# FUNKCIJE VEČ SPREMENLJIVK

$F: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $F(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$

Zveznost v a $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0. \; d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ (normalno)

Karakterizacija z zaporedji: f zv. v a $\Leftrightarrow$ vsako zap., ki ima $\lim_{n\to\infty} a^{(n)} = a$ $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a^{(n)}) = f(a)$. Vse linearne funkcije so zvezne, tudi polinomi in rac.

Če je f zvezna kot funkcija n spremenljivk ($f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$), je zvezna kot funkcija vsake posamezne spremenljivke.

Obrat ne velja. Primer: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$ na premici $y=x$

$F: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je zvezna preslikava $\Leftrightarrow$ vse $f_1, \dots, f_m$ so zvezne.

# PARCIALNI ODVODI IN DIFERENCIABILNOST

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je parcialno odvedljiva po spremenljivki $x_j$, v točki a, če obstaja limita $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)}{h}$, oznaka $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = f_{x_j}(a) = (D_j f)(a)$.

Diferenciabilnost – v okolici a želimo f aproksimirati z linearno preslikavo.

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je diferenciabilna v a, če obstaja taka linearna funkcija $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, da velja $f(a+h) = f(a) + Lh + o(h)$, kjer je $\lim_{h\to 0} \frac{|o(h)|}{h} = 0$.

L je tedaj diferencial, oznaka $(Df)(a)$ oz. $f'(a)$. Če je, je natanko en.

Če je f v a diferenciabilna, je v a zvezna in f je v a parcialno odvedljiva na vse spremenljivke.

$$(Df)(a) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right]$$

Uporaba na h: $(Df)(a)\cdot h = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\cdot h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) h_n$ (skalarni produkt)

Obrat v splošnem ne velja, če so parcialni odvodi zvezni, pa ja:

Naj bo f definirana v okolici točke a, naj tam obstajajo vsi parcialni odvodi in so zvezni. Potem je f v a diferenciabilna.

f lahko večkrat odvajamo (če je dovoljkrat odvedljiva) ... $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ ...

Če ima f v okolici a $\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$ in $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)$ in sta druga odvoda zvezna, sta enaka (komutirata): $f_{x_j x_k} = f_{x_k x_j}$.

Zdaj gremo iz funkcij več spr. ($f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$) na preslikave $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$.

Diferenciabilnost: $\exists L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, da $F(a+h)=F(a)+Lh+o(h)$, kjer $\lim_{h\to 0}\frac{|o(h)|}{h}=0$.

$L=(DF)(a)=F'(a)$ je matrika $m\times n$. $Lh = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ A_{m1} & \dots & A_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n\end{bmatrix}$, $o(h)=\begin{bmatrix} o_1(h) \\ \vdots \\ o_m(h)\end{bmatrix}$

$F=(f_1,\dots,f_m)$ je diferenciabilna v a $\Leftrightarrow$ $f_1,\dots,f_m$ so vse diferenciabilne v a.

Jacob

$$(DF)(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a)\end{bmatrix}$$

Če so vsi $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$ zvezni, je F diferenciabilna v a.

Hessejeva matrika drugih odvodov $f:D\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ je

$$Hf = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\end{bmatrix}$$

in $(Hf)^T = Hf$, če je $f\in C^2(D)$ → dvakrat zvezno odvedljiva

Odvod kompozituma: $F: D\subseteq\mathbb{R}^n\to\Omega\subseteq\mathbb{R}^m$, $G:\Omega\subseteq\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^k$

$b=F(a)$, F diferenciabilna v a, G diferenciabilna v $F(a)$. Tedaj je $G\circ F$ diferenciabilna v a in velja $(D(G\circ F))(a) = (DG)(F(a))\cdot(DF)(a)$.

