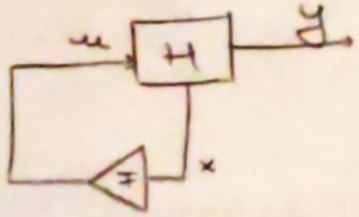
Compensatoare dinamice

Alegem $\tilde{F}$ și g ai $\begin{cases} \tilde{A} = A + B\tilde{F} \\ b = B \cdot g \end{cases}$ și $(\tilde{A}, b)$ ctrlb.

$(m > 1)$

De obicei $\tilde{F} = 0$, $g = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$

Se aplică <u>Ackermann</u> => obținem g^t => $F = \tilde{F} + g \cdot g^t$



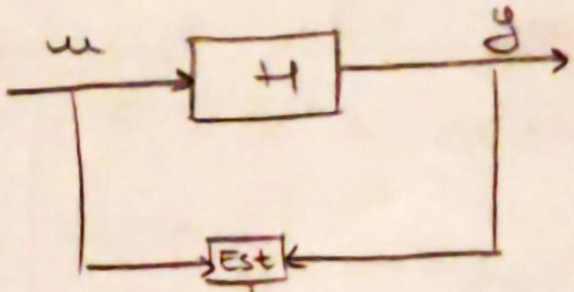
Ackermann (A, B)

- Δ_c, $\chi(\lambda)$
- $R = [B \; AB \cdots A^{n-1}B]$
- $R^t \cdot g = e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow g = \cdots$
- $g^t = -g^t \cdot \chi(A) \Rightarrow g^t = \cdots$ $= F$

Ackermann (A^t, C^t)

- Δ_o, $\chi(\lambda)$
- $\tilde{R} = [C^t \; A^t C^t \cdots (A^t)^{n-1} C^t]$
- $\tilde{R}^t \cdot \tilde{g} = e_n \Rightarrow \tilde{g} = \cdots$
- $\tilde{g}^t = -\tilde{g}^t \cdot \chi(A^t) \Rightarrow \tilde{g} = L$

Estimatorul Luenberger



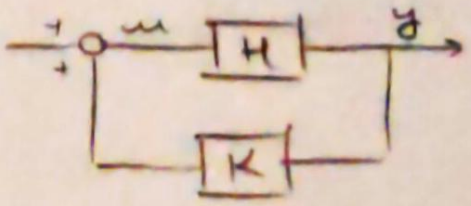
$\hat{x} \to \lim_{t \to \infty} \hat{x}(t) = x(t)$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} + Du \end{cases}$$

corecție

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = (A + BF + LC + LDF)\hat{x} - Ly \\ u = F \cdot \hat{x} + 0 \cdot y \end{cases}$$

$$K(s) = \left[\begin{array}{c|c} A + BF + LC + LDF & -L \\ \hline F & 0 \end{array}\right]$$



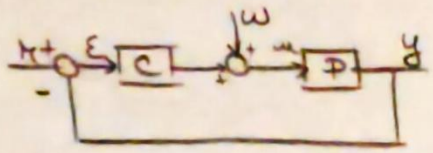
Funcții de transfer buclă închisă

$$T_{yr} = \frac{PC}{1+PC}$$

$$T_{\varepsilon r} = \frac{1}{1+PC}$$

$$T_{yw} = \frac{P}{1+PC}$$

$$T_{\varepsilon w} = -\frac{P}{1+PC}$$



Sisteme dinamice

$H(s) = C(sI-A)^{-1}B + D$

$p \to$ nr. ieșirei

$m \to$ nr. intrărei

$n \to$ nr. stării

$\tilde{A} = TAT^{-1}$

$\tilde{B} = TB$

$\tilde{C} = CT^{-1}$

$\tilde{D} = D = H(\infty)$

Stabilitate

$J = T^{-1}AT$

$e^{At} = T^{-1}e^{Jt}\cdot T$

(A,B,C,D) stabil intern asimptotic $\Leftrightarrow \Lambda(A) \subset \mathbb{C}_-$

(A,B,C,D) stabil intern $\Leftrightarrow \Lambda(A) \subset \mathbb{C}_- \cup \mathbb{C}_0$ și $\lambda \in \mathbb{C}_0$ e rădăcină simplă a polinomului minimal

$A^t\cdot P + PA + Q = 0$

Controlabilitate

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ $\quad R = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$

$R \in \mathbb{R}^{n\times n\cdot m}$

- (A,B) ctrlb $\Leftrightarrow$ rang $R = n$

$Im(R)$ = subspațiu ctrlb

Hautus: rang$[sI-A \,\vdots\, B] = n, \forall s \in \Lambda(A)$

$$\tilde{A} = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \}\,\nu \\ \}\,n-\nu \end{array} \\ \begin{array}{cc} \nu & n-\nu \end{array} & \end{array}$$

$\nu = \dim(Im(R))$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \}\,\nu \\ \}\,n-\nu \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} (A,B) \text{ ctrlb} \Leftrightarrow \\ (B^t, A^t) \text{ obsvb} \end{array}}$$

$$\tilde{C} = [\underbrace{C_1}_{\nu} \ \underbrace{C_2}_{n-\nu}]$$

(A,B) stabilizabilă $\Leftrightarrow$ rang$[sI-A \,\vdots\, B] = n$ $\forall s \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_0$

