# Stabilizare, estimare–compensatorul Kalman

**Tudor C. Ionescu**
Dept. de Automatică și Ingineria Sistemelor (ACSE),
Facultatea de Automatică și Calculatoare,
Universitatea Politehnica București

e-mail: `tudor.ionescu@acse.pub.ro`

URL: `http://acse.pub.ro/person/tudor-cornel-ionescu/`

decembrie 2019

1. Compensatoare dinamice–problematica. Principiul separației
2. Lege de comandă, alocabilitate, stabilizabilitate, detectabilitate
3. Procedura de alocare
4. Estimatori de stare
   - Estimatori de tip 1. Estimatorul Luenberger
5. Compensatorul Kalman
6. Cazul sistemelor discrete pe spațiul stărilor

# Problema naturală a sintezei

Sistem liniar:

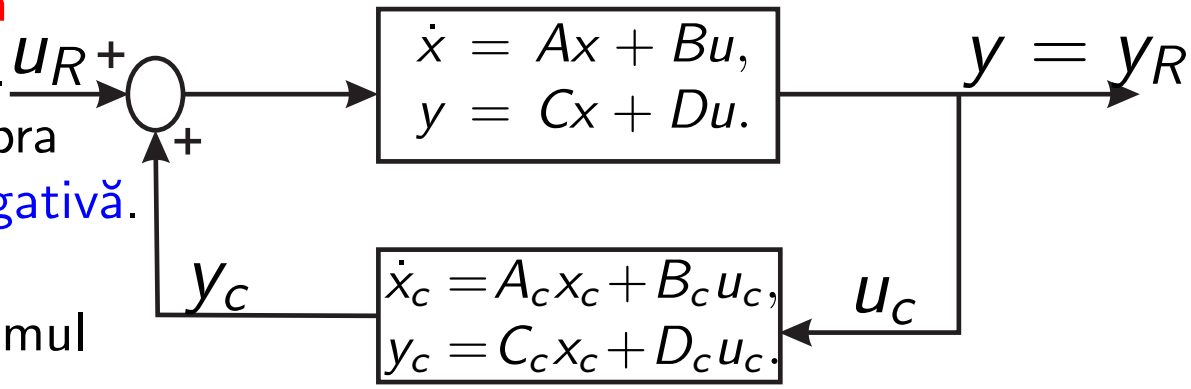
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & x(0) = x_o, \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), & x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbb{R}^m, \quad y(t) \in \mathbb{R}^p. \end{cases} \tag{1}$$

**Problema sintezei**: Cum putem modifica dinamica acestui sistem astfel încât să satisfacă anumite cerințe? Cerințele elementare, vezi cazul sistemelor SISO: stabilitate & comportament al sistemului la diverse semnale–referință/perturbații.

**Răspuns:** Cerințele de proiectare se pot realiza prin cuplarea unui nou sistem dinamic, numit *compensator* (de preferință din aceeași clasă de modele) astfel încât sistemul rezultant să se comporte în modul dorit.

# Compensator dinamic

Precum în cazul sistemelor SISO, conexiunile serie și paralel nu pot asigura nici măcar cerința minimală de stabilitate (internă). Prin urmare, ne concentrăm asupra conexiunii în buclă de reacție negativă. În conjuncție cu sistemul (1), considerăm sistemul dinamic pe spațiul stărilor–numit compensator dinamic/regulator –




$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c u_c(t), & x_c(0) = x_{co}, \\ y_c(t) = C_c x_c(t) + D_c u_c(t), \end{cases} \tag{2}$$

unde $x_c(t) \in \mathbb{R}^{n_c}$, $u_c(t) \in \mathbb{R}^p$, $y_c(t) \in \mathbb{R}^m$, cuplat în reacție inversă cu (1) a.î.

$$u \equiv y_c + u_R, \qquad y_R \equiv y \equiv u_c$$

unde $u_R$ este intrarea (semnal extern) si $y_R$ este ieșirea sistemului rezultant.

# Sistemul în buclă închisă

Pentru simplificare presupunem, în conexiunea în reacție inversă, $S := I_p - DD_c = I$, $\widehat{S} = I_m - D_c D = I$ (de exemplu $D = 0$ sau $D_c = 0$) $\Rightarrow$ ecuațiile dinamice ale sistemului echivalent sunt

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ x_c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A + BD_c C & BC_c \\ B_c C & A_c + B_c D C_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B_c D \end{bmatrix} u_R, \\ y_R &= \begin{bmatrix} C & DC_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} + D u_R. \end{aligned} \tag{3}$$

Notând

$$x_R := \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix}, \; A_R := \begin{bmatrix} A + BD_c C & BC_c \\ B_c C & A_c + B_c D C_c \end{bmatrix}, \; B_R := \begin{bmatrix} B \\ B_c D \end{bmatrix},$$

$$C_R := \begin{bmatrix} C & DC_c \end{bmatrix}, \qquad D_R := D.$$

obținem echivalent

$$\begin{cases} \dot{x}_R(t) = A_R x_R(t) + B_R u_R(t), \\ y_R(t) = C_R x_R(t) + D_R u_R(t). \end{cases} \qquad x_R(0) = \begin{bmatrix} x_o \\ x_{co} \end{bmatrix}, \tag{4}$$

# Problemele naturale fundamentale

**1. Problema stabilizării:** Pentru sistemul original $(A, B, C, D)$ găsiți un regulator (sau clasa tuturor!!!) $(A_c, B_c, C_c, D_c)$ a.î. sistemul rezultant în buclă închisă să fie intern asimptotic stabil, i.e., $\boxed{\Lambda(A_R) \subset \mathbb{C}^-}$.

**2. Problema alocării:** Pentru sistemul original $(A, B, C, D)$ găsiți un regulator (sau clasa tuturor!!!) $(A_c, B_c, C_c, D_c)$ a.î. sistemul rezultant în buclă închisă sa aibă o dinamică impusă, i.e., valorile proprii ale sistemului în buclă închisă să coincidă cu mulțimea $\Lambda_0$ de $n + n_c$ valori complexe date, i.e., $\boxed{\Lambda(A_R) = \Lambda_0}$.

Observația 1

- Ambele probleme impun condiții numai asupra matricii $A_R$.
- În ambele probleme trebuie implicit determinat și $n_c$ (dimensiunea compensatorului) fiind de dorit ca aceasta să fie cât mai mică. Problemele de stabilizare/alocare în care se impune condiția suplimentară de minimalitate a lui $n_c$ sunt probleme structurale foarte dificile.
- Mulțimea $\Lambda_0$ se ia in general simetrică, i.e., dacă $s \in \Lambda_0 \Leftrightarrow \overline{s} \in \Lambda_0$, regulatorul rezultând cu coeficienți reali. $\Lambda_0$ se dă ca cerință de proiectare, asigurând automat o anumită viteză de răspuns, timp tranzitoriu, etc. Spre deosebire de problema alocării, problema stabilizării nu cere spectru fix, ci doar localizarea în $\mathbb{C}^-$.

# Principiul separației

Un compensator dinamic poate fi calculat rezolvând independent 2 probleme.

- Construcția unei legi de reacție după stare $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ care alocă sau stabilizează (face ca matricea $A + BF$ să aibă spectrul dorit, sau sa fie asimptotic stabilă);
- Construcția unui estimator de stare, i.e., prelucrează semnalele exogene – intrările $u$ și ieșirile $y$ – și generează o estimare a mărimii de stare $x$, care, în general, nu poate fi măsurată.

În final, regulatorul (de tip Kalman) se obține luând reacția $F$ după starea estimată.

Problema de alocare (cu reacție dinamică după ieșire) are soluție dacă și numai dacă perechea $(A, B)$ este controlabilă și perechea $(C, A)$ este observabilă.

Problema de stabilizare (cu reacție dinamică după ieșire) are soluție dacă și numai dacă perechea $(A, B)$ este *stabilizabilă* și perechea $(C, A)$ este *detectabilă*.

1 Compensatoare dinamice–problematica. Principiul separației

2 Lege de comandă, alocabilitate, stabilizabilitate, detectabilitate

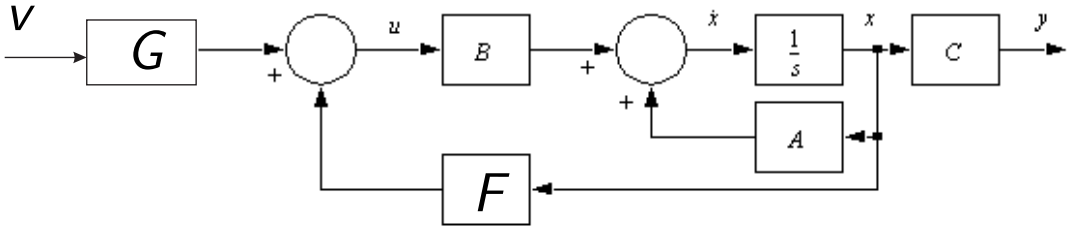
3 Procedura de alocare

4 Estimatori de stare
- Estimatori de tip 1. Estimatorul Luenberger

5 Compensatorul Kalman

6 Cazul sistemelor discrete pe spațiul stărilor

# Pereche stabilizabilă/detectabilă




## Definiția 1

- Fie sistemul $(A, B, C, D)$. Numim dependența

$$u = Fx + Gv \tag{5}$$

lege de comandă prin reacție după stare ($F \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $G \in \mathbb{R}^{m\times m}$), $F$ matrice de reacție și $v$ este noua mărime de intrare.

- Perechea $(A, B)$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ se numește stabilizabilă dacă există o matrice de reacție după stare $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a.î. $\boxed{\Lambda(A + BF) \subset \mathbb{C}^-}$.

- Perechea $(C, A)$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se numește detectabilă dacă există o matrice de reacție după stare $K \in \mathbb{R}^{n\times p}$ a.î. $\boxed{\Lambda(A + KC) \subset \mathbb{C}^-}$.

# Pereche alocabilă. Dualitate

### Definiția 2

Perechea $(A, B)$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, se numește alocabilă dacă oricare ar fi mulțimea simetrică $\Lambda_0$ de $n$ numere complexe (orice $s \in \Lambda_0 \Rightarrow \overline{s} \in \Lambda_0$), există o matrice de reacție după stare $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a.î.

$$\Lambda(A + BF) = \Lambda_0.$$

Proprietățile de stabilizabilitate și detectabilitate sunt duale.
Considerând sistemul dinamic

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & x(0) = x_o, \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \tag{6}$$

legea de comandă după stare implică accesul (din punct de vedere tehnic) la stare, i.e., cunoașterea mărimii de stare! După implementarea comenzii (5) sistemul în buclă închisă devine

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + BF)x(t) + BGv(t), & x(0) = x_o, \\ y(t) = (C + DF)x(t) + DGv(t), \end{cases} \tag{7}$$

având noua intrare $v$ și ieșirea $y$.

# Criteriul Hautus de stabilizabilitate/detectabilitate

Propoziția 1

- *Perechea* $(A, B)$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *este stabilizabilă dacă și numai dacă*

$$\operatorname{rang}\left[\, sI - A \;\; B \,\right] = n, \quad \forall s \in \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{C}^0. \tag{8}$$

- *Perechea* $(C, A)$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *este detectabilă dacă și numai dacă*

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix} = n, \quad \forall s \in \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{C}^0. \tag{9}$$

1 Compensatoare dinamice–problematica. Principiul separației

2 Lege de comandă, alocabilitate, stabilizabilitate, detectabilitate

3 Procedura de alocare

4 Estimatori de stare
- Estimatori de tip 1. Estimatorul Luenberger

5 Compensatorul Kalman

6 Cazul sistemelor discrete pe spațiul stărilor

# Soluția problemei alocării

**Teorema 1**

*Perechea* $(A, B)$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *este alocabilă dacă și numai dacă este controlabilă.*

Demonstrația – în etape:

- se demonstrează suficiența pentru $m = 1$ (o intrare);
- se arată că problema cu $m > 1$ se poate reduce printr-o (pre)reacție după stare $F$ la problema cu $m = 1$;
- se demonstrează teorema pentru $m$ general.

**Teorema 2 (Cazul m=1 – o intrare)**

*Perechea* $(A, b)$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, b \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ *este alocabilă dacă este controlabilă.*

Fie $\Lambda_0$ un set simetric de $n$ numere $s_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. $\exists\ f \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ a.î.

$$\Lambda(A + bf^T) = \Lambda_0.$$

**Q:** Cum îl calculăm pe $f^T$?

**A:** **Procedura de alocare**! (de fapt demonstrația Teoremei 2).

# Soluția problemei alocării - continuare

Observația 2

- Partea controlabilă a oricărei perechi $(A, B)$ este alocabilă. Perechea $(A, B)$ are și o parte nealocabilă, i.e., anumiți poli ficși dați de partea necontrolabilă. Acești poli sunt invarianți în raport cu orice reacție după stare.
- Proprietatea „benefică" fundamentală a unei perechi controlabile $(A, B)$ este că dinamica sistemului (determinată de v.p. ale matricii de stare $A$) poate fi modificată în mod arbitrar printr–o reacție după stare.
- Demonstrațiile teoremelor de mai sus sunt, de obicei, constructive, conducând la proceduri de obținere a reacției care alocă. Aceaste metode au însă numeroase dezavantaje dpdv numeric și, de aceea, s-au dezvoltat alte proceduri numeric stabile de construcție a reacției $F$ (algoritm de tip Schur, alocare cu normă minimă etc.)
- Alocabilitatea nu implică, în general, faptul că matricea $A + BF$ are orice elemente prescrise, ci doar orice spectru prescris!

# Procedura de alocare: Cazul $m = 1$

Pas 0. Dându–se perechea controlabilă $(A, b)$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, și un set simetric de $n$ valori proprii $s_1, s_2, \ldots, s_n$ se construiește polinomul

$$\chi(s) = \Pi_{i=1}^{n}(s - s_i) = \alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \ldots + \alpha_{n-1}s^{n-1} + s^n,$$

cu $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$.

Pas 1. Se construiește matricea de controlabilitate (pătrată și nesingulară)

$$R = \left[\, b \;\; Ab \;\; \ldots \;\; A^{n-1}b \,\right].$$

Pas 2. Se rezolvă ecuația (în necunoscuta $q \in \mathbb{R}^n$)

$$R^T q = e_n = \left[\, 0 \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 0 \;\; 1 \,\right]^T.$$

Pas 3. $$\boxed{f^T = -q^T \chi(A)}.$$

# Procedura de alocare: cazul general $m > 1$

Pentru procedura în cazul multivariabil avem nevoie de un rezultat auxiliar.

**Propoziția 2**

*Fie $(A, B)$ controlabilă, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Controlabilitatea perechii $(A + BF, b)$ este generică in raport cu $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ și $b := Bg$, $0 \neq g \in \mathbb{R}^m$. Mai exact, alegând aleator perechea $(F, g)$, perechea $(A_F, b)$ este (generic) controlabilă.*

Pas 0. Dându–se perechea controlabilă $(A, B)$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, și un set simetric de $n$ valori proprii $s_1, s_2, \ldots, s_n$ se construiește polinomul

$$\chi(s) = \Pi_{i=1}^{n}(s - s_i) = \alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \ldots + \alpha_{n-1}s^{n-1} + s^n,$$

cu $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$.

Pas 1. Se aleg $\widetilde{F} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ și $g \in \mathbb{R}^m$ aleator și se construiesc matricile

$$A_{\widetilde{F}} := A + B\widetilde{F}, \quad b = Bg.$$

Pas 2. Se aplică procedura de alocare pt $m = 1$ perechii $(A_{\widetilde{F}}, b)$ și polinomului $\chi(s) \Longrightarrow$ reacția $f \in \mathbb{R}^m$.

Pas 3. Reacția finală $\boxed{F = \widetilde{F} + gf^T}$.

1 Compensatoare dinamice–problematica. Principiul separației

2 Lege de comandă, alocabilitate, stabilizabilitate, detectabilitate

3 Procedura de alocare

4 Estimatori de stare
- Estimatori de tip 1. Estimatorul Luenberger

5 Compensatorul Kalman

6 Cazul sistemelor discrete pe spațiul stărilor

# Estimarea stării

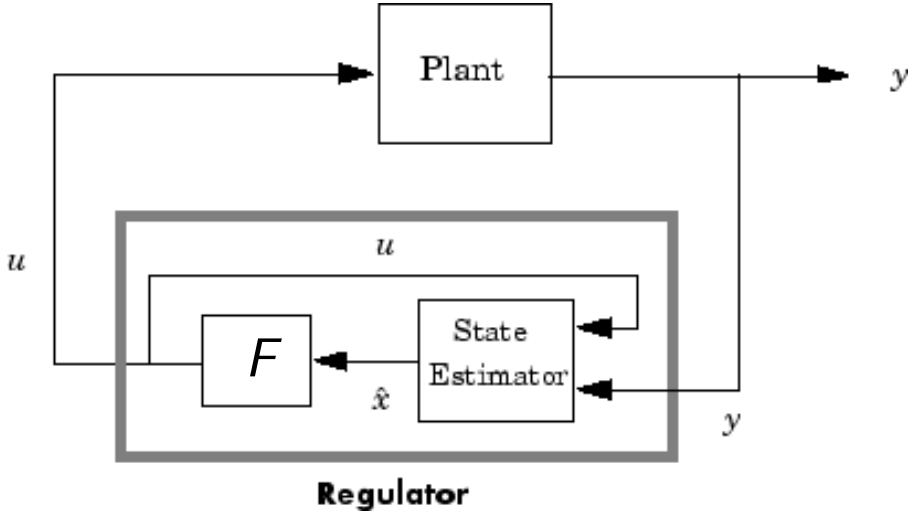



Figura 1: Lege de comandă prin reacție după starea estimată

Legea de comandă cu reacție după stare poate asigura cerințele fundamentale de stabilizare și de alocare cu condiția ca starea să fie **disponibilă pentru măsură** (să fie accesibilă dpdv tehnic). Acest lucru NU este în general posibil și atunci ne punem problema estimării cât mai exacte a stării unui sistem dinamic prin construcția unui nou sistem care să citească mărimile accesibile sau măsurabile (intrarea $u$ și ieșirea $y$) și care să genereaze la ieșire o estimare a stării $\widehat{x} \Longrightarrow$ **estimator de stare** (vezi Figura 1.).

# Problema estimării

**Problemă:** Dându–se un sistem

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & x(0) = x_o, \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \tag{10}$$

dorim să construim un nou sistem

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = Jw(t) + Hy(t) + Mu(t), \\ \widehat{x}(t) = Kw(t) + Ny(t) + Pu(t), \end{cases} \tag{11}$$

care are ca intrări intrarea $u$ și ieșirea $y$, are ca ieșiri starea estimată $\widehat{x}$ și mărimea de stare $w$, care să îndeplinească simultan următoarele două condiții.

1. Să fie intern asimptotic stabil, i.e., matricea de stare $J$ să satisfacă

$$\Lambda(J) \subset \mathbb{C}_-.$$

2. $\lim_{t\to\infty}(\widehat{x}(t) - x(t)) = 0$, i.e., ieșirea $\widehat{x}(t)$ (numită estimația stării) să aproximeze asimptotic starea sistemului original $x(t)$.

# Problema estimării - soluție

**Observația 3**

- Ideal ar fi $x(t) = \widehat{x}(t)$, $\forall t$. Acest lucru nu este însă, în general, posibil și atunci această cerință se relaxează la cea asimptotică.
- Cerința de stabilitate internă este esențială pentru construcția estimatorului.

Soluție: punem în evidență „fidelitatea" cu care starea estimatorului (11) urmărește starea sistemului original, i.e., evaluăm

$$w - Vx,$$

unde $V$ este o matrice care „adaptează" dimensiunile posibil diferite ale lui $x$ și $w$. Folosind (10) și (11), avem succesiv

$$\begin{aligned}
\dot{w} - V\dot{x} &= Jw + Hy + Mu - VAx - VBu, \\
\overbrace{w - Vx}^{\cdot} &= J(w - Vx) + JVx + HCx + HDu - VAx + (M - VB)u, \\
\overbrace{w - Vx}^{\cdot} &= J(w - Vx) + (JV + HC - VA)x + (M - VB + HD)u. \qquad (12)
\end{aligned}$$

# Soluția problemei estimării–continuare

Calculăm

$$\begin{aligned} \widehat{x} - x &= Kw + Ny + Pu - x = K(w - Vx) + KVx + NCx + NDu - x + Pu \\ \Rightarrow \widehat{x} - x &= K(w - Vx) + (KV + NC - I)x + (P + ND)u. \end{aligned} \tag{13}$$

Combinând (12) cu (13) obținem

$$\begin{cases} \overbrace{w - Vx}^{\cdot} &= J(w - Vx) + (JV + HC - VA)x + (M - VB + HD)u, \\ \widehat{x} - x &= K(w - Vx) + (KV + NC - I)x + (P + ND)u. \end{cases}$$

Pentru ca starea estimatorului să urmarească asimptotic starea sistemului original (condiția 2) trebuie ca ieșirea sistemului dinamic de mai sus sa tindă asimptotic la zero (indiferent de inițializări și de semnalele de intrare $x$ și $u$).

**Q:** Când este posibil ca ieșirea acestui sistem să tindă la zero?

# Soluția problemei estimării–continuare

Acest lucru este posibil dacă satisfacem simultan următoarele condiții.

**a)** $J$ asimptotic stabilă;

**b)** $JV + HC - VA = 0$;

**c)** $M - VB + HD = 0$;

**d)** $KV + NC - I = 0$;

**e)** $P + ND = 0$.

Dacă aceste condiții sunt simultan satisfăcute, obținem comportarea dinamică

$$\begin{cases} \overbrace{w - Vx}^{\cdot} = J(w - Vx), \\ \widehat{x} - x = K(w - Vx). \end{cases}$$

Așadar,

$$\lim_{t\to\infty}(w(t) - Vx(t)) = 0, \qquad \lim_{t\to\infty}(\widehat{x}(t) - x(t)) = 0.$$

indiferent de inițializarea sistemului sau a estimatorului!

# Soluția problemei estimării - continuare

Problema de construcție a estimatorului asimptotic stabil s-a redus la problema algebrică de satisfacere simultană a condițiilor a) – e): avem 5 condiții (4 ecuații algebrice și o localizare de spectru) și 7 necunoscute.

Evident c) și e) se pot satisface automat, alegând $M := VB - HD$ și $P := -ND$.

Rămân în continuare mai multe grade de libertate în satisfacerea celorlalte condiții

$$\begin{aligned} \Lambda(J) &\subset \mathbb{C}_-, \\ JV + HC - VA &= 0, \\ KV + NC - I &= 0, \end{aligned}$$

în funcție de care se deosebesc multiple tipuri de estimatori.

1 Compensatoare dinamice–problematica. Principiul separației

2 Lege de comandă, alocabilitate, stabilizabilitate, detectabilitate

3 Procedura de alocare

4 Estimatori de stare
- Estimatori de tip 1. Estimatorul Luenberger

5 Compensatorul Kalman

6 Cazul sistemelor discrete pe spațiul stărilor

# Estimatori de tip 1: $N = 0$

Condiția este echivalentă cu a spune că estimatorul nu are transfer direct I/O, i.e., matricea sa "$D$" este zero. În acest caz obținem

$$\begin{aligned} JV + HC - VA &= 0, \\ KV &= I. \end{aligned}$$

Putem alege $K = I$, $V = I$. Prin urmare, rămâne de satisfăcut doar condiția

$$J = A - HC, \qquad \Lambda(J) \subset \mathbb{C}_-.$$

Această condiție se poate satisface automat dacă perechea $(C, A)$ este detectabilă, caz în care alegem $-H$ egal cu reacția care stabilizeaza (problema de stabilizare pentru perechea $(A^T, C^T)$). Mai mult, dacă perechea $(C, A)$ este observabilă, atunci spectrul matricii de stare $J$ a estimatorului poate fi alocat arbitrar.
În concluzie, am obținut pentru un estimator de tipul 1 următoarea procedură de construcție.

# Construcția estimatorului de tip 1. Estimator Luenberger

Pasul 1: Se folosește procedura de alocare pentru perechea $(A^T, C^T)$ și se determină o matrice $\widetilde{F}$ a.i. $(A^T) + (C^T)\widetilde{F}$ să aibă spectrul dorit (impus, sau doar localizat în $\mathbb{C}^-$ în funcție de cerința de proiectare).
Pasul 2: Se calculează estimatorul cu parametrii

$$H = -\widetilde{F}^T, \quad J = A - HC, \quad K = V = I, \quad M = B - HD, \quad P = 0,$$

rezultând

$$\begin{cases} \dot{w}(t) &= (A - HC)w(t) + Bu(t) - HDu(t) + Hy(t), \\ \widehat{x}(t) &= w(t), \end{cases} \tag{14}$$

sau, echivalent, în forma de estimator Luenberger (am notat $L := -H$)

$$\boxed{\dot{\widehat{x}} = (A + LC)\widehat{x} + (B + LD)u - Ly}. \tag{15}$$

# Estimatorul Luenberger - continuare

## Observația 4

- Pentru a construi un estimator Luenberger este necesar doar să specificăm spectrul estimatorului $\Lambda_0$ și să construim reacția $L$ care alocă respectivii poli pentru estimator $\Lambda(A + LC) = \Lambda_0$. Pentru ca estimatorul să rezulte cu coeficienți reali, spectrul se alege întotdeauna simetric.
- Dacă perechea $(C, A)$ este observabilă atunci spectrul matricii de stare a estimatorului poate fi alocat arbitrar și deci este posibil ca estimatorul să furnizeze o estimație cât de precisă a stării într-un timp oricât de scurt!
- Din (15) observăm că estimatorul „copiază" dinamica sistemului original + termen proporțional cu „inovația" $C\widehat{x} + Du - y$ care de fapt măsoară „calitatea" estimării! Pentru o estimare perfectă avem $\widehat{x}(t) = x(t)$ și deci inovația este zero deoarece

$$C\widehat{x} + Du - y = C\widehat{x} - Cx = 0.$$

- Dacă facem o transformare de similaritate asupra sistemului original, estimatorul Luenberger se modifică corespunzător.

# Estimatorul Luenberger - continuare

### Observația 5

- Pentru a construi estimatorul Luenberger, singura condiție pe care am impus-o sistemului intițial este cea de detectabilitate (sau respectiv de observabilitate) asupra perechii $(C, A)$. Condiția este nu numai suficientă pentru construcția unui estimator Luenberger, ci și necesară.
- Estimatorul de tipul 1 (Luenberger) are dimensiunea $n$ și de aceea se mai numește de ordin întreg. În anumite situații, se pot construi estimatori de ordin mai mic.

### Teorema 3

*Fie sistemul $(A, B, C, D)$ descris de (10). Atunci există un estimator (11) dacă și numai dacă perechea $(C, A)$ este detectabilă. Dacă $(C, A)$ este detectabilă, atunci un estimator (de tip 1 sau Luenberger) este dat de ecuațiile*

$$\begin{cases} \dot{w} &= (A + LC)w + Bu + LDu - Ly, \\ \widehat{x}(t) &= w(t), \end{cases} \tag{16}$$

*unde $L$ este orice matrice a.i. $\Lambda(A + LC) \subset \mathbb{C}_-$.*

1 Compensatoare dinamice–problematica. Principiul separației

2 Lege de comandă, alocabilitate, stabilizabilitate, detectabilitate

3 Procedura de alocare

4 Estimatori de stare
- Estimatori de tip 1. Estimatorul Luenberger

5 Compensatorul Kalman

6 Cazul sistemelor discrete pe spațiul stărilor

# Problema compensatorului dinamic stabilizator

Un sistem poate fi stabilizat/alocat cu o reacție constantă după stare. Deoarece starea nu este, în general, cunoscută am construit un sistem (numit estimator) care estimează asimptotic starea sistemului pe baza informațiilor furnizate de semnalele de intrare $u$ și de ieșire $y$.

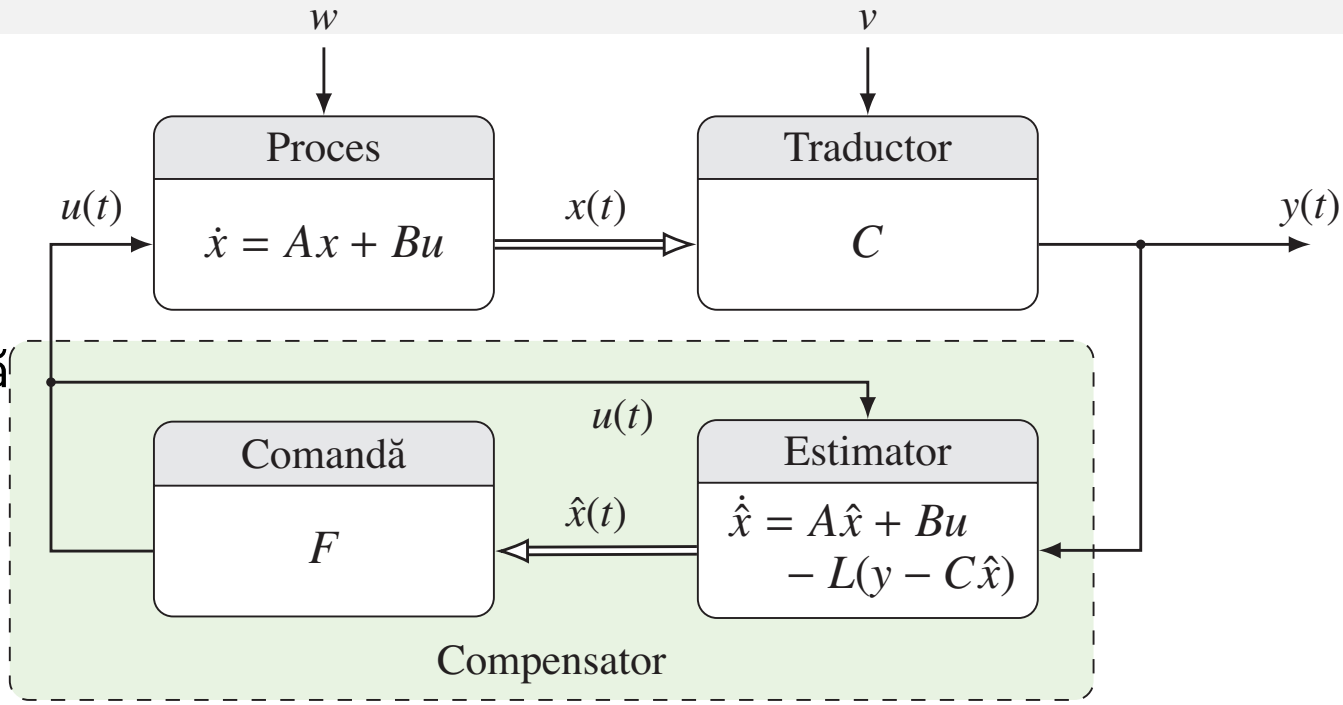



Figura 2: Compensatorul (dinamic) Kalman

**Q:** Întrebarea naturală este dacă putem stabiliza/aloca sistemul original prin implementarea reacției constante după starea estimată $\widehat{x}$ (în locul stării reale $x$ care nu este accesibilă)?

**A:** Răspunsul este pozitiv $\Longrightarrow$ **compensatorul Kalman**, vezi Figura 2.

# Compensatorul Kalman

Fie $(A, B, C, D)$ un sistem dinamic și presupunem pentru problema de stabilizare cu reacție dinamică după ieșire că $(A, B)$ este stabilizabilă și $(C, A)$ este detectabilă, iar pentru problema cu alocare dinamică după ieșire că $(A, B)$ este controlabilă și $(C, A)$ este observabilă.

Considerăm un compensator cu reacție constantă $F$ după starea estimată de către un estimator Luenberger descris de ecuațiile (16). Obținem, astfel, ecuațiile dinamice ale compensatorului – numit compensator Kalman –

$$\begin{cases} \dot{\widehat{x}} = (A + LC)\widehat{x} + Bu + LDu - Ly, \\ u = F\widehat{x}, \end{cases} \tag{17}$$

sau încă

$$\begin{cases} \dot{\widehat{x}} = (A + LC + BF + LDF)\widehat{x} - Ly, \\ u = F\widehat{x}, \end{cases} \tag{18}$$

având matricea de transfer

$$K(s) := \left[\begin{array}{c|c} A_K & B_K \\ \hline C_K & D_K \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A + LC + BF + LDF & -L \\ \hline F & O \end{array}\right], \quad U(s) = K(s)Y(s).$$

Matricile $F$ si $L$ se aleg a.î. $A + BF$ și $A + LC$ să fie asimptotic stabile (și, eventual, cu un spectru impus).

# Sistemul automat cu compensator Kalman - analiză

Conectând compensatorul Kalman în reacție inversă cu sistemul original obținem pentru matricea de stare a sistemului rezultant în buclă închisă

$$A_R = \begin{bmatrix} A & BF \\ -LC & A + BF + LC \end{bmatrix}.$$

Aplicând transformarea de similaritate

$$T := \begin{bmatrix} I & O \\ -I & I \end{bmatrix}$$

asupra lui $A_R$ obținem

$$TA_R T^{-1} = \begin{bmatrix} A + BF & BF \\ O & A + LC \end{bmatrix},$$

ceea ce arată că dinamica (polii) sistemului în buclă închisă satisfac

$$\Lambda(A_R) = \Lambda(A + BF) \cup \Lambda(A + LC).$$

Prin urmare, sistemul în buclă închisă este intern asimptotic stabil (și, eventual, are dinamica prescrisă).

# Sistemul automat cu compensator Kalman - observații

- Polii sistemului în buclă închisă sunt dați de reuniunea polilor alocați ai lui $A + BF$ prin reacția după stare $F$ cu polii alocați de estimator $\Lambda(A + LC)$ prin reacția $L$. Cele două alocări se pot face independent, punându-se astfel în evidența celebrul principiu al separației.
- Un sistem este stabilizabil/alocabil prin reacție (dinamică) după ieșire dacă perechea $(A, B)$ este stabilizabilă/controlabilă și perechea $(C, A)$ este detectabilă/observabilă. Aceste condiții sunt nu numai suficiente, ci și necesare.

Teorema 4

*Un sistem $(A, B, C, D)$ este stabilizabil/alocabil prin reacție dinamică după ieșire dacă și numai dacă perechea $(A, B)$ este stabilizabilă/controlabilă și perechea $(C, A)$ este detectabilă/observabilă.*

1 Compensatoare dinamice–problematica. Principiul separației

2 Lege de comandă, alocabilitate, stabilizabilitate, detectabilitate

3 Procedura de alocare

4 Estimatori de stare
- Estimatori de tip 1. Estimatorul Luenberger

5 Compensatorul Kalman

6 Cazul sistemelor discrete pe spațiul stărilor

# Discretizarea sistemelor în spațiul stărilor

Considerăm sistemul continuu

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

și presupunem că $\widetilde{u}(t) = u_k$, $t \in [kT\ ,\ (k+1)T]$. Scriem soluția generală

$$\begin{aligned} \widetilde{x}((k+1)T) &= e^{AT}\widetilde{x}(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}\, d\tau\, Bu_k \\ &= e^{AT}\widetilde{x}(kT) + \int_0^T e^{A\theta}\, d\theta\, Bu_k. \end{aligned}$$

Cu notațiile $x_d(k) = \widetilde{x}(kT)$, $A_d = e^{AT}$, și $B_d = \int_0^T e^{A\theta}\, d\theta\, B$ se obține de mai sus

$$x_d(k+1) = A_d x_d(k) + B_d u_k.$$

Această ecuație descrie dinamica sistemului discretizat.
Mai mult, $y_d(k) = y(kT) = C_d x_d(k) + D_d u_k$, adica $C_d = C$, $D_d = D$.

# Considerațiuni finale

- În cazul sistemlor discrete, stabilitatea este singura chestiune de analiză de sistem care este complet diferită de cea din cazul neted, i.e., un sistem este **asimptotic stabil** dacă **spectrul** $\Lambda(A)$ este **inclus în discul unitate**.
- Proprietățile structurale sunt absolut identice, iar testarea lor, deasemenea.
- Stabilizabilitatea/alocabilitatea/detectabilitatea sunt similare cu cazul continuu. Atenție că spectrul impus în problema alocării conduce la stabilitate asimptotică în buclă închisă, dacă acesta este inclus în discul unitate. Idem la problema estimării stării discrete.

EINDE VAN DE SYSTEEMTHEORIECURSUS!
VEEL SUCCES MET DE EXAMENS![1]

[1] Nederlands...

# Proprietăți structurale. Descompunere structurală. Realizări minimale. Conexiuni

**Tudor C. Ionescu**
Dept. de Automatică și Ingineria Sistemelor (ACSE),
Facultatea de Automatică și Calculatoare,
Universitatea Politehnica București

e-mail: `tudor.ionescu@acse.pub.ro`

URL: `http://acse.pub.ro/person/tudor-cornel-ionescu/`

noiembrie 2019

1 Proprietăţi structurale
- Controlabilitatea
- Observabilitatea
- Descompunerea structurală

2 Realizabilitate
- Problema existenţei
- Realizări minimale

3 Conexiunile sistemelor dinamice şi operaţii

1 Proprietăţi structurale
- Controlabilitatea
- Observabilitatea
- Descompunerea structurală

2 Realizabilitate
- Problema existenţei
- Realizări minimale

3 Conexiunile sistemelor dinamice şi operaţii

# Controlabilitate: „Posibilitatea de a controla”

Controlabilitatea = proprietate calitativă care caracterizează abilitatea unui sistem

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & x(0) = x_o, \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \tag{1}$$

de a putea tranzita dintr-o stare în alta printr-o comandă (printr-un control) $u(t)$. Pentru controlabilitate este relevantă numai prima ecuație din (1) și soluția

$$x(t) = e^{At}x_o + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\mathrm{d}\tau, \quad t \geq 0. \tag{2}$$

**Definiția 1 (Stare controlabilă/Sistem controlabil)**

O stare $x \in \mathbb{R}^n$ se numește controlabilă la momentul $t > 0$ dacă există o comandă $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ care transferă $x_o = 0$ (originea) în starea $x(t) = x$. Echivalent, o stare $x$ se numește controlabilă dacă există $t > 0$ și o comandă $u(\cdot)$, $u : [0, t]$, a.î. traiectoria satisface $x(t) = x$.

# Matricea de controlabilitate

Controlabilitatea unei stări depinde de momentul de timp $t > 0$. În continuare vom vedea că, de fapt, proprietatea de controlabilitate este independentă de $t$. Introducem matricea de controlabilitate asociată unui sistem dinamic (unei perechi matriciale $(A, B)$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$):

$$R := \left[\, B \;\; AB \;\; A^2B \;\; \ldots \;\; A^{n-1}B \,\right]. \tag{3}$$

Matricea de controlabilitate are dimensiune $n \times (nm)$.

**Teorema 1**

*O stare $x$ este controlabilă dacă şi numai dacă $x \in \mathcal{R}$, unde $\mathcal{R} = \operatorname{Im} R$ este* subspaţiul controlabil *al perechii* $(A, B)$.

**Observaţia 1**

O stare $x \in \mathbb{R}^n$ este controlabilă independent de momentul $t > 0$. Proprietatea este intrinsecă stării $x$ şi perechii $(A, B)$.

# Caracterizarea controlabilităţii perechii $(A, B)$

Introducem noţiunea de sistem controlabil (sau pereche $(A, B)$ controlabilă) cu semnificaţia că fiecare stare $x \in \mathbb{R}^n$ este controlabilă.

### Teorema 2

*Fie perechea $(A, B)$.*

- *O stare $x$ este controlabilă dacă şi numai dacă $x \in \mathcal{R}$.*
- *Perechea $(A, B)$ (sistemul) este controlabilă (controlabil) dacă şi numai dacă*

$$\mathcal{R} = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \operatorname{rang} R = n.$$

### Observaţia 2

Procedural, controlabilitatea unui sistem se poate testa verificând că rangul matricii de controlabilitate, i.e., $\operatorname{rang} R = n$. Pentru testarea controlabilităţii există un algoritm dedicat foarte eficient numit "controllability staircase". Cu toate că acest algoritm este numeric stabil, problema testării controlabilităţii este o problemă "ill–posed" (prost condiţionată numeric).

# Subspațiul de controlabilitate de dimensiune maximă

Pp. că $(A, B)$ nu este controlabil. Căutăm ssp. controlabil $\mathcal{R}$ de dim. $\nu < n$. Căutăm subspațiul $\mathcal{V}$ de dimensiune $\nu$ care este $A$–invariant. Avem $A\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$, iar dacă $\mathcal{V} = \operatorname{Im} V$, unde $V$ este o $n \times \nu$ matrice bază pentru $\mathcal{V}$ atunci automat

$$AV = VJ$$

unde $J$ este o matrice pătrată $\nu \times \nu$ cu $\Lambda(J) \subset \Lambda(A)$. Făcând o completare până la o matrice nesingulară $T^{-1} = \begin{bmatrix} V & W \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, obținem

$$\widehat{A} := TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ O & A_2 \end{bmatrix}.$$

Punem condiția ca subspațiul $\mathcal{V}$ de dimensiune $\nu$ $A$–invariant să conțină $\operatorname{Im} B$. Repetând schimbarea de coordonate și aplicând-o corespunzător și lui $B$ avem

$$\widehat{A} := TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ O & A_2 \end{bmatrix}, \qquad \widehat{B} = TB = \begin{bmatrix} B_1 \\ O \end{bmatrix}$$

deoarece $\operatorname{Im} B \subset \mathcal{V}$.

# Subspațiul de controlabilitate

Cu această schimbare de coordonate, matricea de controlabilitate corespunzătoare a perechii $(\widehat{A}, \widehat{B})$ este

$$\widehat{R} = \begin{bmatrix} B_1 & A_1 B_1 & A_1^2 B_1 & \cdots & A_1^{n-1} B_1 \\ O & O & O & \cdots & O \end{bmatrix} \begin{matrix} \}\nu \\ \\ \end{matrix}.$$

Dacă spațiul $A$–invariant, $\mathcal{V}$, care conține $\operatorname{Im} B$, în raport cu care s-a facut descompunerea este chiar $\mathcal{R}$, atunci perechea $(A_1, B_1)$ este automat controlabilă și avem că $\operatorname{rang} R = \operatorname{rang} \widehat{R} = \nu$ (indicele de controlabilitate).
Prin urmare, subspațiul de controlabilitate este $\mathcal{R} = \operatorname{Im} \widehat{R}$, $\dim \mathcal{R} = \nu$.

**Corolarul 1**

*Un sistem $(A, B, C, D)$ este controlabil dacă și numai dacă $\nu = n$.*

# Descompunere controlabilă

## Teorema 3 (Teorema de descompunere controlabilă (TDC))

*Un sistem* $(A, B, C, D)$ *necontrolabil, cu* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$ *este întotdeauna echivalent pe stare cu un sistem* $(\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, D)$ *având structura*

$$\widehat{A} = TAT^{-1} = \begin{array}{cl} \left[\begin{array}{cc} A_1 & A_3 \\ O & A_2 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \}\nu \\ \}n-\nu \end{array} \\ \begin{array}{cc} \nu & n-\nu \end{array} & \end{array}, \tag{4}$$

$$\widehat{B} = TB = \left[\begin{array}{c} B_1 \\ O \end{array}\right] \begin{array}{l} \}\nu \\ \}n-\nu \end{array}, \qquad \widehat{C} = CT^{-1} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} C_1 & C_2 \end{array}\right], \\ \begin{array}{cc} \nu & n-\nu \end{array} \end{array} \tag{5}$$

*în care perechea* $(A_1, B_1)$ *este controlabilă. Mai mult, sistemele* $(A, B, C, D)$, $(\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, D)$ *şi* $(A_1, B_1, C_1, D)$ *sunt echivalente intrare–ieşire, i.e.,*

$$T(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \widehat{A} & \widehat{B} \\ \hline \widehat{C} & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D \end{array}\right].$$

# Descompunere controlabilă–continuare

Observația 3

- Teorema afirmă în particular că, dându-se un sistem dinamic putem întotdeauna găsi un alt sistem echivalent intrare–ieșire care este controlabil (cu dimensiunea spațiului stărilor $\leq$ dimensiunea sistemului inițial).
- Procedural, obținerea descompunerii controlabile se bazează în mod esențial pe matricea $S = T^{-1}$ care se poate obține făcând o completare până la o matrice inversabilă a oricărei baze $V$ a subspațiului controlabil $\mathcal{R} = \operatorname{Im} R$.
- Proprietatea de controlabilitate este invariantă în raport cu relația de echivalență pe stare. Mai precis, un sistem este controlabil dacă și numai dacă orice sistem echivalent pe stare este controlabil.

# Criteriul Popov–Belevitch–Hautus (PBH)

Folosind TDC se obține un criteriu extrem de util pentru testarea controlabilității unei perechi $(A, B)$.

**Teorema 4 (Criteriul PBH)**

*Perechea $(A, B)$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, este controlabilă dacă și numai dacă*

$$\operatorname{rang}\left[\, sI - A \,\middle|\, B \,\right] = n, \quad \forall s \in \mathbb{C}. \tag{6}$$

**Corolarul 2**

*$(A, B)$ este controlabilă dacă criteriul PBH este satisfăcut $\forall s \in \Lambda(A)$.*

**Observația 4**

- Corolarul justifică introducerea de valoare proprie controlabilă (necontrolabilă), i.e., care satisface (nu satisface) criteriul PBH. O valoare proprie $\lambda$ a lui $A$ este controlabilă (necontrolabilă) dacă și numai dacă $\lambda \in \Lambda(A_1)$ ($\lambda \in \Lambda(A_2)$).
- Dacă două sisteme $(A, B, C, D)$ și $(\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, \widetilde{D})$ sunt echivalente pe stare cu transformarea $T$, atunci matricile de controlabilitate corespunzătoare $R$ și $\widetilde{R}$ satisfac $\widetilde{R} = TR$.

1 Proprietăţi structurale
- Controlabilitatea
- Observabilitatea
- Descompunerea structurală

2 Realizabilitate
- Problema existenţei
- Realizări minimale

3 Conexiunile sistemelor dinamice şi operaţii

# Influenţa stării $x$ în răspunsul liber $y_\ell$. Definiţie

Observabilitatea este o proprietate calitativă a sistemului $(A, B, C, D)$ cu $x(0) = x$ de a determina o stare $x$ din prelucrarea mărimii măsurate $y$. Pentru observabilitate este relevant răspunsul liber, i.e., sub comenzi externe nule,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax, \quad x(0) = x, \\ y &= Cx, \end{aligned} \tag{7}$$

deci observabilitatea este o proprietate caracterizată numai prin perechea $(C, A)$ – observaţi ordinea în pereche. Din (7) rezultă

$$y(t) = y_\ell(t) = Ce^{At}x, \quad t \geq 0. \tag{8}$$

Este mai simplu de introdus noţiunea de stare neobservabilă!

**Definiţia 2 (Stare neobservabilă)**

O stare $x \in \mathbb{R}^n$ se numeste neobservabilă la momentul $t > 0$ dacă pentru $x(0) = x$ răspunsul liber $y_\ell$ este identic zero pe intervalul $[0, t]$, i.e.,

$$y_\ell(\tau) = Ce^{A\tau}x = 0, 0 \leq \tau \leq t.$$

Noţiunea de stare observabilă se obţine prin **negarea** definiţiei de mai sus.

# Matricea de observabilitate. Dualitate

Introducem matricea de observabilitate asociată unui sistem dinamic, sau mai precis unei perechi matriciale $(C, A)$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$Q := \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & (A^T)^2 C^T & \dots & (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix}^T = \overline{R}^T. \quad (9)$$

Matricea de observabilitate are dimensiune $(np) \times n$.

**Teorema 5**

*O stare $x$ este neobservabilă dacă şi numai dacă $x \in \mathcal{N}$, unde $\mathcal{N} = \operatorname{Ker} Q = \operatorname{Ker} \overline{R}^T$ este* subspaţiul neobservabil *al perechii $(C, A)$.*

**Observaţia 5**

- O stare $x \in \mathbb{R}^n$ este observabilă/neobservabilă independent de momentul $t > 0$. Proprietatea este intrinsecă starii $x$ şi perechii $(C, A)$.
- Se poate introduce definiţia echivalentă: o stare $x$ s.n. neobservabilă dacă $\exists\ t > 0$ pentru care $x$ este neobservabilă la acel moment.

# Caracterizarea observabilităţii perechii $(C, A)$. Dualitate

Introducem noţiunea de sistem observabil (sau pereche $(C, A)$ observabilă) cu semnificaţia că fiecare stare $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ este observabilă.

**Teorema 6**

*Fie perechea $(C, A)$.*

1. *O stare $x$ este observabilă dacă şi numai dacă $x \in Im\,\overline{R}$.*
2. *Perechea $(C, A)$ (sau sistemul corespunzător) este observabilă (observabil) dacă şi numai dacă singura stare neobervabilă este $x = 0$, i.e.*
$$\mathcal{N} = \{0\} \Leftrightarrow \text{rang}\, Q = n.$$

**Q:** Există vreo legătură specială între noţiunile de controlabilitate şi observabilitate?

**A:** DA (se observă deja din Teoremă). Cele două proprietăţi sunt duale una alteia $\leftarrow$ proprietate specifică numai sistemelor liniare!

# Principiul dualităţii

Principiul dualităţii este un principiu fundamental în teoria sistemelor dinamice, arătând în ce condiţii anumite proprietăţi structurale sunt echivalente.

**Teorema 7 (Principiul dualităţii)**

- $(C, A)$ *este observabilă dacă şi numai dacă* $(A^T, C^T)$ *este controlabilă.*
- $(A, B)$ *este controlabilă dacă şi numai dacă* $(B^T, A^T)$ *este observabilă.*

Pe baza principiului dualităţii se formulează rezultate fundamentale asemănător controlabilităţii.

**Teorema 8 (Criteriul PBH)**

*Perechea* $(C, A)$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, *este observabilă dacă şi numai dacă*

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix} = n, \quad \forall s \in \mathbb{C}. \tag{10}$$

**Corolarul 3**

$(C, A)$ *este observabilă dacă criteriul PBH este satisfăcut* $\forall s \in \Lambda(A)$.

# PBH - observabilitate

## Observația 6

- Corolarul justifică introducerea de valoare proprie observabilă (neobservabilă), i.e., care satisface (nu satisface) criteriul PBH. O valoare proprie $\lambda$ a lui $A$ este observabilă (neobservabilă) dacă și numai dacă $\lambda \in \Lambda(A_1)$ ($\lambda \in \Lambda(A_2)$).
- Dacă două sisteme $(A, B, C, D)$ și $(\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, \widetilde{D})$ sunt echivalente pe stare cu transformarea $T$, atunci matricile de observabilitate corespunzătoare $Q$ și $\widetilde{Q}$ satisfac $\widetilde{Q} = QT^{-1}$.

# Descompunerea observabilă

## Teorema 9 (Teorema de descompunere observabilă(TDO))

*Un sistem descris de* $(A, B, C, D)$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$ *este echivalent pe stare cu un sistem* $(\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, D)$, *unde*

$$\widehat{A} = TAT^{-1} = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc} A_1 & A_3 \\ O & A_2 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \}n-\mu \\ \}\mu \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\quad}_{n-\mu} & \underbrace{\quad}_{\mu} \end{array} & \end{array},$$

$$\widehat{B} = TB = \left[\begin{array}{c} B_1 \\ B_2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \}n-\mu \\ \}\mu \end{array}, \qquad \widehat{C} = CT^{-1} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} O & C_2 \end{array}\right], \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\quad}_{n-\mu} & \underbrace{\quad}_{\mu} \end{array} \end{array}$$

*în care perechea* $(C_2, A_2)$ *este observabilă. Mai mult, sistemele* $(A, B, C, D)$, $(\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, D)$ *şi* $(A_2, B_2, C_2, D)$ *sunt echivalente intrare–ieşire, i.e.,*

$$T(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \widehat{A} & \widehat{B} \\ \hline \widehat{C} & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & D \end{array}\right].$$

# TDO - variantă

## Teorema 10 (TDO – variantă)

*Un sistem* $(A, B, C, D)$ *este echivalent pe stare cu un sistem* $(\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, D)$ *unde*

$$\widehat{A} = TAT^{-1} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} A_1 & O \\ A_3 & A_2 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\phantom{A_1}}_{\mu} & \underbrace{\phantom{A_2}}_{n-\mu} \end{array} \end{array} \begin{array}{l} \}\mu \\ \}n-\mu \end{array},$$

$$\widehat{B} = TB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \}\mu \\ \}n-\mu \end{array}, \qquad \widehat{C} = CT^{-1} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} C_1 & O \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\phantom{C_1}}_{\mu} & \underbrace{\phantom{O}}_{n-\mu} \end{array} \end{array},$$

*în care perechea* $(C_1, A_1)$ *este observabilă. Mai mult, sistemele* $(A, B, C, D)$, $(\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, D)$ *şi* $(A_1, B_1, C_1, D)$ *sunt echivalente intrare–ieşire, i.e.,*

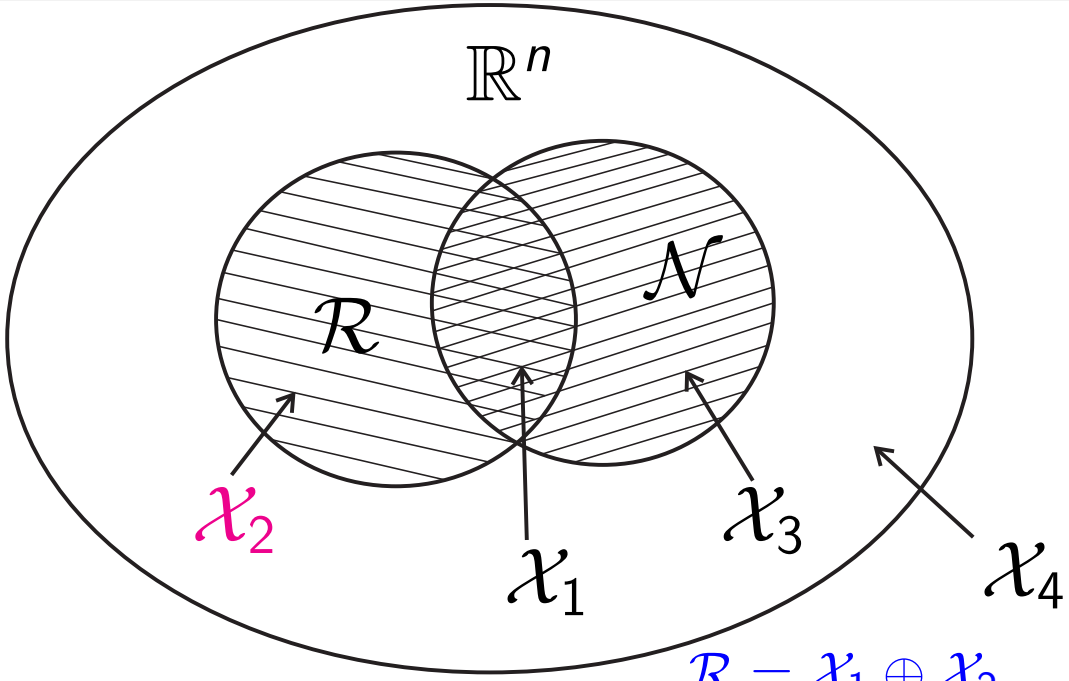
$$T(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \widehat{A} & \widehat{B} \\ \hline \widehat{C} & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D \end{array}\right].$$

1 Proprietăţi structurale
- Controlabilitatea
- Observabilitatea
- Descompunerea structurală

2 Realizabilitate
- Problema existenţei
- Realizări minimale

3 Conexiunile sistemelor dinamice şi operaţii

# Teorema de descompunere structurală (TDS)




Fie un sistem $(A, B, C, D)$.
Fie $\mathcal{R}$ subspațiul controlabil al perechii $(A, B)$ și $\mathcal{N}$ subspațiul neobservabil al perechii $(C, A)$ și

$$\mathcal{X}_1 := \mathcal{R} \cap \mathcal{N}. \qquad (11)$$

Introducem subspațiile $\mathcal{X}_2$ și $\mathcal{X}_3$ ca fiind complemenții lui $\mathcal{X}_1$ in $\mathcal{R}$ și al lui $\mathcal{N}$,

$$\mathcal{R} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2, \quad \mathcal{N} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_3.$$

Fie deasemenea $\mathcal{X}_4$ complementul lui $\mathcal{R} \cup \mathcal{N}$ în $\mathbb{R}^n$, i.e.,

$$\mathbb{R}^n = (\mathcal{R} \cup \mathcal{N}) \oplus \mathcal{X}_4 = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 \oplus \mathcal{X}_3 \oplus \mathcal{X}_4 \qquad (12)$$

Subspațiile $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ si $\mathcal{X}_4$ nu sunt unic definite. Deoarece

$$A\mathcal{R} \subset \mathcal{R}, \quad \operatorname{Im} B \subset \mathcal{R} \quad \text{și} \quad A\mathcal{N} \subset \mathcal{N}, \quad \mathcal{N} \subset \operatorname{Ker} C$$

rezultă că

$$A\mathcal{X}_1 \subset \mathcal{X}_1, \qquad \mathcal{X}_1 \subset \operatorname{Ker} C. \qquad (13)$$

# TDS

Fie $X_i$ matrici bază pentru subspațiile $\mathcal{X}_i$ (i=1...4), $\mathcal{X}_i =< X_i >$ și

$$T := \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \end{bmatrix}^{-1}. \tag{14}$$

Atunci sistemul echivalent pe stare față de transformarea (13) are forma

$$\begin{aligned} \widehat{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ O & A_{22} & O & A_{24} \\ O & O & A_{33} & A_{34} \\ O & O & O & A_{44} \end{bmatrix}, \quad \widehat{B} = TB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ O \\ O \end{bmatrix} \\ \widehat{C} = CT^{-1} = \begin{bmatrix} O & C_2 & O & C_4 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{15}$$

structură ce rezultă din ecuațiile (11)-(14). Din teorema de descompunere controlabilă rezultă că perechea

$$\left( \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \right) \tag{16}$$

este controlabilă, iar din teorema de descompunere observabilă rezultă că perechea

$$\left( \begin{bmatrix} C_2 & C_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A_{22} & A_{24} \\ O & A_{44} \end{bmatrix} \right) \tag{17}$$

este observabilă.

