Proprietăți ale LIC

Propr. de închidere

Teorema

LIC sunt închise în rap. cu opțiile de reuniune, concatenare, Kleene Star.

dem.

Fie $G_1 = (V_1, \Sigma_1, R_1, S_1)$

$G_2 = (V_2, \Sigma_2, R_2, S_2)$

pp. că $V_1 - \Sigma_1$ și $V_2 - \Sigma_2$ sunt disjuncte.

Reuniune

Fie S un nou simbol, $G = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, R_1 \cup R_2 \cup \{S \to S_1 | S_2\}, S)$

Ad. $L(G_1) \cup L(G_2) = L(G)$.

Cum reg. coresp. lui S sunt $S \to S_1$ și $S \to S_2$, $S \overset{*}{\Rightarrow} w$, $w \in (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)^*$

dc și numai dc fie $S_1 \overset{*}{\Rightarrow} w$ fie $S_2 \overset{*}{\Rightarrow} w$. Cum G_1 și G_2 au mulțimi de neterminale disjuncte, $S \underset{G}{\overset{*}{\Rightarrow}} w \iff S_1 \underset{G_1}{\overset{*}{\Rightarrow}} w$; analog pt. G_2.

<u>Concatenare</u>

Construcție similară; $L(G_1)L(G_2)$ este generat de

$$G = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\},\ \Sigma_1 \cup \Sigma_2,\ R_1 \cup R_2 \cup \{S \to S_1 S_2\},\ S)$$

<u>Kleene star</u>

$L(G_1)^*$ este generat de

$$(V_1,\ \Sigma_1,\ R_1 \cup \{S_1 \to e,\ S_1 \to S_1 S_1\},\ S_1)$$

<u>Teorema</u>

Intersecția unui LIC cu un LR este un LIC.

<u>dem.</u>

Fie $L \to$ LIC

$R \to$ LR

$L = L(M_1)$, $M_1 = (K_1, \Sigma_1, \Gamma_1, \Delta_1, s_1, F_1)$

$R = L(M_2)$, $M_2 = (K_2, \Sigma_2, \delta_2, s_2, F_2)$

<u>Idee</u>: de a combina M_1 și M_2 într-un APD M care realizează opțiunile lui M_1 și M_2 în paralel și acceptă dc amândouă ar accepta.

$M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$

$K = K_1 \times K_2$

$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$

$\Gamma = \Gamma_1$

$s = (s_1, s_2)$

$F = F_1 \times F_2$

$\Delta \ni (((q_1, q_2), u, \beta), ((p_1, p_2), \gamma))$

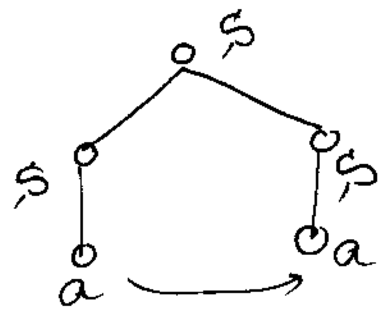
$\Leftrightarrow$ $((q_1, u, \beta), (p_1, \gamma)) \in \Delta_1$

$(q_2, u) \vdash^*_{M_1} (p_2, e)$

Propr. de periodicitate ale LiC

Fie $G = (\{S\}, \{a\}, \{S \to SS \mid a\}, S)$

$$S \underset{G}{\Rightarrow} SS \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} aa$$

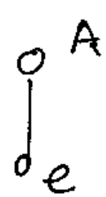


Def.
Fie $G = (V, \Sigma, R, S)$ o GiC. Def. arborele de derivare astfel:

