Procedura

O procedură constă dintr-o mulțime finită de instrucțiuni care pot fi executate mecanic, într-un timp determinat, cu o cantitate fixă de efort. Proc. poate avea $\forall$ nr. intrări / ieșiri.

Algoritm

O procedură se oprește pt o anumită intrare, dc $\exists t$ (finit) a.î. după executarea a t instrucțiuni elementare, fie nu mai există o altă instr. de executat, fie instrucțiunea 'halt' a fost executată. Procedura care se oprește pt toate intrările $\rightarrow$ algoritm.

Funcții recursive

O procedură definește o relație între intrări $\rightarrow$ ieșiri numită funcție recursivă parțială.

Dc. procedura $\rightarrow$ algoritm $\rightarrow$ funcție recursivă totală.

Procedură → definim un limbaj: pt un șir x, procedura decide dc $x \in L$ (limbaj)

O mulțime def. printr-o proc → recursiv enumerabilă
alg → recursivă.

∃ un număr mare de notații formale uz. pt. a descrie o procedură:

1) M.Turing (Turing, 1936-1937)

2) gramatice Chomsky $\emptyset$ (Chomsky, 1959 -1963)

3) Alg. Markov (Markov, 1951)

4) Calcul Lambda (Church, 1941)

5) Sisteme Post

6) Tag

7) Cele mai multe limbaje de programare

Ierarhia Chomsky

gramaticile pot fi clasificate în raport cu forma regulilor lor:

Fie $G = (V, \Sigma, R, S)$

1) Regulate (la dreapta)

$A \to xB \mid x \quad , x \in \Sigma^*, \; A, B \in V - \Sigma$

2) Independente de context

$A \to \alpha \quad , \; A \in (V - \Sigma) \; , \; \alpha \in V^*$

3) Dependente de context

$\alpha A \beta \to \alpha \delta \beta$

$|\alpha A \beta| \leq |\alpha \delta \beta|$

$\alpha, \beta \in V^* \quad , \; A \in V - \Sigma$

4) O gramatică care nu are ~~restricții~~ restricții la $1 \div 3$ $\Rightarrow$ G. nerestricționată

$V^* (V - \Sigma) V^* \times V^*$

Pt fiec. clasă de gram. din ierarhia Chomsky → clasă de acceptoare care acc. aceeași clasă de limbaje:

(1) $L \to$ regulat $\Rightarrow$ A.F.(D/N)

(2) $L \to$ LiC $\Rightarrow$ A.P.D. (nedeterminist)

(3) $L \to$ LDC $\Rightarrow$ 2-way nondeterministic linear bounded automaton

(4) $L \to$ recursiv enumerabil $\Rightarrow$ M. Turing

ex: GDC; ? G a.î. $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$.

$S \to aSBC \mid abC$

$CB \to BC$

$bB \to bb$

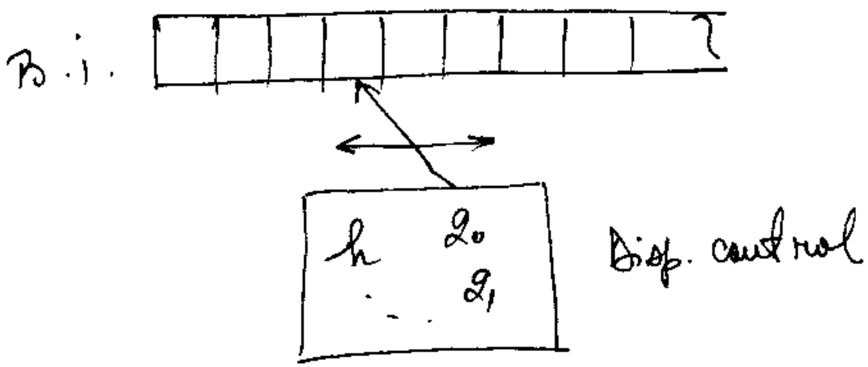
$cC \to cc$

$bC \to bc$

$S \Rightarrow aSBC \Rightarrow aab\underbrace{CB}C \Rightarrow aab\cancel{b}BCC \Rightarrow aabbCC \Rightarrow aabbcc$

<u>Mașina Turing</u>

M.T. constă dintr-un disp. control și o bandă. Comunicarea dintre cele 2 componente este făcută printr-un cap care poate citi / înlocui simb. pe bandă.



Mecanismul de control acționează în pași discreți; la fiec. pas execută 2 acțiuni într-un mod care depinde de <u>starea curentă</u> și de simbolul de pe bandă indicat de capul citire /scriere:

1) pune disp. de control într-o nouă stare

2) Re
a) scrie un simbol pe bandă în poz. curentă, înlocuindu-l pe cel existent
b) deplas. cap. o poz. la stg / dr

B.i. → are capăt stg, se întinde la dr. indefinit

Dc. M.T. încearcă să mute capul peste limita stg. a B.i. → încetează să funcționeze.

Există o stare specială - de halt - h ⇒ încheierea opțiilor M.T.

<u>Convenție</u> → B.i. conține în fiecare pătrat → '#'

L, R → deplas. capului o poziție la stg / dr.

<u>Def.</u>

O M.Turing este un tuplu (K, Σ, δ, s), unde:

K → mulțimea finită a stărilor, $\not\ni h$

Σ → alfabetul de intrare, $\ni \#$, $\not\ni L, R$

$s \in K$ → st. inițială

$\delta : K \times \Sigma \to (K \cup \{h\}) \times (\Sigma \cup \{L, R\})$

Dc. $q \in K$, $a \in \Sigma$, $\delta(q, a) = (p, b)$

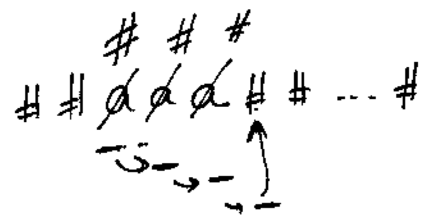
ex: ? M.T. $M = (K, \Sigma, \delta, s)$ care înlocuiește toate simb 'a' cu '#' mergând spre dr.