# TDS

Aplicând criteriul PBH pentru perechea (16) rezultă

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} sI - A_{11} & -A_{12} & B_1 \\ O & sI - A_{22} & B_2 \end{bmatrix} = \dim \mathcal{X}_1 + \dim \mathcal{X}_2, \qquad \forall s \in \mathbb{C},$$

de unde rezultă automat că

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} sI - A_2 & B_2 \end{bmatrix} = \dim \mathcal{X}_2, \qquad \forall s \in \mathbb{C},$$

deci perechea $(A_{22}, B_2)$ este controlabilă. Aplicând criteriul PBH dual perechii (17) rezultă similar că perechea $(C_2, A_{22})$ este observabilă. În consecinţă, rezultă că (sub)sistemul $(A_{22}, B_2, C_2, D)$ este controlabil şi observabil (se mai numeşte partea controlabilă şi observabilă a sistemului iniţial) şi încă

$$T(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \widehat{A} & \widehat{B} \\ \hline \widehat{C} & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_{22} & B_2 \\ \hline C_2 & D \end{array}\right].$$

**Teorema 11 (Teorema de descompunere structurală)**

*Orice sistem arbitrar $(A, B, C, D)$ este echivalent pe stare cu un sistem $(\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, D)$ cu structura (15), (unde unele blocuri pot avea dimensiune nulă!) şi echivalent intrare–ieşire cu sistemul controlabil şi observabil $(A_{22}, B_2, C_2, D)$.*

1 Proprietăți structurale
- Controlabilitatea
- Observabilitatea
- Descompunerea structurală

2 Realizabilitate
- Problema existenței
- Realizări minimale

3 Conexiunile sistemelor dinamice și operații

1 Proprietăți structurale
- Controlabilitatea
- Observabilitatea
- Descompunerea structurală

2 Realizabilitate
- Problema existenței
- Realizări minimale

3 Conexiunile sistemelor dinamice și operații

# Realizabilitatea unei funcții de transfer

Recap: orice sistem dinamic descris de ecuații de tipul

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & x(t_o) = x_o, \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \tag{18}$$

este automat invariant în timp, liniar, cauzal, finit dimensional. În particular, sistemul dinamic este un sistem de convoluție cu matricea de transfer

$$T(s) = C(sI - A)^{-1}B + D.$$

Matricea de transfer descrie comportarea intrare–ieșire în condiții inițiale nule și este o matrice cu elementele funcții raționale (strict) proprii.

**Problema naturală:** Știind că matricea de transfer a unui sistem (MIMO) este rațională și proprie există o descriere dinamică a sistemului de tipul (18)? Mai precis, știind că $T(s)$ este o matrice rațională proprie de dimensiune $p \times m$ există întotdeauna patru matrici $(A, B, C, D)$, unde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$ a.î. sistemul dinamic corespunzător (18) să aibă matricea de transfer

$$T(s) = C(sI - A)^{-1}B + D?$$

Atunci când există, cvadruplul $(A, B, C, D)$ formează **o realizare** a raționalei $T(s)$ (sau a sistemului având drept matrice de transfer pe $T(s)$).

# Întrebări naturale

Dată o funcție de transfer $T(s)$

- există întotdeauna o realizare și dacă da, cum se poate obține? DA !
- este realizarea unică? NU!
- există o realizare de dimensiune minimă (maximă)? DA (NU)!
- cum se pot caracteriza realizările minimale? Controlabile + observabile!
- cum se pot obține realizările minimale? **TDS**!
- sunt realizările minimale unice? NU!
- ce relație există între două realizări minimale? Sunt echivalente pe stare!

# Problema existenței

Fie $T(s)$ o $p \times m$ matrice raționala proprie,

$$T(s) = \left[\frac{r_{ij}(s)}{p_{ij}(s)}\right]_{\substack{1 \le i \le p \\ 1 \le j \le m}}, \quad \text{grad}(p_{ij}) \ge \text{grad}(r_{ij}), \quad \forall i, j,$$

în care rapoartele sunt considerate ireductibile. Deoarece raționala este proprie, $D := T(\infty) \in \mathbb{R}^{p \times m}$ (finit). Problema realizabilității raționalei proprii $T(s)$ se reduce atunci la problema realizabilității raționalei strict proprii $\widetilde{T}(s) = T(s) - D$, i.e., trebuie să găsim trei matrici $(A, B, C)$ a.î.

$$\widetilde{T}(s) = C(sI - A)^{-1}B.$$

Deoarece $\widetilde{T}(s)$ este strict proprie avem

$$\widetilde{T}(s) = \frac{K_0 + K_1 s + \ldots + K_{k-1}s^{k-1}}{\gamma_0 + \gamma_1 s + \ldots + \gamma_{k-1}s^{k-1} + s^k}, \tag{19}$$

unde $\gamma(s) := \gamma_0 + \gamma_1 s + \ldots + \gamma_{k-1}s^{k-1} + s^k$ este cel mai mic multiplu comun (cmmmc) (monic) al numitorilor tuturor elementelor raționalei $\widetilde{T}(s)$ iar $K_i$, $i = 0, \ldots, k-1$, sunt $p \times m$ matrici constante.

# Realizări canonice

O realizare a lui $\widetilde{T}(s)$ este dată de

$$A = \begin{bmatrix} O_m & I_m & & \\ & & \ddots & \\ & & & I_m \\ -\gamma_0 I_m & -\gamma_1 I_m & \dots & -\gamma_{k-1} I_m \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} O_m \\ \vdots \\ O_m \\ I_m \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} K_0 & K_1 & \dots & K_{k-1} \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Într-adevăr, cu

$$\Theta(s) := \begin{bmatrix} I_m \\ sI_m \\ \vdots \\ s^{k-1} I_m \end{bmatrix}$$

se verifică direct că

$$(sI - A)\Theta(s) = B\gamma(s)\frac{\Theta(s)}{\gamma(s)} = (sI - A)^{-1}B. \tag{21}$$

Cum

$$C\Theta(s) = K_0 + K_1 s + \ldots + K_{k-1}s^{k-1},$$

înmulțind (21) la stânga cu $C$ și ținând cont de (19) obținem $\widetilde{T}(s) = C(sI - A)^{-1}B$.

# Realizarea standard controlabilă/observabilă (RSC/O)

Realizarea $(A, B, C, D)$ astfel obținută este controlabilă și de aceea se mai numește realizarea standard controlabilă a lui $T(s)$.
Controlabilitatea perechii $(A, B)$ se poate testa imediat cu criteriul PBH. În general, realizarea obținută NU este însa NEAPĂRAT observabilă (poate fi!). O realizare standard observabilă este dată de

$$A = \begin{bmatrix} O_m & & & -\gamma_0 I_p \\ I_p & & & -\gamma_1 I_p \\ & \ddots & & \vdots \\ & & I_p & -\gamma_{k-1} I_p \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} K_0 \\ K_1 \\ \vdots \\ K_{k-1} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} O_p & O_p & \dots & I_p \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Această realizare NU este, NEAPĂRAT, controlabilă.

### Observația 7

Pentru matrici de transfer raționale de dimensiuni arbitrare nu există, în general, posibilitatea de a scrie direct o realizare care să fie, simultan, controlabilă și observabilă.

1 Proprietăți structurale
- Controlabilitatea
- Observabilitatea
- Descompunerea structurală

2 Realizabilitate
- Problema existenței
- Realizări minimale

3 Conexiunile sistemelor dinamice și operații

# REALIZĂRI MINIMALE

**Definiția 3**

O realizare $(A, B, C, D)$ a raționalei proprii $T(s)$ se numește minimală dacă orice altă realizare are dimensiunea spațiului stărilor mai mare sau egală cu aceasta.

**Teorema 12 (Caracterizarea unei realizări minimale)**

*O realizare este* **minimală** *dacă și numai dacă este* **controlabilă și observabilă**.

**Teorema 13**

*Oricare două realizări minimale ale unei matrici de transfer proprii $T(s)$ sunt echivalente pe stare.*

# Procedura de calcul al unei realizări minimale pentru o matrice rațională proprie

$$T(s) = \left[\frac{r_{ij}(s)}{p_{ij}(s)}\right]_{\substack{1 \le i \le p \\ 1 \le j \le m}}, \quad \text{grad}(p_{ij}) \ge \text{grad}(r_{ij}), \quad \forall i, j.$$

**Pasul 0:** Scriem $D := T(\infty)$ și aducem matricea rațională (strict proprie) $\widetilde{T}(s) := T(s) - D$ la forma

$$\widetilde{T}(s) = \frac{K_0 + K_1 s + \ldots + K_{k-1} s^{k-1}}{\gamma_0 + \gamma_1 s + \ldots + \gamma_{k-1} s^{k-1} + s^k}, \tag{23}$$

unde $\gamma(s) := \gamma_0 + \gamma_1 s + \ldots + \gamma_{k-1} s^{k-1} + s^k$ este cmmmc (monic) al numitorilor tuturor elementelor raționalei $\widetilde{T}(s)$ iar $K_i$, $i = 0, \ldots, k-1$, sunt $p \times m$ matrici constante.

# Calculul unei realizări minimale

**Pasul 1:** Scriem RSC

$$A = \begin{bmatrix} O_m & I_m & & \\ & & \ddots & \\ & & & I_m \\ -\gamma_0 I_m & -\gamma_1 I_m & \dots & -\gamma_{k-1} I_m \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} O_m \\ \vdots \\ O_m \\ I_m \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} K_0 & K_1 & \dots & K_{k-1} \end{bmatrix}, \tag{24}$$

în care perechea $(A, B)$ este *automat* controlabilă.

**Pasul 2:** Aplicăm TDO perechii $(C, A)$,

$$\widehat{A} = TAT^{-1} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ O & A_2 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \}n-\mu \\ \}\mu \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\quad}_{n-\mu} & \underbrace{\quad}_{\mu} \end{array} & \end{array},$$

$$\widehat{B} = TB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \}n-\mu \\ \}\mu \end{array}, \qquad \widehat{C} = CT^{-1} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} O & C_2 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\quad}_{n-\mu} & \underbrace{\quad}_{\mu} \end{array} \end{array},$$

în care perechea $(C_2, A_2)$ este observabilă.

# Calculul unei realizări minimale (continuare)

**Pasul 3:** Cum $(A, B)$ este controlabilă, perechile $(\widehat{A}, \widehat{B})$ și $(A_2, B_2)$ sunt controlabile. Deci $(A_2, B_2, C_2, D)$ (care este echivalent I/O cu $(A, B, C, D)$) este controlabil, observabil și deci **minimal**. Prin urmare, $(A_2, B_2, C_2, D)$ este minimală și

$$T(s) = C_2(sI - A_2)^{-1}B_2 + D.$$

Observația 8

1. Din punct de vedere procedural, algoritmul de calcul al realizării minimale urmează exact pașii de mai sus cu observația că transformarea $T$ de la pasul 2 se alege întotdeauna ortogonală $T^{-1} = T^T$.
2. Pentru obținerea unei realizări minimale se poate proceda dual, calculând la **Pasul 1** o realizare standard observabilă (22) și aplicând la **Pasul 2** o descompunere controlabilă (4)–(5).

1 Proprietăți structurale
- Controlabilitatea
- Observabilitatea
- Descompunerea structurală

2 Realizabilitate
- Problema existenței
- Realizări minimale

3 Conexiunile sistemelor dinamice și operații

# Conexiunea paralel

Fie două sisteme

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= A_1 x_1(t) + B_1 u_1(t), \\ y_1(t) &= C_1 x_1(t) + D_1 u_1(t), \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= A_2 x_2(t) + B_2 u_2(t), \\ y_2(t) &= C_2 x_2(t) + D_2 u_2(t), \end{aligned} \tag{26}$$

cu matricile de transfer

$$T_1 = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D_1 \end{array}\right], \quad T_2 = \left[\begin{array}{c|c} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & D_2 \end{array}\right], \tag{27}$$

respectiv. Dacă cele două sisteme au același număr de intrări și de ieșiri ($m_1 = m_2$, $p_1 = p_2$), atunci definim conexiunea paralel a lui $T_1$ cu $T_2$ ca sistemul care are intrarea $u$ obtinută punând $u_1 \equiv u_2 = u$ și ieșirea $y := y_1 + y_2$. Conexiunea paralel este întotdeauna bine definită, matricea de transfer este

$$T(s) := T_1(s) + T_2(s), \tag{28}$$

având o realizare dată de

$$T(s) = \left[\begin{array}{cc|c} A_1 & O & B_1 \\ O & A_2 & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D_1 + D_2 \end{array}\right]. \tag{29}$$

# Conexiunea serie

Fie două sisteme (25) si (26), având matricile de transfer date în (27). Dacă numărul de ieșiri ale sistemului $T_1$ este egal cu numărul de intrări ale sistemului $T_2$ atunci definim conexiunea serie a lui $T_1$ cu $T_2$ (în această ordine) ca fiind sistemul cu intrarea $u := u_1$ si ieșirea $y := y_2$, obținut punând $u_2 \equiv y_1$. Conexiunea serie este întotdeauna bine definită, matricea de transfer a sistemului rezultant este

$$T(s) := T_2(s)T_1(s), \tag{30}$$

(observați ordinea!) iar o realizare pentru sistemul rezultant este dată de

$$T(s) = \left[\begin{array}{cc|c} A_2 & B_2C_1 & B_2D_1 \\ O & A_1 & B_1 \\ \hline C_2 & D_2C_1 & D_2D_1 \end{array}\right]. \tag{31}$$

# Conexiunea în reacție inversă

Fie sistemele (25) și (26), cu matricile de transfer din (27). Dacă numărul de ieșiri ale sistemului $T_1$ este egal cu numărul de intrări ale sistemului $T_2$ și numărul de ieșiri ale sistemului $T_2$ este egal cu numărul de intrări ale sistemului $T_1$ ($p_1 = m_2$, $p_2 = m_1$) definim conexiunea în reacție inversă a lui $T_1$ cu $T_2$ (în această ordine) ca fiind sistemul cu intrarea $u$ și ieșirea $y := y_1$, unde $u_1 \equiv u + y_2$ si $u_2 \equiv y_1$. Conexiunea în reacție inversă este bine definită dacă și numai dacă

$$\begin{bmatrix} I & D_1 \\ D_2 & I \end{bmatrix} \tag{32}$$

este nesingulară. Funcția de transfer și o realizare a sistemului rezultant sunt

$$T(s) := T_1(s)(I - T_2(s)T_1(s))^{-1}, \tag{33}$$

$$T(s) = \left[\begin{array}{cc|c} A_1 + B_1 D_2 \widehat{S}^{-1} C_1 & B_1 S^{-1} C_2 & B_1 S^{-1} \\ B_2 \widehat{S}^{-1} C_1 & A_2 + B_2 D_1 S^{-1} C_2 & B_2 D_1 S^{-1} \\ \hline \widehat{S}^{-1} C_1 & \widehat{S}^{-1} D_1 C_2 & D_1 S^{-1} \end{array}\right], \tag{34}$$

unde $\widehat{S} := I - D_1 D_2$ si $S := I - D_2 D_1$, care sunt ambele inversabile din ipoteza de nesingularitate a matricii (32).

# Proprietățile structurale ale sistemelor. Minimalitate

Exercițiu: Ce se poate spune despre controlabilitatea/observabilitatea/minimalitatea sistemului echivalent paralel/serie/reacție inversă dacă știm că sistemele componente sunt controlabile/observabile/minimale?

**Observația 9**

Pentru conexiunile paralel/serie/reacție inversă nu este necesar ca spațiul stărilor sistemelor componente să fie de dimensiune egală.

# Sisteme dinamice pe spațiul stărilor

**Tudor C. Ionescu**
Dept. de Automatică și Ingineria Sistemelor (ACSE),
Facultatea de Automatică și Calculatoare,
Universitatea Politehnica București

e-mail: `tudor.ionescu@acse.pub.ro`

URL: `http://acse.pub.ro/person/tudor-cornel-ionescu/`

noiembrie 2019

1 Modelarea sistemelor dinamice pe spațiul stărilor

2 Evoluția stării, tranziția intrare–ieșire

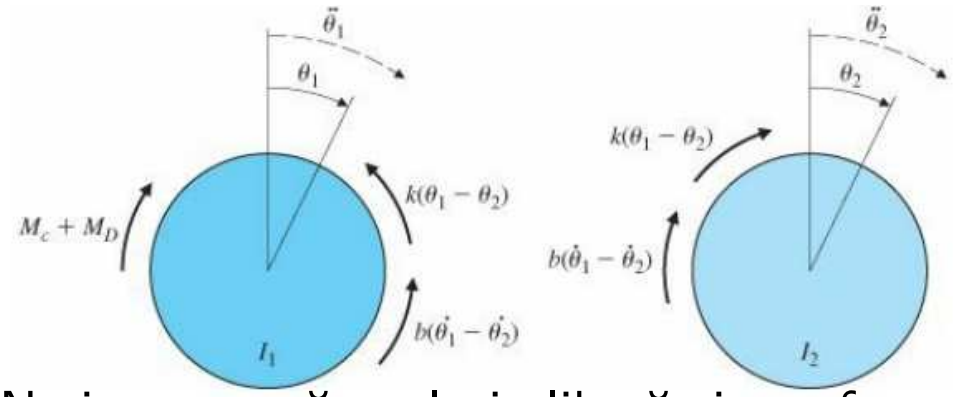
3 Echivalența sistemelor dinamice liniare
- Echivalența pe stare
- Echivalența intrare-ieșire

4 Stabilitatea sistemelor dinamice
- Ecuația Liapunov și stabilitatea

# HDD - ecuații fizice

$$I_1\ddot{\theta}_1 + b(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + k(\theta_1 - \theta_2) = M_c + M_D,$$
$$I_2\ddot{\theta}_2 + b(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) + k(\theta_2 - \theta_1) = 0,$$

unde $I_1$, $I_2$ sunt momentele de inerție, $b$ coeficientul de frecare, $k$ coeficientul de elasticitate.




Alegem

- ieșirea = mărimea măsurată, de interes $y = \theta_2$, i.e., poziția acului pe disc;
- intrarea $u = M_c$;
- perturbația = $M_D$.

Ne interesează evoluția liberă și cea forțată de $M_C$ a poziției acului de scriere $\theta_2$ determinată de dinamica "internă" a sistemului $\leftarrow$ luăm în considerare și celelalte mărimi prezente (nu neapărat măsurabile) care influențează evoluția ieșirii.

**Q:** Cum scriem compact modelul dinamic? Care este răspunsul modelului dinamic? Are legătură cu funcția de transfer? Ce proprietăti specifice are modelul dinamic? Poate fi stabilizat? Dar reglat?

**A:** Analiza și sinteza sistemelor (dinamice) pe spațiul stărilor.

# HDD - sistem dinamic

Scriem

$$\begin{aligned}\theta_1 &= x_1 \Rightarrow \dot{\theta}_1 = \dot{x}_1 = x_2,\\ \theta_2 &= x_3 \Rightarrow \dot{\theta}_2 = \dot{x}_3 = x_4.\end{aligned}$$

Prin urmare, manipulând algebric ecuațiile fizice $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2,\\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{l_1}x_1 - \frac{b}{l_1}x_2 + \frac{k}{l_1}x_3 + \frac{b}{l_1}x_4 + u,\\ \dot{x}_3 &= x_4,\\ \dot{x}_4 &= \frac{k}{l_2}x_1 + \frac{b}{l_2}x_2 - \frac{k}{l_2}x_3 - \frac{b}{l_2}x_4,\\ y &= x_3.\end{aligned}$$

# HDD - sistem pe stare $(A, B, C, D)$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases},$$

unde

$$x(t) := x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4, \ u(t) = M_c \in \mathbb{R},$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{k}{l_1} & -\dfrac{b}{l_1} & \dfrac{k}{l_1} & \dfrac{b}{l_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{k}{l_2} & \dfrac{b}{l_2} & -\dfrac{k}{l_2} & -\dfrac{b}{l_2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4,$$

$$y(t) := y = x_3 \in \mathbb{R}, \ C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 4}, \quad D = 0.$$

# Sisteme dinamice pe spațiul stărilor

Clasa sistemelor considerate:

- LINIARE;
- INVARIANTE ÎN TIMP;
- FINIT DIMENSIONALE;
- MULTI-INTRARE/MULTI-IEȘIRE (MIMO).

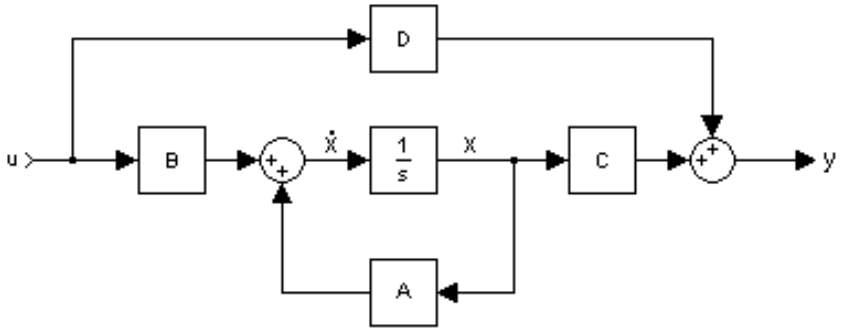
**Definiția 1**

Se numește sistem dinamic liniar, invariant în timp, cu timp continuu, de dimensiune $n$, un cuadruplu de matrici constante $(A, B, C, D)$, unde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$ ce se explicitează prin

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & x(t_o) = x_o \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \tag{1}$$

unde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$;
$u(t) \to$ intrarea sistemului, $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, $\mathcal{U} \to$ spațiul semnalelor de intrare;
$y(t) \to$ ieșirea sistemului, $y(\cdot) \in \mathcal{Y}$, $\mathcal{Y} \to$ spațiul semnalelor de ieșire;
$x(t) \to$ starea sistemului, $x(\cdot) \in \mathcal{X}$, $\mathcal{X} \to$ spațiul stărilor.

# Observații




- Sistemul dinamic admite o scriere matricială care explicitează un sistem de $n$ ecuații diferențiale liniare, cu $n$ necunoscute (stări) iar ieșirile sunt o combinație liniară a stărilor și a intrărilor.
- Sistemul este LTI, finit dimensional și cauzal!
- Invariant în timp $\Rightarrow$ se poate lua întotdeauna $t_o = 0$, iar condiția inițială se rescrie $x(0) = x_o$.
- Sistemul dinamic se poate figura ca un sistem intrare–ieșire (I/O) în care starea joacă rolul de variabilă de cuplare.
- Sistemul este complet precizat de cele patru matrici $(A, B, C, D)$.
- Condiții uzuale: $u(t)$ continuă cel puțin pe porțiuni $\Rightarrow$ $x(t)$ și $y(t)$ funcții continue.

1 Modelarea sistemelor dinamice pe spațiul stărilor

2 Evoluția stării, tranziția intrare–ieșire

3 Echivalența sistemelor dinamice liniare
- Echivalența pe stare
- Echivalența intrare-ieșire

4 Stabilitatea sistemelor dinamice
- Ecuația Liapunov și stabilitatea

# Evoluția stării

Prima ecuație a sistemului

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad x(0) = x_o$$

este (dpdv matematic) un sistem de $n$ ecuații diferențiale ordinare cu $n$ necunoscute cu o soluție unică în cazul în care starea inițială $x_o$ și comanda $u(t), t \geq 0$, sunt precizate ($u(\cdot)$ este continuă pe porțiuni). Din teoria ecuațiilor diferențiale ordinare soluția este

$$\begin{aligned} x(t) = \phi(t, x_o, u(\cdot)) &= e^{At}x_o + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \phi(t, x_o, 0) + \phi(t, 0, u(\cdot)) \\ &= x_\ell(t) + x_f(t). \end{aligned}$$

Funcția $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ se numește funcția de tranziție a stării. Descompunerea aditivă de mai sus pune în evidență superpoziția efectelor (datorate stării inițiale $x_o$ – regim liber – și, respectiv, comenzii $u(\cdot)$ – regim forțat).

# Matricea de tranziție a stării

Matricea

$$\Phi(t) := e^{At}$$

se numește matricea de tranziție a stării. Cu această notație, soluția sistemului de ecuații diferențiale se rescrie

$$x(t) = \Phi(t)x_o + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{2}$$

**Q:** Ce înseamnă și cum se calculează $e^{At}$ ?

Avem, prin definiție,

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots$$

care în cazul matricial devine

$$e^{At} = I_n + \frac{1}{1!}(At) + \frac{1}{2!}(At)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}(At)^n + \ldots. \tag{3}$$

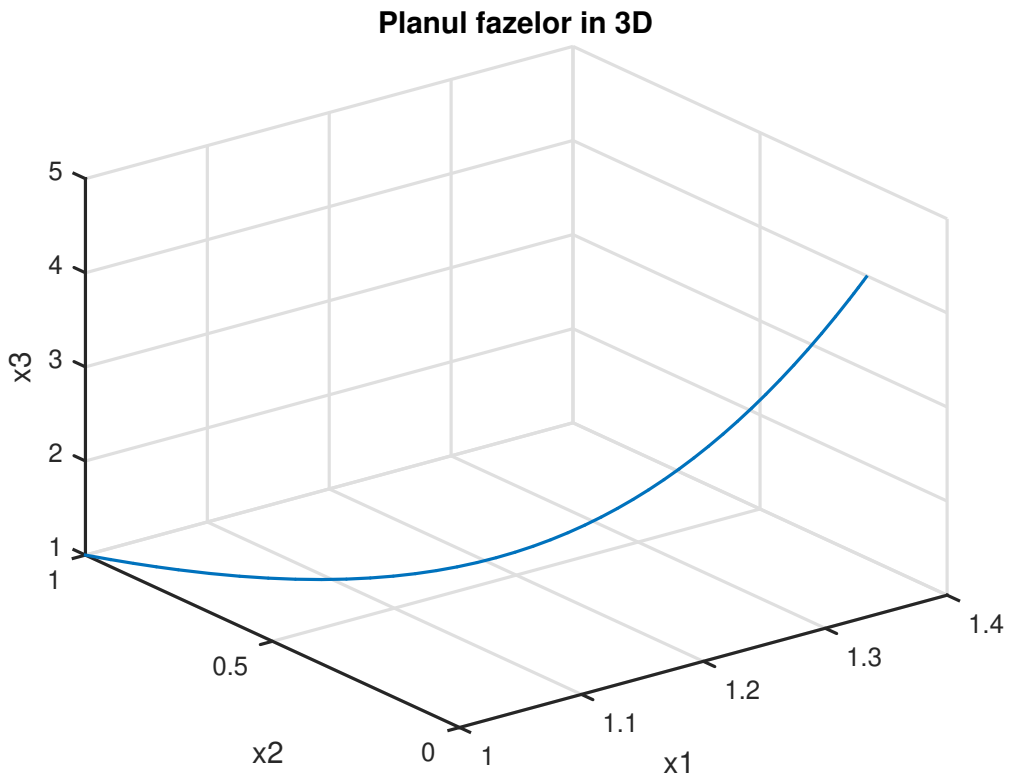
Calculul matricii de tranziție a stării se bazează pe forma Jordan a matricii $A$ și va fi explicitat mai tarziu.

# Matricea de tranziție a stării - continuare

Reversibilitatea timpului: Deoarece $\Phi(t) \neq 0$, $\forall t$ finit, obținem din (2)

$$\begin{aligned} x_o &= \Phi(-t)x(t) - \int_0^t \Phi(-t)\Phi(t-\tau)Bu(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \Phi(-t)x(t) - \int_0^t \Phi(-\tau)Bu(\tau)\mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{4}$$

$\Rightarrow$ în cazul sistemelor netede (cu timp continuu) starea inițială se poate întotdeauna recupera dacă se cunoaște "unde s-a ajuns" și comanda care a generat starea.



# Matricea pondere și matricea de răspuns cauzal la impuls

Ieșirea sistemului se obține imediat ca o combinație liniară de intrări și stări sub forma (vezi (1) și (2))

$$\begin{aligned} y(t) = f(t, x_o, u(\cdot)) &= Ce^{At}x_o + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= f(t, x_o, 0) + f(t, 0, u(\cdot)) \\ &= y_\ell(t) + y_f(t). \end{aligned}$$

Matricile

$$T(t) := C\Phi(t)B, \qquad T_c(t) := \begin{cases} 0, & t < 0, \\ T(t), & t \geq 0, \end{cases}$$

se numesc matricea pondere și, respectiv, matricea de răspuns cauzal la impuls și

$$T_c(t) = T(t)\mathbf{1}(t),$$

unde $\mathbf{1}(t) := \mathrm{diag}\{1(t)\}$, iar $1(t)$ este semnalul treaptă (Heaviside). Mai mult,

$$y(t) = C\Phi(t)x_o + \int_0^t T_c(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

# Matricile pondere și cea de răspuns cauzal la impuls - cont.

În particular, dacă $x_o = 0 \Rightarrow$

$$y(t) = \int_0^t T_c(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau = y_f(t),$$

ceea ce arată că matricea de răspuns cauzal la impuls permite exprimarea ieșirii atunci când condiția inițială este nulă. Mai precis, în condiții inițiale nule sistemul dinamic este un sistem de convoluție

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} T_c(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau = T_c(t) * u(t),$$

($u = 0$ pentru $t < 0$ și $T_c(t-\tau) = 0$ pentru $t - \tau < 0$). Dacă $m = p = 1$ (SISO) $\Longrightarrow T_c(t) = h(t)$ și are semnificația de răspuns cauzal al sistemului excitat la intrare de un impuls Dirac $u(t) = \delta(t)$.

# Matricea de transfer a unui sistem dinamic pe stare

Restrângem intrările la clasa funcțiilor original, i.e., $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$. Atunci automat $x(t)$ și $y(t)$ vor fi funcții original, i.e. $\mathcal{X} \subset \mathcal{O}$ și $\mathcal{Y} \subset \mathcal{O}$. În aceste condiții, aplicând transformatele Laplace sistemului original (1) obținem

$$\begin{cases} sX(s) - x_o &= AX(s) + BU(s), \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s), \end{cases} \tag{5}$$

de unde, ținând cont că funcția complexă $(sI - A)$ este a.p.t. nesingulară

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x_o + (sI - A)^{-1}BU(s) = X_\ell(s) + X_f(s).$$

Deasemenea

$$\Phi(s) := \mathcal{L}\{\Phi(t)\}(s) = \mathcal{L}\{e^{At}\}(s) = (sI - A)^{-1},$$

numită matricea rezolvență $\Longrightarrow$

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}\right\}(t).$$

# Matricea de transfer - continuare

Mai mult,

$$\Phi(s) = s^{-1}I + s^{-2}A + s^{-3}A^3 + \ldots,$$

care are loc pentru $|s| > R$, unde $R := \max\{|\lambda|, \lambda \in \Lambda(A)\}$. Deasemenea

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{(sI - A)^*}{\chi(s)} = \frac{G(s)}{\nu(s)}$$

unde $\chi(s) := \det(sI - A)$ și $\nu(s)$ sunt polinomul caracteristic și, respectiv, minimal ale matricii $A$. În operațional (domeniul $s$) ieșirea devine

$$\begin{aligned} Y(s) &= CX(s) + DU(s) = C(sI - A)^{-1}x_o + C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s) \\ &= Y_\ell(s) + Y_f(s). \end{aligned}$$

# Matricea de transfer și o *realizare* de stare asociată

**Definiția 2**

Matricea de transfer este

$$T(s) := \mathcal{L}\{T_c(t)\}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D =: \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right], \ T(s) \in \mathbb{C}^{p\times m},$$

unde ultima expresie explicită se obține comparând expresiile ieșirii în domeniul timp și cel operațional. Mai mult, spunem că $(A, B, C, D)$ este **o** realizare de stare asociată matricii de transfer $T(s)$.

Prin urmare,

$$T(s) = \frac{C(sI - A)^* B}{\chi(s)} + D = \frac{\widetilde{R}(s)}{\chi(s)} = \frac{R(s)}{\nu(s)} = \{T_{ij}(s)\}_{\substack{i=1:p \\ j=1:m}}.$$

Matricea de transfer a unui sistem dinamic (în accepțiunea definiției date) este o matrice de dimensiune $p \times m$, de funcții raționale **proprii**. Ea permite explicitarea în operațional a ieșirii în funcție de intrare în condiții inițiale nule, i.e.,

$$Y(s) = T(s)U(s) = Y_f(s), \text{ pentru } x_o = 0.$$

1 Modelarea sistemelor dinamice pe spațiul stărilor

2 Evoluția stării, tranziția intrare–ieșire

3 Echivalența sistemelor dinamice liniare
- Echivalența pe stare
- Echivalența intrare-ieșire

4 Stabilitatea sistemelor dinamice
- Ecuația Liapunov și stabilitatea

1 Modelarea sistemelor dinamice pe spațiul stărilor

2 Evoluția stării, tranziția intrare–ieșire

3 Echivalența sistemelor dinamice liniare
- Echivalența pe stare
- Echivalența intrare-ieșire

4 Stabilitatea sistemelor dinamice
- Ecuația Liapunov și stabilitatea

# Echivalența pe stare a sistemelor dinamice liniare

## Definiția 3

Două sisteme dinamice liniare $(A, B, C, D)$ și $(\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, \widetilde{D})$ având același număr de intrări și de ieșiri și aceeași dimensiune a spațiului stărilor $(p = \widetilde{p},\ m = \widetilde{m},\ n = \widetilde{n})$ se numesc echivalente pe stare dacă există o matrice inversabilă $T$, denumită transformare, astfel incât

$$\begin{aligned} \widetilde{A} &= TAT^{-1}, \\ \widetilde{B} &= TB, \\ \widetilde{C} &= CT^{-1}, \\ \widetilde{D} &= D. \end{aligned}$$

## Observația 1

Transformarea $T$ este de fapt o schimbare de coordonate la nivelul stării.

# Echivalența pe stare - continuare

Într–adevăr, dacă

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{cases} \tag{6}$$

și definim pentru un $T$ inversabil fixat

$$\widetilde{x}(t) := Tx(t) \qquad \Leftrightarrow \qquad x(t) = T^{-1}\widetilde{x}(t),$$

atunci

$$\begin{cases} T^{-1}\dot{\widetilde{x}}(t) &= AT^{-1}\widetilde{x}(t) + Bu(t), \\ y(t) &= CT^{-1}\widetilde{x}(t) + Du(t), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\widetilde{x}}(t) &= TAT^{-1}\widetilde{x}(t) + TBu(t), \\ y(t) &= CT^{-1}\widetilde{x}(t) + Du(t), \end{cases} \Rightarrow \tag{7}$$

$$\begin{cases} \dot{\widetilde{x}}(t) &= \widetilde{A}\widetilde{x}(t) + \widetilde{B}u(t), \\ y(t) &= \widetilde{C}\widetilde{x}(t) + \widetilde{D}u(t), \end{cases}$$

unde

$$\widetilde{A} = TAT^{-1}, \quad \widetilde{B} = TB, \quad \widetilde{C} = CT^{-1}, \widetilde{D} = D.$$

### Propoziția 1

*Două sisteme echivalente pe stare care au condițiile inițiale asemenea prin $T$ și sunt supuse aceleiași comenzi $u(\cdot)$ au traiectoriile de stare asemenea prin $T$ și evoluții la ieșire identice.*

1 Modelarea sistemelor dinamice pe spațiul stărilor

2 Evoluția stării, tranziția intrare–ieșire

3 Echivalența sistemelor dinamice liniare
- Echivalența pe stare
- Echivalența intrare-ieșire

4 Stabilitatea sistemelor dinamice
- Ecuația Liapunov și stabilitatea

# Echivalența intrare-ieșire

## Definiția 4

Două sisteme dinamice $(A, B, C, D)$ și $(\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, \widetilde{D})$, cu același număr de intrări $(m = \widetilde{m})$ și același număr de ieșiri $(p = \widetilde{p})$, se numesc echivalente intrare–ieșire dacă au aceeași matrice de transfer, i.e.,

$$\widetilde{T}(s) = \widetilde{C}(sI - \widetilde{A})^{-1}\widetilde{B} + \widetilde{D} = C(sI - A)^{-1}B + D = T(s).$$

## Observația 2

- Două sisteme echivalente intrare–ieșire pot avea dimensiunea vectorului de stare diferită, i.e. $n \neq \widetilde{n}$.
- Pentru două sisteme echivalente intrare–ieșire avem automat

$$D = T(\infty) = \widetilde{T}(\infty) = \widetilde{D}.$$

# Relația între echivalența pe stare și echivalența I/O

## Propoziția 2

*Două sisteme echivalente pe stare sunt echivalente intrare–ieșire.*

## Demonstrație.

$$\begin{aligned}\widetilde{T}(s) &= \widetilde{C}(sI-\widetilde{A})^{-1}\widetilde{B}+\widetilde{D} = CT^{-1}(sI-TAT^{-1})^{-1}TB+D\\ &= CT^{-1}(T(sI-A)T^{-1})^{-1}TB+D = C(sI-A)^{-1}B+D = T(s).\end{aligned}$$

□

## Observația 3

- Reciproca nu este în general valabilă $\leftarrow$ este posibil ca pentru două sisteme echivalente intrare–ieșire) să avem $n \neq \widetilde{n}$).
- Diferența în definițiile echivalenței constă în aceea că una este centrată pe stare, iar cealaltă este centrată pe funcția de transfer (intrare–ieșire).
- Pentru orice matrice de transfer există o infinitate de realizări de stare.
- Problema dimensiunii minime a realizării de stare este esențială!

1 Modelarea sistemelor dinamice pe spațiul stărilor

2 Evoluția stării, tranziția intrare–ieșire

3 Echivalența sistemelor dinamice liniare
- Echivalența pe stare
- Echivalența intrare-ieșire

4 Stabilitatea sistemelor dinamice
- Ecuația Liapunov și stabilitatea

# STABILITATE

Stabilitatea este o proprietate calitativă a sistemelor, asociată comportării dinamice a acestora.
Dacă stabilitatea se referă la comportarea lui $x(t)$ se numește stabilitate de tip Liapunov, iar dacă se referă la $y(t)$ se numește stabilitate externă.

**Stabilitate internă (liberă sau Liapunov):** Acest tip de stabilitate se referă la comportarea stării $x(t)$ atunci când intrarea este identic nulă. Ecuația relevantă este

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \qquad x(0) = x_o.$$

Definiția 5 (Stabilitatea unui sistem dinamic)

- Un sistem dinamic s. n. intern stabil dacă $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta(\epsilon) > 0$ a.i. $\forall x_o$ cu $\|x_o\| < \delta(\epsilon)$ avem
$$\|x(t)\| \leq \epsilon, \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$
- Un sistem dinamic s. n. intern asimptotic stabil dacă
$$\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0, \ \forall x_o.$$

# Stabilitatea sistemelor dinamice

## Observația 4

- Definiția este generală, folosindu-se și în cazul sistemelor neliniare. În cazul liniar există anumite consecințe simple deoarece

$$x(t) = \Phi(t)x_o = e^{At}x_o.$$

- Sistemul este intern asimptotic stabil dacă și numai dacă

$$\lim_{t\to\infty} \Phi(t) = \lim_{t\to\infty} e^{At} = 0.$$

**Q:** Cum evaluăm stabilitatea?

Evaluarea exponențialei matriciale $e^{At}$: considerăm succesiv urmatoarele cazuri:

a) $A$ este un bloc Jordan elementar cu valoare proprie 0;
b) $A$ este un bloc Jordan elementar oarecare;
c) $A$ oarecare.

# Evaluarea lui $\Phi(t) = e^{At}$

a) În acest caz presupunem $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ și

$$A = J_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Observând că $A$ este nilpotentă cu indice de nilpotență $n$, i.e. $A^n = 0$ și $A^{n-1} \neq 0$ și folosind definiția (3) a exponențialei matriciale $\Longrightarrow$

$$e^{At} = I_n + \begin{bmatrix} 0 & \frac{t}{1!} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{t}{1!} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{t}{1!} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

# Evaluarea lui $\Phi(t) = e^{At}$ - continuare

b) În acest caz presupunem $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ și

$$A = J_o + \Lambda_o, \qquad \text{unde} \qquad \Lambda_o = \begin{bmatrix} \lambda_o & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_o \end{bmatrix} = \lambda_o I_n.$$

Atunci $e^{At} = e^{(J_o+\Lambda_o)t} = e^{J_o t} e^{\Lambda_0 t}$ (relație care are loc pentru că $\Lambda_o$ comută cu $J_o$ la înmulțire). Ținând cont că $e^{\Lambda_o t} = e^{\lambda_o t} I_n \Longrightarrow$

$$e^{At} = e^{\lambda_o t} \begin{bmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{t}{1!} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

# Evaluarea lui $\Phi(t) = e^{At}$ - cazul general

c) Cazul general se reduce la cazurile precedente prin aducerea matricii $A$ la forma canonică Jordan. Mai precis, $\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\exists T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nesingulară a.î.

$$J = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_k \end{bmatrix}$$

unde $J$ este o matrice Jordan (bloc diagonală având pe diagonală blocuri elementare Jordan $J_i$ la valorile proprii ale matricii $A$). Matricea de tranziție a stării devine

$$e^{At} = e^{T^{-1}JTt} = T^{-1}e^{Jt}T = T^{-1}\begin{bmatrix} e^{J_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{J_k t} \end{bmatrix} T.$$

# Evaluarea lui $\Phi(t) = e^{At}$ - cazul $A$ diagonalizabilă

Cazul în care $A$ este o matrice cu spectrul cu valori proprii simple distincte ($\Lambda_A = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\},\ \lambda_i \neq \lambda_j,\ i, j = 1 : n$) este o instanță particulară cazului c), i.e., $J_i = \lambda_i,\ i = 1 : k$, cu $k = n$. Prin urmare,

$$e^{At} = T^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} T,$$

unde $T$ este o matrice nesingulară a. î.

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

# Caracterizarea stabilității

Noțiuni necesare: Polinom caracteristic, minimal, forma canonică Jordan, valori proprii, multiplicități algebrice și geometrice[1,2].

## Teorema 1 (Stabilitatea internă a unui sistem dinamic)

- *Sistemul dinamic* $(A, B, C, D)$ *este intern asimptotic stabil dacă si numai dacă* $\Lambda(A) \subset \mathbb{C}^-$, *i.e., spectrul matricii de stare* $A$ *este localizat în semiplanul complex stâng, deschis).*
- *Sistemul dinamic* $(A, B, C, D)$ *este intern stabil dacă și numai dacă* $\Lambda(A) \subset \mathbb{C}^- \cup \mathbb{C}_0$, *iar valorile proprii de pe axa imaginară sunt rădăcini simple ale polinomului minimal.*

## Observația 5

- Testarea numerică a stabilității interne pentru un sistem dinamic se reduce dpdv procedural la calculul valorilor proprii ale matricii de stare $A$ (aducerea matricii la forma Schur).
- Deoarece stabilitatea internă a unui sistem depinde exclusiv de localizarea spectrului matricii de stare $A$, uneori se folosește *abuziv* terminologia de matrice (asimptotic) stabilă.

1 Modelarea sistemelor dinamice pe spațiul stărilor

2 Evoluția stării, tranziția intrare–ieșire

3 Echivalența sistemelor dinamice liniare
- Echivalența pe stare
- Echivalența intrare-ieșire

4 Stabilitatea sistemelor dinamice
- Ecuația Liapunov și stabilitatea

# Ecuația Liapunov și stabilitatea sistemelor liniare

Ecuația

$$A^T P + PA + Q = 0, \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad Q \in \mathbb{R}^{n\times n}, \tag{8}$$

în necunoscuta $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se numește ecuație Liapunov (matricială, algebrică, în timp continuu).

**Teorema 2**

*Dacă matricea $A$ este asimptotic stabilă ($\Lambda(A) \subset \mathbb{C}^-$) atunci ecuația Liapunov are o soluție unică dată explicit de expresia*

$$P := \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} \mathrm{d}t. \tag{9}$$

Deoarece $A$ este asimptotic stabilă, expresia (9) este bine definită (integrala este convergentă). Calculând

$$\begin{aligned} A^T P + PA &= \int_0^\infty (A^T e^{A^T t} Q e^{At} + e^{A^T t} Q e^{At} A)\mathrm{d}t = \int_0^\infty \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{A^T t} Q e^{At})\mathrm{d}t \\ &= e^{A^T t} Q e^{At}\Big|_0^\infty = -Q, \end{aligned}$$

într-adevar $P$ dat de (9) este o soluție a ecuației Liapunov. Apoi se demonstrează unicitatea...

# Ecuația Liapunov și stabilitatea sistemelor liniare

## Observația 6

- Dacă $Q = Q^T$ atunci rezultă, automat din (9), că $P = P^T$.
- Dacă $Q = Q^T \geq 0$ atunci $P = P^T \geq 0$.
- Dacă $Q = Q^T > 0$ atunci $P = P^T > 0$.

## Teorema 3 (Liapunov)

*Presupunem că* $\exists P = P^T > 0$ *și* $Q = Q^T \geq 0$ *a.î.*

$$A^T P + PA + Q = 0.$$

*Atunci* $\Lambda(A) \subset \mathbb{C}_0^-$.

## Observația 7

- Dacă în teorema de mai sus întărim ipotezele a.î. $P > 0$, $Q > 0$ atunci rezultă că $A$ este asimptotic stabilă ($\Lambda(A) \subset \mathbb{C}^-$).
- $\Rightarrow$ Proceduri de testare a (semi)pozitivității și de rezolvare a ec. Liapunov.
- Ecuația Liapunov se poate folosi pentru a testa stabilitatea unui sistem prin rezolvarea unui sistem de ecuații liniare (o problemă considerabil mai simplă decât calculul valorilor proprii ale matricii $A$).

# Răspunsul sistemelor de convoluție în frecvență

**Tudor C. Ionescu**

Dept. de Automatică și Ingineria Sistemelor (ACSE),
Facultatea de Automatică și Calculatoare,
Universitatea Politehnica București

e-mail: `tudor.ionescu@acse.pub.ro`

URL: `http://acse.pub.ro/person/tudor-cornel-ionescu/`

noiembrie 2019

1 Introducere

2 Reprezentarea sistemelor continue în frecvență
- Diagrame Bode
- Norma $\infty$ a unui sistem

3 Reprezentarea sistemelor discrete în frecvență

# Introducere

Electronică: curba de răspuns în frecvență a unui amplificator arată cum se schimbă câștigul unui amplificator, când frecvența semnalului de intrare variază.

Banda amplificatorului: plaja de frecvențe unde amplificarea este practic constantă, la un nivel apropiat de valoarea sa maximă.

Răspunsul în frecvență al unui sistem care admite funcție de transfer $H(s)$ este

$$H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$$

Pe de altă parte, $H(j\omega)\, e^{j\omega t}$ este răspunsul permanent al unui sistem *stabil* la o intrare de tip armonic, $u(t) = e^{j\omega t}$. Mai precis, dacă la intrarea sistemului avem $u(t) = A \sin \omega t$, răspunsul permanent (sau staționar) al acestuia va fi[1]

$$y_p(t) = A|H(j\omega)| \sin(\omega t + \phi(\omega)),$$

unde $\phi(\omega) = \arg[H(j\omega)]$.

[1] Vezi Cap. 2–argument prin operația de convoluție.

# Reprezentarea în frecvență:

... a funcției de transfer $H(s)$ e o reprezentare grafică a dependenței numărului complex $H(j\omega)$ de $\omega$, pentru $\omega \in \mathbb{R}$:

1. *Exponențială* (sau polară)

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|\, e^{j\,arg[H(j\omega)]} \overset{not}{=} H(\omega)\, e^{j\phi(\omega)}. \tag{1}$$

$\Longrightarrow$

- **Caracteristicile amplitudine-pulsație și fază-pulsație** sau caracteristicile (semi)logaritmice sunt graficele amplitudinii $H(\omega)$ și respectiv ale fazei $\phi(\omega)$. Aceste caracteristici se mai numesc și **diagrame (de tip) Bode** $\leftarrow$ **caracteristicile de filtrare**.

$\exists$ și alte reprezentări, cum ar fi locul de transfer... Similar pentru sistemele discrete (un pic mai încolo...)

# Proprietăți

Deoarece $H(s)$ este o rațională cu coeficienți reali, rezultă că

$$H(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

și

$$\overline{H(j\omega)} = U(\omega) - jV(\omega) = H(\overline{j\omega}) = H(-j\omega) = U(-\omega) + jV(-\omega),$$

de unde

$$U(\omega) = U(-\omega), \quad -V(\omega) = V(-\omega),$$

pentru orice $\omega \in \mathbb{R}$. Cu alte cuvinte,

- $U$ este o funcție *pară*,
- $V$ o funcție *impară*.

Cum

$$H(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} \text{ și } \phi(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{V(\omega)}{U(\omega)},$$

rezultă că

- $H$ este o funcție *pară*,
- $\phi$ o funcție *impară*.

$\Longrightarrow$ este *suficientă* trasarea caracteristicilor pentru valori *pozitive* ale pulsației $\omega$.

1 Introducere

2 Reprezentarea sistemelor continue în frecvență
- Diagrame Bode
- Norma $\infty$ a unui sistem

3 Reprezentarea sistemelor discrete în frecvență

1 Introducere

2 Reprezentarea sistemelor continue în frecvență
- Diagrame Bode
- Norma $\infty$ a unui sistem

3 Reprezentarea sistemelor discrete în frecvență

# Diagrame de tip Bode: $H(\omega)$, $\phi(\omega)$

Aceste caracteristici se mai numesc și (semi)logaritmice deoarece pe abscisă se alege o scară logaritmică pentru $\omega$, $x = \log \omega$, iar pe ordonată $y = H(\omega)$ și $y = \phi(\omega)$ se măsoară în decibeli (unitate de măsură a câștigului unui amplificator)

$$[H(\omega)]_{\text{dB}} := 20 \log H(\omega), \quad H(\omega) > 0,$$

respectiv în radiani (sau grade).

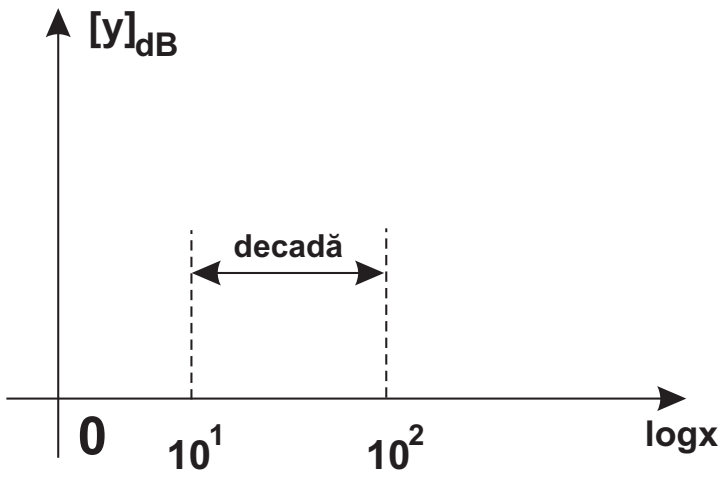


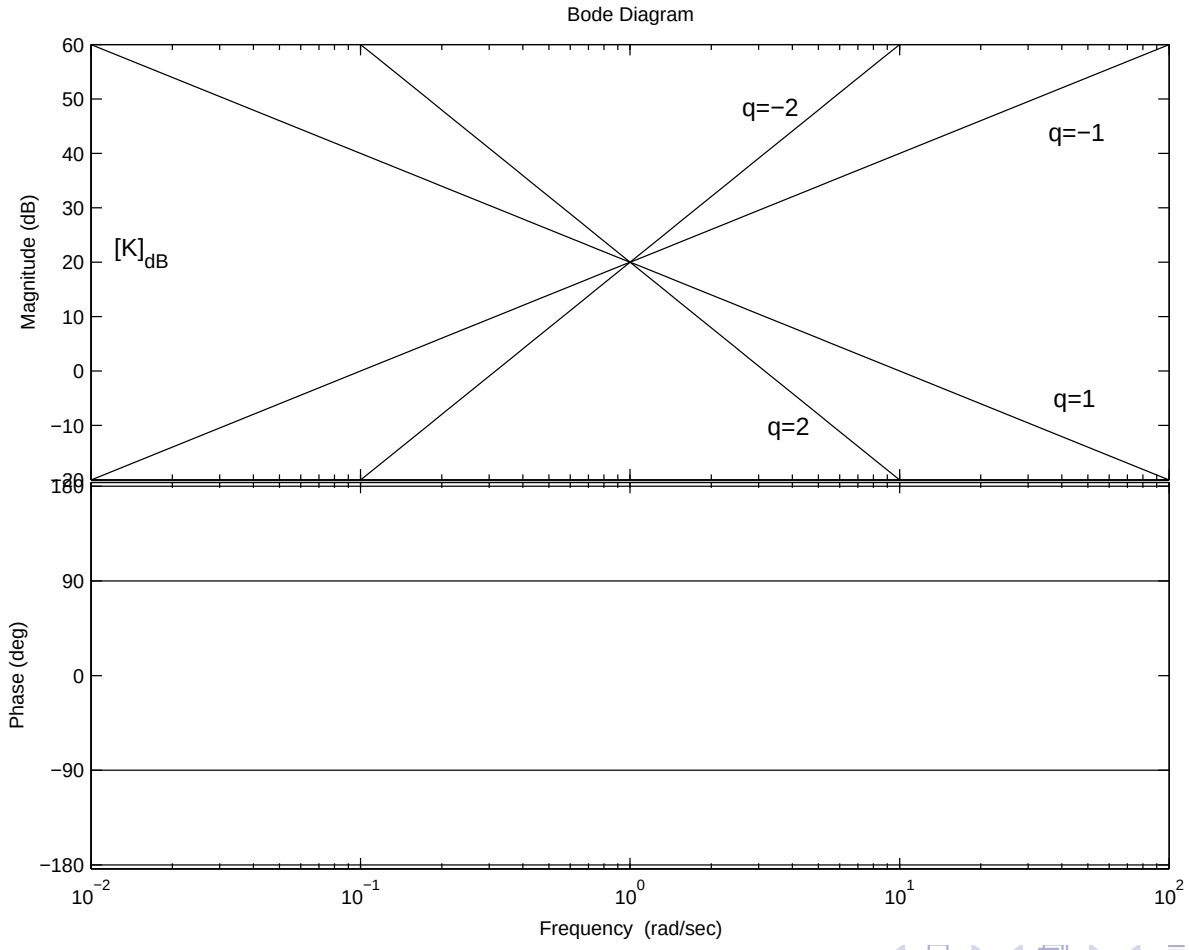

Figura 1: Abscisă logaritmică: o decadă

Avem $\log 2 \approx 0.3$, $\log 5 \approx 0.7$, $\log 3 = 0.48 \approx 0.5$.

