Transf. Laplace

$f(t)$	$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$
1. 1	1. $\frac{1}{s}$
2. t	2. $\frac{1}{s^2}$
3. $t^n, n\in\mathbb{N}^*$	3. $\frac{n!}{s^{n+1}}$
4. e^{at}	4. $\frac{1}{s-a}$
5. $t^n\cdot e^{at}$	5. $\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
6. $u(t-a)=\begin{cases}0, t<a\\ 1, t>a\end{cases}$	6. $\frac{e^{-as}}{s}$
7. $\delta(t-a)=\begin{cases}0, t\neq a\\ \infty, t=a\end{cases}$	7. e^{-as}
8. $\sin(at)$	8. $\frac{a}{s^2+a^2}$
9. $\cos(at)$	9. $\frac{s}{s^2+a^2}$
10. $t\sin(at)$	10. $\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
11. $t\cos(at)$	11. $\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$

- $\mathcal{L}(\alpha f\pm\beta g)=\alpha\mathcal{L}(f(t))\pm\beta\mathcal{L}(g)$
- $\mathcal{L}(f(at))=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right), a>0$
- $\mathcal{L}(f(t-a)\cdot u(t-a))=e^{-as}F(s)$ sau $\mathcal{L}(f(t)\cdot u(t-a))=e^{-as}\cdot$ $\mathcal{L}(f(t+a))$
- $\mathcal{L}(e^{at}f(t))=F(s-a), s-a>k$
- $\mathcal{L}(t^n f(t))=(-1)^n\frac{d^nF}{ds^n}$
- $\mathcal{L}(f')=s\cdot\mathcal{L}(f)-f(0)$

  $\mathcal{L}(f'')=s^2\mathcal{L}(f)-s\cdot f(0)-f'(0)$
- $\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right)=\frac{1}{s}F(s)$
- $\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)=\int_s^\infty F(v)dv$
- $\mathcal{L}[(f*g)_t]=F(s)\cdot G(s)$

$\lg 2\simeq 0.3$
$\lg 3\simeq 0.5$
$\lg 5\simeq 0.7$
$\lg 7\simeq 0.85$
$\frac{1}{\sqrt{2}}=0.707$
$\sqrt{2}=1.44$

$|\cdot|=\sqrt{R_e^2+I_m^2}$
$\theta=\arctg\frac{I_m}{R_e}$
arg

Transf Z

$f(t)$	$F(z)$
1. $\delta_0(t)=\begin{cases}1, t=0\\ 0, t\neq 0\end{cases}$	1. 1
2. $\delta_k(t)=\delta_0(t-k)=\begin{cases}1, t=k\\ 0, t\neq k\end{cases}$	2. $\frac{1}{z^k}$
3. $u(t)=\begin{cases}0, t<0\\ 1, t\geq 0\end{cases}$	3. $\frac{z}{z-1}$
4. t	4. $\frac{z}{(z-1)^2}$
5. t^2	5. $\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
6. t^3	6. $\frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$
7. a^t	7. $\frac{z}{z-a}$
8. $t\cdot a^t$	8. $\frac{az}{(z-a)^2}$
9. $t\cdot a^{t-1}$	9. $\frac{z}{(z-a)^2}$
10. e^{iat}	10. $\frac{z}{z-e^{ia}}$
11. $\sin(at)$	11. $\frac{z\sin a}{z^2-2z\cos a+1}$
12. $\cos(at)$	12. $\frac{z(z-\cos a)}{z^2-2z\cos a+1}$
13. $\frac{1}{t!}$	13. $e^{\frac{1}{z}}$

- $\mathcal{Z}[f(t-m)]=\frac{1}{z^m}F(z)$
- $\mathcal{Z}[f(t+m)]=z^m\left(F(z)-\sum_{t=0}^{m-1}f(t)\cdot z^{-t}\right)$
- $f*g=h(t)=\begin{cases}0, t<0\\ \sum_{k=0}^{t}f(k)\,g(t-k), t=0,1,2\ldots\end{cases}$

Pol simplu: $\underset{z=z_0}{\mathrm{Res}}\, f(z)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\cdot f(z)$

Pol de ordin „m": $\underset{z=z_0}{\mathrm{Res}}\, f(z)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\left\{\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m\cdot f(z)\right]\right\}$

T. Reziduurilor: $\oint_\gamma f(z)dz=2\pi i\sum_{j=1}^{k}\underset{z=z_j}{\mathrm{Res}}\, f(z)$

Scanned with CamScanner

EVOLUȚIA STĂRII

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, $x(0) = x_0$

$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau)\, d\tau$ ← tau

$= \phi(t, x_0, 0) + \phi(t, 0, u(\cdot)) = x_l(t) + x_f(t)$

$\phi(t) = e^{At}$ Matricea de tranziție

$x_l(t) = e^{At}x_0$ EVOLUȚIE LIBERĂ

$y(t) = C \cdot e^{At}x_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)} Bu(\tau)\, d\tau = y_l(t) + y_f(t)$

$y_l(t) = C \cdot e^{At} x_0$ RĂSPUNS LIBER

MATRICEA DE TRANSFER

$T(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$

ECHIVALENȚA PE STARE

$(A,B,C,D) \simeq (\tilde{A},\tilde{B},\tilde{C},\tilde{D})$ au același număr de intrări și de ieșiri și aceeași dimensiune a spațiului stărilor ($p=\tilde{p}$, $m=\tilde{m}$, $n=\tilde{n}$) s.m. echiv pe stare dacă $\exists$ o matrice T inversabilă numită transformare a.î.:

$\tilde{A} = TAT^{-1}$; $\tilde{B} = TB$; $\tilde{C} = CT^{-1}$; $\tilde{D} = D$

ECHIVALENȚA INTRARE-IEȘIRE

$n \neq \tilde{n}$

$(A,B,C,D) \simeq (\tilde{A},\tilde{B},\tilde{C},\tilde{D})$ au același nr de intrări ($m=\tilde{m}$) și același nr de ieșiri ($p=\tilde{p}$) s.m echiv intrare-ieșire dacă au aceeași matrice de transf.

$\tilde{T}(s) = \tilde{C}(sI-\tilde{A})^{-1}\tilde{B} + \tilde{D} = C(sI-A)^{-1}B + D = T(s)$

și $D = T(\infty) = \tilde{T}(\infty) = \tilde{D}$

Două sisteme echivalente pe stare sunt echiv intrare-ieșire. Reciproc NU!

STABILITATE

$\dot{x}(t) = Ax(t)$, $x(0) = x_0$

- internă (LIAPUNOV)

  - intern stabil dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $(\forall) x_0$ cu $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$ avem $\|x(t)\| \le \varepsilon$

  - intern asimptotic stabil dacă

$\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0$, $(\forall) x_0$

$\lim_{t\to\infty} e^{At} = 0$

NUCLEUL MATRICII

$Ker(A) = \{x \in \mathbb{R}^{nr\ col A} \mid Ax = 0\}$

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

FUNCȚII DE TRANSFER RAȚIONALE

$H(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{B(s)}{A(s)}$ ireductibilă

→ zerouri finite = rădăcinile lui $B(s)$

→ poli finiți = rădăcinile numitorului $A(s)$

→ zerourile/polii la infinit = zerourile/polii în 0 ai lui $H(\frac{1}{s})$

STABILITATE

1. STABIL BIBO în sens strict $\Leftrightarrow$ toți polii lui $H(s)$ au partea reală strict negativă. $Re\, p_i < 0, \forall i = \overline{1,k}$

2. STABIL BIBO în sens nestrict $\Leftrightarrow$ $Re\, p_i \le 0, \forall i = \overline{1,k}$ iar acei poli cu $Re\, p_i = 0$ sunt simpli.

