Proprietăți ale LIC

Propr. de închidere

Teorema
LIC sunt închise în rap. cu opțiile de reuniune, concatenare, Kleene Star.

dem:

Fie $G_1 = (V_1, \bar{z}_1, R_1, S_1)$

$\quad\quad G_2 = (V_2, \bar{z}_2, R_2, S_2)$

pp. că $V_1 - \bar{z}_1$ și $V_2 - \bar{z}_2$ sunt disjuncte.

Reuniune
Fie S un nou simbol, $G = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, \bar{z}_1 \cup \bar{z}_2, R_1 \cup R_2 \cup \{S \to S_1 \mid S_2\}, S)$

Ad. $L(G_1) \cup L(G_2) = L(G)$.

Cum reg. coresp. lui S sunt $S \to S_1$ și $S \to S_2$, $S \overset{x}{\Longrightarrow} w$, $w \in (\bar{z}_1 \cup \bar{z}_2)^*$

dc şi numai dc fie $S_1 \overset{*}{\Rightarrow} w$ fie $S_2 \overset{*}{\Rightarrow} w$. Cum G_1 şi G_2 au mulţimi de neterminale disjuncte, $S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} w \iff S_1 \overset{*}{\underset{G_1}{\Rightarrow}} w$; analog pt. G_2.

Concatenare

Construcţie similară; $L(G_1)L(G_2)$ este generat de

$$G = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, R_1 \cup R_2 \cup \{S \to S_1 S_2\}, S)$$

Kleene Star

$L(G_1)^*$ este generat de

$$(V_1, \Sigma_1, R_1 \cup \{S_1 \to e, S_1 \to S_1 S_1\}, S_1)$$

Teorema

Intersecţia unui LiC cu un LR este un LiC.

dem.

Fie $L \to$ LiC

$ R \to$ LR

$L = L(M_1)$, $M_1 = (K_1, \Sigma_1, \Pi_1, \Delta_1, \Lambda_1, F_1)$

$R = L(M_2)$, $M_2 = (K_2, \Sigma_2, \delta_2, \Delta_2, F_2)$

Idee: de a combina M_1 și M_2 într-un APD M care realizează opțiile lui M_1 și M_2 în paralel și acceptă dc amândouă ar accepta.

$M = (K, \Sigma, \Pi, \Delta, \Lambda, F)$

$K = K_1 \times K_2$

$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$

$\Pi = \Pi_1$

$\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2)$

$F = F_1 \times F_2$

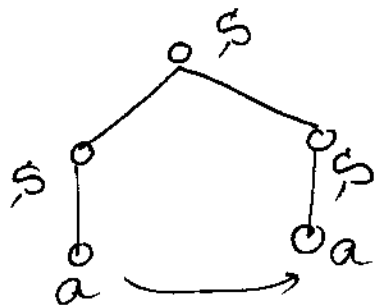$\Delta \ni (((q_1, q_2), u, \beta), ((p_1, p_2), \gamma))$

$\iff ((q_1, u, \beta), (p_1, \gamma)) \in \Delta_1$

$(q_2, u) \overset{*}{\underset{M_1}{\vdash}} (p_2, e)$

Propr. de periodicitate ale LiC

Fie $G = (\{S, a\}, \{a\}, \{S \rightarrow SS \mid a\}, S)$

$$S \underset{G}{\Rightarrow} SS \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} aa$$
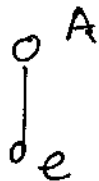

Def.