# Diagramele Bode ale sistemelor elementare

**1. Elementul (multi)integrator:** $H(s) = \dfrac{K}{s^q}$, $K > 0$, $q \in \mathbb{Z}$.

$$H(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^q}, \quad H(\omega) = \frac{K}{\omega^q}, \quad \phi(\omega) = -q\frac{\pi}{2} \Longrightarrow [H(\omega)]_{\text{dB}} = [K]_{\text{dB}} - 20q\,\log\omega.$$



# Diagramele Bode ale sistemelor elementare

**2. Element de ordinul I:** $H(s) = \dfrac{1}{Ts+1}$, $T > 0$.

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega T + 1} \Rightarrow H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}, \quad \phi(\omega) = \operatorname{arctg}(-\omega T).$$

Atunci

$$[H(\omega)]_{dB} = 20\log\left(1+\omega^2 T^2\right)^{-\frac{1}{2}} = -10\log\left(1+\omega^2 T^2\right).$$

a) *joasă* frecvență: $\omega << \dfrac{1}{T}$, $\quad 1+\omega^2 T^2 \approx 1$

$\Longrightarrow [H(\omega)]_{dB} \approx 0$, $\phi(0) = \operatorname{arctg}(0_-) = 0$.

b) *înaltă* frecvență: $\omega >> \dfrac{1}{T}$, $\quad 1+\omega^2 T^2 \approx \omega^2 T^2$

$\Longrightarrow [H(\omega)]_{dB} \approx 20\log 1/T - 20\log\omega$, $\phi(+\infty) = \operatorname{arctg}(-\infty) = -\dfrac{\pi}{2}$.

c) *medie* frecvență: $\omega = \dfrac{1}{T}$

$\Longrightarrow [H(\omega)]_{dB} = -10\log 2 = -3\text{dB}$, $\phi(1/T) = \operatorname{arctg}(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$.

$\omega_T = 1/T$ se numește *pulsația de frângere*.

# Diagramele Bode ale sistemelor elementare

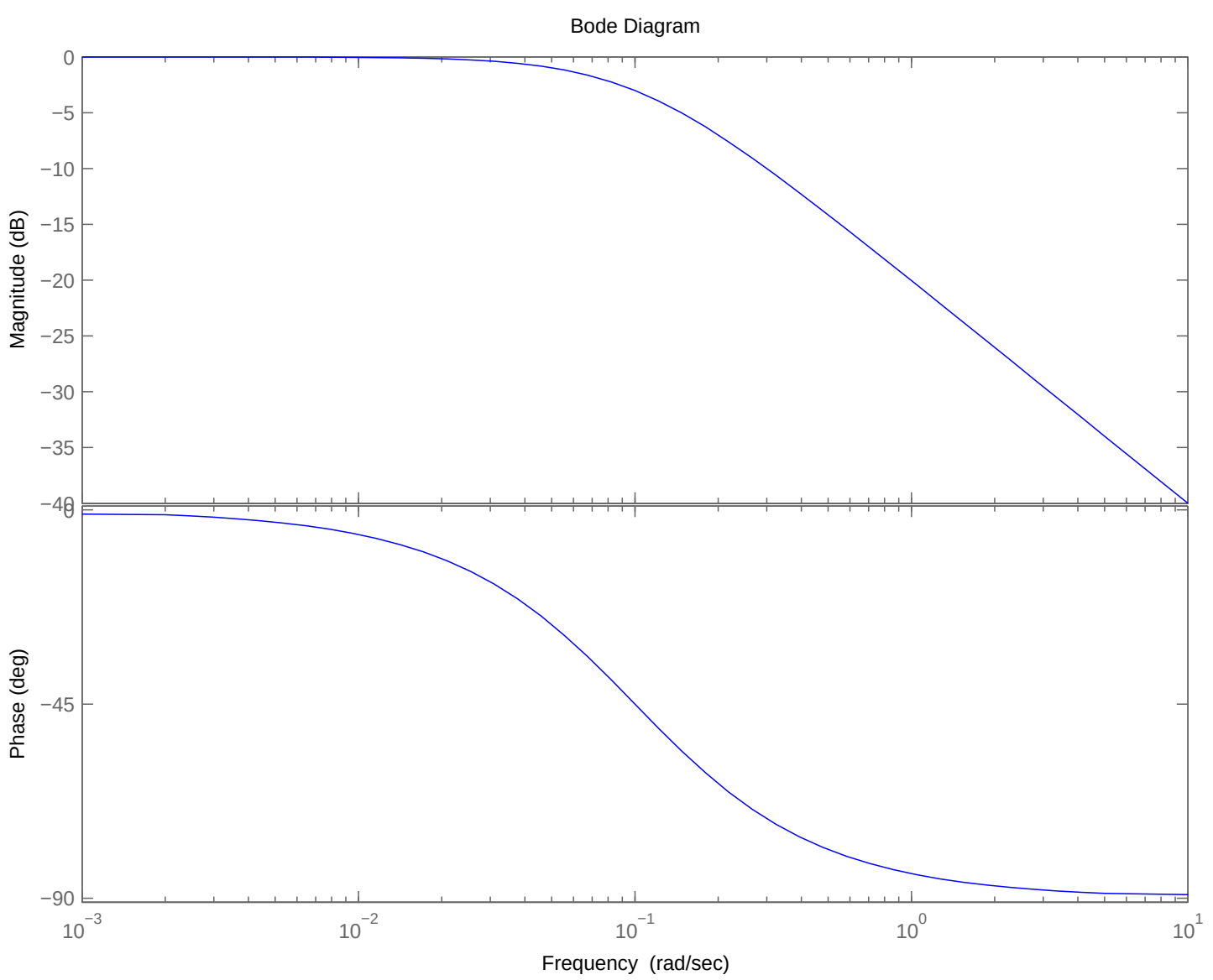



Figura 2: Element de ordinul I

# Diagramele Bode ale sistemelor elementare

**2. Element de ordinul II:**

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{(\frac{s}{\omega_n})^2 + 2\zeta\frac{s}{\omega_n} + 1}, \ 0 \le \zeta \le 1$$

$$\Longrightarrow H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{-\omega^2 + j\,2\zeta\omega_n\omega + \omega_n^2} = \frac{1}{1 - x^2 + j\,2\zeta x} = H(jx),$$

unde $x = \omega/\omega_n \overset{not}{=} \Omega$ - pulsație normată.

Avem

$$H(\omega) = |H(jx)| = \left[(1-x^2)^2 + 4\zeta^2x^2\right]^{-\frac{1}{2}}, \quad \phi(\omega) = \text{arctg}\frac{-2\zeta x}{1-x^2}$$

Rezultă că

$$[H(\omega)]_{\text{dB}} = -10\log\left[(1-x^2)^2 + 4\zeta^2x^2\right] \tag{2}$$

# Diagramele Bode ale sistemelor elementare

a) *joasă* frecvență: $\omega << \omega_n, \quad x << 1 \Rightarrow \quad (1-x^2)^2 + 4\zeta^2 x^2 \approx 1$

$$\Longrightarrow [H(\omega)]_{\mathrm{dB}} \approx -10\log 1 = 0,$$
$$\phi(0) = \mathrm{arctg}(0_-) = 0.$$

b) *înaltă* frecvență: $\omega >> \omega_n, \quad x >> 1 \Rightarrow (1-x^2)^2 + 4\zeta^2 x^2 \approx x^4$

$$\Longrightarrow [H(\omega)]_{\mathrm{dB}} \approx -40\log x = 40\log\omega_n - 40\log\omega,$$
$$\phi(+\infty) = \mathrm{arctg}(0_+) = -\pi.$$

c) *medie* frecvență: $\omega = \omega_n, \quad x = 1$

$$\Longrightarrow [H(\omega_n)]_{\mathrm{dB}} = -10\log 4\zeta^2 = 20\log\frac{1}{2\zeta} = \left[\frac{1}{2\zeta}\right]_{\mathrm{dB}},$$
$$\phi(\omega_n) = \mathrm{arctg}(\mp\infty) = -\frac{\pi}{2}.$$

# Puncte de extrem

Calculăm punctele critice ale funcției $[H(\omega)]_{\mathrm{dB}}(x)$ (definită de 2):

$$\frac{\mathrm{d}[H(\omega)]_{\mathrm{dB}}(x)}{\mathrm{d}x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0, \quad \text{sau} \quad 1 - 2\zeta^2 - x^2 = 0.$$

Rezultă $x = 0$ și, dacă $\zeta < 1/\sqrt{2} = 0.707$, $x = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$. Se poate arăta că acestea sunt puncte de *maxim*, valoarea amplitudinii (exprimată în dB) fiind 0 în primul caz și, respectiv,

$$[H_{\max}(\omega)]_{\mathrm{dB}} = -10 \log 4\zeta^2(1 - \zeta^2)$$

în cel de-al doilea.

# Diagramele Bode ale sistemelor elementare

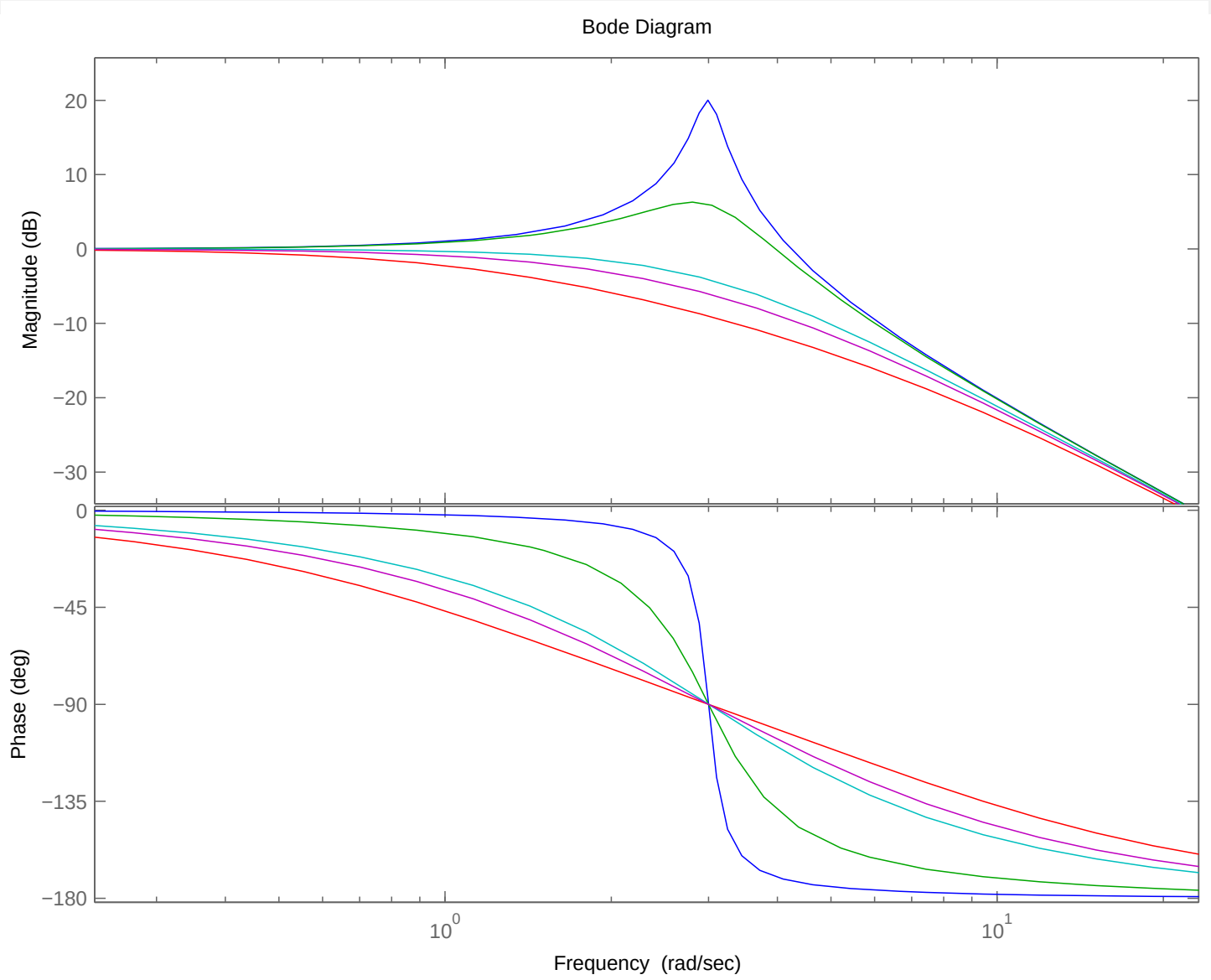



Figura 3: Elemente de ordinul al II-lea cu $\omega_n = 3$; parametrizare după $\zeta$.

# Concluzii procedurale

Se trasează mai întâi caracteristicile asimptotice:

Sistem de ordinul I: $[H_A(\omega)]_{\mathrm{dB}} = \begin{cases} 0, & 0 < \omega < \frac{1}{T}, \\ -20 \log \omega T, & \frac{1}{T} < \omega. \end{cases}$

Sistem de ordinul al II-lea: $[H_A(\omega)]_{\mathrm{dB}} = \begin{cases} 0, & 0 < \omega < \omega_n, \\ -40 \log \frac{\omega}{\omega_n}, & \omega_n < \omega. \end{cases}$

Se deduc valorile caracteristicii exacte la pulsațiile de frângere $1/T$, respectiv $\omega_n$, și se trasează caracteristica exactă (ținând cont de valorile lui $\zeta$ pentru sistemele de ordin 2).
De exemplu, dacă $\zeta = 0.5 < 0.707$, caracteristica amplitudine-pulsație admite un maxim, iar

$$[H(\omega_n)]_{\mathrm{dB}} = -10 \log 4\zeta^2 = 20 \log \frac{1}{2\zeta} = \left[\frac{1}{2 \cdot 0.5}\right]_{\mathrm{dB}} = 0.$$

Variația totală a fazei este de $-\dfrac{\pi}{2}$ pentru elementul de ordinul 1, respectiv de $-\pi$ pentru cel de ordinul 2.

# Trasarea calitativă a caracteristicilor de tip Bode

Fie funcția de transfer (strict) proprie

$$H(s) = \frac{r(s)}{p(s)} = \frac{K}{s^q}\,\frac{\widetilde{r}(s)}{\widetilde{p}(s)}, \quad q \in \mathbb{Z},\ K \in \mathbb{R},\ \ \widetilde{r}(0) = \widetilde{p}(0) = 1. \tag{3}$$

$q$ se numește *tipul* funcției de transfer iar $K$ este *factorul de amplificare/atenuare* sau *câștigul* (DC gain).
Punem în evidență factorii specifici care apar în expresiile lui $\widetilde{r}(s)$ și $\widetilde{p}(s)$:

$$H(s) = \frac{K}{s^q}\,\frac{\Pi_{i=1}^{n_r'}(1+\widehat{T}_{ri}s)\,\Pi_{i=1}^{n_r''}(1+2\zeta_{ri}T_{ri}s+T_{ri}^2s^2)}{\Pi_{j=1}^{n_p'}(1+\widehat{T}_{pj}s)\,\Pi_{j=1}^{n_p''}(1+2\zeta_{pj}T_{pj}s+T_{pj}^2s^2)}$$

Presupunem (deocamdată) că toate *constantele de timp* sunt pozitive ($T_k > 0$), că $0 \le \zeta < 1$ și $K > 0$.

# Factori elementari

În expresia lui $H(s)$ apar 3 tipuri de factori:

- poli/zerouri în origine ($j\omega$) alături de factorul constant $K$: $\dfrac{K}{j\omega^q}$, $q \in \mathbb{Z}$;
- poli/zerouri reali/reale ($j\omega T + 1$);
- Poli/zerouri complex conjugați/complex conjugate ($1 - \omega^2 T^2 + j\,2\zeta T\omega$).

# Observații

Dacă $H(s) = H_1(s)H_2(s)$, atunci

$$[H(\omega)]_{\mathrm{dB}} = [H_1(\omega)]_{\mathrm{dB}} + [H_2(\omega)]_{\mathrm{dB}}$$

și

$$\arg[H(j\omega)] = \arg[H_1(j\omega)] + \arg[H_2(j\omega)].$$

În consecință,

$$[H(\omega)]_{\mathrm{dB}} = \left[\frac{K}{\omega^q}\right]_{\mathrm{dB}} + \sum_{i=1}^{n_r'} |1 + j\omega\,\widehat{T}_{ri}|_{\mathrm{dB}} + \sum_{i=1}^{n_r''} |1 - \omega^2 T_{ri}^2 + j2\zeta_{ri} T_{ri}\omega|_{\mathrm{dB}} +$$
$$- \sum_{j=1}^{n_p'} |1 + j\omega\,\widehat{T}_{pj}|_{\mathrm{dB}} - \sum_{j=1}^{n_p''} |1 - \omega^2 T_{pj}^2 + j2\zeta_{pj} T_{pj}\omega|_{\mathrm{dB}}$$

și caracteristica amplitudine-pulsație se obține **adunând caracteristicile fiecărui factor în parte**.

# Observații

Similar, deoarece

$$\phi(\omega) = -q\frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{n_r'} \arg(1 + j\omega\widehat{T}_{ri}) + \sum_{i=1}^{n_r''} \arg(1 - \omega^2 T_{ri}^2 + j2\zeta_{ri} T_{ri}\omega) +$$
$$-\sum_{j=1}^{n_p'} \arg(1 + j\omega\widehat{T}_{pj}) - \sum_{j=1}^{n_p''} \arg(1 - \omega^2 T_{pj}^2 + j2\zeta_{pj} T_{pj}\omega),$$

obținem caracteristica fază-pulsație însumând caracteristicile fiecărui factor elementar în parte.

# Diagrame Bode: Procedura de trasare

1) Scriem sistemul în forma (3), i.e,

$$H(s) = \frac{K}{s^q} \frac{\Pi_{i=1}^{n_r'}(1+\widehat{T}_{ri}s)\,\Pi_{i=1}^{n_r''}(1+2\zeta_{ri}T_{ri}s+T_{ri}^2s^2)}{\Pi_{j=1}^{n_p'}(1+\widehat{T}_{pj}s)\,\Pi_{j=1}^{n_p''}(1+2\zeta_{pj}T_{pj}s+T_{pj}^2s^2)}.$$

2) Determinăm valoarea lui $K$ in dB, $[K]_{\mathrm{dB}} = 20\log K$ și marcăm punctul $(10^0, [K]_{\mathrm{dB}})$.

3) Așezăm în ordine *crescătoare* pe abscisă - axa $\log\omega$ - toate pulsațiile de frângere $\omega_k = \dfrac{1}{T_k}$. Trasăm câte o verticală în fiecare pulsație de frângere. Ordonata (axa verticală, cu unitatea de măsură în dB) o trasează la stânga celei mai mici pulsații de frângere (la aproximativ două decade mai la stânga).

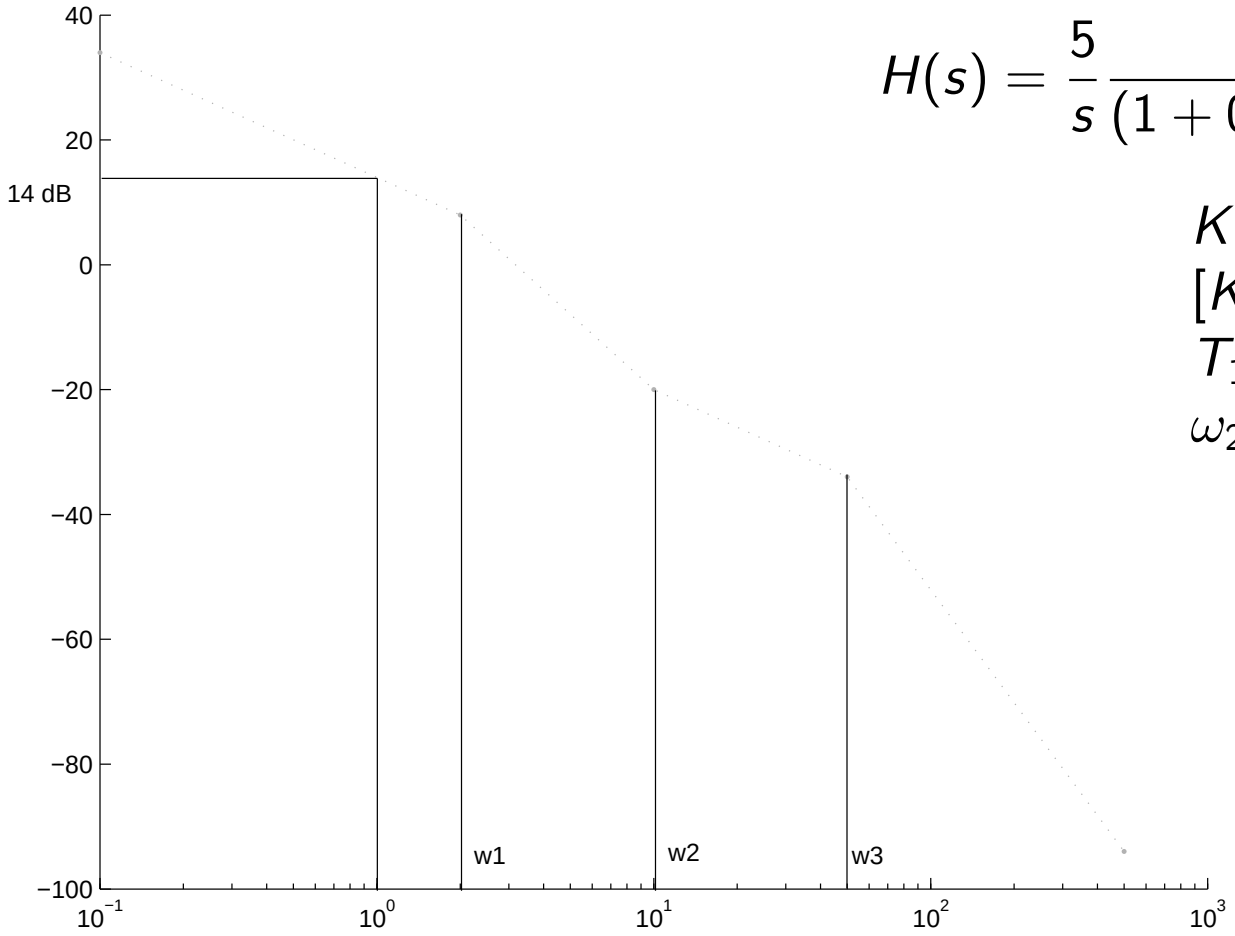
4) Trasăm asimptota de joasă frecvență trecând prin punctul $(10^0, [K]_{\mathrm{dB}})$ și având panta de $-20q$ dB/decadă. Aceasta rămâne nemodificată până când întâlnește *prima* pulsație de frângere. Aplicăm apoi regula de trasare de la 5. Nu are nici un fel de relevanță dacă prima pulsație de frângere se află la stânga sau la dreapta punctului $10^0$ de pe abscisă.

# Procedura de trasare

5) La intersecția caracteristicii asimptotice cu fiecare verticală, modificăm panta acesteia cu $\pm 20$ sau $\pm 40$ dB/decadă, după cum respectiva pulsație de frângere corespunde unui factor de ordinul 1 sau de ordinul 2, plasat la numărător $(+)$ sau la numitor $(-)$.

6) Caracteristica fază-pulsație se trasează prin însumarea caracteristicilor fiecărui factor elementar. Pentru elementele de ordin 1 și ordin 2 considerăm că faza variază semnificativ pe o decadă înaintea, respectiv o decadă după punctul de frângere corespunzător. În afara acestui interval (de două decade) putem aproxima faza cu valorile asimptotice de joasă, respectiv înaltă frecvență.

# Exemplu

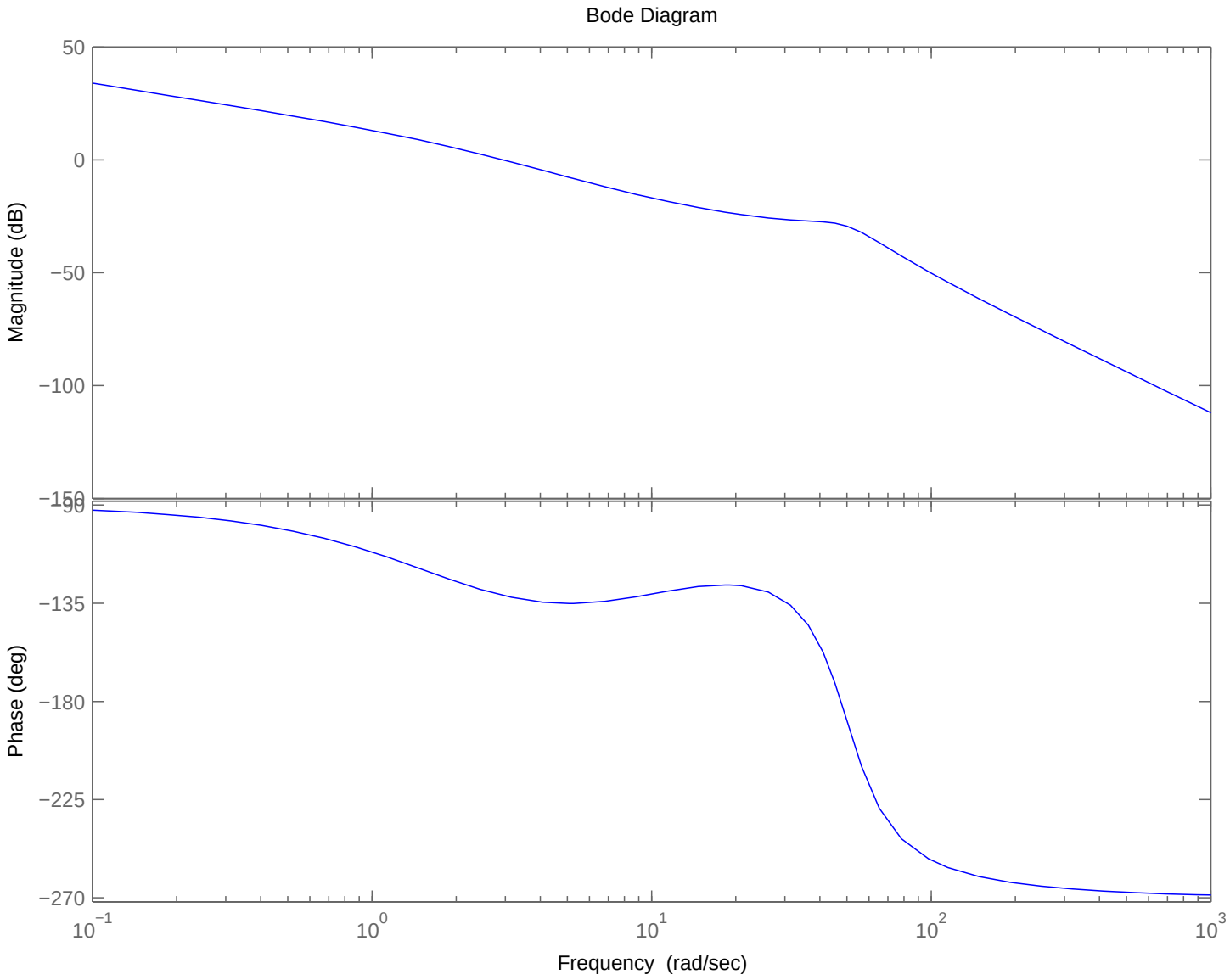



$$H(s) = \frac{5}{s}\frac{1+0.1s}{(1+0.5s)\,(1+0.6s/50+(s/50)^2)}.$$

$K = 5,\ q = 1;$
$[K]_{\mathrm{dB}} = 20\log 5 \approx 14\mathrm{dB}.$
$T_1 = 0.5,\ \omega_1 = 2;\ T_2 = 0.1,$
$\omega_2 = 10;\ T_3 = 0.02,\ \omega_3 = 50.$

Figura 4: Caracteristica asimptotică

# Caracteristicile „reale”



1 Introducere

2 Reprezentarea sistemelor continue în frecvență
- Diagrame Bode
- Norma $\infty$ a unui sistem

3 Reprezentarea sistemelor discrete în frecvență

# Norme sistemice

Considerăm un sistem de convoluție descris de o funcție pondere $g(t)$, cu suport pozitiv, cu transformată Laplace $G(s)$, având intrarea $u(t)$ și ieșirea $y(t)$, cu transformatele Laplace $u(s)$ și respectiv $y(s)$ și relațiile intrare-ieșire

$$y = g * u, \quad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \qquad y(s) = G(s)u(s).$$

Sistemele (ca și semnalele) se pot măsura prin diferite norme care relevă sintetic proprietăți sofisticate ale acestora. Cele mai importante norme sistemice sunt norma 2 și norma $\infty$.

# Norma $L^\infty$ a unui sistem - amplificarea maximă

Norma $L^\infty$ (pe scurt, norma $\infty$) a unui sistem este prin definiție

$$\|G\|_\infty = \sup_\omega |G(\mathrm{j}\omega)|. \tag{4}$$

Norma $\infty$ este bine definită (finită) dacă și numai dacă sistemul $G$ este propriu și nu are poli pe axa imaginară. În plus, dacă sistemul $G$ este stabil, ducând $L^2$ în $L^2$, atunci norma $\infty$ sistemică coincide cu norma *indusă* de norma 2 a semnalelor:

$$\|G\|_{2_{\text{ind}}} := \sup_{\substack{u\in L^2\\ u\neq 0}} \frac{\|g*u\|_2}{\|u\|_2} = \sup_{\substack{u\in L^2\\ u\neq 0}} \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2} = \sup_{\|u\|_2\leq 1} \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2} = \sup_{\|u\|_2=1} \|y\|_2 = \|G\|_\infty \tag{5}$$

# Norma ∞

În acest caz, este de asemenea interesant de observat că norma sistemică *indusă* ∞ coincide de fapt cu norma 1 a funcției pondere (văzută ca semnal)

$$\|G\|_{\infty_{\text{ind}}} = \sup_{\|u\|_\infty \neq 0} \frac{\|y\|_\infty}{\|u\|_\infty} = \|g\|_1.$$

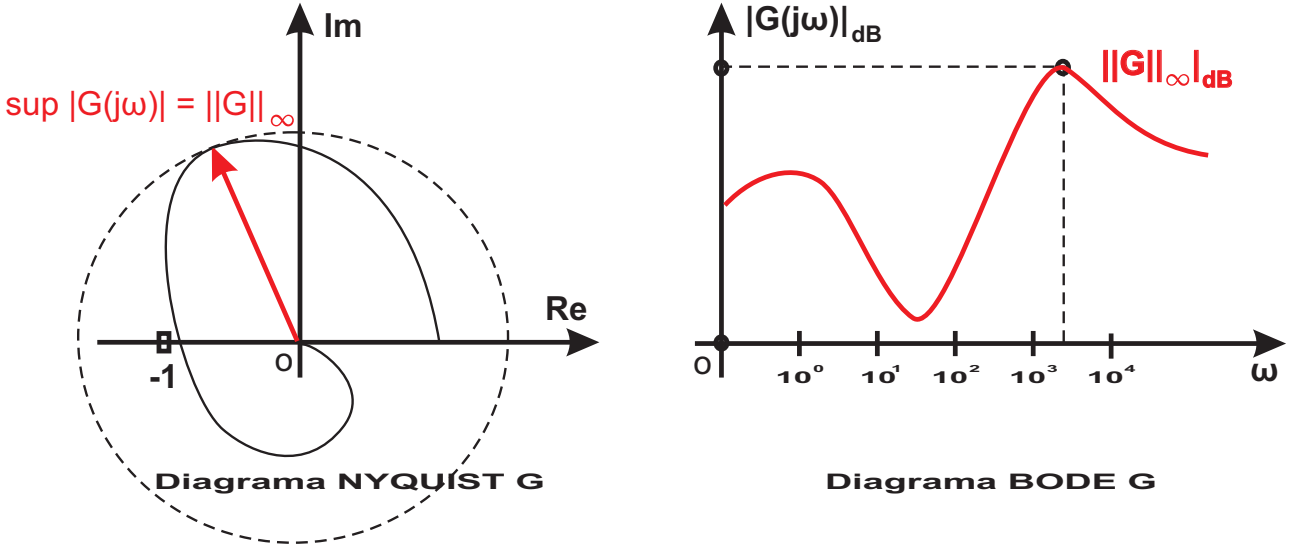
Toate aceste evaluări **cantitative** între normele semnalelor de intrare, ieșire și diferite norme sistemice joacă un rol important în metodele moderne de sinteză ale sistemelor de reglare automată, deoarece **normele sistemice** "controlează" d.p.d.v. cantitativ transferul intrare-ieșire, evaluat prin intermediul diverselor norme ale semnalelor de intrare și ieșire:

$$\|y\|_2 \leq \|G\|_\infty \, \|u\|_2$$
$$\|y\|_\infty \leq \|g\|_1 \, \|u\|_\infty$$

# Localizarea normei $L^\infty$ pe diagramele Bode

## Lema 1

*Norma $L^\infty$ este finită dacă și numai dacă $G$ este proprie și nu are poli pe axa imaginară.*



1 Introducere

2 Reprezentarea sistemelor continue în frecvență
- Diagrame Bode
- Norma $\infty$ a unui sistem

3 Reprezentarea sistemelor discrete în frecvență

# Reprezentarea discretă în frecvență

Deoarece $H(z) = \mathcal{Z}\{h(k)\}(z)$, unde $h$ este functia pondere a sistemului,

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h(k)e^{-j\omega k} = \hat{h}(\omega),$$

transformata Fourier discretă a lui $h$.
Arătăm că $\hat{h}(\omega)$ este răspunsul în frecvență al sistemului $y = h * u$, $u(k) = e^{j\omega k}$.

$$y(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h(k)u(n-k) = \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} h(k)e^{-j\omega k}\right] e^{j\omega n} = \widehat{h}(\omega)\, u(n) \Rightarrow$$

$$H(e^{j\omega}) = U(\omega) + j\, V(\omega) = |H(e^{j\omega})|\, e^{j\arg[H(e^{j\omega})]}.$$

Caractreristicile de frecvență Bode sunt similare celor din cazul continuu, cu mențiunea că $H(e^{j\omega})$ este o funcție *periodică* de perioadă $T = 2\pi$. Pulsația se găsește într-un interval *finit*, de exemplu $[0, \pi]$ – similar cu $[0, \infty]$ în cazul continuu.

$$\overline{H(e^{j\omega})} = U(\omega) - jV(\omega) = H(\overline{e^{j\omega}}) = H(e^{-j\omega}) = U(-\omega) + jV(-\omega).$$

# Reprezentarea discretă în frecvență

Se poate, de asemenea, introduce un „echivalent" de tip continuu al reprezentărilor în frecvență, cu ajutorul transformării omografice inverse $\leftarrow$ pentru sisteme cauzale.
Pe scurt,

$$s = \left.\frac{z-1}{z+1}\right|_{z=e^{j\omega}} = j\,\tan\frac{\omega}{2} =: j\,\eta.$$

Așadar, punând $\omega = 2\cdot \mathrm{arctg}\eta \Longrightarrow$ echivalentul continuu

$$\widehat{H}(j\eta) = H(z)|_{z=\frac{1+j\eta}{1-j\eta}} = \left.\widehat{H}(s)\right|_{s=j\eta},\ \widehat{H}(s) = H(z)|_{z=\frac{1+s}{1-s}}\ .$$

**Concluzii:** Cum desenăm caracteristica de frecvență a unui sistem discret?

- $H(z)$ are coeficienți reali $\Rightarrow$ desenăm doar pentru

$$\omega \in [0,\pi] \Leftrightarrow \frac{\omega}{\pi} \in [0,\ 1] \leftarrow \text{pulsația normalizată.}$$

- Valoarea principală a fazei este $\arg[H(e^{j\omega})] \in [-\pi,\ \pi]$.

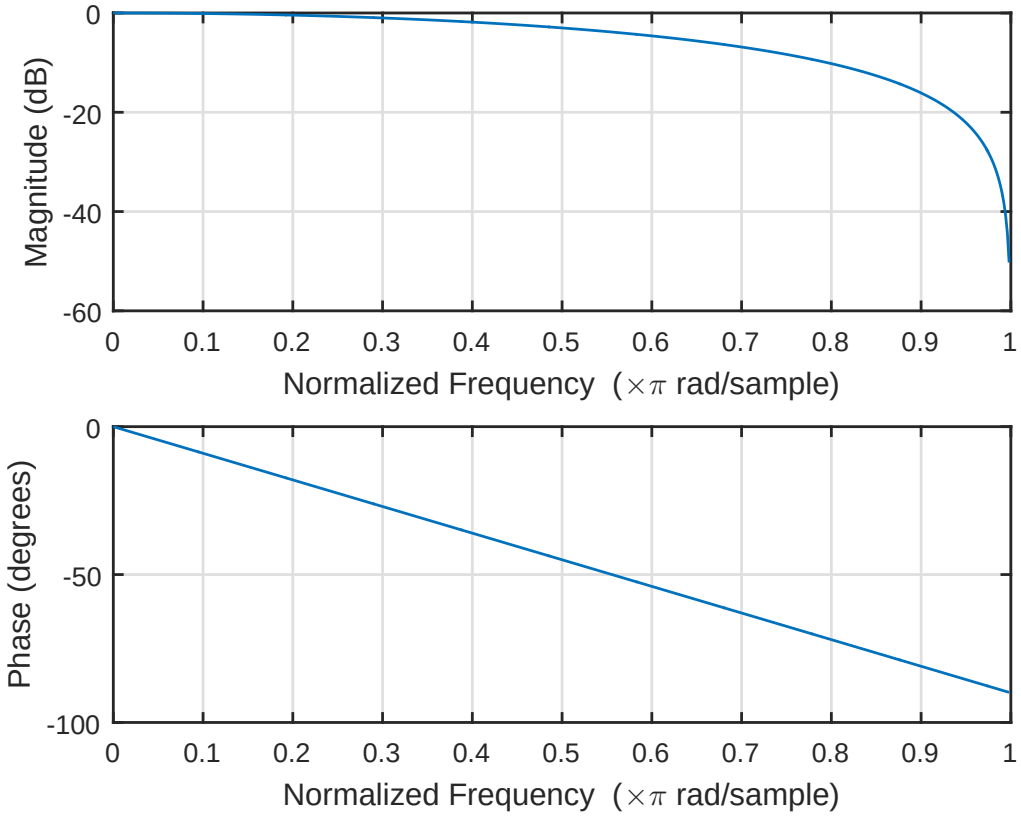
# Exemplul 1: Media a două eșantioane

Considerăm un filtru discret cu răspuns finit la impuls (FIR)

$$y(n) = \frac{1}{2}[u(n) + u(n-1)] \Rightarrow H(z) = \frac{1}{2}(1 + z^{-1}) = \frac{1}{2}\frac{z+1}{z}.$$

Analizăm
răspunsul în frecvență al sistemului.

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{1}{2}(1 + e^{-j\omega}) \\ &= e^{\frac{-j\omega}{2}} \frac{e^{\frac{j\omega}{2}} + e^{\frac{-j\omega}{2}}}{2} \\ &= \cos\frac{\omega}{2} e^{\frac{-j\omega}{2}}. \end{aligned}$$




Caracteristici:

- Amplitudine $|H(\omega)| = \cos\frac{\omega}{2}$; fază $\arg(H) = -\frac{\omega}{2}$.
- Pentru $u = e^{j\cdot 0\cdot n} = 1 \Rightarrow$ $y(n) = 1 \Leftrightarrow \widehat{h}(e^{0j}) = H(0) = 1$.
- Pentru $u = e^{j\pi n} = (-1)^n \Rightarrow$ $y(n) = 0 \Leftarrow \widehat{h}(e^{j\pi}) = H(\pi) = 0$.

# Interpretare

- Pentru $u(n) = e^{j\cdot 0\cdot n} = 1 \Rightarrow y(n) = 1$. Amplificarea staționară $H(1) = 1$.
- Pentru $u(n) = e^{j\cdot \pi\cdot n} = (-1)^n \Rightarrow y(n) = 0$. Amplificarea $H(-1) = 0$.
- Pentru $u(n) = e^{j\cdot \frac{\pi}{2}\cdot n} \Rightarrow$

$$H(e^{j\frac{\pi}{2}}) = \cos\frac{\pi}{4}e^{-j\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$$
$$\Rightarrow y(n) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{2}n-\frac{\pi}{4}}.$$

- Luând partea reală, pentru $u(n) = \cos\frac{n\pi}{2} \Rightarrow$

$$y(n) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

# Exemplul al doilea: Sistemul medie pe $M$ eșantioane

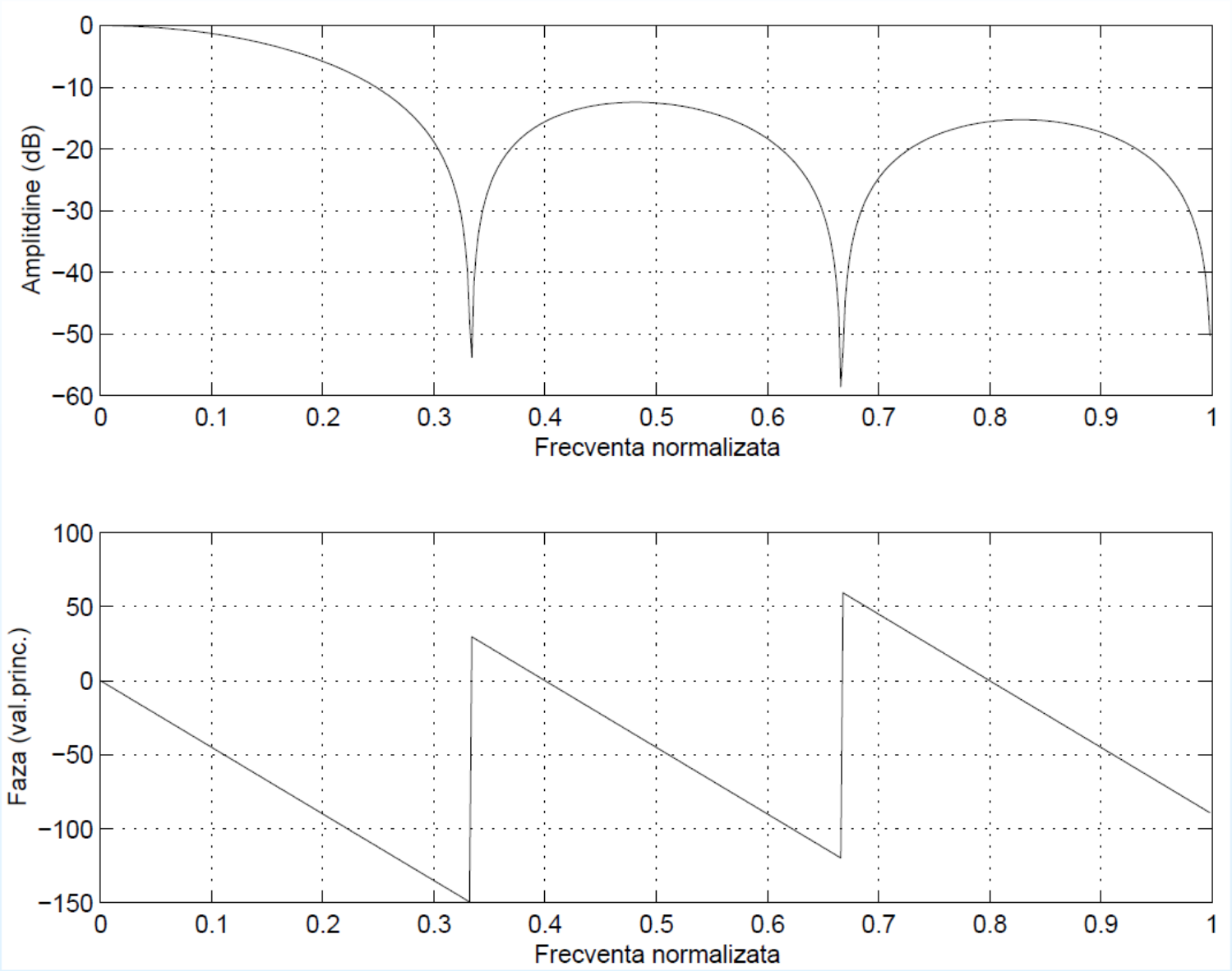
$$y(n) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} u(n-k) = \frac{u(n)+u(n-1)+\cdots+u(n-M+1)}{M}.$$

Funcția de transfer: $H(z) = \dfrac{1}{M}\dfrac{z^{M-1}+z^{M-2}+\cdots+1}{z^{M-1}} = \dfrac{1}{M}\dfrac{1-z^{-M}}{1-z^{-1}}$.

Răspunsul în frecvență: $H(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{M}\dfrac{1-e^{-j\omega M}}{1-e^{-j\omega}}$. Dând factori comuni pe $e^{-\frac{j\omega M}{2}}$ la numărător și pe $e^{-\frac{j\omega}{2}}$ la numitor $\Longrightarrow H(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{M}\dfrac{\sin\frac{\omega M}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}e^{-\frac{j\omega(M-1)}{2}}$.

- Amplitudinea: $|H(e^{j\omega})| = \dfrac{1}{M}\left|\dfrac{\sin\frac{\omega M}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}\right|$.
- $\sin\dfrac{\omega}{2} > 0$ pentru $\omega \in [0,\pi]$, dar semnul lui $\sin\dfrac{\omega M}{2}$ variază.
- Deoarece $-1 = e^{-j\pi}$, faza este $\begin{cases} -\dfrac{\omega(M-1)}{2}, & \sin\dfrac{\omega M}{2} \geq 0, \\ -\dfrac{\omega(M-1)}{2} - \pi, & \sin\dfrac{\omega M}{2} < 0. \end{cases}$

# Sistemul de medie pe 6 eșantioane



# Exemplul al treilea: Filtrul de medie alunecătoare

Funcția de transfer: $H(z) = \frac{1}{3}\left(z + 1 + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{3}\frac{z^2 + z + 1}{z}$.

Răspunsul în frecvență: $H(e^{j\omega}) = \frac{1}{3}(e^{j\omega} + e^{-j\omega} + 1) = \frac{1}{3}(2\cos\omega + 1)$.

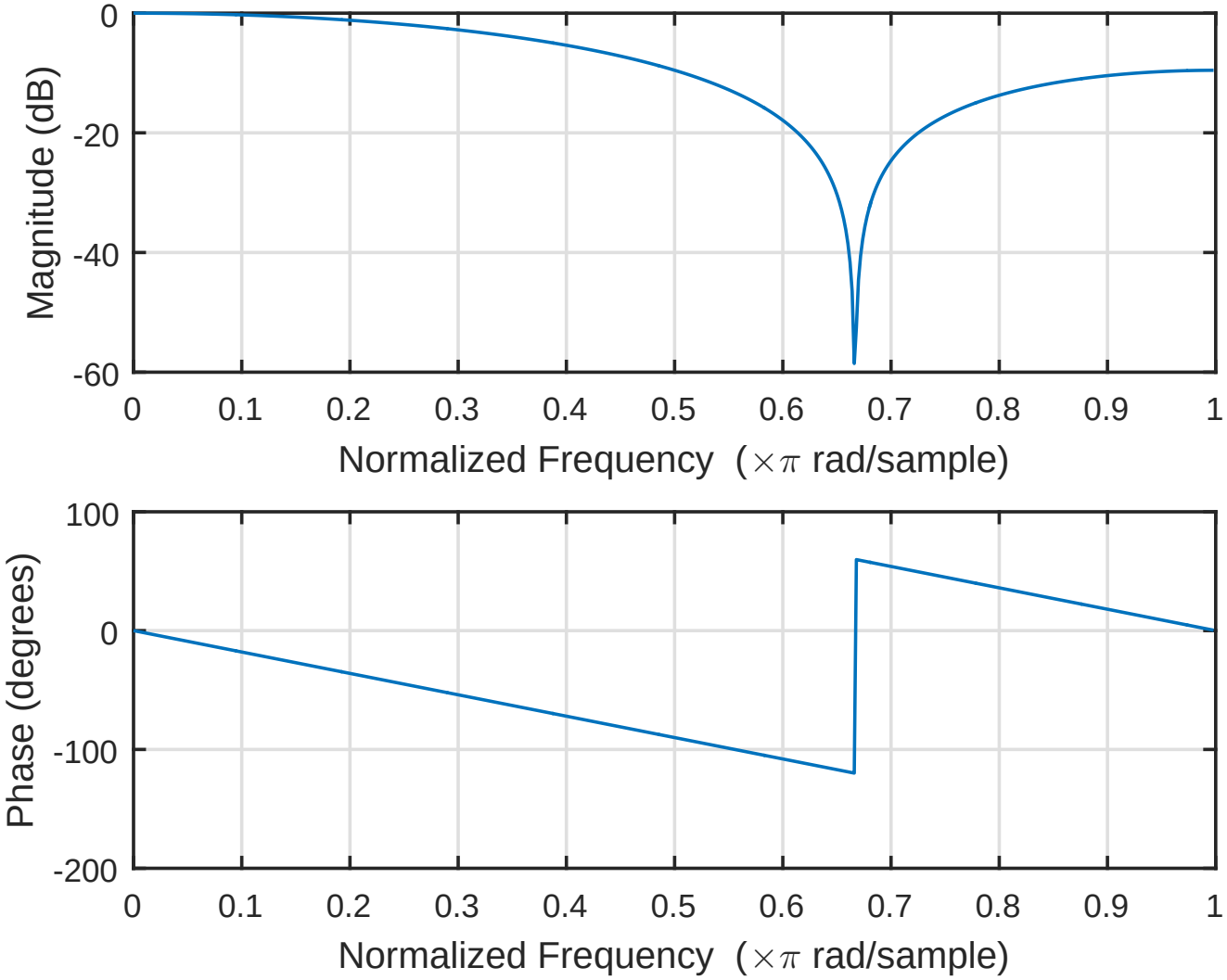
## Observația 3

Pe intervalul $[0, \pi]$, $2\cos\omega + 1 > 0$, pentru $\omega < \frac{2\pi}{3}$.

Prin urmare, $H(e^{j\omega}) = \begin{cases} (2\cos\omega + 1)e^{j\cdot 0}, & \omega \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right], \\ (2\cos\omega + 1)e^{-j\cdot\pi}, & \omega \in \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right], \end{cases}$.

- Amplitudinea: $|H(e^{j\omega})| = |2\cos\omega + 1|$,
- Faza: $\arg[H(e^{j\omega})] = \begin{cases} 0, & \omega \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right], \\ -\pi, & \omega \in \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]. \end{cases}$

# Filtrul de medie alunecătoare: caracteristica în frecvență




Pentru sisteme/filtre discrete în Matlab: `freqz(num,den)`.

# Filtrul de MA: trasarea manuală

Deoarece filtrul este *ne*cauzal, nu se aplică transformarea omografică per se. Totuși, observăm că

- $H(z) = z\widetilde{H}(z)$, $\widetilde{H}(z) = \frac{1}{3}(1 + z^{-1} + z^{-2}) = \frac{1}{3}\frac{z^2 + z + 1}{z^2} \leftarrow$ cauzal. Mai mult, $y(k) = x(k+1)$, unde $x(k)$ este răspunsul sistemului $\widetilde{H}(z)$ la $u(k)$, i.e., $X(z) = \widetilde{H}(z)U(z)$.
- Prin urmare,
$$H(e^{j\omega}) = e^{j\omega}\widetilde{H}(e^{j\omega}).$$

Rezultă că

- $|H(e^{j\omega})| = |\widetilde{H}(e^{j\omega})|$;
- $\arg[H(e^{j\omega})] = \omega + \arg[\widetilde{H}(e^{\omega})]$.

**Concluzie:** Pentru trasarea manuală, aplicăm transformarea omografică lui $\widetilde{H}(z)$ și desenăm caracterisitcile de frecvență ale $\widehat{H}(s) = \widetilde{H}(z)\Big|_{z=\frac{1+s}{1-s}}$. În final, la caracteristica de fază adăugăm $\omega$.
Pentru exemplul nostru, la tablă, sau temă.

# Reglare automată–compensatorul PID. Discretizare

**Tudor C. Ionescu**, Monica Pătrașcu

Dept. de Automatică și Ingineria Sistemelor (ACSE),
Facultatea de Automatică și Calculatoare,
Universitatea Politehnică din București

e-mail: `tudor.ionescu@acse.pub.ro`

URL: `http://acse.pub.ro/person/tudor-cornel-ionescu/`

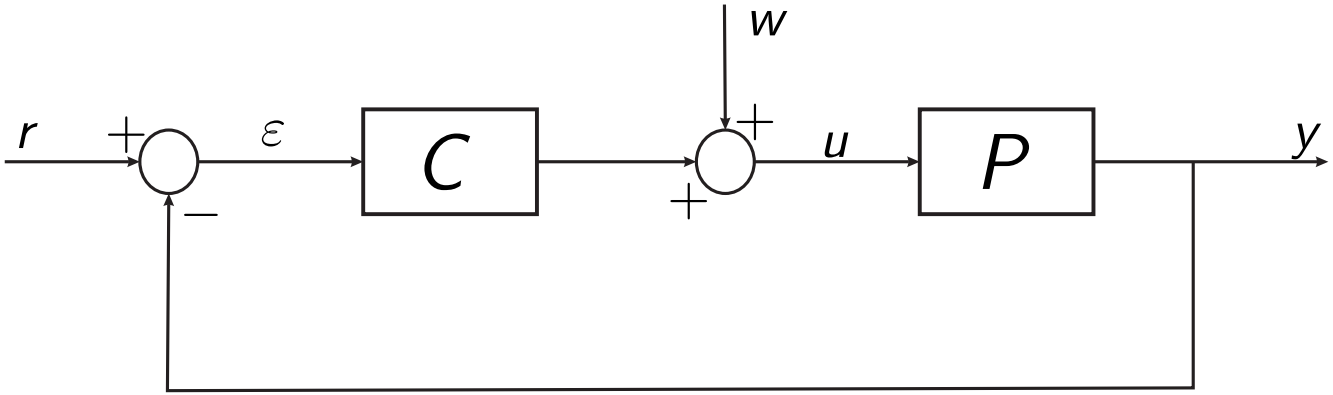
noiembrie 2019

1 Introducere
- Studiu de caz: Controlul vitezei de translație și al poziției unui roboțel mobil
- Schema de control în buclă deschisă

2 Control în buclă închisă – PID
- Schema de control în buclă închisă
- Stabilitatea internă a buclei de reacție
- Performanțele de regim staționar - Principiul modelului intern
- Regulatorul proporțional-integrator-derivativ PID
- Acordarea regulatoarelor

3 Discretizarea sistemelor cu timp continuu
- Eșantionare, discretizare
- Discretizarea PID

# Introducere




Control în buclă închisă pentru

i) stabilizare;

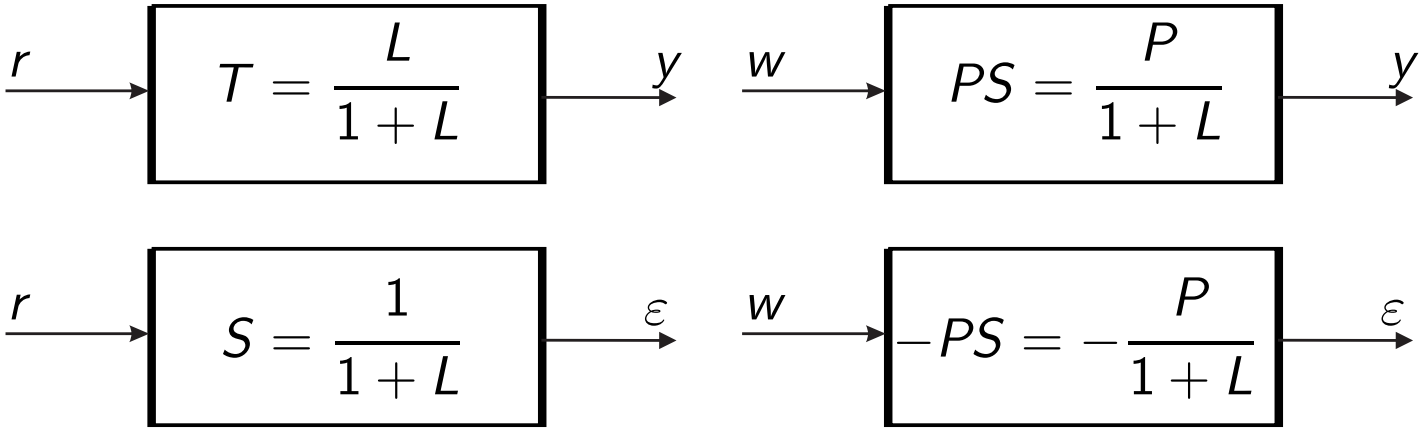
ii) performanțe în regim staționar = urmărirea referinței $r$+ rejecția peturbației $w$ la o referință constantă (treaptă), ieșirea sistemului în b.î. converge către valoarea dorită (amplificată cu DC gain) indiferent de perturbațiile/sarcina care afectează sistemul (e.g., sarcină = încărcarea pe motorul de c.c.);

iii) performanțe de regim tranzitoriu: suprareglaj, timp tranzitoriu[1] etc. bune.

