Complexitate

$TIME(T) \subseteq NTIME(T^2) \Rightarrow \mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP}$

$? \; \mathcal{P} = \mathcal{NP}$

Def.

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ este o funcție de numărare a pașilor dc $\exists\, K \geq 1$ și o M.Turing cu K benzi, M, a.î. $\forall\, w \in \Sigma^*$, M se oprește în $f(|w|)$ pași,

$$(s, \# w \underline{\#}, \#, \ldots, \#) \vdash_M^{f(|w|)} (h, u_1 \underline{a_1} v_1, u_2 \underline{a_2} v_2, \ldots, u_K \underline{a_K} v_K)$$

$u_1, \ldots, u_K, v_1, \ldots, v_K \in \Sigma^*$, $a_1, \ldots, a_K \in \Sigma$.

Teorema

Fie L un limbaj acceptat în T_1 – T_1 fcție de numărare a pașilor – de o M.T.N. $M_1 = (K_1, \Sigma_1, \Delta_1, s_1)$. Atunci există $K_2 \geq 1$ și $r > 1$ și o MTD $M_2 = (K_2, \Sigma_2, \delta_2, s_2)$ cu k_2 benzi care decide L în timpul T_2,

$T_2(n) = r^{T_1(n)}$.

Corolar

$NP \subseteq \bigcup \{ TIME(n^d) : n, d > 0 \}$

Def.

Fie $L \subseteq \Sigma^* \$ \Sigma^*$ un limbaj, $\$ \notin \Sigma$. Spunem ca L este balansat polinomial, dc există un polinom p a.î. $x \$ y \in L$, numai dc $|y| \leq p(|x|)$.

In particular, dc $L \subseteq \Sigma^* \$ \Sigma^*$, $\$ \notin \Sigma$, $L \setminus \$ \Sigma^*$ este mulțimea tuturor șirurilor $x \in \Sigma^*$ a.î. $x \$ y \in L$, $y \in \Sigma^*$.

Teorema

Fie $L \subseteq \Sigma^*$ un limbaj, $\$ \notin \Sigma$, $|\Sigma| \geq 2$. Atunci $L \in NP \Leftrightarrow$ există un limbaj polinomial balansat $L' \subseteq \Sigma^* \$ \Sigma^*$ a.î. $L' \in P$ și $L = L' \setminus \$ \Sigma^*$.

ex: formalizarea problemei comis voiajorului

datele:

a) $n \to$ nr. orașe vizitate, $1, 2, .., n$

b) distanța între oricare 2 orașe $\to$ matrice $n \times n$, D, $d_{ij} \to$ distanța între orașele i și j

(nu impunem $d_{ij} = d_{ji}$)

Obs: Repr. D prin codific. ei

cerință $\to$ s.s. găsească drumul cel mai scurt

$t : \{1, 2, .., n\} \to \{1, 2, ..., n\}$

$\uparrow$ tur

$$\Delta(t) = \sum_{j=1}^{n-1} d_{t(j)t(j+1)} + d_{t(n)t(1)}$$

$\uparrow$

lungime tur

Obs:

Determinarea turului t pt. care $\Delta(t) \to$ minim nu este o problemă de decizie, ci de evaluare de funcție. Pt a formula problema în termeni de decizie pp. că avem $f \to$ limită și $\exists\, t$ ai $\Delta(t) \leq b$.

$$PCV = \{ I^n \partial \alpha(\Delta) \partial I^b : \exists\, t \text{ ai } \Delta(t) \leq b \}$$

Nu știm dc $PCV \in \mathcal{P}$. Toți alg. cunoscuți $\to$ timp exponențial.

Putem arăta $PCV \in \mathcal{NP}$.

Este suf. să obs. că:

$$PCV' = \{ I^n \partial \alpha(\Delta) \partial I^b \phi\, \alpha(t) : \Delta(t) \leq b \}.$$

este polinomial balansat și este în $\mathcal{P}$.

$$\alpha(t) = I^{t(1)} c I^{t(2)} c \dots c I^{t(n)}$$

$PCV' \to$ polinomial balansat pt ca $|\alpha(t)| \leq n^2$

Dat fiind t și Δ se poate evalua $\Delta(t)$ pt. a decide dc $\Delta(t) \leq b$ în timp polinomial $\Rightarrow PCV \in \mathcal{NP}$.

NP Completitudine

Def.

