DIFERENCIALNE ENAČBE, EKSISTENČNI IZREKI

Diferencialne enačbe – v njih nastopajo funkcije in njihovi odvodi (vsaj $y(x)$ in $y'(x)$, lahko tudi y'' ...). Navadna DE – v njej nastopa neznana funkcija ENE spremenljivke in njeni odvodi. Parcialna DE – neznana funkcija VEČ spremenljivk in njeni parcialni odvodi.

Navadna diferencialna enačba je oblike $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, kjer iščemo n-krat odvedljivo funkcijo $y = y(x)$ spremenljivke x. Funkcija $y:(a,b) \to \mathbb{R}$, ki zadošča tej enačbi, je **klasična rešitev**. Red diferencialne enačbe je najvišja stopnja odvoda, ki se v enačbi pojavi, torej n v $F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$.
Da je enačba npr. linearna, pomeni, da so $y, y', \dots, y^{(n)}$ največ na potenco 1.
Enačba 1. reda, podana implicitno: $F(x,y,y') = 0$, eksplicitno $y' = f(x,y)$.
Red enačbe ⇝ koliko prostih parametrov nastopa v rešitvi.

Cauchyjeva naloga: $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$. Tu pa izmed rešitev s prostim parametrom določimo tisto, ki gre skozi (x_0, y_0). Torej poračunamo konstanto.

EKSISTENČNI IZREKI Kdaj lahko Cauchyjevo nalogo $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$, rešimo lokalno/globalno in kdaj je rešitev enolična. Cauchyjevo nalogo „integriramo" in iščemo y, ki reši: $y(x) = \int_{x_0}^{x} y'(t)\,dt + y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt + y_0 =: K(y)(x)$. Iščemo y, da $Ky = y$.

Banachovo skrčitveno načelo: Vsaka skrčitev $K: M \to M$ polnega metričnega prostora M ima natanko eno fiksno točko.

Lipschitzev pogoj: Zvezna $f: \overbrace{[x_0-a, x_0+a] \times [y_0-b, y_0+b]}^{P \text{ pravokotnik}} \to \mathbb{R}$ naj ima maksimum $M = \max_P |f|$.
f Lipschitzova v drugi spremenljivki: obstaja $N > 0$, da za vse $(x,y), (x,z) \in P$ velja
$|f(x,y) - f(x,z)| < N \cdot |y-z|$. Če je f diferenciabilna na P, je Lip.: $|f(x,y) - f(x,z)| = \underbrace{\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi)\right|}_{\le N} |y-z| \le N \cdot |y-z|$.

• V osnovi imamo dva eksistenčna izreka – lokalni in globalni, ki imata nato še verzijo za sisteme in verzijo za DE višjega reda.

Lokalni - dokaz: $\quad d(f,g) = \max_{x \in P} |f(x) - g(x)|$

Metrični prostor $\mathcal{M} = C([x_0-c, x_0+c], y_0-b, y_0+b])$ s supremum metriko je poln metrični prostor.

Pokažemo, da $\mathcal{K}$: $(\mathcal{K}y)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt$ slika $\mathcal{M}$ nazaj vase: $\mathcal{K}\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$.

Pokažemo, da je $\mathcal{K}$ skrčitev: $|\mathcal{K}y(x) - \mathcal{K}z(x)| = \ldots \leq \alpha \cdot d(y,z)$

Po Banachovem skrčitvenem načelu ima $\mathcal{K}$ natanko eno fiksno točko $y \in \mathcal{M}$, ki je po def. $\mathcal{K}$ ravno rešitev Cauchyjeve naloge $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$.

Lok.: Če malo spremenimo začetni pogoj, se rešitev malo spremeni. Torej zvezna odvisnost od a. $y(x_0) = a$ ali $y(a) = y_0$.

Implicitna verzija: $F \in C^1$, $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. $F(x, y(x), y'(x)) = 0$, $y(x_0) = y_0$, ima v okolici x_0 vsaj eno rešitev. Če predpišemo še $y'(x_0) = z_0$, je rešitev enolična.

Picardov oz. lokalni eksistenčni izrek: Naj bo f zvezna na kvadru $P = [x_0-a, x_0+a] \times [y_0-b, y_0+b]$. Naj bo $\alpha \in (0,1)$ in $M = \max_P |f|$. Naj bo f Lipschitzeva na drugo spremenljivko s konstanto N. Naj bo $c = \min\{a, \frac{b}{M}, \frac{\alpha}{N}\}$. Tedaj na intervalu $[x_0-c, x_0+c]$ obstaja natanko ena C^1 (zvezno odvedljiva) rešitev y Cauchyjeve naloge $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$.