[1] Definite în Cap. 3.

# Introducere–reformulare sistemică

Funcțiile de transfer ale bucle închise sunt[2]




unde

$$L(s) = P(s)C(s).$$

Calculăm $C(s)$ a.î.

i) să asigurăm stabilitatea internă a buclei $\Rightarrow$ $T(s)$ stabilă și $S(s)$ stabilă.

ii) performanțe în regim staționar $= y_p \approx T(0)r, \forall w$ dintr-o clasă de semnale (de obicei aceeași din care face parte și $r$). Echivalent $\varepsilon_p = 0, \ \forall w$;

iii) performanțe de regim tranzitoriu: suprareglaj, timp tranzitoriu bune.

[2] TEMĂ: Calculați-le folosind conexiunile sistemelor, Cap. 2.

# Introducere: întrebări naturale despre sistemul în b. î.

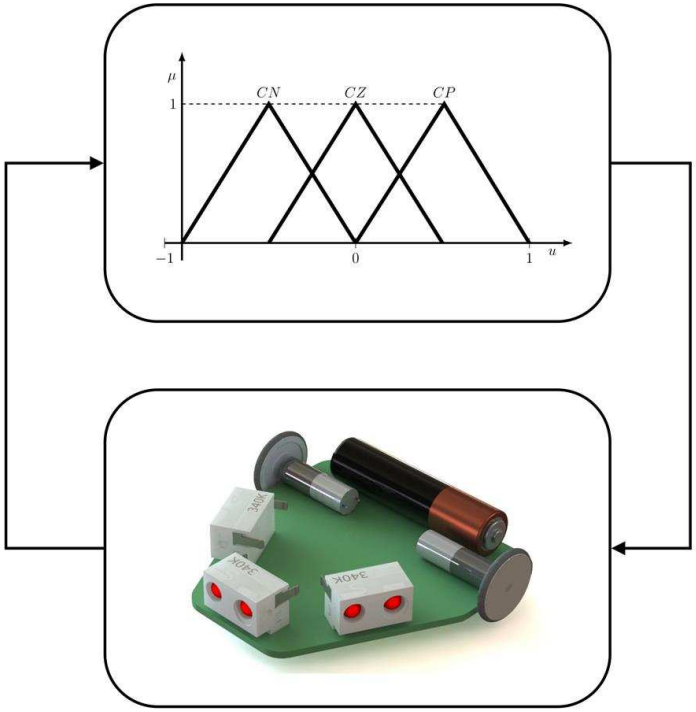
- Este suficient un simplu compenator $C = K > 0$? Nu, deoarece nu poate elimina neapărat erorile sau face față unor perturbații/sarcini mai serioase.
- Care este varianta simplă și la îndemână? Varianta utilizată cu precădere în industrie, pentru procese de ordin I și II (clasă largă) este varianta PID și derivatele sale.
- Este cea mai bună? Nu, dar este foarte răspândită și implementată. Are limitări, nu e robust. Există algoritmi avansați de reglare,
  - bazați pe concepte de tip analiză (a răspunsului) în frecvență (al lui $L(s)$);
  - bazați pe analiza *matriceală* a sistemelor dinamice pe spațiul stărilor $\leftarrow$ Cap. 8 – compensatorul Kalman.
- Noi ce studiem? Bazele reglării, unde PID este relevant atât dpdv didactic, cât și practic $\leftarrow$ aplicație directă a cap 3 $\leftarrow$ studiu de caz!

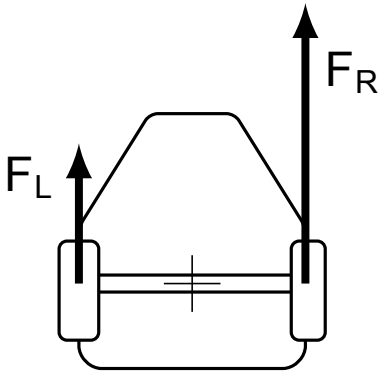
1 Introducere
- Studiu de caz: Controlul vitezei de translație și al poziției unui roboțel mobil
- Schema de control în buclă deschisă

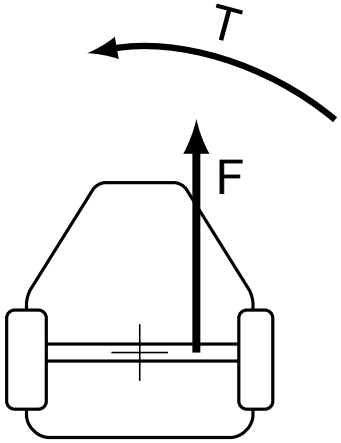
2 Control în buclă închisă – PID
- Schema de control în buclă închisă
- Stabilitatea internă a buclei de reacție
- Performanțele de regim staționar - Principiul modelului intern
- Regulatorul proporțional-integrator-derivativ PID
- Acordarea regulatoarelor

3 Discretizarea sistemelor cu timp continuu
- Eșantionare, discretizare
- Discretizarea PID

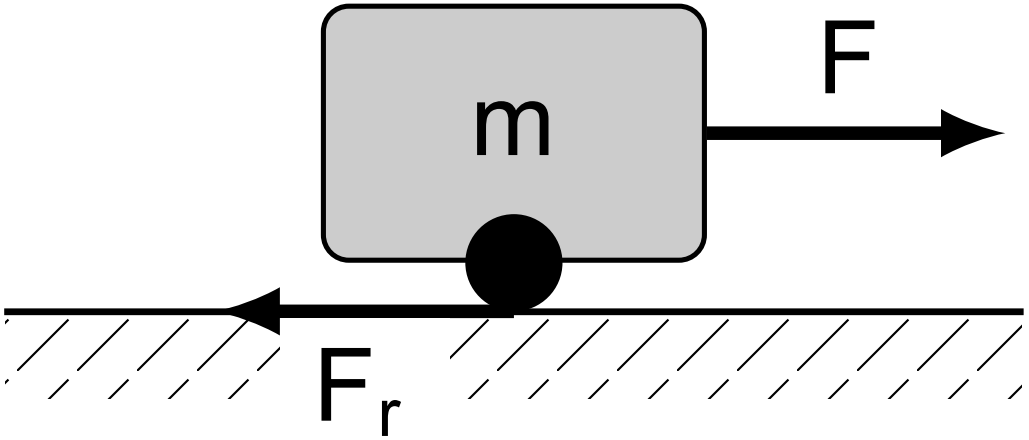
# Robețel–neliniar (no formulae)



# Roboțel–model liniarizat




$\longmapsto$ x (poziție)

$\longmapsto$ $\dot{x} = v$ (viteză)

# Roboțelul: funcția de transfer

$$\boxed{Y(s) = \frac{K_1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} U(s) + \frac{K_2}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} W(s)}^{3},$$

unde $\tau_{1,2}$ sunt constante de timp și $K_{1,2}$ sunt amplificări care depind de parametrii electromecanici ai robotului.

### Observația 1

În general, dacă $\tau_1 \gg \tau_2$, acestea pot avea și semnificații specifice, respectiv, $\tau_1$ constanta de timp mecanică, iar $\tau_2$ constantă de timp electrică.

Sistemul este stabil $\Rightarrow$ răspunsul în timp are regim permanent și regim tranzitoriu.

Pentru $u$ și $w$ constante $\Longrightarrow$ în regim staționar

$$y_p = K_1 u + K_2 w.$$

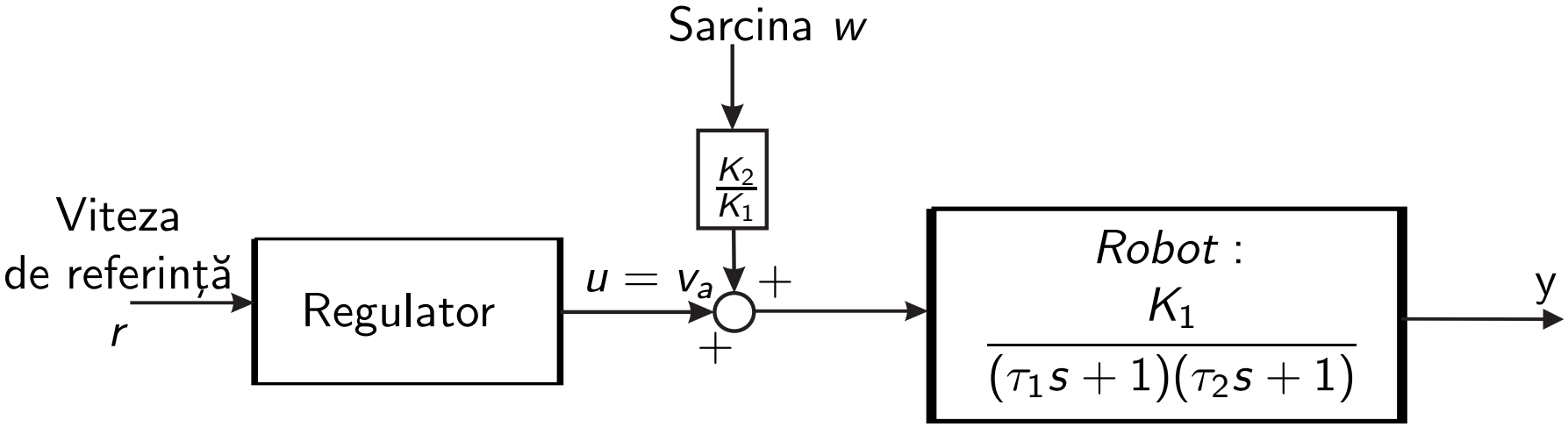
[3] M. Pătrașcu, T. C. Ionescu și F. Stoican, *Sisteme de conducere pentru roboți mobili*, Politehnica Press, 2018.

1 Introducere
- Studiu de caz: Controlul vitezei de translație și al poziției unui roboțel mobil
- Schema de control în buclă deschisă

2 Control în buclă închisă – PID
- Schema de control în buclă închisă
- Stabilitatea internă a buclei de reacție
- Performanțele de regim staționar - Principiul modelului intern
- Regulatorul proporțional-integrator-derivativ PID
- Acordarea regulatoarelor

3 Discretizarea sistemelor cu timp continuu
- Eșantionare, discretizare
- Discretizarea PID

# Reglare în buclă deschisă (open-loop control)




- Regulator $C(s) = K > 0 \Rightarrow u = Kr \leftarrow$ comanda.
- $K$ este determinat de regimul staționar $y_p = K_1 u + K_2 w$, atunci când sarcina nu este prezentă $\Rightarrow K = \dfrac{1}{K_1}$.

**Concluzie:** Când nu există sarcină, în regim staționar, obținem performanța $y_p = K_1 u = K_1 \frac{1}{K_1} r = r$.

**Q:** Dacă punem o sarcină constantă $w$? Atunci $y_p - r = \epsilon_p = K_2 w \neq 0$, i.e., sensibilitatea sistemului la perturbații este foarte mare, i.e., la orice perturbație eroarea devine nenulă.

**Q:** Cum descreștem această sensibilitate? altfel spus, cum rejectăm perturbația?

În buclă închisă!

1 Introducere
- Studiu de caz: Controlul vitezei de translație și al poziției unui roboțel mobil
- Schema de control în buclă deschisă

2 Control în buclă închisă – PID
- Schema de control în buclă închisă
- Stabilitatea internă a buclei de reacție
- Performanțele de regim staționar - Principiul modelului intern
- Regulatorul proporțional-integrator-derivativ PID
- Acordarea regulatoarelor

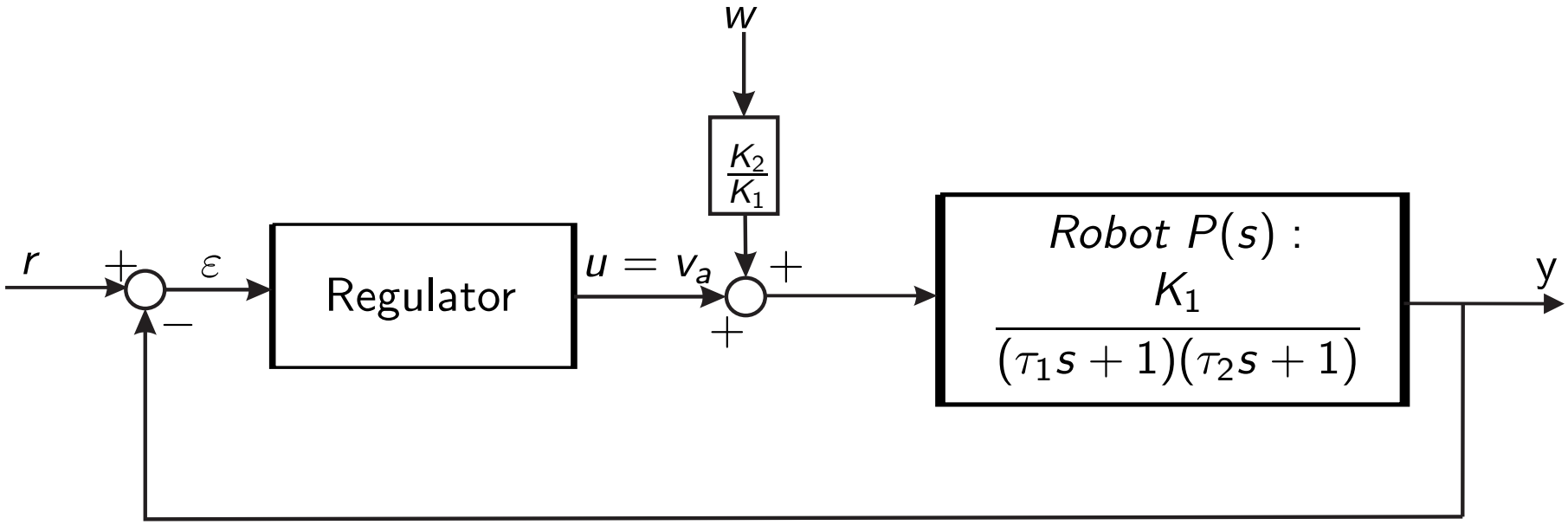
3 Discretizarea sistemelor cu timp continuu
- Eșantionare, discretizare
- Discretizarea PID

1 Introducere
- Studiu de caz: Controlul vitezei de translație și al poziției unui roboțel mobil
- Schema de control în buclă deschisă

2 Control în buclă închisă – PID
- Schema de control în buclă închisă
- Stabilitatea internă a buclei de reacție
- Performanțele de regim staționar - Principiul modelului intern
- Regulatorul proporțional-integrator-derivativ PID
- Acordarea regulatoarelor

3 Discretizarea sistemelor cu timp continuu
- Eșantionare, discretizare
- Discretizarea PID

# Control în buclă închisă – closed-loop. Ce dorim?



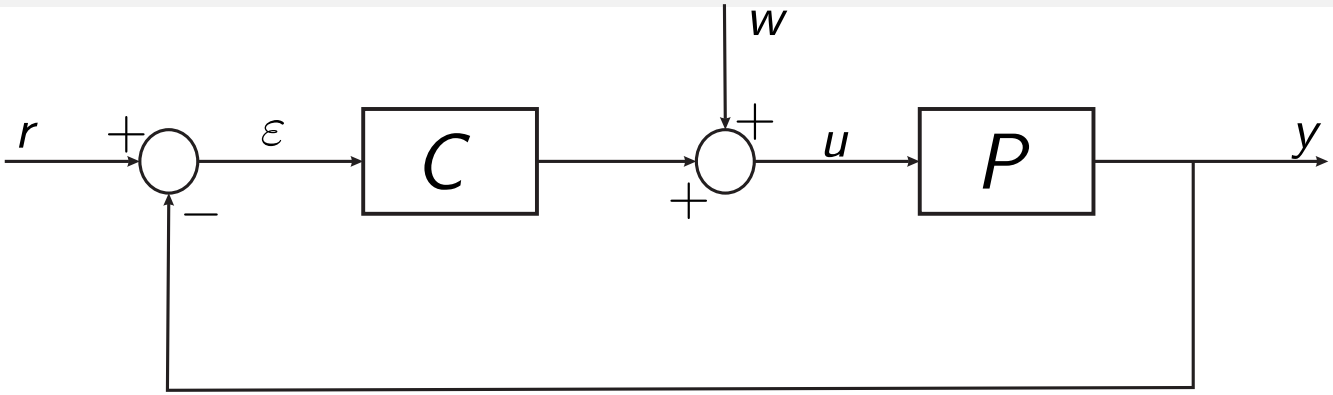

- Stabilitate în buclă închisă.
- Urmărirea referinței $r$ ← de obicei constantă, e.g., treaptă unitară.
- Rejecția perturbației $w$ ← semnale uzuale sau semnale din alte clase.
- Performanțe de regim tranzitoriu, i.e., limitarea suprareglajului, timp tranzitoriu etc. (vezi și Cap. 3).
- Implementabilitate fizică, i.e., regulatorul e o funcție de transfer (strict) proprie.
- Implementarea pe o mașină de calcul, i.e., discretizarea ← fără afectarea performanțelor.

1 Introducere
- Studiu de caz: Controlul vitezei de translație și al poziției unui roboțel mobil
- Schema de control în buclă deschisă

2 Control în buclă închisă – PID
- Schema de control în buclă închisă
- Stabilitatea internă a buclei de reacție
- Performanțele de regim staționar - Principiul modelului intern
- Regulatorul proporțional-integrator-derivativ PID
- Acordarea regulatoarelor

3 Discretizarea sistemelor cu timp continuu
- Eșantionare, discretizare
- Discretizarea PID

# Stabilitate internă




## Definiția 2

Un sistem în buclă de reacție (negativă) este intern stabil dacă și numai dacă toate funcțiile de transfer care apar în bucla de reacție sunt stabile.

Pentru configurația din figură, bucla este intern stabilă $\Leftrightarrow T_{yr} = T = \dfrac{PC}{1+PC}$ e stabilă, $T_{\varepsilon r} = S = 1 - T = \dfrac{1}{1+PC}$ e stabilă, $T_{yd} = PS = \dfrac{P}{1+PC}$ e stabilă și $T_{ur} = CS = \dfrac{C}{1+PC}$ e stabilă.

*Motivația inginerească:* Trebuie asigurat că transferul de la orice semnal (perturbație) injectat (apărută) în buclă la orice semnal din buclă nu destabilizează sistemul.

1 Introducere
- Studiu de caz: Controlul vitezei de translație și al poziției unui roboțel mobil
- Schema de control în buclă deschisă

2 Control în buclă închisă – PID
- Schema de control în buclă închisă
- Stabilitatea internă a buclei de reacție
- Performanțele de regim staționar - Principiul modelului intern
- Regulatorul proporțional-integrator-derivativ PID
- Acordarea regulatoarelor

3 Discretizarea sistemelor cu timp continuu
- Eșantionare, discretizare
- Discretizarea PID

# Principiul modelului intern (PMI)

Pentru a satisface condițiile de performanță în regim staționar, trebuie ca modelul exogenului să se regăsească într-o formă explicită pe calea directă în modelul procesului sau al compensatorului.

## Teorema 3 (Principiul Modelului Intern)

*Fie $T = L/(1+L)$ o funcție de transfer în b.î., unde $L = PC$, $R = r_r/p_r$ funcția de transfer a referinței $r$ și $W = r_w/p_w$ funcția de transfer a perturbației $w$, cu $r_r$, $r_w$ și $p_r$, $p_w$ polinoame. Presupunem că $R$ și $W$ sunt instabile, i.e., $r$ și $w$ sunt semnale* persistente *(vezi Cap. 3). În ipoteza că $C$ este un compensator stabilizator, i.e., $T$ este stabilă $\Leftrightarrow S = 1 - T$ este stabilă, atunci*

i) *Referința $r$ este urmărită $\Leftrightarrow \varepsilon_p = y_p - r = 0 \Leftrightarrow L = \widetilde{L} \cdot \dfrac{1}{p_r} \Leftrightarrow$ polii lui $R$ sunt printre polii lui $L$ $\Leftrightarrow$ polii lui $R$ sunt printre zerourile lui $S$;*

ii) *Perturbația $w$ este rejectată $\Leftrightarrow y_p|_{r=0} = 0, \forall w \neq 0 \Leftrightarrow$ polii lui $W$ sunt printre zerourile lui $PS = \dfrac{P}{1+PC} \Leftrightarrow$ polii lui $W$ sunt printre zerourile lui $P$ sau polii lui $C$.*

1 Introducere
- Studiu de caz: Controlul vitezei de translație și al poziției unui roboțel mobil
- Schema de control în buclă deschisă

2 Control în buclă închisă – PID
- Schema de control în buclă închisă
- Stabilitatea internă a buclei de reacție
- Performanțele de regim staționar - Principiul modelului intern
- Regulatorul proporțional-integrator-derivativ PID
- Acordarea regulatoarelor

3 Discretizarea sistemelor cu timp continuu
- Eșantionare, discretizare
- Discretizarea PID

# Regulatoare de tip PID

Majoritatea sistemelor de reglare automată din industrie funcționează cu regulatoare PID.

- Structură simplă, ușor de implementat.
- Implică acordarea a trei parametrii: $\{K, T_i, T_d\}$, sau $\{K, K_i, K_d\}$.
  - Legea de comandă: $\boxed{u(t) = K\left(\varepsilon(t) + \frac{1}{T_i}\int_0^t \varepsilon(\tau)d\tau + T_d\dot{\varepsilon}\right)}$, sau

$$\boxed{u(t) = \underbrace{K\varepsilon(t)}_{\text{proporțional}} + \underbrace{K_i\int \varepsilon(t)\mathrm{d}t}_{\text{integral}} + \underbrace{K_d\dot{\varepsilon}}_{\text{diferențial}}}.$$

  - Regulator: $C(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$, sau $C(s) = K + \frac{K_i}{s} + K_d s$.
  - Implementabilitate: introducem un filtru foarte rapid pe componenta D: $\frac{T_d s}{\alpha T_d s + 1}$, unde $\alpha \ll 1$, a.î. constanta de timp a filtrului să fie (neglijabilă) cu mult mai mică decât $K \leftarrow$ răspuns aproape instantaneu al filtrului.

# Regulatoare PID - avantaje vs. limitări

| Componentă | Avantaje | Limitări |
|---|---|---|
| $K$ | Cu cât crește, $\varepsilon_p$ scade. | Foarte mare, destabilizează sistemul. |
| $K_i$, $T_i$ | $\varepsilon_p = 0$ la treaptă, $\varepsilon_p$ ct. la rampă. | Reduce rezerva de stabilitate. Răspuns dinamic lent. |
| $K_d$, $T_d$ | Anticipează evoluția erorii. Corectează oscilațiile, îmbunătățind performanțele de regim tranzitoriu. Nu are efect asupra regimului staționar. | Sensibilă la zgomote. |

**Roboțelul: plasarea polilor b.î.** Polii lui $T(s)$ sunt soluțiile ecuației

$$\tau_1\tau_2 T_i s^3 + T_i(\tau_1 + \tau_2 + K_1 K T_d)s^2 + T_i(1 + K_1 K)s + K_1 K = 0.$$

Analiză: Avem trei grade de libertate pentru a încerca plasarea cât mai bună a polilor $\leftarrow$ criterii de acordare a PID.

# Aplicație a PMI: performanța staționară cu regulator PI

Știm că $R(s) = \dfrac{1}{s} \Rightarrow s = 0$ este pol al lui $R$.

$L(s) = P(s)\left(K + \dfrac{K_i}{s}\right) = P(s)\dfrac{sK + K_i}{s} \Rightarrow s = 0$ este pol al lui $L$.

Astfel,

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} = \frac{1}{1 + P(s)\frac{sK+K_i}{s}} = \frac{s}{s + P(s)(sK + K_i)}.$$

Prin urmare $s = 0$ este zerou al lui $S(s) \Leftrightarrow S(0) = 0$. Presupunând că $K$ și $K_i$ sunt aleși astfel încât $S$ este stabilă, conform PMI, $\varepsilon_p = 0$.

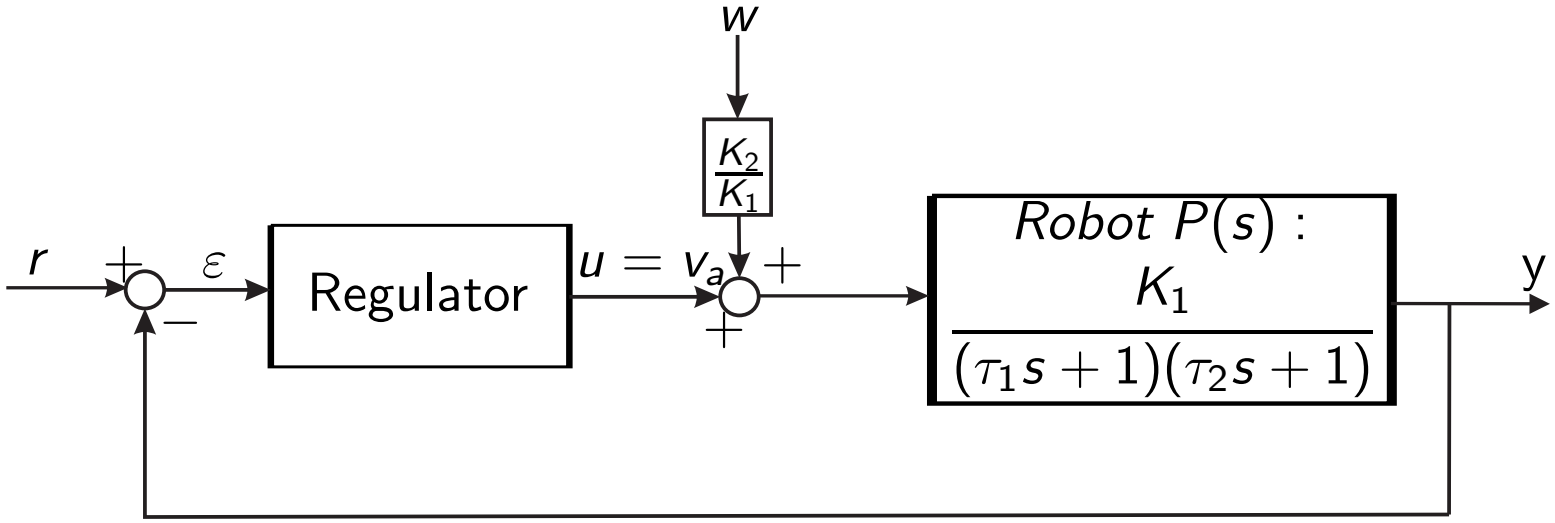
*Demonstrație:* Deoarece sistemul în b.î. este stabil, aplicăm TVF $\Rightarrow$

$$\varepsilon_p = \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) \overset{\text{TVF}}{=} \lim_{s\to 0} s \cdot \underbrace{S(s) \cdot R(s)}_{\varepsilon(s)} = \lim_{s\to 0} s \cdot S(s) \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} S(s).$$

Deoarece $S$ este stabilă, nu are poli în origine $\Rightarrow S$ este continuă în zero. În concluzie,

$$\varepsilon_p = S(0) = 0.$$

# Aplicație: reglarea vitezei roboțelului




Roboțel (proces):

$$P(s) = \frac{1}{(s+2)(s+8)} = \frac{r(s)}{p(s)},$$

cu constantele de timp $\tau_1 = 0.5$ și $\tau_2 = 0.125$ și amplificarea $K_1 = 0.0625$.

Se cer următoarele performanțe ale SRA:

1. Eroare staționară *zero* la referință treaptă.
2. Suprareglaj mai mic de 5%.
3. Timp tranzitoriu mai mic de 1.5 sec.
4. Eroare staționară mai mică de 25% la referință de tip rampă.

# Alegerea regulatorului: de tip PI

- Regulatorul:

$$C(s) = K + \frac{K_i}{s} = \frac{Ks + K_i}{s} = \frac{r_c(s)}{s}, \quad \text{cu} \quad r_c(s) = Ks + K_i.$$

- În regim staționar, deoarece avem PI $\Rightarrow \varepsilon_{st,\text{treaptă}} = 0$ datorită integratorului.
- Despre performanța staționară la sarcină rampă.

**Demonstrație**.

$$\varepsilon(s) = T_{\varepsilon r}(s)R(s) = S(s)R(s) = \frac{1}{1 + P(s)C(s)}R(s) = \frac{s}{s + P(s)r_c(s)}R(s),$$

unde $R(s) = 1/s$, sau $R(s) = 1/s^2$, iar cerințele de regim staționar sunt cuantificate (TVF) în forma[4]

$$(a) : \varepsilon_{st,\text{treaptă}}(\infty) = \lim_{s\to 0} s\, S(s)\, \frac{1}{s} = S(0) = \left.\frac{s}{s + P(s)r_c(s)}\right|_{s=0} = 0,$$

$$(d) : \varepsilon_{p,\text{rampă}}(\infty) = \lim_{s\to 0} s\, S(s)\, \frac{1}{s^2} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s + P(s)r_c(s)} = \frac{1}{P(0)r_c(0)} = \frac{16}{K_i} < \frac{1}{4}.$$

[4] Recall aplicarea PMI la regulatorul PI.

# Performanțe de regim staționar

**Stabilitate**. Polinomul caracteristic în buclă închisă este

$$\chi(s) = r(s)r_c(s) + p(s)p_c(s) = s^3 + 10s^2 + (16 + K)s + K_i.$$

Aplicând criteriul Hurwitz (polinom de gradul 3), rezultă că stabilitatea este asigurată de inegalitățile

$$K_i > 0, \;\; 10(K + 16) - K_i > 0 \iff K_i > 0, \;\; K > \frac{K_i}{10} - 16.$$

**Erori staționare**. Cerința (a) este automat în deplinită prin prezența componentei integrale, iar cerința (d) $\Rightarrow$

$$\frac{16}{K_i} < \frac{1}{4} \iff K_i > 64 > 0.$$

# Performanțe de regim tranzitoriu

Acestea se vor impune celor doi **poli dominanți** ai sistemului în buclă închisă. Utilizăm deci evaluările indicatorilor de performanță deduse pentru sistemele de ordin 2.

Pe de o parte, din $t_t \leq 1.5$ rezultă $\zeta\omega_n > \dfrac{4}{1.5} = 2.6$, adică $\operatorname{Re} p < -2.6$. Pe de altă parte, $\sigma < 5\%$ implică $\zeta \geq 0.7$ - vezi tabelul din Cap. 3.

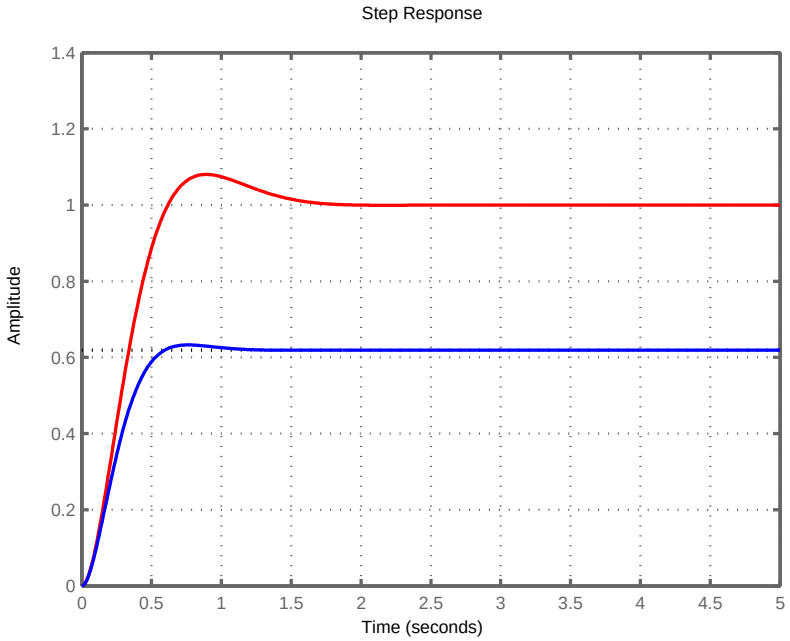
Polii trebuie așadar plasați în semiplanul stâng, în intersecția dintre semiplanul deschis $\operatorname{Re} s < -2.6$ și interiorul unghiului centrat în origine cu valoarea $2 \arccos(0.7)$ - vezi Cap. 3.

Prima condiție este satisfăcută dacă $\dfrac{K_i}{K} < 4.7$ iar cea de-a doua dacă $K < 30$ (fixând în prealabil $\frac{K_i}{K} = 2.5 < 4.7$).

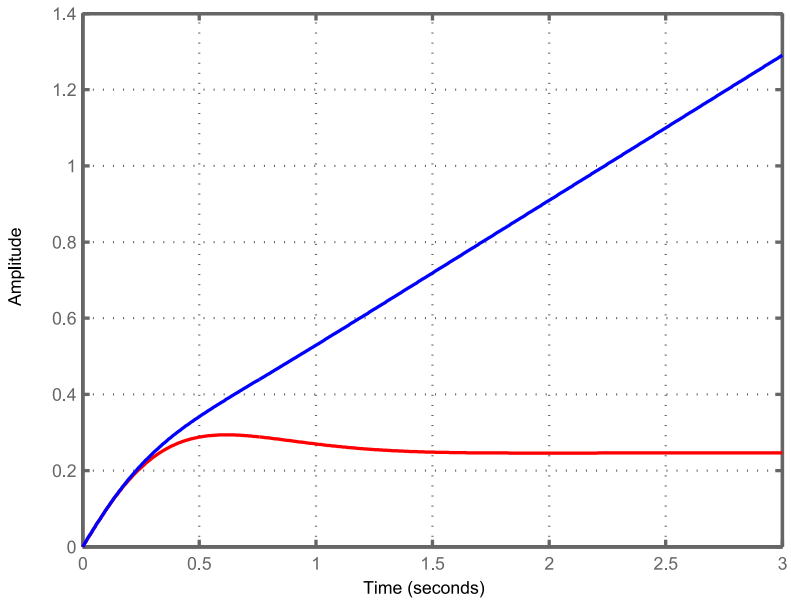
O alegere posibilă pentru regulator este, de exemplu,

$$C(s) = 26 + \frac{65}{s}.$$

# Răspunsurile la referință treaptă, respectiv, rampă




(c) $y_p$ la treaptă, P (albastru), PI (roșu)




(d) $\varepsilon_p$ la rampă, P (albastru), PI (roșu)

1 Introducere
- Studiu de caz: Controlul vitezei de translație și al poziției unui roboțel mobil
- Schema de control în buclă deschisă

2 Control în buclă închisă – PID
- Schema de control în buclă închisă
- Stabilitatea internă a buclei de reacție
- Performanțele de regim staționar - Principiul modelului intern
- Regulatorul proporțional-integrator-derivativ PID
- Acordarea regulatoarelor

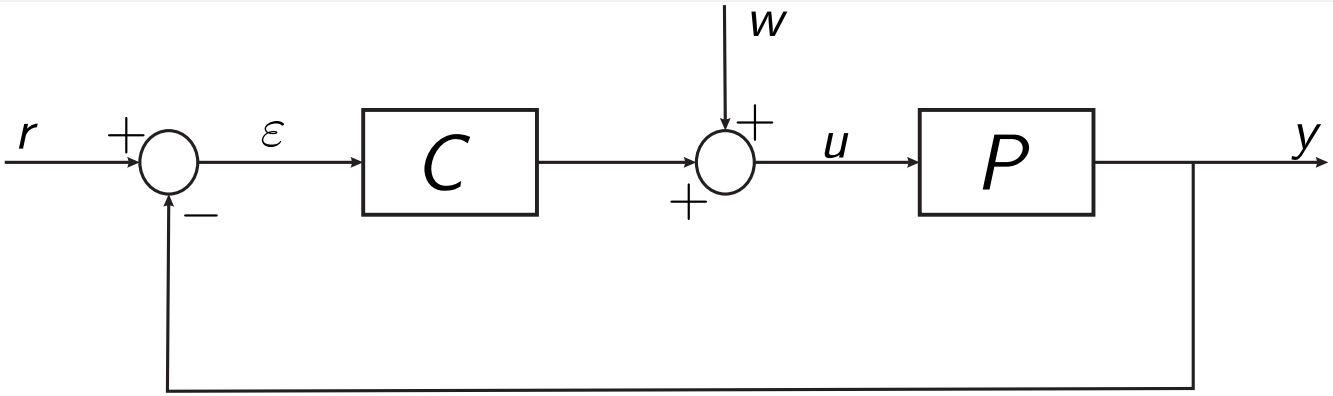
3 Discretizarea sistemelor cu timp continuu
- Eșantionare, discretizare
- Discretizarea PID

# Acordarea regulatorului

- Determinarea valorilor parametrilor $K$, $T_i(K_i)$, $T_d(K_d)$ care asigură pentru un proces dat comportarea dorită a SRA în raport cu referința și perturbațiile care acționează asupra procesului.
- Acordare pentru procese rapide și pentru procese lente.
- Procese rapide $\leftarrow$ au constante de timp $T_k < 10s$ (constante dominante) și constante parazite (în general cu cel puțin un ordin de mărime mai mic decât constantele dominante)
- Exemplu: clasa largă de procese rapide: de ordinul al doilea

$$P(s) = \frac{K_p}{(T_1 s + 1)(T_\Sigma s + 1)}, \;\; T_1 < 10s, \;\; T_\Sigma < 1s.$$

# Criteriul modulului, varianta Kessler




Pentru procesul rapid

$$P(s) = \frac{K_P}{(T_1 s + 1)(T_\Sigma s + 1)}$$

poate fi ales regulatorul

$$C(s) = \frac{T_1 s + 1}{2K_p T_\Sigma s} \tag{1}$$

care asigură perfomanțele

$\boxed{\sigma \approx 4.3\%,\ t_t = 8T_\Sigma,\ \varepsilon_p = 0,}$ pt. $r(t) = \mathbf{1}(t)$, $\boxed{\varepsilon_p \leq 2T_\Sigma}$, pt. $r(t) = t \cdot \mathbf{1}(t)$.

*Implementabilitate:* $C(s)$ din (1) $\leftarrow$ regulator PI, cu $K = T_1/(2K_p T_\Sigma)$, $K_i = 1/(2K_p T_\Sigma)$.

# Demonstrație

Funcția de transfer pe calea directă este

$$L(s) = P(s)C(s) = \frac{1}{2(T_\Sigma s + 1)T_\Sigma s}$$

$\Rightarrow$ funcția de transfer în buclă închisă

$$T(s) = \frac{1}{2T_\Sigma^2 s^2 + T_\Sigma s + 1} = \frac{1/(2T_\Sigma^2)}{s^2 + s/(2T_\Sigma) + 1/(2T_\Sigma^2)},$$

un sistem de ordinul al doilea cu

$$\omega_n^2 = \frac{1}{2T_\Sigma},\ 2\zeta\omega_n = \frac{1}{2T_\Sigma} \Rightarrow \omega_n = \frac{1}{T_\Sigma\sqrt{2}},\ \zeta = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7.$$

Prin urmare, $\sigma \approx 4.3\%$, iar pentru $\zeta$ între $0.6 - 0.8$, $t_t \approx 4/(\zeta\omega_n) \approx 8T_\Sigma$.

PMI: deoarece modelul treptei se regăsește în $L \Rightarrow \varepsilon_p = 0$ pt. $r(t) = \mathbf{1}(t)$.

TVF: pt. $r(t) = t \Rightarrow \varepsilon_p = \omega_n/(2\zeta) = 2T_\Sigma$ (Temă).

**Q:** Verificați că stabilitatea internă a buclei este asigurată automat din structura regulatorului ales.

1 Introducere
- Studiu de caz: Controlul vitezei de translație și al poziției unui roboțel mobil
- Schema de control în buclă deschisă

2 Control în buclă închisă – PID
- Schema de control în buclă închisă
- Stabilitatea internă a buclei de reacție
- Performanțele de regim staționar - Principiul modelului intern
- Regulatorul proporțional-integrator-derivativ PID
- Acordarea regulatoarelor

3 Discretizarea sistemelor cu timp continuu
- Eșantionare, discretizare
- Discretizarea PID

1 Introducere
- Studiu de caz: Controlul vitezei de translație și al poziției unui roboțel mobil
- Schema de control în buclă deschisă

2 Control în buclă închisă – PID
- Schema de control în buclă închisă
- Stabilitatea internă a buclei de reacție
- Performanțele de regim staționar - Principiul modelului intern
- Regulatorul proporțional-integrator-derivativ PID
- Acordarea regulatoarelor

3 Discretizarea sistemelor cu timp continuu
- Eșantionare, discretizare
- Discretizarea PID

# Reglare numerică

Compensatorul (regulatorul) poate fi realizat *fizic* cu ajutorul unui dispozitiv (circuit electric, valvă comandata automat etc.)

**Q:** Dar dacă este înlocuit cu un calculator?

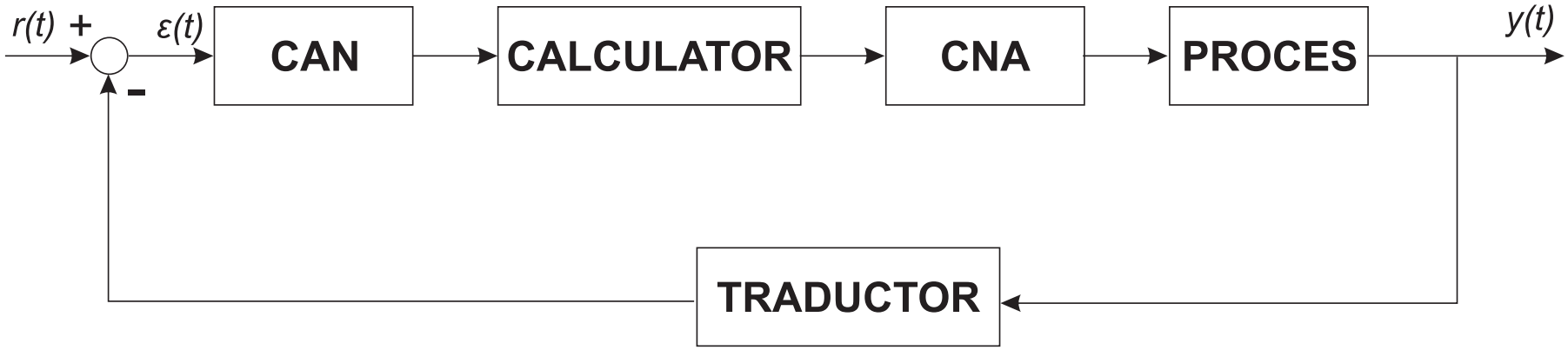



Figura 1: Reglare numerică

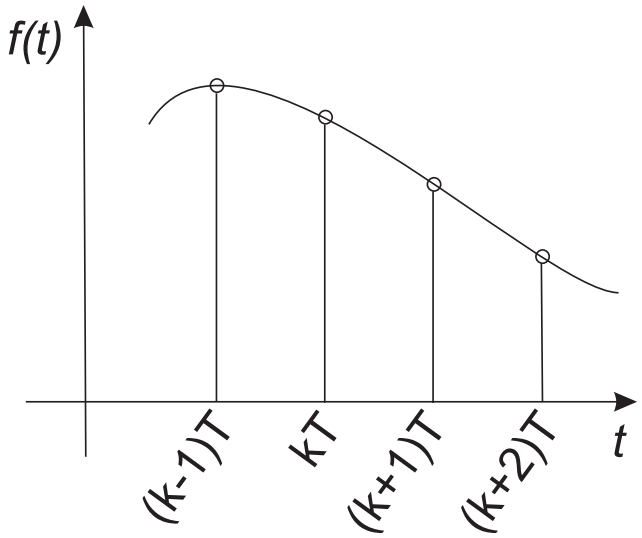
Regulator = calculator de proces

# Eșantionare (conversie analogic-numeric)

Eșantionarea transformă un semnal continual într-un semnal (cu timp) discret:

$$f_d(k) := f(kT_s),$$

unde $T_s > 0$ se numește perioadă (sau pas) de eșantionare (discretizare).




Numim frecvență (sau rată) de eșantionare inversul lui $T_s$,

$$\nu_s = \frac{1}{T_s}.$$

**Q:** Reconstrucția unui semnal din eșantioane: cum alegem $T$ ca să nu se piardă din „informație" și să putem reconstrui semnalul?
**A:** Th. lui Shannon: $\nu_s > 2\nu$, unde $\nu$ cea mai înaltă frecvență a unei componente de amplitudine semnificativă. Frecvența de eșantionare se alege astfel incât spectrul semnalului continual sa fie nul deasupra frecvenței Nyquist $\nu_N = \nu_s/2$.

# Extrapolare (conversie numeric-analogic)

Două metode de a reconstrui un semnal continual din eșantioanele $f_d(k) = f(kT_s)$.

Extrapolator de ordin 0: $f(t) \approx f(kT_s), \quad kT_s \leq t < (k+1)T_s$.

Extrapolator de ordin 1: $f(t) \approx f(kT_s) + \frac{f((k+1)T_s) - f(kT_s)}{T_s}(t - kT_s)$, $kT_s \leq t < (k+1)T_s$.

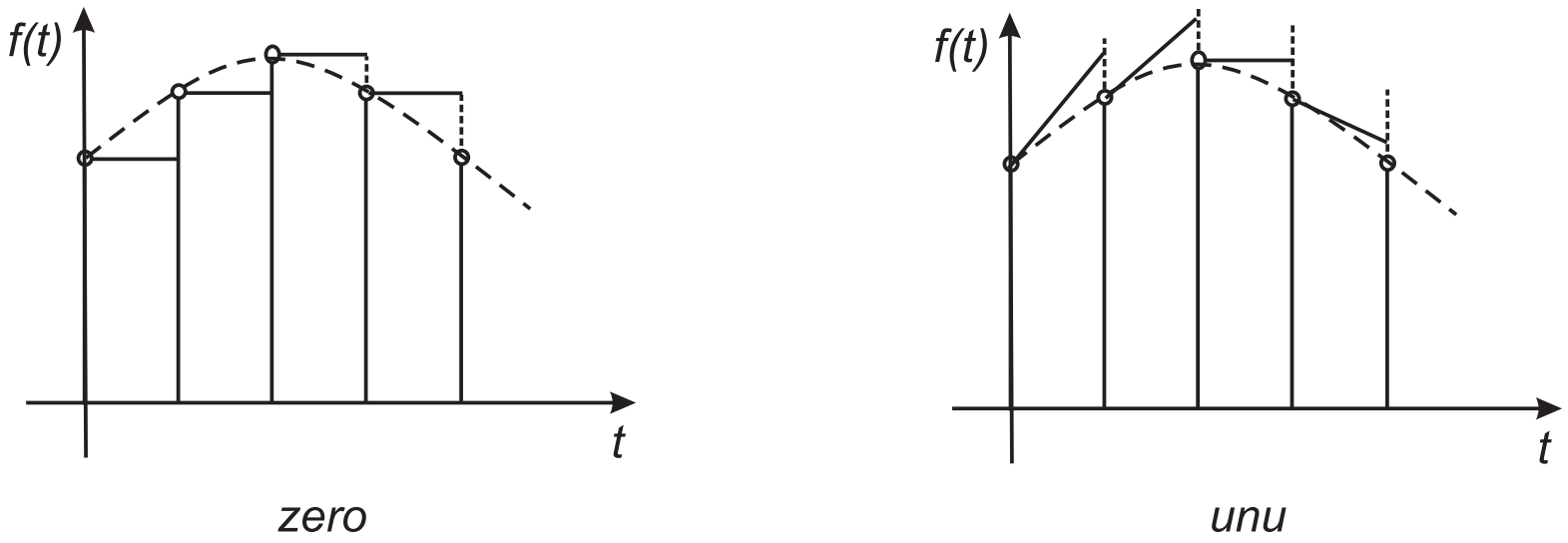



Figura 2: Extrapolator de ordin 0 și de ordin 1

# Discretizarea sistemelor continue

Considerăm sistemul $H(s)$. Ne propunem să obținem expresia discretizatului acestuia, $H_d(z)$ cunoscând pasul $T$ și faptul că utilizăm un extrapolator de ordin zero (CNA) și un eșantionator ideal (CAN).

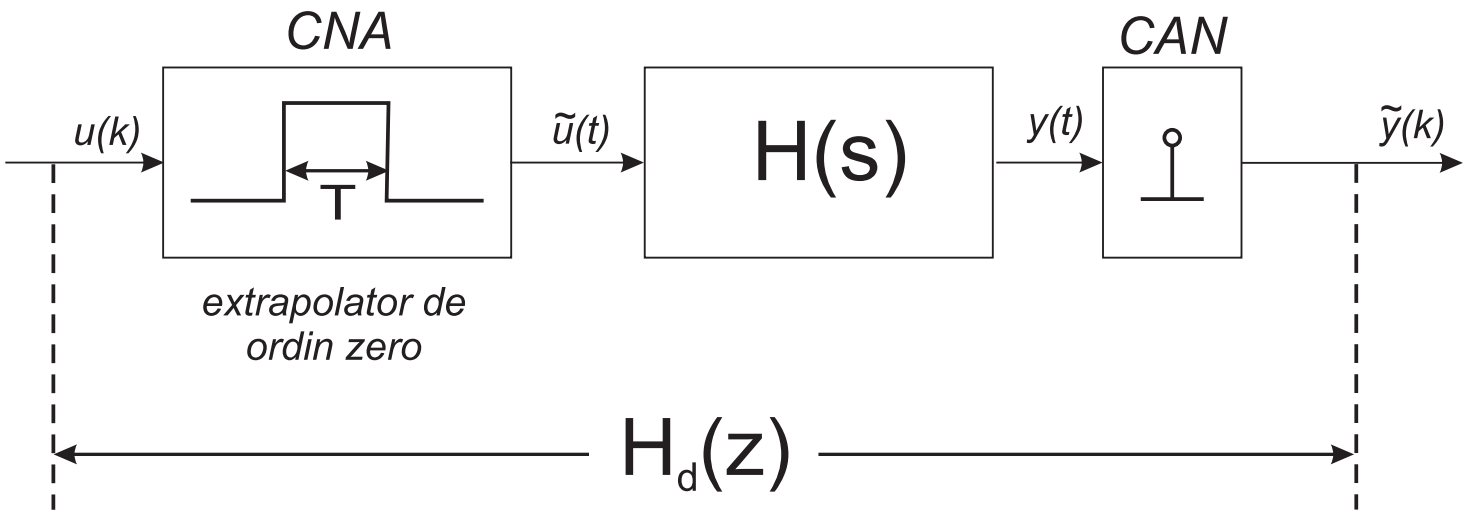



Figura 3: Discretizarea sistemelor continue

Vom calcula transformata $\mathcal{Z}$ a funcției pondere $h_d(k)$. Aceasta este răspunsul sistemului *discret* la intrare impuls discret, $\delta(k)$. Deducem că

$$\tilde{u}(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - T).$$

# Discretizarea sistemelor continue

Deoarece $H$ este liniar și invariant în timp, $y(t) = y_{tr}(t) - y_{tr}(t-T)$, unde $y_{tr}$ este răspunsul la treaptă al lui $H$. În consecință, răspunsul lui $H_d$ la **impuls discret** este

$$\tilde{y}(k) = y(kT) = y_{tr}(kT) - y_{tr}(k(T-1)) = \tilde{y}_{tr}(k) - \tilde{y}_{tr}(k-1).$$

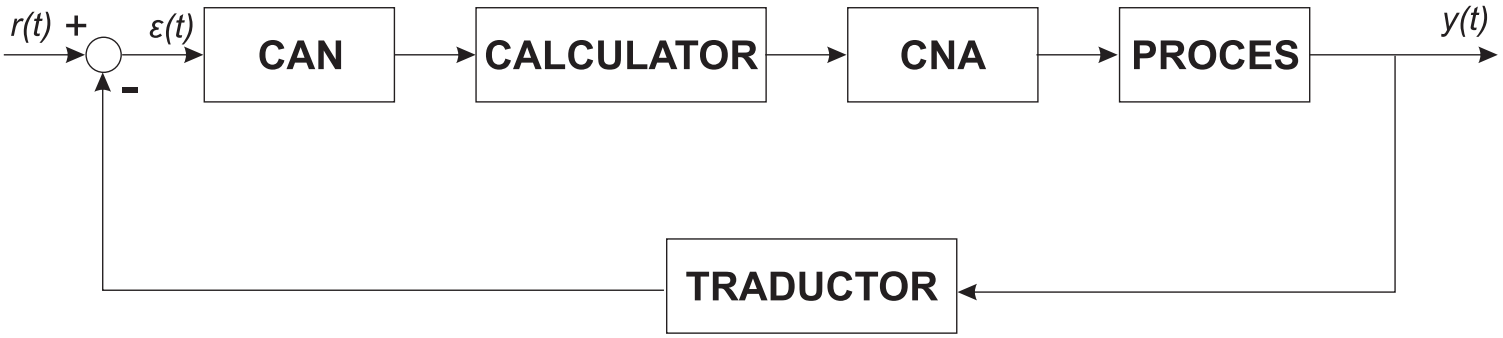
Rezultă că

$$\begin{aligned} H_d(z) &= \mathcal{Z}\left\{\tilde{y}(k)\right\}(z) = \mathcal{Z}\left\{\tilde{y}_{tr}(k) - \tilde{y}_{tr}(k-1)\right\}(z) \overset{\text{formal!}}{=} (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{y_{tr}(s)\right\}(z) \\ &= (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{H(s)}{s}\right\}(z) = \frac{z-1}{z}\,\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}\frac{H(s)}{s}\,\frac{z}{z-e^{sT}}\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Dacă $p_1, p_2, \ldots, p_r$ sunt polii raționalei $\frac{H(s)}{s}$, atunci

$$H_d(z) = (z-1)\sum_{i=1}^{r}\operatorname{Rez}\left(\frac{H(s)}{s}\,\frac{1}{z-e^{sT}}; p_i\right).$$

# Metode de discretizare




**Met. I.** Pentru procesul $P(s)$, folosim transformarea $\mathcal{Z}$ a CNA și $P$:

$$P_d(z) = (z-1)\sum_{i=1}^{r} \mathrm{Rez}\left(\frac{P(s)}{s}\frac{1}{z-e^{sT}}; p_i\right).$$

Matlab: `c2d` cu parametrul `'zoh'` .