$\tilde{R} = TR$

$$H = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D \end{bmatrix}$$

Observabilitate

$C \in \mathbb{R}^{p\times n}$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$Q \in \mathbb{R}^{np\times n}$

- (C,A) obsvb $\Leftrightarrow$ rang $Q = n$

$Ker(Q)$ = subspațiu neobsvb

Hautus: rang$\begin{bmatrix} sI-A \\ C \end{bmatrix} = n$

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

$\mu = \dim(Ker(Q))$

$$\tilde{A} = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \}\,n-\mu \\ \}\,\mu \end{array} \\ \begin{array}{cc} n-\mu & \mu \end{array} & \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} (C,A) \text{ obsvb} \Leftrightarrow \\ (A^t, C^t) \text{ ctrlb} \end{array}}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \}\,n-\mu \\ \}\,\mu \end{array}$$

$$\tilde{C} = [\underbrace{0}_{n-\mu} \ \underbrace{C_2}_{\mu}]$$

(C,A) detectabilă $\Leftrightarrow$ rang$\begin{bmatrix} sI-A \\ C \end{bmatrix} = n$ $\forall s \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_0$

$$H = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D \end{bmatrix}$$

Trasarea de Bode

$\arg(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ -\pi, & x < 0 \end{cases}$	$\lg 2 \simeq 0{,}3$ $\lg 3 \simeq 0{,}5$ $\lg 5 \simeq 0{,}7$

① Continuu

$$H(s) = \frac{s}{(s+2)(s+50)} = \frac{\frac{1}{100}}{s^{-1}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{s}{2}+1\right)\left(\frac{s}{50}+1\right)} \quad \left(= \frac{K}{s^{\alpha}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_1}+1\right)\left(\frac{s}{\omega_2}+1\right)} \right)$$

$K = \frac{1}{100}$

$\alpha = -1$

$\omega_1 = 2$

$\omega_2 = 50$

I. $[K]_{dB} = 20\lg 10^{-2} = -40\,dB$, $K > 0 \Rightarrow \arg(K) = 0$

II. $\frac{1}{s^{\alpha}} \rightarrow \arg\left(\frac{1}{s^{\alpha}}\right) = -\alpha \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

III. $\arg\left(\frac{1}{\frac{s}{2}+1}\right) = \begin{cases} 0, & \omega \ll 2 \\ -\frac{\pi}{4}, & \omega = 2 \\ -\frac{\pi}{2}, & \omega \gg 2 \end{cases}$

IV. $\arg\left(\frac{1}{\frac{s}{50}+1}\right) = \begin{cases} 0, & \omega \ll 50 \\ -\frac{\pi}{4}, & \omega = 50 \\ -\frac{\pi}{2}, & \omega \gg 50 \end{cases}$

Corecție
poli simpli : $-3 \cdot$ (multiplicitate)
zero simpli : $+3 \cdot m$
poli conj : $-20\lg(2\xi) \cdot m$
zero conj : $+20\lg(2\xi) \cdot m$

$\lg\omega \in [0, 2]$

$\lg\omega_1 = 0.3$

$\lg\omega_2 = 1.7$

Pantele

1) $\lg(\omega) \in [0, 0.3] \rightarrow H(0{,}3) = H(0) + \text{panta}1\,(0{,}3 - 0)$

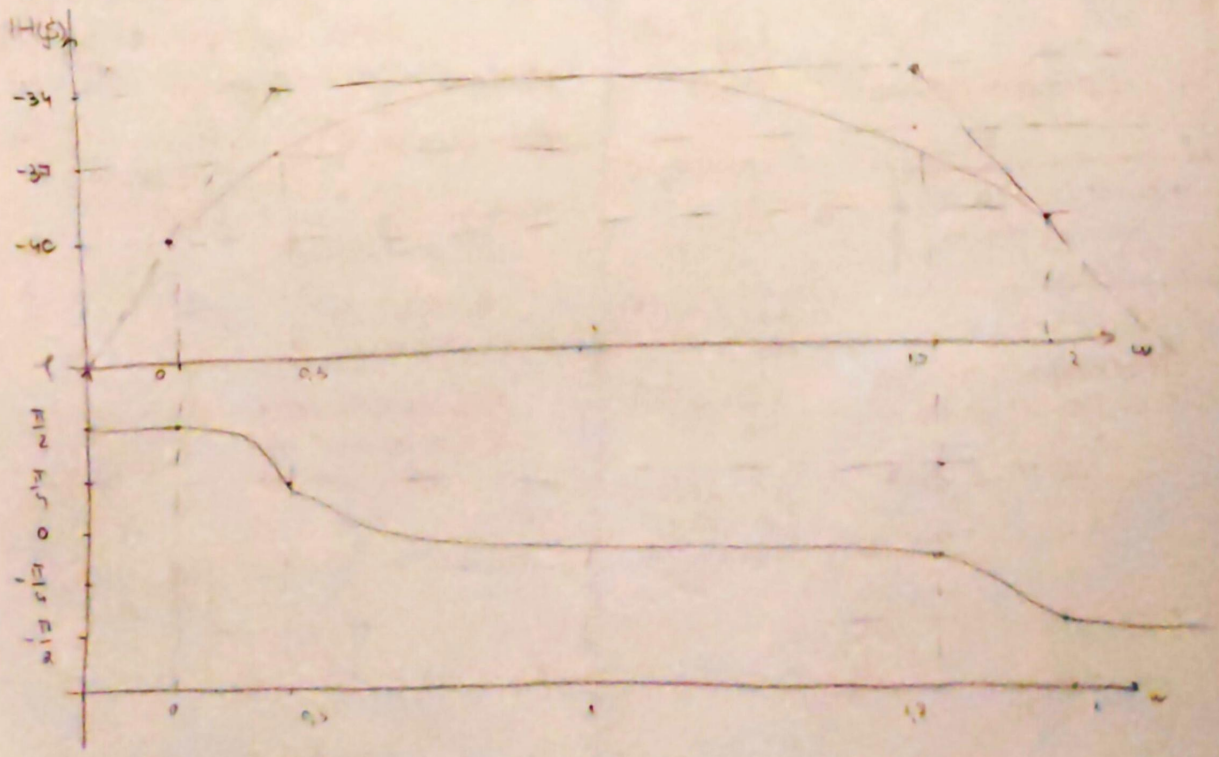
panta1 = 20dB/dec $\Rightarrow \boxed{H(0{,}3) = -34\,dB}$ → cu corecție : $-37\,dB$

