Serii: CA, CD - 18 noiembrie 2017

Analiza Algoritmilor
Test 1

1. (2p) Fie mulţimile $A,\ B,\ C \subseteq N$. Ştiind că:
   i. $A \cap B = B \cap C = A \cap C = \varnothing$, și
   ii. $A \cup B \cup C = N$, şi
   iii. $A,\ B,\ C$ sunt mulţimi recursiv enumerabile,

demonstraţi că A, B, C sunt recursive.

Rezolvare:

Din iii. => Exista $P_A,\ P_{B,} P_C$ programele care decid multimile respective (intorc 1 daca elementul apartine multimii, altfel nu se termina)

Din B - R.E. si C - R.E. => $B \cup C$ - R.E. (justificare: se poate scrie un program $P_{B \cup C}(x)$ care sa ruleze in paralel $P_B(x)\ si\ P_C(x)$, si care se termina cand unul dintre cele doua programe se termina).

Dar $B \cup C = N \setminus A$ pentru ca A, B, C sunt disjuncte intre ele (din i.) si reuninea lor este multimea numerelor naturale (din ii.).

Din A - R.E. si $N \setminus A$ - R.E. => A - R. (justificare: se poate construi programul $P'_A(x)$ care ruleaza in paralel $P_A(x)$ si $P_{N \setminus A}(x)$; daca $P_A(x)$ se termina primul, atunci x εA, deci programul P'_A intoarce 1 ; altfel, daca $P_{N \setminus A}(x)$ se termina primul, atunci x $\varepsilon N \setminus A$, deci P'_A intoarce 0).

q.e.d.

Analog pentru multimile B si C, bazandu-ne pe proprietatile de asociativitate si comutativitate ale operatiei de reuniune.

2. (4p) Rezolvaţi recurenţa de complexitate folosind una dintre metodele studiate, exceptând metoda substituţiei, și demonstraţi complexitatea găsita, prin metoda substituţiei:

$$T(n) = 18\ T(\sqrt[18]{n}) + log_{11}^{2017} n$$

Obs: Este suficient să o încadraţi într-o clasă de complexitate ‘O’ (‘o’ mare).

Rezolvare:

Partea I

Alegem, de exemplu, **metoda iterativa**. Dezvoltam termenii recurentei:

$$T(n) = 18\ T(n^{\frac{1}{18}}) + log_{11}^{2017} n$$

$$18T(n^{\frac{1}{18}}) = 18^2 T(n^{\frac{1}{18^2}}) + 18 log_{11}^{2017} n^{\frac{1}{18}}$$

...

$$18^k T(n^{\frac{1}{18^k}}) = 18^{k+1} T(n^{\frac{1}{18^{k+1}}}) + 18^k log_{11}^{2017} n^{\frac{1}{18^k}}$$

...

$$18^h T(n^{\frac{1}{18^h}}) = 18^h log_{11}^{2017} n^{\frac{1}{18^h}}$$

$\oplus$

$$T(n) = log_{11}^{2017} n\ (1 + \frac{1}{18^{2016}} + \frac{1}{18^{2 \cdot 2016}} + \dots + \frac{1}{18^{h \cdot 2016}})$$

Ecuatia din paranteza reprezinta suma termenilor unei progresii geometrice, cu ratia $\frac{1}{18^{2016}}$.

$T(n) = log_{11}^{2017} n\ (\frac{1(1-(\frac{1}{18^{2016}})^{h+1})}{1-\frac{1}{18^{2016}}})$; dar cand $n \to \infty,\ h \to \infty$, deci termenul din paranteza tinde la o constanta.

Deci $T(n) \in \Theta(log_{11}^{2017} n)$

Partea a II-a

Conform **Obs.**, este suficient sa demonstram, prin **metoda subtitutiei**:
$P(n) : T(n) \in O(log_{11}^{2017} n)$

C.B. $P(1)$ - nu e un caz valid.

$P(a) : T(a) = log_{11}^{2017} a \in O(log_{11}^{2017} a)$, cu $a =\ ct.$, adevarat. In particular, a poate fi 2, dar nu putem sti valoarea reala a cazului de baza, decat daca am avea acces la algoritmul reprezentat prin aceasta recurenta.

P.I.

I.I. Pp. adevarata $P(n^{\frac{1}{18}}) : T(n^{\frac{1}{18}}) \in O(log_{11}^{2017} n^{\frac{1}{18}})$

Dorim sa demonstram $P(n) : T(n) \in O(log_{11}^{2017} n)$

Pornind de la $P(n^{\frac{1}{18}})$, conform definitiei clasei de complexitate $'O'$ putem scrie ca
$\exists\, c \in \Re_{+}^{*},\ n_0 \in \aleph$, a.i. $0 \leq T(n^{\frac{1}{18}}) \leq c \cdot log_{11}^{2017} n^{\frac{1}{18}},\ \forall n \geq n_0$.