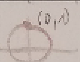
# IZREK O IMPLICITNI IN INVERZNI PRESLIKAVI

## Izrek o implicitni funkciji za $n=2$

$f(x,y)$ zvezno odvedljiva funkcija v okolici točke $(a,b)$ in $f(a,b)=0$. Denimo $f_y(a,b)\neq 0$. Tedaj obstajata $\varepsilon>0$ in $\delta>0$ ter enolično določena $C^1$ funkcija $\varphi:(a-\delta,a+\delta)\to(b-\varepsilon,b+\varepsilon)$, da velja $\varphi(a)=b$, za vsak $x\in(a-\delta,a+\delta)$ je $f(x,\varphi(x))=0$, na $(a-\delta,a+\delta)\times(b-\varepsilon,b+\varepsilon)$ velja $f(x,y)=0 \Leftrightarrow y=\varphi(x)$ in $f_x(x,\varphi(x))+f_y(x,\varphi(x))\cdot\varphi'(x)=0$

$\varphi'(x) = -\dfrac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))}$.

Primer: $f(x,y)=x^2+y^2-1$ ož. krožnica $x^2+y^2=1$, $(a,b)=(0,1)$. Odvod po $y$ v




$(0,1)$ je $2y\neq 0$. V okolici $(0,1)$ je $y=\varphi(x)=\sqrt{1-x^2}$.

## Izrek o implicitni preslikavi

$F:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$

$F\in C^1(\Omega)$, $\Omega \overset{odp}{\subseteq} \mathbb{R}^{n+m}=\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^m_y$, $F=(f_1,\dots,f_m)(x,y)\to\mathbb{R}^m$.

Naj bo $(a,b)\in\Omega$ in $\det(D_yF)(a,b)\neq 0$. Obstaja okolica $U \subseteq \mathbb{R}^n$ za $a$ in okolica $V\subseteq\mathbb{R}^m$ za $b$ ter enolično določena $C^1$ preslikava $\Phi:U\to V$, da velja $\Phi(a)=b$, za $(x,y)\in U\times V$ je $F(x,y)=0\Leftrightarrow y=\Phi(x)$ in $(D\Phi)(x) = -(D_yF)^{-1}(x,\Phi(x))\cdot(D_xF)(x,\Phi(x))$.

Dodatek: Če je $F\in C^k(\Omega)$, je tudi $\Phi\in C^k(U)$.

## Izrek o inverzni preslikavi

Naj bo $\Omega$ odprta v $\mathbb{R}^m$, $F:\Omega\subseteq\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ $C^1$ preslikava, $a\in\Omega$ in $\det(DF)(a)\neq 0$. Tedaj obstaja okolica $U$ točke $a$ in okolica $V$ točke $F(a)$, da je $F:U\to V$ difeomorfizem razreda $C^1$. $F$ difeomorfizem: $F$ je bijekcija, je zvezno odvedljiva ($C^1$) z zvezno odvedljivim inverzom.

Dokazovanje: V $n=2$ dokažemo na roke (recimo, da $f_y(x,y)>0$ stran od $0$, $f$ po $y$ narašča, $x \mapsto \varphi(x)$ ima natanko eno ničlo...). Implicitno v splošnih dimenzijah dokažemo z uporabo izreka o inverzni preslikavi. Dokaz izreka o inverzni preslikavi je dolg in zapleten.

Posledica: $F: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $C^k$ in $m<n$. Če ima $(DF)(a)$ maksimalen možen rang (obstaja $m \times m$ obrnljiva podmatrika), lahko preostale koordinate zapišemo kot funkcije teh $m$ koordinat.

## JACOBIJEVA MATRIKA IN DETERMINANTA

$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\quad F(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$

$$J_f = DF(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$ Jacobijeva matrika

Če je $n=m$, je $J_f$ kvadratna in Jacobijeva determinanta je $J(x) = \det(DF)(x)$.

## TAYLORJEVA FORMULA $(D_h f)(x) = \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$

$$f(a+h) = f(a) + (D_h f)(a) + \frac{1}{2!}(D_h^2 f)(a) + \dots + \frac{1}{k!}(D_h^k f)(a) + R_k(h)$$

$R_k(h) = (D_h^{k+1} f)(a + \vartheta h)$, $\vartheta \in (0,1)$

Npr.: $f(a_1+h_1, a_2+h_2) = f(\underbrace{a_1,a_2}_{a}) + (h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)) + \frac{1}{2}(h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) + 2h_1h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a))$
$+ \frac{1}{6}(\dots) + \frac{1}{24}(\dots) + \dots$

# EKSTREMI IN VEZANI EKSTREMI

$f: G \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciabilna. Pogoj, da je možen lok. ekstrem v $a$: $(Df)(a) = 0 = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right] = [0, 0, \dots, 0]$.