2) $\lg(\omega) \in [0.3, 1.7] \rightarrow H(1.7) = H(0.3) + \text{panta}2\,(1.7 - 0.3)$

panta2 = 0 dB/dec $\Rightarrow \boxed{H(1.7) = -34\,dB}$ → cu corecție : $-37\,dB$

3) $\lg(\omega) \in [1.7, 2] \rightarrow H(2) = H(1.7) + \text{panta}3\,(2 - 1.7)$

panta3 = $-20\,dB/dec \Rightarrow \boxed{H(2) = -40\,dB}$



PID

Am $P(s)$. Caut $C(s)$ a.î. σ, t_t, E_{st} să fie cumva.

$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + \underbrace{?}$ → o să văd mai încolo

$T_{yr}(s) = \frac{PC}{1+PC}$

Notăm

$r(t) = 1(t) \Rightarrow r(\infty) = 1$
$E_{st} = 0 = r(\infty) - y(\infty)$ $\Big\} \Rightarrow \frac{PC}{1+PC}(0) = 1$, $T(s) = \frac{PC}{1+PC}$

Alegem $T(s)$ de același ordin ca $P(s)$.

Ex: $P(s) = \frac{1}{(2s+1)(5s+1)} \Rightarrow T(s)$ poate fi $\frac{1}{(5s+1)(0.5s+1)}$, $T(0) = 1$

format din 2 sisteme de ordin I

Fiecare din cele 2 sisteme de ordin I are $t_t \simeq 4T$ (coef. lui s)
$\sigma = 0$

t_t pt. $T(s)$ va fi suma celor 2 $\Rightarrow t_t = 5 \cdot 4 + 0{,}5 \cdot 4 = 22\,s$

$T = \frac{PC}{1+PC} \Leftrightarrow T(1+PC) = PC \Leftrightarrow T + TPC = PC$

$\Leftrightarrow T = C(P - PT) \Leftrightarrow C = \frac{T}{1-T} \cdot \frac{1}{P}$

Știm T și P. Acum trebuie să spargem $C(s)$ în fracții simple până când ajungem la ceva de forma $C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + \frac{K_d \cdot s + \alpha}{\beta \cdot s + 1}$

SOLUȚIA PROBLEMEI ALOCĂRII

- (A, B) alocabilă dacă și numai dacă e controlabilă

Etape:

- procedura lui Ackermann ($m = 1$)
- arătăm că problema cu $m > 1$ se reduce cumva la procedura lui Ackermann
- se demonstrează pt. m general

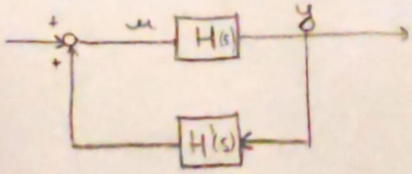
Pași: (avem (A, B, C, D) o realizare minimală)

1. Alegem $\Lambda_0 \subset \mathbb{C}_-$ și scriem polinomul caracteristic $\chi(s)$ pt. $(A + BF)$
2. Calculăm $R = [b \quad Ab \quad A^2b \ \dots]$
3. Rezolvăm $R^t \cdot q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ pentru q
4. $g^t = -q^t \cdot \chi(A) = F$
5. Alegem $\Lambda_0 \subset \mathbb{C}_-$ și scriem polinomul caracteristic $\chi(s)$ (poate și același ca la 1.) pt. $(A^t + C^t \cdot K^t)$
6. Calculăm $\tilde{R} = [C^t \quad A^tC^t \quad (A^t)^2C^t]$ $(\tilde{R} = \mathcal{O}_1^t)$
7. Rezolvăm $\tilde{R}^t \cdot \tilde{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ pentru $\tilde{q}$
8. $\tilde{g}^t = -\tilde{q}^t \cdot \chi(A^t) = K^t$

Avem F și K.

$\Rightarrow$ avem compensatorul Kalman

$$H'(s) = \left[\begin{array}{cc} A + BF + K(C + DF) & -K \\ F & 0 \end{array}\right]$$



PRINCIPIUL SEPARAȚIEI

Cum calculăm compensatorul dinamic?