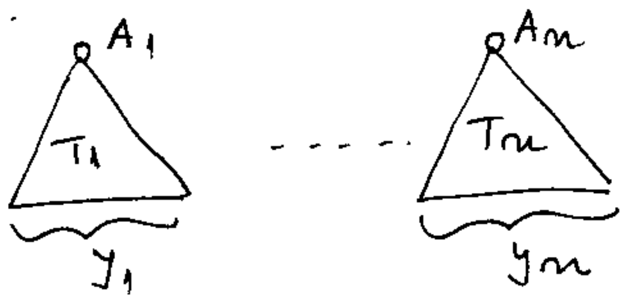
1° $\circ\ A$

arb. de deriv. pt $\forall A \in V$

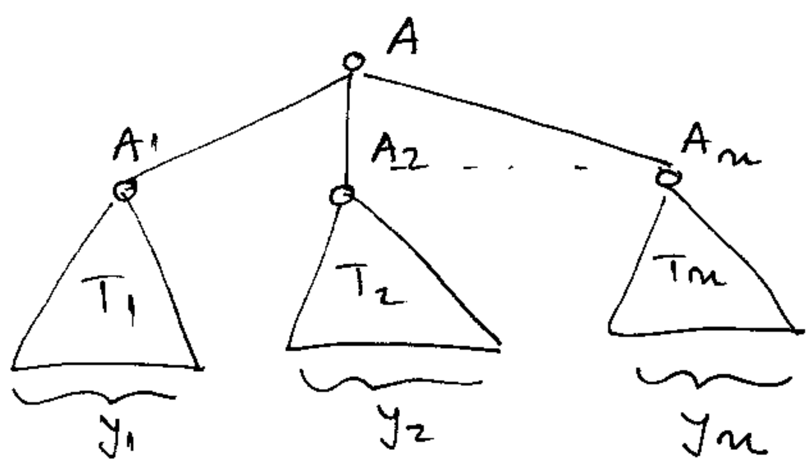
2° $A \to e \in R$



3° Dc.



sunt arb. de derivare $(n \geq 1)$ cu rădăcini $A_1 \ldots A_n$ și șiruri generate $y_1 \ldots y_n$, $A \to A_1 \ldots A_n \in R$,



4° Nimic altceva nu este un arb. de derivare ex: $G = (V, \Sigma, R, S)$

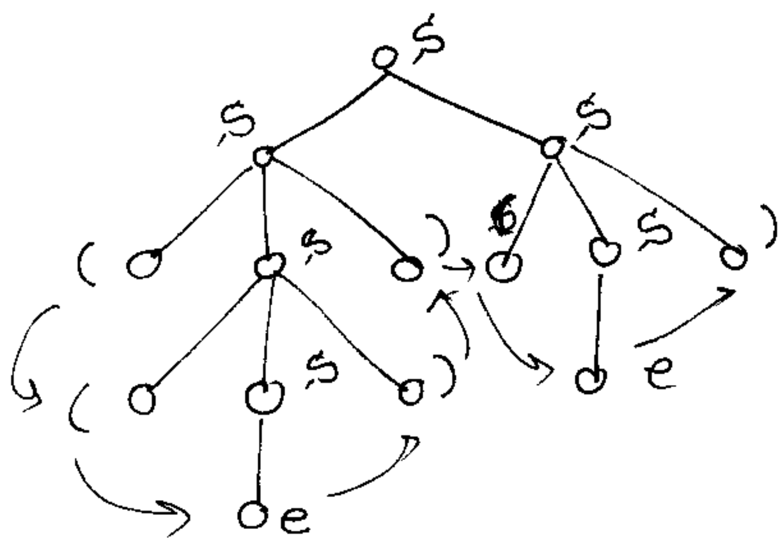
$V = \{S, (,)\}$

$\Sigma = \{(,)\}$

$R = \{S \rightarrow SS \mid (S) \mid e\}$

$S \overset{*}{\Rightarrow} (())()$

$S \underset{G}{\Rightarrow} SS \underset{G}{\Rightarrow} (S)S \underset{G}{\Rightarrow} ((S))S \underset{G}{\Rightarrow} (())S \underset{G}{\Rightarrow} (())(S) \underset{G}{\Rightarrow} (())()$



Teorema (Lema de pompare)

Fie G o GIC. Atunci există un număr K depinzând de G a.î. $\forall\, w \in L(G)$, $|w| > K$ poate fi scris ca $w = uvxyz$ a.î. $v \neq e$ sau $y \neq e$ și $uv^nxy^nz \in L(G)$, $\forall\, n \geq 0$.