Niso pa vse te točke ekstremi (lahko je „prevoj").

Naredimo Hessejevo matriko drugih odvodov $(Hf)(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots \\ \vdots & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots \end{bmatrix}$

$H$ je pozitivno definitna: vse lastne vrednosti so pozitivne, $\langle Hv, v\rangle > 0$ za $\forall v \neq 0$ (Podobno $H$ negativno definitna).

Semi pozitivno definitna: $\langle Hv, v\rangle \geq 0$ $\forall v$, l. vr. so $\geq 0$.

$a$ lok. min $\Rightarrow (Hf)(a) \geq 0$, $a$ lok. max $\Rightarrow (Hf)(a) \leq 0$

(to v primeru, da je $f$ na okolici $a$ dvakrat zvezno odvedljiva)

$f$ dvakrat zvezno odvedljiva na okolici $a$ in $(Df)(a) = 0$:

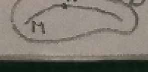
$(Hf)(a) > 0 \Rightarrow a$ strogi lok. min., $(Hf)(a) < 0 \Rightarrow a$ strogi lok. max.

Če ima $Hf$ v $a$ vsaj eno $+$ in eno $-$ lastno vrednost $\Rightarrow$ ni ekstrema.

## Metoda Lagrangevih multiplikatorjev za vezane ekstreme

Zgled: Iščemo točko na sferi $x^2+y^2+z^2=1$, ki hkrati leži tudi na ravnini $x+y+z=0$ in ima maks. $z$ koordinato. Vezi $g_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1 = 0$, $g_2(x,y,z) = x+y+z = 0$, funkcija $f(x,y,z) = z$. $F(x,y,z,\lambda,\mu) = f(\cdot) - \lambda g_1(\cdot) - \mu g_2(\cdot) = z - \lambda(x^2+y^2+z^2-1) - \mu(x+y+z)$. Odvajamo $F$ po $x, y, z, \lambda, \mu$ in izenačimo z 0: $F_x = 0, \dots, F_\mu = 0$. Od tod izračunamo $\lambda, \mu$ in $f(x,y,z) = z$.

Izrek: Vezi $G = (g_1, \dots, g_m): D \to \mathbb{R}^m$ ($D \subseteq \mathbb{R}^n$) $C^1$, $m < n$. $M = G^{-1}(\{0\}) = \{x \in D;\, G(x) = 0\}$, rang $G$ na $M$ je rang $DG(x)$ naj bo poln (enak $m$) za $\forall x \in M$. Naj ima $f$ v $a$ lok. ekstrem glede na $M$. Tedaj obstajajo $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, da velja $(Df)(a) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (Dg_j)(a)$.



# INTEGRALI S PARAMETROM

Integral s parametrom je funkcija $F(x)=\int_a^b f(x,t)\,dt$ (ali kaj podobnega).

**Zveznost** $f: \underset{x}{D}\times \underset{t}{I} \xrightarrow{=[a,b]} \mathbb{R}$ zvezna $\Rightarrow$ $G(x)=\int_a^b f(x,t)\,dt$ je zvezna in $F: \underset{x}{D}\times \underset{u}{I}\times \underset{v}{I} \to \mathbb{R}$, $F(x,u,v)=\int_u^v f(x,t)\,dt$ zvezna. (D je lok. kompaktna.)

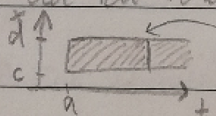
**Odvedljivost** $f:(c,d)\times[a,b]\to\mathbb{R}$ zvezna, $f_x=\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ obstaja in je zvezna $\Rightarrow$ $F(x)=\int_a^b f(x,t)\,dt$ je zvezno odvedljiva in velja $F'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^b f(x,t)\,dt=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$.