Območje lahko podaljšujemo. Za vsak (x_0, y_0) obstaja maksimalen interval (α, β), da je na njem $f \in C^1(\alpha, \beta)$, ki reši Cauchyjevo nalogo. Če gresta skozi (x_0, y_0) dve rešitvi y_1 in y_2, se ujemata na skupnem območju. → Graf $y(x)$ pride do roba množice D (ni vsebovan v nobenem kompaktu v D. Če je $f \in C^k(U)$, je rešitev $y \in C^{k+1}$

Lokalni eksistenčni izrek za sisteme: $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_n)$, $P = [x_0-a, x_0+a] \times [y_0^1 - b_1, y_0^1 + b_1] \times \ldots \times [y_0^n - b_n, y_0^n + b_n]$,

$M = \max_j \max_P |f_j(x, \vec{y})|$ (j-ta komponenta), $\vec{f}$ Lipšicova na $(y_1, \ldots, y_n)$, tj. $\exists N > 0$: $\max |f_j(x, \vec{y}) - f_j(x, \vec{z})| \leq N \max_j |y_j - z_j|$, $c = \min\{a, \frac{b_1}{M}, \ldots, \frac{b_n}{M}, \frac{\alpha}{N}\}$

$\Rightarrow$ obstaja natanko ena C^1 rešitev Cauchyjeve naloge $\vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y})$, $\vec{y}(x_0) = \vec{y_0}$.

Posledica: lokalni eksistenčni izrek za NDE višjega reda: $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, $y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ je naša Cauchyjeva naloga. Vpeljemo $z_1 = y$, $z_2 = y'$, $z_3 = y''$, …, $z_n = y^{(n-1)}$, $\vec{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$, dobimo sistem $\vec{z}' = \vec{g}(x, \vec{z})$ oz. $\begin{bmatrix} z_1' \\ \vdots \\ z_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \\ f(x, z_1, \ldots, z_n) \end{bmatrix}$.

Peanov izrek: $f: [x_0-a, x_0+a] \times [y_0-b, y_0+b] \to \mathbb{R}$ zvezna $\Rightarrow$ obstaja vsaj ena lokalna C^1 rešitev Cauchyjeve naloge. Boljši-slabši izrek. (ni enoličnosti) in dovolj je zveznost f. Npr. $y' = 3y^{2/3}$, $y(0) = 0$ ima rešitvi $y(x) = 0$ in $y(x) = x^3$, ni Lipschitzeva.

Globalni eksistenčni izrek: Naj bo $f: [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija in naj obstaja taka integrabilna funkcija $k: [a,b] \to [0, \infty)$, da za vse $(x,y), (x,z) \in [a,b] \times \mathbb{R}$ velja $|f(x,y) - f(x,z)| \leq k(x)|y - z|$. Potem za vsak $(x_0, y_0) \in [a,b] \times \mathbb{R}$ obstaja na $[a,b]$ natanko ena C^1 rešitev Cauchyjeve naloge $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$. Vzamemo torej neke kvazi Lipšicev pogoj, eno posebno metriko, v kateri je $(\mathcal{T}(y))(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt$ skrčitev, sledi Banach.

Za linearne diferencialne enačbe je kvazi Lipš. pogoj izpolnjen. Imamo zaprte intervale $[a,b]$, a z njimi lahko pokrijemo ves $\mathbb{R}$. Globalni e. i. ima verzijo za sisteme, nato za NDE n-tega reda, za linearne sisteme $\vec{y}' = A(x)\vec{y} + \vec{b}(x)$, $A(x)$ matrika funkcij, $\vec{y}(x_0) = \vec{y_0}$, in nato za lin. DE n-tega reda:

$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = b$.

LINEARNE DIFERENCIALNE ENAČBE

Najpreprostejša DE je v bistvu **integral** $y'=f(x)$ $y=\int f(x)dx$. Potem DE **z ločljivimi spremenljivkami** $y'=\frac{f(x)}{g(y)} \rightsquigarrow \int g(y)dy=\int f(x)dx$, torej vse x na eno stran, vse y na drugo.

