Lema

Pt. orice gramatică indep. de context $G = (V, \Sigma, R, S)$ și orice șir $w \in \Sigma^*$,

$$S \underset{G}{\overset{*}{\Rightarrow}} w \iff S \underset{G}{\overset{*L}{\Rightarrow}} w$$

dem.

$\Rightarrow$ $\forall$ deriv. stg. este o derivare $\Rightarrow$ evident

$\Leftarrow$

Fie $w_0 \underset{G}{\Rightarrow} w_1 \underset{G}{\Rightarrow} \dots \underset{G}{\Rightarrow} w_n$, o derivare, nu neapărat stg.

$w_0 = S$

$w_n = w \in \Sigma^*$

Idee: vom arăta cum se poate transforma într-o deriv. stg.

Fie k nr. minim de pași a.î. $w_k \Rightarrow w_{k+1}$ nu este o deriv. stg.

$\Rightarrow$ dc $\nexists k \Rightarrow$ q.e.d.

Def. o altă deriv. în n pași

$$w_0' \underset{G}{\Rightarrow} w_1' \underset{G}{\Rightarrow} \dots \underset{G}{\Rightarrow} w_n'$$

a.î. $w_0' = w_0$ și $w_n' = w_n$

Ac. nouă deriv. este fie stg. sau are proprietatea că dc. $w'_{k'} \underset{G}{\Rightarrow} w'_{k'+1}$

este cel mai recent pas al derivării care nu este stg, atunci $k' > k$

Cum ambele deriv. au ac lg $\Rightarrow$ dem. prin inducție

$w_k \underset{G}{\Rightarrow} w_{k+1}$ nu este stg. $\Rightarrow$

$w_k = \alpha A \beta B \gamma \quad (\alpha \in \Sigma^*, \beta, \gamma \in V^*, A, B \in V - \Sigma)$

$w_{k+1} = \alpha A \beta \delta \gamma \quad , \ B \underset{G}{\rightarrow} \delta$

Cum $w_m \in \Sigma^*$, $k+1 < m \Rightarrow$ există un pas ulterior la care A este înlocuit

Fie $l > k$ cel m. mic nr. a.î.

$w_l = \alpha A \varepsilon \ , \ \varepsilon \in V^*$

$w_{l+1} = \alpha \xi \varepsilon \ , \ A \underset{G}{\rightarrow} \xi$

$\beta B \gamma \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} \varepsilon$ în $l-k$ pași

Ar putea interschimba utiliz. regulii $B \underset{G}{\rightarrow} \delta$ cu $A \underset{G}{\rightarrow} \xi$

$$w_0 \overset{*L}{\underset{G}{\Longrightarrow}} w_k = \alpha A \beta B \gamma \qquad k \text{ pași}$$

$$\overset{L}{\Longrightarrow} \alpha \xi \beta B \gamma \qquad 1 \text{ pas}$$

$$\overset{*L}{\Longrightarrow} \alpha \xi \varepsilon \qquad \ell - k \text{ pași}$$

$$\overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} w_m$$

Ac. nouă deriv. are lung m și cel puțin $k+1$ deriv. stg. la început.

Teorema

Clasa limbajelor acceptate de A.P.D. este clasa limbajelor generate de GIC (LIC)

dem.

Lema 1

Orice LIC este acceptat de un A.P.D.

dem.

Fie $G = (V, \Sigma, R, S) \to$ GIC

Trebuie să constr. un APD M a.î. $L(M) = L(G)$.

$M = (\{p, q\}, \Sigma, V, \Delta, p, \{q\})$

Δ:

1. $((p, e, e), (q, S))$
2. $((q, e, A), (q, x))$, $A \to x \in R$
3. $((q, a, a), (q, e))$, $a \in \Sigma$.

