1 KA

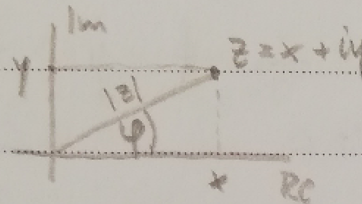
OBSEG KOMPLEKSNIH ŠTEVIL

$\mathbb{C} = \{(a,b);\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ $\quad x^2+1=0 \rightsquigarrow i^2=-1$

$z = a+bi \quad \bar{z} = a-bi$ konjugiranje → preslika z čez realno os

$|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$ norma

$Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} \quad Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$



$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}$$

$$\varphi = Arg(z) \in [0, 2\pi) \text{ ali } [-\pi, \pi)$$

$$\varphi = \arctan\frac{y}{x} + k\pi$$

$$x = |z|\cos\varphi \quad y = |z|\sin\varphi$$

$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

$|z|e^{i\varphi}$ $|w|e^{i\psi}$

$$z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot (\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi))$$ koreni enote dajo pravilni n-kotnik

- Korenjenje: $w^n = z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right)$$

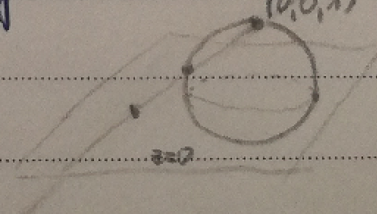
$$k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

- Običajna def. konvergence zaporedja in zveznosti, limite

$\lim_{n\to\infty} z_n = \alpha \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0.\ \exists n_0 \in \mathbb{N}.\ \forall n \geq n_0.\ |z_n - \alpha| < \varepsilon$

f zv. v $\alpha \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0.\ |z-\alpha| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(\alpha)| < \varepsilon$

- Riemannova sfera: enotsko sfero brez $N = (0,0,1)$ stereografsko projiciramo na ravnino $z = 0$



znanje nas dela velike

KOMPLEKSNI ODVOD, HOLOMORFNE FUNKCIJE

D območje (povezana odprta množica) v $\mathbb{C}$

$f: D \to \mathbb{C}$ je v kompleksnem smislu odvedljiva v $\alpha \in D$, če obstaja $\lim\limits_{z \to \alpha} \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$.

Čisto normalna def. Pazi, da je $h \in \mathbb{C}$.

Če ta limita obstaja za $\forall \alpha \in D$, je to $f'(\alpha)$ in f je holomorfna na D, $f \in \mathcal{O}(D)$

Vse se normalno računa - odvod vsote, razlike, produkta, kvocienta, odvod kompozituma (verižno pravilo)
$(fg)' = f'g + fg'$

Vsi polinomi in rac. v z so holomorfni, če imajo $\bar{z}$, pa niso. Kasneje: holomorfne funkcije so neskončnokrat odvedljive.

$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + h \cdot E(h) \qquad \lim\limits_{h \to 0} E(h) = 0$

$\rightsquigarrow$ diferencial $(Df)(a) \cdot h = f'(a) \cdot h$

$f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ je **cela** holomorfna funkcija

CAUCHY - RIEMANNOVE ENAČBE

$f = u + iv \qquad z = x + iy \qquad u(x,y), v(x,y): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

T: $f: D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ C^1 funkcija. Potem $f \in \mathcal{O}(D) \Leftrightarrow$ $\boxed{\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned}}$ CR sistem

Če CR sistem še enkrat odvajamo po x in po y, dobimo $\Delta u = 0$ ($= u_{xx} + u_{yy} = 0$) in $\Delta v = 0$, u in v sta harmonični konjugiranki, če enega poznamo, je drugi do konst. določen. za vsako območje svoja konst.

Izmed $f: D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ ($v \equiv 0$) so holomorfne le konstantne funkcije.

$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \qquad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \rightsquigarrow \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{1}{2i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$

$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \left(-\frac{1}{2i}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$

$f \in C^1(D)$. $\quad f \in \mathcal{O}(D) \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ holomorfna funkcija ni odvisna od $\bar{z}$.

