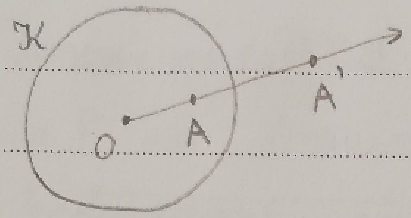
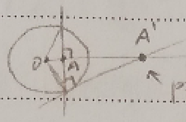
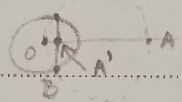
INVERZIJA



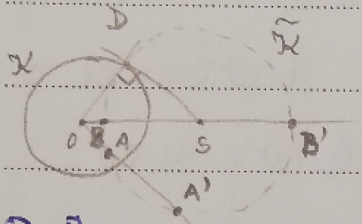
$$|OA| \cdot |OA'| = r^2 \quad \text{oz.} \quad \frac{|OA|}{r} = \frac{r}{|OA'|}$$



pol tetive, pravokotne na OA



OB ⊥ BA (Tales)



$\mathcal{K} \perp \tilde{\mathcal{K}} \Leftrightarrow \tilde{\mathcal{K}}$ vsebuje A in A' (inverz prek $\mathcal{K}$)

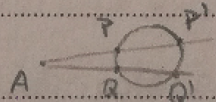
P: Inverzija v $\mathcal{K}$ ohranja $\tilde{\mathcal{K}}$ kot množico $\Leftrightarrow \mathcal{K} \perp \tilde{\mathcal{K}}$

Inverzija slika {premice, krožnice} v {premice, krožnice}.
Rezultat je premica, če je prvotni objekt vseboval O.

Inverzija preslika poljuben kot na nasprotno usmerjen enako velik kot. Nauči se dokaz! To je pogosto vprašanje.

Inverzija v $S(0,r)$ v $\mathbb{C}$ koordinatah: $|z| \cdot |w| = r^2 \rightsquigarrow w = \frac{|w|}{|z|} z = \frac{r^2}{\bar{z}}$

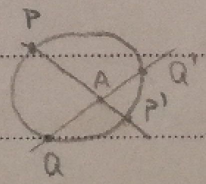
POTENCA

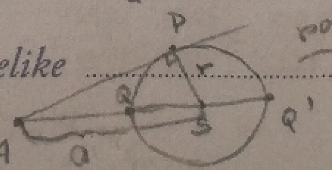


potenca

$|AP| \cdot |AP'| = |AQ| \cdot |AQ'|$

(-1)· potenca



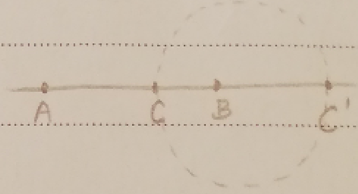


potenca $\longrightarrow |AP|^2 = a^2 - r^2$

APOLONIJEVA KROŽNICA

Apolonijev problem: Dani sta A in B. Poišči vse take C, da bo $|AC| = \varrho |BC|$.

$\varrho = 1$: simetrala AB $\qquad \varrho > 1$: $\varrho = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AC'|}{|BC'|}$



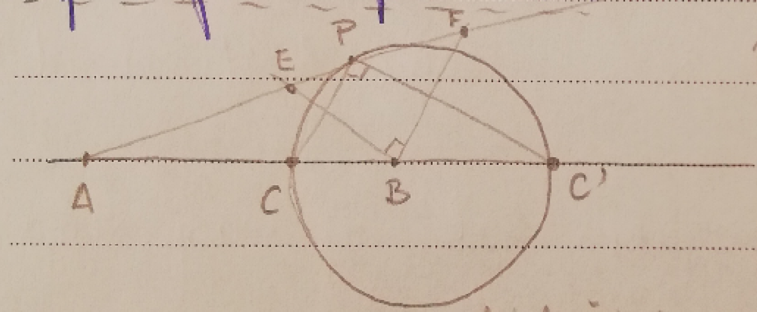
T: Rešitev so natanko vse točke na krožnici s premerom CC', to je Apolonijeva krožnica.

D: Poljubna P na krožnici s premerom CC' zadošča Apolonijevemu problemu.