Ex:

$G = (V, \Sigma, R, S)$

$V = \{S, a, b, c\}$

$\Sigma = \{a, b, c\}$

$R = \{ S \to aSa \mid bSb \mid c \}$

$L(G) = \{ wcw^R \mid w \in \{a, b\}^* \}$

$M = (\{p, q\}, \Sigma, V, \Delta, p, \{q\})$

$\Delta = \{ ((p, e, e), (q, S))$ (T1)

$((q, e, S), (q, aSa))$ (T2)

$((q, e, S), (q, fSf))$ (T3)

$((q, e, S), (q, c))$ (T4)

$((q, a, a), (q, e))$ (T5)

$((q, f, f), (q, e))$ (T6)

$((q, c, c), (q, e))$ (T7)

Stare	Sir intrare	Stiva	Tranz. utiliz.
p	afcfa	e	
q	afcfa	S	T1
q	afcfa	aSa	T2
q	fcfa	Sa	T5
q	fcfa	fSfa	T3
q	cfa	Sfa	T6
q	cfa	cfa	T4
q	fa	fa	T7
q	a	a	T6
q	e	e	T5

Prop. 1

Dc. $S \overset{*L}{\underset{G}{\Rightarrow}} \alpha_1\alpha_2$, $\alpha_1 \in \Sigma^*$, $\alpha_2 \in (V-\Sigma)V^* \cup \{e\}$ atunci $(q, \alpha_1, S) \vdash_M^* (q, e, \alpha_2)$.

Prop 2.

Dc. $(q, \alpha_1, S) \vdash_M^* (q, e, \alpha_2)$, $\alpha_1 \in \Sigma^*$, $\alpha_2 \in V^*$ și $S \overset{*L}{\underset{G}{\Rightarrow}} \alpha_1\alpha_2$

Propr. sunt suf. pt dem. lemei pt că

$$S \overset{*L}{\underset{G}{\Rightarrow}} \alpha \quad (\alpha_2 = e) \quad , \alpha \in \Sigma^*$$

$$\Leftrightarrow \quad (q, \alpha, S) \vdash_M^* (q, e, e)$$

$$\alpha \in L(G) \Leftrightarrow \alpha \in L(M)$$

dem Prop 1

pp. $S \overset{*L}{\underset{G}{\Rightarrow}} \alpha$, $\alpha = \alpha_1\alpha_2$, $\alpha_1 \in \Sigma^*$, $\alpha_2 \in (V-\Sigma)V^* \cup \{e\}$

dem. prin inducție după lg. derivării α din S.

Pas de bază

Dc. deriv. are $lg=0 \Rightarrow S=\alpha \Rightarrow \alpha_1=e,\ \alpha_2=S$

$$(\underset{\substack{\parallel\\ e}}{q},\alpha_1,S) \vdash_M^* (q, e, \underset{\substack{\parallel\\ S}}{\alpha_2})$$

Ip. inductivă

pp. $S \underset{G}{\overset{*L}{\Rightarrow}} \alpha_1\alpha_2$ în cel mult n paşi $\Rightarrow (q,\alpha_1,S) \vdash_M^* (q,e,\alpha_2)$

Pas de inducţie

$$S = u_0 \underset{G}{\overset{L}{\Rightarrow}} u_1 \underset{G}{\overset{L}{\Rightarrow}} u_2 \underset{G}{\overset{L}{\Rightarrow}} \dots \underset{G}{\overset{L}{\Rightarrow}} u_{n+1} = \alpha$$

şi fie $\alpha=\alpha_1\alpha_2$ cf. specific.

$\Rightarrow$ u_n are cel puţin un neterminal

$u_n = \beta_1 A \beta_2$

$u_{n+1} = \beta_1 \gamma \beta_2$, $\beta_1 \in \Sigma^*$, $A \in V-\Sigma$, $A \underset{G}{\rightarrow} \gamma$

Din ip. inductivă :

$$(q, \beta_1, \xi) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (q, e, A\beta_2)$$

$$A \underset{G}{\rightarrow} \gamma \Rightarrow ((q, e, A), (q, \gamma)) \in \Delta \text{ (tranziție a lui } M)$$

$$(q, e, A\beta_2) \underset{M}{\vdash} (q, e, \gamma\beta_2)$$

$\alpha = \beta_1\gamma\beta_2$, $\beta_1 \in \Sigma^*$

$\alpha = \alpha_1\alpha_2$, $\alpha_1 \in \Sigma^*$, $\alpha_2 = e$ sau începe cu un neterminal.