$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left[(u_x + iv_x) + i(u_y + iv_y)\right]$

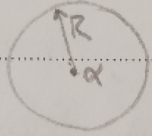
Torej za holomorfno funkcijo $df = f'(z)dz$.

[Še nekaj o linearnih preslikavah. $f \in \mathcal{O}(D) \Leftrightarrow$ v vsaki točki iz D je diferencial $Df = \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix}$ $\mathbb{C}$-linearen.)

POTENČNE VRSTE V $\mathbb{C}$

Potenčna vrsta s središčem $\alpha \in \mathbb{C}$ je $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n$

$\frac{1}{R} = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$



$\Delta(\alpha, R)$

zunaj divergira, znotraj konvergira, na robu ne vemo

Na kompaktnih podmnožicah $\Delta(\alpha, R)$ konvergira enakomerno.

T: Naj bo $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n$, $R \in (0, \infty]$. f je holomorfna na $\Delta(\alpha, R)$, $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (z-\alpha)^{n-1}$, f' in vsi naslednji odvodi so holomorfni na $\Delta(\alpha, R)$

$a_0 = f(\alpha)$, $a_1 = f'(\alpha)$, $a_2 = \frac{f''(\alpha)}{2!}$, ..., $a_n = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}$ $\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (z-\alpha)^n}$

Če se f da razviti v konv. potenčno vrsto (za vsak $\alpha \in D$ vsaj na $\Delta(\alpha, r)$), je holomorfna na D.

$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ $R = \infty$ T: $e^{z+w} = e^z e^w$

Def: $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$

$\Rightarrow e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = \cos z + i \sin z$ Eulerjeva identiteta

Če vstavimo $z = -\pi$ v $e^{-iz} = \cos z - i \sin z \Rightarrow e^{i\pi} + 1 = 0$

Logaritem: $\ln z = w \Leftrightarrow e^w = z$ $z = |z| e^{i \operatorname{Arg}(z) + i2k\pi} = e^{\operatorname{Re} w} e^{i \operatorname{Im} w}$

$\operatorname{Re} w = \ln|z|$ $\operatorname{Im} w = \operatorname{Arg}(z) + 2k\pi$ $\ln z = \ln|z| + i \operatorname{Arg}(z)$, $\operatorname{Arg}(z) \in [0, 2\pi]$

glavna veja logaritma $w_k = \ln|z| + i \operatorname{Arg}(z) + i2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

znanje nas dela velike

$\operatorname{Arg}(z)$ na $[0, 2\pi]$ ni dobro definiran, na $[0, 2\pi)$ ni zvezen.

CAUCHYJEVA FORMULA

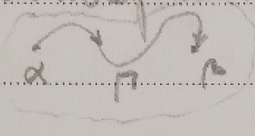
Krivuljni integral: $z:[a,b]\to\Gamma\subseteq\mathbb{C}$ $\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\,\dot{z}\,dt$

Na roke izračunamo $\int_{\partial\Delta(\alpha,r)} \frac{dz}{z-\alpha} = \int_0^{2\pi} \frac{r i e^{it}}{r e^{it}}\,dt = 2\pi i$

$z = \alpha + re^{it}$

$dz = ri e^{it}\,dt$

Za integral odvoda po krivulji potrebujemo le začetno in končno točko:



$\int_\Gamma f'(z)\,dz = f(\beta) - f(\alpha)$, Γ sklenjena: $\int_\Gamma f'(z)\,dz = 0$.

z^n je odvod nečesa za vse $n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}$. Za $\int_{\partial\Delta}\frac{dz}{z}$ pa že vemo, da je $2\pi i$.

$\to$ svojo število dobimo, če večkrat obkrožimo $z=0$ $\frac{1}{z} = (\ln z)' = (\ln|z| + i\operatorname{Arg}(z))'$

omejena, odprta, z odsekoma gladkim robom

Cauchyjev izrek: D omejena, f holomorfna in $C^1(\bar{D}) \Rightarrow \int_{\partial D} f(z)\,dz = 0$. ← pozitivna orient.