Prelucram inecuatia, inmultind cu 18, si apoi adunand $log_{11}^{2017} n$:

$log_{11}^{2017} n \le 18 \cdot T(n^{\frac{1}{18}}) + log_{11}^{2017} n \le 18 \cdot c \cdot log_{11}^{2017} n^{\frac{1}{18}} + log_{11}^{2017} n$

Dar $log_{11}^{2017} n \ge 0,\ \forall n$, termenul din mijloc e chiar $T(n)$, iar:

$18 \cdot c \cdot log_{11}^{2017} n^{\frac{1}{18}} + log_{11}^{2017} n \le (c+1) \cdot log_{11}^{2017} n$.

Este suficient sa aratam ca exista o constanta $c' \in \mathfrak{R}_+^*$, a.i.

$0 \le T(n) \le c' \cdot log_{11}^{2017} n,\ \forall n \ge n_0$, pentru a demonstra $P(n)$. Fie $c' = c + 1$; conform echivalentelor demonstrate mai sus, rezulta $P(n)$ adevarata, $\forall n \ge n_0$.

3. (4.5p) Stabiliţi valoarea de adevăr pentru propoziţiile de mai jos şi demonstraţi.
   a) $18^{n-11} \in \Omega(18^n)$

Rezolvare:
cu limita:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{18^{n-11}}{18^n} = \frac{1}{18^{11}} = const. \Rightarrow 18^{n-11} \in \Omega(18^n)$$

cu definitii:

$\exists$ constanta c $\in$ R_+, c > 0, si $n_0 \in$ N a.i. pentru $\forall$ n ≥ n_0 avem ca $0 \le c \cdot 18^n \le 18^{n-11}$
$\Rightarrow c \le \frac{1}{18^{11}}$, deci am gasit constanta c din definitie $\Rightarrow 18^{n-11} \in \Omega(18^n)$

   b) $n^2 log_2\ log_2\ n \in O(11^{log_2 \sqrt{n}})$

Rezolvare:
cu limita:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 log_2\ log_2\ n}{11^{log_2 \sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 log_2\ log_2\ n}{11^{log_2 11 \cdot log_{11} \sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 log_2\ log_2\ n}{\sqrt{n}^{log_2 11}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 log_2\ log_2\ n}{n^{\frac{1}{2} \cdot log_2 11}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} n^{2 - log_2 \sqrt{11}} log_2\ log_2\ n$$

Intrebarea la care trebuie sa raspundem acum devine: cum este exponentul lui n fata de zero?

$$exp = 2 - log_2 \sqrt{11} = log_2 4 - log_2 \sqrt{11} = log_2 \frac{4}{\sqrt{11}} = log_2 \sqrt{\frac{16}{11}} = \frac{1}{2} \cdot log_2 \frac{16}{11}$$

dar $\frac{16}{11} \ge 1 \Rightarrow exp > 0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n^{exp} log_2\ log_2\ n = +\infty \Rightarrow n^2 log_2\ log_2\ n \notin O(11^{log_2 \sqrt{n}})$$

cu definitii:

∃ constanta c ∈ R_+, c > 0, si $n_0 \in$ N a.i. pentru ∀ n ≥ n_0 sa avem $0 \le n^2 log_2\, log_2\, n \ \le c \cdot 11^{log_2 \sqrt{n}}$

$\Rightarrow n^2 log_2\, log_2\, n \ \le c \cdot \sqrt{n}^{log_2 11} \Rightarrow n^2 log_2\, log_2\, n \ \le c \cdot n^{\frac{1}{2} \cdot log_2 11}$

Comparam exponentii lui n:

$2 \ \le \frac{1}{2} \cdot log_2\, 11 \Rightarrow 2 - \ \frac{1}{2} \cdot log_2\, 11 \le 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot log_2 \frac{16}{11} \le 0$

dar $\frac{16}{11} \ge 1 \Rightarrow log_2 \frac{16}{11} \ > 0$

$\Rightarrow$ *nu exista constanta c din definitie* $\Rightarrow n^2 log_2\, log_2\, n \ \notin O(11^{log_2 \sqrt{n}})$

c) Daca $f(n) \in \omega(n^{11})$ şi $g(n) \in \Theta(log_2\, n\,)$, atunci $f(g(n)) \in \Omega(\sqrt{n})$

Rezolvare:

prin contra-exemplu:

Putem alege $f(n) \ = n^{12} \in \omega(n^{11})$ *si* $g(n) \ = log_2\, n \in \Theta(log_2\, n\,)$

$\Rightarrow f(g(n)) \ = g(n)^{12} = log_2^{12} n \ \notin \Omega(\sqrt{n})$ *pentru ca* $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{log_2^{12} n}{\sqrt{n}} = \ 0 \ (\notin (0, \infty])$

4. (3.5p) Fie problema BIN, care testează oprirea unui program pe inputuri binare astfel:

BIN: "Se opreşte un program arbitrar P', pe un input arbitrar w' de forma {0,1}* ?". Inputul w' e format numai din 1 si 0; e.g. 111, 10, 0, 0101 etc.