Imamo A, B, C, C', P

Vzporednice k CP in C'P → E, F

∢ EBF je pravi



$\frac{|AP|}{|PF|} = \frac{|AC|}{|CB|} = \varrho \qquad \frac{|AP|}{|PE|} = \frac{|AC'|}{|BC'|} = \varrho$

$|PF| = |PE| \rightarrow$ EF je premer krožnice

B je na tej krožnici

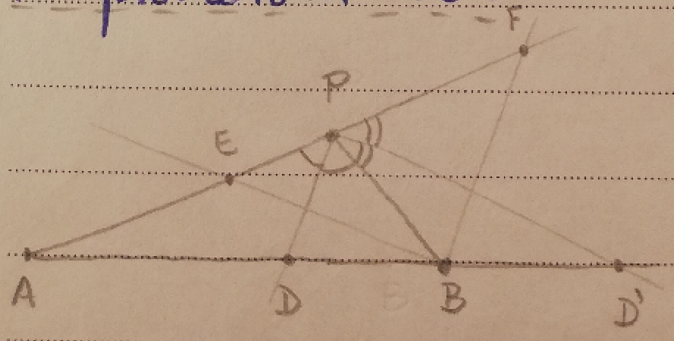
s središčem P, $|EP| = |PF| = |PB| \qquad \varrho = \frac{|AP|}{|PF|} = \boxed{\frac{|AP|}{|PB|}}$.

Č P zadošča Apolonijevemu problemu, leži na krožnici s premerom CC'.

Imamo A, B, P. Z simetralama kotov dobimo D in D'. ∢ DPD' je pravi.

Vzporednice k DP in D'P → E, F

Ker imamo simetrale kotov, sta enakokraka △EPB in △BPF.



znanje nas dela velike

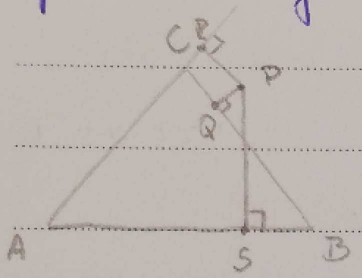
$|EP| = |PB| = |PF|, \quad \frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AP|}{|PF|} = \frac{|AP|}{|PB|} = \varrho, \quad \frac{|AD'|}{|D'B|} = \frac{|AP|}{|PE|} = \frac{|AP|}{|PB|} = \varrho$

$\Rightarrow$ D = C, D' = C', P po Talesu na krožnici s premerom DD' = CC'

E62

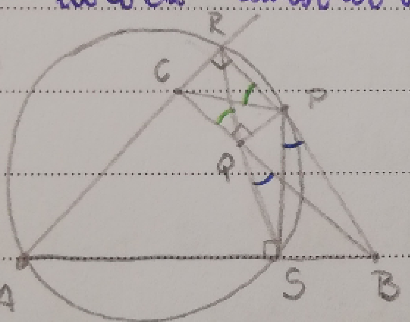
SIMSONOVA PREMICA

Imamo $\triangle ABC$ in točko P. Nožišča pravokotnic iz P na nosilke stranic so Q, R, S. Če so Q, R, S kolinearne, njihovo nosilko imenujemo Simsonova premica glede na $\triangle ABC$, ki jo določa točka P.



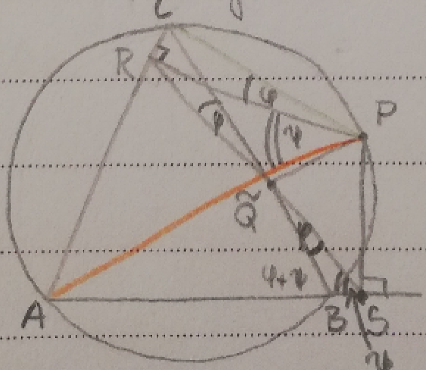
1: P določa Simsonovo premico $\iff$ P leži na očrtani krožnici $\triangle ABC$

($\Rightarrow$)



$\square ASPR$ tetiven (nasproti sta si prava kota). Prav tako $\square CQPR$. Tetiven je tudi $\square SBPQ$ (premer PB, Tales). Tetivnost $\square ABPC$: Kotu α je suplementaren $\measuredangle SPR$, ali mu je tudi $\measuredangle BPC$? RQS so na Simsonovi premici $\Rightarrow$ zeleni kot je skladen modremu, torej sta enaka.

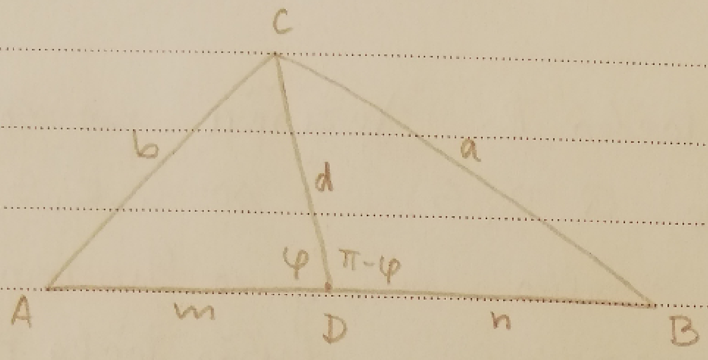
($\Leftarrow$)



Imamo krožnico okrog $\square ABPC$, S pravokotno na nosilko AB, R na AC. $\tilde{Q} = RS \cap BC$. $Q = \tilde{Q} \Leftrightarrow P\tilde{Q} \perp BC \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \square P\tilde{Q}BS$ tetiven. $\measuredangle ABC = \measuredangle APC = \psi + \varphi$

$\square ASPR$ tetiven $\Rightarrow \varphi = \measuredangle APR = \measuredangle ASR$. V $\triangle BS\tilde{Q}$ je zunanji $\psi+\varphi$ in en ψ notranji $\Rightarrow \measuredangle B\tilde{Q}S = \varphi \Rightarrow \square \tilde{Q}PCR$ je tetiven $\Rightarrow \measuredangle P\tilde{Q}C$ je pravi.