HURWITZ

$p(s) = a_m s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0$

$\boxed{a_m > 0}$, $p(s)$ are toate rădăcinile în $\mathbb{C}^-$ $\Leftrightarrow$ toți minorii principali ai matricii Hurwitz sunt strict pozitivi. Analog dacă $\boxed{a_m < 0}$ sunt strict negativi

$H = \begin{bmatrix} a_{m-1} & a_{m-3} & a_{m-5} & \dots & 0 \\ a_m & a_{m-2} & a_{m-4} & \dots & 0 \\ 0 & a_{m-1} & a_{m-3} & \dots & \\ 0 & a_m & a_{m-2} & \dots & \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}$

$H^{[i]} > 0, \forall i = \overline{1,m}$

RĂSPUNSUL SISTEMELOR DE ORDINUL I

1. LA TREAPTĂ

$H(s) = \frac{K}{Ts+1} \Rightarrow Y(s) = \frac{K}{s(Ts+1)} = \frac{K}{s} - \frac{K}{s+\frac{1}{T}} \Rightarrow$

$\Rightarrow y(t) = (K - Ke^{-\frac{t}{T}}) \cdot 1(t)$

* Regim staționar identic cu intrarea pt $K=1$
* Supraregląj $\sigma = 0$
* Timp tranzitoriu $t_t \simeq 4T$ $(1 - Ke^{-\frac{t}{T}}) < 0.02K)$

2. LA RAMPĂ

$Y(s) = \frac{K}{s^2(Ts+1)} = \frac{KT}{s+\frac{1}{T}} + \frac{K}{s^2} - \frac{KT}{s}$

$\Rightarrow y(t) = KTe^{-\frac{t}{T}} \cdot 1(t) + K(t-T)1(t)$

RĂSPUNSUL SISTEMELOR DE ORDINUL II

$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$

$\Rightarrow y(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t + \varphi)$

$\cos\varphi = \xi$

* Timp tranzitoriu $t_t \simeq \frac{4}{\xi\omega_n}$
* $y_{max} = 1 + e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$
* Supraregląj $\sigma = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$

Scanned with CamScanner

CONTROLABILITATE

(A,B), $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$

Matricea de ctrb: $R \in \mathbb{R}^{n\times(nm)}$

$$R = [B \;\; AB \;\; A^2B \; \dots \; A^{n-1}B]$$

$\mathrm{Im}R$ = subspațiul ctrb al (A,B)

O stare x este ctrb dacă $x \in \mathrm{Im}R$

(A,B) ctrb $\Leftrightarrow$ rang $R = n$.

TDC $\rightarrow$ (A,B,C,D) nectrb

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D \in {}^{p\times m}$

Sistemul rezultat este echivalent cu (A,B,C,D)

1. Se det. T^{-1} matrice inversabilă printr-o completare a oricărei baze a subspațiului $\mathrm{Im}R$ / Se aleg coloane liniar din R și se completează cu vectori din baza canonică ($\mathrm{Im}R$ stânga)
2. $\hat{A} = TAT^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} A_c & A_3 \\ 0 & A_2 \end{array}\right]$

$\hat{B} = TB$; $C = CT^{-1} = [C_c | C_2]$

$= \begin{bmatrix} B_c \\ 0 \end{bmatrix}$

Obs: Valorile proprii ale lui A_c sunt ctrb și sunt incluse în valorile proprii ale lui A.

PBH pentru **CONTROLABILITATE**

(A,B) ctrb $\Leftrightarrow$ rang $[sI - A | B] = n$;

$\forall\, s \in \Lambda(A) \rightarrow s$ val proprie a lui A.

PRINCIPIUL DUALITĂȚII

(C,A) obsv $\Leftrightarrow$ (A^T, C^T) ctrb

(A,B) ctrb $\Leftrightarrow$ (B^T, A^T) obsv

REALIZABILITATE

Matricea de transfer $T(s)$

$$T(s) = C(sI-A)^{-1}B + D$$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$

$$T(s) = \left[\frac{n_{ij}(s)}{p_{ij}(s)}\right] \quad \text{grad } p_{ij} > n_{ij}, \; \forall\, i,j$$

Rapoartele sunt ireductibile

$D = T(\infty)$

$\tilde{T}(s) = T(s) - D$

OBSERVABILITATE

(C,A), $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Matricea de obsv: $Q \in \mathbb{R}^{(np)\times n}$

$Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$ $\quad$ $\mathrm{Ker}Q$ = subspațiul neobservabil al (C,A)

O stare x este obsv dacă $x \notin \mathrm{Ker}Q$

(C,A) obsv $\Leftrightarrow$ rang $Q = n$

TDO $\rightarrow$ (A,B,C,D) neobservabil

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$

Sistemul rezultat $(\hat{A},\hat{B},\hat{C},\hat{D})$ este echiv cu (A,B,C,D)

1. Se det T^{-1} matricea inversabilă printr-o completare a oricărei baze a subspațiului neobsv $\mathrm{Ker}Q$ cu vectori din baza canonică. ($\mathrm{Ker}Q$ stânga)
2. $\hat{A} = TAT^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_3 \\ 0 & A_o \end{array}\right]$

$\hat{B} = TB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_o \end{bmatrix}$; $\hat{C} = CT^{-1} = [0 | C_o]$

PBH pentru **OBSERVABILITATE**

(C,A) obsv $\Leftrightarrow$ rang $\begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix} = n$, $(\forall)\, s \in \Lambda(A)$

s val proprie a lui A

$\tilde{T}(s) = C(sI-A)^{-1}B$

$$\tilde{T}(s) = \frac{K_0 + K_1 s + \dots + K_{n-1}s^{n-1}}{\gamma_0 + \gamma_1 s + \dots + \gamma_{n-1}s^{n-1} + s^n}$$

cel mai mic multiplu comun al numitorilor tuturor elem lui $\tilde{T}(s)$

K_i, $i = \overline{0, n-1}$, sunt $p\times m$ matrici

RSC Obs: NU este neapărat obsv! Poate fi!

$$A = \begin{bmatrix} 0_m & I_m & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & I_m \\ -\gamma_0 I_m & -\gamma_1 I_m & \dots & -\gamma_{n-1} I_m \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0_m \\ \vdots \\ 0_m \\ I_m \end{bmatrix}$$

$C = [K_0 \;\; K_1 \dots K_{n-1}]$ $\qquad$ D $p\times m$

RSO Obs: NU este neapărat ctrb! Poate fi!

$$A = \begin{bmatrix} 0_p & 0 & -\gamma_0 I_p \\ I_p & & -\gamma_1 I_p \\ 0 & \ddots \; I_p & -\gamma_{n-1} I_p \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} K_0 \\ K_1 \\ \vdots \\ K_{n-1} \end{bmatrix}$$

$C = [0_p \;\; 0_p \; \dots \; I_p]$ $\qquad$ D $p\times m$

Scanned with CamScanner

REALIZARE MINIMALĂ

minimală = ctrb + obsv

intrări = coloane
ieșiri = linii

CALCUL:

I Se scrie RSC
$\Rightarrow (A,B)$ ctrb. Se aplică TDO perechii (C,A)
$\Rightarrow T(s) = C_0 (sI - A_2)^{-1} B_0 + D$
(A_0, B_0, C_0, D) minimală

! Obs $T^{-1} = T^T$ ortogonal

II Se scrie RSO $\Rightarrow (C,A)$ obsv. Se aplică TDC perechii (A,B).