$|\alpha_1| \geq |\beta_1|$

$|\alpha_2| \leq |\gamma\beta_2|$, pt că $\alpha_1 \in \Sigma^*$ și γ poate începe cu terminale.

$\Rightarrow \alpha_1 = \beta_1\delta$, $\delta \in \Sigma^*$

aî $\delta\alpha_2 = \gamma\beta_2$

$(q, \delta, \gamma\beta_2) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (q, e, \alpha_2)$ (prin tranziții de reducere).

$$(q, \alpha_1, S) \vdash_M (q, \beta_1 \delta, S)$$
$$\vdash_M^* (q, \delta, A\beta_2)$$
$$\vdash_M (q, \delta, \gamma\beta_2)$$
$$\vdash_M^* (q, e, \alpha_2) \quad \text{q.e.d.}$$

Prop 2 (Tema)

Lema 2

Dc un limbaj este acceptat de un APD, atunci este un limbaj indep de context.

dem.

Ar. fi util să restricționăm APD.

Numim $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$ simplu, dc:

(1) $((q, u, \beta), (p, \gamma)) \in \Delta$, $|\beta| \leq 1$

(2) $((q, u, e), (p, \gamma)) \in \Delta$, $((q, u, A), (p, \gamma A)) \in \Delta$, $A \in \Gamma$

(pop(A), push(A))

Fie $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$ APD $\Rightarrow$ constr. un APD simplu care acceptă $L(M)$.

Elim. tranzițiile $((q, u, \beta), (p, \gamma))$, $|\beta| > 1$ $\Rightarrow$ M va scoate de pe stivă secvențial simb. din β.

Dc $\beta = B_1 \dots B_n$, $n > 1$, $B_1, \dots, B_n \in \Gamma$

Adg. la K stările $t_1, \dots, t_{n-1}$ și în Δ înlocuim

$((q, u, \beta), (p, \gamma))$ cu

$((q, e, B_1), (t_1, e))$

$((t_1, e, B_2), (t_2, e))$

$- - - - - -$

$((t_{n-2}, e, B_{n-1}), (t_{n-1}, e))$

$((t_{n-1}, u, B_n), (p, \gamma))$

Se repetă pt toate tranzițiile care nu respectă (1)

Pt cond. (2) $\Rightarrow$ adg. $((q, u, A), (p, \gamma A))$, $A \in \Gamma$

oridecâteori $((q, u, e), (p, \gamma)) \in \Delta$.

Vreau să arăt că dc $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$ este un APD, atunci $L(M)$ este generat de o GIC.

<u>Idee:</u> gramatica trebuie să genereze șiruri acceptate de M.

Fie $G = (V, \Sigma, R, S)$

V va conține pe lângă S și $\sigma \in \Sigma$, simb. $\langle q, A, p \rangle$ pt toate stările $p, q \in K$, $A \in \Gamma \cup \{e\}$.

$A \in \Gamma$, $\langle q, A, p \rangle \Rightarrow$ gen. o porțiune din șirul de intrare care ar putea fi citit între mom. de timp în care M este în st. q cu A în vf. stivei și cel în care M scoate A de pe stivă și intră în st p.

