Complexitate

$TIME(T) \subseteq NTIME(T^2) \Rightarrow \mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP}$

$? \ \mathcal{P} = \mathcal{NP}$

Def.

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ este o funcție de numărare a pașilor dc $\exists K \geq 1$ și o M. Turing cu K benzi, M, a.î. $\forall w \in \Sigma^*$, M se oprește în $f(|w|)$ pași,

$$(s, \#w\#, \#, \dots, \#) \vdash_M^{f(|w|)} (h, u_1\underline{a_1}v_1, u_2\underline{a_2}v_2, \dots, u_k\underline{a_k}v_k)$$

$u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_k \in \Sigma^*$, $a_1, \dots, a_k \in \Sigma$.

Teorema

Fie L un limbaj acceptat în T_1 – T_1 fcție de numărare a pașilor – de o M.T.N. $M_1 = (K_1, \Sigma_1, \Delta_1, s_1)$. Atunci există $K_2 \geq 1$ și $r > 1$ și o MTD $M_2 = (K_2, \Sigma_2, \delta_2, s_2)$ cu k_2 benzi care decide L în timpul T_2,

$T_2(n) = r^{T_1(n)}$.

Corolar

$NP \subseteq \bigcup \{TIME(n^d) : n, d > 0\}$

Def.

Fie $L \subseteq \Sigma^* \$ \Sigma^*$ un limbaj, $\$ \notin \Sigma$. Spunem că L este balansat polinomial, dc există un polinom p a.î. $x\$y \in L$, numai dc $|y| \leq p(|x|)$.

În particular, dc $L \subseteq \Sigma^* \$ \Sigma^*$, $\$ \notin \Sigma$, $L \setminus \$ \Sigma^*$ este mulțimea tuturor șirurilor $x \in \Sigma^*$ a.î. $x\$y \in L$, $y \in \Sigma^*$.

Teorema

Fie $L \subseteq \Sigma^*$ un limbaj, $\$ \notin \Sigma$, $|\Sigma| \geq 2$. Atunci $L \in NP \Leftrightarrow$ există un limbaj polinomial balansat $L' \subseteq \Sigma^* \$ \Sigma^*$ a.î. $L' \in P$ și $L = L' \setminus \$ \Sigma^*$.

ex: formalizarea problemei comis voiajorului

datele:

a) $n \to$ nr. orașe vizitate, $1, 2, .., n$

b) distanța între oricare 2 orașe $\to$ matrice $n \times n$, D, $d_{ij} \to$ distanța între orașele i și j

(nu impunem $d_{ij} = d_{ji}$)

Obs: Reprez. D prin codific. ei

Cerințe $\to$ s.ș. găsească drumul cel mai scurt

$$t : \{1, 2, .., n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$$

↑ tur

$$\Delta(t) = \sum_{j=1}^{n-1} d_{t(j)t(j+1)} + d_{t(n)t(1)}$$

↑ lungime tur

Obs:

Determinarea turului t pt. care $D(t) \to$ minim nu este o problemă de decizie, ci de evaluare de funcție. Pt a formula problema în termeni de decizie pp. că avem $b \to$ limită și $\exists\, t$ aî $D(t) \leq b$.

$$PCV = \{ I^n \partial \alpha(D) \partial I^b : \exists\, t \text{ ai } D(t) \leq b \}$$

Nu știm dc $PCV \in P$. Toți alg. cunoscuți $\to$ timp exponențial.

Putem arăta $PCV \in NP$.

Este suf. să obs. că:

$$PCV' = \{ I^n \partial \alpha(D) \partial I^b \phi\, \alpha(t) : D(t) \leq b \}.$$

este polinomial balansat și este în P.

$$\alpha(t) = I^{t(1)} c\, I^{t(2)} c \dots c\, I^{t(n)}.$$

$PCV' \to$ polinomial balansat pt ca $|\alpha(t)| \leq n^2$

Dat fiind t și D se poate evalua $D(t)$ pt. a decide dc $D(t) \leq b$ în timp polinomial $\Rightarrow PCV \in NP$.

NP Completitudine

Def.