Če sta še meji funkciji $\alpha,\beta:(c,d)\to[a,b]$ zvezno odvedljivi, je $G(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,t)\,dt$ zvezno odvedljiva in $G'(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt+f(x,\beta(x))\cdot\beta'(x)-f(x,\alpha(x))\alpha'(x)$

**Integral** $f:\underset{x}{[c,d]}\times\underset{t}{[a,b]}\to\mathbb{R}$ zvezna $=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,t)\,dt\right)dx=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,t)\,dx\right)dt$.

Kaj pa, če imamo kje območje do $\infty$? Naj bo $t\mapsto f(x,t)$ zvezna na $\underset{x}{X}\times\underset{t}{(a,\infty)}$, naj za $\forall x\in X$ obstaja $F(x)=\int_a^\infty f(x,t)\,dt=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x,t)\,dt$

Integral $\int_a^\infty f(x,t)\,dt$ **konvergira enakomerno** na $X$, če za $\forall\varepsilon>0$ obstaja $b_0\geq a$, da za vsak $b\geq b_0$ velja $\left|\int_b^\infty f(x,t)\,dt\right|<\varepsilon$ za vsak $x\in X$.




od nekod naprej so vsi integrali pod $\varepsilon$, enakomerno: meja je za vse $x$ ista

**Lokalna enakomerna konvergenca** na $X$: za $\forall x_0\in X$ je okolica, kjer je konvergenca enakomerna.

Če $D$ lok. komp., $f: D\times[a,\infty)\to\mathbb{R}$ zvezna, $F(x)=\int_a^\infty f(x,t)\,dt$ konv. lok. enakom. $\Rightarrow$ $F$ zvezna na $D$.

Majorantni kriterij: $\varphi(t)\geq|f(x,t)|$ ocena za vsak $x\in D$, $f$ zvezna. Če je $\int_a^\infty\varphi(t)\,dt$ končen, je $F(x)=\int_a^\infty f(x,t)\,dt$ enakomerno konvergentna na $D$.

- $f$ zvezna, $F(x)=\int_a^\infty f(x,t)\,dt$ konvergira enakomerno na $[c,d]$ $=\int_c^d\left(\int_a^\infty f(x,t)\,dt\right)dx=\int_a^\infty\left(\int_c^d f(x,t)\,dx\right)dt$.
- $f$ zv. nenegativna, $F(x)$ in $G(t)=\int_c^\infty f(x,t)\,dx$ lok. enakom. konv. $\Rightarrow$ $\int_c^\infty\int_a^\infty\ldots=\int_a^\infty\int_c^\infty\ldots$ (če en obstaja, tudi drugi, ali pa oba ne obstajata). (brez abs.)
- Namesto $f$ je $|f(x,t)|$ $\Rightarrow$ če obstaja $\int_c^\infty\int_a^\infty|f(x,t)|\,dt\,dx$ ali $\int_a^\infty\int_c^\infty|f|\,dx\,dt$, sta enaka tudi

# RIEMANNOV INTEGRAL FUNKCIJE VEČ SPREMENLJIVK

Zelo podobno kot pri eni spremenljivki. Namesto intervalov so kvadri $K = [a,b] = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times \dots \times [a_n,b_n]$, kjer $a_i \leq b_i$. Volumen kvadra je $V_n(K) = (b_1-a_1)\cdot(b_2-a_2)\cdot\ldots\cdot(b_n-a_n)$.

Delitev kvadra dobimo z delitvami intervalov $[a_j,b_j]$, kvadre delitve nekako oštevilčimo.

Darbouxove vsote $s(D) = \sum_{K_i \in D} m_i \cdot V(K_i)$, $S(D) = \sum_{K_i \in D} M_i \cdot V(K_i)$, Riemannova vsota $R(f,D,\xi) = \sum_{K_i \in D} f(\xi_i)\cdot V(K_i)$, $\xi = (\xi_i)_i$ usklajena izbira testnih točk

Velja $s(D) \leq R(f,D,\xi) \leq S(D)$ za vsako delitev $D$ in izbor $\xi$.