Dokaz prek Greena: $\int_{\partial D} f(z)\,dz = \int_{\partial D}(u+iv)(dx+idy) = \int_{\partial D}(u\,dx - v\,dy) + i\int_{\partial D}(u\,dy + v\,dx)$

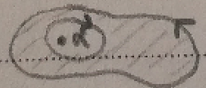
$\overset{\text{Green}}{=} \iint_D(-v_x - u_y)\,dx\,dy + \iint_D (v_y - u_x)\,dx\,dy \overset{f\in\mathcal{O}(D)}{=} 0$

Cauchyjeva formula: D kot prej, $f\in\mathcal{O}(D)$ in $C^1(\bar{D})$ $\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi}$, $\forall z\in D$

Pri holomorfni f je za $\forall\alpha\in D$ vrednost $f(\alpha)$ določena z vrednostmi na robu.

Dokaz: Za $F(\xi) = \frac{f(\xi)}{\xi-\alpha}$ bo integral po robu enak 0, če izrežemo krog okrog α, saj tam ni definirano. $\int_{\partial\Delta(\alpha,r)}\frac{f(\xi)}{\xi-\alpha}\,d\xi = i\int_0^{2\pi} f(\alpha + re^{it})\,dt \underset{r\to 0}{=} 2\pi i f(\alpha)$ ← dodan rob

Vsota po robovih je 0, po prvotnem je enaka kot po dodanem (orient.)



Povprečna vrednost: Vrednost f v središču je enaka povprečju vrednosti na robu kroga $f(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha + re^{it})\,dt$

[illegible] $\mathcal{O}(D) \cap C^1(\overline{D})$

P: D in f kot pri Cauchyjevi formuli. Potem je f neskončnokrat odvedljiva, vsi odvodi so holomorfni in $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\,d\xi$

„Rob določa vse odvode"

Morerov izrek: $D^{odp} \subseteq \mathbb{C}$, $f: D \to \mathbb{C}$ zvezna. Če za vsak trikotnik $T \subseteq D$ velja $\int_{\partial T} f(\xi)\,d\xi = 0$, je $f \in \mathcal{O}(D)$ in $f \in C^\infty(D)$.

α, z, $z+h$

Dajdemo $F(z) = \int_{[\alpha, z]} f(\xi)\,d\xi$, ki je holomorfna, saj je njen odvod enak f, torej tudi f holomorfna in $C^\infty(D)$.

torej zvezna je

Goursatov izrek: f holomorfna na $D \Rightarrow f \in C^\infty(D)$. Brez pogoja zvezne odvedljivosti na D

Pokažemo da je integral po robu vsakega trikotnika enak 0. Nato Morera.

znanje nas dela velike

PRINCIP MAKSIMA

Princip maksima: D območje (povezana odprta množica), f holomorfna in omejena, tj. $|f(z)| \leq M$. f je konst. ali pa $|f(z)| < \sup_D |f|$ za $\forall z \in D$.

Dokaz. $A := \{z \in D;\ |f(z)| = \sup_D |f|\}$ A je hkrati zaprta in odprta, torej $\emptyset$ ali D. $\emptyset \Rightarrow |f(z)| < \sup_D |f|$ $D \Rightarrow f(z)\cdot\overline{f(z)} = M^2$ odvajamo po z in $\bar{z}$. sledi $f' \equiv 0 \Rightarrow f$ je konst. na območju

P: Maksimum je dosežen na robu.

D omejena odp., $f \in \mathcal{O}(D)$ in zvezna na $\overline{D}$. $\max_{\overline{D}} |f| = \max_{\partial D} |f|$

Drug način dokaza je na listku izrek o odprti preslikavi.

I: Zaporedje holomorfnih funkcij $\{f_n\}$ naj konvergira enakom. na kompaktnih podmnožicah D k funkciji f. Potem je f holomorfna. Tudi zaporedja odvodov konv. enakom. na kompaktih pod D $\{f_n^{(m)}\} \xrightarrow[n\to\infty]{} f^{(m)}$.