I. Construim o lege de reacție după stare F

- $\Lambda(A+BF) \subset \mathbb{C}_-$ sau $\Lambda(A+BF) = \Lambda_0$

II. Construim un estimator de stare

- prelucrează u și y și generează o estimare a stării x (care în general nu poate fi măsurată)

Problema alocării are soluție dacă și numai dacă:

- (A, B) controlabilă și (C, A) observabilă

SAU

- (A, B) stabilizabilă și (C, A) detectabilă

Legi de comandă

Fie (A, B, C, D).

$$\boxed{u = Fx + Gv}$$

u → lege de comandă

F → matrice de reacție

v → nouă intrare

Def:
- (A, B) stabilizabilă ⟺ (∃) F a.î. $\Lambda(A+BF) \subset \mathbb{C}_-$
- (C, A) detectabilă ⟺ (∃) K a.î. $\Lambda(A+KC) \subset \mathbb{C}_-$

Def:
- (A, B) ALOCABILĂ ⟺ (∀) Λ_0 simetrică, atunci (∃) F a.î. $\Lambda(A+BF) = \Lambda_0$

După implementarea legii de comandă $u = Fx + Gv$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \dot{x} = (A+BF)x + BGv \\ y = (C+DF)x + DGv \end{cases}$$

Compensatoare dinamice

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Bu(t) \end{cases} \rightarrow \text{sistem liniar}$$

$x(0) = x_0$

Problemă: Cum modificăm sistemul a.î. să fie STABIL și să aibă un anumit COMPORTAMENT la diverse referințe / perturbații?

Răspuns: Cuplăm un nou sistem dinamic, numit COMPENSATOR a.î. sistemul final să aibă COMPORTAMENTUL dorit.

Probleme naturale fundamentale

I. PROBLEMA STABILIZĂRII

Avem sistemul (A, B, C, D)

Vrem să găsim un regulator (A_c, B_c, C_c, D_c) a.î. sistemul rezultat în buclă închisă să fie ASIMPTOTIC STABIL $\Leftrightarrow \Lambda(A_R) \subset \mathbb{C}_-$

II. PROBLEMA ALOCĂRII

Avem sistemul (A, B, C, D)

Vrem să găsim un regulator (A_c, B_c, C_c, D_c) a.î. sistemul rezultat în buclă închisă să aibă o DINAMICĂ IMPUSĂ $\Leftrightarrow \Lambda(A_R) = \Lambda_0$, $|\Lambda_0| = n + n_c$

! n_c trebuie să fie cât mai mic

! în Λ_0 avem valorii proprii complexe conjugate (nu există vreuna fără să fie și conjugata ei) în Λ_0

REALIZĂRI MINIMALE

(A, B, C, D) se numește minimală dacă (∀) altă realizare are dimensiunea spațiului stărilor mai mare sau egală cu aceasta.

O realizare e minimală <=> e controlabilă și observabilă

REALIZARE STANDARD CONTROLABILĂ (OBSERVABILĂ)

RSC

$$A = \begin{bmatrix} O_m & I_m & O_m & O_m \\ O_m & O_m & I_m & O_m \\ & & & \\ O_m & O_m & O_m & I_m \\ -\beta_0 I_m & -\beta_1 I_m & & -\gamma_{n-1} I_m \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} O_m \\ \\ \\ O_m \\ I_m \end{bmatrix}$$

$\rightarrow H(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$ controlabilă! dar nu neapărat observabilă

$$C = \begin{bmatrix} K_0 & K_1 & & K_{n-1} \end{bmatrix}$$

RSO

$$A = \begin{bmatrix} O_p & O_p & & O_p & -\beta_0 I_p \\ I_p & O_p & & O_p & -\beta_1 I_p \\ O_p & I_p & & O_p & -\beta_2 I_p \\ & & & & \\ O_p & O_p & & I_p & -\gamma_{n-1} I_p \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} K_0 \\ K_1 \\ \vdots \\ K_{n-1} \end{bmatrix}$$

$\rightarrow H(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$ observabilă! dar nu neapărat controlabilă

$$C = \begin{bmatrix} O_p & O_p & & O_p & I_p \end{bmatrix}$$

TEOREMĂ

PE STARE

Orice sistem (A, B, C, D) e echivalent cu un sistem $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$ cu structura de mai înainte și echivalent I/O cu sistemul (A_{22}, B_2, C_2, D).

REALIZABILITATE

Problema realizabilității:

- găsirea unui sistem descris de (A, B, C, D) care are ca matrice de transfer $G(s)$

$$G(s) = \left[\frac{r_{ij}(s)}{p_{ij}(s)}\right], \quad \text{grad}(r_{ij}) \le \text{grad}(p_{ij})$$

raporturile sunt ireductibile

rațională proprie ireductibilă $\Rightarrow D = G(\infty)$, $\tilde{G}(s) = G(s) - D$

Acum mai trebuie să găsim (A, B, C) a.î. $\tilde{G}(s) = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B$

$$\tilde{G}(s) = \frac{K_0 + K_1 s + \dots + K_{k-1} s^{k-1}}{\gamma_0 + \gamma_1 s + \dots + \gamma_{k-1} s^{k-1} + s^k}$$

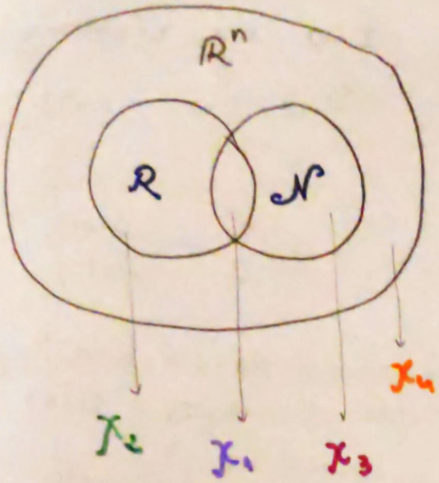
ex: $\tilde{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+2 & s+1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{s^2+3s+2}$