STEWARTOV IZREK



$$ma^2 + nb^2 = c(d^2 + mn)$$

$\sphericalangle ADC = \varphi \qquad \sphericalangle BDC = \pi - \varphi \qquad \cos\varphi = -\cos(\pi - \varphi)$

$b^2 = m^2 + d^2 - 2md\cos\varphi \qquad a^2 = n^2 + d^2 - 2nd\cos(\pi - \varphi)$

$\cos\varphi = \frac{m^2 + d^2 - b^2}{2md} \qquad -\cos(\pi - \varphi) = -\frac{n^2 + d^2 - a^2}{2nd}$

$n\cancel{d}(m^2 + d^2 - b^2) = -m\cancel{d}(n^2 + d^2 - a^2)$

$nm^2 + nd^2 - nb^2 = -mn^2 - md^2 + ma^2$

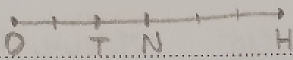
$nm(m+n) + d^2(n+m) = ma^2 + nb^2$

$c(d^2 + mn) = ma^2 + nb^2$

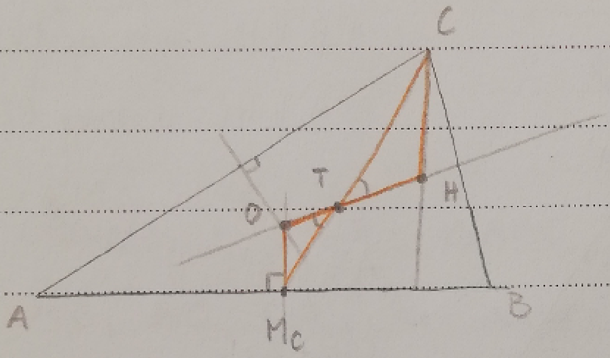
EG3

EULERJEVA PREMICA

Eulerjevo premico določata središče trikotniku očrtane krožnice O in težišče T. Na njej leži tudi višinska točka H in središče krožnice devetih točk N.



Enakostranični △ nima Eulerjeve premice, ker O=T=N=H.



Imamo △ABC, presečišča simetral stranic → O, T je na $\frac{1}{3}$ težiščnice. Izberemo H na premici $\overleftrightarrow{OT}$, da velja $|OT|:|TH| = 1:2$.

Narišemo CH. Dobimo podobna $\triangle TOM_c \sim \triangle THC$ (en skupen kot, razmerje $|OT|:|TH| = |TM_c|:|TC| = 1:2$).

$\Rightarrow OM_c \parallel CH$, $\overleftrightarrow{CH}$ je višina.

Situacija je simetrična glede na A,B,C $\Rightarrow$ H je višinska točka.

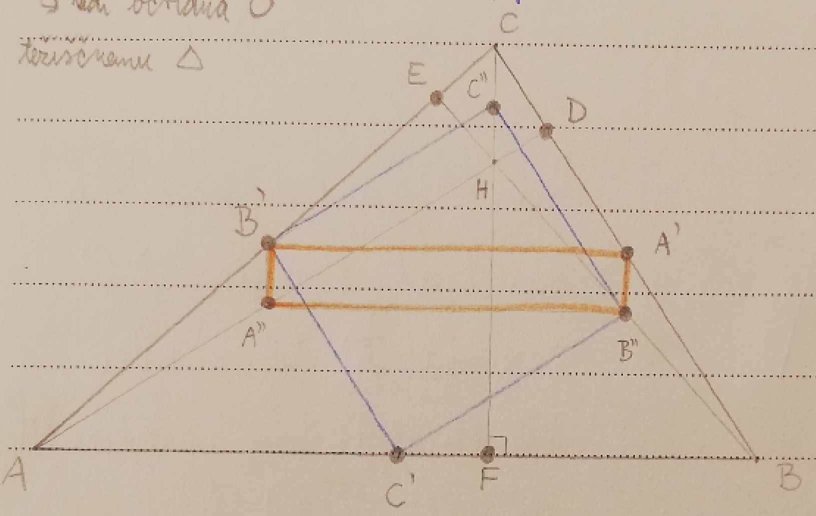
KROŽNICA DEVETIH TOČK

ali Feuerbachova krožnica

po def. je očrtana krožnica višinskega △

Na krožnici devetih točk ležijo razpolovišča stranic, nožišča višin in razpolovišča daljic, ki povezujejo višinsko točko z oglišči.

