Gramatici Independente de Context

Def.

$G = (V, \Sigma, R, S)$

$A \in V - \Sigma$, $u \in V^*$, $A \underset{G}{\rightarrow} u$, $(A, u) \in R$

$\forall u, v \in V^*$, $u \underset{G}{\Rightarrow} v$ $\Leftrightarrow$ $\exists x, y, v' \in V^*$, $A \in V - \Sigma$ a.î.

$u = xAy$

$v = xv'y$

$A \underset{G}{\rightarrow} v'$

Def.

Relația $\overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}}$ este închiderea reflexivă și tranzitivă $\underset{G}{\Rightarrow}$

Def.

$L(G) = \{ w \in \Sigma^* \mid S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} w \}$ limbajul generat de gram. G.

Obs.

$w_1 \underset{G}{\Rightarrow} w_2 \underset{G}{\Rightarrow} \dots \underset{G}{\Rightarrow} w_n \Rightarrow$ o derivare în G a lui w_n din w_1

ex: E

$G=(V, \Sigma, R, S)$

$V = \{x, 1, 2, +, *, (,), T, F, E\}$

$\Sigma = \{x, 1, 2, +, *, (,)\}$

$R = \{ E \to E+T \mid T$

$T \to T*F \mid F$

$F \to (E) \mid x1 \mid x2 \}$

? $(x_1 * x_2 + x1) * (x_1 + x_2)$

$E \Rightarrow T$

$\Rightarrow T*F$

$\Rightarrow T*(E)$

$\Rightarrow T*(E+T)$

$\Rightarrow T*(T+T)$

$\Rightarrow T*(F+T)$

$\Rightarrow T*(x_1+T)$

.... $\Rightarrow T*(x_1+x_2)$

$\Rightarrow (E)*(x_1+x_2)$

$\Rightarrow (E+T)*(x_1+x_2)$

$\Rightarrow (E+F)*(x_1+x_2)$

$\Rightarrow (E+x_1)*(x_1+x_2)$

$\Rightarrow (T+x_1)*(x_1+x_2)$

- - — -

$\Rightarrow (x_1*x_2+x_1)*(x_1+x_2)$?

ex:

$G = (V, \Sigma, R, S)$

$V = \{S, (,)\}$

$\Sigma = \{(,)\}$

$R = \{ S \to e$

$S \to SS$

$S \to (S)$

$\}$

$S \Rightarrow SS \Rightarrow S(S) \Rightarrow S((S)) \Rightarrow S(()) \Rightarrow (S)(()) \Rightarrow ()(())$

? $L(G)$ regulat

pp $L(G)$ regulat

$L(G) \cap (^*)^*$ $\Rightarrow$ (Th. închidere) regulat

$L(G) \cap (^*)^* = \{ (^n)^n \mid n \geq 0 \} \to$ regulat

Limbaje regulate și Limbaje Indep. de Context

Def:
O GiC., $G = (V, \bar{Z}, R, S)$ este o gram. regulată $\Leftrightarrow R \subseteq (V - \bar{Z}) * \bar{Z}^* ((V - \bar{Z}) \cup \{\varepsilon\})$.

ex:
$G = (V, \bar{Z}, R, S)$

$V = \{S, A, B, a, b\}$

$\bar{Z} = \{a, b\}$

$R = \{ S \to bA \mid aB \mid \varepsilon$

$A \to abaS$

$B \to babS$

$\}$

$S \Rightarrow bA \Rightarrow babaS \Rightarrow babaaB \Rightarrow babaababS \Rightarrow babaabab$

$L(G) = (abab \cup baba)^*$

? gram are reguli care în p. dr. conțin (eventual) 1 singur neterminal (primul sau ultimul) din șir => NU este garantat a fi regulată.

ex: $S \to A$

$A \to 01 \mid 0B$ $\quad L = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$

$B \to A1$

Teorema

Un limbaj este regulat <=> generat de o gram. regulată.

dem.

