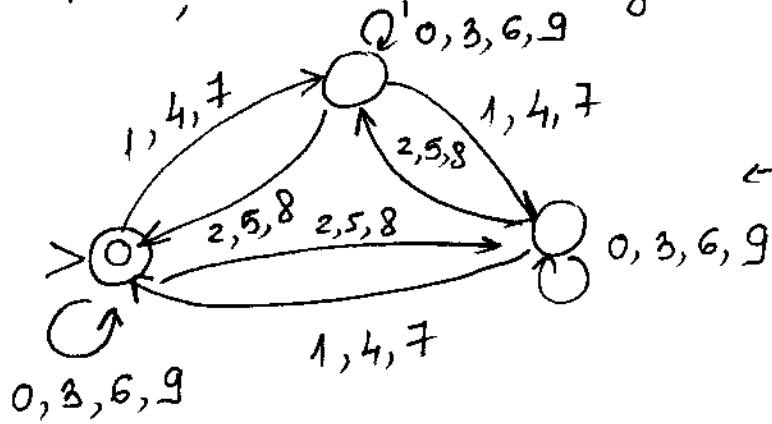
$L_1 \to$ mulțimea întregilor pozitivi

$L_1 = 0 \cup \{1, .., 9\}\Sigma^* \Rightarrow$ regulat fiind descris printr-o E.R.

$L_2 \to$ mulțimea repez. întregilor pozitivi divizibili cu 2.

$L_2 = L_1 \cap \Sigma^* \{0, 2, 4, 6, 8\}$

L_3 - mulțimea repr. întregilor pozitivi divizibili cu 3.



← M

$L_3 = L_1 \cap L(M)$

$L = L_2 \cup L_3$

ex:

$\Sigma = \{a, b\}$

$L \subseteq \Sigma^*$, $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|$ impară, w conține un nr par de 'a'$\}$.

? L regulat

$L_1 \to$ mulțimea șirurilor de lg. impară $\Sigma(\Sigma\Sigma)^*$

$L_2 \to$ mulțimea șirurilor cu un nr. par de 'a' : $b^*(a b^* a b^*)^*$

$L = L_1 \cap L_2$

<u>Proprietăți ale limbajelor regulate</u>

1° Pe măsură ce un șir parcurs stg $\to$ dr, cantitatea de mem. necesară pt a determina la sf. de șirul este în lbaj $\to$ finită, fixată apriori, depend. de lbaj și <u>nu</u> de șirul particular.

$\{a^n b^n \mid n \geq 0\} \Rightarrow \nexists$ A.F.

2° L. regulate cu nr. <u>infinit</u> de șiruri au submulțimi infinite cu o anumită structură repetitivă care se dat. '*' din E.R., respectiv ciclu din diagrama de stări a A.F.

$\{a^p \mid p$ nr prim $\} \Rightarrow$ <u>nu</u> este regulat

Teorema (Lema de pompare)

Fie L un limbaj regulat infinit. Atunci există ~~șirurile x, y, z~~ ~~a.î. y ≠ e și~~, $n \geq 1$ a.î. $\forall w \in L$, $|w| \geq n$ poate fi scris $w = xyz$ a.î. $y \neq e$, $|xy| < n$ și $xy^i z \in L$, $\forall i \geq 0$.

dem.

L regulat $\Rightarrow$ $\exists$ AFD M care-l acceptă, $L = L(M)$

Pp. M are n stări, și fie w, $|w| \geq n$ ($L \to$ infinit, $\exists$ w, $|w| \geq n$)

Fie $\ell = |w|$

$w = \sigma_1 \dots \sigma_\ell$, $\sigma_i \in \Sigma$, $\ell \geq n$

Fie config.-urile lui M pt w:

$$(q_0, \sigma_1 \dots \sigma_\ell) \vdash_M (q_1, \sigma_2 \dots \sigma_\ell) \vdash_M \dots \vdash_M (q_{\ell-1}, \sigma_\ell) \vdash_M (q_\ell, e)$$

$q_0 \to$ st. inițială

$q_\ell \to$ st. finală

$l \geq n$

M are n stări $\xrightarrow{\text{principiul cutiei}}$ $\exists\, i,j$ a.î. $0 \leq i < j \leq l$, $q_i = q_j$

Șirul $\sigma_i \ldots \sigma_j$ duce M din q_i înapoi în q_i $\Rightarrow$ nu este vid pt. că

$i+1 \leq j$.

Dar atunci acest șir poate fi scos din w sau orice nr. de repetări ale șirului pot fi introd. în w după al j-lea simbol. $\Rightarrow$ M accepta șirul.

M acceptă $\underbrace{\sigma_1 \ldots \sigma_i}_{x} \underbrace{(\sigma_{i+1} \ldots \sigma_j)}_{y}^{p} \underbrace{\sigma_{j+1} \ldots \sigma_l}_{z}$, $p \geq 0$.

$$(q_0, xy^p z) \vdash_M^* (q_i, y^p z) \vdash_M^* (q_i, y^{p-1} z) \vdash_M^* \cdots \vdash_M^* (q_i, z) \vdash_M^* (q_l, e)$$

De notat $|xy| \leq n$

Ex:

$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ nu este regulat

pp. $L \to$ regulat, infinit $\xRightarrow{L.P.}$

$w = a^n b^n \in L$

$w = xyz$, $|xy| \leq n$, $y \neq e$

$y = a^i$, $i > 0$

$xz = a^{n-i} b^n \notin L$

$\Rightarrow$ contradicție

ex:

$L = \{a^p \mid p \text{ prim}\}$

pp. $L \to$ regulat, infinit $\xRightarrow{L.P.}$

$x = a^q$, $y = a^r$, $z = a^s$, $q, s \geq 0$, $r > 0$

$a^{q+i\cdot r+s} \in L \Rightarrow q + i\cdot r + s \Rightarrow$ nr prim $\forall\, i \geq 0 \Rightarrow$ imposibil