Pr 1.

Fie GIC:

$S \to aSbS \mid bSaS \mid e$

S.s. dem. L(G) este mulțimea șirurilor cu nr. egal de 'a' și 'b'.

$L = L(G)$

$L' = \{ w \in \{a, b\}^* \mid \#a(w) = \#b(w) \}$.

$L = L(G)$ trebuie să dem. $L(G) \subseteq L'$ și $L' \subseteq L(G)$

1) $L(G) \subset L'$

Vreau să arăt că $\forall w \in L(G)$, w are nr. egal de 'a' și 'b'. Dem. prin inducție după nr. de pași ai derivării $S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} w$

Caz de bază:

$w = e$, $S \underset{G}{\Rightarrow} e$, w are un nr egal (0) de 'a' și 'b'

Ip. inductivă:

Dc. $S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} w$ în nr. puțin de n pași $\Rightarrow$ w are nr. egal 'a' și 'b'

Pas de inducție

Fie w a.î. $S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} w$ în n pași

Dc. w începe cu 'a', $S \underset{G}{\Rightarrow} aSbS \overset{*}{\Rightarrow} a w_1 b w_2$

$S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} w_1$ și $S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} w_2$ în cel mult $n-1$ pași. Din ip. ind. w_1 și w_2 au nr. egal de 'a' și 'b'. w are nr. egal $((|w_1|+|w_2|)/2+1)$ de 'a' și 'b'.

Dc. w începe cu 'b', $S \underset{G}{\Rightarrow} bSaS \overset{*}{\Rightarrow} b w_1 a w_2 \Rightarrow$ ac dem.

2) $L' \subseteq L(G)$

$\forall w \in \Sigma^*$, w are nr. egal de 'a' și 'b', $S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} w$. Dem. prin ind. după $|w|$.

Caz de bază $\quad w = e$, $S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} e$

Ip. ind.

$|w| < n$, w are nr. egal de 'a' și 'b' $\Rightarrow S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} w$

Pas de inducție

Fie w cu nr. egal de 'a' și 'b'. Pp. că w începe cu 'a'.

Ideea: vreau să găsesc primul caracter după 'a' ai dif. $\#a - \#b = 0$.

→ Pt. că am început cu 'a', $\#a = 1$ ⇒ găsesc un caract ai $\#a - \#b = 0$ ⇒ b.

$$\Rightarrow w = a w_1 b w_2$$

$$\downarrow$$

$$\#a = \#b$$

$a w_1 b \Rightarrow \#a = \#b$.

· $w \Rightarrow \#a = \#b \Rightarrow w_2 \Rightarrow \#a = \#b$.

$|w_1| < n$, $|w_2| < n$ $\xrightarrow{\text{Ip. ind.}}$ $S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} w_1$, $S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} w_2$

$$S \underset{G}{\Rightarrow} aSbS \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} a w_1 b S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} a w_1 b w_2 = w.$$

→ Dc w începe 'b', $S \underset{G}{\Rightarrow} bSaS \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} b w_1 a S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} b w_1 a w_2 = w$

Exemplu grilă

1° Fie $L \to$ limbaj și 'a' un simbol. Def. $a \backslash L = \{ w \mid aw \in L \}$

ex: $L = \{0, 001, 100\}$, $0 \backslash L = \{e, 01\}$

știind că $L \to$ reg, $a \backslash L$ este:

a) L.R.

b) LIC

c) ?

dem.

$$L = L(K, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

$$a \backslash L = L(K, \Sigma, \delta, q_0', F)$$

$$q_0' = \delta(q_0, a)$$

2° Fie $w = a_1 \dots a_n$, $x = b_1 \dots b_n$, $|w| = |x|$

Def. $alt(w, x) \to$ șirul în care simb. din w și x alternează, începând cu w

$(a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_n b_n)$

$L, M \to$ limbaje

$alt(L, M) = \{ alt(w, x) \mid w \in L, x \in M, |w| = |x| \}$.

Dc $L, M \to$ regulate, $alt(L, M)$ este:

a) L.R.

b) L.I.C.

c) ?

dem.