LIOUVILLEOV IZREK

Potenčne vrste so holomorfne. „Obrat:"

I: $f \in \mathcal{O}(D)$. Okoli vsakega $\alpha \in D$ se da f razviti v konv. potenčno vrsto in za $\forall z \in \Delta(\alpha, R) \subseteq D$ velja

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n.$$ Na kompaktih pod $\Delta(\alpha, R)$ konv. enakomerno

D: $\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta-\alpha)-(z-\alpha)} = \frac{1}{(\zeta-\alpha)} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}}$ $\overset{\text{abs.}}{\leq} 1$ $\quad \frac{1}{1-\frac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-\alpha)^n}{(\zeta-\alpha)^n}$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta(\alpha,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta-\alpha}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta(\alpha,r)} f(\zeta)\cdot\sum \frac{(z-\alpha)^n}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}\,d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty}(z-\alpha)^n \cdot \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}$$

Cauchyjeve ocene: $f \in \mathcal{O}(\Delta(0,R))$, $f(0)=0$. Potem je

$$|f^{(n)}(0)| \leq n! \frac{\sup_{\Delta(0,R)}|f|}{R^n}$$

$0 < \tilde{R} < R$ $\quad |f^{(n)}(0)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta(0,\tilde{R})} \frac{n!\, f(\zeta)}{(\zeta-0)^{n+1}}\,d\zeta\right| \leq \frac{n!}{2\pi |i|}\frac{\sup|f|}{\tilde{R}^{n+1}}\cdot 2\pi\tilde{R} \overset{R \uparrow \tilde{R}}{=} \frac{n!\,\sup|f|}{R^n}$

Če je f $\overset{\text{hol.}}{}$ omejena, so odvodi omejeni. Važen rezultat. Na $\mathbb{R}$ to ne drži.

Liouvilleov izrek: f cela holomorfna funkcija. Če obstaja $C \geq 0$ in $N \in \mathbb{N}_0$, da je $|f(z)| \leq C(1+|z|^N)$, je f polinom stopnje največ N. P: f omejena $\mathcal{O}(\mathbb{C}) \Rightarrow f$ je konstanta

D: Potenčna vrsta: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ Ali je $c_n = 0$ za $n > N$?

$$|c_n| = \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \leq \frac{\sup_{\Delta(0,R)}|f|}{R^n} \leq \frac{C(1+R^N)}{R^n} \xrightarrow[n>N]{R\to\infty} 0$$

znanje nas dela velike

5 KA

OSNOVNI IZREK ALGEBRE

Vsak nekonstanten polinom s kompleksnimi koeficienti ima vsaj eno ničlo v $\mathbb{C}$.

P: Vsak nekonstanten polinom s kompleksnimi koeficienti stopnje $n \in \mathbb{N}$ ima natanko n ničel v $\mathbb{C}$, štetih s kratnostjo.

D: Z protislovjem. Če p $\left(= a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0\right)$ nima ničle je $f = \frac{1}{p} \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. f omejena

$$|p(z)| = |z^n| \cdot \left| a_n + a_{n-1}\frac{1}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right| \geq |z^n| \underbrace{\left(|a_n| - |a_{n-1}| \frac{1}{|z|} - \dots - |a_0| \frac{1}{|z^n|} \right)}_{\xrightarrow[|z| \to \infty]{} |a_n|}$$

$$\lim_{|z| \to \infty} \left| \frac{1}{p(z)} \right| \leq \lim_{|z| \to \infty} \frac{1}{|z^n|(|a_n| - \dots)} = 0 \qquad f(z) = \frac{1}{p(z)} \text{ je omejena}$$

Po posledici Liouvillovega izreka je f konstantna.

O NIČLAH

T: $f \in \mathcal{O}(\Delta(\alpha, R))$, $f \not\equiv 0$. Potem obstaja $m \in \mathbb{N}_0$ in holomorfna $h \in \mathcal{O}(\Delta(\alpha, R))$, da je $f(z) = (z-\alpha)^m \cdot h(z)$ na $\Delta(\alpha, R)$ in $h(\alpha) \neq 0$.