tudi očrtana ○ težiščnemu △



$A''B' \parallel HC$ in razmerje 1:2

$B''A' \parallel HC$ in razmerje 1:2

$\triangle AA''B' \sim \triangle AHC$, $\triangle BB''A' \sim \triangle BHC$

$AB \parallel A''B'' \parallel B'A'$

$CH \perp AB$

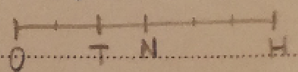
$\Rightarrow$ ▭ $A''B''A'B'$ je pravokotnik

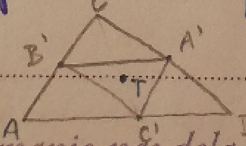
Simetrično je ▭ $B''C''C'B'$ tudi pravokotnik

Središče oranžnemu in modremu pravokotniku očrtane krožnice je razpolovišče $B'B''$, točke $A', B', C', A'', B'', C''$ ležijo na tej krožnici, premer je $|A'A''| = |B'B''| = |C'C''|$.

Po Talesovem izreku ležijo na njej tudi D, E in F, pri D je pravi kot nad premerom $A'A''$ itd.

Središče krožnice devetih točk N leži na Eulerjevi premici in je slika O prek T z raztegom $R(T, -\frac{1}{2})$.





Težiščni △ dobimo s preslikavo △ABC z $R(T, -\frac{1}{2})$. Ta preslikava očrtano krožnico △ABC slika v očrtano krožnico △A'B'C'. Torej se O slika v N.

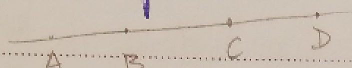
znanje nas dela velike

E64

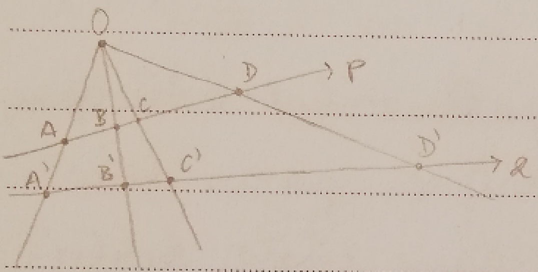
MENELAJEV IN CEVOV IZREK

„čevov"

Naj bodo A, B, C, D različne točke na isti premici.
Usmerjeno dvorazmerje je $\langle AB, CD\rangle = \dfrac{\langle AC\rangle \cdot \langle BD\rangle}{\langle AD\rangle \cdot \langle BC\rangle}$.



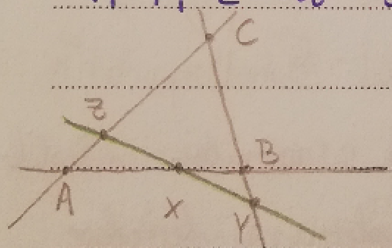
$\langle AB, C p_\infty\rangle =$ "$\lim\limits_{D\to p_\infty}$" $\dfrac{\langle AC\rangle \cdot \langle BD\rangle^{\infty}}{\langle AD\rangle_{\infty} \cdot \langle BC\rangle} = \dfrac{\langle AC\rangle}{\langle BC\rangle}$



Centralna projekcija ohranja (usmerjeno) dvorazmerje.

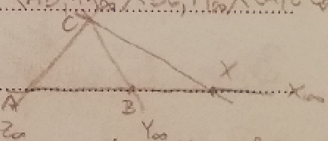
$\langle AB, CD\rangle = \langle A'B', C'D'\rangle$ tudi če se spremeni vrstni red točk.

Menelajev izrek: $\triangle ABC$, X, Y, Z točke na nosilkah AB, BC, CA, ki niso oglišča.
X, Y, Z so kolinearne $\Leftrightarrow \underbrace{\dfrac{\langle AX\rangle}{\langle XB\rangle} \cdot \dfrac{\langle BY\rangle}{\langle YC\rangle} \cdot \dfrac{\langle CZ\rangle}{\langle ZA\rangle} = -1}$.



$\langle AB, XX_\infty\rangle = \dfrac{\langle AX\rangle}{\langle BX\rangle} = -\dfrac{\langle AX\rangle}{\langle XB\rangle}$ $(*) \Leftrightarrow \langle AB, XX_\infty\rangle \langle BC, YY_\infty\rangle \langle CA, ZZ_\infty\rangle = 1$

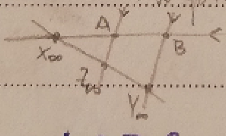
Recimo, da X ni na stranici AB



Izberemo projekcijo, v kateri $\overleftrightarrow{CX}$ leži v neskončnosti.

$= 1$ (podobni $\triangle$)

Na stranicah dve ali nobena izmed X, Y, Z.