$L = L(M_1)$

$M = L(M_2)$, $M_1, M_2 \to$ AFD

$M_3 = (K_1 \times K_2 \times \{0, 1\}, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \delta', ((q_1, q_2), 0), F_1 \times F_2 \times \{0\})$

$\delta'(((q_a, q_b), 0), c) = (\delta_1(q_a, c), q_b, 1)$

$\delta'(((q_a, q_b), 1), c) = (q_a, \delta_2(q_b, c), 0)$

3 Fie alfabetul $\Sigma = \{0\}$ și fie

M_1 = mulțimea LIC peste Σ

M_2 = mulțimea LR peste Σ

a) $M_1 \subset M_2$

b) $M_1 = M_2$

c) $M_1 \supset M_2$

(4) Fie GIC, G, def. prin reg. $S \to aS \mid Sb \mid a \mid b$.

Șirurile din $L(G)$:

a) conține "ba"

(b) nu conține "ba"

c) doar unele conțin "ba"

(5) Fie $L \to$ ~~LIC~~ și S o mulțime finită de șiruri:

Atunci $L' = L \setminus S$ este

a) L.R.

b) LIC.

c) ~~LIC~~

dem.

pp. $L' \to$ LIC, $L' = L(G')$

constr. $G = G' \cup \{ S' \to w \mid \forall w \in S \}$

$L \to \cancel{LiC} \Rightarrow L' \to \cancel{LiC}$

(6) Fie $L_1 \to LiC$, $L_2 \to \cancel{LiC}$. At. $L_1 \cap L_2 \to \cancel{LiC}$

a) A

f) F

dem.

$L_2 = \overline{L_1}$, $L_2 \to \cancel{LiC}$

$L_1 \cap L_2 = \emptyset$ LiC

(7) $L \to LiC$, $R \to LR$. $\overline{(L \cup R)} \to \cancel{LiC}$

a) A

f) F

dem.

$R = \Sigma^*$

$L \cup R = \Sigma^*$

$\overline{\Sigma^*} = \emptyset$

8. Pt. orice limbaj L, rezultatul L^*:

a) finit
b) infinit
c) ?

$L = \emptyset$

9. Se dau urm. gram:

G1: $A \to a \mid aA \mid bAA \mid AbA \mid Aab$

G2: $B \to b \mid bB \mid aBB \mid BaB \mid Bba$

G3: $C \to bCa \mid aCb \mid ba \mid ab \mid e$

Limbajul cu $\#a \geq \#b$ este generat de urmatoarea gram:

a) G1 și G2
b) G1 și G3
c) G2 și G3

10. Fie $L = \{ w \in \{a, b, c\}^+ \mid \#_a(w) = 2 * \#_b(w)$ și

$\#_c(w) = \#_b(w)$ și

$|w| \to$ impar $\}$

a) LR
b) LiC
c) LDC

R: $L = \emptyset \in$ L.R.

11 Alegeți enunțul fals:

a) APD poate cicla la infinit

b) o cond. suf. ca APD să accepte șirul de intrare este s.s. afle într-o stare finală cu stiva vida

c) ~~pt~~ $\forall$ LiC se poate construi un APD care să-l accepte.

Tehnici de construcție a GIC

→ a^* : $A \to aA \mid e$

→ $a^n b^n$: $S \to aSb \mid e$

→ $a^n b^{kn}$: $S \to aS\underbrace{bb\ldots b}_{k} \mid e$

→ $a^n b^m$, $m > n$:

$\vert\vert\vert$

$\underbrace{a^n b^n}\underbrace{b^k}$, $k>0$

$S \to XY$

$X \to aXb \mid e$

$Y \to bY \mid b$

→ $a^n b^m$, $m \neq n$

$L = L_1 \cup L_2$

$L_1 = \{a^n b^m \mid n < m\}$

$L_2 = \{a^n b^m \mid n > m\}$

$\rightarrow a^n f^m c^m d^n \quad , \quad \cancel{\exists}$ rel (m, n)

$S \rightarrow aSd \mid X$

$X \rightarrow fXc \mid e$

NU se poate GIC

→ să controlăm m. mult de 2 param: $a^n f^n c^n$

→ să contr. 2 param. care nu sunt sufixe sau prefixe

$a^n f^m c^n d^m$