Linearna diferencialna enačba 1. reda: $a(x)y'+b(x)y=c(x)$. y in y' nastopata linearno, a,b,c so funkcije spremenljivke x. Recimo, da so dovolj lepe.

Homogena enačba: $a(x)y'+b(x)y=0$, torej $c\equiv 0$. Ima ločljive spremenljivke. Rešitev homogene enačbe je za neki vektorski prostor. Če y_1 in y_2 rešita $ay'+by=c$, potem y_1-y_2 rešita homogeno enačbo $ay'+by=0$. D: zapišemo enačbi in $c(x)$ odšteje. Mi moramo rešiti homogeni del, dobimo y_H, potem najdemo (uganemo) eno rešitev y_P. Vse rešitve $ay'+by=c$ so oblike $y_S=y_P+y_H$ splošna = partikularna + rešitev homogene DE

Variacija konstante: Če partikularne rešitve ne uganemo, zapišemo konstanto v splošni rešitvi homogenega dela tako, kot da je odvisna od x. To vstavimo v osnovno enačbo: $ay'+by=c$. Večina členov se mora pokrajšati in dobimo partikularno rešitev. Ubrajajo formule, a je bolj jasno na primeru. $y'+\frac{y}{1-x}=\frac{1}{1-x}$. Homogeni del: $y'+\frac{y}{1-x}=0 \rightsquigarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{y}{1-x}$

$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{1-x} \to \ln|y|=-\ln|1-x|+C \rightsquigarrow y_H=C(x-1)$ Variacija konstante $C=C(x)$ $y=C(x)(x-1)$ $y'=C'(x-1)+C$

$C'(x-1)+\cancel{C}+\cancel{\frac{C(x-1)}{1-x}}_{-C}=\frac{1}{1-x}$ $\frac{dC}{dx}=-\frac{1}{(x-1)^2}$ $C=\int\frac{1}{(x-1)^2}dx \overset{t=x-1,\ dt=dx}{=} -\int\frac{1}{t^2}dt=-\frac{1}{t}+D=\frac{1}{x-1}+D$ $y_P=\left(\frac{1}{x-1}+D\right)(x-1)=$

$=1+D(x-1)$ $y_S=C(x-1)+1+D(x-1)=1+C(x-1)$. Za različne konstante pišemo kar C, čeprav se ta C tekom reševanja spreminja.

- Potem smo reševali nekatere DE, ki niso linearne: Bernoullijeva $y'+ay=by^\alpha$, Riccatijeva $y'=ay^2+by+c$, homogena $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^\alpha f(x,y) \rightsquigarrow z=\frac{y}{x}$. Če pogoji izreka o implicitni funkciji niso izpolnjeni, lahko dobimo več rešitev skozi dano točko $\rightsquigarrow$ rešitve s konstanto in še ogrinjača $\to$ posebna rešitev

Reševanje enačbe n-tega reda s prevedbo na sistem in obratno

$y^{(n)}=f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})$ prevedemo sistem $\begin{bmatrix} z_1\\ z_2\\ \vdots\\ z_n\end{bmatrix}'=\begin{bmatrix} z_2\\ z_3\\ \vdots\\ z_n\\ f(x,z_1,\dots,z_n)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y'\\ y''\\ \vdots\\ y^{(n)}\end{bmatrix}$

$z_1=y$ $\quad z_1'=y'=z_2$

$z_2=y'$ $\quad z_2'=y''=z_3$

$z_n=y^{(n-1)}$ $\quad z_{n-1}'=y^{(n-1)}=z_n$

$z_n'=y^{(n)}=f(x,z_1,z_2,\dots,z_n)$

Če $\begin{bmatrix} z_1\\ z_2\\ \vdots\\ z_n\end{bmatrix}$ reši sistem, $z_1=y$ reši enačbo n-tega reda $y^{(n)}=f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})$.

SISTEMI LINEARNIH DE 1. REDA

$y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n + b_1$

$y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n + b_2$ $\qquad \vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}$

$\vdots$

$y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n + b_n$ $\qquad a_{ij} = a_{ij}(x), \; b_i = b_i(x)$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

so zvezne na $[a, b]$

Za Cauchyjevo nalogo predpišemo $\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \Rightarrow \exists$ natanko ena rešitev $\vec{y}$ na $[\alpha, \beta]$.