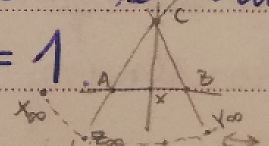


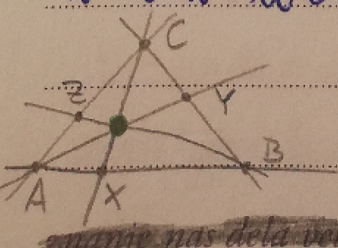
X, Y, Z kolin. $\Leftrightarrow$ YZ ∥ AB v tej projekciji

v tej proj. se (*) glasi: $\dfrac{\langle BX_\infty\rangle}{\langle AX_\infty\rangle} \cdot \dfrac{\langle BY\rangle}{\langle BY_\infty\rangle} \cdot \dfrac{\langle AZ_\infty\rangle}{\langle AZ\rangle} = 1$

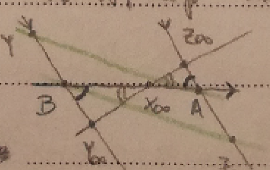
$\langle BY\rangle = \langle AZ\rangle$ smeri so prave. Če ZY ∥ AB, je $|BY| = |AZ|$.

Cevov izrek: $\triangle ABC$, X, Y, Z točke na nosilkah stranic AB, BC, CA, ki niso oglišča. Premice $\overleftrightarrow{AY}$, $\overleftrightarrow{BZ}$, $\overleftrightarrow{CX}$ se sekajo v eni točki $\Leftrightarrow_{(*)} \dfrac{\langle AX\rangle}{\langle XB\rangle} \cdot \dfrac{\langle BY\rangle}{\langle YC\rangle} \cdot \dfrac{\langle CZ\rangle}{\langle ZA\rangle} = 1$.





Recimo, da je X na stranici AB. Izberemo projekcijo, da je $\overleftrightarrow{XC}$ v neskončnost



$(*) \Leftrightarrow \langle AB, XX_\infty\rangle \cdot \langle BC, YY_\infty\rangle \cdot \langle CA, ZZ_\infty\rangle = -1$

v tej proj. $\Leftrightarrow \dfrac{\langle BX_\infty\rangle}{\langle AX_\infty\rangle} \cdot \dfrac{\langle BY\rangle}{\langle BY_\infty\rangle} \cdot \dfrac{\langle AZ_\infty\rangle}{\langle AZ\rangle} = -1$

[redacted]

Na stranicah ena ali vse tri X, Y, Z.

$\dfrac{\langle BY\rangle}{\langle AZ\rangle} = -1$

$\pm \cdot \mp \cdot \pm = 1$

$\overleftrightarrow{AY} \parallel \overleftrightarrow{BZ}$ v tej proj. $\Leftrightarrow |BY| = |AZ|$

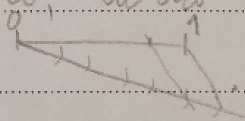
v tej proj. Y in Z ležita na nasprotnih bregovih $\overleftrightarrow{AB}$ (?) ■

■

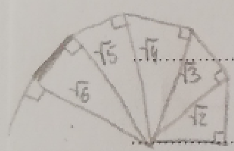
KONSTRUKCIJE Z RAVNILOM IN ŠESTILOM

Ravnilo je brez merila ali kotomera.

Prenašamo razdaljo, narišemo krožnico danega polmera, odmerimo kot 60° in vse njegove večkratnike (120°, 180°, 240° ...), dani kot razpolovimo, simetrala kota, simetrala daljice, prenos kota na drugo mesto. Če imamo dano enoto, lahko odmerimo poljubno racionalno število.



Iz dane enote dobimo poljuben kvadratni koren



Gauss-Wantzelov izrek: Z ravnilom in šestilom se da konstruirati pravilni n-kotnik, če je $n = 2^k$ ali produkt 2^k in Fermatovih praštevil (tj. oblike $2^{(2^m)}+1$, npr. 3, 5, 17, 257 ...)

3 antični problemi, ki se jih ne da le z ravnilom in šestilom:

- Podvojitev kocke: iz dane kocke konstruiraj kocko z dvakratno prostornino $\sqrt[3]{2}$
- Trisekcija kota: dani kot razdeli na tri enake dele.
- ~~[illegible]~~ Kvadratura kroga: Iz danega kroga konstruiraj kvadrat z enako ploščino.