$\gamma(s) = s^2 + 3s + 2$

$K_0 = [2 \quad 1]$

$K_1 = [1 \quad 1]$

DESCOMPUNERE STRUCTURALĂ



$\mathcal{R} = Im(R) \rightarrow$ controlabilă

$\mathcal{N} = Ker(Q) \rightarrow$ observabilă

subspații (nu sunt unic definite)

Fie X_i matrice de bază pentru $\mathcal{X}_i$

$T = [X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad X_4]^T$

$\hat{A} = TAT^{-1}$

$\hat{B} = TB$

$\hat{C} = CT^{-1}$

$\hat{D} = D$

Din **TDC** $\Rightarrow \left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}\right)$ controlabilă. (1)

Din **TDO** $\Rightarrow \left([C_2 \quad C_4], \begin{bmatrix} A_{22} & A_{24} \\ 0 & A_{44} \end{bmatrix}\right)$ observabilă. (2)

Aplicând **PBH** pe (1) $\Rightarrow$ rang$(sI - A \mid B) =$ rang$\begin{bmatrix} sI - A_{11} & -A_{12} & B_1 \\ 0 & sI - A_{22} & B_2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ rang$\begin{bmatrix} sI - A_{11} & -A_{12} & B_1 \\ 0 & sI - A_{22} & B_2 \end{bmatrix} = \dim \mathcal{X}_1 + \dim \mathcal{X}_2$

$\Rightarrow$ rang$[sI - A_{22} \quad B_2] = \dim \mathcal{X}_2$

$\Rightarrow (A_{22}, B_2)$ **CONTROLABILĂ**

Analog **PBH** pt. (2) $\Rightarrow (C_2, A_{22})$ **OBSERVABILĂ**

$\Rightarrow (A_{22}, B_2, C_2, D)$ controlabil și observabil

$$H(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_{22} & B_2 \\ \hline C_2 & D \end{array}\right]$$

DESCOMPUNERE OBSERVABILĂ (TDO)

$$\hat{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = TB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = CT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & C_2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{D} = D$$

(A, B, C, D), $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$ echivalente pe stare (deci și I/O).

$$H(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & D \end{array}\right]$$

II. OBSERVABILITATEA

= abilitatea unui sistem cu $x(0) = x$ de a determina o stare x din preluarea lui y (pe care l-am măsurat)

E relevant y_ℓ (răspunsul liber) (comenzi nule).

$$\dot{x}(t) = Ax \qquad x(0) = x$$
$$y = Cx$$

$\Rightarrow$ ne interesează perechea (C, A)

$$y(t) = y_\ell(t) = C \cdot e^{At} \cdot x$$

Stare $\boxed{\text{ne}}$observabilă

- stare x pt. care $y_\ell(\tau) = C \cdot e^{At} \cdot x = 0$, $\tau \in [0, t]$

MATRICE DE OBSERVABILITATE

$C \in \mathbb{R}^{p \times n}$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{np \times n}$$

TEOREMĂ:
- O stare x e $\boxed{\text{ne}}$observabilă $\Leftrightarrow x \in \operatorname{Ker}(\mathcal{O})$
- (C, A) e **observabilă** $\Leftrightarrow \operatorname{rang} \mathcal{O} = n$

Principiul dualității

- (C, A) observabilă $\Leftrightarrow$ (A^t, C^t) controlabilă
- (A, B) controlabilă $\Leftrightarrow$ (B^t, A^t) observabilă

PBH (Hautus): (C, A) observabilă $\Leftrightarrow \operatorname{rang}\begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix} = n$

Valoare proprie observabilă $(\lambda) \Leftrightarrow \lambda \in \Lambda(A_\ell)$

- (A, B, C, D) echivalent pe stare cu $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$

$\Rightarrow \hat{\mathcal{O}} = \mathcal{O} \cdot T^{-1}$

DESCOMPUNERE CONTROLABILĂ (TDC)

Avem un sistem (A, B, C, D) necontrolabil.
Vrem să găsim un sistem $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ controlabil, echivalent pe stare (deci și I/O) cu (A, B, C, D).

Notăm: $\vartheta = \dim R$

$$H(s) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = TAT^{-1} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \}\vartheta \\ \}n-\vartheta \end{array} \\ \begin{array}{cc} \vartheta & n-\vartheta \end{array} \end{array}$$

Vrem (A_1, B_1) **CONTROLABILĂ**

$$\hat{B} = TB = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \}\vartheta \\ \}n-\vartheta \end{array}$$

$$\hat{C} = CT^{-1} = \begin{array}{c} [C_1 \quad C_2] \\ \begin{array}{cc} \vartheta & n-\vartheta \end{array} \end{array}$$

$$\hat{D} = D$$

CRITERIUL HAUTUS (PBH)

- (A, B) **CONTROLABILĂ** $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rang}[sI - A \mid B] = n$, $\forall s \in \mathbb{C}$

Corolar: (A, B) controlabilă dacă PBH e satisfăcut pt $\forall s \in \Lambda(A)$

→ valoare proprie (λ) controlabilă $\Leftrightarrow$ $\lambda \in \Lambda(A_1)$

→ valoare proprie (λ) necontrolabilă $\Leftrightarrow$ $\lambda \in \Lambda(A_2)$

Dacă (A, B, C, D) și $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$ sunt echivalente pe stare cu transformarea T, atunci $\hat{R} = TR$!