$\lim_{\delta \to 0} R(f,D,\xi) = I$ $f$ Riemannovo integrabilna, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za vsako delitev $D$ kvadra $K$ z maksimalno dolžino delilnih intervalov pod $\delta$ velja $|R(f,D,\xi) - I| < \varepsilon$ za vsak izbor $\xi$ testnih točk, $\xi_i \in K_i$.

Darbouxova integrabilnost $s = S$, $f: K \to \mathbb{R}$, oz. $S(D) - s(D) < \varepsilon$ pod $\delta$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ da za $D$ z delilnimi intervali

**Če je $f: K \to \mathbb{R}$ zvezna (na kvadru), je integrabilna.**

**$f: K \to \mathbb{R}$ je Darbouxovo integrabilna $\Leftrightarrow$ je Riemannovo integrabilna in integrala sta enaka.**

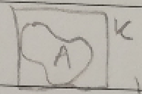
Sledijo lastnosti (zelo podobne kot v 1 dim), a bomo najprej pogledali razpravo o prostornini.

Kaj če območje ni kvader $K$? To je drugače kot v 1 dim.

# VOLUMEN MNOŽIC V $\mathbb{R}^n$

**n-dimenzionalna prostornina**: omejena množica $A \subset \mathbb{R}^n$ ima n-dim. oz. Jordanovo prostornino, če obstaja integral $\int_A 1\,dx =: V_n(A)$.

Integral po A lahko računamo kot po K




le da definiramo $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x); & x \in A \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$. $\int_A f(x)\,dx = \int_K \tilde{f}(x)\,dx$.

$\chi_A(x) = \begin{cases} 1; & x \in A \\ 0; & x \notin A \end{cases}$ je karakteristična funkcija množice A

**T: Množica $A$ (omejena) ima prostornino $\Leftrightarrow V(\partial A) = 0$.** Volumen roba A je 0.

T: B omejena množica v $\mathbb{R}^n$. $V(B) = 0 \Leftrightarrow$ za vsak $\varepsilon > 0$ lahko B pokrijemo s končno mnogo kvadrov s skupnim volumnom pod $\varepsilon$.

T: Graf funkcije $f: K \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ima $(n+1)$-dimenzionalno prostornino enako 0.

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ ima **mero enako 0**, $m(A) = 0$, če za vsak $\varepsilon > 0$ lahko A pokrijemo s števno mnogo kvadri, katerih volumen se sešteje pod $\varepsilon$. $V(A) = 0 \Rightarrow m(A) = 0$ (Če A kompaktna, je $V(A) = 0 \Leftrightarrow m(A) = 0$.)

T: $A_j$ imajo volumen 0 $\Rightarrow$ končna unija ima volumen 0.

$A_j$ imajo mero 0 $\Rightarrow$ števna unija ima mero 0.

**Skoraj povsod**: Če nekaj velja za vse $x \in A$ razen za x iz množice z mero 0, rečemo, da velja skoraj povsod.

Če $f(x) \leq g(x)$ za $\forall x \in K$, $f, g$ integrabilni in $\int_K f(x)\,dx = \int_K g(x)\,dx$, je $f = g$ skoraj povsod na K. (f in g sta enaki skoraj povsod)

# OBSTOJ VEČTERNEGA RIEMANNOVEGA INTEGRALA

**Lebesguov izrek:** Naj bo $f: K \to \mathbb{R}$ omejena.
$f$ je integrabilna na $K$ $\Leftrightarrow$ $f$ je zvezna skoraj povsod na $K$.

P: $A$ omejena množica v $\mathbb{R}^n$ s prostornino, $f: A \to \mathbb{R}$ omejena in zvezna skoraj povsod. Potem je $f$ integrabilna na $A$. (Razširimo na $K$ in k točkam nezveznosti dodamo rob, ki ima mero 0 $m(\partial A) = 0$, saj ima $A$ prostornino.)

T: $V(C) = 0$ in $f: C \to \mathbb{R}$ omejena $\Rightarrow$ $f$ na $C$ integrabilna in $\int_C f(x)\,dx = 0$.