$K = \{q_0, q_1\}$

$\Sigma = \{a, \#\}$

$s = q_0$

q	σ	$\delta(q,\sigma)$
q_0	a	$(q_1, \#)$
q_0	$\#$	$(h, \#)$
q_1	a	(q_0, a)
q_1	$\#$	(q_0, R)



ex: ? M.T. $M = (K, \Sigma, \delta, s)$ care se deplas. la stg. până la # și se oprește

$K = \{q_0\}$

$\Sigma = \{a, \#\}$

$s = q_0.$

q	σ	$\delta(q,\sigma)$
q_0	a	(q_0, L)
q_0	$\#$	$(h, \#)$

<u>Def.</u>

Configurația unei M.T. $M = (K, \Sigma, \delta, s)$ este un membru din:

$$(K \cup \{h\}) \times \Sigma^* \times \Sigma \times (\Sigma^* (\Sigma - \{\#\}) \cup \{e\})$$

<u>Def.</u>

Fie $M = (K, \Sigma, \delta, s)$ și fie (q_1, w_1, a_1, u_1), (q_2, w_2, a_2, u_2) config. ale lui M.

Atunci:

$$(q_1, w_1, a_1, u_1) \vdash_M (q_2, w_2, a_2, u_2)$$

$\Leftrightarrow$ $b \in \Sigma \cup \{L, R\}$

$$\delta(q_1, a_1) = (q_2, b)$$

1) $b \in \Sigma$, $w_1 = w_2$, $u_1 = u_2$, $a_2 = b$

2) $b = L$, $w_1 = w_2 a_2$

a) $u_2 = a_1 u_1$, dc $a_1 \neq \#$, $u_1 \neq e$

b) $u_2 = e$, $a_1 = \#$, $u_1 = e$

3) $b = R$, $w_2 = w_1 a_1$

a) $u_1 = a_2 u_2$

b) $u_1 = u_2 = e$, $a_2 = \#$

Obs:

$b = L$, $w_1 = e \Rightarrow (q_1, w_1, a_1, u_1)$ nu duce la nicio config. pt. că

$\nexists\, w_2 \in \Sigma^*$, $a_2 \in \Sigma$ a.î. $w_1 = w_2 a_2$

$\Rightarrow$ M.T. se agață.

Def.

$\vdash_M^*$ $\Rightarrow$ închiderea reflexivă și tranzitivă a $\vdash_M$

Calcul cu M. Turing

Convenții:

→ șirul de intrare este scris aliniat la limita stg. a benzii cu capul poziționat pe '#' care delim. dr. șirul

→ aceeași convenție pt poz. capului pt. rezultatul calculat.

Def.

Fie $\Sigma_0, \Sigma_1 \not\ni \#$. Fie $f: \Sigma_0^* \to \Sigma_1^*$. M. Turing $M = (K, \Sigma, \delta, s)$ calculează f, dc $\Sigma_0, \Sigma_1 \subseteq \Sigma$, $\forall w \in \Sigma_0^*$, $f(w) = u$ atunci $(s, \#w\underline{\#}) \vdash_M^* (h, \#u\underline{\#})$

Dc $\exists M \Rightarrow f \to$ fcție Turing calculabilă.

ex: $\Sigma_0 = \Sigma_1 = \{a, b\}$

$f: \Sigma_0^* \to \Sigma_1^*$

$f(w) = \bar{w}$, $\bar{w}$ este rezultatul înlocuirii $a \leftrightarrow b$ în w.

$M = (K, \Sigma, \delta, s)$

$K = \{q_0, q_1, q_2\}$

$\Sigma = \{a, b, \#\}$.

$s = q_0$.

δ:

q	σ	$\delta(q, \sigma)$
q_0	a	(q_1, L)
q_0	b	(q_1, L)
q_0	$\#$	(q_1, L)
q_1	a	(q_0, b)
q_1	b	(q_0, a)
q_1	$\#$	(q_2, R)
q_2	a	(q_2, R)
q_2	b	(q_2, R)
q_2	$\#$	$(h, \#)$

$$(q_0, \#aab\underline{\#}) \vdash_M (q_1, \#aa\underline{b})$$

$$\vdash_M (q_0, \#aa\underline{a})$$

$$\vdash_M (q_1, \#a\underline{a}a)$$

$$\vdash_M (q_0, \#a\underline{b}a)$$

$$\vdash_M (q_1, \#\underline{a}ba)$$

$$\vdash_M (q_0, \underline{\#}bba)$$

$$\vdash_M (q_1, \underline{\#}bba)$$

$$\vdash_M (q_2, \#\underline{b}ba)$$

$$- - - - - -$$

$$\vdash_M (q_2, \#bba\underline{\#})$$

$$\vdash_M (h, \#bba\underline{\#})$$

Noțiunea de funcție calculabilă pe șiruri poate fi extinsă:

$f : (\Sigma_0^*)^k \to \Sigma_1^*$, $k > 0$

$M = (K, \Sigma, \delta, s)$, $\Sigma_0, \Sigma_1 \subseteq \Sigma$.

$\forall w_1, \dots, w_k \in \Sigma_0^*$, $f(w_1, \dots, w_k) = u$, atunci $(s, \#w_1\#w_2\#\dots\#w_k\underline{\#})$

$\vdash_M^* (h, \#u\underline{\#})$.