Dokaz je Algebra 2. Podvojitev kocke z robom 1: ne znamo odmeriti $\sqrt[3]{2}$. Ne znamo konstruirati $\sqrt{\pi}$ (π bi

znanje nas dela velike bilo v nasprotnem primeru algebraično število)

POLIEDRI IN EULERJEVA FORMULA

PRAVILNI VEČKOTNIKI IN PRAVILNA TELESA

ELEMENTARNA TELESA V TRIRAZSEŽNEM PROSTORU

(Pravilni) n-kotnik

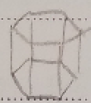
št. diagonal $= \frac{n\cdot(n-3)}{2}$ vsota notranjih kotov $= (n-2)\cdot 180°$

n skladnih stranic, n skladnih kotov

$\alpha = \frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$ $\varphi = \frac{360°}{n}$

je tetivni in tangentni

Ravna

Prizme  $V = S_0 \cdot v$

Antiprizme

Piramide 

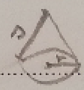
Dvojne piramide

Kriva

Krogla $V = \frac{4\pi r^3}{3}$ $S = 4\pi r^2$

Valj $V = \pi r^2 h$

Stožec $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$ $S = \pi r^2 + \pi r s$



Konveksno telo je pravilno, če obstajata $n, k \in \mathbb{N}$, da so vsa lica pravilni n-kotniki in ob vsakem oglišču se stika k lic.

Obstaja 5 pravilnih teles – Platonska telesa

	n, k	
tetraeder	3, 3	4 − 6 + 4
oktaeder	3, 4	6 − 12 + 8
kocka	4, 3	8 − 12 + 6
ikozaeder	3, 5	12 − 30 + 20
dodekaeder	5, 3	20 − 30 + 12

dualnost $V - E + F = 2$

Pogoj za pravilno telo

$k \cdot \frac{(n-2)\cdot\pi}{n} < 2\pi \rightsquigarrow k\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right) < 2 \rightarrow 1 < \frac{2}{k}+\frac{2}{n} \rightsquigarrow nk < 2n+2k$

$\rightsquigarrow \boxed{(n-2)(k-2) = nk-2n-2k+4 < 4}$ $1\cdot1,\ 1\cdot2,\ 2\cdot1,\ 1\cdot3,\ 3\cdot1$

n	3	3	4	3	5
k	3	4	3	5	3

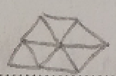
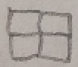
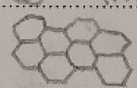
Dualnost

Oglišče ↔ lice

Oglišča so vozlišča, robovi so povezave, ploskve so lica. Na sferi velja Eulerjeva formula

$V - E + F = 2$

Tlakovanja ravnine $(n-2)(k-2)=4$

Tlakovanja hiperbolične ravnine $(n-2)(k-2)>4$

(vse ostalo) 

Polieder (mnogoplošček) je telo, omejeno s končnim številom ravnih ploskev, ploskve so mnogokotniki. Velja $V - E + F = 2$.

OSNOVE GEOMETRIJE RAVNINE IN PROSTORA

Hilbertov sistem aksiomov

Evklidovi Elementi: 300 pr. Kr., geometrija in teorija števil, standard aksiomatične metode v matematiki, ni več eksperiment ampak formalen dokaz tisto, kar šteje, najuspešnejše znanstveno delo vseh časov, po številu tiskanih izdaj v vseh jezikih zasedajo častno drugo mesto (za Svetim pismom).

Nedefinirani pojmi: točka, premica, leži na, med in skladnost. Nedefinirani pojmi → definicije → aksiomi → izreki

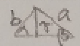
Poleg aksiomatičnega pristopa k geometriji poznamo še Kleinov Erlangov program, ki vse gradi s transformacijami (izometrijami).

ELEMENTARNI RAVNINSKI LIKI

Trikotnik enakostranični, enakokraki, pravokotni, ostrokotni, topokotni

$S = \frac{a \cdot v_a}{2}$ $\quad s = \frac{a+b+c}{2}$ $\quad S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)s}$ $\quad S = \frac{abc}{4R}$ očrtane krožnice

Kosinusni izrek $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ dokaz z vektorji

Sinusni izrek $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$  $\sin\alpha = \frac{v}{b}$ $\sin\beta = \frac{v}{a}$

Štirikotnik kvadrat, pravokotnik, romb, paralelogram, deltoid, trapez, tetivni štirikotnik, tangentni štirikotnik

Pravilni n-kotnik $\alpha = \frac{(n-2) \cdot 180°}{n}$, $\varphi = \frac{360°}{n}$, $\check{s}t.\ diagonal = \frac{n(n-3)}{2}$

Krog $o = 2\pi r$, $S = \pi r^2$

EG7

STOŽNICE

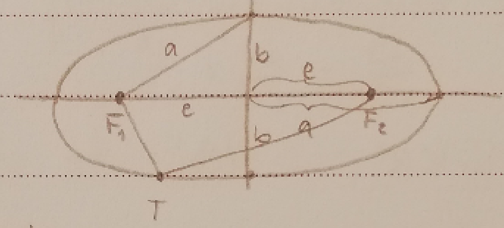
množica točk, ki zadošča enačbi

Krivulje drugega reda $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$

Krožnica, elipsa, hiperbola, parabola, dve $\parallel$ ali $\times$ premici, ena dvakrat šteta premica, točka, prazna množica — **stožnice**

K: $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$

E: $\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}=1$

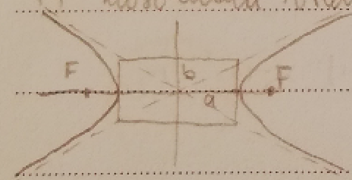


a velika polos
b mala polos
e linearna ekscentričnost

vrtnarska def.