PROPRIETĂȚI STRUCTURALE

I. CONTROLABILITATEA

= abilitatea unui sistem de a putea trece dintr-o stare în alta printr-o comandă $u(t)$

O stare x se numește **CONTROLABILĂ** la momentul t dacă $(\exists)$ o comandă $u(\cdot)$ care duce $x_0 = 0$ în $x(t) = x$

Controlabilitatea unei stări depinde de t.
Proprietatea de controlabilitate (a sistemului) e independentă de t.

MATRICEA DE CONTROLABILITATE

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$B \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$R = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^{n-1}B] \in \mathbb{R}^{n \times nm}$

Teoremă: O stare x e **CONTROLABILĂ**

$\Leftrightarrow x \in Im(R)$

$Im(R)$ = subspațiul controlabil al perechii (A, B)

(A, B) **CONTROLABILĂ** = sistem **CONTROLABIL**

$\Updownarrow$

fiecare stare $x \in \mathbb{R}^n$ este **CONTROLABILĂ**

TEOREMĂ: (A, B) **CONTROLABILĂ**

$\Updownarrow$

$$\boxed{\text{rang}\, R = n}$$

c) $J = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_k \end{bmatrix}$

$e^{At} = e^{T^{-1}JTt} = T^{-1} e^{Jt} \cdot T = T^{-1} \cdot \begin{bmatrix} e^{J_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{J_k t} \end{bmatrix} \cdot T$ (caz general)

$\cdot\, e^{At} = T^{-1} \cdot \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_k t} \end{bmatrix} \cdot T$ (caz în care A e diagonalizabilă

$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{bmatrix}$

ECUAȚIA LIAPUNOV

$A^t P + PA + Q = 0$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$

P → necunoscuta

Teoremă : • (A, B, C, D) intern asimptotic stabil dacă $\Lambda(A) \subset \mathbb{C}_-$

• (A, B, C, D) intern stabil dacă $\Lambda(A) \subset \mathbb{C}_- \cup \mathbb{C}_0$, iar valorile proprii de pe axa imaginară sunt rădăcini simple ale polinomului minimal

Teoremă : Dacă A e asimptotic stabilă , atunci ecuația Liapunov are o soluție unică :

$$P = \int_0^\infty e^{A^t t} \cdot Q \cdot e^{At}\, dt$$

Teoremă : Pp. $(\exists) P = P^t > 0$ și $Q = Q^t \geq 0$ a.î.

$$A^t P + PA + Q = 0$$

$$\Rightarrow \Lambda(A) \subset \mathbb{C}_0^-$$

II. Stabilitate externă

→ comportamentul lui y

STABILITATEA SISTEMELOR DINAMICE

I. Stabilitate internă (LIAPUNOV)

→ se referă la comportarea lui $x(t)$ atunci când intrarea e identic nulă

$\dot{x}(t) = A \cdot x(t)$, $x(0) = x_0$

- $(\forall)\varepsilon > 0 \rightarrow (\exists)\, \delta(\varepsilon) > 0$ $\boxed{\text{a.î.}}$ $(\forall)\, x_0$ cu $\|x_0\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|x(t)\| \leq \varepsilon$

= intern stabil

- $\lim\limits_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0$, $(\forall)\, x_0$

= intern asimptotic stabil ($\lim\limits_{t\to\infty} \Phi(t) = \lim\limits_{t\to\infty} e^{At} = 0$)

Pentru că $x(t) = \Phi(t) \cdot x_0 = e^{At} \cdot x_0$ există consecințe.

Trebuie să analizăm e^{At}. Avem 3 cazuri.

a) A = bloc Jordan cu val. proprii 0

b) A = bloc Jordan oarecare

c) A = oarecare

a) $A = J_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

A nilpotentă adică $(\exists)\, k$ a.î. $A^k = 0$ și în cazul nostru $k = n \Rightarrow A^n = 0$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{t}{1!} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

b) $A = J_0 + \lambda_0 \cdot I_n$

$$e^{At} = e^{(J_0 + \lambda_0 I_n)t} = e^{J_0 t} \cdot e^{\lambda_0 I_n t} = e^{J_0 t} \cdot e^{\lambda_0 t} \cdot I_n$$

$$\Rightarrow e^{At} = e^{\lambda_0 t} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{t}{1!} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$\chi(s) = \det(sI - A)$ → **polinomul caracteristic** al lui A

$H(s) = C \cdot (sI - A)^{-1} B + D = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$

(A, B, C, D) este o

realizare de stare

asociată lui $H(s)$.

ECHIVALENȚA PE STARE

$(\exists) T$ → matrice inversabilă numită TRANSFORMARE

Dacă: $p = \tilde{p}$ (intrări)
$m = \tilde{m}$ (ieșiri) și
$n = \tilde{n}$ (stări)

$\tilde{A} = TAT^{-1}$
$\tilde{B} = TB$
$\tilde{C} = CT^{-1}$
$\tilde{D} = D$

Atunci (A, B, C, D) și $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ se numesc **echivalente pe stare**.

