Gramatici Independente de Context

Def.

$G = (V, \Sigma, R, S)$

$A \in V - \Sigma$, $u \in V^*$, $A \underset{G}{\rightarrow} u$, $(A, u) \in R$

$\forall u, v \in V^*$, $u \underset{G}{\Rightarrow} v \iff \exists x, y, v' \in V^*, A \in V - \Sigma$ a.î.

$$u = xAy$$
$$v = xv'y$$
$$A \underset{G}{\rightarrow} v'$$

Def.

Relația $\overset{*}{\Rightarrow}$ este închiderea reflexivă și tranzitivă $\underset{G}{\Rightarrow}$

Def.

$L(G) = \{ w \in \Sigma^* \mid S \underset{G}{\overset{*}{\Rightarrow}} w \}$ limbajul generat de gram. G.

Obs:

$w_1 \underset{G}{\Rightarrow} w_2 \underset{G}{\Rightarrow} \cdots \underset{G}{\Rightarrow} w_n \Rightarrow$ o derivare în G a lui w_n din w_1

ex: E

$G=(V, \Sigma, R, \cancel{S})$

$V = \{x, 1, 2, +, *, (,), T, F, E\}$

$\Sigma = \{x, 1, 2, +, *, (,)\}$

$$R = \{ E \to E+T \mid T$$
$$T \to T*F \mid F$$
$$F \to (E) \mid x1 \mid x2 \}$$

? $(x_1 * x_2 + x1) * (x_1+x_2)$

$E \Rightarrow T$
$\Rightarrow T*F$
$\Rightarrow T*(E)$
$\Rightarrow T*(E+T)$
$\Rightarrow T*(T+T)$
$\Rightarrow T*(F+T)$
$\Rightarrow T*(x_1+T)$

.... $\Rightarrow T*(x_1+x_2)$
$\Rightarrow (E)*(x_1+x_2)$
$\Rightarrow (E+T)*(x_1+x_2)$
$\Rightarrow (E+F)*(x_1+x_2)$
$\Rightarrow (E+x_1)*(x_1+x_2)$
$\Rightarrow (T+x_1)*(x_1+x_2)$
- - - -
$\Rightarrow (x_1*x_2+x_1)*(x_1+x_2)$

ex:

$G=(V,\Sigma,R,S)$

$V=\{S,(,)\}$

$\Sigma=\{(,)\}$

$R=\{S\to e$

$\quad S\to SS$

$\quad S\to (S)$

$\}$

$S \Rightarrow SS \Rightarrow S(S) \Rightarrow S((S)) \Rightarrow S(()) \Rightarrow (S)(()) \Rightarrow ()(())$

? $L(G)$ regulat

pp $L(G)$ regulat

$L(G)\cap (^*)^* \xRightarrow{\text{Th. închidere}}$ regulat

$L(G)\cap (^*)^* = \{(^n)^n \mid n\geq 0\} \to$ ~~regulat~~

Limbaje regulate și Limbaje Indep. de Context

Def.

O G.I.C., $G=(V,\Sigma,R,S)$ este o gram. regulată $\Leftrightarrow R \subseteq (V-\Sigma)\times\Sigma^*((V-\Sigma)\cup\{e\})$.

ex:

$G=(V,\Sigma,R,S)$

$V=\{S, A, B, a, b\}$

$\Sigma=\{a, b\}$

$R=\{S \to bA \mid aB \mid e$

$\quad A \to abaS$

$\quad B \to babS$

$\}$

$S \Rightarrow bA \Rightarrow babaS \Rightarrow babaaB \Rightarrow babaababS \Rightarrow babaabab$

$L(G)=(abab \cup baba)^*$

? gram are reguli care în p. dr. conțin eventual 1 singur neterminal (primul sau ultimul) din șir $\Rightarrow$ NU este garantat a fi regulată.

ex: $S \to A$

$A \to 01 \mid 0B$ $\qquad L = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$

$B \to A1$

Teorema

Un limbaj este regulat $\Leftrightarrow$ generat de o gram. regulată.

dem.