Dem.

Fie $G = (V, \Sigma, R, S)$

este suficient să dem. că $\exists K$ a.î. $\forall\, w \in L(G)$, $|w| > K$, are o deriv. de forma:

$$S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} uAz \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} uvAyz \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} uvxyz$$

unde $u, v, x, y, z \in \Sigma^*$, $A \in V - \Sigma$, $v \neq e$ sau $y \neq e$.

Atunci derivarea $A \overset{*}{\Rightarrow} vAy$ poate fi repetată de oricâte ori pt. a obține uv^nxy^nz.

Fie $p = \max\{|\alpha| \mid A \to \alpha \in R\}$

$\forall m \geq 1$, un arb. de derivare de înălțime m poate avea cel mult p^m frunze, deci poate genera un șir de lg. cel mult p^m.

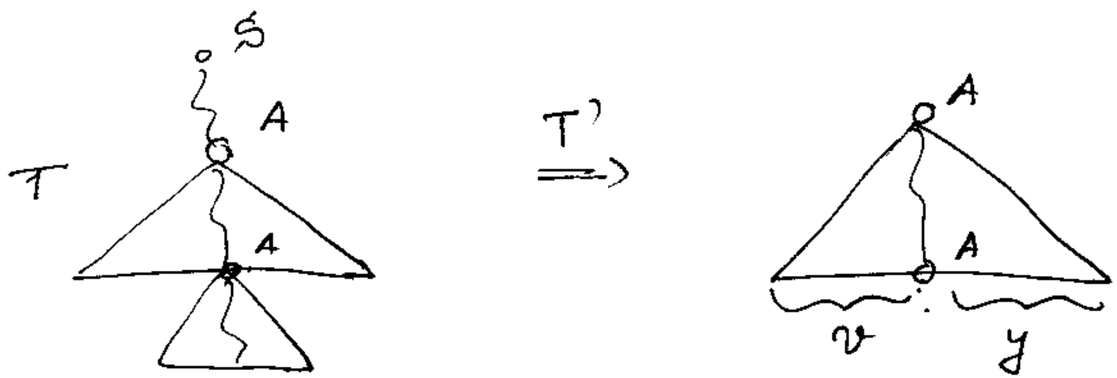
Fie $m = |V - \Sigma|$

$K = p^m$

pp $|w| > K$

Fie T un arb. de deriv. cu răd. S și șir generat w.

At. T are cel puțin o cale cu m. mult de $|V - \Sigma| + 1$ noduri, deci cel puțin o cale care include 2 noduri etichetate cu ac. simbol neterminal $A \in V - \Sigma$.



$v, y \in \Sigma^*$

Este posibil ca $v = y = \varepsilon$, dar nu poate fi cazul pt. orice alegere a căii și orice 2 noduri pe ea cu ac. etichetă.

Dc $v = y = \varepsilon$, at. arb. T' poate fi scos din T, fără a schimba șirul generat de arbore, agățând arb. de derivare cu nodul cel mai jos ca rădăcină, de nodul A de mai sus. Dc. toate căile de lg. $> m$ ar putea fi scurtate astfel, fără a schimba șirul generat, am putea obține un arb. care generează w cu înălțime $< m$ $\Rightarrow$ imposibil.

<u>Teorema</u>

$L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ nu este LIC.

<u>dem.</u>

prin reducere la absurd:

pp. $L = L(G)$, $G \to$ GIC

Fie $k(G)$ și $n > k/3$

$w = a^n b^n c^n \in L(G)$ are o repreз. $w = uvxyz$ a.î. $v \neq e$ sau $y \neq e$ și

$uv^ixy^iz \in L(G)$, $\forall i \geq 0$.