T e o schimbare de coordonate de fapt

ECHIVALENȚA INTRARE - IEȘIRE

Dacă: $m = \tilde{m}$ (intrări)
$p = \tilde{p}$ (ieșiri) și $H(s) = \tilde{H}(s)$

Atunci (A, B, C, D) și $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ se numesc **echivalente intrare - ieșire**.

! n nu e neapărat egal cu $\tilde{n}$ (nr. stări)

! $D = H(\infty) = \tilde{H}(\infty) = \tilde{D}$

! **2 sisteme echivalente PE STARE SUNT ECHIVALENTE și INTRARE - IEȘIRE**

TEORIA SISTEMELOR

-de la spațiul stărilor încolo-

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases}$$

A → descrie cum se leagă între ele **stările** (dinamica sistemului)

B → descrie cum afectează inputul sistemul (ce stări afectează)

C → descrie cum sunt combinate **stările** ca să se obțină **outputul**

D → descrie cum trec inputurile prin sistem și ajung la **output**

Laplace ⇒ $\begin{cases} sX(s) = AX(s) + BU(s) \\ y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$

$H(s) = \dfrac{y(s)}{U(s)}$ $\begin{cases} (sI - A)X(s) = BU(s) \\ y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$

$$\begin{cases} X(s) = (sI - A)^{-1} B U(s) \\ y(s) = [C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B + D] \cdot U(s) \end{cases}$$

$\Rightarrow H(s) = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B + D$

Sistemul de ordin 2

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n \cdot s + \omega_n^2}$$

$\xi = 0 \Rightarrow y(t) = 1 - \cos(\omega_n t) \rightarrow$ regim oscilant

$\xi = 1 \Rightarrow H(s) = \dfrac{\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2} \Rightarrow y(t) = 1 - \omega_n t \cdot e^{-\omega_n t} - e^{-\omega_n t}$

$\rightarrow$ regim critic

$\xi > 1 \Rightarrow$ 2 poli simpli $\rightarrow$ regim supracritic

$\xi < 1 \Rightarrow$ OSCILAȚII AMORTIZATE $\rightarrow$ regim subcritic

Punct critic : $\dfrac{dy(t)}{dt} = 0 \Rightarrow t_k = \dfrac{k\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$

$\Rightarrow y_{max} = 1 + e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \Rightarrow \sigma = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$

ξ	0,2	0,4	0,5	0,6	0,7
σ	50%	26%	16%	10%	5%

Pt. $|y_k(t_k)| < 0{,}02 \Rightarrow t_k \geq \dfrac{4}{\xi\omega_n}$

Pt. $0{,}3 < \xi < 0{,}8 \Rightarrow t_c \simeq \dfrac{1{,}8}{\omega_n}$ (creștere)

$t_v = \dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$ (vârf)

Îi impunem lui **y** să urmeze evoluția impusă de **r** în prezența perturbațiilor **d**

Performanțele regimului tranzitoriu

- timp de răspuns scurt
  1) timp de creștere $0{,}1H(0) \to 0{,}9H(0)$
  2) timp de vârf $0 \to$ val. maximă
- calitatea urmăririi treptei
  - timp tranzitoriu $\to$ cât ia lui $y_t(t)$ să devină 0

$$|y_t(t)| \leq 0{,}02H(0)$$

- supreareglajul

$$\sigma = \frac{y_{1,max} - y_p(t)}{y_p(t)} = \frac{y_{1,max} - H(0)}{H(0)}\%$$

$y_{1,max}$ $\to$ valoarea de vârf

Sisteme de ordinul întâi

- $H(s) = \dfrac{K}{Ts+1}$, $K, T > 0$

$K \to$ factor de amplificare

$T \to$ constanta sistemului

RĂSPUNS FORȚAT

componenta forțată

- $y(s) = y_F(s) + y_L(s) = \frac{A(s)}{B(s)} \cdot U(s) + \frac{C(s)}{B(s)}$

funcția de transfer

componenta liberă (satisface cond. inițiale)

$H(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$

B(s) are poli doar în $\mathbb{C}_-$ => sistemul e STABIL

- $y(t) = y_p(t) + y_t(t)$ → tranzitoriu

permanent

$$\begin{cases} \lim_{t\to\infty} y_p(t) \neq 0 \\ \neq \infty \\ \lim_{t\to\infty} y_t(t) = 0 \end{cases}$$

CRITERIUL DE STABILITATE HURWITZ

$P(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s^1 + a_0 s^0$

P(s) are toate rădăcinile în $\mathbb{C}^-$

(=> toți minorii principali ai matricei Hurwitz sunt strict pozitivi

$$H = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & \\ \vdots & a_n & a_{n-2} & \dots & \\ \vdots & \vdots & & & \end{bmatrix}$$

Dacă există un coeficient nul sau 2 coeficienți de semne contrare, atunci P(s) nu e Hurwitzian

$\lg 2 \simeq 0{,}3$
$\ln 3 \simeq 0{,}5$

Un SISTEM de convoluție e caracterizat de răspunsul său la impuls: $h(t) = T(\delta(t))$

- Un SISTEM de convoluție e **CAUZAL** $\Leftrightarrow$ $h(t) = 0$ pt. $\forall t < 0$

STABILITATE

- un semnal e **BIBO** dacă pt. $\forall$ intrare mărginită $\Rightarrow$ ieșire mărginită

- un sistem de convoluție e stabil dacă și numai dacă $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty$ (funcția pondere are acțiune finită)

- un sistem de convoluție e stabil în sens NESTRICT dacă h e mărginită, dar răspunsul e nemărginit

RĂSPUNSUL ÎN TIMP AL SDC

1) La impuls ($\delta(t)$)

$y(t) = h(t)$

2) La treapta unitară ($1(t)$)

$y(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\theta)\, d\theta \rightarrow h(t) = \frac{dy_1(t)}{dt}$

Răspunsul e o treaptă amplificată cu $H(0)$.

