1) Recurența Merge Sort

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & , n = 1 \\ T([n/2]) + T([n/2]) + \Theta(n) & , \text{și altfel} \end{cases}$$

Considerăm că n este putere a lui 2. (se poate arăta că rotunjirile nu contează atunci când n nu e putere a lui 2).

Putem de asemenea scăpa de Θ și alege 2 funcții $1 \in \Theta(1)$ și $n \in \Theta(n)$, în locul notațiilor cu Θ.

Facem acest lucru pentru a evita eventuale greșeli de calcul care ar putea apărea din lucrul cu Θ.

Așadar putem rescrie:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & , n = 1 \\ 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n & , \text{altfel} \end{cases}$$

Ca să găsim o formă generală pentru $T(n)$ desfășurăm recurența:

$$T(n) = 2\boxed{T\left(\frac{n}{2}\right)} + n = 2\left[2T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{n}{2}\right] + n$$

$$= 2^2 T\left(\frac{n}{2^2}\right) + 2n$$

$$= 2^2\left[2T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \frac{n}{2^2}\right] + 2n =$$

$$= 2^3 \cdot T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 3n$$

Observăm un şablon şi ghicim:

$$T(n) = 2^k T\left(\frac{n}{2^k}\right) + kn \quad (\forall) k \in \mathbb{N}^+$$

Demonstrăm prin inducție că este corect:

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n = 2^1 T\left(\frac{n}{2^1}\right) + 1 \cdot n \quad [P(k=1) \text{ caz de bază}]$$

Demonstrăm acum $\underbrace{P(k-1)}_{\text{ip. inductivă}} \longrightarrow \underbrace{P(k)}_{\text{ce vrem să arătăm}}$

$$T(n) = 2^{k-1} T\left(\frac{n}{2^{k-1}}\right) + (k-1)n \overset{\text{substituim}}{=}$$

$$= 2^{k-1}\left[2 \cdot T\left(\frac{n}{2^k}\right) + \frac{n}{2^{k-1}}\right] + (k-1)n =$$

$$= 2^k \cdot T\left(\frac{n}{2^k}\right) + k \cdot n \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ Am ghicit forma generală pt $T(n)$

$\Rightarrow$ pentru $\frac{n}{2^k} = 1$, adică $k = \log_2 n$ avem

$$T(n) = \underbrace{2^{\log_2 n}}_{n} \cdot \underbrace{T(1)}_{1} + \log_2 n \cdot n = n + n \cdot \log_2 n \Rightarrow$$

$$T(n) \in \Theta(n \cdot \log_2 n)$$

2) Algoritmul lui Karatsuba de înmulțire a 2 nr.:
(Varianta simplă de înmulțire a 2 numere cu n cifre fiecare are complexitatea $O(n^2)$)

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n \; ; \; T(1) = 1$$

$$T\left(\frac{n}{2}\right) = 3T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{n}{2} \Big|_{\cdot 3} \quad 3T\left(\frac{n}{2}\right) = 3^2 T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{3}{2}\cdot n$$

$$\vdots$$

$$T\left(\frac{n}{2^k}\right) = 3T\left(\frac{n}{2^{k+1}}\right) + \frac{n}{2^k} \Big|_{\cdot 3^k} \quad 3^k T\left(\frac{n}{2^k}\right) = 3^{k+1} T\left(\frac{n}{2^{k+1}}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^k \cdot n$$

Când $n = 2^{k+1}$ ne oprim cu substituțiile și avem:

$$T(n) = 3^{k+1} T(1) + n + \frac{3}{2} n + \dots \left(\frac{3}{2}\right)^k n =$$

$$= 3^{k+1} + \underbrace{\sum_{i=0}^{k} \left(\frac{3}{2}\right)^i n}_{\text{progresie geometrică}} \, , \text{ unde } n = 2^{k+1} \Rightarrow$$

$$k = (\log_2 n) - 1$$

$$= 3^{\log_2 n} + n \cdot \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 n} - 1\right] \cdot \frac{1}{\left(\frac{3}{2} - 1\right)} =$$

$$= n^{\log_2 3} + \left(n^1 \cdot n^{\log_2 \frac{3}{2}} - n\right) \cdot 2 =$$

$$= n^{\log_2 3} + \left(n^{\log_2 \frac{6}{2}} - n\right) \cdot 2 \in \Theta\left(n^{\log_2 3}\right)$$

3) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + \log_2 n$

Not $n = 2^k$ (n este putere a lui 2)

$\Rightarrow T(2^k) = 2T(2^{\frac{k}{2}}) + k$

Fie $S(k)$ o altă recurență cu propietatea ca

$S(k) = T(2^k)$ $(\forall)$ $k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$

$$S(k) = 2\underbrace{T(2^{\frac{k}{2}})}_{S(\frac{k}{2})} + k = 2S\left(\frac{k}{2}\right) + k \Rightarrow$$

$S(k) = \Theta(k \log k)$ - calculat anterior (ex 1)

cum $S(k) = T(2^k) \in \Theta(k \log k) = \Theta(\log n \cdot (\log \log n))$

$k = \log_2 n$

4) Ciurul lui Eratostene.

```
int v[n] = {0}
for(int i = 2; i <= n; i++)
    if(v[i] == 0)
        for (int j = i+i; j <= n; j += i)
            v[j] = 1
```

S

$$S = \left(\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{5}\right] + \dots + \left[\frac{n}{p}\right] \right) \leq$$

$$\leq \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \frac{n}{5} + \dots + \frac{n}{p} = n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{p} \right)$$

Unde p este cel mai mare nr prim mai mic decât n.

Dar șirul $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{p} - \ln \ln n$ este convergent de unde deducem că complexitatea ciurului lui Eratostene $\in O(n \log \log n)$

5) $T(n) = \sqrt{n} \cdot T(\sqrt{n}) + n$; $T(1) = 1$; $T(2) = 1$

Ghicim $\Theta(n \log_2 \log_2 n) \ni T(n)$

$P(n)$: $\exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+$, $n_0 \in \mathbb{N}$,

$c_1 n \cdot \log_2 \log_2 n \le T(n) \le c_2 n \log_2 \log_2 n \quad (\forall)\, n \ge n_0$

1) Caz de bază $n_0 = ?$

$n_0 = 4$

$c_1 4 \cdot 1 \le 2 \cdot \underset{1}{\underset{\parallel}{T(2)}} + 4 \le c_2 \cdot 4 \cdot 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad 4c_1 \le 6 \le 4c_2 \quad (1)$ – Reținem constrângerile

2) Dem $P(\sqrt{n}) \rightarrow P(n)$

$P(\sqrt{n})$:

$c_1 \sqrt{n} \log_2 \log_2 \sqrt{n} \le T(\sqrt{n}) \le c_2 \sqrt{n} \log_2 \log_2 \sqrt{n} \quad / \cdot \sqrt{n} + n$

$c_1 \cdot n \log_2 \log_2 \sqrt{n} + n \le T(n) \le c_2 \cdot n \cdot \log_2 \log_2 \sqrt{n} + n$

$\log_2 \log_2 \sqrt{n} = \log_2 \cdot \log_2 n^{\frac{1}{2}} = \log_2 \frac{1}{2} \cdot \log_2 n = \log_2 \log_2 n - \underset{1}{\underset{\parallel}{\log_2 2}}$

$\Rightarrow \overset{I}{c_1 \cdot n \log_2 \log_2 n - c_1 n + n} \le T(n) \le \overset{II}{c_2 \cdot n \cdot \log_2 \log_2 n - c_2 n + n}$

I $c_1 n \log_2 \log_2 n + n(1 - c_1) \ge c_1 n \log_2 \log_2 n$, pentru $c_1 \le 1$ (2)

II $c_2 n \cdot \log_2 \log_2 n + n(1 - c_2) \le c_2 n \cdot \log_2 \log_2 n$, pentru $c_2 \ge 1$ (3)

$\Rightarrow$ Dacă (2) și (3) adevărate

$\Rightarrow c_1 n \cdot \log_2 \log_2 n \leq T(n) \leq c_2 n \log_2 \log_2 n$ adică $P(n)$

Acum trebuie să vedem dacă există constante care să respecte (1), (2) și (3)

(1) $4c_1 \leq 6 \leq 4c_2$

(2) $c_1 \leq 1$

(3) $c_2 \geq 1$

$\Rightarrow$ Observăm $c_1 \in [0,1]$, $c_2 \in [\frac{6}{4}, \infty)$ $\Rightarrow$ există

$\Rightarrow T(n) \in \Theta(n \cdot \log \log n)$

Această recurență nu poate fi rezolvată cu Th. Master!