=>

pp. L este limbaj regulat => $\exists M$, AFD, a.î. $L = L(M)$

$M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$ și construiesc o GIC, $G = (V, \Sigma, R, S)$

$V = \Sigma \cup K$

$S = s$

$R = \{q \to ap \mid \delta(q, a) = p\} \cup \{q \to e \mid q \in F\}$

pp. $\Sigma \cap K = \emptyset$

Idee: regulile lui G sunt def. ca deriv. din G să simuleze tranzițiile lui M

$\forall \tau_1, \dots, \tau_m \in \Sigma, p_0, \dots, p_m \in K$

$(p_0, \tau_1 \dots \tau_m) \vdash_M (p_1, \tau_2 \dots \tau_m) \vdash_M \dots \vdash_M (p_m, e)$

$\Leftrightarrow$

$p_0 \underset{G}{\Rightarrow} \tau_1 p_1 \underset{G}{\Rightarrow} \tau_1 \tau_2 p_2 \underset{G}{\Rightarrow} \dots \underset{G}{\Rightarrow} \tau_1 \dots \tau_m p_m$

pt că $\delta(q, a) = p \Leftrightarrow q \to ap$

Lem. $L(M) \subseteq L(G)$

pp. $w \in L(M) \Rightarrow (A, w) \vdash_M^* (p, e)$, $p \in F$

$\Rightarrow A \overset{*}{\Rightarrow} wp \;\vdash\; A \overset{*}{\Rightarrow} w$, $w \in L(G)$

$p \to e \in R$

$L(G) \subseteq L(M)$

pp $w \in L(G)$

$S \underset{G}{\overset{*}{\Rightarrow}} w \Rightarrow A \underset{G}{\overset{*}{\Rightarrow}} w$

Regula utilizată în ultimul pas al deriv. $p \to e$, $p \in F$ $\vdash A \overset{*}{\Rightarrow} wp \Rightarrow w$

Fie $G=(V, \Sigma, R, S)$ gram. regulată

? M a.î. $L(M)=L(G)$

Idea → derivările din G mimate de ființă A.F.

Fie $M=(K, \Sigma, \Delta, s, F)$

$K=(V-\Sigma) \cup \{f\}$

$s=S$

$F=\{f\}$

$\Delta=\{(A, w, B) \mid A \to wB \in R, A, B \in V-\Sigma, w \in \Sigma^*\}$

$\cup \{(A, w, f) \mid A \to w \in R, A \in V-\Sigma, w \in \Sigma^*\}$

$\forall A_1, .., A_n \in V-\Sigma, w_1, .., w_n \in \Sigma^*$

$$A_1 \underset{G}{\Rightarrow} w_1 A_2 \underset{G}{\Rightarrow} w_1 w_2 A_3 \underset{G}{\Rightarrow} \cdots \underset{G}{\Rightarrow} w_1 \cdots w_{n-1} A_n \underset{G}{\Rightarrow} w_1 \cdots w_n$$

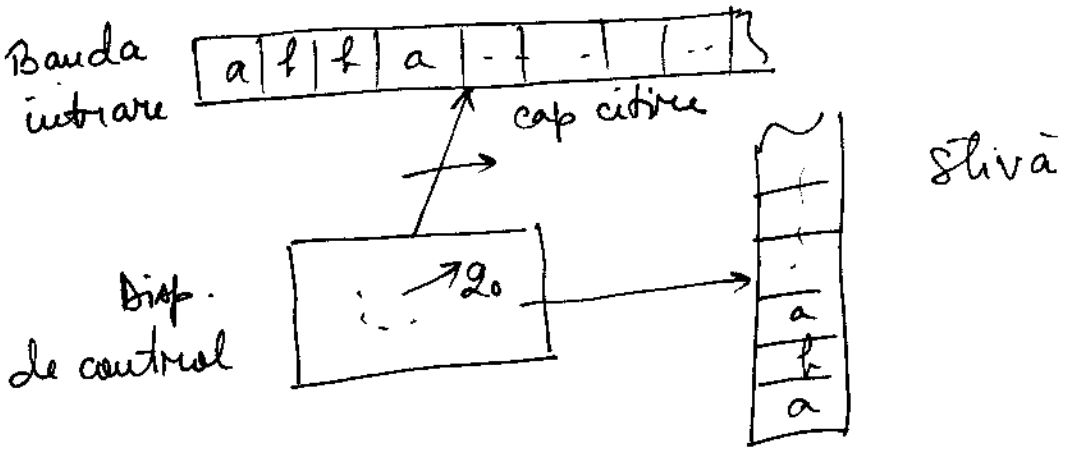
$$\Leftrightarrow (A_1, w_1 \cdots w_n) \vdash_M (A_2, w_2 \cdots w_n) \vdash_M \cdots \vdash_M (A_n, w_n) \vdash_M (f, e)$$

$w \in L(G), w \in \Sigma^*, S \overset{*}{\Rightarrow} w \Rightarrow (S, w) \vdash_M^* (f, e)$ a.î. $w \in L(M)$

$w \in L(M)$ a.î. $(S, w) \vdash_M^* (f, e) \Rightarrow S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} w$ adică $w \in L(G)$.