$A = e$, $\langle q, e, p \rangle$

Lema 2 rezultă din prop. pt că

$$\underbrace{\langle s, e, f\rangle \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} x \;, f \in F}_{x \in L(G)} \iff \underbrace{(s, x, e) \vdash^{*}_{M} (f, e, e)}_{x \in L(M)}$$

dem.

pp. $\langle q, A, p\rangle \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} x$ dem prin ind. după lg. deriv. că

$$(q, x, A) \vdash^{*}_{M} (p, e, e)$$

Pas de bază

Deriv. 1 pas $\Rightarrow$ $\langle q, A, p\rangle \underset{G}{\Rightarrow} x$ nu poate fi decât tipul (4)

$p = q$, $A = x = e$

$$(\underset{p}{\underset{\parallel}{q}}, \underset{e}{\underset{\parallel}{x}}, \underset{e}{\underset{\parallel}{A}}) \vdash^{*}_{M} (p, e, e)$$ prin reflexivitate

Regulile din R:

1° $\forall f \in F$, $S \to \langle s, e, f \rangle$

2° $\forall ((q, u, A), (r, B_1 \ldots B_m)) \in \Delta$, $q, r \in K$, $u \in \Sigma^*$, $m > 0$.

$B_1, \ldots, B_m \in \Gamma$, $A \in \Gamma \cup \{e\}$,

$$\langle q, A, p \rangle \to u \langle r, B_1, q_1 \rangle \langle q_1, B_2, q_2 \rangle \ldots \langle q_{m-1}, B_m, p \rangle$$

$\forall p, q_1, \ldots, q_{m-1} \in K$.

3° $\forall ((q, u, A), (r, e)) \in \Delta$, $q, r \in K$, $u \in \Sigma^*$, $A \in \Gamma \cup \{e\}$, $p \in K$

$$\langle q, A, p \rangle \to u \langle r, e, p \rangle$$

4° $\forall q \in K$, $\langle q, e, q \rangle \to e$

Prop.

$\forall q, p \in K$, $A \in \Gamma \cup \{e\}$, $x \in \Sigma^*$

$$\langle q, A, p \rangle \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} x \iff (q, x, A) \vdash_M^* (p, e, e)$$

Ip. ind.

$\langle q, A, p\rangle \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} x \Rightarrow$ printr-o derivare în cel mult K pași $(K>1)$.

Pasul de inducție

pp x este derivat din $\langle q, A, p\rangle$ în $K+1$ pași

Primul pas este de tipul (2) sau (3).

Tipul (2)

$\langle q, A, p\rangle \Rightarrow u \langle r, B_1, q_1\rangle \langle q_1, B_2, q_2\rangle \cdots \langle q_{n-1}, B_m, p\rangle \overset{*}{\Rightarrow} x$

$m \geq 1$, $B_1, \ldots, B_m \in \Gamma$, $r, q_1, \ldots, q_{n-1} \in K$, $((q, u, A), (r, B_1, \ldots, B_m)) \in \Delta$.

Notez. $q_0 = r$

$q_n = p$

$\exists$ șirurile $z_1, \ldots, z_m \in \Sigma^*$ a.î.

$\langle q_{i-1}, B_i, q_i\rangle \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} z_i$, $i = 1, \ldots, n$ printr-o deriv. în cel mult K pași

$x = u z_1 \ldots z_m$

Din ip. ind. $(q_{i-1}, z_i, B_i) \vdash^{+}_{M} (q_i, e, e)$, $i=1,..,n$

combinând $(q, u, A) \vdash_{M} (r, e, B_1 \dots B_n)$

$$\Rightarrow (q, u z_1 \dots z_n, A) \vdash_{M} (r, z_1 \dots z_n, B_1 \dots B_n)$$
$$\vdash^{*}_{M} (q_1, z_2 \dots z_n, B_2 \dots B_n)$$
$$\vdash^{*}_{M} (p, e, e)$$

<u>Primul pas de tipul 3</u>

$$\langle q, A, p\rangle \underset{G}{\Rightarrow} u \langle r, e, p\rangle \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} x \quad , \quad ((q, u, A), (r, e)) \in \Delta .$$

Analog se dem. $z \in \Sigma^{*}$, $x = uz$, $(q, uz, A) \vdash_{M} (r, z, e) \vdash^{*}_{M} (p, e, e)$