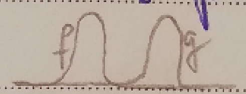
Če je α ničla, je stopnje m. Ničla je izolirana (kar za gladke funkcije v $\mathbb{R}$ ni nujno res)

holomorfne $f: D \to \mathbb{C}$

Princip identičnosti: D območje, množica ničel f ima stekališče v D. Potem je $f \equiv 0$ na D.

P: $f, g \in \mathcal{O}(D)$, D območje in $\{z \in D ;\ f(z) = g(z)\}$ ima stekališče v D. Potem je $f = g$.

P: D območje, f holomorfna na D, $f \not\equiv 0$. Na vsakem kompaktu $K \subseteq D$ ima f kvečjemu končno mnogo ničel. Vsaka ničla je izolirana. Če ima f na D neskončno ničel, so vsa stekališča na robu: ∂D.

P: f, g holomorfni na območju D. Če je $f \cdot g \equiv 0$ na D, je $f \equiv 0$ ali $g \equiv 0$. Ni možno 
.

LOKALNA OBLIKA HOLOMORFNE FUNKCIJE

Izrek o inverzni preslikavi za holomorfne funkcije:
$D^{odp} \subseteq \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{O}(D)$, $a \in D$, $f'(a) \neq 0$. Obstaja okolica U točke a in okolica V točke $b = f(a)$, da je $f: U \to V$ bijekcija in $f^{-1}: V \to U$ je holomorfna. Le dokaz, da je f^{-1} holomorfen.

Biholomorfna preslikava: bijekcija, holomorfna s holomorfnim inverzom.

Holomorfne funkcije lokalno izgledajo kot potence
I: D območje, $f: D \to \mathbb{C}$ nekonstantna holomorfna, $a \in D$. V točki a je funkcija $f(z)-f(a)$ enaka nič, naj ima ničla stopnjo N. Potem obstaja okolica U točke a, $r>0$ in biholomorfen $\Phi: U \to \Delta(0,r)$, da velja $f(z) = f(a) + \Phi(z)^N$ za $\forall z \in U$.
Lokalno naredimo kompozitum: Okolico U točke a biholomorfno = Φ „prestavimo" v $\Delta(0,r)$, potem damo na N-to potenco, potem „prestavimo" v okolico $f(a)$.

$$z \in U \longmapsto \Phi(z) \in \Delta(0,r) \longmapsto \Phi(z)^N \in \Delta(0,r^N) \longmapsto f(a) + \Phi(z)^N \in \text{okolica } f(a)$$

D: Vemo $f(a)+f(z) = (z-a)^N h(z)$, $h \neq 0$ na neki okolici a. Obstaja $k(z)$, $k(z)^N = h(z)$. $\Phi(z) = (z-a)k(z)$, velja $\Phi(a) = 0$, $\Phi'(z) = k(z) - (z-a)k'(z)$, $\Phi'(a) = k(a) \neq 0$ na neki okolici a. Obstaja okolica U za a, na kateri

znanje nas dela velike je Φ biholomorfen. $\Rightarrow f(z) = f(a) + \Phi(z)^N$

IZREK O ODPRTI PRESLIKAVI

D območje, $f \in \mathcal{O}(D)$ nekonstantna. Tedaj je f odprta preslikava, tj. odprte množice slika v odprte množice.

Ker je f lokalno potenca oz. ekvivalentna preslikavi $w \mapsto w^N$, je f odprta.

Drug način dokaza principa maksima: D območje, $M = \sup_D |f|$, f holomorfna in omejena. Če $\exists a \in D$, da $|f(a)| = M$, cela slika D leži v krogu $\Delta(0, M)$. Če f ni konstanta, je odprta preslikava, zato je $f(a)$ notranja za $f(D)$, torej $|f(a)|$ ni maksimum.

7 KA

LAURENTOVA VRSTA

„LORANOVA"

Če je $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{\alpha\})$, je α izolirana singularna točka za f.
Punktirani/prebodeni disk je $\Delta^*(\alpha, r) = \Delta(\alpha, r) \setminus \{\alpha\}$.