PROCEDURA DE ALOCARE $m=1$

1. (A,b) unde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$
Se alege $\Lambda_{A+BF} = \{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}\} = \{-1,-1,\dots,-1\}$
$\chi(s) = \prod_{i=1}^{n} (s-\lambda_i)$

$F \in \mathbb{R}^{m\times n} = \mathbb{R}^{1\times n}$
↳ matricea de reacție

2. $R = \text{ctrb}(A,b)$
3. $R^T q = e_n = [0\ 0 \dots 1]^T$
4. $f^T = -q^T \cdot \chi(A)$

} Ackermann

PROCEDURA DE ALOCARE $m>1$

1. (A,B) ctrb unde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$
set simetric de valori proprii
$\chi(s) = \prod_{i=1}^{n} (s-s_i)$
2. Se alege $\tilde{F} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ și $g \in \mathbb{R}^m$ aleator
$A_{\tilde{F}} = A + B\tilde{F}$; $b = Bg$
De obicei se alege $\tilde{F} = 0$ și $b = 1$
Se verifică dacă $(A_{\tilde{F}}, b)$ ctrb.
3. Se aplică procedura de alocare pt $m=1$ perechii $(A_{\tilde{F}}, b)$ și polinomului $\chi(s) \Rightarrow f \in \mathbb{R}^m$
4. $F = \tilde{F} + g f^T$

PROBLEMA DE ALOCARE $\Leftrightarrow$ (A,B) ctrb și (C,A) obsv

PROBLEMA DE STABILIZARE $\Leftrightarrow$ (A,B) stabilizabilă și (C,A) detectabilă.

(A,B) stabilizabilă dacă $\exists F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a.î.
$\Lambda(A+BF) \subset \mathbb{C}_-$

(C,A) detectabilă dacă $\exists K \in \mathbb{R}^{n\times p}$ a.î.
$\Lambda(A+KC) \subset \mathbb{C}_-$

(A,B) alocabilă dacă $\exists F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a.î.
$\Lambda(A+BF) = \Lambda_0$ mulțime simetrică

CONEXIUNE PARALEL

$T_1 = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D_1 \end{array}\right]$ $T_2 = \left[\begin{array}{c|c} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & D_2 \end{array}\right]$

Au același nr de intrări și de ieșiri
$T(s) = T_1(s) + T_2(s)$

Realizare:

$$T(s) = \left[\begin{array}{cc|c} A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & A_2 & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D_1 + D_2 \end{array}\right]$$

CONEXIUNE SERIE

Nr ieșiri T_1 = Nr intrări T_2
$T(s) = T_2(s) T_1(s)$

Realizare:

$$T(s) = \left[\begin{array}{cc|c} A_2 & B_2C_1 & B_2D_1 \\ 0 & A_1 & B_1 \\ \hline C_2 & D_2C_1 & D_2D_1 \end{array}\right]$$

HAUTUS STABILIZABILITATE

(A,B) stabilizabilă $\Leftrightarrow$ rang $[sI-A \quad B] = n$
$(\forall)\ s \in \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{C}^0$

HAUTUS DETECTABILITATE

(C,A) detectabilă $\Leftrightarrow$ rang $\begin{bmatrix} sI-A \\ C \end{bmatrix} = n$
$(\forall)\ s \in \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{C}^0$

COMPENSATORUL KALMAN

$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = (A+LC+BF+LDF)\hat{x} - Ly \\ u = F\hat{x} \end{cases}$

val proprii stabilizează sist

! $K(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_K & B_K \\ \hline C_K & D_K \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A+LC+BF+LDF & -L \\ \hline F & 0 \end{array}\right]$

$\Lambda(A+BF) \subset \mathbb{C}^-$; $\Lambda(A+LC) \subset \mathbb{C}^-$

alocare normală și alocă pt (A^T, C^T)

ESTIMATOR

1. Alocare pentru (A^T, C^T) a.î. $\Lambda(A^T + C^T\tilde{F}) \subset \mathbb{C}^-$
$\tilde{F} = f^T$
2. $H = -\tilde{F}^T$; $V = A - HC$; $K = V = J$;
$M = B - HD$; $P = 0$

IMAGINEA MATRICII

$\text{Im} A = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right\}$

Rezolv sist $\Rightarrow \text{Im}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\begin{cases} \dot{w}(t) = (A-HC)w(t) + Bu(t) - HDu(t) + Hy(t) \\ \hat{x}(t) = w(t) \end{cases}$

Scanned with CamScanner

Diagrame Bode

Ex: $s = j\omega$

$$H(s) = \frac{0.1\,(s+1)}{s^2(s+10)} = \frac{0.1\,(s+1)}{10s^2\left(1+\frac{s}{10}\right)}$$

$$H(s) = \frac{\overset{1}{0.01}\;\overset{2}{(s+1)}}{\underset{3}{s^2}\;\underset{4}{\left(1+\frac{s}{10}\right)}}$$

① $k = 0.01$ $\quad 20\lg(0.01) = 20(-2) = -40$

② $s+1 = (j\omega+1)$

$N=1 \quad z=1$

③ $\frac{1}{s^2} = \frac{1}{(j\omega)^2}$

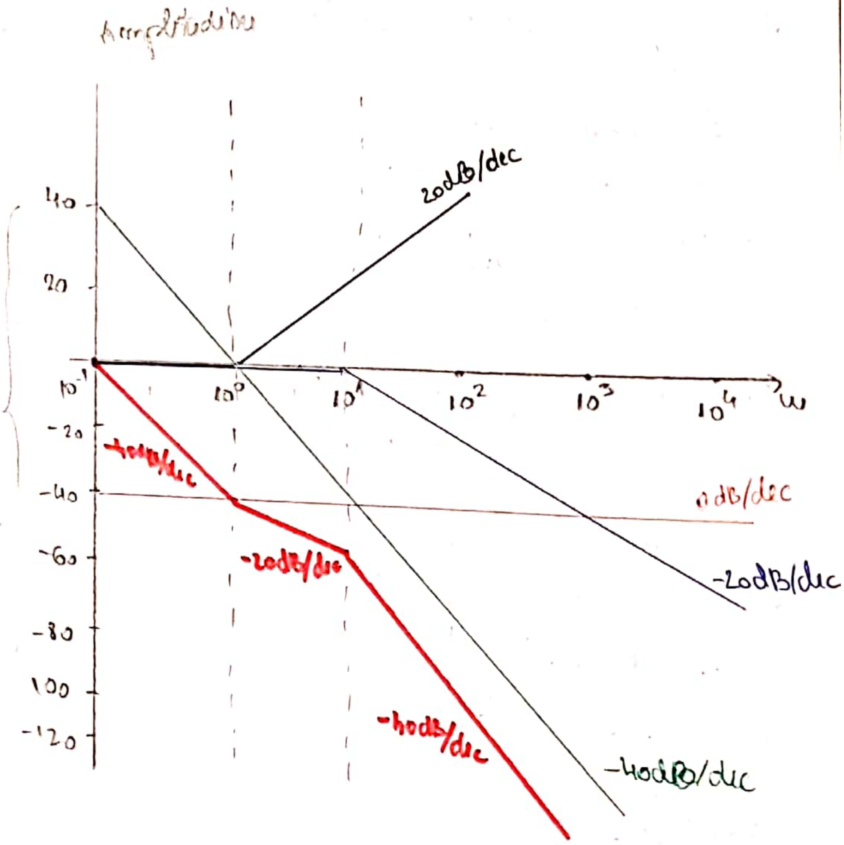
$N=2$

④ $\frac{1}{1+\frac{s}{10}} = \frac{1}{1+\frac{j\omega}{10}}$

$P=10 \;;\; N=1$

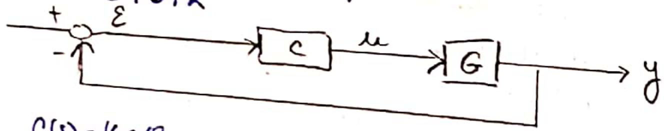
Pentru fază, se procedează exact la fel

Le adun doar la prima dec



Reglator **PID**

① $G(s) = \frac{1}{s^2+s+2}$ f. de transf.