$\Rightarrow$

pp. L este lbaj regulat $\Rightarrow \exists M$, AFD, a.î. $L = L(M)$

$M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$ și construiesc o GIC, $G = (V, \Sigma, R, S)$

$V = \Sigma \cup K$

$S = s$

$R = \{q \to ap \mid \delta(q, a) = p\} \cup \{q \to e \mid q \in F\}$

pp. $\Sigma \cap K = \emptyset$

Idee: regulile lui G sunt def. ai deriv. din G să simuleze tranzițiile lui M

$\forall \sigma_1, \dots, \sigma_n \in \Sigma,\ p_0, \dots, p_n \in K$

$(p_0, \sigma_1 \dots \sigma_n) \vdash_M (p_1, \sigma_2 \dots \sigma_n) \vdash_M \dots \vdash_M (p_n, e)$

$\Leftrightarrow$

$p_0 \underset{G}{\Rightarrow} \sigma_1 p_1 \underset{G}{\Rightarrow} \sigma_1 \sigma_2 p_2 \underset{G}{\Rightarrow} \dots \underset{G}{\Rightarrow} \sigma_1 \dots \sigma_n p_n$

pt că $\delta(q, a) = p \Leftrightarrow q \to ap$

dem. $L(M) \subseteq L(G)$

pp. $w \in L(M) \Rightarrow (s, w) \vdash^*_M (p, e),\ p \in F$

$\Rightarrow s \overset{*}{\Rightarrow} wp$

$p \to e \in R$

$\to s \overset{*}{\Rightarrow} w,\ w \in L(G)$

$L(G) \subseteq L(M)$

pp $w \in L(G)$

$s \underset{G}{\overset{*}{\Rightarrow}} w \Rightarrow s \underset{G}{\overset{*}{\Rightarrow}} w$

Regula utilizată în ultimul pas al deriv. $p \to e,\ p \in F$ $\to s \overset{*}{\Rightarrow} wp \Rightarrow w$

$(s, w) \vdash^*_M (p, e) \Rightarrow w \in L(M)$

Fie $G=(V, \Sigma, R, S)$ gram. regulată

? M a.î. $L(M)=L(G)$

Ideea → derivările din G mimate de opțiile A.F.

Fie $M=(K, \Sigma, \Delta, s, F)$

$K=(V-\Sigma)\cup\{f\}$

$s=S$

$F=\{f\}$

$\Delta=\{(A,w,B) \mid A\to wB\in R,\ A,B\in V-\Sigma,\ w\in\Sigma^*\}$

$\cup\{(A,w,f) \mid A\to w\in R,\ A\in V-\Sigma,\ w\in\Sigma^*\}$

$\forall A_1,\dots,A_n\in V-\Sigma,\ w_1,\dots,w_n\in\Sigma^*$

$$A_1 \underset{G}{\Rightarrow} w_1A_2 \underset{G}{\Rightarrow} w_1w_2A_3 \underset{G}{\Rightarrow} \dots \underset{G}{\Rightarrow} w_1\dots w_{n-1}A_n \underset{G}{\Rightarrow} w_1\dots w_n$$

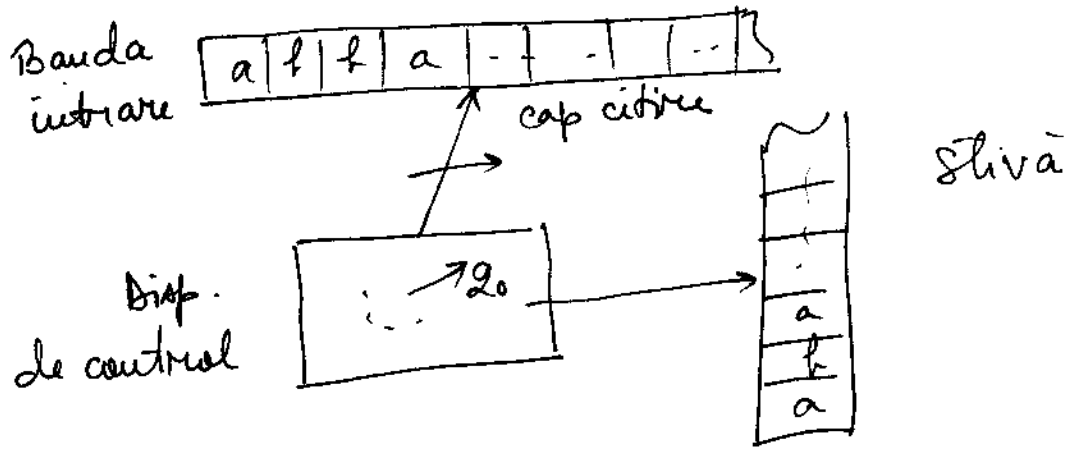
$$\Leftrightarrow (A_1, w_1\dots w_n) \vdash_M (A_2, w_2\dots w_n) \vdash_M \dots \vdash_M (A_n, w_n) \vdash_M (f, e)$$

$w\in L(G)$, $w\in\Sigma^*$, $S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} w \Rightarrow (S,w) \vdash_M^* (f,e)$ a.î. $w\in L(M)$

$w\in L(M)$ a.î. $(S,w)\vdash_M^*(f,e) \Rightarrow S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} w$ adică $w\in L(G)$.