Fie Σ, Δ alfabete, $f: \Sigma^* \to \Delta^*$ este calculabilă în timpul T printr-o M.T.D. $M = (K, \Sigma', \delta, s)$ cu K finit $\Leftrightarrow$

$\forall x \in \Sigma^*$

$$(s, \#x\underline{\#}, \underline{\#}, \dots, \underline{\#}) \vdash_M^t (h, \#f(x)\underline{\#}, \underline{\#}, \dots, \underline{\#}), \quad t \leq T(|x|)$$

Spunem că f - polinomial calculabilă dacă $\exists$ un polinom T a.î. f este calculabilă în T.

Dc. f este calculabilă în T, $\forall x \in \Sigma^*$, $|f(x)| \leq T(|x|) + |x|$

ex:

Dc $L \in \mathcal{P}$ atunci f_L:

$$f_L(x) = \begin{cases} Y, & x \in L \\ N, & x \notin L \end{cases}$$

este din def. $\mathcal{P}$ calc - polinomial

Def.

Fie $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$, $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$ limbaje. O fcție calculabilă polinomial $\tau : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ este numită transformare în timp polinomial din L_1 în L_2 $\iff \forall x \in \Sigma_1^*$, $x \in L_1 \iff \tau(x) \in L_2$.

Lemă

Dc. $\tau_1 : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ și $\tau_2 : \Sigma_2^* \to \Sigma_3^*$ sunt transformări în timp polinomial din L_1 în L_2 și din L_2 în L_3 atunci $\tau_1 \circ \tau_2 : \Sigma_1^* \to \Sigma_3^*$ este o transformare în timp polinomial din L_1 în L_3.

Dem.

$\tau_1 \to$ calc de M.T. M_1 în timp polinomial T_1

$\tau_2 \to$ calc de M.T. M_2 în timp polinomial T_2

$\tau_1 \circ \tau_2 \to$ calc. $M_1 M_2$: $x \in \Sigma_1^*$, $M_1 M_2$ va calc $\tau_1 \circ \tau_2(x)$ într-o limită de timp $T_1(|x|) + T_2(T_1(|x|) + |x|)$ = pl. polinomiale

$x \in L_1 \Leftrightarrow \mathcal{C}_1 \circ \mathcal{C}_2(x) \in L_3$

$x \in L_1 \Leftrightarrow \mathcal{C}_1(x) \in L_2 \Leftrightarrow \mathcal{C}_2(\mathcal{C}_1(x)) = \mathcal{C}_1 \circ \mathcal{C}_2(x) \in L_3$.

Def. 1

Un limbaj $L \subseteq \Sigma^*$ este numit $\mathcal{NP}$ complet, dacă și numai dacă

a) $L \in \mathcal{NP}$

b) $\forall L' \in \mathcal{NP}$, există o transformare în timp polinomial de la L' la L.

Teorema

Fie L un limbaj $\mathcal{NP}$ complet. Atunci $\mathcal{P} = \mathcal{NP} \Leftrightarrow L \in \mathcal{P}$.

dem.

$\Rightarrow$

pp. $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$. Cum L este $\mathcal{NP}$ complet din def. 1 $\Rightarrow L \in \mathcal{NP} \overset{ip}{\Rightarrow} L \in \mathcal{P}$.

$\Leftarrow$

$L \in \mathcal{P} \Rightarrow$ pp. L este decis de o M.T.D. M_1 în timpul polinomial $T1$.

Fie L' un limbaj în $\mathcal{NP}$; ideea $\to$ arăt că $L' \in \mathcal{P}$.

Cum L este $\mathcal{NP}$ complet și $L' \in \mathcal{NP}$ există o transf. în timp polinomial $\mathcal{T}$ de la L' la L. Pp. că $\mathcal{T}$ este calc. de o M.T. M_2 în timpul polinomial T_2.

Afirm. M.T. $M_2 M_1$ decide L' în timp polinomial.

$M_2 M_1$ se oprește cu T pe bandă pt $x \iff \mathcal{T}(x) \in L$.

Cum $\mathcal{T}$ este o transf. în timp polinomial, $\mathcal{T}(x) \in L \iff x \in L'$

$M_2 M_1$ se oprește pt x în $T_2(|x|) + T_1(T_2(|x|) + |x|)$ care este polinomial în $|x|$

Cum L' poate fi orice limbaj în $\mathcal{NP} \Rightarrow L' \in \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

? cum găsim un limbaj $\mathcal{NP}$ complet.

Soluție $\Rightarrow$ pornim de la construcție K_0

$M_0 = \{ \rho(M) \rho(w) \partial I^t$: MTN M care acceptă w în cel mult t pași$\}$.

Teorema

M_0 este $\mathcal{NP}$ complet.