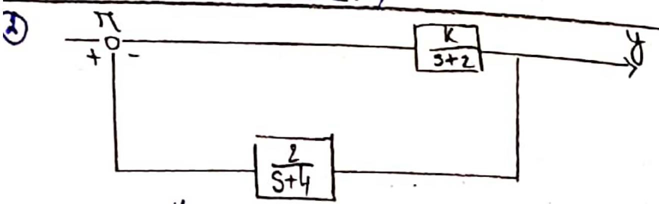
$C(s) = K_{6/R}$

$$T_{yr}(s) = \frac{CG}{1+CG} = \frac{k\cdot\frac{1}{s^2+s+2}}{1+k\cdot\frac{1}{s^2+s+2}} = \frac{k}{s^2+s+2+k} \Rightarrow k > -2$$

- $\varepsilon = \hat{x} - x$
- $\dot{\varepsilon} = (A+LC)\,s$
- $\varepsilon(t) = e^{(A+LC)t}\cdot\varepsilon(0)$

---

②



$$T_{yr} = \frac{\frac{k}{s+2}}{1+\frac{2k}{(s+2)(s+4)}} = \frac{k(s+4)}{s^2+6s+8+2k} \;;\; T_{yr}(s\to 0) = \frac{4k}{8+2k}$$

Vineri ① $P(s) = \frac{1}{s+0.1}$ $\quad C(s) = ?$ $\quad H(s) = \frac{k}{Ts+1}$

$t_t = 1 \Rightarrow t_t \simeq 4T \Rightarrow T \simeq \frac{1}{4}$

$\varepsilon_{st} = 0$

$$C = \frac{H}{(1-H)P} = \frac{\frac{k}{\frac{1}{4}s+1}}{\frac{\frac{1}{4}s+1-1}{\frac{1}{4}s+1}\cdot\frac{1}{s+0.1}} = 4k + \frac{4k\cdot 0.1}{s}$$

$K_p \qquad K_i$

---

② $P(s) = \frac{100}{(s+2)(50s+1)}$ $\qquad H(s) = \frac{k}{Ts+1}$

se poate neglija $1 \ll 50$

- lege de reglare a.î. sistemul să fie de ordinul aperiodic

$t_t \leq 100s$

$\varepsilon_{st} = 0$

$r(t) = 1(t) \Rightarrow R(s) = \frac{1}{s}$

- $\varepsilon_{st} = \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{s\to 0} s(R(s) - Y(s)) = 0$, $\quad Y(s) = H(s)\cdot R(s)$

$= \lim_{s\to 0} s\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s}\cdot\frac{k}{Ts+1}\right)$

$= \lim_{s\to 0}\left(\frac{Ts+1-k}{Ts+1}\right) = \frac{1-k}{1} = 0 \Rightarrow \boxed{k=1}$

- $t_t \simeq 4T \Rightarrow 100 \simeq 4T \Rightarrow T = 25 \Rightarrow H(s) = \frac{1}{25s+1}$

$C = K + \frac{K_i}{s} + K_D s$

$$C = \frac{H}{(1-H)P} = \frac{\frac{1}{25s+1}}{\left(\frac{25s+1-1}{25s+1}\right)\frac{100}{50s+1}} = \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{2500s}\right) \Rightarrow P_i$$

$K_i \neq 0 \quad K_D = 0$

---

③ $P(s) = \frac{30}{(s+20)(s+0.5)}$ $\qquad C(s) = ?$

$H_{yr}(s) = \frac{1}{s^2+\sqrt{2}s+1}$

$H_{yr} = \frac{PC}{1+PC} \Rightarrow PC = \frac{H_{yr}}{1-H_{yr}} \Rightarrow C = \frac{H}{(1-H)P}$

$$C = \frac{(s+20)(s+0.5)}{30s(s+\sqrt{2})} \simeq \left(\frac{1}{30} + \frac{2}{3}s\right) \Rightarrow P.I$$

$\qquad P \qquad I$

Scanned with CamScanner

① $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$

1) Este sist stabil?

sist stabil $\Leftrightarrow \lambda(A)\in\mathbb{C}_-$

$$P_A(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ 0 & -2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(-2-\lambda)=-(1-\lambda)(2+\lambda)$$

$$P_A(\lambda)\overset{def}{=}\det(A-\lambda I_2)$$

$P_A(\lambda)=0 \Rightarrow \lambda\in\{-2,1\}$

↳ $1\notin\mathbb{C}_-$ ⇒ sist nu este stabil

2) Calc. răsp. sist. la intrare treaptă

3) Calc. funcția de transfer

$u(t)=1(t) \Rightarrow y(t)$

$$\boxed{H(s)=C(sI_2-A)^{-1}\cdot B+D}$$

$$H(s)=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\left[\begin{pmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$H(s)=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}s-1 & -1\\ 0 & s+2\end{bmatrix}}_{X} ;\quad X^T=\begin{bmatrix}s-1 & 0\\ -1 & s+2\end{bmatrix}$$

$\det(X)=(s-1)(s+2)$

$$X^{-1}=\frac{1}{(s-1)(s-2)}\begin{bmatrix}x^*_{11} & -x^*_{12}\\ -x^*_{21} & x_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s-1} & \frac{1}{(s-1)(s-2)}\\ 0 & \frac{1}{s+2}\end{bmatrix}$$

$$H(s)=\frac{2(s+1)}{(s-2)(s+2)}$$

$$\boxed{Y(s)=H(s)\cdot U(s)}$$

$$Y(s)=\frac{2(s+1)}{(s-1)(s+2)}\cdot\frac{1}{s}=\frac{2(s+1)}{s(s-1)(s+2)}$$

Poli simpli: $s_0=0$; $s_1=1$; $s_2=-2$.

$$\boxed{y(t)=\sum \operatorname{Res} Y(s)\cdot e^{st}}$$

$$\operatorname*{Res}_{s=0} Y(s)\cdot e^{st}=\lim_{s\to0}s\cdot Y(s)\cdot e^{st}=\lim_{s\to0}\frac{2(s+1)}{(s-1)(s+2)}e^{st}=-1$$

$$\operatorname*{Res}_{s=1} Y(s)\cdot e^{st}=\frac{4}{3}e^{t} ;\quad \operatorname*{Res}_{s_2=-2} Y(s)\cdot e^{st}=-\frac{1}{3}e^{-2t}$$

$\Rightarrow y(t)=-1-\frac{1}{3}e^{-2t}+\frac{4}{3}e^{t}$ Răsp sist la intrare treaptă.

componenta tranzitorie

6) Este (A,B,C) stabilizabil?

(A,B,C) stabilizabil dacă (A,B) stabilizabil

(A,B) stabilizabil dacă rang $[sI_2-A\,|\,B]=n$, $\forall s\in\mathbb{C}_-$

$$\text{rang}[sI_2-A|B]=\text{Rang}\begin{bmatrix}s-1 & -1 & 1\\ 0 & s+2 & 1\end{bmatrix}\overset{?}{=}2$$

Avem 3 minori de verificat

1. $\Delta_1=\begin{vmatrix}s-1 & -1\\ 0 & s+2\end{vmatrix}=(s-1)(s+2)=0 \Rightarrow s\in\{-2,1\}$

Dacă $s=1 \Rightarrow M=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & 3 & 1\end{bmatrix}$

↳ $\det\neq0 \to$ rang $M=2$

2. $\Delta_2=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ s+2 & 1\end{vmatrix}=-1-s-2=-s-3 \Rightarrow s=-3$

3. $\Delta_3=\begin{vmatrix}s-1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=s-1=0 \Rightarrow s=1$ (verificat deja)

1., 2., 3. ⇒ (A,B) stabilizabilă ⇒ (A,B,C) stabilizabilă.

7) Este (A,B,C) o realizare minimală?

$R=[B\ AB]=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{bmatrix}$

$\det R=-4\neq0 \Rightarrow$ rang $R=\dim A \Rightarrow (A,B)$ ctrb (1)

$Q=\begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$

$\det Q=-2\neq0 \Rightarrow$ rang $Q=\dim A \Rightarrow (A,C)$ obsv (2)

Din (1) și (2) ⇒ realizare minimală.

Temă Det. răsp. la intrarea $x(t)=\cos t$.