Fie $G = (V, \Sigma, R, S)$ o Gic. Def. arborele de derivare astfel:

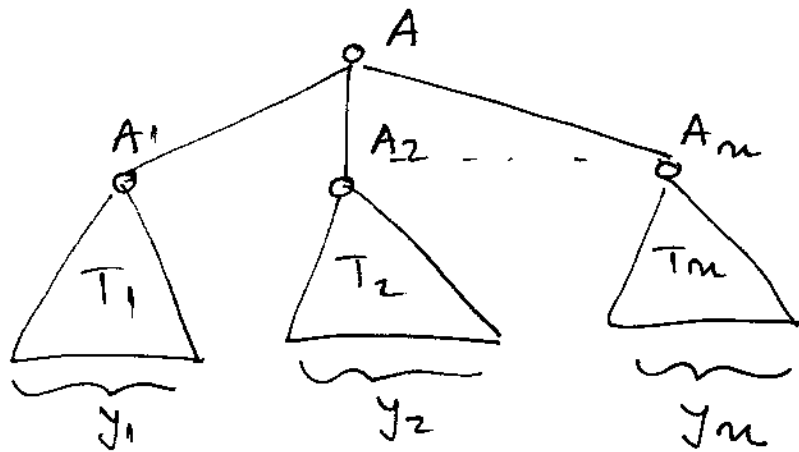$1°$ $\overset{A}{\circ}$

     arb. de deriv. pt $\forall A \in V$

$2°$ $A \rightarrow e \in R$

$$\overset{A}{\underset{e}{\circ}}$$

3^o Dc.
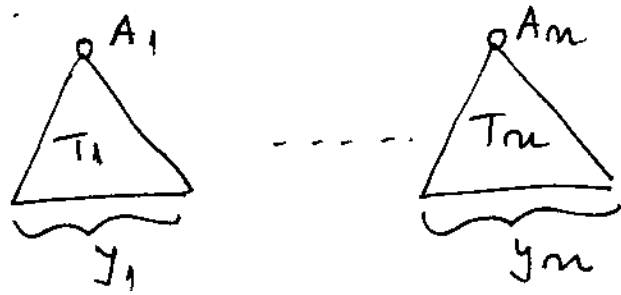
sunt arb. de derivare $(m \geq 1)$ cu rădăcini $A_1 \ldots A_m$ și șiruri generate $y_1 \ldots y_m$, $A \to A_1 \ldots A_m \in R$,

4^o Nimic altceva nu este un arb. de derivare
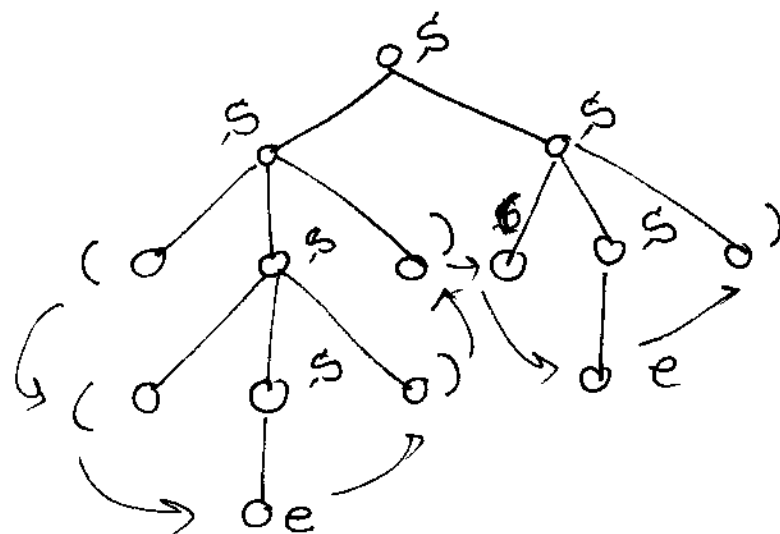
ex: $G = (V, \Sigma, R, S)$

$V = \{S, (,) \}$

$\Sigma = \{(,) \}$

$R = \{ S \to SS \mid (S) \mid e \}$

$S \overset{*}{\Rightarrow} (())()$

$S \underset{G}{\Rightarrow} SS \underset{G}{\Rightarrow} (S)S \underset{G}{\Rightarrow} ((S))S \underset{G}{\Rightarrow} (())S \underset{G}{\Rightarrow} (())(S) \underset{G}{\Rightarrow} (())()$