Fie Σ, Δ alfabete, $f: \Sigma^* \to \Delta^*$ este calculabilă în timpul T printr-o M.T.D. $M = (K, \Sigma', \delta, s)$ cu K fixă $\Leftrightarrow$

$\forall x \in \Sigma^*$

$$(s, \#x\underline{\#}, \underline{\#}, \dots, \underline{\#}) \vdash_M^t (h, \#f(x)\underline{\#}, \underline{\#}, \dots, \underline{\#}), \quad t \leq T(|x|)$$

Spunem că f - polinomial calculabilă dc $\exists$ un polinom T a.î. f este calculabilă în T.

Dc. f este calculabilă în T, $\forall x \in \Sigma^*$, $|f(x)| \leq T(|x|) + |x|$

ex:

Dc $L \in P$ at f_L:

$$f_L(x) = \begin{cases} Y, & x \in L \\ N, & x \notin L \end{cases}$$

este din def. P calc - polinomial

Def.

Fie $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$, $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$ limbaje. O fcție calculabilă polinomial $\tau : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ este numită transformare în timp polinomial din L_1 în L_2 $\Leftrightarrow \forall x \in \Sigma_1^*$, $x \in L_1 \Leftrightarrow \tau(x) \in L_2$.

Lemă

Dc. $\tau_1 : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ și $\tau_2 : \Sigma_2^* \to \Sigma_3^*$ sunt transformări în timp polinomial din L_1 în L_2 și din L_2 în L_3 atunci $\tau_1 \circ \tau_2 : \Sigma_1^* \to \Sigma_3^*$ este o transformare în timp polinomial din L_1 în L_3.

dem.

$\tau_1 \to$ calc de M.T. M_1 în timp polinomial T_1

$\tau_2 \to$ calc de M.T. M_2 în timp polinomial T_2

$\tau_1 \circ \tau_2 \to$ calc. $M_1 M_2$: $x \in \Sigma_1^*$, $M_1 M_2$ va calc $\tau_1 \circ \tau_2(x)$ într-o limită de timp $T1(|x|) + T2(T1(|x|) + |x|) \Rightarrow$ sl. polinomiale

$x \in L_1 \Leftrightarrow \tau_1 \circ \tau_2(x) \in L_3$

$x \in L_1 \Leftrightarrow \tau_1(x) \in L_2 \Leftrightarrow \tau_2(\tau_1(x)) = \tau_1 \circ \tau_2(x) \in L_3$.

<u>Def. 1</u>

Un limbaj $L \subseteq \Sigma^*$ este numit NP complet, dacă și numai dacă

a) $L \in NP$

b) $\forall L' \in NP$, există o transformare în timp polinomial de la L' la L.

<u>Teorema</u>

Fie L un limbaj NP complet. Atunci $P = NP \Leftrightarrow L \in P$.

<u>dem.</u>

$\Rightarrow$

pp. $P = NP$. Cum L este NP complet din def. 1 $\Rightarrow L \in NP \overset{ip}{\Rightarrow} L \in P$.

$\Leftarrow$

$L \in P \Rightarrow$ pp. L este decis de o M.T.D. M_1 în timpul polinomial T_1.

Fie L' un limbaj în NP; <u>idee</u> $\rightarrow$ arăt că $L' \in P$.

Cum L este NP complet și $L' \in NP$ există o transf. în timp polinomial τ de la L' la L. Pp. că τ este calc. de o M.T. M_2 în timpul polinomial T_2.

Afirm. M.T. $M_2 M_1$ decide L' în timp polinomial.

$M_2 M_1$ se oprește cu (T) pe bandă pt $x \iff \tau(x) \in L$.

Cum τ este o transf. în timp polinomial, $\tau(x) \in L \iff x \in L'$

$M_2 M_1$ se oprește pt x în $T_2(|x|) + T_1(T_2(|x|) + |x|)$ care este polinomial în $|x|$

Cum L' poate fi orice limbaj în NP $\Rightarrow L' \in P \Rightarrow P = NP$.

? cum găsim un limbaj NP complet.

Soluție $\Rightarrow$ pornim de la construcție K_0

$M_0 = \{ f(M) f(w) \partial I^t$: MTN M care acceptă w în cel mult t pași.

Teorema

N_0 este NP complet.