**Met II.** Aproximări (pentru $C(s)$)

- Euler (dreptunghiular): $H_d(z) = H(s)$ în $s = \dfrac{T}{1-z^{-1}}$, $z = e^{sT}$. Nu este implementată în Matlab;
- Metoda trapezelor: $H_d(z) = H(s)$ în $s = \dfrac{2}{T}\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$, $z = e^{sT}$. Implementată în Matlab: `c2d` cu parametrul `'tustin'`.

1 Introducere
- Studiu de caz: Controlul vitezei de translație și al poziției unui roboțel mobil
- Schema de control în buclă deschisă

2 Control în buclă închisă – PID
- Schema de control în buclă închisă
- Stabilitatea internă a buclei de reacție
- Performanțele de regim staționar - Principiul modelului intern
- Regulatorul proporțional-integrator-derivativ PID
- Acordarea regulatoarelor

3 Discretizarea sistemelor cu timp continuu
- Eșantionare, discretizare
- Discretizarea PID

# Metode de sinteză - pe scurt

**I.** Se proiectează un compensator continuu $C$ și se discretizează: cu metoda Euler sau cu metoda trapezelor.

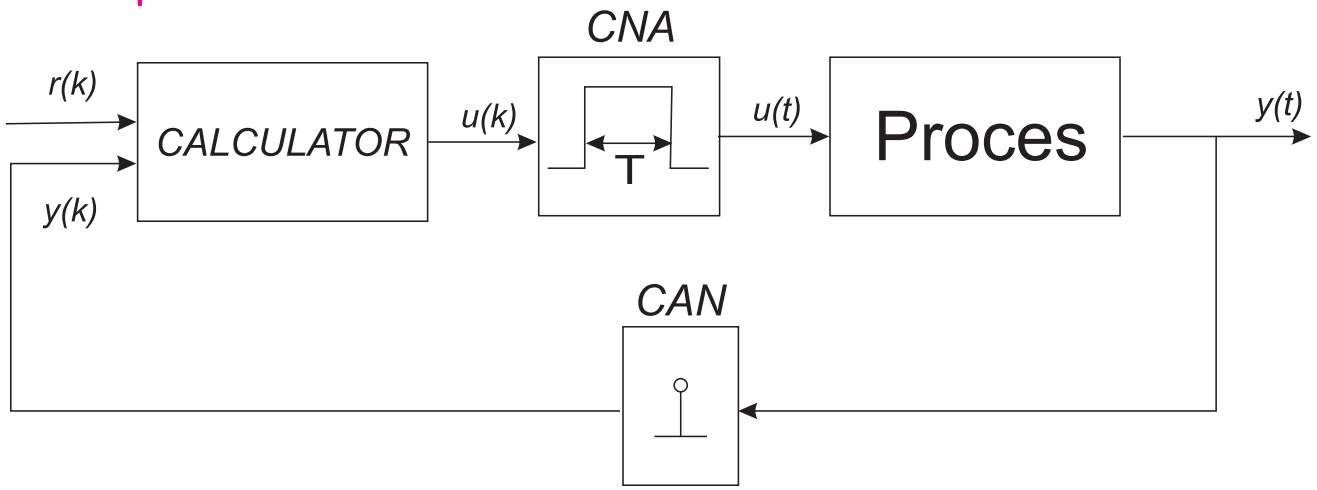



Figura 4: Regulator discret

## Avantaje

- se analizează comportamentul în circuit inchis și, dacă este cazul, se reiterează procedura modificând $T_s$.
- echivalentul discret al lui $C$ se implementează direct în calculator pentru formele standard (de exemplu PID).
- alegerea lui $T_s$: se alege (euristic) astfel încât să împartă exact toate constantele de timp pentru a nu pierde informație.

# Metode de sinteză - pe scurt

## Dezavantaje

- important: $t_{calcul} \leq 0.1\,T_s$;
- există întârziere în comandă (aprox. $\frac{T_s}{2}$).

**II.** Se discretizează procesul și se proiectează un compensator discret $C_d$ pentru $P_d$.

- alegerea ratei de eșantionare: în practică, $\omega_s$ trebuie ales mult mai mare decât frecvența la care apare zgomotul de măsură.
  Prefiltrare cu un filtru de tip trece-jos.
- $\omega_s$ mare: micșorează întârzierea între o comandă și răspunsul sistemului la comandă.
- Proiectare: metode clasice; fie intrare-ieșire (clasa tuturor compensatoarelor stabilizatoare + condiții de interpolare), fie pe stare (compensator Kalman + principiul modelului intern).

# Implementarea comenzii PID

Datorită procesoarelor existente, destul de puternice (inclusiv pe plăci gen `Arduino`), alegând $T_s < 50ms$, legile PID se pot implementa într-o formă aproape continuă (frecvența foarte mare a procesoarelor emulează un comportament cvasi-continuu).

**Exemplu:** Comandă PD: $u_k = K\varepsilon_k + K_d \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}}{T_s}$. Necesită apoi acordarea parametrilor pentru perfomanțe tranzitorii dorite.

Comandă PI: $u_k = K\varepsilon_k + K_i \sum_{i=0}^{k} \varepsilon_{k-i}$.

### Observația 4

Pot apărea saturații ale elementelor de execuție datorită sumei care acumulează erorile $\leftarrow$ fenomen de windup: din cauză că $L$ are un pol în zero care poate genera instabilitate pe calea directă. Pot apărea suprareglaje foarte mari care distrug instalația. *Soluție:* o buclă rapidă de stabilizare cu o amplificare $K_a$ pe reacție la componenta integratoare.

# Răspunsul sistemelor de convoluție în timp

**Tudor C. Ionescu**

Dept. de Automatică și Ingineria Sistemelor (ACSE),
Facultatea de Automatică și Calculatoare,
Universitatea Politehnica București

e-mail: `tudor.ionescu@acse.pub.ro`

URL: `http://acse.pub.ro/person/tudor-cornel-ionescu/`

octombrie 2019

1. Introducere. Exemple motivante
   - Hard-disk drive (HDD)
   - Filtrul de medie alunecare
2. Despre funcții de transfer raționale (complexe)
3. Sisteme SISO și răspunsul în domeniul timp
   - Răspunsul sistemelor SISO continue
   - Răspunsul sistemelor SISO discrete
4. STABILITATE
   - Cazul continuu
   - Cazul discret
5. Regimurile permanent și tranzitoriu
   - Regimuri de funcționare fundamentale
   - Regimurile permanent și tranzitoriu în timp continuu
     - Răspunsul sistemelor continue la semnale de intrare standard
     - Performanțe de regim permanent și tranzitoriu
6. Răspunsul sistemelor elementare la intrări standard
7. Regimurile permanent și tranzitoriu ale sistemelor discrete

1 Introducere. Exemple motivante
- Hard-disk drive (HDD)
- Filtrul de medie alunecare

2 Despre funcții de transfer raționale (complexe)

3 Sisteme SISO și răspunsul în domeniul timp
- Răspunsul sistemelor SISO continue
- Răspunsul sistemelor SISO discrete

4 STABILITATE
- Cazul continuu
- Cazul discret

5 Regimurile permanent și tranzitoriu
- Regimuri de funcționare fundamentale
- Regimurile permanent și tranzitoriu în timp continuu
  - Răspunsul sistemelor continue la semnale de intrare standard
  - Performanțe de regim permanent și tranzitoriu

6 Răspunsul sistemelor elementare la intrări standard

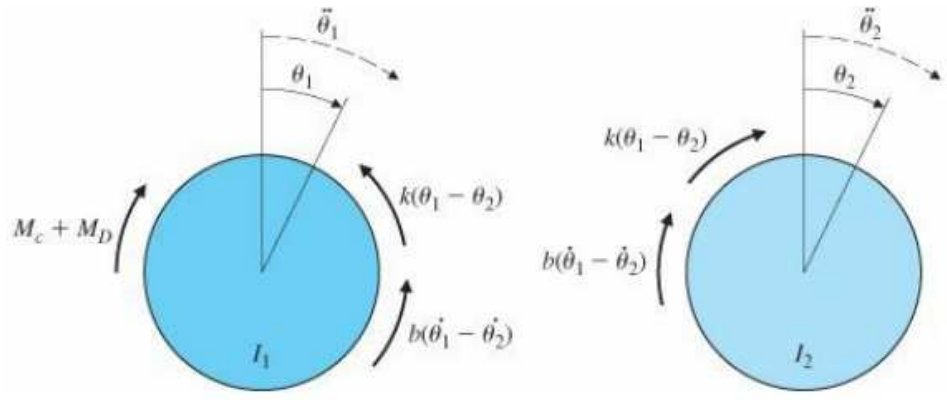
7 Regimurile permanent și tranzitoriu ale sistemelor discrete

# HDD–model

# HDD–schemă, ecuații fizice

$$
\begin{aligned}
I_1\ddot{\theta}_1 + b(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + k(\theta_1 - \theta_2) &= M_c + M_D, \\
I_2\ddot{\theta}_2 + b(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) + k(\theta_2 - \theta_1) &= 0,
\end{aligned}
$$

unde $i_1$, $I_2$ sunt momentele de inerție, $b$ coeficientul de frecare, $k$ coeficientul de elasticitate.




Alegem

- ieșirea
  = mărimea măsurată, de interes $\theta_2$, i.e., poziția acului pe disc;
- intrarea $= M_c$;
- perturbația $= M_D$.

Ne interesează evoluția forțată de $M_C$ a poziției acului de scriere $\theta_2$.
**Q:** Cum calculăm funcția de transfer?
**A:** Aplicând $\mathcal{L}$.

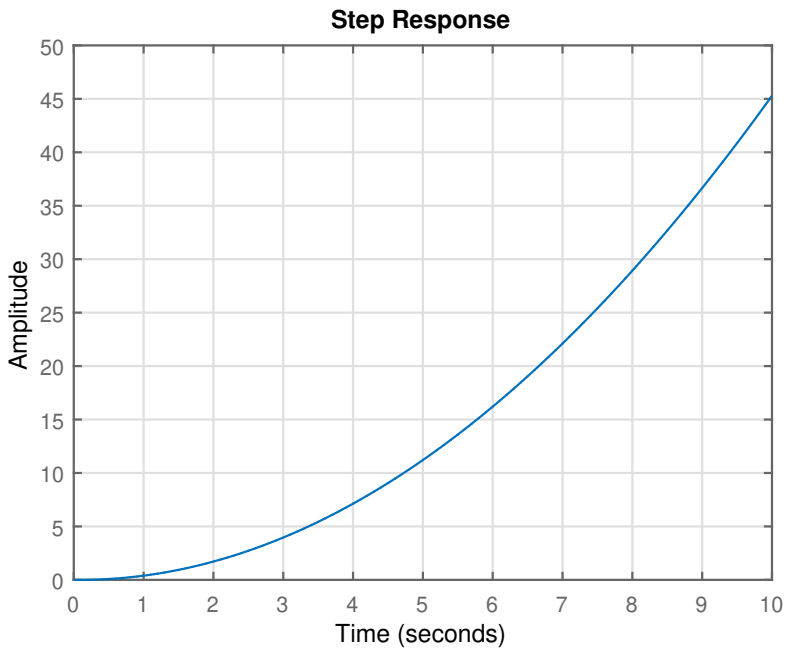
# HDD–funcții de transfer

Aplicând $\mathcal{L}$ modelului fizic complet $\Rightarrow$ funcția de transfer

$$G(s) = \frac{bs + k}{s^2 I_1 I_2 \left[ s^2 + b\left(\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2}\right) s + k\left(\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2}\right)\right]}.$$

Caracteristici:

- ordinul 4 - mare;
- are 4 poli,
  dintre care doi în origine. Ce înseamnă asta?
- e stabil?
- cum arată răspunsul în timp, la o treaptă?




Un model
mai simplu, echivalent cu aceleași caracteristici,
i.e., răspunsul la treaptă e ca în figură:

$$G(s) = \frac{K_m/b \cdot R}{s(\tau_L s + 1)(\tau s + 1)},$$

cu $\tau_L = J/b = 50ms$, $\tau = L/R = 1ms$ mult mai mic decât $\tau_L$, deci neglijabil. Prin urmare, scrierea HDD poate fi modelată

$$G(s) = \frac{0.25}{s(0.05s + 1)} = \frac{5}{s(s + 20)}.$$

1 Introducere. Exemple motivante
- Hard-disk drive (HDD)
- Filtrul de medie alunecare

2 Despre funcții de transfer raționale (complexe)

3 Sisteme SISO și răspunsul în domeniul timp
- Răspunsul sistemelor SISO continue
- Răspunsul sistemelor SISO discrete

4 STABILITATE
- Cazul continuu
- Cazul discret

5 Regimurile permanent și tranzitoriu
- Regimuri de funcționare fundamentale
- Regimurile permanent și tranzitoriu în timp continuu
  - Răspunsul sistemelor continue la semnale de intrare standard
  - Performanțe de regim permanent și tranzitoriu

6 Răspunsul sistemelor elementare la intrări standard

7 Regimurile permanent și tranzitoriu ale sistemelor discrete

# Un filtru discret–Filtrul de medie alunecătoare

$$y[n] = \frac{1}{3}(u[n+1] + u[n] + u[n-1]).$$

Analiză:

- sistem de convoluție cu $h[n] = \frac{1}{3}(\delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1])$;
- funcția de transfer $H(z) = \mathcal{Z}\left\{h[n]\right\}(z) = \frac{1}{3}(z + 1 + z^{-1}) = \dfrac{z^2 + z + 1}{3z}$.

**Q's:**

- E stabil? Da, se observă ușor, dar se determină pe $H(z)$.
- Cum răspunde la diverse semnale de intrare? Se poate calcula din convoluție, dar se calculează din $Y(z) = H(z)U(z)$.
- Cum filtrează? Se calculează numai investigând $H(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{h[n]\}(e^{j\omega})$.

În continuare, răspundem pe îndelete la aceste întrebări în cazul continuu și apoi, în cazul discret.

1 Introducere. Exemple motivante
- Hard-disk drive (HDD)
- Filtrul de medie alunecare

2 Despre funcții de transfer raționale (complexe)

3 Sisteme SISO și răspunsul în domeniul timp
- Răspunsul sistemelor SISO continue
- Răspunsul sistemelor SISO discrete

4 STABILITATE
- Cazul continuu
- Cazul discret

5 Regimurile permanent și tranzitoriu
- Regimuri de funcționare fundamentale
- Regimurile permanent și tranzitoriu în timp continuu
  - Răspunsul sistemelor continue la semnale de intrare standard
  - Performanțe de regim permanent și tranzitoriu

6 Răspunsul sistemelor elementare la intrări standard

7 Regimurile permanent și tranzitoriu ale sistemelor discrete

# Preambul: Funcții raționale

O funcție rațională

$$H(s) = \frac{b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

se numește:

- (strict) proprie, dacă ($m < n$) $m \leq n$;
- biproprie, dacă $m = n$;
- improprie, dacă $m > n$.

Presupunem că $H(s)$ este o rațională *ireductibilă*. Atunci

- Zerourile finite ale lui $H(s)$ = rădăcinile numărătorului $B(s)$.
- Polii finiți ai lui $H(s)$ = rădăcinile numitorului $A(s)$.
- Zerourile/polii la infinit ai lui $H(s)$ = zerourile/polii în 0 ai lui $H(1/s)$.

### Observația 1

Considerăm că o astfel de rațională are un numar egal de poli și zerouri (numărând multiplicitățile și zerourile/polii de la infinit).

# Funcții raționale

**Exemplu:** Rațională $H(s) = \dfrac{2s-1}{s^3+1}$

- este strict proprie $\Leftrightarrow$ gradul numitorului $= 3 >$ gradul numărătorului $= 1$.
- are 3 poli finiți (gradul numitorului este 3), un zerou finit (gradul numărătorului este 1) și două zerouri infinite $\Leftrightarrow H\left(\dfrac{1}{s}\right) = \dfrac{(2-s)s^2}{1+s^3}$ are două zerouri în 0.

**Atenție:** O rațională strict proprie are $n$ poli finiți, $m$ zerouri finite și $n-m$ zerouri la infinit!

Raționalele *biproprii* au toți polii și toate zerourile *finite*, în timp ce raționalele improprii au $n$ poli finiți, $m-n$ poli la infinit și $m$ zerouri finite.

Considerăm în cele ce urmează **sisteme de convoluție cauzale care admit funcții de transfer raționale, proprii, având coeficienți reali**.
Acestea sunt sisteme SISO (**S**ingle **I**nput/**S**ingle **O**utput), i.e., sisteme cu o intrare și o ieșire.
Acest capitol este dedicat **ANALIZEI** în timp a sistemelor cu timp continuu și discret de tip SISO.

1 Introducere. Exemple motivante
- Hard-disk drive (HDD)
- Filtrul de medie alunecare

2 Despre funcții de transfer raționale (complexe)

3 Sisteme SISO și răspunsul în domeniul timp
- Răspunsul sistemelor SISO continue
- Răspunsul sistemelor SISO discrete

4 STABILITATE
- Cazul continuu
- Cazul discret

5 Regimurile permanent și tranzitoriu
- Regimuri de funcționare fundamentale
- Regimurile permanent și tranzitoriu în timp continuu
  - Răspunsul sistemelor continue la semnale de intrare standard
  - Performanțe de regim permanent și tranzitoriu

6 Răspunsul sistemelor elementare la intrări standard

7 Regimurile permanent și tranzitoriu ale sistemelor discrete

1 Introducere. Exemple motivante
- Hard-disk drive (HDD)
- Filtrul de medie alunecare

2 Despre funcții de transfer raționale (complexe)

3 Sisteme SISO și răspunsul în domeniul timp
- Răspunsul sistemelor SISO continue
- Răspunsul sistemelor SISO discrete

4 STABILITATE
- Cazul continuu
- Cazul discret

5 Regimurile permanent și tranzitoriu
- Regimuri de funcționare fundamentale
- Regimurile permanent și tranzitoriu în timp continuu
  - Răspunsul sistemelor continue la semnale de intrare standard
  - Performanțe de regim permanent și tranzitoriu

6 Răspunsul sistemelor elementare la intrări standard

7 Regimurile permanent și tranzitoriu ale sistemelor discrete

# Recuperarea semnalului $y(\cdot)$ din $Y(\cdot)$

Continuu: SISTEM $\equiv H(s)$ - rațională proprie cu coeficienți reali $\Rightarrow Y(s) = H(s)U(s) \leftarrow$ răspunsul în domeniul $s$. Cât este $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)U(s)\}(t) = (h * u)(t)$?

Discret: SISTEM (FILTRU) $\equiv H(z)$ $(H(z^{-1}))$ - rațională proprie cu coeficienți reali $\Rightarrow Y(z) = H(z)U(z)$. Cât este $y(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)U(z)\}(t) = (h * u)(n)$?

Se dau $h$ și $u$ - $H(s)$ și $U(s)$. Se cere $y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s))(t)$, unde $Y(s)$ este o funcție *rațională* strict proprie cu coeficienți reali. Cum recuperăm originalul $y(t)$?

**Problemă**. Se dă o rațională *strict* proprie cu coeficienți reali

$$Y(s) = \frac{\beta_m s^m + \ldots + \beta_1 s + \beta_0}{\alpha_n s^n + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0} = \frac{r(s)}{p(s)}.$$

Se cere

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s))(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} Y(s)\ \mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s,\ \ t \geq 0.$$

**Q:** Cazul discret?

**A:** Similar... schimbând un pic terminologia.

# Calculul $y = \mathcal{L}^{-1}\{Y\}$, o procedură

**Pasul 0.** Calculăm polii sistemului.

*Analiză:* Dacă polii sunt în semiplanul complex stâng $\mathbb{C}^-$, atunci sistemul este stabil (vezi secțiunea STABILITATE) $\Rightarrow y(t) = y_p(t) + y_t(t)$, unde $\lim_{t\to\infty} y_t(t) = 0$. Dacă polii sunt a.î. sistemul este instabil, atunci $y(t)$ nu este mărginit la $u(t)$ mărginit.

**Pasul 1.** Despărțim în fracții simple, în factori de tipul $\dfrac{A}{(s+p)^k}$, $p \in \mathbb{R}$ pol de multiplicitate $m$, $k = 1 : m$ și în factori de tipul $\dfrac{Bs + C}{(s^2 + \alpha s + \beta)^l}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, astfel încât $\alpha^2 - 4\beta < 0$. Aceștia din urmă sunt poli complex conjugați de multiplicitate $q$, $l = 1 : q$. Alternativ, factorii $\dfrac{Bs + C}{(s^2 + \alpha s + \beta)^l}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, astfel încât $\alpha^2 - 4\beta < 0$ se pot decompune în continuare în $\dfrac{E}{s - \sigma + \omega j} + \dfrac{F}{s - \sigma - \omega j}$, $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$.

# Calculul $y = \mathcal{L}^{-1}\{Y\}$, o procedură – continuare

**Pasul 2.** Calculul coeficienților.

*Metoda I.* Aducem la același numitor. Din egalitatea de polinoame rezultă un sistem algebric liniar, determinat, cu soluție unică în necunoscutele $A, B, \ldots$.

*Metoda a II-a.* Aplicarea formulei reziduurilor pentru un pol de multiplicitate $m$.

*Metoda a III-a.* Folosind proprietățile sistemului și ale transformatei Laplace, e.g., zerouri ale funției de transfer la infinit și TVI/TVF, după caz.

*Metoda a IV-a.* Combinarea celor trei metode de mai sus.

**Pasul 3.** Recuperarea semnalelor original corespunzătoare factorilor elementari de la Pasul 1 (cu tabelul) și aplicarea Principiului superpoziției.

### Observația 2

Deoarece funția de transfer are coeficienții reali și deoarece semnalele cu care excităm sistemul la intrare sunt semnale de timp reale, $y(t)$ este tot un semnal real.

# Analiză calitativă – legat de stabilitate (we'll see!)

Fiecare pol al lui $Y(s)$ contribuie cu unul sau mai mulți termeni la $y(t)$. Astfel

- un pol în $s = a \Rightarrow$ termen de tipul $e^{at}$.
  Dacă $a > 0$, $e^{at} \overset{t\to\infty}{\to} \infty$ iar dacă $a < 0$, $e^{at} \overset{t\to\infty}{\to} 0$;
- o pereche de poli complex conjugați în $s = \sigma \pm j\omega \Rightarrow$ termen de tipul $e^{\sigma t}\cos(\omega t + \phi)$. Oscilație cu amplitudine crescătoare ($\sigma > 0$), cu amplitudine constantă ($\sigma = 0$) sau amortizată ($\sigma < 0$);
- un pol de ordin $m$ în origine $s^m = 0 \Rightarrow$ termen de tipul $t^{m-1}$;
- un pol de ordin $m$ în $s = a \Rightarrow$ termen de tipul $t^{m-1}\, e^{at}$.
  Dacă $a > 0$, $t^{m-1}\, e^{at} \overset{t\to\infty}{\to} \infty$ iar dacă $a < 0$, $t^{m-1}\, e^{at} \overset{t\to\infty}{\to} 0$;
- o pereche de poli complex conjugați de ordin $m$ în $s = \sigma \pm j\omega \Rightarrow$ termen de tipul $e^{\sigma t}\, t^{m-1}\, e^{j\omega t}$. Oscilație cu amplitudine crescătoare ($\sigma \geq 0$) sau amortizată ($\sigma < 0$).

# Strict propriu v. propriu

Ce se întâmplă când $Y(s)$ **nu** este *strict* proprie ?

Trebuie extrasă mai întâi partea polinomială, prin împărțirea lui $r(s)$ la $p(s)$: $r = pq + \tilde{r}$.

Avem

$$Y(s) = q(s) + \tilde{Y}(s) = q(s) + \frac{\tilde{r}(s)}{p(s)}, \quad \text{cu } \tilde{Y}(s) \text{ strict proprie.}$$

Deoarece $Y(s)$ este (în situațiile care ne interesează) o rațională *proprie*, rezultă

$$q(s) = \beta_m/\alpha_n = Y(\infty) = \text{const.}$$

În concluzie, în cazul $m = n$, avem

$$\mathcal{L}^{-1}(Y(s))(t) = Y(\infty)\delta(t) + \mathcal{L}^{-1}\{\tilde{Y}(s)\}(t).$$

# Exemplu de calcul: $H$ proprie

Să se calculeze funcția pondere a sistemului cu funcția de transfer

$$H(s) = \frac{s^2 + 3s + 3}{2s^2 + 6s + 4}.$$

Trebuie să determinăm $\mathcal{L}^{-1}(H(s))$. Se observă că

$$H(s) = 0.5 + \frac{1}{2s^2 + 6s + 4} = 0.5 + \frac{0.5}{s+1} - \frac{0.5}{s+2},$$

de unde

$$h(t) = 0.5\delta(t) + 0.5\,\mathrm{e}^{-t} - 0.5\,\mathrm{e}^{-2t}\,.$$

# Exemple de răspuns: HDD și unul cu o pereche de poli complecși, conjugați

1. $$G(s) = \frac{5}{s(s+20)}, \ u(t) = \mathbf{1}(t);$$
2. $$H(s) = \frac{2s+3}{s^2+2s+3}, \ u(t) = t\mathbf{1}(t)...$$

... și Setul al treilea de Probleme!

1 Introducere. Exemple motivante
- Hard-disk drive (HDD)
- Filtrul de medie alunecare

2 Despre funcții de transfer raționale (complexe)

3 Sisteme SISO și răspunsul în domeniul timp
- Răspunsul sistemelor SISO continue
- Răspunsul sistemelor SISO discrete

4 STABILITATE
- Cazul continuu
- Cazul discret

5 Regimurile permanent și tranzitoriu
- Regimuri de funcționare fundamentale
- Regimurile permanent și tranzitoriu în timp continuu
  - Răspunsul sistemelor continue la semnale de intrare standard
  - Performanțe de regim permanent și tranzitoriu

6 Răspunsul sistemelor elementare la intrări standard

7 Regimurile permanent și tranzitoriu ale sistemelor discrete

# Funcție de transfer (recap)

În mod similar cazului continuu (i.e., ecuații diferențiale), o ecuație cu diferențe definește un sistem discret în accepțiunea I/O. Acesta este reprezentat prin funcția de transfer asociată ecuației cu diferențe. Considerăm ecuația generală

$$a_n\, y(k) + \ldots + a_0\, y(k-n) = b_n\, u(k) + \ldots + b_0\, u(k-n), \;\; a_n \neq 0, \qquad (1)$$

și aplicăm transformarea $\mathcal{Z}$ ambilor membri $\Rightarrow$

$$a_n\, Y(z) + a_{n-1} z^{-1}\, Y(z) + \ldots + a_0 z^{-n}\, Y(z) = b_n\, U(z) + b_{n-1} z^{-1}\, U(z) + \ldots + b_0 z^{-n}\, U(z)$$

$$\Rightarrow Y(z) = H(z) U(z),$$

unde

$$H(z) = \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \ldots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0} = \frac{b(z)}{a(z)}$$

este funcția de transfer a sistemului definit de ecuația (1).

**Q:** Cum calculăm răspunsul în timp al sistemelor discrete care admit funcție de transfer rațională?

# Calculul răspunsului $y(k)$ - recuperarea funcției original

**Problema.** Fie $Y(z) = \dfrac{b(z)}{a(z)}$ o funcție **rațională** în $z$, având coeficienți reali.

Cum calculăm transformata $\mathcal{Z}$ inversă $y(k)$ a lui $Y(z)$?

**I. Dezvoltare în serii de puteri:** împărțind polinomul $b(z)$ la polinomul $a(z)$

$$b(z)/a(z) = y(0) + y(1)z^{-1} + y(2)z^{-2} + \ldots = \sum_{k=0} y(k)z^{-k} \Rightarrow y(k)!$$

**II. Calculul direct al lui $x(k)$, utilizând Teorema Reziduurilor:** Fie $\Gamma$ un contur închis în jurul originii, situat în $D$ și care conține toți polii *finiți* $\{p_1, p_2, \ldots, p_L\}$ ai lui $F(z) = z^{k-1}\, Y(z)$. Atunci

$$y(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} z^{k-1} Y(z) \mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{L} \mathrm{Rez}\,[F(z); p_i].$$

Deoarece $F(z)$ este funcție rațională în $z$, avem

$$\mathrm{Rez}\,[F(z); p] = \frac{1}{(\mu-1)!} \left[(z-p)^{\mu} F(z)\right]^{(\mu-1)} \Big|_{z=p},$$

unde $\mu$ este multiplicitatea polului $p$. În cazul în care $F(z)$ are toți polii simpli, se obține $y(k) = \sum_{i=1}^{L} (z-p_i)\, F(z)|_{z=p_i}$ .

# Calculul răspunsului $y(n)$ ($y(k)$). Exemple

**III. Descompunere în fracții simple:** Pentru claritate: poli reali, simpli. Cazul polilor multipli/complex conjugați este similar cu cazul continuu. Astfel,

$$\frac{1}{z}\,Y(z) = \sum_{i=1}^{N} \frac{A_i}{z-a_i} \Leftrightarrow Y(z) = \sum_{i=1}^{N} A_i\,\frac{z}{z-a_i} \overset{\mathcal{Z}^{-1}}{\Leftrightarrow} y(k) = \sum_{i=1}^{N} A_i a_i^k\,\mathbf{1}(k).$$

**Exemplul 1.** Calculați răspunsul sistemului $H(z) = 1/(z-2)$ la intrare $\mathbf{1}(n)$.

*Soluție:* Scriem $Y(z) = H(z)U(z) = \dfrac{1}{z-2}\cdot\dfrac{z}{z-1} = \dfrac{z}{z^2-3z+2}$.

**I.** $z/(z^2-3z+2) = z^{-1} + 3z^{-2} + 7z^{-3} + 15z^{-4} + \ldots =$
$(2-1)z^{-1} + (2^2-1)z^{-2} + (2^3-1)z^{-3} + (2^4-1)z^{-4} + \ldots \Rightarrow y(n) = (2^n-1)\mathbf{1}(n)$.

**II.** $Y(z)$ are doi poli simpli, $p_1 = 1$ și $p_2 = 2$. Deducem că $y(n) =$

$$(z-1)\,z^{n-1}Y(z)|_{z=1} + (z-2)\,z^{n-1}Y(z)|_{z=2} = \left.\frac{z^n}{z-2}\right|_{z=1} + \left.\frac{z^n}{z-1}\right|_{z=2} = (-1+2^n)\,\mathbf{1}(n).$$

**III.** Avem $\dfrac{Y(z)}{z} = \dfrac{1}{z-2} - \dfrac{1}{z-1}$ de unde rezultă că $Y(z) = \dfrac{z}{z-2} - \dfrac{z}{z-1}$.
Așadar $y(n) = 2^n\mathbf{1}(n) - \mathbf{1}(n)$.

# Răspunsul la treaptă al filtrului de medie alunecare

**Exemplul 2.** $H(z) = \dfrac{z^2 + z + 2}{3z}$, $u(k) = \mathbf{1}(k)$.

*Soluție:*

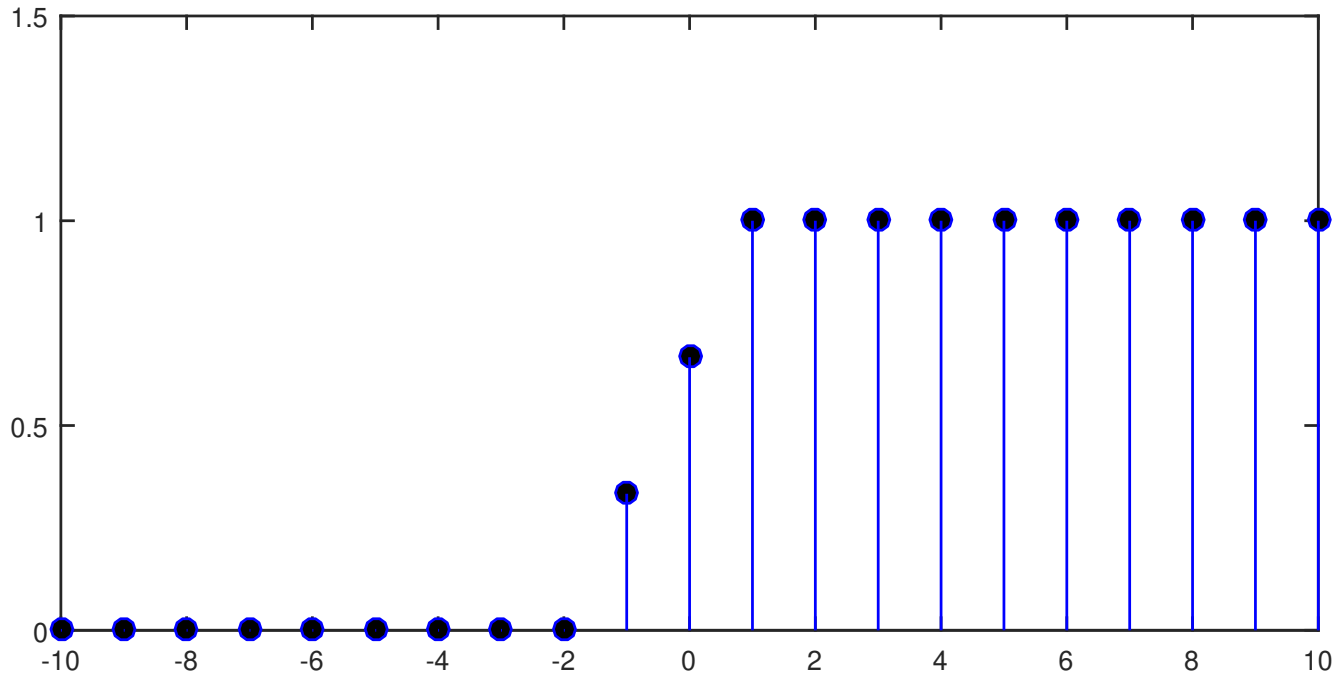



Figura 1: Răspunsul filtrului de medie alunecătoare la o intrare $\mathbf{1}(k)$

1 Introducere. Exemple motivante
- Hard-disk drive (HDD)
- Filtrul de medie alunecare

2 Despre funcții de transfer raționale (complexe)

3 Sisteme SISO și răspunsul în domeniul timp
- Răspunsul sistemelor SISO continue
- Răspunsul sistemelor SISO discrete

4 STABILITATE
- Cazul continuu
- Cazul discret

5 Regimurile permanent și tranzitoriu
- Regimuri de funcționare fundamentale
- Regimurile permanent și tranzitoriu în timp continuu
  - Răspunsul sistemelor continue la semnale de intrare standard
  - Performanțe de regim permanent și tranzitoriu

6 Răspunsul sistemelor elementare la intrări standard

7 Regimurile permanent și tranzitoriu ale sistemelor discrete

# Ideea fundamentală: stabilitatea înainte de orice!

*Ideea:* un sistem este *stabil* dacă răspunde *în mod adecvat* unui stimul extern.

STABILITATE: cerință **fundamentală** în proiectarea SRA!!!

- SRA: ieșirea $y$ „reproduce" referința $r$; forma de variație a lui $y \approx$ forma de variație a lui $r$.
- Trebuie menținut controlul variației mărimilor de ieșire; în plus, mărimile fizice care intervin nu pot fi *oricât* de mari, pentru că s-ar putea distruge instalația.
- Cerințele de proiectare impun realizarea unui regim staționar (permanent). Acest regim este realizat de către sistemele stabile.

**Stabilitate $\Longleftrightarrow$ regim staționar.**

1 Introducere. Exemple motivante
- Hard-disk drive (HDD)
- Filtrul de medie alunecare

2 Despre funcții de transfer raționale (complexe)

3 Sisteme SISO și răspunsul în domeniul timp
- Răspunsul sistemelor SISO continue
- Răspunsul sistemelor SISO discrete

4 STABILITATE
- Cazul continuu
- Cazul discret

5 Regimurile permanent și tranzitoriu
- Regimuri de funcționare fundamentale
- Regimurile permanent și tranzitoriu în timp continuu
  - Răspunsul sistemelor continue la semnale de intrare standard
  - Performanțe de regim permanent și tranzitoriu

6 Răspunsul sistemelor elementare la intrări standard

7 Regimurile permanent și tranzitoriu ale sistemelor discrete

# Stabilitatea sistemelor cu funcții de transfer raționale

**Q:** Dacă $y = h * u$ este un sistem de convoluție, cum caracterizăm stabilitatea (în sens strict sau nestrict) în termenii *funcției de transfer* asociate?

Fie $H(s)$ o rațională proprie, ireductibilă, cu coeficienți reali, cu polii $p_i$, $i = 1 : k$.

**Q':** În ce condiții $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}(t) = \sum_{i=1}^{k} \pi_i(t)\, e^{p_i t} + H(\infty)\delta(t)$ este absolut integrabilă sau mărginită pe $\mathbb{R}$?

Teorema 1 (Stabilitatea sistemelor cu $H(s)$ rațională (strict) proprie)
*Fie $\Sigma$ un sistem având funcția de transfer $H(s)$ ireductibilă. Atunci*

1. *sistemul $\Sigma$ este stabil BIBO în sens* **strict** *dacă și numai dacă toți polii funcției de transfer $H(s)$ au partea reală strict negativă, adică*
$$\operatorname{Re} p_i < 0, \quad \forall\, i = 1, k.$$
2. *sistemul $\Sigma$ este stabil BIBO în sens* **nestrict** *dacă și numai dacă toți polii funcției de transfer $H(s)$ au partea reală negativă, adică*
$$\operatorname{Re} p_i \leq 0, \quad \forall\, i = 1, k$$
*iar acei poli cu $\operatorname{Re} p_i = 0$ sunt poli simpli.*

# Exemple

1. Fie $H(s) = \dfrac{s+1}{s^2+s+1}$. Polii: $p_{1,2} = -\dfrac{1}{2} \pm j\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \operatorname{Re} p_{1,2} < 0 \Leftrightarrow$ sistemul este stabil (în sens strict).

2. Fie $H(s) = \dfrac{2s-1}{(s^2+1)(s+1)}$. Polii: $p_{1,2} = \pm j$ și $p_3 = -1 \Rightarrow \operatorname{Re} p_i \leq 0$, și $-j$, $j$ sunt poli simpli $\Leftrightarrow$ sistemul este stabil (în sens nestrict).

**Terminologie:** prin stabil **înțelegem** stabil în sens strict!

**Q:** Cum testăm stabilitatea unui sistem oarecare? În exemplele de mai sus am *calculat* ușor polii sistemului, dar în cazul general acest lucru nu mai este posibil!

**A:** Condiții asupra coeficienților $\operatorname{den}[H(s)] = p(s)$.

# Criteriul de stabilitate Hurwitz

**Problemă**. Fie $p(s)$ un polinom cu coeficienți reali, în ce condiții are (coeficienții) polinomul *toate* rădăcinile în $\mathbb{C}^- = \{s \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Re} s < 0\}$?

Teorema 2 (Criteriul Hurwitz)

*Fie polinomul* $p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$, *cu* $a_n > 0$. *Atunci* $p(s)$ *are toate rădăcinile în* $\mathbb{C}^-$ *dacă și numai dacă toți minorii principali ai matricii Hurwitz (2) sunt strict pozitivi, adică*

$$\mathbf{H}^{[i]} > 0 \ \ \forall i = 1 : n, \quad \textit{unde} \ \ \mathbf{H} := \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \ldots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \ldots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \ldots & \ldots \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \ldots & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}. \quad (2)$$

# Observații. Exemplu: polinom de gradul 3

## Observația 3

1. Un polinom cu *toate* rădăcinile în $\mathbb{C}^-$ se numește Hurwitzian (polinom Hurwitz).
2. Ipoteza $a_n > 0$ nu restrânge generalitatea. Dacă $a_n < 0$ se utilizează criteriul pentru $-p(s)$ (cu aceleași rădăcini ca și $p$).
3. Dacă există un coeficient nul $a_k = 0$ sau 2 coeficienți de semne contrare, $a_i a_j < 0$, atunci $p(s)$ NU este Hurwitzian.
4. Criteriul Hurwitz este calitativ. Nu furnizează nici o informație cu privire la plasarea polilor în $\mathbb{C}$.

**Exemplul 1.** Fie $p(s) = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$, $a_3 > 0$. Avem $n = 3$ și

$$\mathbf{H} := \begin{bmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{bmatrix}.$$

(1) $\mathbf{H}^{[1]} = a_2 > 0$.
(2) $\mathbf{H}^{[2]} = a_1 a_2 - a_3 a_0 > 0$. Cu (1) și (3) rezultă $a_1 > 0$.
(3) $\mathbf{H}^{[3]} = a_0(a_1 a_2 - a_3 a_0) > 0$. Cu (2) rezultă $a_0 > 0$.

1 Introducere. Exemple motivante
- Hard-disk drive (HDD)
- Filtrul de medie alunecare

2 Despre funcții de transfer raționale (complexe)

3 Sisteme SISO și răspunsul în domeniul timp
- Răspunsul sistemelor SISO continue
- Răspunsul sistemelor SISO discrete

4 STABILITATE
- Cazul continuu
- Cazul discret

5 Regimurile permanent și tranzitoriu
- Regimuri de funcționare fundamentale
- Regimurile permanent și tranzitoriu în timp continuu
  - Răspunsul sistemelor continue la semnale de intrare standard
  - Performanțe de regim permanent și tranzitoriu

6 Răspunsul sistemelor elementare la intrări standard

7 Regimurile permanent și tranzitoriu ale sistemelor discrete

# Stabilitatea sistemelor discrete cu fcț. de transfer raționale

**Recall:** Stabilitate: $\forall\ |u(k)|$ mărginită $\Longrightarrow |y(k)|$ mărginită.

**Condiții necesare și suficiente de stabilitate BIBO (strictă)** pt. sistemul

$$y = h * u: \ \|h\|_1 < \infty \Leftrightarrow \sum_k |h(k)| < \infty.$$

**Sistem stabil BIBO în sens nestrict:** $\|h\|_\infty < \infty \Leftrightarrow \sup_k |h(k)| < \infty.$

Fie un sistem discret de convoluție $y = h * u$ cu funcția de transfer *rațională*: transformata $\mathcal{Z}$ a funcției pondere $h$, $H(z) = \mathcal{Z}\{h(k)\}(z) = b(z)/a(z)$, ireductibilă și fie $p_i$, $i = 1, 2, \ldots n$, polii lui $H(z)$.

Teorema 3 (Stabilitatea sistemelor discrete cu $H(z)$ rațională)

1. *Un sistem discret este stabil BIBO (în sens* **strict***) dacă toți polii sistemului sunt de modul strict subunitar*
   $|p_i| < 1$, *adică toți polii se găsesc în* **discul unitate**.
2. *Un sistem discret este stabil BIBO (in sens nestrict) dacă toți polii sistemului sunt de modul subunitar, iar cei de modul 1 sunt simpli.*

# Testarea stabilității discrete. Există criteriu Hurwitz?

**Q:** Cum testăm stabilitatea? Trebuie să decidem dacă polii, adică rădăcinile polinomului $p(z) = \text{den}[H(z)]$ se găsesc în discul unitate.

**A: DA.** Dar putem folosi indirect chiar Criteriul Hurwitz studiat în cazul continuu.

**Q:** Cum aplicăm indirect criteriul Hurwitz?

*Soluție:* Aplicăm transformarea omografică

$$z = \frac{1+s}{1-s} = f(s),$$

care duce *semiplanul stâng* ($\mathbb{C}^-$ : $\text{Re}\, s < 0$) în *discul unitate* ($|z| < 1$) al planului complex. Inversa lui $f$ este dată de $s = \dfrac{z-1}{z+1}$.
Aplicăm criteriul Hurwitz polinomului

$$q(s) = (1-s)^n\, p\left(\frac{1+s}{1-s}\right) = a_n(1+s)^n + a_{n-1}(1+s)^{n-1}(1-s) + \ldots + a_0(1-s)^n.$$

# Exemple

1. Filtrul de medie alunecătoare:

$$H(z) = \frac{z^2 + z + 1}{z}.$$

   Se observă ușor că are un pol în origine $p = 0$.

2. $H(z) = \dfrac{z - 1}{z^3 - 3z^2 + 2z}$.

1 Introducere. Exemple motivante
- Hard-disk drive (HDD)
- Filtrul de medie alunecare

2 Despre funcții de transfer raționale (complexe)

3 Sisteme SISO și răspunsul în domeniul timp
- Răspunsul sistemelor SISO continue
- Răspunsul sistemelor SISO discrete

4 STABILITATE
- Cazul continuu
- Cazul discret

5 Regimurile permanent și tranzitoriu
- Regimuri de funcționare fundamentale
- Regimurile permanent și tranzitoriu în timp continuu
  - Răspunsul sistemelor continue la semnale de intrare standard
  - Performanțe de regim permanent și tranzitoriu

6 Răspunsul sistemelor elementare la intrări standard

7 Regimurile permanent și tranzitoriu ale sistemelor discrete

1 Introducere. Exemple motivante
- Hard-disk drive (HDD)
- Filtrul de medie alunecare

2 Despre funcții de transfer raționale (complexe)

3 Sisteme SISO și răspunsul în domeniul timp
- Răspunsul sistemelor SISO continue
- Răspunsul sistemelor SISO discrete

4 STABILITATE
- Cazul continuu
- Cazul discret

5 Regimurile permanent și tranzitoriu
- Regimuri de funcționare fundamentale
- Regimurile permanent și tranzitoriu în timp continuu
  - Răspunsul sistemelor continue la semnale de intrare standard
  - Performanțe de regim permanent și tranzitoriu

6 Răspunsul sistemelor elementare la intrări standard

7 Regimurile permanent și tranzitoriu ale sistemelor discrete

# Regimul de funcționare al unui SRA

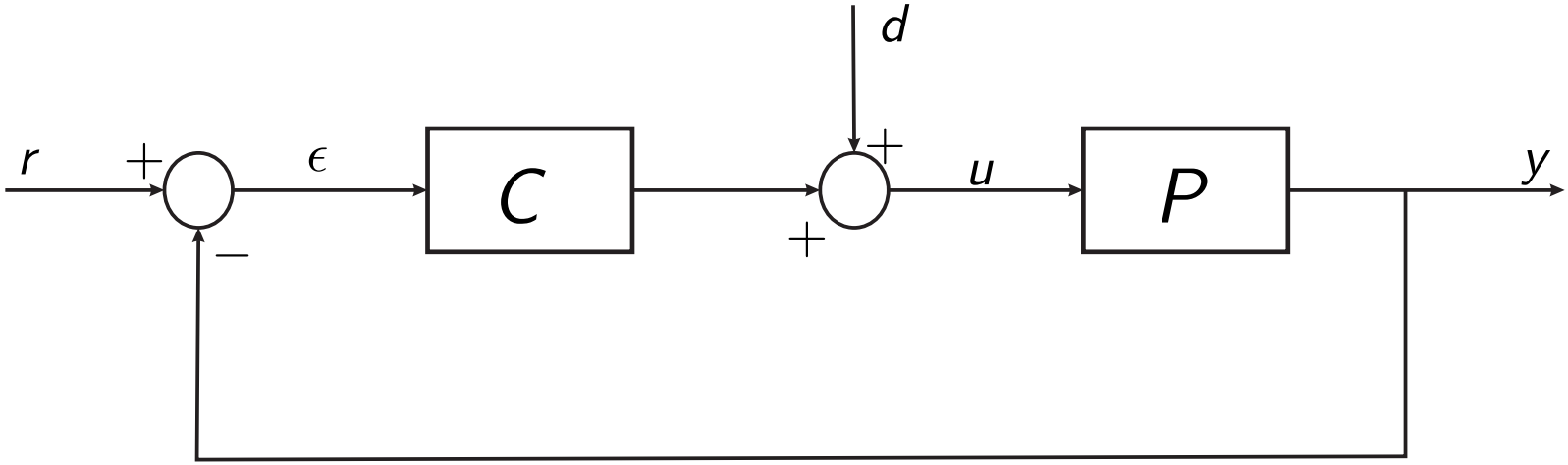



Figura 2: Sistem de reglare automată (SRA)

**Obiectivul reglării**: impunerea ca anumite *variabile specificate* ($y$) ale unui sistem să urmeze evoluții impuse ($r$), în prezența perturbațiilor ($d$). Altfel spus, ieșirea $y$ trebuie să urmărească referința $r$. Trebuie „controlate" variațiile mărimii de ieșire ($y$).

Forma de variație a lui $y$ permite aprecierea regimului de funcționare a SRA, direct influențată de

a) cauze externe (referințe, perturbații)

b) cauze interne (transformarea unor energii acumulate în sistem – ține de elementele constructive ale acestuia).

# Sistemul de focalizare al telescopului Hubble

Telescopul Hubble - lansat în 1990, la o altitudine de aprox. 600 de km. Oglindă de 2.4 m diametru, având o suprafață foarte netedă.

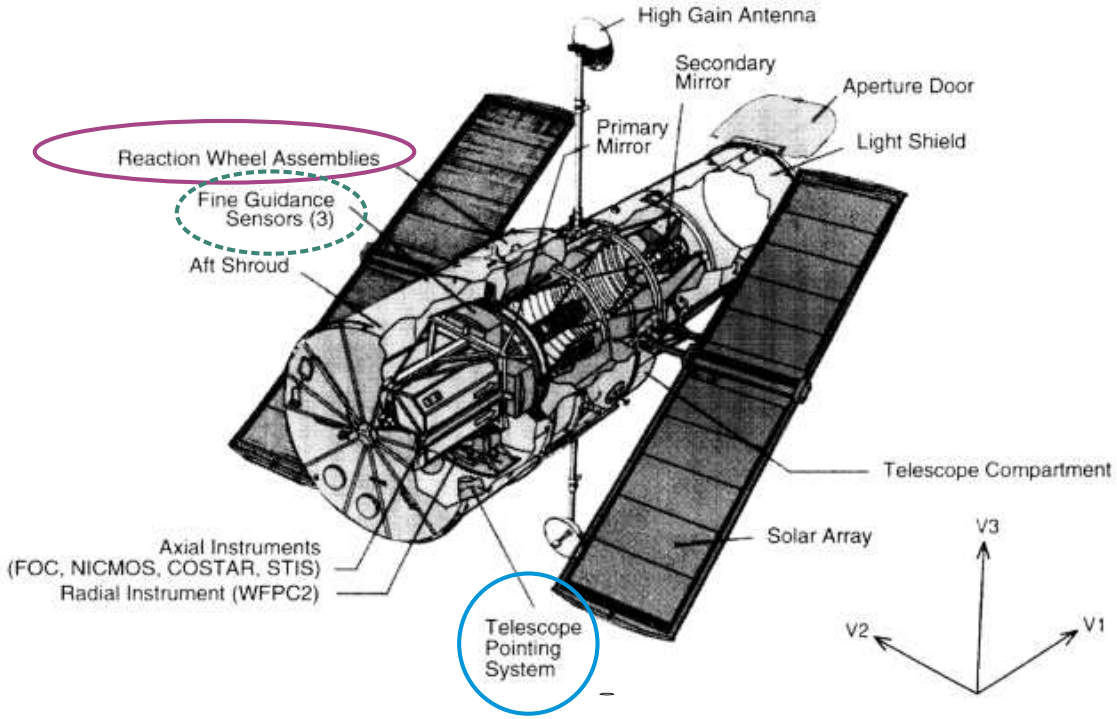



Figura 3: Telescopul Hubble

Este necesar să își îndrepte poziția în funcție de obiectiv, cu o precizie extraordinară - sutimi de secundă de arc (1 arcsec = 1/3600 dintr-un grad).

# Model matematic (simplificat) al PCS

Figura 2, cu procesul „$P$": $G(s) = \dfrac{1}{s(s+K_1)}$. Obiectivele reglării $\Longleftrightarrow$ calculăm regulatorul/compensatorul $C = K = \mathrm{const.}$ a.î.

a) Suprareglaj mai mic de 10%, la referință treaptă: $r(t) = A\,\mathbf{1}(t)$, $A > 0$.
b) Eroare staționară minimă la referințe de tip rampă: $r(t) = B\,t\,\mathbf{1}(t)$, $B > 0$.
c) Rejecția perturbațiilor de tip treaptă: $d(t) = C\,\mathbf{1}(t)$, $C > 0$.

**Q:** Cum se pot realiza aceste obiective?

Scriem funcțiile de transfer din buclă

$$Y(s) = \underbrace{\frac{K\,G(s)}{1+K\,G(s)}}_{T_{yr}(s)} R(s) + \underbrace{\frac{G(s)}{1+K\,G(s)}}_{T_{yd}(s)} D(s) \;\&\; E(s) = \underbrace{\frac{1}{1+K\,G(s)}}_{T_{\varepsilon r}(s)} R(s) - \underbrace{\frac{G(s)}{1+K\,G(s)}}_{T_{\varepsilon d}(s)} D(s). \tag{3}$$

Fiecare din obiectivele a), b) și c) impune condiții asupra funcțiilor de transfer $T_{yr}(s)$, $T_{\varepsilon r}(s)$ și respectiv $T_{yd}(s)$, care depind de $K$!

Studiem $Y(s)$ și $E(s)$, a.î. $y(t)$ și $\epsilon(t)$ au un comportament dorit!!!

# Concepte fundamentale în sistemele de comandă automată

Regim forțat: forma de variație a lui $y$ reproduce forma de variație a lui $r$ (sau a lui $d$).
Regimul forțat poate avea un caracter *permanent* sau *staționar* dacă mărimile exogene își păstrează forma de variație suficient de mult timp, caz în care el se va numi regim permanent sau staționar.

Semnale cu caracter permanent sunt, de exemplu, semnalul de tip treaptă sau semnalul armonic.

Atunci când o mărime exogenă (referință sau perturbație) își modifică forma de variație în timp (de exemplu, un semnal de tip treaptă este înlocuit cu un semnal armonic), atunci sistemul poate trece din regimul staționar de tip treaptă într-un regim staționar de tip armonic.

Regim tranzitoriu: regimul de funcționare al unui SRA aflat în trecerea de la un regim permanent la alt regim permanent.

# Stabilitate înainte de toate!

Sistemul nu poate urmări imediat schimbarea formei de variație în timp a mărimilor exogene: inerție datorată energiei acumulate în *interiorul* sistemului.
Regimul liber: cauze interne (detalii complete - Partea a doua: Sisteme dinamice liniare, pe spațiul stărilor).

Pentru atingerea obiectivelor reglării trebuie realizat un regim permanent.
Sistemele în care se poate realiza un astfel de regim sunt cele stabile.

În această situație, componentele liberă, respectiv tranzitorie (datorate unor cauze interne) se „sting" după suficient de mult timp.
Instabilitatea face ca o parte din mărimile fizice care intervin în sistem să „o ia razna" sau să scape de sub control.

O durată prea mare a regimului instabil poate conduce chiar la distrugerea instalației/procesului.

**Morala**: Stabilitatea – cerința fundamentală în proiectarea SRA. Altfel spus când proiectăm un SRA, pași principali sunt după cum urmează:

1. stabilizăm sistemul (în buclă închisă);
2. studiem regimurile permanent și tranzitoriu ale răspunsului sistemului în buclă închisă a.î. să obținem comportamentul dorit.