## Lastnosti Riemannovega integrala v $\mathbb{R}^n$

$A$ omejena v $\mathbb{R}^n$, $f$ in $g$ integrabilni na $A$

1) $\int_A (f+g)\,dx = \int_A f\,dx + \int_A g\,dx$ 2) $\int_A \lambda f\,dx = \lambda \int_A f\,dx$

3) $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_A f(x)\,dx \leq \int_A g(x)\,dx$ 4) $\left| \int_A f(x)\,dx \right| \leq \int_A |f(x)|\,dx$

5) $A$ ima prostornino, $m \leq f(x) \leq M$ $\forall x \in A$ $\Rightarrow$ $m \cdot V(A) \leq \int_A f(x)\,dx \leq M \cdot V(A)$

6) $A$ kompaktna povezana, ima prostornino $\neq 0$, $V(A) \neq 0$. Povprečje je $\frac{1}{V(A)} \int_A f(x)\,dx$.
↳ v tem primeru povprečje zavzamemo: $\exists x_0 \in A$, da $f(x_0) = \frac{1}{V(A)} \int_A f(x)\,dx$

7) $A \subseteq B$ in imata prostornini $\Rightarrow$ $V(A) \leq V(B)$

8) $f$ integrabilna na $A, B$ in $A \cap B$ $\Rightarrow$ $f$ integrabilna na $A \cup B$ in $\int_{A \cup B} f(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx + \int_B f(x)\,dx - \int_{A \cap B} f(x)\,dx$. Če $V(A \cap B) = 0$, zadnji člen odpade, lahko integriramo „po kosih".

# FUBINIJEV IZREK

**Fubinijev izrek za n-terni integral:**

$A, B$ kvadra v $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$, $f: A \times B \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija. Če za vsak $x$ lahko integriramo po $y$, velja $\iint_{A\times B} f(x,y)\,dx\,dy = \int_A \left( \int_B f(x,y)\,dy \right) dx$.

Simetrično: če za vsak $y$ obstaja $h(y) = \int_A f(x,y)\,dx$, velja $\iint_{A\times B} f(x,y)\,dx\,dy = \int_B \left( \int_A f(x,y)\,dx \right) dy$. „lahko integriramo po x"

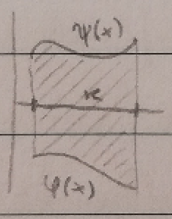
P: Če je $f$ zvezna na $A \times B$, je

$$\iint_{A\times B} f(x,y)\,dx\,dy = \int_A \left( \int_B f(x,y)\,dy \right) dx = \int_B \left( \int_A f(x,y)\,dx \right) dy.$$

(Opomba: f integrabilna na kvadru je avtomatsko omejena.)

Če je $f$ zvezna na kvadru $K$, je n-terni integral enak n-kratnemu integralu po intervalih. $K = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$

$$\iint_K \dots \int f(x_1, \dots, x_n)\,dx_1 \dots dx_n = \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2}^{b_2} \dots \left( \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n)\,dx_n \right) dx_{n-1} \dots \right) dx_1.$$




P: $K$ kvader v $\mathbb{R}^n$, $\varphi, \psi: K \to \mathbb{R}$ zvezni, $\varphi(x) \leq \psi(x)$ za $\forall x \in K$, $A$ šrafirano območje $\{(x,y),\ x \in K,\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$,

$f: A \to \mathbb{R}$ zvezna $\Rightarrow$ $f$ integrabilna in $\int_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_K \left( \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$.

P: Če je namesto kvadra $K$ omejena množica $D$ s prostorinо, je isti sklep.

**Vpeljava novih koordinat** $\int_V f(x)\,dx = \int_U f(\Phi(t))\,|J\Phi(t)|\,dt$

Ko spremenimo koordinate, moramo pomnožiti z „Jakobijem".

Polarne v $\mathbb{R}^2$: $J = r$, cilindrične $\begin{matrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{matrix}$ $J = r$, sferične $\begin{matrix} x = r\sin\vartheta\cos\varphi \\ y = r\sin\vartheta\sin\varphi \\ z = r\cos\vartheta \end{matrix}$

$J = r^2 \sin\vartheta$