II. Bază. Dimensiune. Coordonate. Matricea de schimbare a bazei.

1. Pentru fiecare dintre matricile A de mai jos, determinaţi o bază şi dimensiunea subspaţiilor $\mathsf{Ker}(A)$ şi $\mathsf{Im}(A)$:

   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

   (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 6 & -1 \\ -12 & -1 & \alpha & 2 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

   (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 8 & 4 \\ 1 & 3 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

   (d) $A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

2. Determinaţi o bază şi dimensiunea următoarelor (sub)spaţii vectoriale:

   (a) $U = \mathsf{Sp}\{1 - 2X + X^3, 2 + X^2, 3 - 4X^3, 1 + X + X^2, -2 + X^2 + X^3\}$

   (b) $U = \mathsf{Sp}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

   (c) $U = \mathsf{Sp}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$

3. Determinaţi o bază şi dimensiunea următoarelor (sub)spaţii vectoriale peste corpul numerelor reale:

   (a) $U = \{P \in \mathbb{R}_{\leq 3}[X] \mid P(1) = P(-1), P'(1) = P'(-1)\}$

   (b) $U = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ x - 2y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}\right\}$

   (c) $U = \left\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid A = \begin{pmatrix} a & \overline{b} \\ b & -a \end{pmatrix}\right\}$

   (d) $U = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ derivabilă şi } f' - 2f = 0\}$

4. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi polinoamele $P_k(X) = \dfrac{X(X-1)(X-2)...(X-k+1)}{k!}$, pentru orice $k = 0, 1, ..., n$. Să se demonstreze că aceste polinoame formează o bază în $\mathbb{R}_{\leq n}[X]$.

5. Fie $\{v_1, \ldots, v_n\}$ o bază a spaţiului vectorial V. Arătaţi că şi vectorii $v_1, v_1+v_2, \ldots, v_1+v_2+\ldots+v_n$ formează o bază în V. Dar vectorii $v_1 + v_2, v_2 + v_3, \ldots, v_n + v_1$?

6. Fie U, W subspaţii ale unui spaţiu vectorial V de dimensiune n. Utilizând formula[1]

$$\dim_{\Bbbk}(U + W) = \dim_{\Bbbk} U + \dim_{\Bbbk} W - \dim_{\Bbbk}(U \cap W) \qquad \text{(Formula Grassman)}$$

   determinaţi o bază şi dimensiunea subspaţiilor U, W, $U \cap W$, $U + W$ pentru fiecare dintre cazurile de mai jos:

[1] Încercaţi să demonstraţi formula Grassman!

(a) $U = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \mid 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, x_4 - 3x_5 = 0\}$ şi $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \mid x_3 + x_4 = 0\}$.

(b) $U = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P''(0) + 2P'(0) + P(0) = 0,\ P(1) = P(-1)\}$ şi $W = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P''(0) - 2P'(0) + P(0) = 0,\ P(1) = -P(-1)\}$.

(c) $U = \mathsf{Ker}(A)$, $W = \mathsf{Im}(A)$, unde $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ -8 & -6 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

7.* (opţional) Fie $\Bbbk$ un corp finit cu q elemente şi V un $\Bbbk$-spaţiu vectorial de dimensiune n. Atunci:

(a) V este o mulţime finită cu q^n elemente.

(b) Numărul bazelor $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ din V este

$$(q^n - 1)(q^n - q)...(q^n - q^{n-1})$$

(c) Numărul mulţimilor de vectori $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ din V liniar independenţi este

$$N(n, m) = (q^n - 1)(q^n - q)...(q^n - q^{m-1})$$

(d) Numărul subspaţiilor din V de dimensiune $m \leq n$ este

$$S(n, m) = \frac{(q^n - 1)(q^n - q)\ldots(q^n - q^{m-1})}{(q^m - 1)(q^m - q)\ldots(q^m - q^{m-1})}$$