1 Introducere. Exemple motivante
- Hard-disk drive (HDD)
- Filtrul de medie alunecare

2 Despre funcții de transfer raționale (complexe)

3 Sisteme SISO și răspunsul în domeniul timp
- Răspunsul sistemelor SISO continue
- Răspunsul sistemelor SISO discrete

4 STABILITATE
- Cazul continuu
- Cazul discret

5 Regimurile permanent și tranzitoriu
- Regimuri de funcționare fundamentale
- Regimurile permanent și tranzitoriu în timp continuu
  - Răspunsul sistemelor continue la semnale de intrare standard
  - Performanțe de regim permanent și tranzitoriu

6 Răspunsul sistemelor elementare la intrări standard

7 Regimurile permanent și tranzitoriu ale sistemelor discrete

# Semnale cu caracter permanent/persistente

Spunem că un semnal $u(t)$ are caracter permanent (este persistent) dacă $\lim_{t\to\infty} u(t) \neq 0$ sau dacă $\lim_{t\to\infty} u(t)$ nu există.
Semnale (standard) cu caracter permanent (sau persistente) de interes:

$$u(t) = \mathbf{1}(t), \quad u(t) = \frac{t^{(n-1)}}{(n-1)!}, \quad u(t) = A\ \mathrm{e}^{j\omega t}\,.$$

**Observația 4**

Polii transformatelor Laplace ale unor astfel de semnale sunt în $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s \geq 0\}$.

**Exemplu.** $u(t) = t\,\mathbf{1}(t)$ este un semnal persistent ($\lim_{t\to\infty} u(t) = +\infty$), cu $\mathcal{L}\{u(t)\}(s) = \dfrac{1}{s^2}$, pe când $v(t) = \mathrm{e}^{-t}\ \mathbf{1}(t)$ satisface $\lim_{t\to\infty} v(t) = 0$, cu $\mathcal{L}\{v(t)\}(s) = \dfrac{1}{s+1}$, și nu are caracter permanent (se „stinge" după suficient de mult timp).

# Răspuns permanent și răspuns tranzitoriu

Fie sistemul **STABIL**

$$H(s) = \frac{r(s)}{p(s)},$$

cu polii $p_i$ cu $\operatorname{Re} p_i < 0$, $i = 1 : k$.
Considerăm semnalul exogen (intrare/referință/ perturbație) $e(t)$ a cărui transformată Laplace este $H_e(s) = \dfrac{r_e(s)}{p_e(s)}$. Pp. că $e(t)$ este persistent, i.e., polii lui $H_e(s)$, $p_{ej}$, verifică $\operatorname{Re} p_{ej} \geq 0$, $j = 1 : n$.
Rezultă

$$Y(s) = H(s)\,\mathcal{L}\{e(t)\}(s) = H(s)\,H_e(s) = \frac{r(s)\,r_e(s)}{p(s)\,p_e(s)}.$$

Cum $p$ și $p_e$ nu au rădăcini *comune*, $Y(s)$ se descompune în fracții simple astfel[1]:

$$Y(s) = \sum_{i=1}^{k} \frac{A_i}{s - p_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{A_{ej}}{s - p_{ej}}$$

[1] Pt. a fixa ideile, am presupus că atât $H(s)$ cât și $H_e(s)$ au numai poli *simpli*. După cum se știe, dacă există multiplicități, în locul coeficienților $A_i$, $A_{ej}$ apar în expresia (4) polinoamele $\pi_i(t)$, $\pi_{ej}(t)$.

# Răspuns permanent și tranzitoriu - continuare

Deducem că

$$y(t) = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} A_i \ e^{p_i t}}_{y_t(t)} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} A_{ej} \ e^{p_{ej} t}}_{y_p(t)} \tag{4}$$

Componenta $y_t$ a răspunsului se numește răspuns (regim) tranzitoriu iar componenta $y_p$ a răspunsului se numește răspuns (regim) permanent.

Se observă imediat că $\lim_{t \to \infty} y_t(t) = 0$ și că $y_p(t)$ reproduce forma de variație a semnalului exogen $e(t)$, având un caracter permanent (explicați de ce).

1 Introducere. Exemple motivante
- Hard-disk drive (HDD)
- Filtrul de medie alunecare

2 Despre funcții de transfer raționale (complexe)

3 Sisteme SISO și răspunsul în domeniul timp
- Răspunsul sistemelor SISO continue
- Răspunsul sistemelor SISO discrete

4 STABILITATE
- Cazul continuu
- Cazul discret

5 Regimurile permanent și tranzitoriu
- Regimuri de funcționare fundamentale
- Regimurile permanent și tranzitoriu în timp continuu
  - Răspunsul sistemelor continue la semnale de intrare standard
  - Performanțe de regim permanent și tranzitoriu

6 Răspunsul sistemelor elementare la intrări standard

7 Regimurile permanent și tranzitoriu ale sistemelor discrete

# Răspunsuri la intrări standard

**1. Intrare de tip treaptă:** $u(t) = \mathbf{1}(t); \quad H_e(s) = \dfrac{1}{s}.$

$$Y(s) = H(s)\frac{1}{s} = \sum_{i=1}^{k} \frac{A_i}{s - p_i} + \frac{A_0}{s}, \quad A_0 = sY(s)|_{s=0} = H(0).$$

Rezultă

$$y(t) = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} A_i \ \mathrm{e}^{p_i t}}_{y_t(t)} + \underbrace{H(0)\,\mathbf{1}(t)}_{y_p(t)}. \tag{5}$$

Răspunsul la un semnal de intrare de tip treaptă se mai numește și *răspuns indicial*. Observăm că ($H(s)$ stabilă și strict proprie)

$$y(\infty) \overset{TVF}{=} \lim_{s\to 0} sY(s) = H(0), \quad y(0) \overset{TVI}{=} \lim_{s\to\infty} sY(s) = H(\infty) = 0.$$

# Răspunsuri la intrări standard

**2. Intrare de tip polinomial:** $u(t) = \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathbf{1}(t); \quad H_e(s) = \dfrac{1}{s^n}.$

$$Y(s) = H(s)\frac{1}{s^n} = \sum_{i=1}^{k} \frac{A_i}{s-p_i} + \frac{A_{0n}}{s^n} + \frac{A_{0n-1}}{s^{n-1}} + \cdots + \frac{A_{01}}{s},$$

unde

$$A_{0l} = \frac{1}{(n-l)!}\,\frac{\mathrm{d}^{n-l}}{\mathrm{d}s^{n-l}}\,[s^n Y(s)]|_{s=0} = \frac{H^{(n-l)}(0)}{(n-l)!}.$$

Rezultă

$$y(t) = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} A_i\ \mathrm{e}^{p_i t}}_{y_t(t)} + \underbrace{\sum_{l=1}^{n} \frac{H^{(n-l)}(0)}{(n-l)!}\,\frac{t^{l-1}}{(l-1)!}}_{y_p(t)}. \tag{6}$$

# Răspunsuri la intrări standard

**3. Intrare de tip armonic:** $u(t) = e^{j\omega t}\ \mathbf{1}(t); \quad H_e(s) = \dfrac{1}{s - j\omega}.$

$$Y(s) = H(s)\frac{1}{s - j\omega} = \sum_{i=1}^{k} \frac{A_i}{s - p_i} + \frac{A_0}{s - j\omega}, \quad A_0 = (s - j\omega)Y(s)|_{s=j\omega} = H(j\omega) \in \mathbb{C}.$$

Rezultă

$$y(t) = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} A_i\ e^{p_i t}}_{y_t(t)} + \underbrace{H(j\omega)\ e^{j\omega t}}_{y_p(t)}. \tag{7}$$

Așadar, răspunsul permanent sau staționar al unui sistem stabil la o intrare de tip armonic este un semnal armonic de *aceeași* frecvență cu semnalul de intrare, având însă amplitudinea și faza modificate.

Reamintim că $H(j\omega) = |H(j\omega)|\ e^{j\arg[H(j\omega)]}$ este răspunsul în frecvență al sistemului.

Mai multe detalii: răspunsul sistemelor elementare la intrări standard.

1 Introducere. Exemple motivante
- Hard-disk drive (HDD)
- Filtrul de medie alunecare

2 Despre funcții de transfer raționale (complexe)

3 Sisteme SISO și răspunsul în domeniul timp
- Răspunsul sistemelor SISO continue
- Răspunsul sistemelor SISO discrete

4 STABILITATE
- Cazul continuu
- Cazul discret

5 Regimurile permanent și tranzitoriu
- Regimuri de funcționare fundamentale
- Regimurile permanent și tranzitoriu în timp continuu
  - Răspunsul sistemelor continue la semnale de intrare standard
  - Performanțe de regim permanent și tranzitoriu

6 Răspunsul sistemelor elementare la intrări standard

7 Regimurile permanent și tranzitoriu ale sistemelor discrete

# Performanțe de regim permanent și tranzitoriu

Revenim la schema standard de reglare din figura 2.

**1. Cerințe relative la regimul permanent sau staționar.**

• Regim permanent la semnal de tip treaptă unitară.
IDEAL: eroare staționară ZERO, $\varepsilon(\infty) = 0$. În acest caz, $y(\infty) = r(\infty) = 1$.
În practică, se va impune o eroare staționară foarte mică. În acest caz, $y(\infty) \approx r(\infty) = 1$.

• Regim permanent la semnal de tip rampă.
Eroare staționară $\varepsilon(\infty) = r(\infty) - y(\infty)$ suficient de mică.

• Regim permanent la semnal de tip armonic.
Amplificarea/atenuarea $|H(j\omega)|$ și defazajul $\arg[H(j\omega)]$ nu trebuie să depășească anumite valori impuse, în intervale de frecvență specificate $[\omega_- \, , \, \omega_+]$.

Performanțele de regim staționar sunt specificate pt. cele 3 tipuri (uzuale) de semnale standard. Performanțele de regim tranzitoriu vor fi specificate doar pt. răspunsul la intrare de tip treaptă unitară.

# Performanțele regimului tranzitoriu

**2. Cerințe relative la regimul tranzitoriu**. În figura 4 este reprezentat grafic răspunsul la treaptă $y_1(t)$ al unui sistem stabil $H(s)$. Reamintim că $y_1 = y_t + y_p$, unde $y_p(t) = H(0)\,\mathbf{1}(t)$.

• *timp de răspuns suficient de scurt*
- timp de creștere $t_c$: timpul în care $y_1(t)$ crește de la $0.1\,H(0)$ la $0.9\,H(0)$ (timpul necesar ajungerii în vecinătatea unui nou regim staționar).
- timp de vârf $t_v$: timpul necesar pt. ca $y_1(t)$ să atingă valoarea maximă.

• *calitatea urmăririi treptei*
- timp tranzitoriu $t_t$: timpul necesar încadrării răspunsului $y_1(t)$ în intervalul $[0.98\,H(0)\,,\ 1.02\,H(0)]$ (timpul necesar componentei tranzitorii să devină aproape zero) - marchează terminarea regimului tranzitoriu.
Așadar $|y_t(t)| \leq 0.02\,H(0)$, pentru $t \geq t_t$.
- suprareglajul $\sigma$: $\sigma = \dfrac{y_{1,\max} - y_p(t)}{y_p(t)} = \dfrac{y_{1,\max} - H(0)}{H(0)}\%$.
- valoarea de vârf: $y_{1,\max}$.

Studiu și calcul detaliat: sisteme de ordinul II.

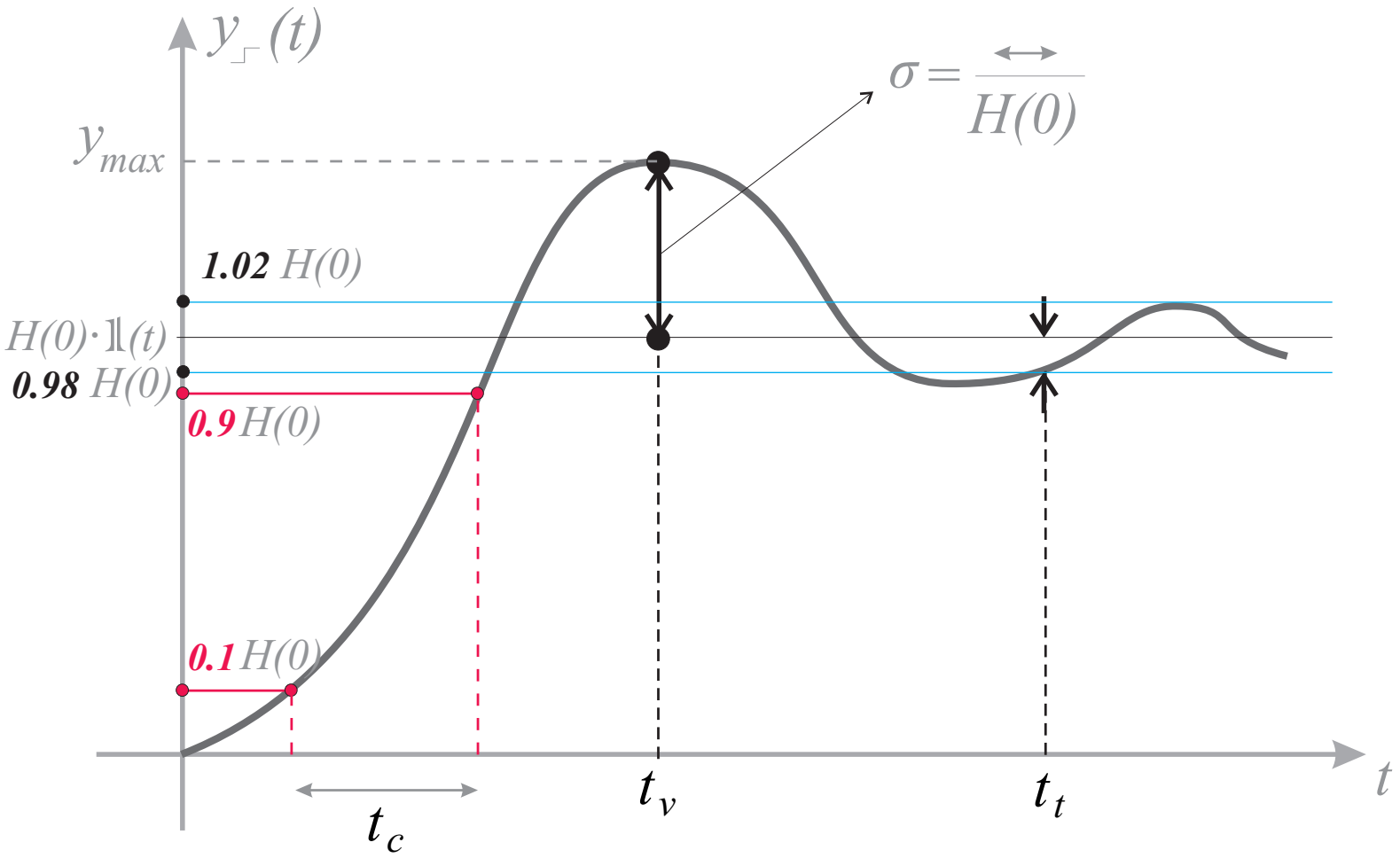



Figura 4: Regim tranzitoriu la intrare treaptă unitară

1. Introducere. Exemple motivante
   - Hard-disk drive (HDD)
   - Filtrul de medie alunecare
2. Despre funcții de transfer raționale (complexe)
3. Sisteme SISO și răspunsul în domeniul timp
   - Răspunsul sistemelor SISO continue
   - Răspunsul sistemelor SISO discrete
4. STABILITATE
   - Cazul continuu
   - Cazul discret
5. Regimurile permanent și tranzitoriu
   - Regimuri de funcționare fundamentale
   - Regimurile permanent și tranzitoriu în timp continuu
     - Răspunsul sistemelor continue la semnale de intrare standard
     - Performanțe de regim permanent și tranzitoriu
6. Răspunsul sistemelor elementare la intrări standard
7. Regimurile permanent și tranzitoriu ale sistemelor discrete

# Răspunsul sistemelor de ordinul întai

Considerăm sisteme de ordinul I, respectiv de ordinul II.

**a) Răspunsurile sistemului de ordinul I la intrare de tip treaptă, rampă și de tip armonic.** Fie

$$H(s) = \frac{K}{Ts+1},$$

unde $K, T > 0$ sunt *factorul de amplificare*, respectiv *constanta de timp* a sistemului.

*Răspuns la intrare treaptă*: $Y(s) = \dfrac{K}{s(Ts+1)} = \dfrac{H(0)}{s} - \dfrac{K}{s+\frac{1}{T}}$.

Rezultă

$$y_1(t) = \left(K - K\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{T}}\right)\,\mathbf{1}(t).$$

# Răspunsul sistemelor de ordinul întai

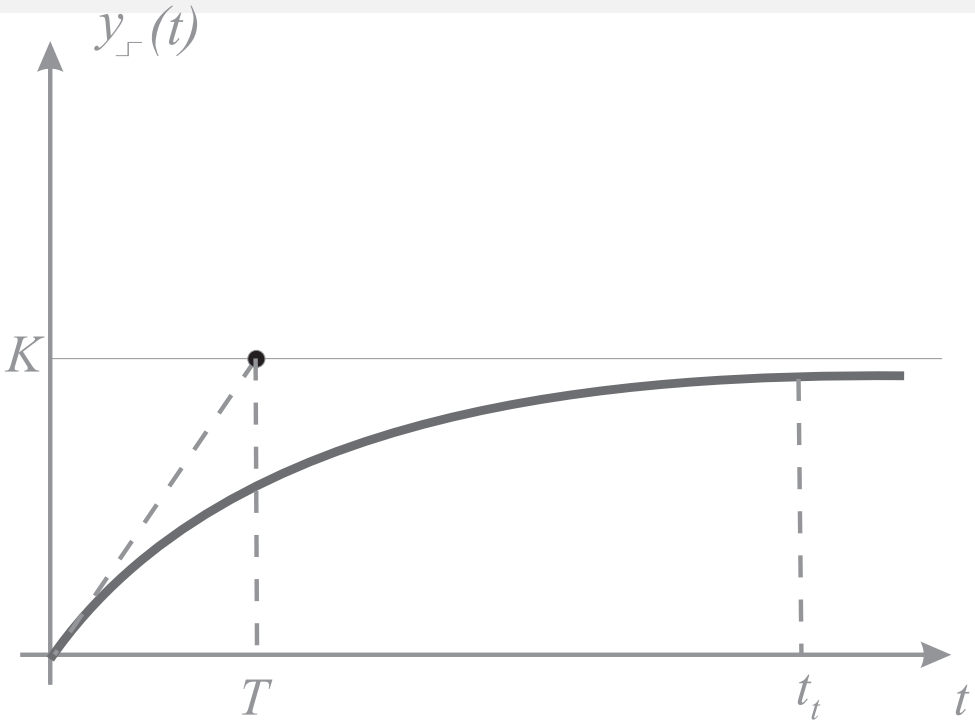


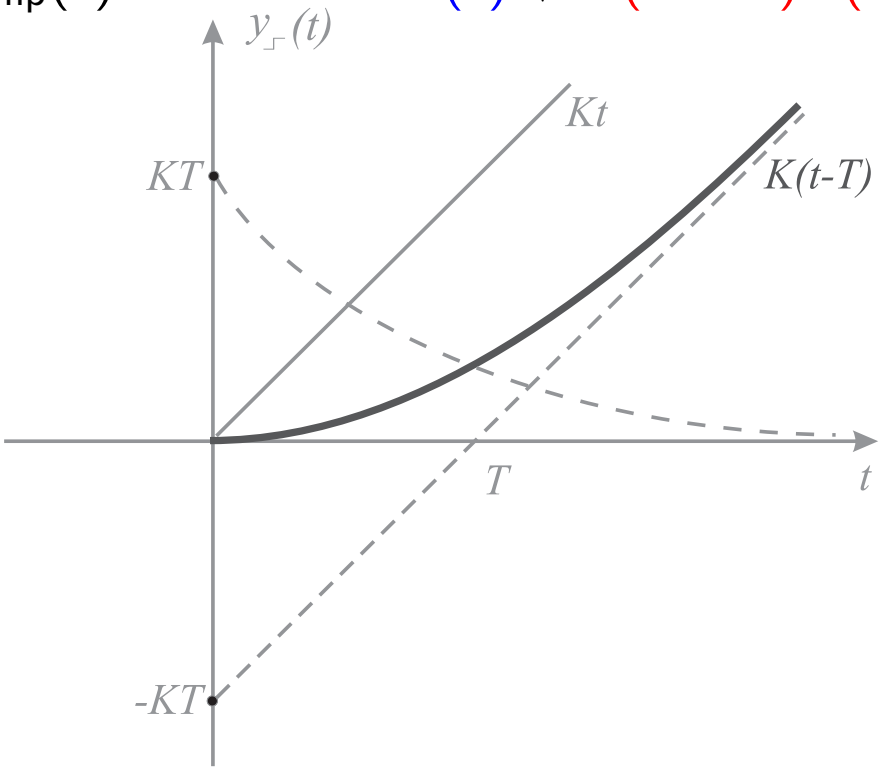

Figura 5: Răspunsul sistemului de ordin I la treaptă

- Regim staționar: identic cu intrarea (pt. $K = 1$).
- Suprareglaj: $\sigma = 0$.
- Timp tranzitoriu: $t_t \approx 4T$ $\left(\left|-K\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{T}}\right| < 0.02K,\ \forall t \geq 4T\right)$.

# Răspunsul sistemelor de ordinul întai

*Răspuns la intrare rampă*: $Y(s) = \dfrac{K}{s^2(Ts+1)} = \dfrac{KT}{s+\frac{1}{T}} + \dfrac{H(0)}{s^2} + \dfrac{H'(0)}{s}.$

$$y_{\text{ramp}}(t) = KT\ \mathrm{e}^{-\frac{t}{T}}\ \mathbf{1}(t) + K(t-T)\,\mathbf{1}(t).$$




Regim staționar: NU este identic cu intrarea (pt. $K = 1$); are doar aceeași formă de variație.

# Răspunsul sistemului de ordinul întâi

*Răspuns la intrare de tip armonic*:

$$Y(s) = \frac{K}{(Ts+1)(s-j\omega)} = H(j\omega)\frac{1}{s-j\omega} - H(j\omega)\frac{1}{s+\frac{1}{T}}.$$

$$y_\sim(t) = -\frac{K}{1+j\omega T}\, e^{-\frac{t}{T}} + \frac{K}{1+j\omega T}\, e^{j\omega t}, t \geq 0.$$

Regim staționar:

$$y_p(t) = \frac{K}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}\, e^{j(\omega t + \arctan(\omega T))}.$$

Semnal de aceeași frecvență, cu amplitudine și fază modificate.

Regim tranzitoriu:

$$y_t(t) = \frac{K}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}\, e^{-\frac{t}{T}}\, e^{j\arctan(\omega T)}.$$

$\mathrm{Re}\, y_\sim(t)$ - răspunsul la intrare $\cos\omega t\, \mathbf{1}(t)$;

$\mathrm{Im}\, y_\sim(t)$ - răspunsul la intrare $\sin\omega t\, \mathbf{1}(t)$.

# Răspunsul sistemelor de ordinul al doilea...

**b)** ... la intrare de tip treaptă. Fie

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2},$$

unde $\omega_n > 0$ și $0 \leq \zeta \leq 1$ sunt *pulsația naturală*, respectiv *factorul de amortizare*. Polii sistemului $H(s)$ sunt complex conjugați:

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\,\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \overset{\text{not.}}{=} \sigma_d \pm j\,\omega_d.$$

- Răspuns la intrare treaptă $u(t) = \mathbf{1}(t)$ :

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{H(0)}{s} - \frac{s-\sigma_d}{(s-\sigma_d)^2 + \omega_d^2} - \frac{\omega_d}{(s-\sigma_d)^2 + \omega_d^2}\,\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Longrightarrow} y_1(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\,\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t)\right)$$

$$= 1 - \frac{\mathrm{e}^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\,\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t + \varphi), \quad t \geq 0,$$

unde $\cos\varphi = \zeta$, $\sin\varphi = \sqrt{1-\zeta^2}$.

# Răspunsul sistemelor de ordinul al doilea

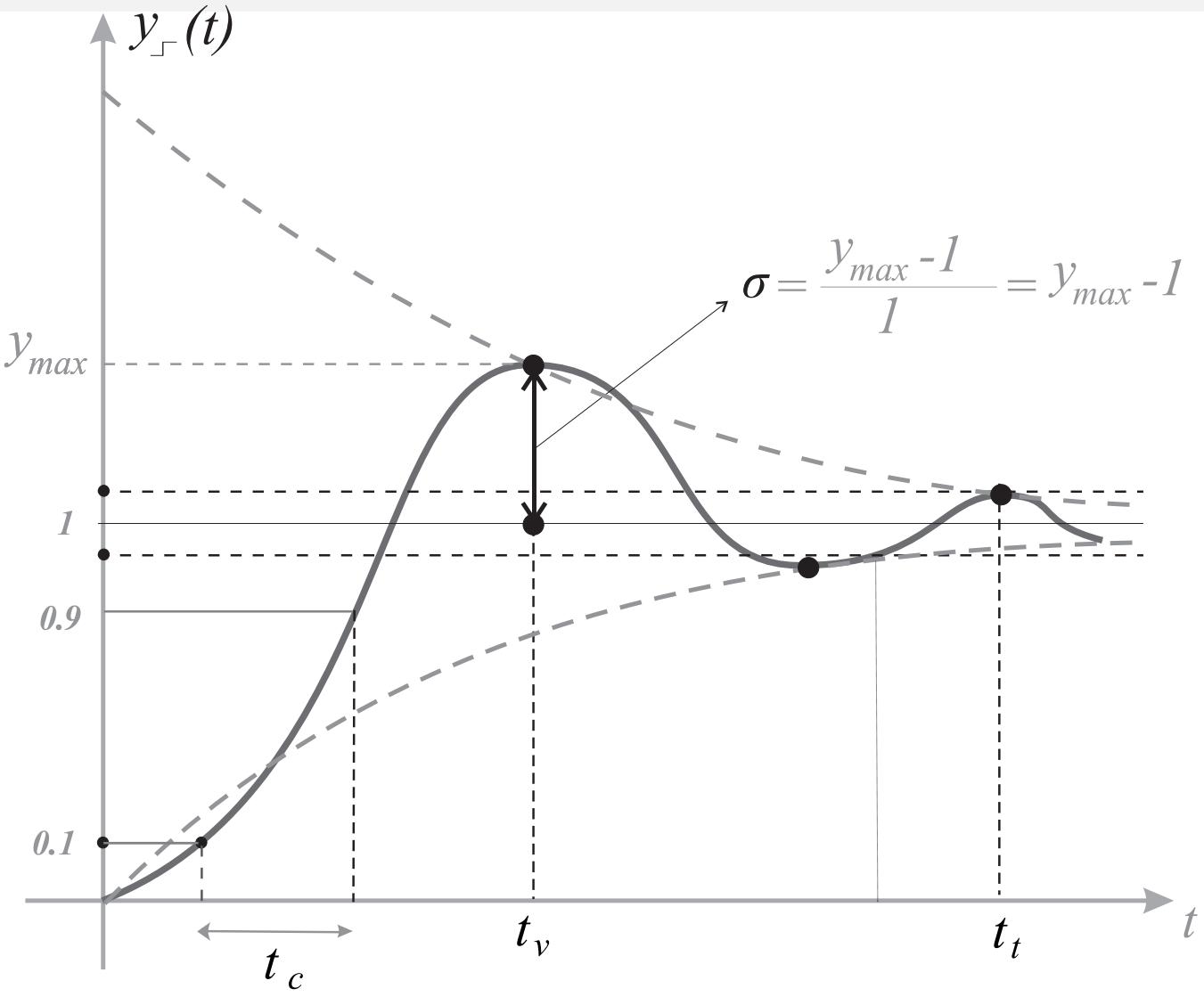



Figura 6: Răspunsul sistemului de ordinul al doilea la intrare treaptă unitară

# Regimuri de funcționare a răspunsului indicial al sistemelor de ordinul al doilea

$\zeta = 0$: $y_1(t) = 1 - \cos\omega_n t$ - regim oscilant.

$\zeta = 1$: $y_1(t) = 1 - \omega_n t\, \mathrm{e}^{-\omega_n t} - \mathrm{e}^{-\omega_n t}$ - regim critic.

$\zeta > 1$: regim supracritic - sistemul are 2 poli reali simpli.

$\zeta < 1$: regim subcritic - cazul care ne interesează; apar oscilațiile amortizate.

# Performanțe de regim staționar ale sistemelor de ordinul II

Determinăm punctele critice ale funcției $y_1(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}y_1(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}\,\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t)\;\mathrm{e}^{-\zeta\omega_n t} = 0.$$

Rezultă $t_k = \dfrac{k\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$, de unde

$$y(t_k) = 1-(-1)^k\,\mathrm{e}^{-\zeta\omega_n t_k} = \begin{cases} 1-\mathrm{e}^{-\zeta\omega_n t_k}, & k=\text{par}, \quad \text{minime locale},\\ 1+\mathrm{e}^{-\zeta\omega_n t_k}, & k=\text{impar}, \quad \text{maxime locale}.\end{cases}$$

Se observă că $y_{\max} = y(t_1) = 1+\mathrm{e}^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$, deci suprareglajul este dat de

$$\sigma = \mathrm{e}^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}. \tag{8}$$

# Performanțe de regim staționar ale sist. de ordinul al doilea

Suprareglajul depinde *doar* de factorul de amortizare.

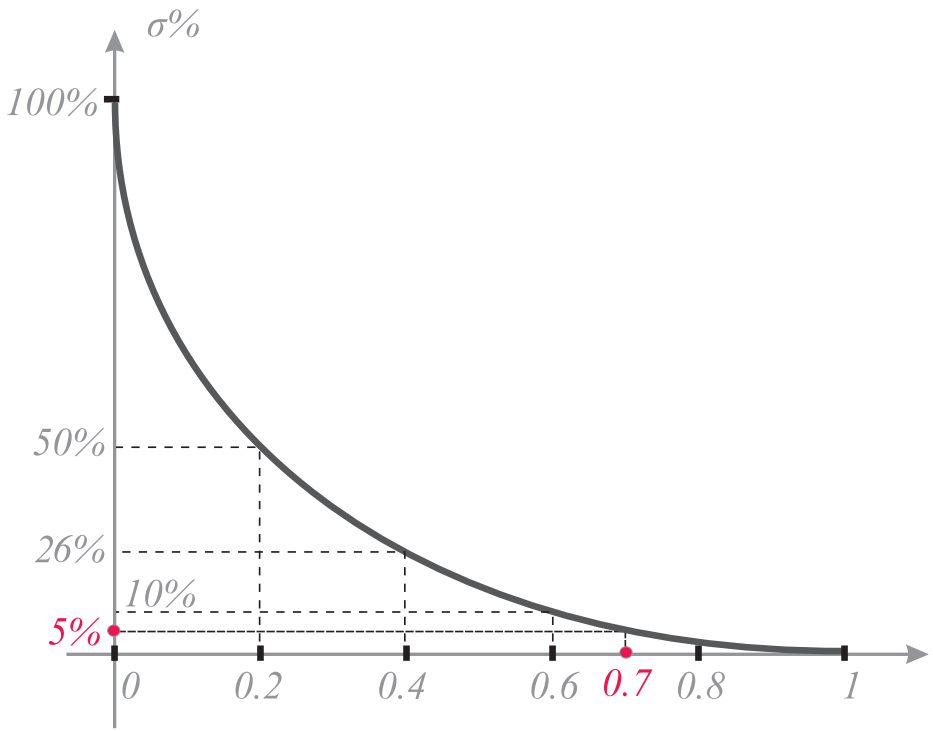



Figura 7: Dependența suprareglajului de factorul de amortizare

Tabel cu valori estimative:

| $\zeta$ | 0.2 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sigma$ | 50% | 26% | 16% | 10% | 5% |

# Alte estimări - timp tranzitoriu, timp de vârf

Estimarea timpului tranzitoriu $t_t$.
Dacă pt. un extrem local $|y_t(t_k)| < 0.02$, atunci $|y_t(t)| < 0.02$ pentru orice $t \geq t_k$. Se verifică (la fel ca la estimarea $t_t$ la sistemele de ordin I) inegalitatea $|y_t(t_k)| < 0.02$ pentru orice $t_k \geq \dfrac{4}{\zeta\omega_n}$. Rezultă

$$|y_t(t)| < 0.02, \quad \forall t \geq \frac{4}{\zeta\omega_n} \approx t_t.$$

Pentru $0.3 < \zeta < 0.8$, timpul de creștere poate fi apreciat cu ajutorul formulei

$$t_c \approx \frac{1.8}{\omega_n}.$$

Timpul de vârf, $t_v$, este chiar $t_1 = \dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$.

# Plasarea polilor sistemului de ordin II v. performanțe

**Problema**: Se cere determinarea zonei din $\mathbb{C}$ în care trebuie plasați polii unui sistem de ordin II, $p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\,\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$, astfel încât regimul tranzitoriu să în deplinescă anumite cerințe de performanță impuse: $\sigma \leq \sigma_0$, $t_t \leq t_{t0}$, $t_c \leq t_{c0}$.

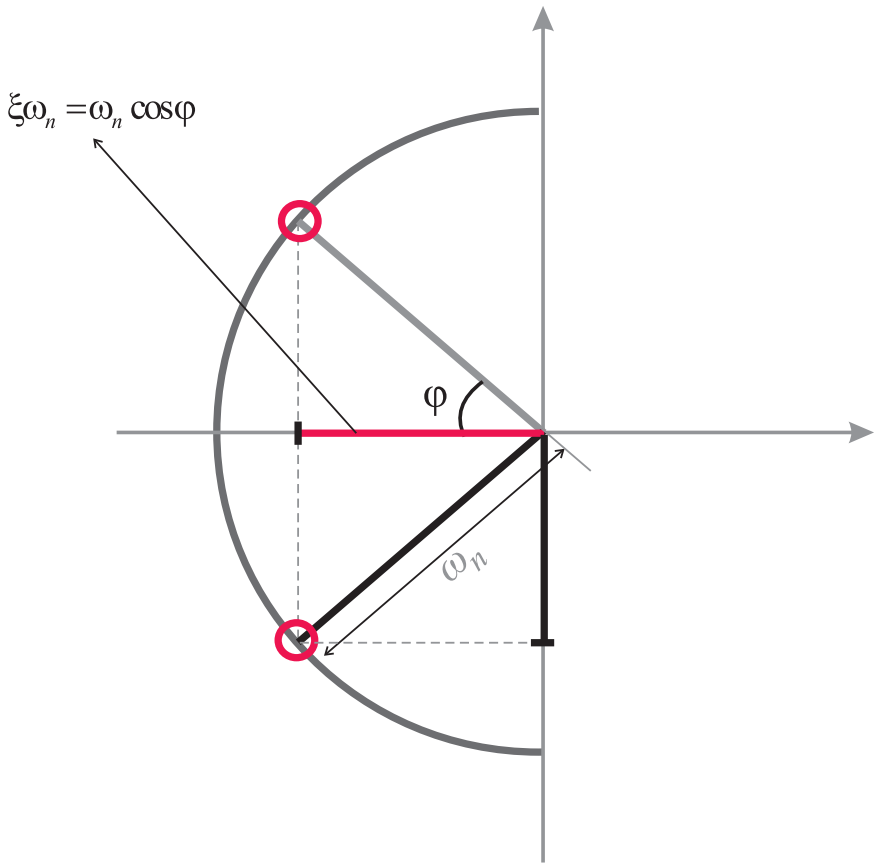
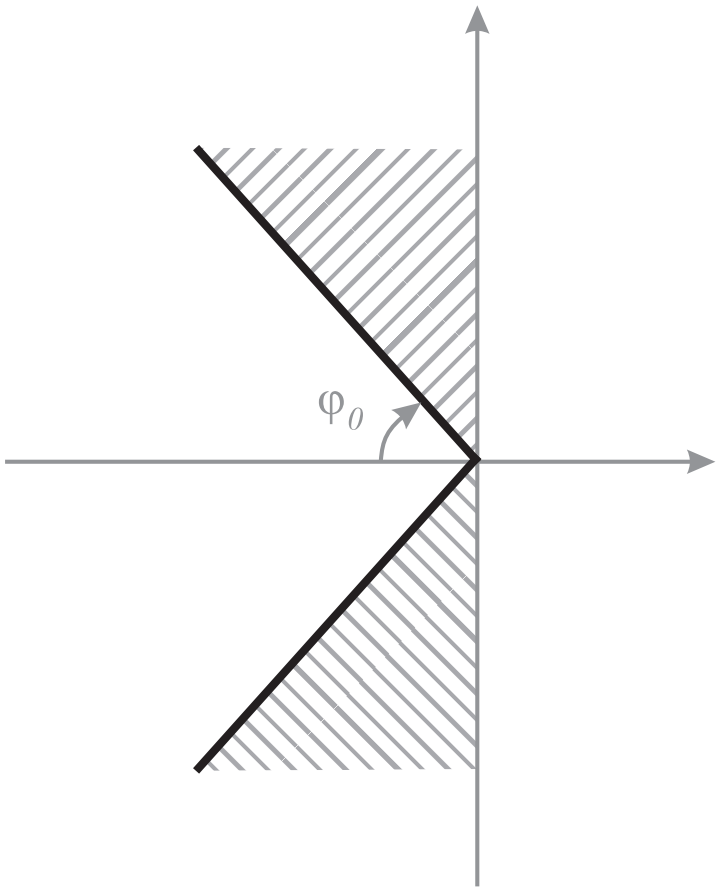



Figura 8: Plasarea polilor sistemului de ordin II

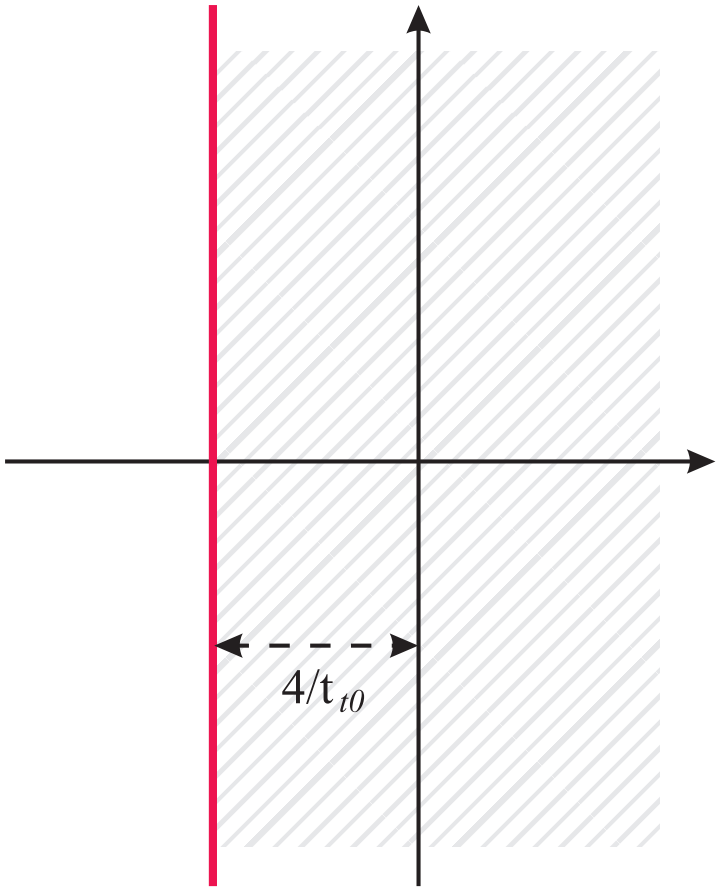
# Poli pentru suprareglaj dorit

Inegalitatea $\sigma \leq \sigma_0$ implică $\zeta \geq \zeta_0$ (vezi figura 7); cum $\zeta = \cos\varphi$ $(0 \leq \phi \leq \pi/2)$, rezultă $\varphi < \varphi_0$, $\varphi_0 = \arccos\zeta_0$.



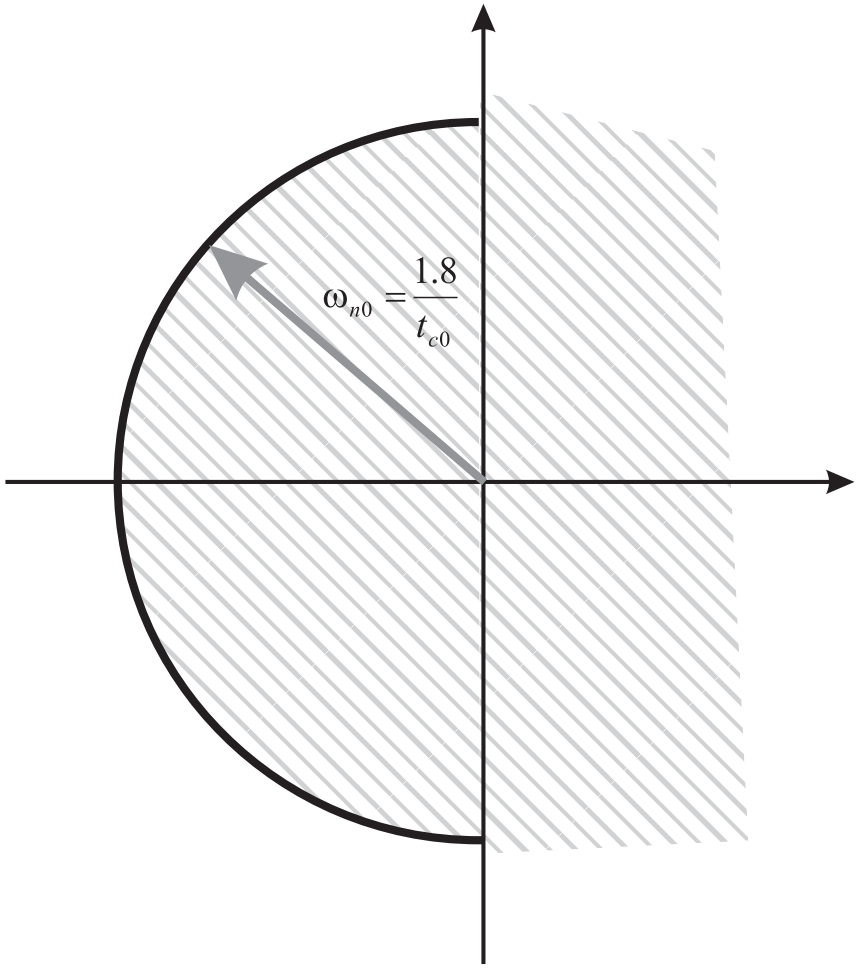
# Poli pt. timp tranzitoriu dorit

Avem $t_t = \dfrac{4}{\zeta\omega_n} \leq t_{t0}$, de unde $\zeta\omega_n \geq \dfrac{4}{t_{t0}}$.

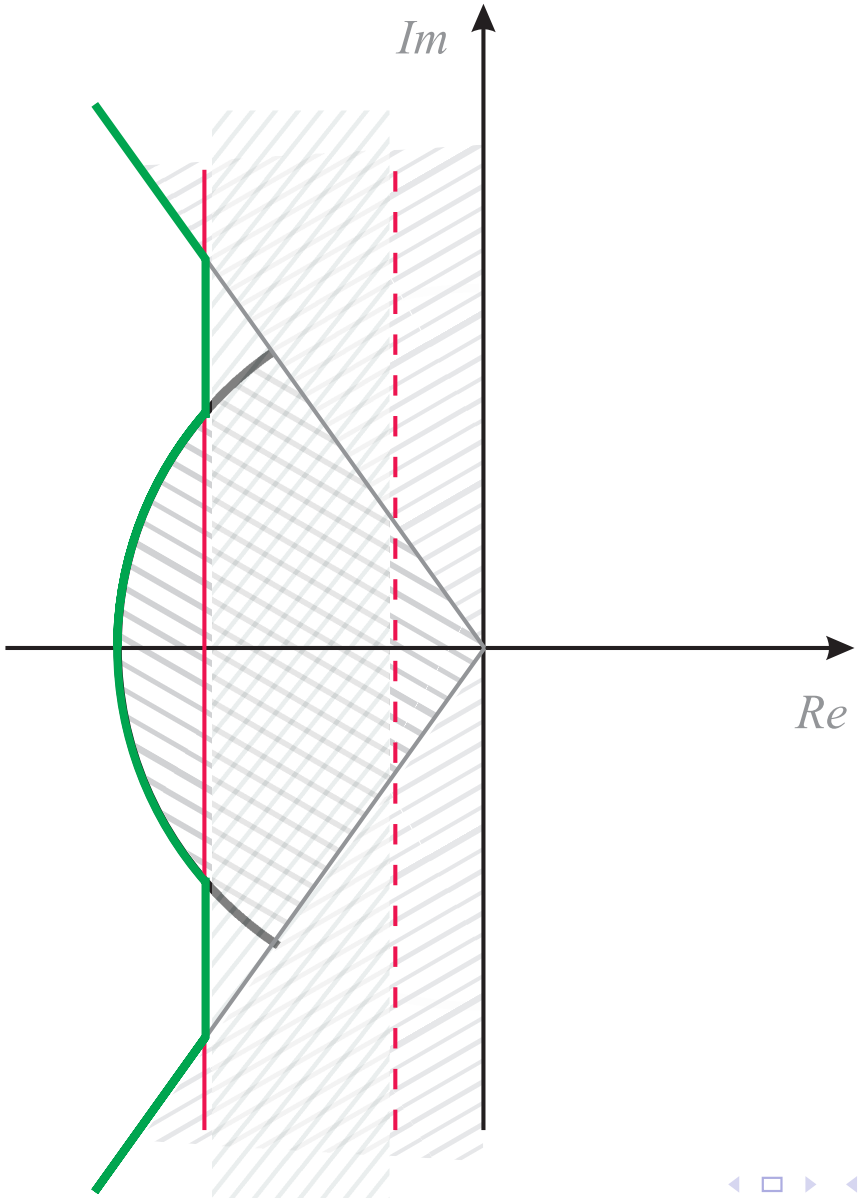


# Poli pentru timp de creștere dorit

La fel ca mai sus, se deduce că $\omega_n \geq \dfrac{1.8}{t_{c0}}$.



# Polii care verifică toate constrângerile



# Sistemul automat de focalizare al telescopului Hubble: SOLUȚII

Scriem $T_{yr}(s)$, $T_{\varepsilon r}(s)$ și $T_{yd}(s)$ în funcție de $K$ și $K_1$. Toate funcțiile de transfer sunt stabile pentru valori pozitive ale lui $K$ și $K_1$.

**a)** Avem

$$T_{yr}(s) = \frac{K}{s^2 + K_1 s + K} = \frac{\omega^2}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2},$$

unde $\omega = \sqrt{K}$, $0 < \zeta = \dfrac{K_1}{2\sqrt{K}} < 1$. Deoarece $\sigma \leq 10\%$, rezultă $\zeta = 0.6$ (vezi tabelul de variație al lui $\sigma$ în funcție de $\zeta$), deci $K_1 = 1.2\sqrt{K}$.

**b)** Cum

$$E(s) = T_{\varepsilon r}(s)R(s) = \frac{s^2 + K_1 s}{s^2 + K_1 s + K}\,\frac{B}{s^2},$$

rezultă $\varepsilon_{R,ramp}(\infty) \overset{TVF}{=} \lim\limits_{s\to 0} sE(s) = B\dfrac{K_1}{K}$. **Eroarea staționară este minimizată de un raport $K_1/K$ cât mai mic**.

# Valori pentru $K$ și $K_1$

Similar punctului b),

$$E(s) = T_{\varepsilon d}(s)D(s) = -\frac{1}{s^2 + K_1 s + K}\frac{C}{s}$$

și $\varepsilon_{D,step}(\infty) \overset{TVF}{=} \lim_{s\to 0} sD(s) = -C\frac{1}{K}$, de unde necesitatea unei **amplificări** $K$ **cât mai mari**.

Valori numerice posibile: $K = 100$, $K_1 = 12$; $K = 25$, $K_1 = 6$; $K = 200$, $K_1 = 16.92$.

Deși amplificarea poate fi în acest caz oricât de mare, pentru că nu se pierde stabilitatea buclei pentru nici o valoare pozitivă a lui $K$, în practică există limitări de natură tehnologică a valorii maxime a amplificării.

1. Introducere. Exemple motivante
   - Hard-disk drive (HDD)
   - Filtrul de medie alunecare
2. Despre funcții de transfer raționale (complexe)
3. Sisteme SISO și răspunsul în domeniul timp
   - Răspunsul sistemelor SISO continue
   - Răspunsul sistemelor SISO discrete
4. STABILITATE
   - Cazul continuu
   - Cazul discret
5. Regimurile permanent și tranzitoriu
   - Regimuri de funcționare fundamentale
   - Regimurile permanent și tranzitoriu în timp continuu
     - Răspunsul sistemelor continue la semnale de intrare standard
     - Performanțe de regim permanent și tranzitoriu
6. Răspunsul sistemelor elementare la intrări standard
7. Regimurile permanent și tranzitoriu ale sistemelor discrete

# Răspuns permanent și tranzitoriu în discret - treaptă

Aceleași noțiuni ca în cazul sistemelor cu timp continuu. Ne concentrăm asupra răspunsului permanent și tranzitoriu la intrare de tip treaptă $u(k) = \mathbf{1}(k)$, și de tip armonic, $u(k) = e^{j\omega k}$.

**I. Răspunsul la treaptă:** Fie sistemul stabil $H(z) = \dfrac{b(z)}{a(z)}$. Presupunem (pt. simplitatea expunerii) că $H$ are poli reali, simpli, $p_i$. Deoarece $Y(z) = H(z)U(z) = H(z)\dfrac{z}{z-1}$, obținem

$$\frac{Y(z)}{z} = \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{1}{z-p_i} + A_0 \frac{1}{z-1}, \quad A_0 = (z-1)\left.\frac{Y(z)}{z}\right|_{z=1} = H(1).$$

Rezultă automat că $y(k) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} A_i\, p_i^k}_{y_t(k)} + \underbrace{A_0\, \mathbf{1}(k)}_{y_p(k)}$,

unde $y_t(k)$ si $y_p(k) = H(1)\,\mathbf{1}(k)$ sunt răspunsurile tranzitoriu și respectiv permanent ale sistemului $H(z)$ la intrare treaptă.

# Exemple - răspuns la treaptă în discret

**Exemplul 1.** Calculați răspunsul sistemului $H(z) = \dfrac{1}{z-2}$ la intrare treaptă unitară.

*Soluție:* $Y(z) = H(z)U(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-2)} = \dfrac{z}{z^2-3z+2}$.

**I.** $z/(z^2-3z+2) = z^{-1} + 3z^{-2} + 7z^{-3} + 15z^{-4} + \ldots = \sum_0^\infty (2^k-1)z^{-k}$. Cât este $y(k)$ ?

**II.** $Y(z)$ are doi poli simpli, $p_1 = 1$ și $p_2 = 2$. Deducem că $y(k) =$

$$(z-1)\, z^{k-1} Y(z)|_{z=1} + (z-2)\, z^{k-1} Y(z)|_{z=2} = \left.\frac{z^k}{z-2}\right|_{z=1} + \left.\frac{z^k}{z-1}\right|_{z=2} = (-1+2^k)\,\mathbf{1}(k).$$

**III.** Avem $\dfrac{Y(z)}{z} = \dfrac{1}{z-2} - \dfrac{1}{z-1} \Rightarrow Y(z) = \dfrac{z}{z-2} - \dfrac{z}{z-1}$. Așadar, $y(k) = 2^k\mathbf{1}(k) - \mathbf{1}(k)$.

# Răspuns permanent și tranzitoriu în discret - armonică

**b. Răspunsul la armonică:** Pentru $u(k) = e^{j\omega k} \overset{\mathcal{Z}}{\Longleftrightarrow} U(z) = \dfrac{z}{z - e^{j\omega}}$, scriem

$$\frac{Y(z)}{z} = \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{1}{z - p_i} + A_0 \frac{1}{z - e^{j\omega}},$$

cu

$$A_0 = (z - e^{j\omega}) \left.\frac{Y(z)}{z}\right|_{z=e^{j\omega}} = H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{j\omega n} = \mathcal{F}\{h(n)\}(e^{j\omega}).$$

Astfel

$$y(k) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} A_i \, p_i^k}_{y_t(k)} + \underbrace{A_0 \, e^{j\omega k}}_{y_p(k)},$$

unde $y_t(k)$ și $y_p(k) = H(e^{j\omega}) \, e^{j\omega k}$ sunt răspunsurile tranzitoriu și, respectiv, permanent ale sistemului $H(z)$ la intrare de tip armonic.

Observația 5 (Explicați de ce)

În ambele situații $\lim\limits_{k\to\infty} y_t(k) = 0$.

# Exemple

1. $H(z) = \dfrac{1}{z^2 - 2z + 1}$, $u(n) = \mathbf{1}(n)$;
2. $H(z) = \dfrac{1}{z + 0.2}$, $u(k) = e^{j\omega k}\mathbf{1}(k)$. Determinați $y_p(k)$ și $y_t(k)$. Aceeași întrebare pentru $u(k) = \sin \omega k$.

# Sisteme de convoluție–proprietăți, stabilitate, răspuns

**Tudor C. Ionescu**

Dept. de Automatică și Ingineria Sistemelor (ACSE),
Facultatea de Automatică și Calculatoare,
Universitatea Politehnica București

e-mail: `tudor.ionescu@acse.pub.ro`

URL: `http://acse.pub.ro/person/tudor-cornel-ionescu/`

octombrie 2019

1 Semnale & Sisteme - definiții

2 Semnale. Operații. Transformări
- Operații
- Transformata Laplace
- Transformata $\mathcal{Z}$

3 Sisteme. Proprietăți fundamentale.
- Sisteme de convoluție
- Stabilitate
- Răspuns în timp
- Răspuns în frecvență
- Funcția de transfer a unui sistem de convoluție

# Semnale & Sisteme - definiții

Un semnal este o *funcție* de timp.

### Definiția 1

Se numește semnal o funcție $f : \mathcal{T} \to A$, unde $A$ este o mulțime dată numită imaginea (sau mulțimea de valori a) semnalului iar $\mathcal{T}$ este axa (sau domeniul de definiție a) semnalului.
Dacă $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$ (mulțime „continuă"), atunci $u$ este un semnal *continual*; în cazul în care $\mathcal{T} \subset \mathbb{Z}$ (mulțime „discretă") atunci $u$ este un semnal *discret*.

### Definiția 2

Înțelegem prin sistem în accepțiunea intrare-ieșire o aplicație $T : \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$, $y = T(u)$, unde $\mathcal{U}$, $\mathcal{Y}$ sunt spațiul semnalelor de **intrare**, respectiv, spațiul semnalelor de **ieșire**.

1 Semnale & Sisteme - definiții

2 Semnale. Operații. Transformări
- Operații
- Transformata Laplace
- Transformata $\mathcal{Z}$

3 Sisteme. Proprietăți fundamentale.
- Sisteme de convoluție
- Stabilitate
- Răspuns în timp
- Răspuns în frecvență
- Funcția de transfer a unui sistem de convoluție

# Caracterizări. Exemple

Un semnal este o *funcție* de timp.

Mărimi fizice variabile în timp

- forța $F$ care acționează asupra unui punct material,
- tensiunea $v_o$ la ieșirea unui AO,
- curentul $i$. printr-un element de circuit,
- presiunea $p$ a unui fluid.

**Notație**:

- $F$, $v_o$, $p$ sau $F(\cdot)$, $v_o(\cdot)$, $p(\cdot)$ se referă la *semnal* sau *funcție*;
- $F(t)$, $v_o(10.33)$, $p(t-1)$ desemnează *valoarea* semnalelor la *momentele* $t$, $10.33$, $t-1$.

### Observația 1

Pentru utilizarea calculatorului semnalele cu timp continuu pot fi discretizate/eșantionate = transformate în semnale cu timp discret. Folosim anumiți pași astfel încât pierderea de informație să fie cât mai puțină și să putem reconstrui semnalul la nevoie (detalii mai târziu).

# Exemple

1) Cursul leu-dolar. Axa semnalului: discretă; imaginea: $\mathbb{R}_+$.

2) O secvență semi-infinită de biți: $0111001\ldots$. Axa semnalului: $\mathbb{Z}_+$; imaginea: $\{0, 1\}$.