$Y(s)=H(s)\cdot X(s)$

↳ despart în fracții simple

↳ aplic $\mathcal{L}^{-1}$ ca să ajung în timp $y(t)$

Cristina $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}$

a) Dimensiunea spațiului neobservabil?

$Q=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & -2\end{bmatrix}$

Ker Q = subspațiul neobservabil

$\text{Ker}\,Q=\{x\in\mathbb{R}^2 \mid Qx=0\}=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \dim(\text{Ker}\,Q)=0$

b) Calculați răspunsul liber pentru $x(0)=\begin{bmatrix}3\\ 3\end{bmatrix}$

$e^{At}=?$

$P_A(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\lambda(\lambda+1)-2=\lambda^2+\lambda-2$

$\lambda_1=1$; $\lambda_2=-2$; $\Delta=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

Calc. vectorii proprii

$Av=\lambda_1 v$ $\quad v=\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}$ $\Rightarrow P=[v_{\lambda_2}\,|\,v_{\lambda_1}]$

$Av=\lambda_2 v$

$e^{A}=P\cdot e^{\Delta}\cdot P^{-1} \Rightarrow e^{At}$

$\Rightarrow x_e=e^{At}x(0)$ evoluția liberă

$\Rightarrow y_e=C\cdot e^{At}\cdot x(0)$ răsp. liber

Scanned with CamScanner

DENIS

① $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\2&1&-2\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$; $C=[\beta \;\; 1 \;\; 0]$

a) Sist stabil?

$\det(\lambda I_3 - A)=0 \iff \begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 2 & 1 & \lambda+2\end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda+2)-2-\lambda=0$

$\Rightarrow (\lambda+2)(\lambda^2-1)=0 \Rightarrow \Lambda(A)=\{-2,-1,1\} \Rightarrow$ sist instabil

b) $\beta=?$ a.î. sist obsv? Dar minimal?

$Q=\begin{bmatrix}C\\CA\\CA^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta&1&0\\0&\beta&1\\2&1&\beta-2\end{bmatrix} \rightsquigarrow \det Q=(\beta-2)(\beta^2-1)$

$\det Q=0 \Rightarrow \beta\in\{-1,1,2\}$ (1)

$\beta\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1,2\}$ pt ca sist să fie obsv. $\Big\rangle$ sist min.

$R=\text{ctrb}(A,b) \rightsquigarrow \det R\neq 0 \Rightarrow$ ctrb (2)

c) Compensator Kalman

Ⓘ $A+BF$ a.î. $\Lambda(A+BF)\in\mathbb{C}_-$

$\Lambda(A+BF)=\{-1,-1,-1\} \rightsquigarrow \chi(s)=(s+1)^3$

↳ ales de noi

1. $R^Tg=e_m \iff \begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&-2\\1&-2&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}g_1\\g_2\\g_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}g_3=0\\g_2=0\\g_1=1\end{matrix}$

$\Rightarrow g=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

2. $f^T=-g^T\chi(A)=[1\;0\;0](A+I_3)^3=[-3\;-4\;-1]$

Verificare: $A+Bf$ valori proprii $=\Lambda(A+BF)$ ales

Ⓘⓘ $A+LC$ a.î. $\Lambda(A+LC)\in\mathbb{C}^-$

Alocare pt $(A^T,C^T) \Rightarrow \Lambda(A^T+C^TE)\in\mathbb{C}_-$

$\Lambda(A^T+C^TE)=\{-1,-1,-1\}$

$R=\text{ctrb}(A^T,C^T)=\begin{bmatrix}0&0&2\\1&0&1\\0&1&-2\end{bmatrix}$

(pt $\beta=0$ dat de b))

1. $R^Tg=e_m \rightarrow g=\begin{bmatrix}\frac12\\0\\0\end{bmatrix}$

2. $f^T=-g^T\chi(A^T)=-[\frac32 \;\; 1 \;\; 2]$

Atunci $E=f^T \Rightarrow L^T=f$

* De scris matricea K

② $T(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s^2-1} & \frac{2}{s^2}\\ \frac{2s}{s-1} & \frac1s\end{bmatrix}$ $\quad m=2,\; p=2$

Stări spaţiu?

$D=T(\infty)=\begin{bmatrix}0&0\\2&0\end{bmatrix}$

$\tilde T(s)=T(s)-D=\begin{bmatrix}\frac{1}{s^2-1} & \frac{2}{s^2}\\ \frac{2}{s-1} & \frac1s\end{bmatrix}$

c.m.m.m.c (al numitorilor) $=s^2(s^2-1)$

$\tilde T(s)=\frac{1}{s^2(s^2-1)}\begin{bmatrix}s^2 & 2(s^2-1)\\ 2s^2(s+1) & s(s^2-1)\end{bmatrix}$ $\quad \gamma_0=0\;\gamma_1=0\;\gamma_2=1\;\gamma_3=0$

$=\frac{1}{s^4-s^2}\Big\{s^3\underbrace{\begin{bmatrix}0&0\\2&1\end{bmatrix}}_{K_3}+s^2\underbrace{\begin{bmatrix}1&2\\2&0\end{bmatrix}}_{K_2}+s\underbrace{\begin{bmatrix}0&0\\0&-1\end{bmatrix}}_{K_1}+\underbrace{\begin{bmatrix}0&-2\\0&0\end{bmatrix}}_{K_0}\Big\}$

Fac RSO sau RSC.

Bode în discret

$y(n)=\frac12[u(n)+u(n-1)]\,\Big|\,\mathcal{Z} \Rightarrow Y(z)=\frac12\left[U(z)+\frac1z U(z)\right]$

$H(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac12(1+z^{-1}) \Rightarrow H(e^{j\omega})=\frac12(1+e^{-j\omega})=$

$=\frac{e^{-j\frac{\omega}{2}}}{2}\left[e^{j\frac{\omega}{2}}+e^{-j\frac{\omega}{2}}\right]$

$H(e^{j\omega})=\cos\frac{\omega}{2}\cdot e^{-j\frac{\omega}{2}}$

Amplitudinea: $|H(e^{j\omega})|=\cos\frac{\omega}{2}>0 \Rightarrow \omega\in[0,\pi]$

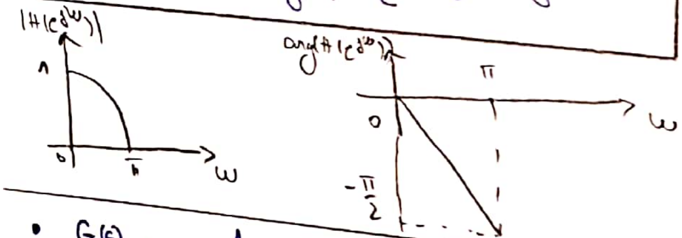
Faza: $\arg(H(e^{j\omega}))=-\frac{\omega}{2} \Rightarrow$ faza e liniară

Pt $U=e^{j\cdot 0\cdot n}=1 \Rightarrow y(n)=1 \iff H(0)=1$

Pt $U=e^{j\pi n}=(-1)^n \Rightarrow y(n)=0 \iff H(\pi)=0$

$u(t)=e^{j\omega t} \Rightarrow y(t)=u(t)\cdot H(j\omega)$

$y(t)=u(t)\cdot|H(j\omega)|\cdot e^{j\arg(H(j\omega))}$



• $G(s)=\frac{1}{s^3+as^2+2s-2}$

a) stabilitatea sist în funcţie de a

(A,B,C,D) stabilă $\iff P_A(s)=s^3+as^2+2s-2$ este Hurwitz

$H=\begin{bmatrix}a&2&0\\1&2&0\\0&a&2\end{bmatrix}$

Evaluăm minorii principali din H

$H^{11}=a$; $H^{22}=2(a-1)$, $H^{33}=\det=4(a-1)$

Toţi trebuie să fie pozitivi $\Rightarrow$ sist stabil $\forall a>1$

Scanned with CamScanner

Problema 7.1. Fie sistemul definit de matricile

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},\quad C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix}.$$

Scrieţi condiţii necesare şi suficiente exprimate în termenii parametrilor reali $\lambda_i, b_i, c_i, i = 1,2$ pentru ca sistemul să fie

a) controlabil;

b) observabil.