Splošna rešitev sistema $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}$ je oblike $\vec{y}_S = \vec{y}_H + \vec{y}_P$, $\vec{y}_P$ ena rešitev $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}$, $\vec{y}_H$ pa splošna rešitev $\vec{y}' = A\vec{y}$.

Rešitve homogenega dela $\vec{y}' = A\vec{y}$ sestavljajo vektorski prostor v $(C[\alpha, \beta])^n$, je n-razsežen, torej imamo n linearno neodvisnih rešitev. Rešitve $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ so lin. neodvisne $\Leftrightarrow$ v nekem $x_0 \in [\alpha, \beta]$ so vektorji $\vec{y}_1(x_0), \dots, \vec{y}_n(x_0)$ lin. neodv.

Fundamentalna ali osnovna matrika sistema je $Y = [\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n]$, kjer so $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ lin. neodvisne rešitve sistema $\vec{y}' = A\vec{y}$. Homogeni sistem reši vsaka vsota (linearna kombinacija) vektorjev $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$, torej je splošna rešitev enaka $Y\vec{c} = Y\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = c_1\vec{y}_1 + \dots + c_n\vec{y}_n$. Y je obrnljiva (stolpci so linearno neodvisni za vsak $x \in [\alpha, \beta]$), $\det Y(x) = W(x) \neq 0$ je determinanta Wronskega → v 2×2 pomaga najti eno rešitev, če drugo vemo.

Reševanje: Če znamo rešiti $\vec{y}' = A\vec{y}$, delamo n-razsežno variacijo konstante. Oblika splošne rešitve: $\vec{y}(x) = Y(x)\int_{x_0}^{x} Y^{-1}(t)\vec{b}(t)\,dt + Y(x)\vec{c}$.

Sistem lin. DE s KONSTANTNIMI KOEFICIENTI

Rešujemo $\vec{y}' = A\vec{y}$, kjer je $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, torej A je matrika števil, konstant. Po globalnem eks. izreku ima $\vec{y}' = A\vec{y}$, $\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$, enolično globalno rešitev na $\mathbb{R}$. $\vec{y}_1 = \vec{y}_0$, $\vec{y}_2(x) = \vec{y}_0 + \int_0^x A\vec{y}_0(t)\,dt = \vec{y}_0 + xA\vec{y}_0$, $\vec{y}_3 = \vec{y}_0 + xA\vec{y}_0 + \frac{x^2}{2}A^2\vec{y}_0, \dots$

Picardova iteracija nas napelje na zvezo $(e^{xA})' = Ae^{xA}$, saj $\vec{y}_{k+1}(x) = \vec{y}_0 + xA\vec{y}_0 + \dots + \frac{x^n}{n!}A^n\vec{y}_0 \xrightarrow{n \to \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}A^n\vec{y}_0 = e^{xA}\vec{y}_0$.

e^{xA} torej reši matrično enačbo $Y' = AY$, zato je $Y = e^{xA}$ fundamentalna rešitev, splošna rešitev homogenega sistema $\vec{y}' = A\vec{y}$ pa $e^{xA}\vec{c}$.

- Želimo izračunati e^{xA}. A v Jordanski formi: $A = PJP^{-1} \Rightarrow e^A = Pe^JP^{-1}$ in $e^{xA} = Pe^{xJ}P^{-1}$

$J = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & J_k \end{bmatrix} \Rightarrow e^{xJ} = \begin{bmatrix} e^{xJ_1} & & \\ & e^{xJ_2} & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$. Izračunati moramo e^{xJ} za eno lastno vrednost λ: $J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{bmatrix}$. $e^{xJ} = e^{x(\lambda I + N)} = e^{\lambda x}e^{xN}$ (N nilpotent st.)

$$e^{xN} = \begin{bmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} & \dots & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \ddots & & \frac{x^2}{2} \\ & & & \ddots & x \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow e^{xA} = e^{\lambda x}Pe^{xN}P^{-1}$ (ena l. vr. λ), splošna rešitev je $Y\vec{c} = Pe^{xJ}\underbrace{P^{-1}\vec{c}}_{\vec{d}} = Pe^{xJ}\vec{d}$

Splošna rešitev nehomogenega sistema $\vec{w}' = A\vec{w} + \vec{b}$ pa je $Y \cdot \int Y^{-1}\vec{b}\,dx$ oz. $Y\int_{x_0}^{x} Y^{-1}\vec{b}\,dt + Y\vec{c}$, $Y = e^{xA}$. Če je A diagonalizabilna (različne l. vr.), je $A = PDP^{-1}$, $P = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n]$, $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$, $\vec{w} = C_1e^{\lambda_1 x}\vec{v}_1 + \dots + C_ne^{\lambda_n x}\vec{v}_n$.