3) La armonică

$u(t) = e^{j\omega t} \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta) \cdot e^{-j\omega\theta}\, d\theta \cdot e^{j\omega t}$

Răspunsul are aceeași pulsație ω, amplificată cu $|h(j\omega)|$ și defazată cu $\arg(h(j\omega))$.

Transformata Z

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot z^{-k}$$

Proprietăți:

1) Impulsul discret

$$Z[d(k)] = 1$$

2) Treapta unitară

$$Z[1(k)] = \frac{z}{z-1}$$

3) $$Z[e^{-\alpha k T}] = \frac{z}{z-a}$$

4) $$Z[x(-n)] = X(z^{-1})$$

5) $$Z[x(k-a)] = z^{-a} \cdot X(z)$$

6) $$Z[x(k-a) \cdot 1(k-a)] = z^{-a} X(z)$$

7) $$Z[x(k-a) \cdot 1(k)] = z^{-a} \cdot X(z) - z^{-a}(x(1) \cdot z^{1} + x(2) \cdot z^{2} + \dots$$

8) $$Z[a^{k} \cdot x(k)] = X(a^{-1} \cdot z)$$

9) $$Z[k \cdot x(k)] = -z \cdot \frac{dX(z)}{dz}$$

10) $$x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z)$$

11) $$\exists \lim_{k \to \infty} x(k) \Rightarrow \lim_{k \to \infty} x(k) = \lim_{z \to 1} \left(1 - \frac{1}{z}\right) X(z)$$

Transformata Laplace

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} \, dt$$

- $f(t)$ este funcție original Laplace dacă:
  1) $f(t) = 0$ pt. $t < 0$
  2) f continuă pe porțiuni în $[0, \infty)$
  3) $|f(t)| < M \cdot e^{s_0 t}$

Proprietăți

1) $\mathcal{L}[f(\alpha t)] = \frac{1}{\alpha} \cdot F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$

2) $\mathcal{L}[f(t-\tau)] = e^{-\tau s} \cdot F(s)$

3) $\mathcal{L}[e^{-at} \cdot f(t)] = F(s+a)$

4) $\mathcal{L}[t^n \cdot f(t)] = (-1)^n \cdot F^{(n)}(s)$

5) $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n \cdot F(s) - s^{n-1} \cdot f(0) - s^{n-2} \cdot f'(0) - s^{n-3} \cdot f''(0) - \dots$

6) $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) \, d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$

7) $\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(s) \cdot G(s)$

TEOREMA VALORII INIȚIALE

$$\lim_{s \to \infty} sF(s) = f(0^+)$$

TEOREMA VALORII FINALE

$$\lim_{s \to 0} sF(s) = \lim_{t \to \infty} f(t)$$

8) $\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}$

Sisteme de convoluție

- LINIARE
- INVARIANTE ÎN TIMP
  (delay la intrare se vede instantaneu la ieșire)

$y = T(u)$

$$y(t) = (h * u)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\cdot u(\tau)\, d\tau$$

$h(t) \rightarrow$ funcția pondere / de transfer

$H(s) = \mathcal{L}[h(t)]$

! Pt. $u = \delta(t) \rightarrow$ impulsul Dirac $\Rightarrow y(t) = h(t)$

↳ f. mare în apropierea lui 0
f. mic în afara lui 0

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) = 1 \quad , \quad \delta(t) = \frac{d\,1(t)}{dt}$$

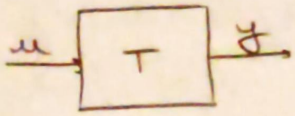
$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

I. $H(s)$ proprie $\Leftrightarrow gr(P) < gr(Q)$

II. $H(s)$ improprie $\Leftrightarrow gr(P) > gr(Q)$

III. $H(s)$ biproprie $\Leftrightarrow gr(P) = gr(Q)$

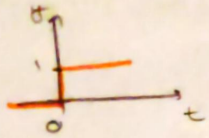
Teorie TS



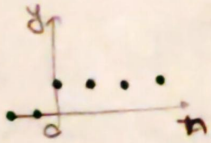
$y = T(u)$

Semnale standard

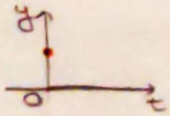
1) Treapta unitară



2) Treapta unitară discretă

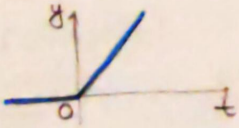


3) Impuls



4) Rampă

$$\begin{cases} t, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



Semnale armonice

$$\boxed{u(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)}$$

$$u(t) = ae^{j\omega t} = A\cos(\omega t + \varphi_0) + jA\sin(\omega t + \varphi_0)$$

Operații cu semnale: suma, produs, convoluție

Impuls
- dreptunghiular: $\begin{cases} 1, & a \le t_1 \le b \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$
- triunghiular: $\begin{cases} 1-|t|, & -1 \le t_1 \le 1 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$