Turing enumerabilitate, Turing acceptare, Turing decidabilitate

Teorema

Un limbaj este Turing decidabil $\Leftrightarrow$ atât el cât și complementul sunt Turing acceptate.

dem.

$\Rightarrow$ L Turing decidabil $\Rightarrow$ L Turing acceptat (Th.)

$\Rightarrow$ $\bar{L}$ Turing decidabil (Th) $\Rightarrow$ Turing acceptat (Th).

$\Leftarrow$ Să pp. L acceptat de M.T. M_1 și $\bar{L}$ este acceptat de M.T. M_2. Putem construi o M.T. M care decide L: va fi o M.T. cu 2 benzi (Th. echiv. cu M.T.S)

M pune șirul de intrare w pe ambele benzi și pune capetele la sf. w.

M simulează M_1 și M_2 în paralel; la fiec. pas al unei aplic. a lui M, un pas al lui M_1 este pus pe 1-ma bandă și un pas al lui M_2 este pus pe a 2-a banda. Cum fie M_1 sau M_2 acceptă w, nu amândouă, M_1 sau M_2 se va opri; M determină care dintre M_1 sau M_2 se oprește, M se oprește cu benzile config. pt. a indica $w \in L$ sau $w \notin L$.

<u>Def.</u>

Fie Σ_0 un alfabet care nu conține #. Un limbaj $L \subseteq \Sigma_0^*$ este limbajul de ieșire al unei M.T. M $\iff$ L este mulțimea șirurilor $w \in \Sigma_0^*$ a.î. pt un anumit șir $u \in \Sigma_0^*$, $(s, \#u\underline{\#}) \vdash_M^* (h, \#w\underline{\#})$. (s → st înd a M.T. M).

<u>Teorema</u>

Un limbaj este Turing acceptat $\iff$ este limbajul de ieșire al unei M.Turing.

<u>dem.</u>

L → lbaj de ieșire al unei M.T. M $\Rightarrow$ L acceptat de o an. M.T.

Din Th. de echiv. M.T.D ~ M.T.N. este suficient să dem. că L este acceptat de o MTN.

Proiectăm M.T.N. M' care-l acceptă pe L: pt. un șir de intr. w, M' scrie nedeterminist u pe bandă, salvând w pe a 2a pistă a benzii. Atunci când M se oprește, M' compară șirul calc. de M cu w. Dc. sunt aceleași, atunci M' acceptă, altfel intră într-un ciclu infinit.

$L \rightarrow$ mulțimea șirurilor acceptate de o M.T. M, putem modifica M a.î. la accept. unui șir de intrare s.s. apreasca cu acel șir pe bandă. $\Rightarrow$ Mulțimea șirurilor ră mase pe bandă la sf. opțiilor este aceeași cu mulțimea șirurilor acceptate de M $\Rightarrow L$.

<u>Def.</u>

O M.T. enumeră limbajul L $\Leftrightarrow$ pt o anumită stare finală q,

$$L = \{ w \mid \text{pt. un anumit șir } u,\ (s, \#) \vdash^{*}_{M} (q, \#w\underline{\#}u) \}$$

unde $s \rightarrow$ st. inițială a lui M.

<u>Def.</u>

Un limbaj este Turing-enumerabil $\Leftrightarrow$ este enumerat de o anu. M.T. M.

<u>Teorema</u>

Un limbaj este Turing-acceptat $\Leftrightarrow$ Turing-enumerabil.

<u>dem.</u>

$L \rightarrow$ Turing-acceptat de o M.T. M.

$\Rightarrow$ Putem construi o M.T. M' care pornește cu banda vidă, generează sistematic (ordine lexicografică) toate șirurile peste alfabetul lui L, și efectuează operațiile pe care le-ar fi făcut M.

<u>!!!!</u> M' s-ar putea să nu termine opțiile pe fiec. șir înainte de a ajunge la urm. pt. că pt un anumit ~~șir~~ opțiile lui M nu se termină, deși există șiruri pe care M le acceptă dar nu au fost încă generate.

M' ⟹ va funcționa astfel:

(1) M' execută un pas al opțiilor lui M asupra 1-mului șir peste alf. lui M.

(2) M' execută 2 pași din opțiile lui M pe fiec. dintre cele 2 șiruri

(3) M' execută 3 pași ...

⋮

De fiecare dată când M' descoperă că M ar fi acceptat un șir, se oprește în starea 2 pt a semnala acceptarea.

⟸ Dacă M.T. M enumeră L, putem modifica M a.î. să accepte L: reconstruim M a.î. să salveze orice intrare primită înainte să înceapă enumerarea. De fiec. dată când M intră în st. 2, mașina modific. compară conținutul benzii cu șirul de intrare salvat. Dc sunt la fel, șirul de intrare este acceptat, altfel enumerarea continuă.

Teorema

Un limbaj este Turing acceptat <=> generat de o ar. gramatică.

Complexitatea alg-ilor

Hilbert - 1900

polinom : $5x^2yz^3 + 7xy^2 - x^3 - 10$.

a 10-a problemă enunțată de Hilbert → alg. care să verifice dc. un polinom are rad. întregi.

până în 1936 → def. intuitivă a noțiunii de alg.

1936 → Church și Turing au formalizat noțiunea de alg.

Church ↓ calcul λ

Turing ↓ M. Turing

s-a dem. echiv. lor

1970 → Yuri Matijasevic → arată că nu există alg. pt pr 10 enunțată de Hilbert

$D = \{p \mid p$ este un polinom cu rād. întreagă$\}$.

? D este decidabil

$D \rightarrow$ este Turing acceptat.

$D_1 = \{p \mid p$ este un polinom peste x, cu rad. întreagă$\}$.

M.T. M_1 care acceptă D_1.

$M_1 \Rightarrow$ input : $f(p)$, $p \rightarrow$ polinom de var. x

evaluează p cu valorile $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$

Dacă $p(x)$ devine $0 \Rightarrow M_1$ acceptă

pt $D \rightarrow$ M.T. M care acceptă $\Rightarrow$ funct. analog. M.T. M_1.

$M_1 \rightarrow$ poate decide D_1 pt. că există o Th $\rightarrow$ rād. unui $p(x)$ se află în

$$\pm k \frac{c_{max}}{c_1}.$$

Problemă: vrem să planificăm vizitele unui comis voiajor în 10 orașe; se dă harta și distanțele lor $\Rightarrow$ itinerariul care minimizează întreaga dist.

n orașe $\rightarrow$ nr. itinerariilor posibile $(n-1)!$

10 orașe $\rightarrow$ $9! \cong 360000$

30 orașe $\rightarrow$ $29! \gg 10^{30}$