Linearna DE n-tega reda

$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$ ⇝ Predelamo v sistem $\vec{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}$ $A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}$ $\vec{b}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{b(x)}{a_n(x)} \end{bmatrix}$ Iščemo le $z_1 = y$. Če so pa koeficienti konstantni: $a_ny^{(n)} + \dots + a_1y' + a_0y = b(x)$, se računanje determinante poenostavljeno. Uporabimo nastavek $y = e^{\lambda x}$ za rešitev homogenega dela. $a_n\lambda^n + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$ → dobimo $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Če so različne, je splošna rešitev $C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x} + \dots + C_ne^{\lambda_n x}$, če je λ_i k-kratna, pa $C_1e^{\lambda_i x} + C_2xe^{\lambda_i x} + C_3x^2e^{\lambda_i x} + \dots + C_kx^ke^{\lambda_i x}$.

Za partikularno rešitev v nekaterih primerih tudi obstajajo nastavki.

VARIACIJSKI RAČUN

EULER-LAGRANGEEVA ENAČBA

IZOPERIMETRIČNA NALOGA

Iščemo ekstreme (kandidate za ekstreme) funkcionalov oblike $F(y)=\int_a^b L(x,y,y')\,dx$, mogoče pri robnih pogojih $y(a)=A$, $y(b)=B$. Rešitve so funkcije $y=y(x)$.

Dopustne funkcije so funkcije, ki zadoščajo želenim robnim pogojem.

Iskali bomo stacionarne točke funkcionala L, to so kandidati za ekstreme.

Najprej je treba razjasniti, kako sploh „odvajamo" na prostoru vseh funkcij y.

Krepki oz. Frechetov odvod: $F: U \overset{odp}{\subseteq} X \to Y$ preslikava med Banachovima prostoroma (poln normiran vektorski prostor!) je diferenciabilna v točki $a \in U$, če obstaja taka zvezna linearna preslikava $A: X \to Y$, da velja $F(a+x) = F(a) + Ax + o(x)$, kjer je $\lim_{x \to 0} \frac{\|o(x)\|_Y}{\|x\|_X} = 0$, $A = (DF)(a) = F'(a)$.

Krepki odvod je težko izračunati. Izračunamo šibki odvod in preverimo, ali je krepki. Če krepki obstaja, obstaja šibki in sta enaka.

Šibki odvod preslikave $F: U \overset{odp}{\subseteq} X \to Y$, X, Y Banachova, $a \in U$, v točki a v smeri v je $\lim_{t \to 0} \frac{F(a+tv)-F(a)}{t} =: (\partial_a F)v$. Krepki je v vseh smereh, če obstaja krepki, je za vsak v: $(\partial_a F)v = F'(a)v$

Kako je v našem primeru: $\int_a^b L(x,y,y')\,dx$ izračunamo po korakih.

$y \mapsto (y,y') \mapsto L(\cdot,y,y') \mapsto \int_a^b L(x,y,y')\,dx$, vsi koraki so odvedljivi, tudi vrednji (težek),

sledi $F'(y)(h) = \int_a^b \left(L_y(x,y,y')h + L_{y'}(x,y,y')h' \right) dx$, h je zvezna funkcija $[a,b] \to \mathbb{R}$.

Iskanje ekstremov funkcionalov oblike $F(y)=\int_a^b L(x,y,y')\,dx$ se pod določenimi pogoji prevede na reševanje **Euler-Lagrangeeve enačbe** $L_y = \frac{d}{dx} L_{y'}$.

Rešitve so ekstremale, so kandidati za ekstreme.

- Potreben pogoj, da bo y lokalni ekstrem funkcionala $F(y)=\int_a^b L(x,y,y')\,dx$ pri afinih pogojih $y(a)=c$, $y(b)=d$, je $\int_a^b (L_y(x,y,y')h + L_{y'}(x,y,y')h')\,dx = 0$ za vsako funkcijo $h \in C^1[a,b]$, ki zadošča $h(a)=h(b)=0$.

