Analiza algoritmilor – Test 3

1. **(3p)** Fie problemele de decizie A, B, C despre care știm că $A \leq_p B$ și $B \leq_p C$. Ce puteți spune despre apartenența fiecărei probleme la clasele de probleme P, NP, NPC, NPD și despre relațiile dintre aceste clase de probleme, în următoarele situații:
   - **a.** $A \in P$ și $C \in NP$
   - **b.** $A \in NPC$ și $B \in NP$
   - **c.** $B \in NPD$ și $C \in P$

2. **(3p)** Se dau 2 grafuri neorientate ponderate $G_1 = (V_1; E_1)$, $G_2 = (V_2; E_2)$ și întregii pozitivi p, k.
   O ***MulțimeSubgr*** a lui G_1 este formată din subgrafurile $G_{1,\,p}$, $G_{1,\,2p}$, ..., $G_{1,\,kp}$ ale lui G_1, astfel încât $G_{1,\,jp} = (V_{1,\,jp}; E_{1,\,jp})$, $card(V_{1,\,jp}) = j*p$, j=1..k și fiecare $G_{1,\,jp}$ conține o muchie de același cost cu o muchie din $G_{2,\,p}$. $G_{2,\,p} = (V_{2,\,p}; E_{2,\,p})$ este un subgraf al lui G_2, astfel încât $card(V_{2,\,p}) = p$ și suma costurilor muchiilor din $G_{2,\,p}$ este cel mult k.
   Arătați că problema următoare este în clasa NP: să se determine dacă există o ***MulțimeSubgr*** pentru graful G_1.

3. **(4p)** Fie problema **ACOPERIRE-PARĂ**: Se dă un graf neorientat G' = (V', E') în care gradul fiecărui nod este par și întregul pozitiv k'. Există o submulțime *S'* de noduri, card(S') = k', astfel încât fiecare muchie are <u>cel puțin</u> un capăt în S'?
   - **a.** Demonstrați că pentru orice graf, numărul nodurilor având un grad impar este par.
   - **b.** Folosind proprietatea anterioară, demonstrați că ACOPERIRE-PARĂ este în clasa de complexitate NPC. Pentru aceasta, reduceți ACOPERIRE la ACOPERIRE-PARĂ;
     ACOPERIRE: Se da un graf neorientat G = (V, E) și întregul pozitiv k. Există o submulțime *S* de noduri, card(S) = k, astfel încât fiecare muchie are <u>cel puțin</u> un capăt în S?

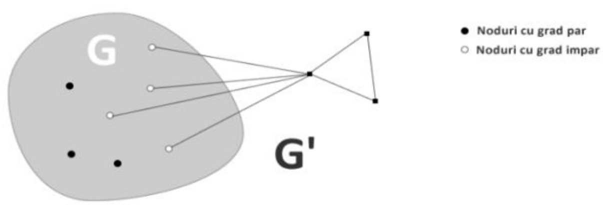

Figura 1 - O posibilă schemă de reducere

4. **(2p)** Fie următoarea transformare de la problema K-CLICĂ la problema SAT. Produce această transformare o reducere polinomială corectă? Argumentați.
   K- CLICĂ: Se dă un graf neorientat G = (V, E) și un număr k. $\exists\ V' \subseteq V, |V'| = k$ a.i. V' să formeze un graf complet?
   SAT: Dându-se o formulă booleană F în Forma Normal Conjunctivă (FNC), există o asociere a variabilelor la valori de adevăr astfel încât formula F să fie adevărată?
   O formulă în FNC este o conjuncție de clauze. O clauză este formată din literali conectați prin operatorul logic ∨ (sau). Un literal este reprezentat de o variabilă booleană sau de negarea acesteia. De exemplu, formula $F = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2)$ este adevărată pentru $x_1 = 1$ și indiferent de valoarea de adevăr a lui x_2.

> Transformare:
> - $x_1, x_2, \ldots x_n$ - câte o variabilă pentru fiecare nod din graf. x_i este True dacă nodul i este în V'
> - $\forall i, j \leq n, (i,j) \notin E \rightarrow\ (\overline{x_i} \vee \overline{x_j})$
> - $\forall\{i_1, i_2, \ldots i_{n-k}\}$ o submulţime a lui V $\rightarrow\ (x_{i_1} \vee x_{i_2} \vee \ldots \vee x_{i_{n-k}})$
> - $\forall\{i_1, i_2, \ldots i_{k+1}\}\ o\ submultime\ a\ lui\ V \rightarrow\ (\overline{x_{i_1}} \vee \overline{x_{i_2}} \vee \ldots \vee \overline{x_{i_{k+1}}})$
>
> Toate clauzele generate mai sus sunt unite prin ∧ pentru a forma intrarea problemei SAT.