$a^2=e^2+b^2$ $\quad S=\pi ab$

H: absolutna vrednost razlike razdalj do dveh izbranih točk (gorišč) je konst



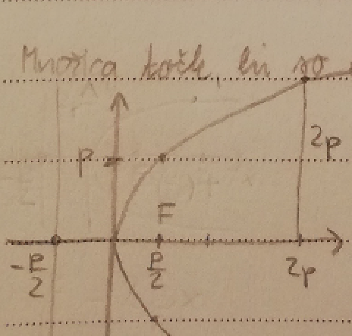
$e^2=a^2+b^2$ $\quad \frac{(x-p)^2}{a^2}-\frac{(y-q)^2}{b^2}=1$ → tisti z minusom je imaginarna polos, druga je realna polos

Asimptoti: $y=\pm\frac{b}{a}x$ (oz. za premaknjeno)

$\varepsilon=\frac{e}{a}$

P: $f(x)=ax^2+bx+c$ $\cup$

Množica točk, ki so enako oddaljene od premice vodnice in gorišča



$F(\frac{p}{2},0)$

$y^2=2px$ $\quad (y-b)^2=2p(x-a)^2$ $\quad \vec{v}=(a,b)$

znanje nas dela ~~velike~~

Kvadratne forme in zasuki stožnic ?? Algebra 1

IZOMETRIJE IN SKLADNOST

Izometrije so preslikave, ki ohranjajo razdalje in kote. Npr. zrcaljenje, rotacija, premik za izbrani vektor, ?zrcalni zasuk??

Hilbertovi aksiomi za skladnost: skladnost daljic in kotov, oboje ekvivalenčni relaciji, seštevanje razdalj, SKS.

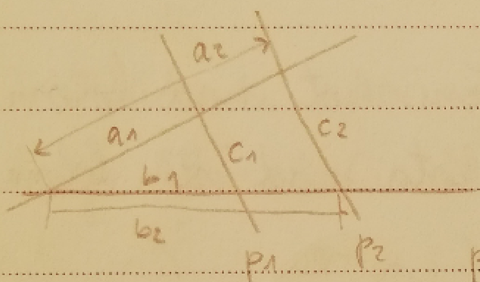
⇒ KSK, SKK, SSS, dve stranici in kot nasproti daljše

TALESOVI IZREKI IN PODOBNOST

Podobnost trikotnikov: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, če se ujemata v vseh kotih: $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$

Velja $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$ ← podobnostni koeficient

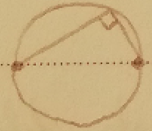
Talesovi izreki → nič novega, ne vem, zakaj se v OŠ to imenujejo Talesovi izreki

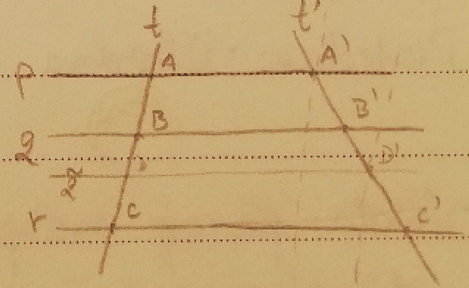


$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1}$$

$p_1 \parallel p_2$

Sicer Talesov izrek govori o kotu nad polkrogom, ki je vedno pravi kot.





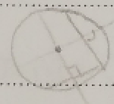
Izrek o vzporedni projekciji:

$p \parallel q \parallel r$, t in t' prečnici

$$\Rightarrow \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|A'B'|}{|B'C'|}.$$

D: dodamo še $\tilde{q}$, da $|AB| \cong |DC|$ in dokažemo (paralelogrami, podobni $\triangle$), da $|A'B'| \cong |D'C'|$. Potem ločimo primera $\frac{|AB|}{|BC|} \in \mathbb{Q}$ in $\notin \mathbb{Q}$

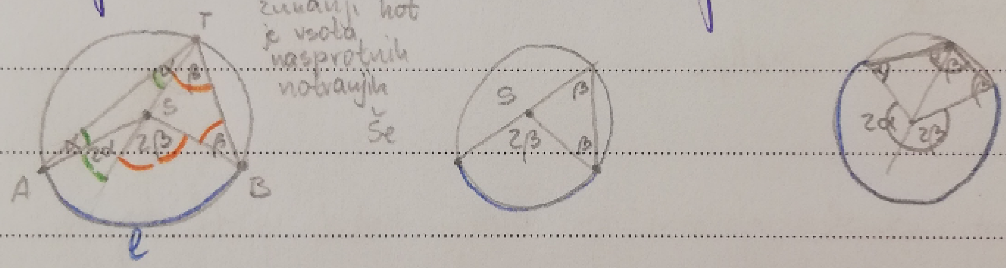
EVKLIDOVI IZREKI O KROGU

- Konstrukcija središča krožnice  simetrali dveh tetiv

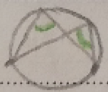
- Dve različni krožnici se sekata v največ dveh točkah.