Testne funkcije na intervalu $[a,b]$ so gladke funkcije, v krajiščih a in b enake 0, različne od nič pa na kompaktni podmnožici intervala $[a,b]$ – imajo kompakten nosilec – območje, kjer $f(x) \neq 0$. Testne funkcije lahko transformiramo: u testna $\Rightarrow \lambda u$, $u(\frac{x-c}{d})$ tudi testni funkciji. Oznaka $u \in C_c^\infty$

Osnovni izrek variacijskega računa: Naj bo $f \in C[a,b]$ in naj bo za vsako testno funkcijo $\varphi \in C_c^\infty(a,b)$ velja $\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = 0$. Tedaj je $f \equiv 0$ na $[a,b]$.

Razmadzejev izrek: Naj bosta M in N zvezni funkciji na $[a,b]$. Naj za vsako testno funkcijo $\varphi \in C_c^\infty(a,b)$ velja $\int_a^b \left(M(x)\varphi(x) + N(x)\varphi'(x)\right)dx = 0$. Tedaj je N odvedljiva in $M = N'$.

Euler-Lagrangeeva enačba: Naj bo $L\ [a,b] \times [\check{A},\check{B}] \times [\check{A}',\check{B}'] \to \mathbb{R}$ zvezna. Naj obstajata L_y in $L_{y'}$, zvezni funkciji. Denimo, da so afini robni pogoji taki, da so vse testne funkcije dopustne variacije. Tedaj je potrebni pogoj, da ima funkcional F z afinimi pogoji lokalni ekstrem v y, podan z E-L enačbo $L_y = \frac{d}{dx} L_{y'}$ in robnim pogojem $L_{y'}(x, y(x), y'(x)) \cdot \varphi(x) \Big|_a^b = 0$ za vsako dopustno variacijo $\varphi \in C^1[a,b]$.

D: $F'(y)(h) = 0$ pomeni $\int_a^b (L_y h + L_{y'} h')dx = 0$ za $\forall h \in C_c^\infty(a,b)$. Po Razmadzejevem izreku je $L_{y'}$ odvedl… in odvod, torej $\frac{d}{dx} L_{y'}$ je enak L_y. Robni pogoj dobimo z per partesom $u = L_{y'}$ $dv = h'dx$.

· Možnosti robnih pogojev: 1) $y(a) = A$, $y(b) = B$ 2) $y(a) = A \Rightarrow L_{y'}(b) = 0$ 3) $y(b) = B \Rightarrow L_{y'}(a) = 0$
4) če nič ne predpišemo $\Rightarrow L_{y'}(a) = L_{y'}(b) = 0$ 5) $y(a) = y(b) \Rightarrow L_{y'}(a) = L_{y'}(b)$

· Poenostavitve: y ne nastopa, $L = L(x, y') \Rightarrow L_{y'} = C$. x ne nastopa, $L = L(y, y') \Rightarrow L - y' L_{y'} = C$

Primer: Iščemo C^1 funkcije, ki imajo najmanjšo dolžino grafa od (a,A) do (b,B). $F(y) = \int_a^b \sqrt{1-y'^2}\,dx$, $y(a) = A$, $y(b$…
$L_y = 0 \Rightarrow L_{y'} = C$ $(\sqrt{1-y'^2})_{y'} = \frac{1 \cdot 2y'}{2\sqrt{1-y'^2}} = \frac{y'}{\sqrt{1-y'^2}} = C$ $y'^2 = C(1-y'^2)$ $y'^2 = \frac{C}{1-C} = D$ $y' = E$ $y = Ex + F$ lin. funkcija skozi (a,A) in $(b$…

Izoperimetrična naloga: Iščemo ekstreme funkcionalov oblike $F(y) = \int_a^b L(x,y,y')dx$ pri morebitnih robnih pogojih in pri dodatnem pogoju – vezi $G(y) = \int_a^b \Lambda(x,y,y')dx \equiv C$. Npr. krivulja skozi dani točki z dano dolžino krivulje, da bo ploščina pod grafom največja možna.

I: ~~Če~~ ima F ekstrem v y_0 pri pogojih $G_1(y_0) = l_1, \dots, G_m(y_0) = l_m$, G_i lin. neodvisni, potem obstajajo $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, da je $F'(y_0) = \lambda_1 G_1'(y_0) + \dots + \lambda_m G_m'(y_0)$.

To so težke naloge, čeprav je navodilo preprosto in razumljivo.