2 Spaţii vectoriale. Subspaţii. Bază. Dimensiune. Coordonate. Matricea de schimbare a bazei.

1. Fie $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ şi $\mathcal{B}' = \{\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\}$ baze în $\mathbb{R}^2$. Ştiind că matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}'$ este $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, determinaţi baza $\mathcal{B}$. Aflaţi şi coordonatele vectorului $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ în raport cu baza $\mathcal{B}$.

2. Să se exprime coordonatele unui vector arbitrar $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ în funcţie de coordonatele sale $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ în raport cu baza $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} \end{pmatrix} \right\}$. Cu ajutorul acestora, să se reprezinte grafic curba de ecuaţie $8x^2 + 6xy - \dfrac{x}{\sqrt{10}} + \dfrac{3y}{\sqrt{10}} = 1$.

3. Fie $a \in \mathbb{R}$ fixat. Verificaţi că polinoamele $P_i(X) = \dfrac{(X-a)^i}{i!}$, $i = \overline{0,n}$ formează o bază în $\mathbb{R}_{\leq n}[X]$ şi determinaţi coordonatele unui polinom arbitrar $P \in \mathbb{R}_{\leq n}[X]$ în raport cu această bază.

4. Fie $a_0, a_1, \ldots, a_n$ numere reale distincte şi polinoamele

$$P_i(X) = \frac{(X-a_0)\ldots(X-a_{i-1})(X-a_{i+1})\ldots(X-a_n)}{(a_i-a_0)\ldots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\ldots(a_i-a_n)}, \ i = \overline{0,n}$$

   $P_0, \ldots, P_n$ se numesc polinoamele **Lagrange** asociate numerelor $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

   (a) Verificaţi că

   $$P_i(a_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

   (b) Arătaţi că $P_0, \ldots, P_n$ sunt liniar independente în $\mathbb{R}_{\leq n}[X]$.

   (c) Deduceţi că $P_0, \ldots, P_n$ formează o bază în $\mathbb{R}_{\leq n}[X]$.

   (d) Deteminaţi coordonatele unui polinom arbitrar $P \in \mathbb{R}_{\leq n}[X]$ în raport cu această bază.

   (e) Utilizând rezultatele de mai sus, arătaţi că pentru orice $b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, nu neapărat distincte, există un unic polinom P de grad n cu proprietatea că $P(a_i) = b_i$, $\forall\, i = \overline{0,n}$, şi anume

   $$P(X) = b_0 P_0(X) + \ldots + b_n P_n(X)$$

   numit **polinomul de interpolare Lagrange** asociat punctelor $(a_0, b_0), \ldots, (a_n, b_n)$.

3 Produs scalar. Ortogonalitate şi proiecţie.

1. Care dintre următoarele expresii determină un produs scalar pe spaţiul vectorial indicat?

   (a) $V = \mathbb{R}_{\leq 3}[X]$, $\langle P, Q \rangle = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$

   (b) $V = \mathbb{R}_{\leq 3}[X]$, $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\mathsf{d}x$.

(c) $V = \mathbb{R}^2$, $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = x_1x_2 + 4y_1x_2 + 4x_1y_2 + y_1y_2$

(d) $V = \mathbb{R}^2$, $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = 2x_1x_2 + y_1x_2 + x_1y_2 + y_1y_2$

2. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Determinaţi o câte o bază ortogonală pentru $\mathsf{Ker}(A)$ şi $\mathsf{Im}(A)$. Aceeaşi cerinţă pentru $\mathsf{Ker}(A^t)$ şi $\mathsf{Im}(A^t)$.

   (b) În urma calculelor de la punctul anterior, s-a obţinut $\dim_{\mathbb{R}} \mathsf{Ker}(A) = \dim_{\mathbb{R}} \mathsf{Ker}(A^t) = 1$ şi $\dim_{\mathbb{R}} \mathsf{Im}(A) = \dim_{\mathbb{R}} \mathsf{Im}(A^t) = 2$. Aflaţi proiecţia vectorului din baza lui $\mathsf{Ker}(A)$ determinată anterior, pe fiecare dintre vectorii din baza subspaţiului $\mathsf{Im}(A^t)$. Ce observaţi?

3. Fie $(V, \cdot)$ un spaţiu euclidian şi $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ doi vectori nenuli. Atunci:

   (a) Inegalitatea Cauchy-Schwarz $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|$ devine egalitate dacă şi numai dacă vectorii sunt coliniari: $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v}$.

   (b) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ dacă şi numai dacă există $\lambda \geq 0$ astfel încât $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v}$.

   (c) $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$ dacă şi numai dacă vectorii $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ şi $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ sunt ortogonali. Interpretare geometrică.

   (d) Produsul scalar se poate obţine din normă: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{4}(\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|)$

   (e) Să se arate că $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2)$ şi să se interpreteze geometric.

4. Fie $V = \{f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R} \mid \ f \text{ continuă } \}$ cu produsul scalar

$$f \cdot g = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\mathsf{d}x$$

   (a) Arătaţi că pentru orice $f \in V$,are loc relaţia

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\, f(x)\mathsf{d}x \right| \leq \sqrt{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathsf{d}x \right)^{\frac{1}{2}}$$

   (b) Verificaţi că funcţiile $1, \sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x) \in V$ sunt ortogonale.

   (c) Determinaţi proiecţia funcţiei $f \in V$, $f(x) = \dfrac{x}{2}$ pe fiecare dintre cele cinci funcţii de la punctul anterior. Ce observaţi?

5. Fie X o mulţime nevidă. O **distanţă (metrică)** pe X este o funcţie $d : X \times X \to [0, \infty)$, care verifică următoarele proprietăţi:

   - $d(x, x) = 0$
   - $d(x, y) = d(y, x)$
   - $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

pentru orice $x, y, z \in X$.

Fie $X = \mathbb{R}^n$ şi $d\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$. Arătaţi că d este o distanţă pe $\mathbb{R}^n$, numită distanţa *taxicab* sau *Manhattan*.[1] Pentru o mai bună intuiţie, consideraţi cazul $n = 2$ şi reprezentaţi grafic mulţimea vectorilor aflaţi la distanţă egală cu 1 de vectorul nul $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

[1]Distanţa taxicab se utilizează, de exemplu, în teoria codurilor corectoare de erori (caz în care se mai întâlneşte şi sub denumirea de distanţă Hamming). O secvenţă cu n cifre binare se poate identifica cu un vector din $\mathbb{R}^n$. De exemplu, secvenţa 1011 corespunde vectorului $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Distanţa taxicab între două asemenea secvenţe de aceeaşi lungime reprezintă numărul de biţi pe care secvenţele nu coincid. Codurile corectoare de erori urmăresc criptarea fiecărui caracter al unui mesaj astfel încât secvenţele criptate să se găsească la distanţa taxicab maximă unele de altele. Acest proces minimizează posibilitatea ca printr-o eroare de transmisie (sau zgomot pe canalul de comunicaţie) o secvenţă codificată să fie transformată în altă secvenţă din acelaşi mesaj. De asemenea, sunt mult mai mari şansele ca asfel de distorsiuni de transmisie să fie detectate şi corectate rapid.