Teorema (Lema de pompare)

Fie G o GIC. Atunci există un număr K depinzând de G aî $\forall w \in L(G)$, $|w| > K$ poate fi scris ca $w = uvxyz$ aî $v \neq e$ sau $y \neq e$ î $uv^n xy^n z \in L(G)$, $\forall n \geq 0$.

dem:

Fie $G = (V, \Sigma, R, S)$

este suficient să dem. că $\exists K$ aî $\forall w \in L(G)$, $|w| > K$, are o deriv. de forma:

$$S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} uAz \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} uvAyz \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} uvxyz$$

unde $u, v, x, y, z \in \Sigma^*$, $A \in V - \Sigma$, $v \neq e$ sau $y \neq e$.

Atunci derivarea $A \overset{*}{\Rightarrow} vAy$ poate fi repetată de oricâte ori pt. a obține $uv^n xy^n z$.

Fie $p = \max \{ |\alpha| \mid A \to \alpha \in R \}$

$\forall m \geq 1$, un arb. de derivare de înălțime m poate avea cel mult p^m frunze, deci poate genera un șir de lg. cel mult p^m.
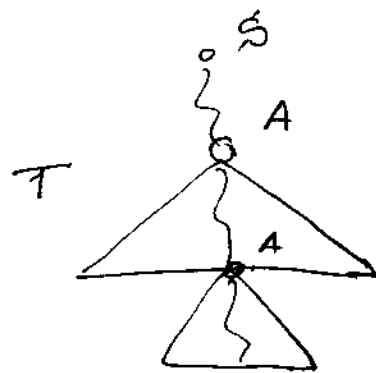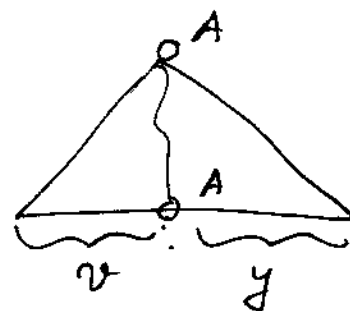
Fie $m = |V - \Sigma|$

$\quad K = p^m$

pp $|w| > K$

Fie T un arb. de deriv. cu răd. S ț, șir generat w.

At. T are cel puțin o cale cu m. mult de $|V - \Sigma| + 1$ noduri, deci cel puțin o cale care include 2 noduri etichetate cu ac. simbol neterminal $A \in V - \Sigma$.

$v, y \in \Sigma^*$

Este posibil ca $v=y=\varepsilon$, dar nu poate fi cazul pt. orice alegere a căii și oria 2 noduri pe ea cu ac. etichete.

Dc $v=y=\varepsilon$, at. arb. T' poate fi scos din T, fără a schimba șirul generat de arbore, agățând ab. de derivare cu nodul cel mai jos ca rădăcină, de nodul A de mai sus. Dc. toate căile de lg. $> m$ ar putea fi scurtate astfel, fără a schimba șirul generat, am putea obține un arb. care generează w cu înălțime $< m \Rightarrow$ $\underline{imposibil}$.

Teorema

$L = \{a^n f^n c^n \mid n \geq 0\}$ nu este LIC.

dem.

prin reducere la absurd:

pp. $L = L(G)$, $G \to G$ic

Fie $K(G)$ și $n > K/3$

$w = a^n f^m c^n \in L(G)$ are o reprez. $w = uv x y z$ cu $v \neq e$ sau $y \neq e$ și

$u v^i x y^i z \in L(G)$, $\forall i \geq 0$.

Propoziție $\Rightarrow$ x sau y conține 2 simb din $\{a, f, c\}$ $\Rightarrow$ $u v^2 x y^2 z$ conține un 'f' înainte de 'a' sau un 'c'.

Teorema

Limbajele indep. de context nu sunt închise în rap. cu intersecția sau complementarea.

dem.