I: Naj bo $f \in \mathcal{O}(\Delta^*(\alpha, r))$. Potem lahko f na $\Delta^*(\alpha, r)$ razvijemo v konvergentno Laurentovo vrsto, ki na kompaktih pod $\Delta^*(\alpha, r)$ konvergira absolutno in enakomerno.
Velja $\boxed{f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j (z-\alpha)^j}$.

$$a_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(\alpha, \rho)} \frac{f(\xi)}{(\xi-\alpha)^{j+1}} d\xi, \quad 0<\rho<r$$

Odpravljiva singularnost: $a_j = 0$ za vse negativne j.
Pol: $a_j \neq 0$ za končno mnogo negativnih j.
Bistvena singularnost: $a_j \neq 0$ za neskončno negativnih j.

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_j (z-\alpha)^j = \underbrace{\sum_{-\infty}^{-1} a_j (z-\alpha)^j}_{\text{glavni del}} + \underbrace{\sum_{0}^{\infty} a_j (z-\alpha)^j}_{\text{regularni del}}$$

↗ Uporabimo Cauchyjevo formulo in v vrsto razvijemo $\frac{1}{\xi - z}$

D: Odštejemo (zaradi orientacije) prispevka robov kolobarja ξ in $r-\varepsilon$ $\quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r-\varepsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=\varepsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$ in dobimo

$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r-\varepsilon} \frac{f(\xi)}{\xi^{j+1}} d\xi \right) z^j + \sum_{j=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=\varepsilon} \frac{f(\xi)}{\xi^{j+1}} d\xi \right) z^j$, saj je na prvem krogu

znanje nas dela velike

$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi(1-\frac{z}{\xi})} = \frac{1}{\xi} \sum_0^{\infty} \frac{z^j}{\xi^j}$, na drugem pa $-\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{z(1-\frac{\xi}{z})} = \frac{1}{z} \sum_0^{\infty} \frac{\xi^j}{z^j}$

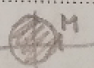
$\left|\frac{z}{\xi}\right| < 1$ za $\begin{matrix} \xi = r-\varepsilon \\ z < r-\varepsilon \end{matrix}$ $\qquad = \sum_{-\infty}^{-1} \frac{z^j}{\xi^{j+1}}$ $\qquad \left|\frac{\xi}{z}\right| < 1$ za $\begin{matrix} \xi = \varepsilon \\ z > \varepsilon \end{matrix}$

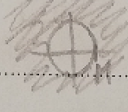
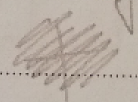
IZOLIRANE SINGULARNE TOČKE

Naj ima f v α izolirano singularno točko.

- α je odpravljiva st. $\Leftrightarrow$ na neki okolici točke α je f omejena.
- α je pol stopnje $N \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \exists\, h$ holomorfna v okolici α, da je $h(\alpha) \neq 0$ in $f(z) = \frac{h(z)}{(z-\alpha)^N}$ v okolici α
- α je pol $\Leftrightarrow \lim\limits_{z \to \alpha} |f(z)| = \infty$ oz. $\lim\limits_{z \to \infty} \frac{1}{|f(z)|} = 0$
- α je bistvena singularna točka $\Leftrightarrow$ poljubno malo okrog α je $\overline{f(\Delta^*(\alpha, r))} = \mathbb{C}$

zaloga vrednosti je gosta v $\mathbb{C}$, pri odpravljivi sing.

zaloga vrednosti pa 

je $\perp$, pri poli , pri bistveni pa 

Vse zgornje točke imajo dokaj preproste dokaze.

Veliki Picardov izrek: Naj ima f v α bistveno singularno točko. Tedaj za vsak dovolj majhen $r > 0$ funkcija f na $\Delta^*(\alpha, r)$ zavzame vse vrednosti v $\mathbb{C}$ razen morda ene. Nismo dokazali.

Vse vrednosti razen morda ene zavzame neskončnokrat, ker lahko r manjšamo.

Mali Picardov izrek: $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ nekonstantna. Tedaj f zavzame vse vrednosti v $\mathbb{C}$ razen morda ene.