Demonstraţi (ne)decidabilitatea problemei BIN, prin reducerea Turing a acesteia de la/la o problemă cunoscută.

Rezolvare:

Problema BIN seamana izbitor de mult cu problema opririi (PO). Prin urmare, dorim sa aratam ca BIN este nedecidabila, prin demonstrarea reducerii $PO \le_T BIN$.

Pasul 1: pentru o intrare oarecare $(P,\ w)$ pentru PO, construim o intrare convenabila $(P',\ w')$ a lui BIN, astfel incat $PO(P, w) = 1 \Leftrightarrow BIN(P', w') = 1$.

```
function P'(w')
  P(w)
  if w'∈{0,1}*
       return 1
  else
       infinite-loop
end function
```

Pasul 2: $PO(P,\ w) = 1 \Rightarrow BIN(P',\ w') = 1$. Cand P se opreste pe w ($PO(P, w) = 1$), P' se va opri si el, pentru orice input w', care are proprietatea ceruta in enunt.

Pasul 3: $BIN(P',\ w') = 1 \Rightarrow PO(P,\ w) = 1$. Cand exista inputuri pe care P' se opreste, inseamna ca acele inputuri sunt in format binar si, in plus, ca P(w) s-a oprit.

5. (4p) Studiaţi posibilitatea aplicării teoremei Master în urmatoarele situaţii şi rezolvaţi recurenţa, acolo unde este cazul:
   a) $T(n) = 2017\ T(\frac{n}{2017}) + \frac{n}{log_2 n}$
   b) $T(n) = 2016\ T(\frac{n}{2017}) + n$

Rezolvare:

a) $f(n) = \frac{n}{log_2 n}$; $n^E = n^{log_b a} = n$

Intuitiv, s-ar putea aplia primul caz al Teoremei Master(T.M.). Incercam sa demonstram ca $\exists\, \varepsilon > 0$ astfel incat $f(n) \in O(n^{E-\varepsilon})$:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n^{E-\varepsilon}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{log_2 n \cdot n^{E-\varepsilon}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\varepsilon}}{log_2 n}$$

Dar $L = \infty$, $\forall\, \varepsilon > 0$, deci cazul I al T.M. nu poate fi aplicat.

Cazul al II-lea al T.M. functioneaza doar pentru $k \geq 0$ (vezi teoria documentatia .pdf aferenta seminarului). Aici, k=-1.

Cazul al III-lea nu functioneaza (dem. cu limita, de exemplu).

Rezulta ca nu se poate aplica Teorema Master, varianta clasica.

Exista o varianta extinsa (care nu intra in materia seminarului, dar a fost acceptata ca rezolvare):

Cf. cazului al II-lea extins, pt k=-1 avem:

$f(n) \in \Theta(n^E (log_b n)^{-1}) \Rightarrow T(n) = \Theta(n^E (log_b log_b n)) = \Theta(n \cdot log_{2017} log_{2017} n)$

b) $f(n) = n$; $n^E = n^{log_b a} = n^{log_{2017} 2016}$, unde $log_{2017} 2016$ este, evident, subunitar.

Intuitiv, s-ar putea aplia cazul al III-lea al Teoremei Master(T.M.). Incercam sa demonstram ca $\exists\, \varepsilon > 0$ astfel incat $f(n) \in \Omega(n^{E+\varepsilon})$ (*):

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n^{E+\varepsilon}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^{log_{2017} 2016+\varepsilon}} = \lim_{n\to\infty} n^{1-(log_{2017} 2016+\varepsilon)}$$

Pentru a valida conditia (*), trebuie ca $L \in (0, \infty]$. Pentru $\varepsilon = 1 - log_{2017} 2016 > 0$, exponentul lui n din limita devine 0, deci $L = 1 \in (0, \infty]$.

Totusi, mai avem de verificat o conditie pentru cazul al III-lea:

$af(n/b) \leq cf(n)$ pentru o constanta $c \in (0, 1)$ si pentru un n sucient de mare.

$2016 f(n/2017) \leq c \cdot n \Leftrightarrow \frac{2016}{2017} n \leq c \cdot n$. Pentru $c = \frac{2016}{2017} \in (0, 1)$ este respectata si aceasta conditie.

Asadar, $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n)$, cf. caz3 T.M.