Soluţie. a) *Metoda I.* Folosind criteriul PBH Evaluăm $\operatorname{rang}[\lambda I - A \;\; B]$ pentru $\lambda_i \in \Lambda(A), i = 1,2$. Avem

$$[\lambda_1 I - A \;\; B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_1 \\ 0 & \lambda_1 - \lambda_2 & b_2 \end{bmatrix}.$$

Această matrice păstrază rangul 2 dacă şi numai dacă minorul

$$\begin{vmatrix} 0 & b_1 \\ \lambda_1 - \lambda_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Prin urmare

$$\operatorname{rang}[\lambda_1 I - A \;\; B] = 2 \Leftrightarrow$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ şi $b_2 \neq 0$. Matricea $[\lambda_2 I - A \;\; B] = \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 \end{bmatrix}$ are rangul 2 dacă şi numai dacă minorul $\begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 & b_1 \\ 0 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ adică $\lambda_1 \neq \lambda_2$ şi $b_1 \neq 0$. În concluzie, sistemul este controlabil dacă şi numai dacă $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $b_1 \neq 0$ şi $b_2 \neq 0$.

Metoda a II-a. Folosind matricea de controlabilitate. Avem $R = \begin{bmatrix} b_1 & \lambda_1 b_1 \\ b_2 & \lambda_2 b_2 \end{bmatrix}$. Sistemul este controlabil dacă şi numai dacă $\operatorname{rang} R = 2 \Leftrightarrow \det R \neq 0 \Leftrightarrow b_1 b_2(\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0$, de unde rezultă că sistemul este controlabil dacă şi numai dacă $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $b_1 \neq 0$ şi $b_2 \neq 0$.

b) Similar cu punctul anterior sistemul este observabil dacă şi numai dacă $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $c_1 \neq 0$ şi $c_2 \neq 0$.

În final facem observaţia că dacă $\lambda_1 = \lambda_2$ sistemul nu este copntrolabil/observabil oricare ar fi $b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Problema 7.2. Fie sistemul

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Este sistemul controlabil? Dar observabil?

b) Determinaţi modurile controlabile/necontrolabile, respectiv pe cele observabile/neobservabile.

c) Scrieţi o stare controlabilă. Determinaţi o bază pentru subspaţiul controlabil $\mathcal{R}$ al perechii (A, B).

d) Aplicaţi teorema de descompunere controlabilă (TDC) perechii (A, B). Verificaţi rezultatul obţinut comparându-l cu răspunsul de la punctul b).

e) Scrieţi o stare neobservabila. Determinaţi o bază pentru subspaţiul neobservabil $\mathcal{N}$ al perechii (C, A).

f) Aplicaţi teorema de descompunere observabilă (TDO) perechii (C, A). Verificaţi rezultatul obţinut comparându-l cu răspunsul de la punctul b).

g) Aplicaţi teorema de descompunere structurală sistemului dat.

h) Calculaţi funcţia de transfer a sistemului dat. Ce observaţi?

Soluţie. a) Matricea de controlabilitate a sistemului este

$$R = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix}.$$

Observând că $\det R = 0$, rezultă că $\operatorname{rang} R < 3$ şi, prin urmare, sistemul nu este controlabil.

Matricea de observabilitate a sistemului este

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 4 & -7 & 4 \end{bmatrix}.$$

Calculăm

$$\det Q = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 4 & -7 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -3 & -7 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \\ -3 & -7 & -3 \end{vmatrix}.$$

Dezvoltând după linia intâi rezultă că

$$\det Q = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Aşadar, sistemul nu este observabil.

b) Pentru determinarea valorilor proprii ale matricii A calculăm

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & 4 & \lambda - 3 \end{vmatrix} \overset{\text{dezv. după } r_2}{=} (\lambda - 1)\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2.$$

Rezultă că $\Lambda(A) = \{1, 2, 2\}$. Pentru rezolvarea cerinţei testăm controlabilitatea şi observabilitatea fiecărei valori proprii, utilizăd criteriul PBH. Pentru $\lambda_1 = 1$,

$$\operatorname{rang}[\lambda_1 I - A \;\; B] = \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \leq 2,$$

din cauza liniei de zerouri prezentă. Prin urmare, 1 este valoare proprie necontrolabilă. Pentru $\lambda_{2,3} = 2$,

$$[\lambda_{2,3} I - A \;\; B] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Observăm că minorul

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{dezv. după } c_3}{=} -1 \neq 0 \rightarrow \operatorname{rang}[\lambda_{2,3} I - A \;\; B] = 3.$$

de unde rezultă că $\lambda_{2,3} = 2$ sunt valori proprii controlabile.

În continuare aplicăm acelaşi criteriu pentru calculul valorilor proprii (ne)observabile. Pentru $\lambda_1 = 1$,

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 I - A \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Observând că minorul

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{dezv. după } c_1}{=} 2\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

rezultă că 1 este valoare proprie observabilă. Pentru λ_2,

$$\begin{bmatrix} \lambda_2 I - A \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Observând că prima şi a treia coloană sunt identice, rezultă că

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} \lambda_2 I - A \\ C \end{bmatrix} < 3.$$

Prin urmare, $\lambda_2 = 2$ este valoare proprie neobservabilă.

c) O stare $x \in \mathbb{R}^3$ este controlabilă dacă şi numai dacă

$$x \in \Im(R) = \{x \in \mathbb{R}^3 | x = Rz, z \in \mathbb{R}^3\}.$$

Fie $z = [z_1 \; z_2 \; z_3]^T \in \mathbb{R}^3$. Rezultă că $x \in \Im(R)$ are forma

$$x = \begin{bmatrix} -z_2 - 4z_3 \\ 0 \\ z_1 + 3z_2 + 8z_3 \end{bmatrix}.$$

Mai departe se poate scrie că

$$x = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}(z_2 + 4z_3) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}(z_1 + 3z_2 + 8z_3).$$

Rezultă că o bază pentru subspaţiul controlabil $\mathcal{R} = \Im(R)$ poate fi aleasă mulţimea

$$\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}.$$

d) Pentru a putea aplica TDC, completăm baza calculată la punctul anterior până la o matrice inversabilă, i.e., alegem

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = T^T.$$

Aplicând transformarea T obţinem sistemul echivalent $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$, unde

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -4 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right],\quad \tilde{B} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right],\quad \tilde{C} = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

care evidenţiază partea necontrolabilă prin perechea de ordinul întâi $(1, 0)$. Într-adevăr, $\lambda = 1$ este valoare proprie necontrolabilă, aşa cum a fost calculat la punctul b).

e) O stare $x \in \mathbb{R}^3$ a sistemului dat este neobservabilă dacă şi numai dacă $x \in \ker Q \Leftrightarrow Qx = 0$ are soluţie. Rezolvând sistemul subdeterminat ($\det Q = 0$) găsim că o stare neobservabilă a sistemului dat este de forma

$$x = \begin{bmatrix} -\alpha \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Aşadar, subspaţiul neobservabil este

$$Q = \left\{\begin{bmatrix} -\alpha \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R}\right\}.$$

O bază pentru Q este uşor de găsit sub forma

$$\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

f) Pentru a aplica TDO, alegem transformarea T completând baza calculată la punctul anterior până la o matrice inversabilă, i.e.,

$$T_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow T_e^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicând transformarea, obţinem perechea $(\hat{C}, \hat{A})$, unde

$$\hat{A} = T_e^{-1} A T_e = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 4 & 2 \end{array}\right],\quad \hat{C} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Valoarea proprie nobservabilă 2 este evidenţiată prin perechea de ordinul întâi $(0, 2)$, care corespunde rezultatului de la punctul b).