$L_1 = \{a^n f^n c^m : n, m \geq 0\}$

$L_2 = \{a^m f^n c^n : m, n \geq 0\}$ $\Big|$ Lic

$L_1 \cap L_2 = \{a^n f^n c^n \mid n \geq 0\}$ $\Rightarrow$ $\cancel{\text{Lic}}$

Dc. Lic ar fi fost închise în rap. cu complementarea $\Rightarrow$ ar fi fost închise în rap. cu intersecția.

$$L_1 \cap L_2 = \Sigma^* - ((\Sigma^* - L_1) \cup (\Sigma^* - L_2))$$

Proprietati algoritmice

Teorema

Exista algoritmi care pot raspunde la urm. intrebari ref. la GIC.

a) Pf o GIC G si un sir w, $w \in L(G)$?

b) $L(G) = \emptyset$?

Obs:

$L(G_1) = L(G_2)$ nu poate fi rezv. alg.

dem.

a) Idee: inspectam toate derivarile posibile pana la o an. lg, respectiv toti arb. de deriv. pana la o an. dimens.

Dc. fiec. regulă $A \to u$, $u \in \Sigma$ sau $|u| \geq 2$ $\Rightarrow$ nicio dc derivare de lg

$2|w|-1$ nu trebuie inspectate.

Pot. rezolva dc convertesc G într-o gram. echivalentă care nu are

reguli $A \to u$, unde $u = e$ sau $u \in V - \Sigma$.

Elimin $A \to e$ cu excepția $S \to e$ dc $e \in L(G)$.

Fie $G = (V, \Sigma, R, S)$

$A \to e$

$B \to uAv$, $u, v \in V^*$

adg. $B \to uv$ la R

alg. se repetă până când nu mai pot fi adg. reguli.

la sf. elimin $A \to e$.

Fie G' gram. obț. prin astfel de transf. Are urm. propr:

$1°$ $L(G') = L(G)$

$2°$ $e \in L(G)$, $S \to e \in R(G')$

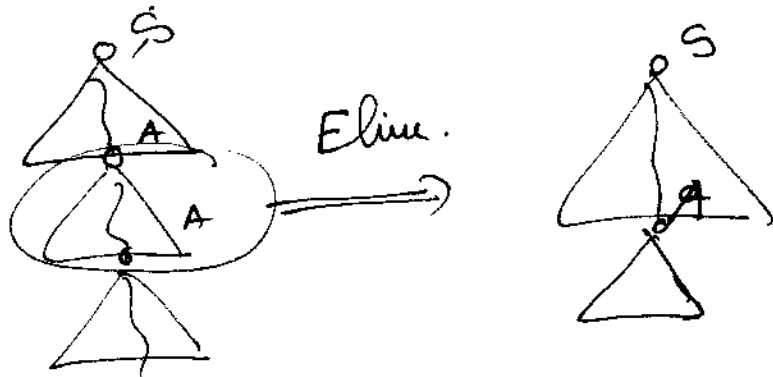$3°$ $\forall w \in L(G') \setminus \{e\}$ are o deriv (arb. de deriv) în care nu este ut. $A \to e$.

Elim. reg. $A \to B$.

$\forall A, B$, dc $A \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} B$

$\left.\begin{array}{l} B \to u \\ A \overset{x}{\underset{G}{\Rightarrow}} B \end{array}\right\} \to$ se adg. $A \underset{G}{\to} u$

La sf. eliminm reg. $A \to B$

(1) Fie $G = (V, \Sigma, R, S) \overset{?}{\Rightarrow}$ genereaza $L(G) \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ $\exists$ arb. de deriv. cu șir generat (terminale) de înalțime cel mult

$|V - \Sigma|$.

Proc. poate fi repetat $\Rightarrow$ arb de înalt $|V - \Sigma|$. $\Rightarrow \forall$ arb. de înalt $|V - \Sigma|$ poate fi inspectat.