Nasvedimo $g(z) = f(\frac{1}{z})$. V $z = 0$ ima g pol ali pa bistveno singularnost.

znanje nas dela velike

Če gledamo Riemannovo sfero, je ∞ často dobra točka za obravnavo.

8 KA

IZREK O OSTANKIH (RESIDUIH)

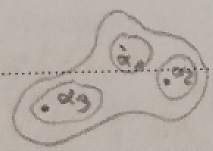
Naj ima holomorfna funkcija f v α izolirano singularnost.

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j (z-\alpha)^j = \dots + \frac{a_{-2}}{(z-\alpha)^2} + \frac{a_{-1}}{(z-\alpha)} + a_0 + a_1(z-\alpha) + a_2(z-\alpha)^2 + \dots$$

Definiramo $\mathrm{Res}(f,\alpha) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(\alpha,\rho)} f(\xi)\, d\xi$

a_{-1} je tako poseben, saj ko Laurentovo vrsto integriramo po členih, so vsi integrali enaki 0, razen tisti z $\frac{1}{z-\alpha}$ (glej listek Cauchyjeva formula). $\int_{\partial\Delta(\alpha,\rho)} f(z)\,dz = a_{-1} \cdot 2\pi i$

Izrek o residuih: D omejena odprta množica pod $\mathbb{C}$ z odsekoma gladkim robom, f holomorfna na D razen v izoliranih singularnih točkah $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ in $f \in C^1(\overline{D} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\})$. Tedaj $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f(\xi)\, d\xi = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}(f, \alpha_j)$.



Singularnosti obkrožimo in računamo integral po robu.

Za pole: α pol stopnje N $\Rightarrow$ $\mathrm{Res}(f,\alpha) = \frac{1}{(N-1)!} \lim_{z \to \alpha} \frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}} \left((z-\alpha)^N f(z) \right)$.

$N=1$ $\quad \mathrm{Res}(f,\alpha) = \lim_{z\to\alpha} (z-\alpha) f(z)$

PRINCIP ARGUMENTA

$f: D^{odp} \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je **meromorfna** na D, če obstaja največ števna $A \subseteq D$, da je $f \in \mathcal{O}(A\backslash D)$, v točkah iz A pa so poli.

- Vse holomorfne so meromorfne, vse $\frac{p(z)}{q(z)}$ so meromorfne, f meromorfna $\Rightarrow \frac{1}{f}$ tudi, $\frac{\cos z}{\sin z}$ je meromorfna.
- A je lahko neskončna, a mora imeti stekališča na robu.
- Meromorfne funkcije so v bistvu polje ulomkov nad kolobarjem holomorfnih funkcij na D. V imenovalcu ne sme biti $h(z) \equiv 0$.

Princip argumenta: f meromorfna na Ω, $\bar{D} \subseteq \Omega$, D omejena z odsekoma gladkim robom. f nima ničel in polov na ∂D.
Tedaj $\boxed{\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_f - P_f}$. N_f - ničle f na D, P_f - poli f na D, oboje šteto s kratnostjo.

D: $\frac{f'}{f}$ je meromorfna, $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum \mathrm{Res}(\frac{f'}{f}, \alpha_j)$, α_j ničle ali poli od f.
Lokalno lahko pri ničli $f(z) = (z-\alpha)^N h(z) \rightsquigarrow$ odvod $\rightsquigarrow \frac{f'}{f}(z) = \frac{N}{z-\alpha} + \frac{h'(z)}{h(z)} \Rightarrow \mathrm{Res}(\frac{f'}{f}, \alpha_{ničla}) = N$
Podobno za pol $f(z) = \frac{h(z)}{(z-\alpha)^M} \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \frac{f'}{f}(z) = \frac{-M}{z-\alpha} + \underbrace{\frac{h'(z)}{h(z)}}_{\text{regularni del}}$ $\mathrm{Res}(\frac{f'}{f}, \alpha_{pol}) = -M$

Rouchéjev izrek: $\bar{D} \subseteq \Omega$, odsekoma gladek rob, $f: [0,1]_t \times \Omega_z \to \mathbb{C}$ zvezna homotopija. Vsi f_t so holomorfni. Na ∂D nikoli ni ničle. Potem je št. ničel štetih s kratnostjo na D enako pri $t=0$ in $t=1$. Ničle v ogradi se premikajo, ne grejo pa ven ali noter.