Automate cu stivă (pushdown)

Fie limbajul $\{ww^R \mid w \in \Sigma^*\}$.



Def.

Un automat pushdown este un tuplu $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$

$K \rightarrow$ mulțimea finită a stărilor

$\Sigma \rightarrow$ alfabet de intrare

$\Gamma \rightarrow$ alfabetul stivei

$s \in K \rightarrow$ st. inițială

$F \subseteq K \rightarrow$ mulțimea st. finale

$\Delta \rightarrow$ relația de tranziție

$\Delta \subseteq (K \times \bar{\Sigma}^* \times \Gamma^*) \times (K \times \Gamma^*)$

$((p, u, \beta), (q, \gamma)) \in \Delta$, M în st. p cu β în vf. stivei poate citi u de pe banda de intrare, în locul lui β cu γ pe stivă și intra în st. q.

Caz. particulare:

$((p, u, e), (q, a))$ adg. 'a' pe stivă

$((p, u, a), (q, e))$ scoate 'a' de pe stivă

Def.
O configurație este un element din $K \times \bar{\Sigma}^* \times \Gamma^*$

Def.
Un A.P.D. M acceptă $w \in \bar{\Sigma}^* \iff (s, w, e) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (p, e, e)$, $p \in F$.

Def.

Limbajul acceptat de A.P.D. M este mulțimea șirurilor acceptate de M.

ex:

A.F. poate fi considerat un A.P.D. care nu lucrează cu stiva.

$M = (K, \Sigma, \Delta, \Gamma, \Delta, F)$ A.P.D. , $\Gamma = \emptyset$

$M' = (K, \Sigma, \Delta', \Delta, F)$ A.F.

$\Delta' = \{((p, u, e), (q, e)) \mid (p, u, q) \in \Delta\}$

ex: ? M care acceptă $\{wcw^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

$M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, \Delta, F)$

$K = \{\Delta, f\}$,

$\Sigma = \{a, b, c\}$

$\Gamma = \{a, b\}$

$F = \{f\}$

Δ:

1. $((s, a, e), (s, a))$
2. $((s, b, e), (s, b))$
3. $((s, e, e), (f, e))$
4. $((f, a, a), (f, e))$
5. $((f, b, b), (f, e))$

Stare	Intrare	Stiva	Transz. utilizată
s	abbcbba	e	—
s	bbcbba	a	1
s	bcbba	ba	2
s	cbba	bba	2
s	bba	bba	3
f	ba	ba	5
f	a	a	5
f	e	e	4
f			

? M a.î. $L(M) = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$

L(A.P.D.) și L(Gi.C)

Fie $G = (V, \Sigma, R, S)$

$w \in L(G) \Leftrightarrow w \in \Sigma^*$ și există o derivare

$$S \Rightarrow w_1 \Rightarrow w_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow w_{n-1} \Rightarrow w$$

$w_1, \dots, w_{n-1} \in V^* \ (n>0)$

Derivare stg → la fiec. pas în locuim cel mai din stg. neterm. din șir

ex: $V = \{S, (,)\}$

$\Sigma = \{(,)\}$

$R = \{S \to e \mid SS \mid (S)\}$

$$S \Rightarrow SS \Rightarrow (S)S \Rightarrow ()S \Rightarrow ()(S) \Rightarrow ()()$$

Formal: $\alpha \underset{G}{\overset{L}{\Rightarrow}} \beta$, $\alpha, \beta \in V^* \Leftrightarrow \alpha = \alpha_1 A \alpha_2$, $\beta = \alpha_1 \gamma \alpha_2$,

$A \to \gamma$, $\alpha_1 \in \Sigma^*$

$\overset{*L}{\underset{G}{\Rightarrow}}$ închiderea reflexivă și tranzitivă a $\overset{L}{\underset{G}{\Rightarrow}}$

Lema

Pt orice GIC $G=(V, \Sigma, R, S)$ și orice șir $w \in \Sigma^*$, $S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} w \Leftrightarrow$

$S \overset{*L}{\underset{G}{\Rightarrow}} w$.