Automate cu stivă (pushdown)

Fie limbajul $\{ w w^R \mid w \in \Sigma^* \}$



Def.
Un automat pushdown este un tuplu $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$

$K \to$ mulțimea finită a stărilor

$\Sigma \to$ alfabet de intrare

$\Gamma \to$ alfabetul stivei

$s \in K \to$ st. inițială

$F \subseteq K \to$ mulțimea st. finale

$\Delta \to$ relația de tranziție

$\Delta \subseteq (K \times \Sigma^* \times \Gamma^*) \times (K \times \Gamma^*)$

$((p, u, \beta), (q, \gamma)) \in \Delta$, M în st. p cu β în vf. stivei poate citi u de pe banda de intrare, înlocui β cu γ pe stivă și intra în st. q.

<u>Caz. particulare:</u>

$((p, u, e), (q, a))$ adg. 'a' pe stivă

$((p, u, a), (q, e))$ scoate 'a' de pe stivă

<u>Def.</u>

O configurație este un element din $K \times \Sigma^* \times \Gamma^*$

<u>Def.</u>

Un A.P.D. M acceptă $w \in \Sigma^* \iff (s, w, e) \vdash_M^* (p, e, e)$, $p \in F$.

Def.

Limbajul acceptat de A.P.D. M este mulțimea șirurilor acceptate de M.

ex:

A.F. poate fi considerat un A.P.D. care nu lucrează cu stiva.

$M = (K, \Sigma, \Delta, \Gamma, s, F)$ A.P.D. , $\Gamma = \emptyset$

$M' = (K, \Sigma, \Delta', s, F)$ A.F.

$\Delta' = \{((p, u, e), (q, e)) \mid (p, u, q) \in \Delta\}$

ex: ? M care acceptă $\{wcw^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

$M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$

$K = \{s, f\}$,

$\Sigma = \{a, b, c\}$

$\Gamma = \{a, b\}$

$F = \{f\}$

Δ:

1. $((s, a, e), (s, a))$
2. $((s, b, e), (s, b))$
3. $((s, c, e), (f, e))$
4. $((f, a, a), (f, e))$
5. $((f, b, b), (f, e))$

Stare	Intrare	Stiva	Tranz. utilizată
s	abbcbba	e	—
s	bbcbba	a	1
s	bcbba	ba	2
s	cbba	bba	2
f	bba	bba	3
f	ba	ba	5
f	a	a	5
f	e	e	4

? M a.î. $L(M) = \{ww^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$

$L(A.P.D.)$ și $L(G.I.C)$

Fie $G = (V, \Sigma, R, S)$

$w \in L(G) \Leftrightarrow w \in \Sigma^*$ și există o derivare

$$S \Rightarrow w_1 \Rightarrow w_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow w_{n-1} \Rightarrow w$$

$w_1, \dots, w_{n-1} \in V^*$ $(n > 0)$

Derivare stg $\rightarrow$ la fiec. pas înlocuim cel mai din stg. neterm. din șir

ex: $V = \{S, (,)\}$

$\Sigma = \{(,)\}$

$R = \{S \rightarrow e \mid SS \mid (S)\}$

$$S \Rightarrow SS \Rightarrow (S)S \Rightarrow ()S \Rightarrow ()(S) \Rightarrow ()()$$

Formal: $\alpha \underset{G}{\overset{L}{\Rightarrow}} \beta$, $\alpha, \beta \in V^* \Leftrightarrow \alpha = \alpha_1 A \alpha_2$, $\beta = \alpha_1 \gamma \alpha_2$,

$A \underset{G}{\rightarrow} \gamma$, $\alpha_1 \in \Sigma^*$

$\overset{*L}{\underset{G}{\Rightarrow}}$ închiderea reflexivă și tranzitivă a $\overset{L}{\underset{G}{\Rightarrow}}$

<u>Lema</u>

Pt orice GIC $G = (V, \Sigma, R, S)$ și orice șir $w \in \Sigma^*$, $S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} w \Leftrightarrow$

$S \overset{*L}{\underset{G}{\Rightarrow}} w$.