P: Če sta $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$, $\bar{D} \subseteq \Omega$ in na robu $|g(z)| < |f(z)|$, imata f in $f+g$ na D enako št. ničel, štetih s kratnostjo.

KONFORMNE PRESLIKAVE

Def. $f: D^{odp} \to \mathbb{C}$ ohranja kote (in orientacijo) v $a \in D$, če obstaja tak $\varphi \in [0, 2\pi)$, da za vsak $\theta \in [0, 2\pi)$ velja $\lim_{r \downarrow 0} \frac{f(a+re^{i\theta}) - f(a)}{|f(a+re^{i\theta}) - f(a)|} = e^{i\varphi} e^{i\theta}$. Če f ohranja kote v vsaki točki $a \in D$, je f konformna na D.

a in f(a) sta premika, $e^{i\varphi}$ je zasuk.

odvod ne sme biti 0

I: $f \in \mathcal{O}(D)$, $f'(z) \neq 0$ za $\forall z \in D \Rightarrow$ f je konformna na D

Brez dokaza.

f diferenciabilna in konformna na $D \Rightarrow$ f holomorfna in $f'(z) \neq 0$ $\forall z \in D$.

bijekcija, hol. & hol. inv.

Imamo ekvivalenčno relacijo biholomorfno ekvivalentnih odprtih množic. To je že malo močnejše od homeomorfnosti.

Riemannov upodobitveni izrek: $D \subset \mathbb{C}$ enostavno povezano območje (povezana odprta mn.), ki ni ves $\mathbb{C}$. Tedaj je D biholomorfno ekvivalentno enotskemu disku $\Delta(0,1) = \Delta$.

Brez dokaza

MÖBIUSOVE TRANSFORMACIJE

$a,b,c,d \in \mathbb{C}$, $ad-bc \neq 0$ (sicer dobimo konstantno funkcijo)

$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ meromorfna na $\mathbb{C}$

Razširitev na $\mathbb{CP}^1$: $f(\infty)=\frac{a}{c}$ oz. $f(\infty)=\infty$ za $c=0$, v tem primeru dobimo bijekcijo.

Za $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{CP}^1$ in $\beta_1,\beta_2,\beta_3 \in \mathbb{CP}^1$ obstaja Möbiusova transformacija oz. ulomljena linearna preslikava $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$, da je $f(\alpha_1)=\beta_1$, $f(\alpha_2)=\beta_2$, $f(\alpha_3)=\beta_3$.

Möbiusove transf. so grupa za kompozitum. Sestavljene iz rotacij in raztegov $z \mapsto az$, translacij $z \mapsto z+b$ in inverzij na enotsko krožnico z zrcaljenjem $z \mapsto \frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}$

Möbiusove transformacije slikajo množico {premice in krožnice v $\mathbb{C}$} samo vase. Premica v $\mathbb{C}$ je krožnica v $\bar{\mathbb{C}}$ skozi ∞.

Holomorfni avtomorfizmi

$\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$: $f(z)=az+b$, $a\neq 0$

$\mathrm{Aut}(\mathbb{CP}^1=\bar{\mathbb{C}})=\left\{\frac{az+b}{cz+d};\ ad-bc=1\right\}$ to je dovolj

$\mathrm{Aut}(\Delta)=\left\{e^{i\theta}\frac{a-z}{1-\bar{a}z},\ \theta\in[0,2\pi),\ a\in\Delta\right\}$, $0\mapsto a$, $\partial\Delta\to\partial\Delta$

znanje nas dela velike

Schwartzova lema: $f:\Delta\to\bar{\Delta}$ holomorfna, $f(0)=0$. Za $\forall z\in\Delta$ velja $|f(z)|\leq|z|$ in $|f'(0)|\leq 1$.