g) De la punctul d) avem subsistemul controlabil

$$(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, [-1 \;\; 1]\right)$$

care este neobservabil. Matricea de observabilitate a acestui subsistem este

$$\overline{Q} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix},$$

de unde rezultă că subsistemul $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ este neobservabil. Pentru a aplica TDO subsistemului $(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C})$, calculăm o stare neobservabilă

$$\overline{x} = \begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{bmatrix} \in \ker \overline{Q} \Rightarrow \overline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}(\overline{x}_1 - \overline{x}).$$

Aşadar, subspaţiul neobservabil este

$$\tilde{Q} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\alpha \middle| \alpha \in \mathbb{R}\right\}.$$

Astfel, pentru TDO aplicat lui $(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C})$ alegem transformarea

$$\overline{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \overline{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

În total, calculăm transformarea T_{DS} pentru aplicarea TDS asupra sistemului dat cu $T_{DS} = T_c T_o$, unde

$$T_o = \operatorname{diag}(\overline{T}, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicând transformarea de coordonate T_{DS} sistemului dat, şi utilizând calculele de la subpunctele d) şi f) obţinem realizarea echivalentă $(\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C})$, unde

$$\widehat{A} = \left[\begin{array}{c|c|c} 2 & 1 & 2 \\ \hline 0 & \boxed{2} & -2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right],\quad \widehat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \boxed{1} \\ 0 \end{bmatrix},\quad \widehat{C} = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & \boxed{1} & -1 \end{array}\right].$$

h) Utilizând punctul g), observăm ca sistemul (A, B, C) dat are realizarea minimală $(2, 1, 1)$, de unde rezultă că funcţia de transfer a sistemului este

$$\frac{1}{s-2}.$$

Pentru a evidenţia încă o dată valorile proprii necontrolabile şi/sau neobservabile ale sistemului, adică polii şi zerourile funcţiei de transfer care se simplifică, calculăm funcţia de transfer a sistemului dat folosind realizarea calculată la punctul g), obţinută prin aplicatea TDS. Astfel, $T(s) = C(sI - A)^{-1}B = \widehat{C}(sI - \widehat{A})^{-1}\widehat{B}$. Calculăm matricea

$$(sI - \widehat{A})^{-1} = \frac{1}{(s-2)^2(s-1)}\begin{bmatrix} (s-1)(s-2) & s-1 & 2(1-s) \\ 0 & (s-2)(s-1) & 2(2-s) \\ 0 & 0 & (s-2)^2 \end{bmatrix}.$$

Prin urmare,

$$T(s) = \frac{(s-1)(s-2)}{(s-2)^2(s-1)}.$$

Se observă că $T(s)$ are doi poli şi două zerouri instabile identice date de valoarea proprie necontrolabilă $\lambda_1 = 1$ şi valoarea proprie neobservabilă $\lambda_2 = 2$.

Scanned with CamScanner

Problema 7.5. Se consideră sistemul liniar (A, B, C) cu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Scrieți realizarea obținută prin aplicarea teoremei de descomopunere structurală. Identificați modurile necontrolabile, modurile neobservabile și modurile care sunt necontrolabile și neobservabile simultan.

Soluție. Urmăm câțiva pași succesivi. Mai întâi aplicăm descompunerea controlabilă, iar părții controlabile îi aplicăm descompunerea observabilă. Combinând efectele celor două transformări de coordonate, obținem transformarea de coordonate care aplicată asupra sistemului (A, B, C), conduce la realizarea obținută prin TDS.

Pasul 1. Calculăm matricea de controlabilitate

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 5 \\ 1 & -4 & 5 & -4 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Observând că $l_4 = -l_3$, rang $R < 4 \Rightarrow$ sistemul nu este controlabil. Mai mult, deoarece există un minor de ordinul al treilea nenul, rang $R = 3$.

Pasul 2. Calculăm $T_c \in \mathbb{R}^{4\times4}$ transformarea necesară descompunerii controlabile a sistemului. Subspațiul controlabil este $\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R}^4 | Rz = x, z = [z_1 \; z_2 \; z_3 \; z_4]^T\}$. Astfel,

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}(z_1 + 3z_2 - 5z_3 + 5z_4) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}(z_1 - 4z_2 + 5z_3 - 4z_4) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}(z_1 - z_3 + 2z_4).$$

De unde rezultă că o bază subspațiului controlabil $\mathcal{R}$ este

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Completând până la o matrice inversabilă, alegem

$$T_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow T_c^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicând transformarea de coordonate, obținem realizarea echivalentă $(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C})$, cu

$$\overline{A} = T_c^{-1}AT = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right], \overline{B} = T_c^{-1}B = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \hdashline 0 \end{array}\right], \overline{C} = CT_c = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Partea controlabilă a sistemului dat are o realizare (A_c, B_c, C_c), cu

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observăm că -1 este valoare proprie necontrolabilă.

Pasul 3. Calculăm subspațiul observabil al sistemului (A_c, B_c, C_c) calculat la pasul anterior. Matricea de observabilitate a acestui sistem este

$$Q_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Se vede imediat că rang $Q_c \leq 2$. Observând că, spre exemplu, minorul de ordinul al doilea

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang } Q_c =, 2$$

de unde rezultă că sistemul are un o valoare proprie neobservabilă.

Subspațiul neobservabil al sistemului (A_c, B_c, C_c) este $\mathcal{N}_c = \{x \in \mathbb{R}^3 | Q_c x = 0\}$. Ecuația algebrică $Q_c x = 0$ are soluțiile de forma $x = [\alpha \; -\alpha \; 0]^T, \alpha \in \mathbb{R}$. Așadar, o bază a subspațiului neobservabil $\mathcal{N}_c$ este

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Completând până la o matrice inversabilă, alegem transformarea $T_{co} \in \mathbb{R}^{3\times3}$ necesară aplicării TDO ca

$$T_{co} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow T_{co}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Aplicând TDO sistemului (A_c, B_c, C_c) obținem o realizare echivalentă $(\widetilde{A}_c, \widetilde{B}_c, \widetilde{C}_c)$, cu

$$\widetilde{A}_c = \left[\begin{array}{cc:c} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 2 & -1 \end{array}\right], \widetilde{B}_c = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \hdashline 1 \end{array}\right], \widetilde{C}_c = \left[\begin{array}{cc:c} 0 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

cu partea observabilă dată de subsitemul de ordinul al doilea (A_{co}, B_{co}, C_{co}), cu

$$A_{co} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B_{co} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, C_{co} = [0 \; 1].$$

Se observă că -1 este valoare proprie controlabilă dar neobservabilă, în timp ce $\Lambda(A_{co}) = 1, 1$ sunt valori proprii controlabile și observabile.

Pasul 4. Construim transformarea T_o și scriem transformarea de coordonate $T = T_cT_o$. Aplicată sistemului (A, B, C), conduce la o realizare care pune in evidență descompunerea structurală a sistemului. Astfel, $T_o = \text{diag}(T_{co}, 1)$, care să se aibă efect doar asupra părții controlabile a sistemului, lăsând partea necontrolabila neschimbată. Aplicând transformarea T sistemului (A, B, C), obținem realizarea echivalentă $(\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C})$, cu

$$\widehat{A} = \left[\begin{array}{cc:c:c} 0 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \\ \hdashline 2 & 0 & -1 & -1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right], \widehat{B} = \left[\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ \hdashline 1 \\ \hdashline 0 \end{array}\right], \widehat{C} = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

În final, obținem că -1 este valoare proprie controlabilă și neobservabilă. 1 și 1 sunt valori proprii controlabile și observabile, iar -1 este valoare proprie necontrolabilă și neobservabilă. O realizare minimală are ordinul al doilea si este dată de un sistem $(A_{min}, B_{min}, C_{min})$, cu

$$A_{min} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, B_{min} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, C_{min} = [1 \; 0].$$

Problema 7.8. Demonstrați că perechea (A, B), cu $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ și $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, este controlabilă dacă și numai dacă

a) $(A - BF, B)$ este controlabilă pentru orice $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

b) Nu există nici un vector propriu la stânga lui A care este ortogonal cu toate coloanele lui B.