<u>presupunem că L</u> => d.c. v sau y conține 2 simb. din $\{a, b, c\}$ => uv^2xy^2z conține

un 'b' înainte de 'a' sau un 'c'.

<u>Teorema</u>

Limbajele indep. de context nu sunt închise în rap. cu intersecția sau complementarea.

<u>dem.</u>

$L_1 = \{a^n b^n c^m : n, m \geq 0\}$ | LIC

$L_2 = \{a^m b^n c^n : m, n \geq 0\}$.

$L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ => ~~LIC~~

Dc. LIC ar fi fost închise în rap. cu complementarea =>

ar fi fost închise în rap. cu intersecția.

$L_1 \cap L_2 = \Sigma^* - ((\Sigma^* - L_1) \cup (\Sigma^* - L_2))$

Proprietăți algoritmice

Teorema

Există algoritmi care pot răspunde la urm. întrebări ref. la GIC.

a) Pt o GIC G și un șir w, $w \in L(G)$?

b) $L(G) = \emptyset$?

Obs:

$L(G_1) = L(G_2)$ nu poate fi rezv. alg.

Dem.

a) Idee: inspectăm toate derivările posibile până la o an. lg, respectiv toți arb. de deriv. până la o an. dimens.

Dc. fiec regulă $A \to u$, $u \in \Sigma$ sau $|u| \geq 2$ $\Rightarrow$ nicio ~~de~~ derivare de lg $2|w|-1$ nu trebuie inspectată.

Pot. rezolva dc convertesc G într-o gram. echivalentă care nu are reguli $A \to u$, unde ~~u~~ $= e$ sau $u \in V - \Sigma$.

Elimin $A \to e$ cu excepția $S \to e$ dc $e \in L(G)$.

Fie $G = (V, \Sigma, R, S)$

$A \to e$

$B \to uAv$, $u, v \in V^*$

adg. $B \to uv$ la R

alg. se repetă până când nu mai pot fi adg. reguli.

la sf elimin $A \to e$.

Fie G' gram. obț. prin astfel de transf. Are urm. propr:

1° $L(G') = L(G)$

2° $e \in L(G)$, $S \to e \in R(G')$

3° $\forall w \in L(G') \setminus \{e\}$ are o deriv (arb. de deriv) în care nu este ut. $A \to e$.

Elim. reg. $A \to B$.

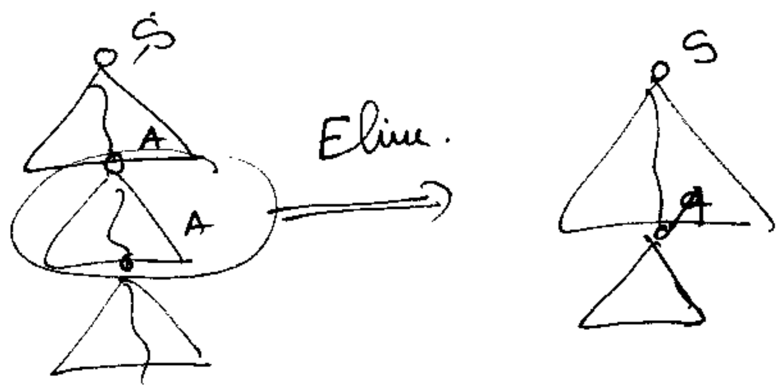
$\forall A, B$, dc $A \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} B$

$\left.\begin{array}{l} B \to u \\ A \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} B \end{array}\right\} \Rightarrow$ se adg. $A \underset{G}{\to} u$

La sf. elimin reg. $A \to B$

(1) Fie $G = (V, \Sigma, R, S) \overset{?}{\Rightarrow}$ generează $L(G) \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists$ arb. de deriv. cu șir generat (terminale) de înălțime cel mult $|V - \Sigma|$.



Proc. poate fi repetat $\Rightarrow$ arb de înalt $|V - \Sigma|$. $\Rightarrow \forall$ arb. de înalt $|V - \Sigma|$ poate fi inspectat.