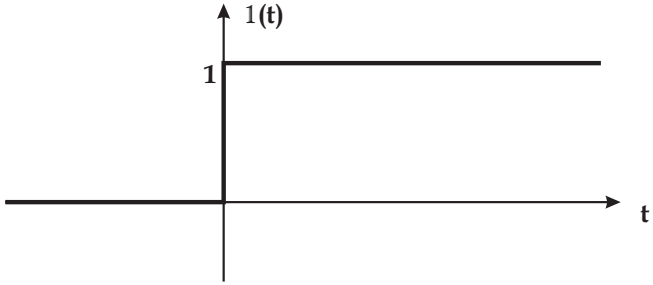
3) Tensiunea de ieșire a unui AO. Axa semnalului: $\mathbb{R}_+$; imaginea: $\mathbb{R}$.

4) Nivelul apelor Dunării: semnal eșantionat.

# Semnale standard - treaptă & rampă

a) Treaptă unitară: $\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

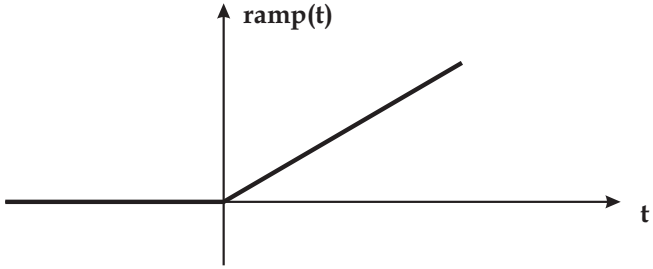
Semnal scalar
real, continuu pe porțiuni. De tip „curent continuu".




b) Treaptă unitară discretă: $\mathbf{1}(k) = \begin{cases} 1, & k \geq 0, \\ 0, & k < 0. \end{cases}$

c) Rampă: $\mathrm{ramp}(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

Semnal scalar real. Funcție de tip „polinomial".

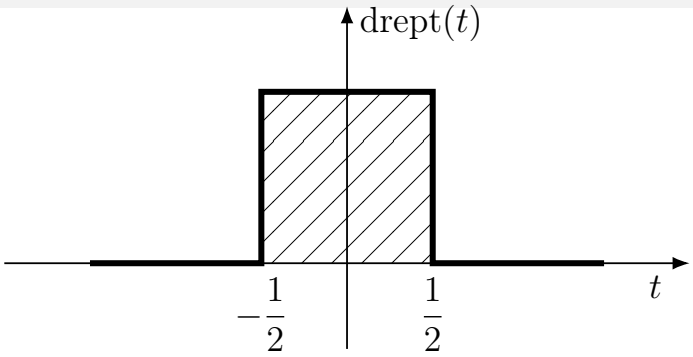


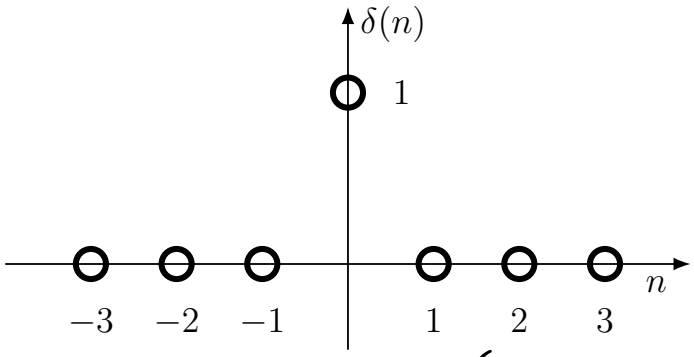

## Observația 2

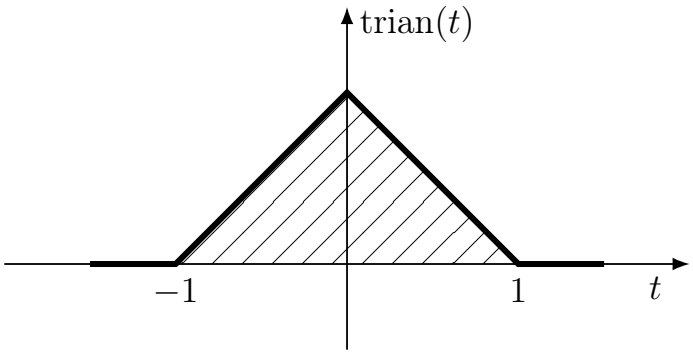
$\mathrm{ramp}(t) = t\,\mathbf{1}(t)$. În general, pentru a pune în evidență suportul pozitiv al semnalului, îl înmulțim cu $1(t)$, i.e., $\begin{cases} f(t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} = f(t) \cdot \mathbf{1}(t)$, cu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Similar în cazul discret.

# Semnale standard - impuls & aproximări



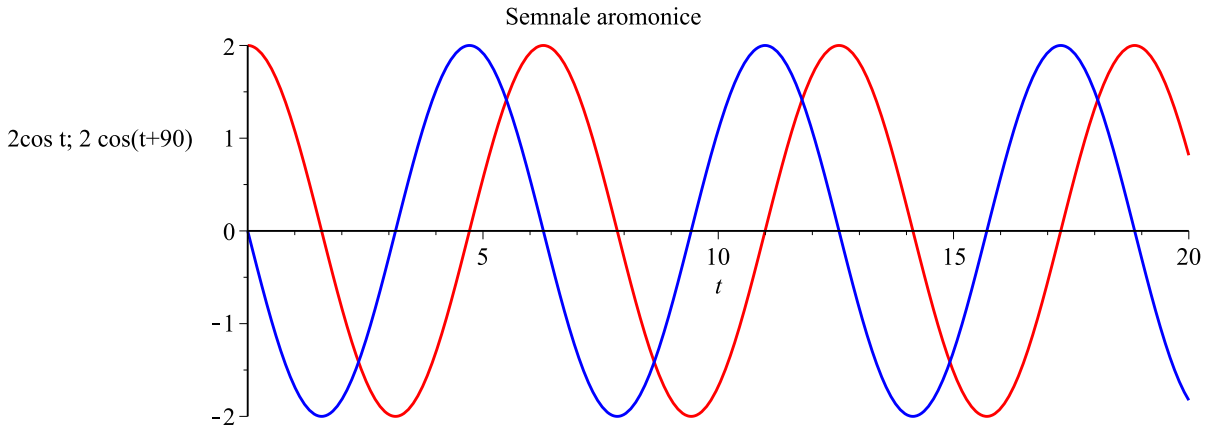




d) Impuls discret: $\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$

e) Impuls dreptunghiular: $\text{drept}(t) = \begin{cases} 1, & a \leq t \leq b, \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$

f) Impuls triunghiular: $\text{trian}(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & -1 \leq t \leq 1, \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$

# Semnale standard - armonice




$$u(t) = A\cos(\omega t + \phi),$$

cu

- $A$ - amplitudinea,
- $\omega$ - pulsația, i.e., $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ unde $f \in \mathbb{R}_+$ este frecvența semnalului iar $T \in \mathbb{R}_+$ este perioada acestuia,
- $\phi$ - faza (sau defazajul).

Reprezentarea *complexă* a semnalelor armonice ($a \in \mathbb{C}$):

$$u(t) = a\, e^{j\omega t} = A\, e^{j\phi}\, e^{j\omega t} = A\cos(\omega t + \phi) + j\, A\sin(\omega t + \phi).$$

1 Semnale & Sisteme - definiții

2 Semnale. Operații. Transformări
- Operații
- Transformata Laplace
- Transformata $\mathcal{Z}$

3 Sisteme. Proprietăți fundamentale.
- Sisteme de convoluție
- Stabilitate
- Răspuns în timp
- Răspuns în frecvență
- Funcția de transfer a unui sistem de convoluție

# Operații cu semnale

Fie $u(t)$ și $v(t)$ două semnale.

*Operații standard*

- Adunarea/suma: $(u+v)(t) = u(t) + v(t)$;
- Produs: $(uv)(t) = u(t)v(t)$;
- (Produs de) Convoluție:

*Transformarea axei de timp*

- Scalarea axei de timp: $u_\alpha(t) = (u)(\alpha t),\ \alpha \in \mathbb{R}$.
  Dacă $\alpha < 1 \Rightarrow$ dilatarea axei de timp.
  Dacă $\alpha > 1 \Rightarrow$ contractarea axei de timp.
- Inversarea: $u_-(t) = u(-t),\ t \geq 0$;
- Translația/întârzierea (vezi Figura 1): $(\sigma^\tau u)(t) = u_\tau(t) = u(t-\tau),\ \tau \in \mathbb{R}$.
  În discret: $(\sigma^l x)(n) = x(n-l),\ n \in \mathbb{Z}$.
  Translația - rol important în definirea invarianței în timp a sistemelor liniare.

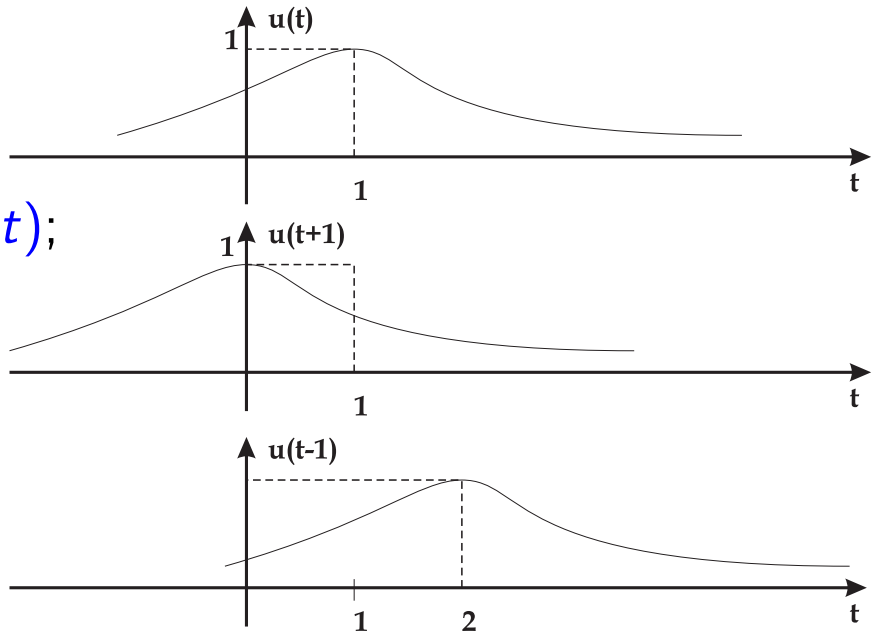



Figura 1: Translație în timp ($\tau = 1$)

# Operații cu semnale–Convoluția

Importantă în definirea sistemelor liniare și a răspunsurilor/evoluțiilor lor.

Definiția 3 (Produsul de convoluție a două semnale (funcții de timp))

*Cont.* Fie $u, v \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}$. Presupunem că pentru $t \in \mathbb{R}$, funcția $\tau \to u(t-\tau)v(\tau)$ este integrabilă pe $\mathbb{R}$. Atunci

$$\begin{aligned} w(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} u(t-\tau)v(\tau)\mathrm{d}\tau = (u * v)(t) \\ &\overset{\theta=t-\tau}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\theta)v(t-\theta)\mathrm{d}\theta = (v * u)(t) \end{aligned} \tag{1}$$

este o funcție bine definită în $t \in \mathbb{R}$ și se numește *produsul de convoluție* sau CONVOLUȚIA semnalelor *continuale* $u$ și $v$.

*Disc.* Fie $x, y \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}^{d}$. Presupunem că pentru $n \in \mathbb{Z}$, funcția $k \to x(n-k)y(k)$ este sumabilă pe $\mathbb{Z}$. Atunci

$$z(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n-k)y(k) = (x * y)(n) \overset{l=n-k}{=} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(l)y(n-l) = (y * x)(n) \tag{2}$$

este o funcție bine definită în $n \in \mathbb{Z}$ și se numește *produsul de convoluție* sau CONVOLUȚIA semnalelor *discrete* $x$ și $y$.

# Semnale cu impulsuri–Impulsul Dirac

- **Motivație**: $\exists$ situații în care anumite semnale (funcții) acționează pe intervale foarte scurte de timp, unde pot lua valori extrem de mari.
- **Consecință**: este imposibil să măsurăm valorile *instantanee* ale unui astfel de semnal (există o limită fizică a măsurării unui interval de timp). Putem insă observa/măsura efectul acțiunii acestui semnal. *Important pentru definirea unui sistem - funcția pondere.*

### Definiția 4 (Impuls Dirac)

Se numește impuls Dirac, notat $\delta(t)$, (un „obiect" care este) o **idealizare** a unui semnal având proprietățile:

a) este foarte mare intr-o vecinătate a lui $t = 0$: $\delta(t)$ este *nedefinit* în 0; poate fi chiar infinit;

b) este foarte mic în afara acestei vecinătăți: $\delta(t) = 0$ pentru $t \neq 0$;

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = 1.$

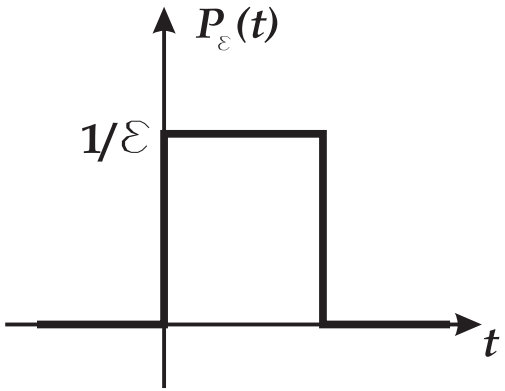
# Aproximări ale lui $\delta$ - o proprietate remarcabilă

## Observația 3

$\delta$ nu este un semnal per se, dar acționează ca un semnal. El nu poate fi vizualizat nici măcar grafic după definiție, dar poate fi aproximat (pt. calculator).

În Figura 2,
avem $p_\varepsilon(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-\varepsilon)$,
de unde

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{1}(t)}{\mathrm{d}t}!$$




Nu contează
forma și valorile pe care le ia
o aproximație oarecare a lui $\delta$,
ci *efectul acțiunii* acesteia,
adică faptul că $\int_{\mathbb{R}} = 1$.

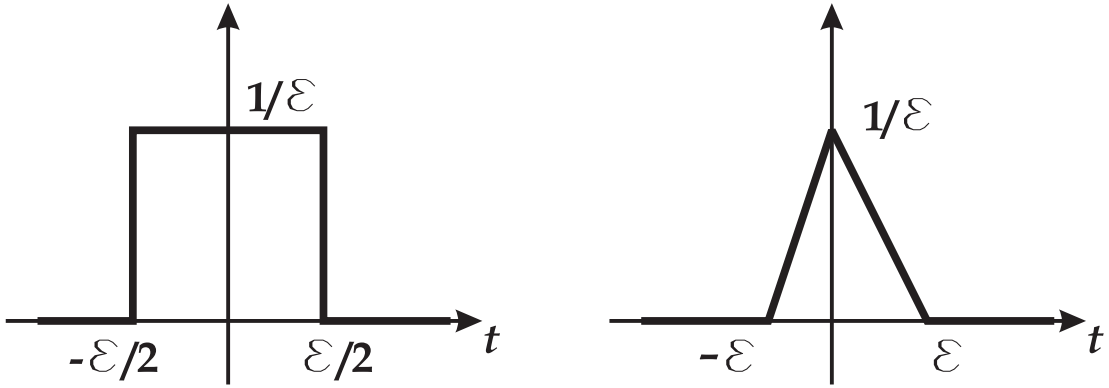



Figura 2: Aproximări ale lui $\delta$

1 Semnale & Sisteme - definiții

2 Semnale. Operații. Transformări
- Operații
- Transformata Laplace
- Transformata $\mathcal{Z}$

3 Sisteme. Proprietăți fundamentale.
- Sisteme de convoluție
- Stabilitate
- Răspuns în timp
- Răspuns în frecvență
- Funcția de transfer a unui sistem de convoluție

# Transformări

Ne interesează semnalele care pot fi descompuse în sumă de exponențiale $\leftarrow$ specific sistemelor limiare $\rightarrow$ Principiul Superpoziției. Foarte pe scurt...

$$f(t) = \sum_k f_k \, \mathrm{e}^{p_k t}.$$

Clasa de semnale

- Periodice: $f(t) = f(t+T)$, $T > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, pe care le scriem ca serii de armonice $\Leftrightarrow f(t) = \sum_0^\infty a_k \, \mathrm{e}^{j\omega t}$, unde $\omega = 2\pi/T \leftarrow$ transformata Fourier $\rightarrow$ transformata Laplace.
- Aperiodice: Orice $f \in L^1(\mathbb{R})$ (cu acțiune finită) și continuu. E ca și cum am avea perioada $T \rightarrow \infty \leftarrow$ armonicele se apropie infinit una de alta $\Rightarrow$ suma devine integrală

$f(t) := \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) \, \mathrm{e}^{j\omega t} \, \mathrm{d}\omega \leftarrow$ *combinație liniară* de oscilații armonice $\mathrm{e}^{j\omega t}$ de amplitudine variabilă $|F(j\omega)|$, unde

$$F(j\omega) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \, \mathrm{e}^{-j\omega t} \, \mathrm{d}t = \underbrace{|F(j\omega)|}_{\text{amplitudinea}} \; \mathrm{e}^{j \underbrace{\arg[F(j\omega)]}_{\text{faza}}}, \quad F : j\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$\leftarrow$ transformata Fourier a lui $f(t)$.

# Transformarea Laplace pentru semnale continuale

Transformarea Laplace + Laplace discretă sau transformarea $\mathcal{Z}$

**Definiția 5 (Transformata Laplace)**

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Se numește transformata Laplace unilaterală la dreapta a lui $f$ în punctul $s$

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\, \mathrm{e}^{-st}\, \mathrm{d}t. \tag{3}$$

$F$ este *bine definită* în $s$ (integrala improprie converge) dacă $s \in \mathbf{S}_f^+$, unde $\mathbf{S}_f^+ = \{s \in \mathbb{C} \ : \ (3) \text{ este absolut convergentă}\}$.

Aplicația $f \overset{\mathcal{L}}{\mapsto} F$ se numește transformarea Laplace (unilaterală la dreapta).

# Funcții original (Laplace)

Spunem că $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ este o funcție original Laplace, $f \in \mathcal{O}$, dacă $f$ are următoarele proprietăți:

i. $f(t) = 0$, pentru $t < 0$.

ii. $f$ este continuă pe porțiuni în $[0, \infty)$.

iii. $\exists\ M > 0$, $s_0 > 0$ astfel încât $|f(t)| < M\ \mathrm{e}^{s_0 t}$, $\forall\ t \geq 0$. Numărul real $s_0$ se numește *indice de creștere* (exponențială) $\Rightarrow f(t)$ funcție de indice $s_0$.

**Teorema 1**

*Fie $f \in \mathcal{O}$ o funcție fixată de indice $s_0$. Atunci $F(s)$ este olomorfă în $\mathbf{S}_f^+ = \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > s_0\}$ (derivabilă într-o vecinătate a oricărui punct din mulțime).*

*Notație:*

- Transformata Laplace a funcției $f$ în punctul $s$: $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$.
- Transformarea Laplace: $F = \mathcal{L}(f)$.
- Funcția $F$ se numește funcția imagine (Laplace) a funcției (original) $f$.

# Proprietățile transformatei Laplace

1) Transformata Laplace inversă. Fie $f \in \mathcal{O}$ cu indicele de creștere $s_0$ și $F = \mathcal{L}(f)$. Atunci

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = f(t) := \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)\ \mathrm{e}^{st}\ \mathrm{d}s, \quad \forall\, \sigma > s_0 \ \text{ și } \ t \geq 0.$$

2) Liniaritate. $\mathcal{L}\{\alpha f + \beta g\}(s) = \alpha F + \beta G$.

3) Asemănare (scalarea axei de timp). $\mathcal{L}\{f(\alpha t)\}(s) = \dfrac{1}{\alpha} F\left(\dfrac{s}{\alpha}\right)$.

4) Translație (întârziere) în timp. $\mathcal{L}\{f(t-\tau)\}(s) = \mathrm{e}^{-\tau s}\ F(s)$, $\tau > 0$.

5) Translație în frecvență. $\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{-at}\ f(t)\}(s) = F(s+a)$.

6) Derivarea imaginii. $\mathcal{L}\{t^n\, f(t)\}(s) = (-1)^n\, F^{(n)}(s)$.

7) Derivarea funcției original. Dacă $f, \dot{f}, \ddot{f}, \ldots, f^{(n)} \in \mathcal{O}$, atunci

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1}\, f(0_+) - \ldots - f^{(n-1)}(0_+),$$

unde $g(0_+) = \lim\limits_{t \searrow 0} g(t)$.

În particular, $\mathcal{L}\left\{\dot{f}(t)\right\}(s) = sF(s) - f(0_+)$.

# Proprietățile transformatei Laplace. Exemplu.

8) Teorema valorii finale (TVF). Dacă $f, \dot{f} \in \mathcal{O}$ și dacă există $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) \overset{\text{not.}}{=} f(\infty) < \infty$, atunci $\lim\limits_{s\to 0} sF(s) = f(\infty)$.

9) Teorema valorii inițiale (TVI). Dacă $f, \dot{f} \in \mathcal{O}$ și dacă există $\lim\limits_{s\to\infty} sF(s)$, atunci $\lim\limits_{s\to\infty} sF(s) = f(0_+)$.

10) Convoluția. Dacă $h, u \in \mathcal{O}$ și $h * u$ este bine definită, atunci $y = h * u$ este funcție original și

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = H(s)U(s) \tag{4}$$

**Exemplu.** Funcția treaptă unitară $\mathbf{1}(t)$ este o funcție original având $s_0 = \varepsilon > 0$. Atunci $\mathbf{S}_f^+ = \{s \in \mathbb{C} \,:\, \operatorname{Re} s > 0\}$ și

$$\mathcal{L}\{\mathbf{1}(t)\}(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{s}.$$

# Exemple

1. $\mathcal{L}\{t\,\mathbf{1}(t)\}(s) \overset{6}{=} \dfrac{1}{s^2}$. $\quad \mathcal{L}\left\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathbf{1}(t)\right\}(s) \overset{6}{=} \dfrac{1}{s^n}$.
2. $\mathcal{L}\{e^{at}\,\mathbf{1}(t)\}(s) \overset{5}{=} \dfrac{1}{s-a}$.
3. $$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cos\omega t\,\mathbf{1}(t)\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}(e^{j\omega t}+e^{-j\omega t})\,\mathbf{1}(t)\right\}(s)\\ &\overset{1}{=} \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{j\omega t}\,\mathbf{1}(t)\}(s)+\frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-j\omega t}\,\mathbf{1}(t)\}(s)\\ &\overset{4}{=} \frac{1}{2}\frac{1}{s-j\omega}+\frac{1}{2}\frac{1}{s+j\omega} = \frac{s}{s^2+\omega^2}.\end{aligned}$$

   În mod similar, $\mathcal{L}\{\sin\omega t\,\mathbf{1}(t)\}(s) = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$.
4. Transformata Laplace pentru: $e^{-t}\cos 3t$, $t\,e^{2t}$, $t\sin t$, $t \geq 0$.

## Observația 4

Dacă avem impulsuri la $t=0$, le includem $\Rightarrow F(s) = \int_{0_-}^{\infty} f(t)\,e^{-st}\,dt$. În consecință, $\mathcal{L}\{\delta(t)\}(s) = e^{-st}\big|_{t=0} = 1$. Mai mult,
$\mathcal{L}\{\delta^{(k)}(t)\}(s) = \int_{0_-}^{\infty} \delta^{(k)}(t)\,e^{-st}\,dt = (-1)^k \left.\frac{d^k e^{-st}}{dt^k}\right|_{t=0} = s^k\,e^{-st}\big|_{t=0} = s^k$.

1 Semnale & Sisteme - definiții

2 Semnale. Operații. Transformări
- Operații
- Transformata Laplace
- Transformata $\mathcal{Z}$

3 Sisteme. Proprietăți fundamentale.
- Sisteme de convoluție
- Stabilitate
- Răspuns în timp
- Răspuns în frecvență
- Funcția de transfer a unui sistem de convoluție

# Transformarea $\mathcal{Z}$

## Definiția 6 (Transformata $\mathcal{Z}$)

Fie $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$ un semnal discret. Se numește transformata $\mathcal{Z}$ (bilaterală) a lui $x$, funcția $X : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definită de

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, z^{-k}, \tag{5}$$

unde $D$ este *domeniul de convergență* al seriei dublu-infinite.
Vom nota în mod obișnuit $X(z) = \mathcal{Z}\{x(k)\}(z)$, sau, mai simplu, $X = \mathcal{Z}\{x\}$.
Aplicația $x \mapsto X$ se numește transformarea $\mathcal{Z}$.

Mulțimea $D$ este în mod uzual o coroană circulară.
Ne concentrăm atenția (ca și în cazul continuu) asupra transformatei $\mathcal{Z}$ unilaterale la dreapta,

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)\, z^{-k}. \tag{6}$$

# Exemple

a) Impulsul discret: $\mathcal{Z}\{d(k)\}(z) = d(0) + d(1)z^{-1} + d(2)z^{-2} \ldots = d(0) = 1$.
Domeniu de convergenta: $\mathbb{C}$.

b) Treapta unitară discretă: $\mathbf{1}(k) = 1$, pt. $k \geq 0$ si $\mathbf{1}(k) = 0$, pt. $k < 0$. Avem
$$\mathcal{Z}\{\mathbf{1}(k)\}(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots = \lim_{n\to\infty} \frac{z^{-n} - 1}{z^{-1} - 1} = \frac{z}{z-1}.$$
Domeniu de convergență: $|z| > 1$.

c) Eșantionarea exponențialei: $x(k) = \mathrm{e}^{-\alpha t_k} = \mathrm{e}^{-\alpha k T} = a^k$, $a = \mathrm{e}^{-\alpha T}$. Avem
$$\mathcal{Z}\{x(k)\}(z) = 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + \ldots =$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(a^{-1}z)^{-n} - 1}{(a^{-1}z)^{-1} - 1} = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z-a}.$$
Domeniu de convergență: $|z| > |a|$.

Coexistă 2 tipuri de notații: în $z$ și în $z^{-1}$. Cea de-a doua este folosită frecvent în Identificarea Sistemelor și în Prelucrarea Semnalelor.

**Exercițiu.** Să se determine transformata $\mathcal{Z}$ pentru $x(n) = a^{|n|}$. Discuție după $a > 0$, $a \neq 1$.
*Indicațe*: Se scrie $x(n) = a^n \mathbf{1}(n) + a^{-n}\mathbf{1}(-n-1)$ și se analizează convergența celor 2 factori ai sumei.

# Proprietăți

- Convergența seriei din (5) depinde exclusiv de $r = |z|$, seria fiind convergentă acolo unde $x(n)r^{-n}$ este absolut sumabilă pe $\mathbb{Z}$, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)\, r^{-n}| < \infty$. Dacă seria converge în $z_0$, atunci converge evident pentru orice $z$ cu $|z| = |z_0|$.
- Domeniul de convergență va conține așadar cercuri concentrice, centrate ın jurul originii planului complex.
- Domeniul de convergență nu poate conține poli ai lui $X(z)$.
- Pentru semnalele cu suport finit, convergența are loc pentru orice $z \in \mathbb{C}$, eventual cu excepția originii și a punctului de la infinit.
- Dacă domeniul de convergență al transformatei $\mathcal{Z}$ a unui semnal $x(n)$, cu $x(n) = 0$ pentru orice $n < N_0$, conține cercul $|z| = r_0$, atunci seria din (5) va converge pentru acei $z$ pentru care $|z| > r_0$ (eventual și pentru $z = \infty$).

# Proprietăți – continuare

1. Liniaritate: $\mathcal{Z}\{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\}(z) = \alpha_1 \mathcal{Z}\{x_1\}(z) + \alpha_2 \mathcal{Z}\{x_2\}(z)$.
2. Inversarea timpului: $\mathcal{Z}\{x(-n)\}(z) = X(z^{-1})$ – $\mathcal{Z}$ bilaterală.
3. Translație în timp: $\mathcal{Z}\{x(k-l)\}(z) = z^{-l}X(z)$, $l \in \mathbb{Z}$ – $\mathcal{Z}$ bilaterală.

3a. Translație în timp (la dreapta): $\mathcal{Z}\{x(k-l)\,\mathbf{1}(k-l)\}(z) = z^{-l}X(z)$.

3b. Translație în timp (la dreapta):
$\mathcal{Z}\{x(k-l)\}(z) = z^{-l}X(z) + \sum_{m=1}^{l} x(-m)z^{m-l}$, $l \geq 1$.

3c. Translație în timp (la stânga):
$\mathcal{Z}\{x(k+l)\,\mathbf{1}(k)\}(z) = z^{l}X(z) - \sum_{m=0}^{l-1} x(m)z^{l-m}$, $l \geq 1$.

4. Translație în frecvență: $\mathcal{Z}\left\{a^k x(k)\right\}(z) = X(a^{-1}z)$.
5. Derivarea imaginii: $\mathcal{Z}\{k\,x(k)\}(z) = -z\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z}$.
6. Convoluție: $\mathcal{Z}\{(x * y)(k)\}(z) = X(z)Y(z)$.
7. Teorema valorii inițiale (TVId): $x(0) = \lim\limits_{z\to\infty} X(z)$.
8. Teorema valorii finale (TVFd): Dc. $\exists \lim\limits_{k\to\infty} x(k)$, atunci
$$\lim_{k\to\infty} x(k) = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})X(z).$$

# Proprietăți - atenție! Alte exemple

9. Transformarea $\mathcal{Z}$ inversa:

$$\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}(k) = \frac{1}{2\pi j}\oint z^{k-1}X(z)\mathrm{d}z. \tag{7}$$

**Atenție la domeniul de convergență!**
**Exemple:**

1. Fie $x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\mathbf{1}(n-2)$. Atunci

$$X(z) \overset{2}{=} z^{-2}\,\mathcal{Z}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\mathbf{1}(n)\right\}(z) \overset{3}{=} z^{-2}\,\mathcal{Z}\left\{\mathbf{1}(n)\right\}(3z) = z^{-2}\,\frac{3z}{3z-1} = \frac{3}{3z^2-z}.$$

2. Semnale armonice *eșantionate*:

$$x(k) = \cos(\omega t_k) = \cos(\omega\, kT) = \frac{\mathrm{e}^{j\omega\, kT} + \mathrm{e}^{-j\omega\, kT}}{2} = \frac{a^{-k}+a^{k}}{2}$$

unde $a = \mathrm{e}^{-j\omega T}$.

# Armonice - continuare

Rezultă

$$\mathcal{Z}\left\{\cos(\omega\, kT)\right\}(z) = \frac{1}{2}(\mathcal{Z}\left\{a^{-k}\right\}(z) + \mathcal{Z}\left\{a^{k}\right\}(z)) = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-a^{-1}} + \frac{z}{z-a}\right)$$
$$= \frac{z(z-\cos(\omega T))}{z^2 - 2z\cos(\omega T) + 1}.$$

Similar, pentru $y(k) = \sin(\omega\, kT)$ se obține

$$\mathcal{Z}\left\{\sin(\omega\, kT)\right\}(z) = \frac{z\sin(\omega T)}{z^2 - 2z\cos(\omega T) + 1}.$$

3. Fie $x(n) = 3\left(\frac{1}{4}\right)^n \mathbf{1}(n) + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n \mathbf{1}(n)$. Atunci

$$X(z) \stackrel{1}{=} 3\mathcal{Z}\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^n \mathbf{1}(n)\right\}(z) + 2\mathcal{Z}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n \mathbf{1}(n)\right\}(z) = \frac{12z}{4z-1} + \frac{6z}{3z-1}.$$

1 Semnale & Sisteme - definiţii

2 Semnale. Operaţii. Transformări
- Operaţii
- Transformata Laplace
- Transformata $\mathcal{Z}$

3 Sisteme. Proprietăţi fundamentale.
- Sisteme de convoluţie
- Stabilitate
- Răspuns în timp
- Răspuns în frecvenţă
- Funcţia de transfer a unui sistem de convoluţie

# Sistem

Recall Definiția 2: $T : \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$, $y = T(u)$, $\mathcal{U}$–spațiul semnalelor de **intrare**, & $\mathcal{Y}$–spațiul semnalelor de **ieșire**.

- Sistemul se numește
  - (cu timp) continuu dacă $\mathcal{U}$ și $\mathcal{Y}$ sunt spații de semnale continuale,
  - (cu timp) discret dacă $\mathcal{U}$ și $\mathcal{Y}$ sunt spații de semnale discrete,
  - hibrid dacă $\mathcal{U}$ și $\mathcal{Y}$ sunt unul spațiu de semnale continuale iar celălalt spațiu de semnale discrete.

- Caz remarcabil: $\mathcal{U} = L^2(\mathbb{R})$ $\big(\text{sau } l^2(\mathbb{Z})\big)$, $\mathcal{Y} = L^2(\mathbb{R})$ $\big(\text{sau } l^2(\mathbb{Z})\big)$.

**Q:** Ce studiem?

**A:** Sisteme liniare, invariante în timp și cauzale $\leftarrow$ sisteme de convoluție.

1 Semnale & Sisteme - definiţii

2 Semnale. Operaţii. Transformări
- Operaţii
- Transformata Laplace
- Transformata $\mathcal{Z}$

3 Sisteme. Proprietăţi fundamentale.
- Sisteme de convoluţie
- Stabilitate
- Răspuns în timp
- Răspuns în frecvenţă
- Funcţia de transfer a unui sistem de convoluţie

# Sisteme liniare și invariante în timp (LTI). Cazul discret

Un sistem $y = T(u)$ este LTI dacă este

- Liniar: $T(\alpha u[n] + \beta v[n]) = \alpha T(u[n]) + \beta T(v[n]) \leftarrow$ Principiul superpoziției,
- Invariant în timp: $y[n] = T(u[n]) \Rightarrow y[n-k] = T(u[n-k]) \leftarrow$ orice întârziere a ieșirii este reflectarea imediată a întârzierii intrării.

Proprietățile sunt valabile și în cazul continuu.

**Propoziția 1**

*$y = T(u)$, discret, liniar și invariant în timp este un sistem de convoluție caracterizat de* **răspunsul la impuls** *$h[n] = T(\delta[n])$, pentru $\mathcal{U} = \mathcal{Y} = l^2(\mathbb{Z})$.*

Obiect de studiu: **Sisteme de convoluție**

# Sisteme de convoluție

Idee: Generic, un sistem liniar și invariant în timp este un sistem de convoluție (e.g., când $\mathcal{U}$ și $\mathcal{Y}$ sunt $l^2(\mathbb{Z})$).

## Definiția 7

Un sistem $y = Tu$ este un sistem de convoluție dacă există un semnal $h$ astfel încât $y = h * u$. Funcția $h$ se numește funcția pondere a sistemului de convoluție.

- Sistem de convoluție cu timp continuu:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta)u(t-\theta)\mathrm{d}\theta.$$

- Siteme de convoluție cu timp discret:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(n-k)u(k) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(l)u(n-l).$$

# Proprietăți

## Propoziția 2

*Un sistem de convoluție este liniar și invariant în timp.*

## Demonstrație.

**Liniaritate**. Dacă $y_1(t) = (h * u_1)(t)$ și $y_2(t) = (h * u_2)(t)$, $\alpha, \beta \in R$, atunci

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)\,(\alpha u_1(\tau) + \beta u_2(\tau))\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)\,\alpha u_1(\tau)\mathrm{d}\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)\,\beta u_2(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \alpha(h * u_1)(t) + \beta(h * u_2)(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t). \end{aligned}$$

□

# Invarianţa în timp a unui sistem de convoluţie

Demonstraţie.

**Invarianţă în timp**. Fie $u(k)$ o intrare oarecare a sistemului de convoluţie discret $y(n) = (h * u)(n)$ şi fie $\tilde{y}(n)$ ieşirea sistemului la intrarea $\tilde{u}(k) = u(k - l)$, $l \in \mathbb{Z}$ arbitrar, fixat.
Avem

$$\begin{aligned} \tilde{y}(n) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(n-k)\tilde{u}(k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(n-k)u(k-l) \\ &\overset{k-l=m}{=} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(n-l-m)u(m) = y(n-l). \end{aligned}$$

□

Reciproca este, în general, adevărată ← Sisteme definite de ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi.

# Cauzalitate

Cauzalitate = ieșirea nu depinde decât de „informația" furnizată la intrare în prezent și din trecut $\leftarrow$ fără caracter anticipativ.

**Q:** Când este un sistem de convoluție și cauzal?

### Propoziția 3

*Un sistem de convoluție* $y = h * u$ *este cauzal* $\Leftrightarrow h(t) = 0, \quad \forall t < 0$ $(h(n) = 0, \quad \forall n < 0)$.

Dar stabil? $\leftarrow$ proprietate fundamentală pentru filtrare și pentru funcționarea „device"-urilor $\Leftrightarrow$ semnale de ieșire mărginite pe canalele de ieșire!

1 Semnale & Sisteme - definiţii

2 Semnale. Operaţii. Transformări
- Operaţii
- Transformata Laplace
- Transformata $\mathcal{Z}$

3 Sisteme. Proprietăţi fundamentale.
- Sisteme de convoluţie
- Stabilitate
- Răspuns în timp
- Răspuns în frecvenţă
- Funcţia de transfer a unui sistem de convoluţie

# Stabilitate (intrare–ieșire)

Reamintim că un semnal $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este mărginit dacă există $M > 0$ astfel încât

$$|f(t)| < M, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

## Definiția 8

Un sistem $y = T(u)$ este stabil în sens intrare mărginită– ieșire mărginită sau stabil BIBO[a], dacă pentru **orice** intrare $u$ mărginită ieșirea rezultată, $y = T(u)$, este de asemenea mărginită.

[a] Bounded Input/Bounded Output

# Stabilitatea sistemelor de convoluție

## Teorema 2

*Fie $\Sigma$ un sistem de convoluție $y = h * u$. Sunt adevărate următoarele afirmații:*

i) *Sistemul $\Sigma$ este stabil dacă și numai dacă funcția pondere este*

Continuu:
*absolut integrabilă pe $\mathbb{R}$, $h \in L^1(\mathbb{R})$, i.e.,*

$$\|h\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| \mathrm{d}t < \infty;$$

Discret:
*absolut sumabilă pe $\mathbb{Z}$, $h \in l^1(\mathbb{Z})$, i.e.,*

$$\|h\|_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty.$$

*adică $h$ are acțiune finită.*

ii) *Dacă $\Sigma$ este stabil atunci*

Continuu:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |y(t)| \leq \|h\|_1 \sup_{t\in\mathbb{R}} |u(t)|;$$

Discret:

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} |y(n)| \leq \|h\|_1 \sup_{n\in\mathbb{Z}} |u(n)|.$$

# Stabilitate în sens nestrict

## Observația 5

Stabilitatea BIBO a sistemelor de convoluție, caracterizată de condiția $h \in L^1(\mathbb{R})$ ($h \in \ell^1(\mathbb{Z})$), se mai numește și stabilitate externă în sens strict.

## Definiția 9

Un sistem de convoluție $y = h * u$ este stabil extern (sau BIBO) în sens nestrict dacă $h$ este mărginită.

**Exemple.**

1. Analizați stabilitatea sistemului de convoluție având funcția pondere semnal treaptă, $h(t) = \mathbf{1}(t)$. Ce se constată?
   *Sol.* $\|h\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt = \int_0^{\infty} |h(t)|dt = t|_0^{\infty} = \infty \Rightarrow$ sistemul este stabil BIBO doar în sens nestrict $\leftarrow$ $h$ marginită, dar are acțiune infinită și e cauzal.
2. Aceeași problemă pentru sistemul discret cu $h(n) = 2^n\,\mathbf{1}(-n)$.
   *Sol.* $\|h\|_1 = \sum_{n=-\infty}^{0} 2^n = \lim_{n\to-\infty} \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = \infty$. Sistemul nu este stabil (nici măcar în sens strict $\leftarrow$ nemărginire), nefiind nici cauzal.

1 Semnale & Sisteme - definiţii

2 Semnale. Operaţii. Transformări
- Operaţii
- Transformata Laplace
- Transformata $\mathcal{Z}$

3 Sisteme. Proprietăţi fundamentale.
- Sisteme de convoluţie
- Stabilitate
- Răspuns în timp
- Răspuns în frecvenţă
- Funcţia de transfer a unui sistem de convoluţie

# Răspuns în timp al sistemelor de convoluție

**A.** Răspunsul la impuls.

1. Cazul **continuu**. Fie $y(t) = (h * u)(t)$ un sistem de convoluție cu timp continuu. Dacă $u(\tau) = \delta(\tau)$ atunci răspunsul sistemului la impuls este

$$y_{\perp}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)\delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau = h(t). \tag{8}$$

2. Cazul **discret**. Fie $y(n) = (h * u)(n)$ un sistem de convoluție discret. Dacă $u(k) = \delta(k)$ (impulsul discret a fost introdus în secțiunea 2.1) atunci răspunsul sistemului la impuls este

$$y_{\perp}(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(n-k)\delta(k) = h(n). \tag{9}$$

**Funcția pondere a unui sistem de convoluție este răspunsul la impuls al sistemului respectiv**.

**B.** Răspunsul la treaptă unitară.

1. Cazul **continuu**. Fie $y(t) = (h * u)(t)$ un sistem de convoluţie cu timp continuu, unde $u(\tau) = \mathbf{1}(\tau)$. Atunci răspunsul sistemului este

$$y_{\mathbf{1}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta)\mathbf{1}(t-\theta)\,\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{t} h(\theta)\,\mathrm{d}\theta. \tag{10}$$

Se observă că $h(t) = y_{\perp}(t) = \dfrac{\mathrm{d}y_{\mathbf{1}}(t)}{\mathrm{d}t}$: funcţia pondere este derivata răspunsului la treaptă unitară.

2. Cazul **discret**. Fie $y(n) = (h * u)(n)$ un sistem de convoluţie discret, unde $u(k) = \mathbf{1}(k)$. Atunci răspunsul sistemului este

$$y_{\mathbf{1}}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(l)\mathbf{1}(n-l) = \sum_{l=-\infty}^{n} h(l). \tag{11}$$

Observaţie: $h(n) = y_{\mathbf{1}}(n) - y_{\mathbf{1}}(n-1)$.

1 Semnale & Sisteme - definiţii

2 Semnale. Operaţii. Transformări
- Operaţii
- Transformata Laplace
- Transformata $\mathcal{Z}$

3 Sisteme. Proprietăţi fundamentale.
- Sisteme de convoluţie
- Stabilitate
- Răspuns în timp
- Răspuns în frecvenţă
- Funcţia de transfer a unui sistem de convoluţie

# Răspuns în frecvență. Funcție de transfer.

**C.** Răspunsul la intrare de tip armonic. Fie $u(t) = \mathrm{e}^{j\omega t}$, unde $\omega = 2\pi f$ este pulsația iar $f$ este frecvența semnalului armonic.

$$\begin{aligned} y_{\sim}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta)\, \mathrm{e}^{j\omega(t-\theta)}\, \mathrm{d}\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta)\, \mathrm{e}^{-j\omega\theta}\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{e}^{j\omega t} \\ &= \widehat{h}(j\omega)\, u(t). \end{aligned} \tag{12}$$

Funcția

$$\widehat{h}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta)\, \mathrm{e}^{-j\omega\theta}\, \mathrm{d}\theta$$

este răspunsul în frecvență al sistemului de convoluție $y = h * u$.

# Proprietăți (demonstrate la tablă)

## Observația 6

$\widehat{h}(j\omega) = H(j\omega)$, unde $H(j\omega)$ este *transformata Fourier* a funcției pondere $h$. Aceasta este bine definită dacă $h \in L^1(\mathbb{R})$.

## Lema 1

*Dacă $h(t)$ ia valori reale, atunci $\overline{\widehat{h}(j\omega)} = \widehat{h}(-j\omega)$. Mai mult, $|\widehat{h}(j\omega)| = |\widehat{h}(-j\omega)|$, $arg[\widehat{h}(-j\omega)] = -arg[\widehat{h}(j\omega)]$.*

## Propoziția 4

*$y_\sim(t)$ este un semnal armonic de* aceași *frecvență $\omega$ cu intrarea $u(t)$, dar de amplitudine și fază* modificate. *Mai precis, fie $u(t) = A\cos\omega t$ și $\widehat{h}(j\omega) = |\widehat{h}(j\omega)|\ e^{j\,arg[\widehat{h}(j\omega)]}$. Atunci*

$$y_\sim(t) = A|\widehat{h}(j\omega)|\ \cos(\omega t + arg[\widehat{h}(j\omega)]). \tag{13}$$

## Corolarul 1

*Dacă $u(t) = e^{j\omega t}$, atunci $y_\sim(t) = |\widehat{h}(j\omega)|\ e^{j(\omega t + arg[\widehat{h}(j\omega)])}$.*

# Cazul discret

Fie $u(n) = e^{j\omega n}$, unde $\omega = 2\pi f$ este pulsația iar $f$ este frecvența semnalului armonic.

$$\begin{aligned} y_{\sim}(n) &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(l)\, e^{j\omega(n-l)} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(l)\, e^{-j\omega l}\, e^{j\omega n} \\ &= \widehat{h}(e^{j\omega})\, u(n). \end{aligned} \tag{14}$$

Funcția

$$\widehat{h}(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(l)\, e^{-j\omega l} = |\widehat{h}(e^{j\omega})|\, e^{arg[\widehat{h}(e^{j\omega})]}.$$

este răspunsul în frecvență al sistemului de convoluție $y = h * u$.

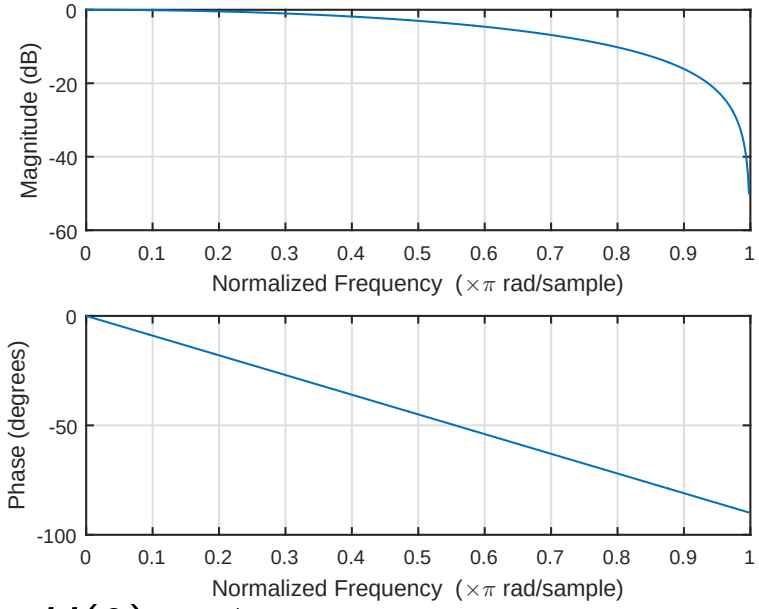
**Propoziția 5**

*Dacă* $u(n) = A\, e^{j\omega n}$, *atunci* $y_{\sim}(n) = A|\widehat{h}(e^{j\omega})|\; e^{j(\omega n + arg[\widehat{h}(j\omega)])}$.

# Exemplu de răspuns în frecvență

Considerăm un filtru discret cu răspuns finit la impuls (FIR)
$y(n) = \frac{1}{2}[u(n) + u(n-1)] \Rightarrow h(n) = \frac{1}{2}[\delta(n) + \delta(n-1)]$.
Analizăm răspunsul în frecvență al sistemului.

$$\begin{aligned}\widehat{h}(e^{j\omega}) &\overset{\text{not.}}{=} H(\omega) = \frac{1}{2}(1 + e^{-j\omega}) \\ &= e^{\frac{-j\omega}{2}} \frac{e^{\frac{j\omega}{2}} + e^{\frac{-j\omega}{2}}}{2} \\ &= \cos\frac{\omega}{2} e^{\frac{-j\omega}{2}}.\end{aligned}$$



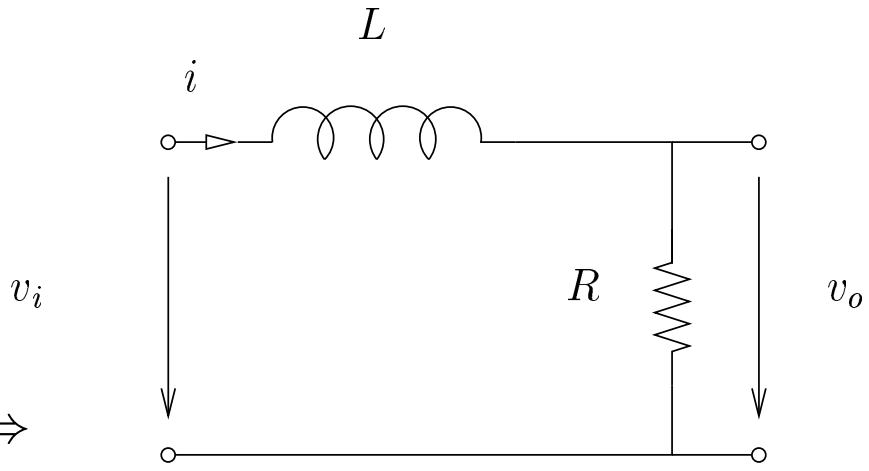

Caracteristici deduse:

- Amplitudine $|H(\omega)| = \cos\frac{\omega}{2}$;
- Fază (argument) $arg(H) = -\frac{\omega}{2}$.
- Pentru $u = e^{j\cdot 0\cdot n} = 1 \Rightarrow y(n) = 1 \Leftrightarrow \widehat{h}(e^{0j}) = H(0) = 1$.
- Pentru $u = e^{j\pi n} = (-1)^n \Rightarrow y(n) = 0 \Leftarrow \widehat{h}(j\pi) = H(\pi) = 0 \Rightarrow$ trec doar armonicele cu pulsații între 0 și $\pi \leftarrow$ trece-bandă.

# Divizorul de tensiune

Ecuațiile (cu $u = v_i$, $y = v_o$)

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= -\frac{R}{L} i + \frac{1}{L} u, \quad i(0) = 0 \\ y &= Ri \end{aligned}$$




Prin urmare, $i(t) = \displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}(t-\tau)} \frac{1}{L} u(\tau) \mathrm{d}\tau \Longrightarrow$

$$y(t) = R \int_0^t \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}(t-\tau)} \frac{1}{L} u(\tau) \mathrm{d}\tau = \left( \frac{R}{L} \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}(\cdot)} * u \right)(t), \quad y = T(u);$$

Egalitatea de mai sus arată că circuitul definește un sistem de convoluție (cauzal).

Funcția pondere este $h(t) = \dfrac{R}{L} \mathrm{e}^{-\frac{R}{L} t}$ pentru $t \geq 0$ și $h(t) = 0$ pentru $t < 0$.

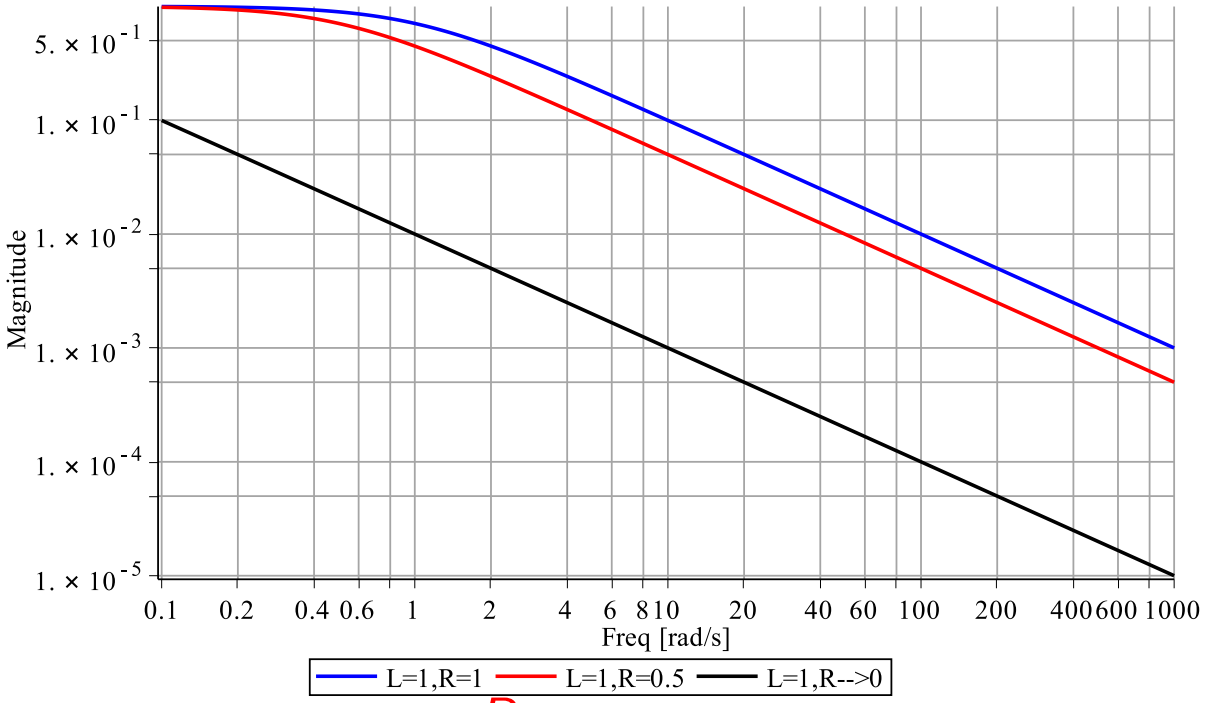
Funcția de răspuns în frecvență este

$$\widehat{h}(j\omega) = \int_0^\infty \frac{R}{L} \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}(\theta)} \mathrm{e}^{-j\omega\theta} \, \mathrm{d}\theta = \frac{R}{j\omega L + R},$$

ceea ce arată că circuitul LR are un comportament de tip filtru trece-jos.

# Divizorul de tensiune – Filtru trece-jos

Intr-adevăr, relația (13) arată că amplitudinea ieșirii $v_o(t)$ la o intrare de tip armonic de pulsație „mare" (de exemplu, $v_i(t) = A\cos\omega t$ cu $\omega > 10^3 R/L$) este practic 0. Filtrul „distruge" amplitudinile oscilațiilor armonice de frecvență mare, pentru care $\widehat{h}(j\omega) \approx 0$.




Pe de altă parte, relația $V_o(s) = \dfrac{R}{sL+R} V_i(s)$ caracterizează comportamentul I/O în domeniul operațional. $H(s) := \dfrac{R}{sL+R}$ este așa-numita funcție de transfer a circuitului.

1 Semnale & Sisteme - definiţii

2 Semnale. Operaţii. Transformări
- Operaţii
- Transformata Laplace
- Transformata $\mathcal{Z}$

3 Sisteme. Proprietăţi fundamentale.
- Sisteme de convoluţie
- Stabilitate
- Răspuns în timp
- Răspuns în frecvenţă
- Funcţia de transfer a unui sistem de convoluţie

# Funcție de transfer

Fie sistemul de convoluție $y = h * u$. Fie $s \in \mathbb{C}$ și $u(t) = \mathrm{e}^{st}$. Răspunsul sistemului este

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta)\,\mathrm{e}^{s(t-\theta)}\,\mathrm{d}\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta)\,\mathrm{e}^{-s\theta}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{e}^{st} \\ &= H(s)\,u(t). \end{aligned} \tag{15}$$

Funcția

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \tag{16}$$

este funcția de transfer a sistemului de convoluție $y = h * u$. Aceasta este bine definită în punctele $s \in \mathbb{C}$ pentru care integrala din (16) converge absolut. Dacă sistemul de convoluție este **cauzal** ($h(t) = 0$ pentru $t < 0$), atunci

$$H(s) = \int_{0}^{\infty} h(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \tag{17}$$

este transformata Laplace (unilaterală, la dreapta) a funcției pondere $h(t)$.