Soluție. a) Utilizăm criteriul PBH. Dacă perechea (A, B) este controlabilă, atunci rangul matricei $[A - \lambda I \;\; B]$ este $n, \forall \lambda \in \mathbb{C}$. Știm faptul că înmulțirea cu o matrice inversabilă nu modifică rangul, prin urmare matricea

$$[A - \lambda I \;\; B]\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -F & I_m \end{bmatrix} = [A - BF - \lambda I \;\; B]$$

are tot rangul $n, \forall \lambda \in \mathbb{C}$. Prin urmare, perechea $(A - BF, B)$ este, la rândul său, controlabilă. Reciproca se demonstrează analog, i.e., matricele

$$[A - BF - \lambda I \;\; B] \quad \text{și} \quad [A - BF - \lambda I \;\; B]\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ F & I_m \end{bmatrix} = [A - \lambda I \;\; B]$$

au același rang, pentru orice $\lambda \in \mathbb{C}$.

Folosim din nou criteriul PBH. Dacă perechea (A, B) este controlabilă, atunci matricea $[A - \lambda I \;\; B]$ are liniile liniar independente. Prin urmare, nu există niciun vector $x \in \mathbb{R}^n$ astfel încât

$$x^T [A - \lambda I \;\; B] = [x^T(A - \lambda I) \;\; x^T B] = 0.$$

Cu alte cuvinte, nu există un vector $x \in \mathbb{R}^n$ care să îndeplinească simultan cele două condiții din ipoteză.

Problema 7.6. Se dă matricea de transfer

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s^2 + 2}{s^2 - 1} & \frac{s - 1}{s^2} & \frac{1}{s^2 + s} \end{bmatrix}.$$

Se cere:

1. Scrieți o realizare standard controlabilă și una standard observabilă.
2. Dintre realizările de stare scrise la punctul precedent, este vreuna minimală? Justificați.

Soluție. 1. Pentru ambele tipuri de realizări trebuie întâi să extragem partea de transfer direct (matricea D), iar apoi numitorul comun al matricei de transfer strict proprie.

$$G(s) = [1 \;\; 0 \;\; 0] + \begin{bmatrix} \frac{3}{s^2 - 1} & \frac{s - 1}{s^2} & \frac{1}{s^2 + s} \end{bmatrix} = D + \frac{1}{s^4 - s^2}[3s^2 \;\; s^3 - s^2 - s + 1 \;\; s^2 - s].$$

În scrierea realizării standard controlabile ținem cont că sistemul are $m = 3$ intrări.

$$G(s) = \left[\begin{array}{cccc|c} 0_3 & I_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & I_3 & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 & I_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & I_3 & 0_3 & I_3 \\ \hline K_0 & K_1 & K_2 & K_3 & D \end{array}\right].$$

unde

$$K_0 = [0 \;\; 1 \;\; 0] \quad K_1 = [0 \;\; -1 \;\; -1] \quad K_2 = [3 \;\; -1 \;\; 1] \quad K_3 = [0 \;\; 1 \;\; 0].$$

Ordinul acestei realizări este 12.

Pentru realizarea standard observabilă avem

$$G(s) = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Această realizare are ordinul 4.

2. Dintre cele două realizări obținute la punctul anterior, cea standard controlabilă nu poate fi minimală deoarece există una de dimensiune mai mică echivalentă intrare-ieșire cu ea. Așadar, testăm minimalitatea pe realizarea standard observabilă. Fiindcă aceasta este deja observabilă prin construcție, testăm doar controlabilitatea. Matricea de controlabilitate

$$R = [B \;\; AB \;\; A^2B \;\; A^3B]$$

este de dimensiune 4×12. Evaluăm rangul matricei $[B \;\; AB]$ (formată doar din primele 6 coloane ale lui R), iar dacă aceasta rezultă epică înseamnă că și R este epică.

$$[B \;\; AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Observăm că matricea formată din primele 4 coloane este nesingulară, prin urmare rangul lui R este 4 și realizarea este controlabilă (deci și minimală).

Problema 7.7. Se dă matricea de transfer

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s + 1} & \frac{1}{(s + 1)(s + 2)} \\ 0 & \frac{1}{s + 2} \end{bmatrix}.$$

Scrieți o realizare standard controlabilă. Este aceasta minimală? Dacă nu, calculați o astfel de realizare.

Soluție. Extragem numitorul comun și scriem realizarea standard controlabilă

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}\begin{bmatrix} s + 2 & 1 \\ 0 & s + 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 0_2 & I_2 & 0_2 \\ -2I_2 & -3I_2 & I_2 \\ \hline K_0 & K_1 & D \end{array}\right].$$

unde

$$K_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad K_1 = I_2, \quad D = 0.$$

Realizarea scrisă este controlabilă din construcție. Pentru minimalitate trebuie să testăm observabilitatea. Matricea de observabilitate are dimensiunea 8×4. Calculăm pentru început submatricea

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

și observăm că are rangul 2, întrucât ultimele două linii sunt o combinație liniară a primelor două. Prin urmare, putem scrie că $CA = ZC$, unde Z este o matrice 2×2. Pentru următoarele linii din matricea de observabilitate avem că $CA^2 = (CA)A = (ZC)A = Z^2C$. Deducem că matricea de observabilitate are forma

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ ZC \\ Z^2C \\ Z^3C \end{bmatrix}.$$

Observând că rangul lui Q este $2 < 4$, rezultă că realizarea nu este minimală. Pentru a obține realizarea minimală trebuie eliminăm valorile proprii neobservabile folosind TDO. Acest procedeu este propus ca exercițiu.

Alternativ, ne propunem să scriem o realizare exploatând forma particulară a matricei de transfer din enunț. Să observăm că elementul $(1, 2)$ din $G(s)$ poate fi scris

$$\frac{1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{s + 1} - \frac{1}{s + 2},$$

prin urmare, acest element poate fi anulat efectuând transformări constante asupra lui $G(s)$.

$$\tilde{G}(s) = UG(s)V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{s + 1} & \frac{1}{(s + 1)(s + 2)} \\ 0 & \frac{1}{s + 2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s + 1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s + 2} \end{bmatrix}.$$

Matricele inversabile V și U constituie transformări asupra spațiului intrărilor și, respectiv, al ieșirilor. Profităm de faptul că $\tilde{G}(s)$ este diagonală și scriem realizarea

$$\tilde{G}(s) = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \hline \tilde{C} & \tilde{D} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Realizarea lui $\tilde{G}(s)$ se obține punând în paralel atât intrările cât și ieșirile realizărilor celor două funcții de transfer de pe diagonala lui $\tilde{G}(s)$, i.e.,

$$\frac{1}{s + 1} = \left[\begin{array}{c|c} -1 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right] \qquad \frac{1}{s + 2} = \left[\begin{array}{c|c} -2 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right].$$

Ne rămâne să stabilim relațiile între realizarea lui $\tilde{G}$ și cea a lui G. Rescriem relația $\tilde{G}(s) = UG(s)V$ în termenii relizărilor

$$\tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} + \tilde{D} = UC(sI - \tilde{A})^{-1}BV + UDV,$$

prin urmarea realizarea lui G este

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{B}V^{-1} \\ \hline U^{-1}\tilde{C} & U^{-1}\tilde{D}V^{-1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Minimalitatea acestei realizări este foarte ușor de demonstrat. Faptul că $R = [B \;\; AB]$ este epică rezultă din inversabilitatea lui B, iar faptul că $Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}$ este monică rezultă din inversabilitatea lui C.

Scanned with CamScanner