# Funcție de transfer

Dacă $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}(s)$ și $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, atunci are loc

$$\begin{aligned} &\text{Domeniul frecvență}: \; Y(s) = H(s)\, U(s), \\ &\text{Domeniul timp}: \; y(t) = (h * u)(t), \end{aligned} \tag{18}$$

în domeniul *comun* de bună definire a celor trei transformate Laplace din formula de mai sus.

# Funcţia de transfer a sistemelor de convoluţie discrete

Fie $z \in \mathbb{C}$ şi $u(n) = z^n$. Răspunsul sistemului este

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(l)\, z^{n-l} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(l) z^{-l}\, z^n \\ &= H(z)\, u(n). \end{aligned} \tag{19}$$

Funcţia

$$H(z) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(l) z^{-l} \tag{20}$$

este funcţia de transfer a sistemului de convoluţie $y = h * u$. Aceasta este bine definită în punctele $z \in \mathbb{C}$ pentru care suma din (20) converge absolut.
Dacă sistemul de convoluţie este **cauzal** ($h(n) = 0$ pentru $n < 0$), atunci

$$H(z) = \sum_{l=0}^{\infty} h(l)\, z^{-l} \tag{21}$$

e transformata Laplace **discretă** (unilaterală, la dreapta) a funcţiei pondere $h(n)$.

# Funcție de transfer în cazul discret

Dacă $U(s) = \mathcal{Z}\{u(n)\}(z)$ și $Y(z) = \mathcal{Z}\{y(n)\}(z)$, atunci are loc

$$\begin{aligned} &\text{Domeniul frecvență : } Y(z) = H(z)\,U(z), \\ &\text{Domeniul timp : } y(n) = (h * u)(n), \end{aligned} \tag{22}$$

în domeniul *comun* de bună definire a celor trei transformate Z.

# Observații

**1.** În mod uzual, vom considera sisteme de convoluție cauzale ale căror funcții pondere sunt funcții original (Laplace) - $h \in \mathcal{O}$. De exemplu, ecuațiile diferențiale liniare cu coeficienți constanți definesc astfel de sisteme - vezi exemplul divizorului de tensiune in c.a. Cum semnalele (de intrare) standard sunt de asemenea funcții original, $u \in \mathcal{O}$, rezultă că $y = h * u \in \mathcal{O}$ și $Y(s) = H(s)U(s)$.

**2.** De altfel, egalitățile (18) sunt valabile într-un context mai larg, impus de situația în care sistemul este definit de o ecuație diferențială. Vom considera în cele ce urmează sisteme de convoluție având funcții de transfer raționale, definite de ecuații diferențiale liniare având coeficienți constanți.

**3.** Formulele (18) sugerează o metodă de calcul (analitic) a răspunsului unui sistem pentru o intrare dată. Cum $H(s)$ și $U(s)$ se cunosc, $Y(s)$ rezultă în mod banal și $y(t)$ se obține ca transformată Laplace **inversă** a lui $Y(s)$.

# Sisteme de convoluţie cu funcţii de transfer raţionale

• Ecuaţiile fizico-matematice ale unui sistem: exprimarea matematică a relaţiilor dintre variabilele care intervin în sistemul fizic.

• Relaţiile dintre variabile $\dashrightarrow$ ecuaţii diferenţiale: exprimă în mod obişnuit o ecuaţie de echilibru, determinată de principiile (legile) fizicii care descriu fenomenele care au loc în sistem.

• Sisteme fizice cu parametri constanţi. Elemente liniare, intervale de liniaritate, liniarizare. Sisteme fizice cu parametri concentraţi.

Modele matematice:

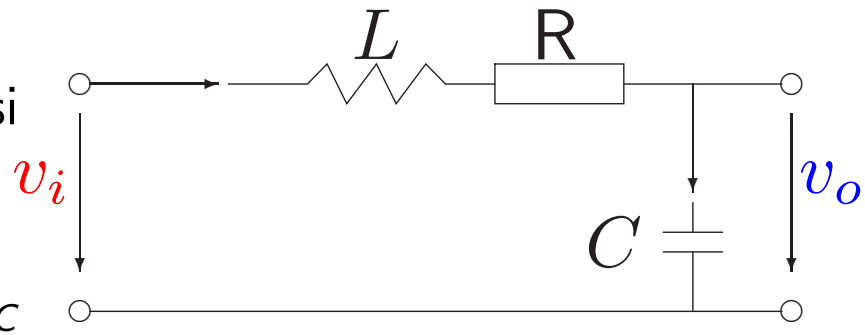
**Ecuaţii diferenţiale ordinare, liniare şi cu coeficienţi constanţi**.

# Exemplu: circuitul RLC serie

- *elemente liniare* de circuit: $R$, $L$, $C$ (e.g., $R$ este un element liniar *numai* în intervalul de funcționare pentru care a fost prevăzut: legea lui Ohm).
- coeficienții sunt *constanți* (ipoteză de lucru: capacitatea condensatorului variază foarte *lent* cu timpul, fiind practic constantă).

Relația dintre variabile

- legile Kirchoff $v_i = v_R + v_L + v_C$ $(= v_o)$ și
- caracteristicile curent-tensiune (legile constitutive/de funcționare) la bornele elementelor $v_R = Ri$, $v_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, $i = C\dfrac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}$




$\Rightarrow$ ecuație diferențială ordinară, liniară și cu coeficienți constanți

$$\boxed{LC\frac{\mathrm{d}^2 v_o}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}v_o}{\mathrm{d}t} + v_o = v_i(t)}.$$

În accepțiunea I/O:

- $v_i$ (tensiunea la bornele circuitului) - intrarea sistemului,
- $v_o$ (tensiunea la bornele condensatorului) - ieșirea sistemului.

Ecuația (forțată sau comandată) *definește* (în mod riguros) un sistem.

# RLC serie: Ecuații diferențiale (forțate)

Considerăm ecuația diferențială generală, de ordinul al doilea, în necunoscuta $z(t)$

$$\boxed{a_2\ddot{z}(t) + a_1\dot{z}(t) + a_0 z(t) = b_1\dot{u}(t) + b_0 u(t),\ z(0_+) = z_0,\ \dot{z}(0_+) = z_1},\ a_2 \neq 0. \tag{23}$$

## Observația 7

- În general, putem trata problema pentru orice ordin $n \in \mathbb{N}$. Pentru claritatea expunerii, scriem rezultatele pentru $n = 2$.
- Sistemele de ordinul al doilea cuprind o clasă largă de procese/fenomene mecanice, electrice etc.
- Ecuațiile de acest tip provin din legi fizice de mișcare sau de conservare.
- Circuitul RLC serie, este descris de o ecuație diferențială de ordinul 2, cu
  - necunoscuta $z(t) = v_o(t)$,
  - $a_2 = LC$, $a_1 = RC$, $a_0 = 1 \leftarrow$ coeficienți constanți,
  - $u(t) = v_i(t)$,
  - $b_1 = 0$, $b_0 = 1 \leftarrow$ coeficienți constanți.
- Condițiile inițiale $z(0_+) = z_0$, $\dot{z}(0_+) = z_1$.

# Rezolvarea ecuației diferențiale cu transformarea Laplace

Aplicăm transformarea Laplace în ambii membri ai ecuației (23),

$$\mathcal{L}\Big|\ a_2\ddot{z}(t) + a_1\dot{z}(t) + a_0 z(t) = b_1\dot{u}(t) + b_0 u(t).$$

Cu notațiile $\mathcal{L}\{u(t)\}(s) = U(s)$, $\mathcal{L}\{z(t)\}(s) = Z(s)$ și folosind proprietatea de derivare a imaginii, se obținem

$$a_2[s^2 Z(s) - sz_0 - z_1] + a_1[sZ(s) - z_0] + a_0 Z(s) = b_1[sU(s) - u(0_+)] + b_0 U(s)$$
$$\Leftrightarrow (a_2 s^2 + a_1 s + a_0)Z(s) + (a_2 z_0 s - a_2 z_1 - a_1 z_0) = (b_1 s + b_0)U(s) - b_1 u(0_+)$$

sau, în formă compactă,

$$\boxed{A(s)Z(s) - A_i(s) = B(s)U(s) - B_i(s)},$$

unde

$$\begin{aligned} A(s) &= a_2 s^2 + a_1 s + a_0, \\ B(s) &= b_1 s + b_0, \\ A_i(s) &= a_2 z_0 s - a_2 z_1 - a_1 z_0, \\ B_i(s) &= b_1 u(0_+). \end{aligned}$$

# Răspunsul forțat al unui sistem cu *funcție de transfer*

Notând $Y(s) = Z(s)$, rezultă ieșirea unui sistem dată de

$$Y(s) = \underbrace{\frac{\mathbf{B(s)}}{\mathbf{A(s)}} U(s)}_{\text{Componentă forțată}} + \underbrace{\frac{A_i(s)}{A(s)}}_{\text{Componentă liberă}} - \underbrace{\frac{B_i(s)}{A(s)}}_{\text{Condiții inițiale } u} \tag{24}$$

În condiții inițiale nule, $z_0 = z_1 = 0$ și $u(0_+) = 0$, ecuația (24) devine

$$Y(s) = H(s)U(s), \quad \text{unde } H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}.$$

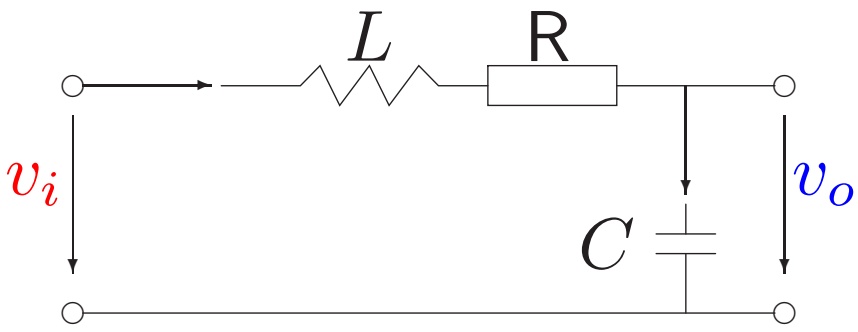
este funcția de transfer de la intrarea $u$ la ieșirea $y$ definită de ecuația (23). Dimensiunea/ordinul sistemului $=$ grad $A(s)$.

### Observația 8

De cele mai multe ori, în membrul drept al ecuației diferențiale (23) nu apar derivatele lui $u$, situație în care ($B(s) = b_0$, $B_i(s) = 0$)

$$Y(s) = H(s)U(s) + \frac{A_i(s)}{A(s)}.$$

# RLC serie, sistem

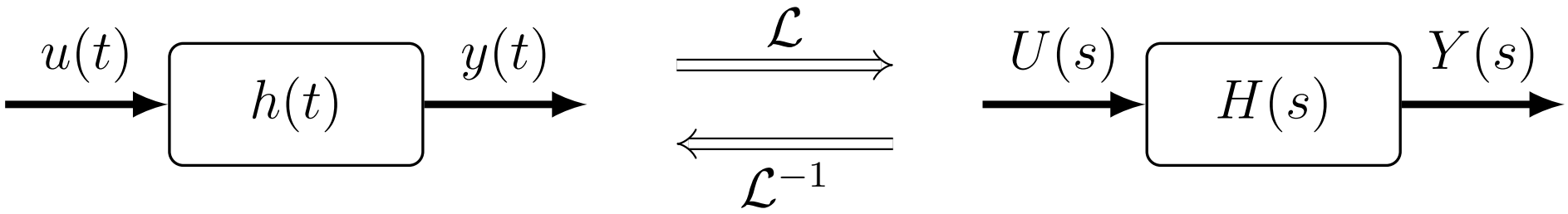



Ecuație diferențială
ordinară, liniară și cu coeficienți constanți

$$\boxed{LC\frac{\mathrm{d}^2 v_o}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}v_o}{\mathrm{d}t} + v_o = v_i(t)}.$$

În accepțiunea I/O:

- $v_i$ (tensiunea la bornele circuitului) – intrarea sistemului,
- $v_o$ (tensiunea la bornele condensatorului) – ieșirea sistemului.




RLC serie: Sistem cu funcția de transfer $\boxed{H(s) = \dfrac{1}{LCs^2 + RCs + 1}}$, cu

- intrarea $U(s) = V_i(s) = \mathcal{L}\{v_i\}$ și
- ieșirea $Y(s) = V_o(s) = \mathcal{L}\{v_o\}$.

# Considerații finale

**„Morala”**: Ecuația diferențială (23) *definește* un sistem de convoluție, $y = h * u$, având funcție de transfer **rațională**,

$$\boxed{H(s) = \frac{B(s)}{A(s)}},$$

a cărui funcție pondere este dată de

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}(H(s))(t).$$

Acest sistem $u \to y$ realizează tranziția între semnalul de intrare (comanda) $u$ și componenta *forțată* a răspunsului sistemului (soluției ecuației diferențiale).

Celelalte componente ale răspunsului (soluției) sunt nule în condiții inițiale nule.

Componenta liberă corespunde unei soluții a ecuației omogene, în condiții inițiale date.

# Cazul discret: ecuații cu diferențe, sisteme discrete

Echivalentul discret al ecuației (23) este ecuația cu diferențe

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y(n-k) = \sum_{l=0}^{M} b_l\, u(n-l) \tag{25}$$

În mod similar cazului continuu (cand lucrăm cu ecuații diferențiale), soluția unei astfel de ecuații se obține ca suma dintre ecuația omogenă și o soluție particulară a ecuației (25).

O ecuație cu diferențe definește un sistem discret în accepțiunea intrare/ieșire. Acesta este reprezentat prin funcția de transfer asociată ecuației cu diferențe. Presupunem că $a_n \neq 0$ și aplicăm transformarea $\mathcal{Z}$ ambilor membri

$$\begin{aligned} a_0\, Y(z) + a_1 z^{-1}\, Y(z) + \ldots + a_N z^{-N}\, Y(z) \\ = b_0\, U(z) + b_1 z^{-1}\, U(z) + \ldots + b_M z^{-M}\, U(z). \end{aligned}$$

Rezultă că $Y(z) = H(z)U(z)$, unde

$$H(z) = \frac{b_M z^{-M} + b_{M-1} z^{-M+1} + \ldots + b_0}{a_N z^{-N} + a_{N-1} z^{-N+1} + \ldots + a_0}.$$

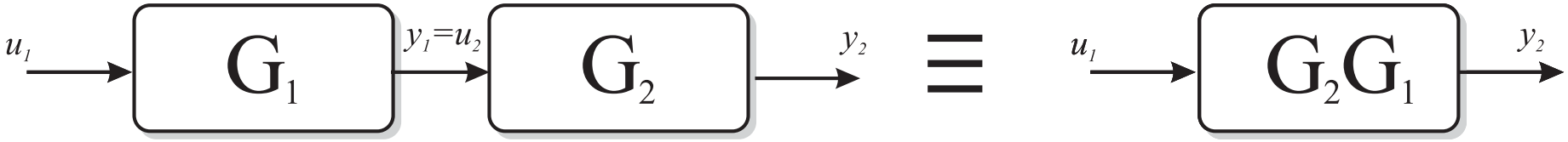
este funcția de transfer a sistemului definit de ecuația (25).

În condițiile în care, dacă $u(n) = 0$ pentru $n < n_0$, atunci $y(n) = 0$ pentru $n < n_0$, ecuația (25) definește un sistem liniar și invariant în timp care este și cauzal.

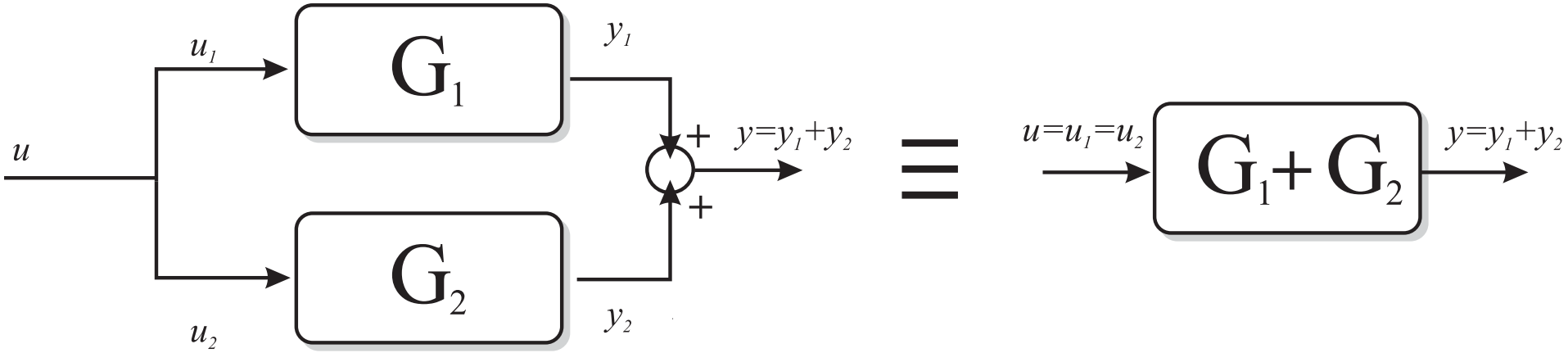
# Conexiunile sistemelor: serie & paralel

Fie două sisteme $G_1$ și $G_2$ cu intrările $u_i$ și $y_i$ ; $i = 1, 2$.
Vom spune că cele două sisteme sunt conectate în:

•**Serie** dacă $u_2 = y_1$

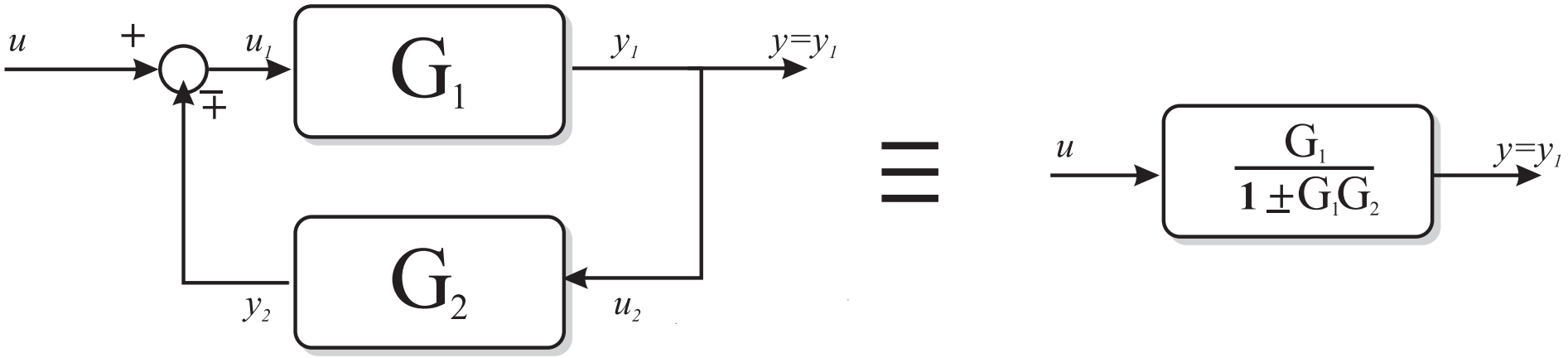



•**Paralel** dacă $u_1 = u_2 = u$ și $y = y_1 + y_2$



# Conexiunea în reacție (negativă)

•**Reacție** dacă $u_1 = \pm y_2 + u, u_2 = y_1, y = y_1$




În ultima diagramă semnul „+" definește conexiunea în reacție pozitivă iar semnul „−" definește conexiunea în reacție negativă.

# TEORIA SISTEMELOR

**Tudor C. Ionescu**

Dept. de Automatică și Ingineria Sistemelor (ACSE),
Facultatea de Automatică și Calculatoare,
Universitatea Politehnica București

e-mail: `tudor.ionescu@acse.pub.ro`

URL: `http://acse.pub.ro/person/tudor-cornel-ionescu/`

octombrie 2019

Concepte fundamentale în ingineria modernă ← se aplică în lumea mașinilor de calcul...

# Capitolul 1: INTRODUCERE

**Motivație: Prelucrarea digitală a Semnalelor, Sisteme (e.g., UAV, roboței), Achiziții de Date, Securitate Cibernetică, Automatică etc.**

științe inginerești.

Ingineria clasică:

- dispozitive/instalații de transformare a energiei (mașina cu aburi, motorul electric) $\leftarrow$ caracteristici principale: randament, debit.
- comanda/acționarea instalațiilor acestora e făcută de către operatori umani.

Informațiile necesare acționării parvin prin intermediul simțurilor umane, în urma observațiilor privind rezultatele acțiunilor anterioare.

# State-of-the-art in a nutshell

În prezent ← „aplicații” pe care le vrem să funcționeze „singure”, i.e., automat:

- aplicații domestice: încălzirea unei incinte cu o centrală termică, aparatură...
- sisteme mecanice: industria automotive, industria aeronautică civilă, dar mai ales *militară* ← **UAV-uri, watch** `https://www.ted.com/talks/raffaello_d_andrea_meet_the_dazzling_flying_machines_of_the_future` **Rafaello d'Andrea, ETH Zürich**, `http://raffaello.name/biography/`;
- sisteme electrice: circuite electrice și electronice din ce în ce mai complexe;
- robotică: de la roboței uniciclu, până la brațe robotice complexe;
- sisteme complexe de calcul;
- reglarea congestiei în rețele ← modelarea TCP...
- securitate cibernetică ← abordare modernă sistemică și cu reglare dinamică avansată: *filtru Kalman – cap. 8* pentru estimarea si stabilizarea unui sistem ciberfizic după ce a fost supus unui atac cibernetic...

# Chestiuni administrative

- **Curs:** 14 $\times$ 2h, Marți 10–12, AN030 Rectorat + 7 $\times$ 2h, Joi *impar*, 18–20, EC105 .
- **Seminar**: Prof. Radu Ștefan (ACSE), Drd. ing. Andrei I. Sperilă (ACSE), EC002/ED203.
- **Laborator**: TCI & Dr. Cristian Flutur (ACSE) & friends, PR506 PRECIS Lab. Sisteme Ciberfizice.

Notare:

- Nota finală =**Laborator 5p + Examen 5p**.
- Nota la laborator = 2 x colocvii $\times$ 2.5p...
- Promovare: minim 2p/5p examen. Permis: 5 foi cu material.

Restanță:

Un singur examen de 10p. Promovare: minim 5p/10p. *NU se mai păstrează punctajul de la laborator.*

Punctajele și notele se vor acorda pe un catalog Moodle! *Nu uitați să vă înscrieți la curs!!!*

# CONCEPTELE FUNDAMENTALE: EXEMPLE

Sunt funcții de variabile independente („timp").

Purtătoare de informații.

- Semnale electrice: curenți, tensiuni în circuitele elctrice.
- Semnale acustice: audio, vorbire; analogice sau digitale.
- Semnale *discrete* în economie, biologie: cursul valutar, indicele bursier; secvența a bazelor într-o moleculă de ADN.
- Semnale video: secvențe de imagini (tablouri de pixeli).
- $x(k)$, $u(t)$: semnale discrete/continuale de o variabilă.

$k$, $t$ - momente de TIMP. Mulțimea momentelor de timp are o proprietate importantăeste formată din elemente pozitive $\leftarrow$ timpul de la 0 la foarte mare, chiar $\infty$.

# Teoria (matematică a) sistemelor (automate)

Noțiunea de sistem: un concept matematic precis.

**Definiția (Kalman, 1969)**

Concepem un sistem ca o structură în care ceva (materie, energie, informație) poate fi introdus la *un anumit moment* dat și din care rezultă spre exterior ceva la *un alt moment* de timp.

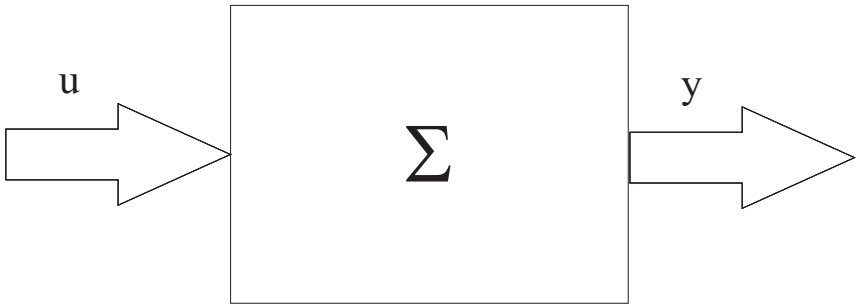



Figura: Model de tip „BLACK-BOX"

- $u$ și $y$ („ceva") sunt semnale.
- Problemă: ce caracteristici are un astfel de model?
- Sistem: „operator".

# Sisteme de convoluție care admit funcții de transfer raționale

$$y = T(u), \quad y(t) = (h * u)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau$$

având funcție de transfer **rațională** ($A(s)$ și $B(s)$ sunt polinoame în $s$)

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{B(s)}{A(s)},$$

unde $H(s)$ este **transformata Laplace** a funcției pondere $h(t)$,

$$H(s) = \mathcal{L}\left\{h(t)\right\}(s) := \int_{0}^{\infty} h(t)\, e^{-st}\mathrm{d}\, t,$$

iar $U(s)$ și $Y(s)$ sunt **transformatele Laplace** ale intrării $u(t)$, și respectiv ieșirii $y(t)$.
Sistemul $u \to y$ realizează tranziția între semnalul de intrare (comanda) $u$ și semnalul de ieșire (răspunsul) $y$.
Sistemele de convoluție sunt liniare și invariante în timp (LTI).

# ABORDĂRI FUNDAMENTALE

SISTEM: „operator” care transformă intrarea în iesire.

S-au impus două puncte de vedere:

a) definirea noțiunii prin caracterizarea comportamentului intrare-ieșire $\equiv$ maniera *operatorială* de abordare;

Analiză funcțională

**Domeniul frecvență**

b) elementul primar îl constituie comportamentul intern $\equiv$ maniera *newtoniană* de abordare.

Ecuații diferențiale - Reprezentare în spațiul stărilor

**Domeniul timp**

# Exemple

Amplificatorul operațional.

$v_o = A(v_+ - v_-) \overset{v_+=0}{=} -Av_-$.

Transformă un semnal în alt semnal: $v_- \mapsto v_o$.

Q: lărgimea de bandă, răspuns la intrare sinusoidală?

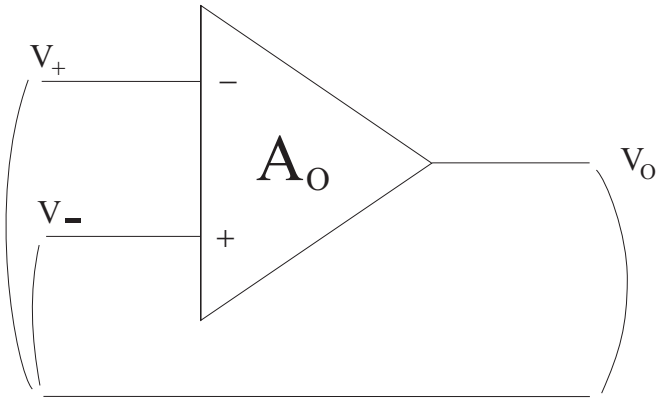



Figura: Amplificator operațional

# Divizorul de tensiune în curent alternativ

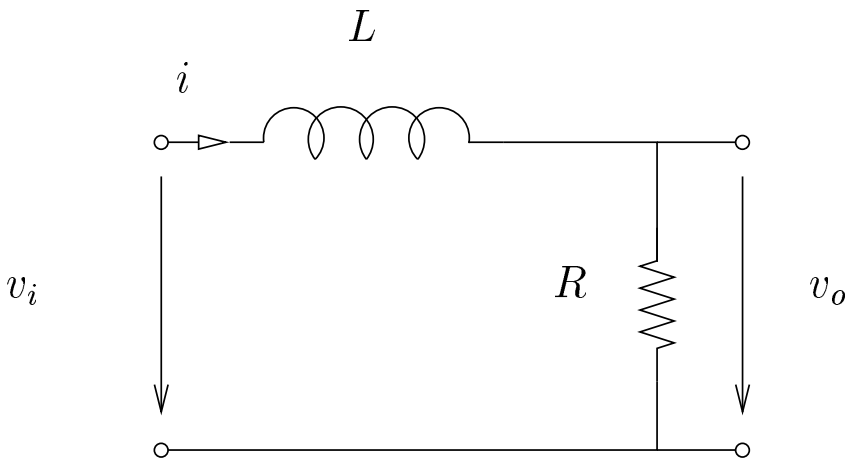



Figura: Divizorul de tensiune în curent alternativ

$$V_o(s) = \frac{R}{sL + R} V_i(s)$$

$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt} = -\dfrac{R}{L} i + \dfrac{1}{L} v_i \\ v_o = Ri \end{cases}$$

Comportament Intrare/Ieșire (I/O)

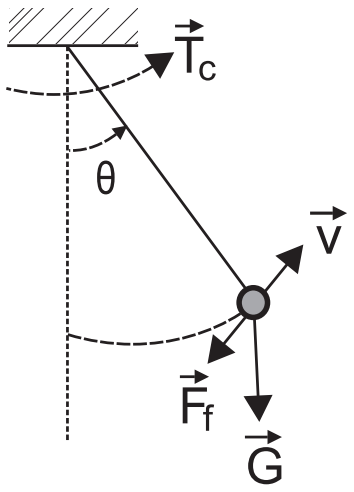
Comportament Intern

Proprietate importantă: Liniaritatea

$R$ și $L$ sunt elemente *liniare* de circuit.

# Pendulul gravitațional

Model foarte popular. Fie $\theta$ unghiul dintre poziția tijei și axa verticală. Tija este presupusă rigidă și de lungime $l$.



# Pendulul gravitațional - ecuațiile fizice

Din legea fundamentală a mecanicii Newtoniene pentru mișcări de rotație, aplicată bilei de masă $m$ se deduce că:

$$ml^2\ddot{\theta} = -G\sin\theta\, l - F_f l + T_c,$$

sau, echivalent,

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta - \frac{k}{m}\dot{\theta} + \frac{T_c}{ml^2}, \tag{1}$$

unde $g$ este accelerația gravitațională, iar $k$ este coeficientul de frecare vâscoasă, presupus constant, care face legătura între viteză (tangențială) și forța de frecare, $F_f = kv = kl\dot{\theta}$.

# Modelul matematic al pendulului

Ecuație diferențială neliniară $\Longrightarrow$ Model matematic neliniar.

Pentru obținerea unui model matematic în spațiul stărilor, de forma

$$\dot{x} = f(x, u), \;\; y = g(x, u),$$

alegem ca variabile de stare unghiul $x_1 = \theta$ și, respectiv, viteza unghiulară $x_2 = \dot{\theta} = \omega$. Analizăm evoluția *liberă* a sistemului, adică presupunem că $T_c = 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{k}{m}x_2. \end{aligned} \tag{2}$$

Punctele de echilibru (PE), $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$, sunt $(n\pi, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$, ca rezultat al sistemului de ecuații

$$\begin{aligned} 0 &= x_2, \\ 0 &= -\frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{k}{m}x_2. \end{aligned}$$

# Pendulul gravitațional- PE, discuție

Din punct de vedere fizic, cele 2 echilibre sunt evident diferite: dacă pendulul se poate într-adevăr opri în punctul $(0, 0)$, este imposibil să se întâmple același lucru în punctul $(\pi, 0)$, deoarece o perturbație oricât de mică în raport cu acest punct de echilibru îndepărtează bila de această poziție.

Este vorba deci despre un punct de echilibru stabil - bila în poziție verticală în jos - și de un punct de echilibru instabil - bila în poziție verticală în sus. Care este semnificația celorlalte puncte de echilibru ($n \neq 0, n \neq 1$)?

Ce se întâmplă în situația *ideală* când nu există frecare ($k = 0$) sau când frecarea este neglijabilă ($k$ foarte aproape de 0)?

# Liniarizare

La liceu, la Fizică, aflam că pentru unghiuri „foarte mici", când pendulul „atârnă", $\sin\theta = \theta \leftarrow$ ce înseamnă, de fapt?

Fie $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ un PE al sistemului (2).
Atunci $f_1(x_1^*, x_2^*) = 0$, $f_2(x_1^*, x_2^*) = 0$ și

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*)(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*)(x_2 - x_2^*) + o(\|x - x^*\|) \\ f_2(x_1, x_2) &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*)(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*)(x_2 - x_2^*) + o(\|x - x^*\|) \end{aligned} \tag{3}$$

unde $o(\varepsilon)/\varepsilon \to 0$ când $\varepsilon \to 0$.

Introducem „erorile"

$$\xi_1 = x_1 - x_1^*, \quad \xi_2 = x_2 - x_2^*.$$

# Modelul (Sistemul) liniar al pendulului

Dacă $(x_1(t), x_2(t))$ verifică ecuația (2), atunci $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ este o soluție a sistemului

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*)\xi_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*)\xi_2 + o(\|\xi\|),\\ \dot{\xi}_2 &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*)\xi_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*)\xi_2 + o(\|\xi\|),\end{aligned}$$

sau

$$\dot{\xi} = A\xi + o(\|\xi\|),$$

unde $A$ este matricea jacobiană (calculați pentru pendul și discutați după tipul PE) a lui $f$ în $x^*$

$$A = f'(x^*) = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) \end{bmatrix}\right|_{x=(x_1^*, x_2^*)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos x_1^* & -\frac{k}{m} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

**Liniarizare = neglijarea termenilor $o(\|\xi\|)$.**

*Ideea:* sistemul liniar reține comportamentul local (într-o vecinătate a unui PE) al sistemului neliniar.

# Scurt istoric al Teoriei Sistemelor

• antichitate: reglarea automată a debitului și a nivelului apei;

• în ceputul revoluției industriale: regulatorul centrifugal al lui J. Watt pt. reglarea vitezei de rotație a mașinii cu aburi;

• contribuții teoretice:
- J.C. Maxwell "On Governors" 1868;
- E.J. Routh Stabilitate (sisteme liniare) 1877;
- A.M. Liapunov Stabilitate (sisteme neliniare);

• practică inginerească: servomecanisme, dispozitive de urmărire automată (US, WWI);

• introducerea reacției inverse în tehnică: Stephen Black - Bell Lab's - 1927; atenuarea zgomotului și a perturbațiilor în liniile (telefonice) lungi;

• perioada clasică (interbelică): proiectare în domeniul frecvență
H. Bode & H. Nyquist - criterii de stabilitate, relații fundamentale.

# Epoca modernă - contribuții românești

• epoca modernă : comandă optimală 1960-1980:
R. Bellman: programare dinamică;
L. Pontriaghin: principiul optimului;
R. Kalman: fundamentarea Teoriei Sistemelor;
**Vasile Mihai Popov**[1] & V.A. Yakubovich: Lema YKP;

• 1980: sinteză robustă: G. Zames - specificații de proiectare în domeniul frecvență
- soluție a problemei de sinteză:

• 1990-2000: metode numerice pentru sinteza robustă
- ecuații Riccati;
- inegalități matriceala liniare (LMI);

• Vladimir Răsvan/Vlad Ionescu - extinderea teoriei Popov la sisteme complexe (neliniare, cu timp mort) și la sinteza robustă.

[1] Membru al Academiei Române

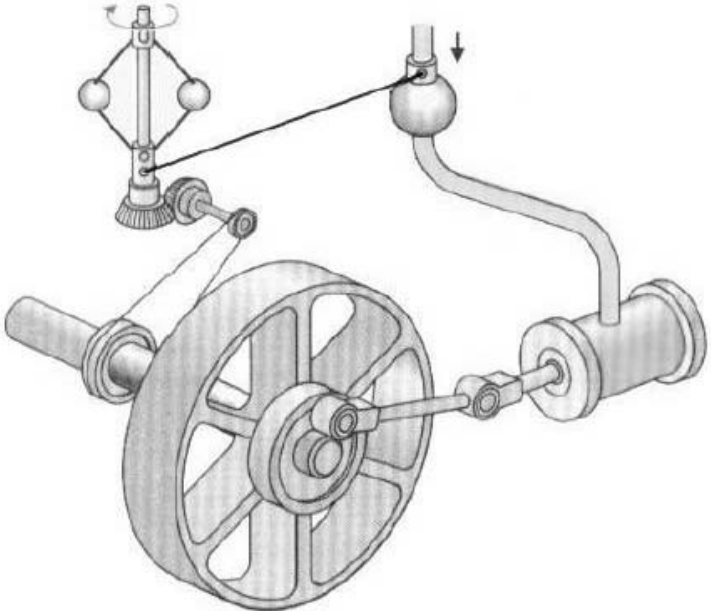
# Teoria Sistemelor - ACS

AII: Șerban Sever, Călin Soare, Cezar Corâci;

AIS (ACSE): Corneliu Popeea, Boris Jora, Bogdan Dumitrescu, Cristian Oară, Radu Ștefan, Alexandru Țiclea, Florin Stoican, Tudor Ionescu;

In străinătate: Ioan D. Landau, Petre Stoica, George Weiss, Ioan Tăbuș, Adrian Sandu, Silviu-Iulian Niculescu, Radu Bălan, Dan Popa, Sorin Olaru, Paul Bogdan.

# Regulatorul Watt

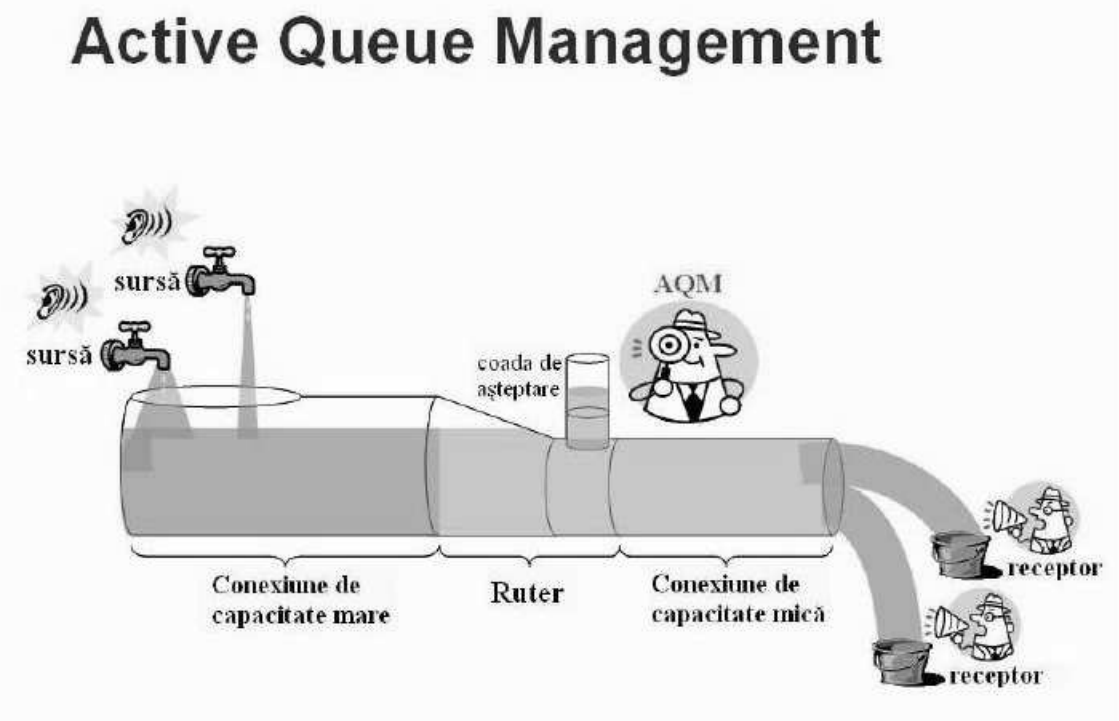


# Regulatorul Watt

- primul sistem de reglare automată folosit într-un proces industrial
- scop: menținerea **constantă** a turației axului principal, în prezența (eventualelor) variații de sarcină (ex. ridicarea mai multor vagoneți plini cu cărbune)
- „măsoară" turația cu ajutorul poziției celor două bile metalice
- utilizează această informație (poziția bilelor) pentru a elabora comanda: închiderea/deschiderea valvei de admisie a aburului

**Concluzie: Regulatorul Watt $\Longleftrightarrow$ IT !**

# Congestia în rețele TCP



# Protocolul TCP: Metode de evitare a congestiei

- congestie: prezența prea multor pachete într-o subrețea; degradare substanțială a performanțelor
- cauze: depășire a capacității de transport, procesoare lente, memorie redusă a cozii de așteptare.
  Dar dacă aceasta din urmă ar fi infinită? Congestia s-ar înrăutăți, datorită mecanismului pauzelor de așteptare (timeout: intervalul de timp în care emițătorul așteaptă primirea confirmării pentru pachetul trimis).
- mecanisme de control al congestiei:
  fără reacție (în buclă deschisă) sau cu reacție (în buclă închisă).

# Mecanism TCP/IP

În primul caz se iau decizii fără a ține cont de starea curentă a rețelei. De exemplu, „ceasul propriu”: se încetinește automat emiterea pachetelor când confirmările sunt întârziate (semnalare doar prin timeout).

În cel de-al doilea, se ajustează rata de de transmisie în funcție de mărimea ferestrei (numărul maxim de pachete trimise, încă neconfirmate). La rândul ei, mărimea ferestrei este adaptată dinamic în funcție de cât de aglomerată este rețeaua (lungimea cozii de așteptare).

Exemplu de mecanism TCP/IP.
RED (random early detection).
TCP: Răspunsul la pachete pierdute este micșorarea ratei de transmisie („ceasul propriu”).
RED: se aruncă pachete nu doar atunci când buffer-ul cozii de așteptare este plin, pentru că este deja prea târziu.

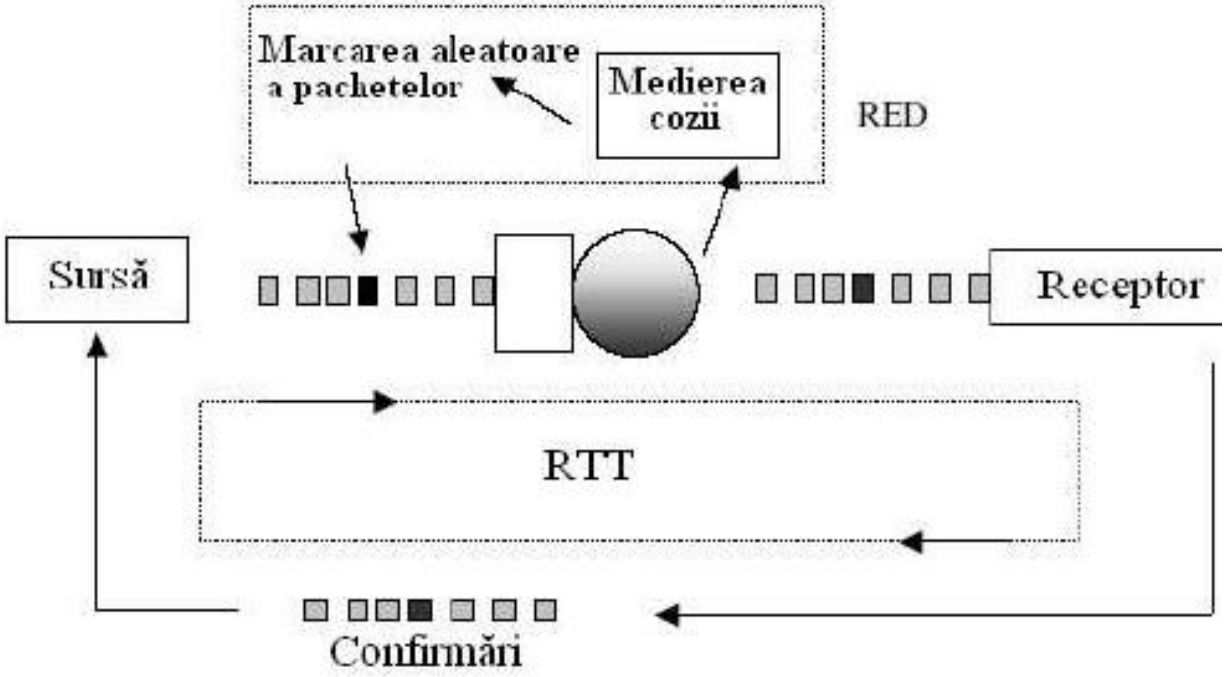
# Mecanism TCP/IP: RED

Pachetele se aruncă cu o probabilitate care crește cu lungimea cozii de așteptare.
Sub o anumită valoare a lungimii cozii nu se aruncă nici un pachet (probabilitate 0).
Peste o altă valoare a lungimii cozii se vor arunca toate pachetele (probabilitate 1).

Există modele matematice pentru un astfel de mecanism?
Alegem unul *determinist*. Asupra acurateții acestui *tip* de model pentru protocolul TCP, încă se mai discută.

# RED

Marcarea pachetelor



# Un model matematic simplificat! pt. RED

$$\dot{W} = \frac{1}{R(t)} - \frac{W(t)}{2}\frac{W(t-R(t))}{R(t-R(t))}\,p(t-R(t))$$

$$\dot{q} = \begin{cases} -C + \dfrac{N(t)}{R(t)}W(t), & q > 0 \\ \max\left\{0, -C + \dfrac{N(t)}{R(t)}W(t)\right\}, & q = 0 \end{cases} \tag{5}$$

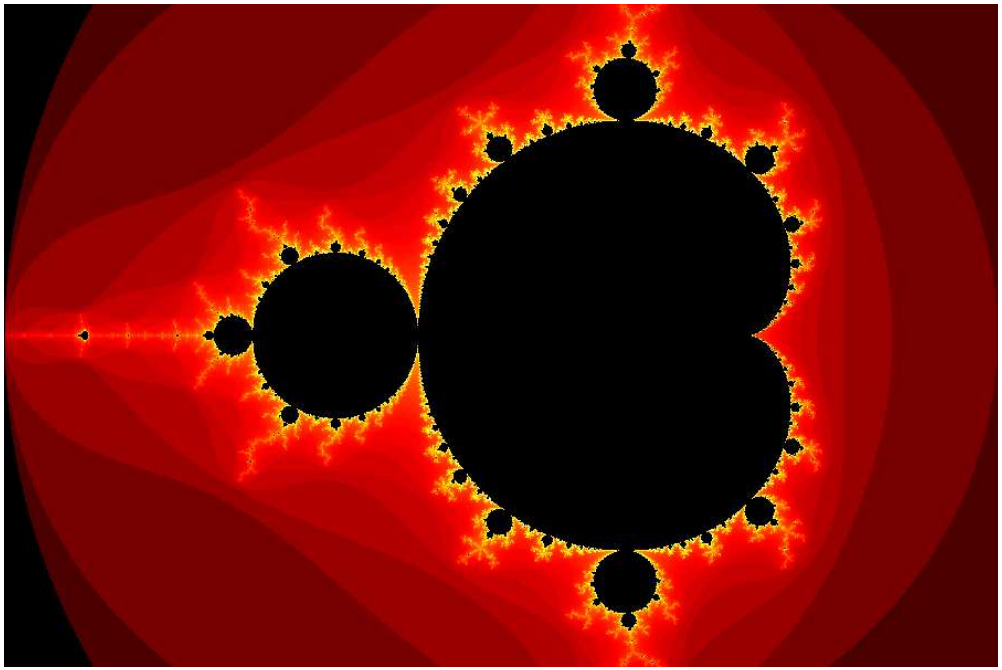
unde:
$W$ = valoarea medie a ferestrei TCP,
$q$ = lungimea cozii de așteptare asociată ruterului,
$R(t)$ = Round Trip Time ($= \frac{q(t)}{C} + T_p$),
$C$ = capacitatea conexiunii,
$T_p$ = timpul de propagare,
$N$ = număr de sesiuni TCP,
$p$ = probabilitatea ca un pachet să fie marcat.

# Câteva explicații

- Prima ecuație reprezintă dinamica mărimii ferestrei.
- A doua ecuație reprezintă variația lungimii cozii, ca diferență dintre rata de primire a pachetelor și capacitatea conexiunii.
- Model complex = sistem cu întârziere, neliniar, variabil în timp.
- Scopul reglării automate este funcționarea sistemului în jurul unor valori „de echilibru" $W_0$, $q_0$, $p_0$, prin elaborarea unei comenzi potrivite $p$, în funcție de $W$ și $q$.
  *Ideea:* utilizarea unei aproximații liniare $\rightarrow$ Teoria Sistemelor Liniare.
- Un exemplu numeric: $N = 120$ sesiuni TCP, $q_0 = 175$ pachete, $C = 3750$ pachete/sec, $W_0 = 7.7$ pachete, $R_0 = 0.346$ secunde etc.
- Problemă dificilă!!!

# O mașină de calcul: un sistem neliniar *discret*

**Problemă:** Este setul Mandelbrot decidabil? [Blum et al. SPRINGER1997]



Set Mandelbrot:
Fie $p_c(z) = z^2 + c,\ c \in \mathbb{C}$.
Complementul $\mathcal{M}$ al lui
$\mathcal{M}' = \left\{c \in \mathbb{C} | \lim_{n\to\infty} p_c^n(0) = \infty\right\}$, cu
$p_c^n = \underbrace{p_c \circ p_c \circ p_c \cdots \circ p_c}_{n\ ori} \leftarrow$ punctele
$p_c(0), p_c^2(0), \ldots$ rămân în partea neagră a imaginii = nu se fac albe $\Leftrightarrow$ dacă șirul $c,\ c^2 + c,\ (c^2 + c) + c$ nu diverge (la infinit cercurile nu "explodează") $\Leftrightarrow |z| < 2$. Se construiește o mașină de calcul care să decidă dacă setul rămâne în formă sau nu.

**Exemplu:** Pt. $p(z) = z^2 + 4 \Rightarrow$ set Julia. Dacă $|z| > 2 \Rightarrow |p^k(z)| \to \infty$ când $k \to \infty$. Setul de oprire al unei mașini care să decidă setul $\mathcal{M}$ este $\Omega_M = \{z \in \mathbb{C} | |z| > 2\}$, iar setul Julia este $\mathbb{C} - \Omega_M$... Obs. că punctele de echilibru, i.e., punctele fixe $f(z) = z \Leftrightarrow p^k(z) = z$ nu sunt în $\Omega_M$.

# SISTEME DE REGLARE AUTOMATĂ

Reglare automată: procesul de a impune ca anumite *variabile specificate* ale unui sistem să urmeze anumite evoluții impuse, în prezența diferitelor perturbații (precum și a incertitudinilor de modelare).

Influențarea evoluției unui sistem *fără* intervenția umană.

Sisteme interconectate: serie, paralel, **reacție** - corespund unor operații matematice specifice ale operatorilor care descriu (d.p.d.v matematic) sistemele respective.

Serie: compunere („înmulțire")
Paralel: adunare
Reacție: transformare liniară fracțională (omografică).

# Diagrama unui Sistem de Reglare Automată

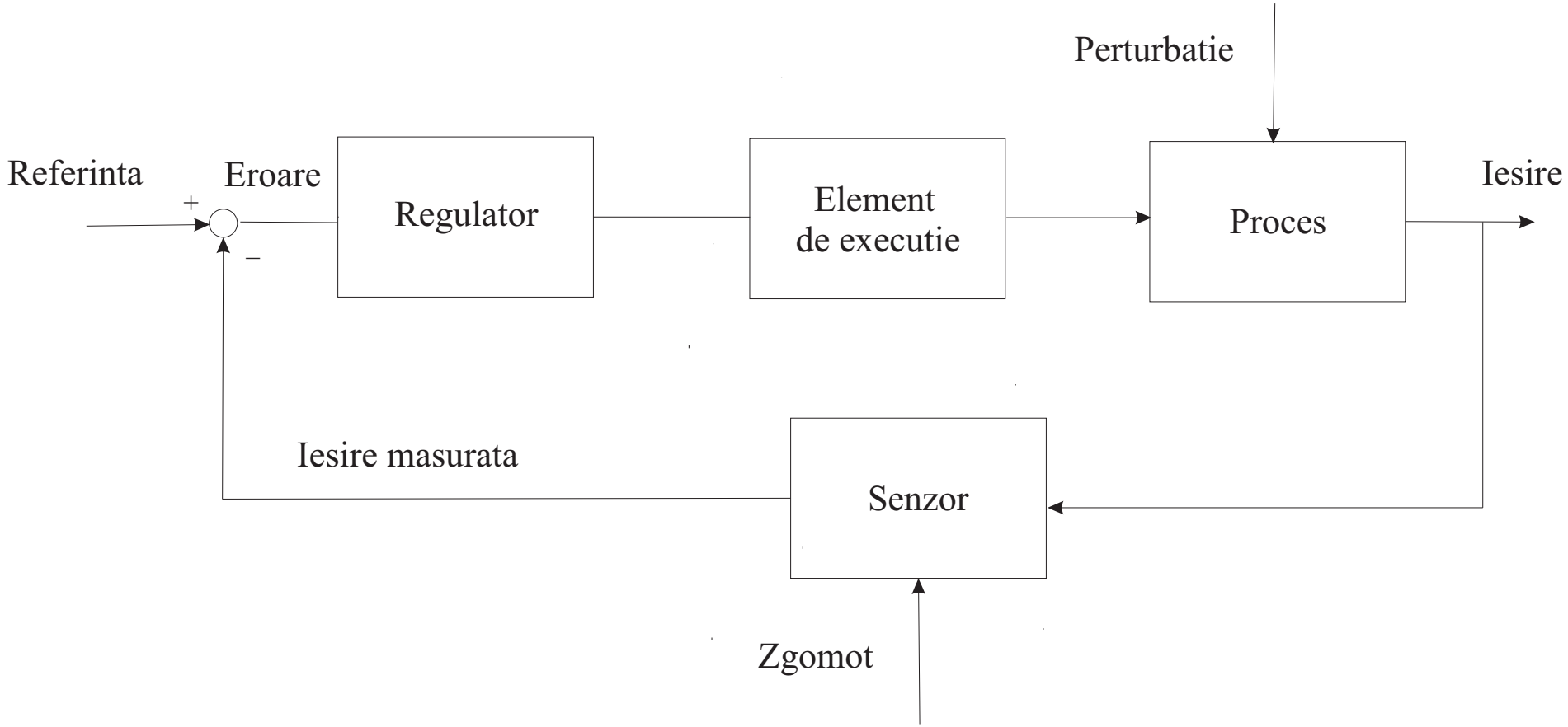



Figura: Diagrama bloc funcțională a unui SRA

# SRA

Observații:

- ansamblu de sisteme interconectate (serie, paralel, reacție)
- existența reacției inverse!

Reglarea cu reacție inversă folosește măsurători ale variabilei reglate pentru a influența mărimile de intrare ale sistemului reglat, astfel încât variabila reglată să urmărească o anumită evoluție impusă.

Conexiunea inversă permite evaluarea permanentă a gradului de realizare a obiectului propus: metodă extrem de eficientă.

# Obiectivul principal al cursului de TS

Descrierea unor metode de sinteză a compensatoarelor (regulatoarelor).
Cursul introduce noțiunile fundamentale necesare pentru proiectarea filtrelor numerice (analogice).

Pentru a putea înțelege și aplica aceste tehnici de sinteză elementară, este necesar, mai întâi, să studiem anumite proprietăți și caracteristici sistemice.
În consecință, începem cu metode de analiză a sistemelor.

# Proiectarea SRA

1. Stabilirea obiectivelor reglării.
2. Identificarea mărimilor care trebuie reglate.
3. Scrierea **specificațiilor** pt. mărimile reglate.
4. Stabilirea configurației de reglare.
5. Obținerea unui *model* (pt. fiecare element al buclei: proces, senzor, element de acționare etc.)
6. Alegerea unui regulator/compensator (*eng.* controller) și a parametrilor săi.
7. Optimizarea **parametrilor** și analiza performanțelor.
8. Dacă performanțe = specificații atunci proiectarea este încheiată.
   In caz contrar, se reia „algoritmul" de la pasul 4.