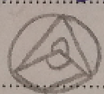
- Če sta krožnici tangentni, sta središči kolinearni z dotikališčem.

- Središčni in obodni kot: Središčni kot nad lokom l je dvakratnik obodnega kota nad istim lokom.

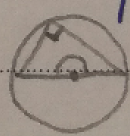


Posledice: • Obodna kota nad istim lokom sta skladna.



- Vsota parov nasprotnih kotov tetivnega štirikotnika je π.  Vsota središčnih je 2π, torej vsota obodnih π.

- Talesov izrek: Kot, včrtan v polkrog, je pravi. Središčni je $\pi \Rightarrow$ obodni je $\frac{\pi}{2}$



 Glej še potenco točke na krožnico EG1

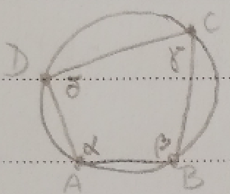
EG9

TETIVNI IN TANGENTNI ŠTIRIKOTNIK

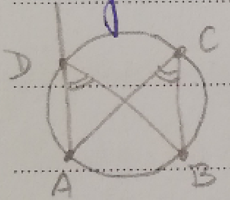
Tetivni štirikotnik

4 točke so konciklične, če ležijo na isti krožnici. Tedaj določajo tetivni štirikotnik.

Štirikotnik je tetiven $\Leftrightarrow$ $\alpha + \gamma = \beta + \delta = \pi$

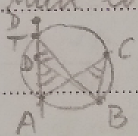


T: Trikotniku $\triangle ABC$ očrtamo krožnico. D leži na istem bregu $\overleftrightarrow{AB}$ kot C. D leži na očrtani krožnici $\Leftrightarrow$ $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$.



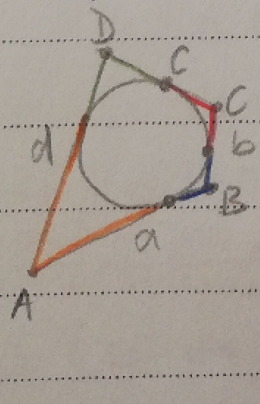
($\Rightarrow$) če je D na krožnici je obodni nad lokom AB

($\Leftarrow$) Denimo $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$



Obstaja T na krožnici da so A, D in T na isti premici in $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ATB$. Potem sta $\overleftrightarrow{TB}$ in $\overleftrightarrow{DB}$ vzporedni $\rightarrow\leftarrow$

Tangentni štirikotnik



Tangentni štirikotnik je štirikotnik, ki mu lahko včrtamo krožnico.

$a + c = b + d \Leftrightarrow$ štirikotnik je tangentni

SFERIČNA GEOMETRIJA

→ poenostavitev: $R = 1$

- Premice so glavni krogelni krogi (krožnice s središčem v središču krogle). Ni vzporednic.
- Dvokot  površina pomarančnega olupka $S = \frac{\varphi}{2\pi} \cdot 4\pi \overset{1}{(R^2)} = 2\varphi$
- Vsota kotov △ je več kot π. $\alpha+\beta+\gamma = \pi + S \;\left(= \pi + \frac{S}{R^2}\right)$
- Podobnost ⇔ skladnost, saj $\alpha+\beta+\gamma = \alpha'+\beta'+\gamma' \Rightarrow S = S'$

Sferični kosinusni izrek

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$$

$$\cos \frac{c}{R} = \cos \frac{a}{R} \cdot \cos \frac{b}{R} + \sin \frac{a}{R} \sin \frac{b}{R} \cos \gamma$$

Sferični sinusni izrek

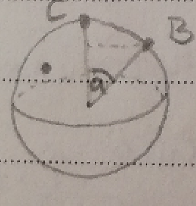
$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$$

$$\frac{\sin \frac{a}{R}}{\sin \alpha} = \frac{\sin \frac{b}{R}}{\sin \beta} = \frac{\sin \frac{c}{R}}{\sin \gamma}$$

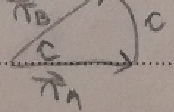
D: Nekaj o volumnom paralelepipeda $|(\vec{r}_A \times \vec{r}_B) \cdot \vec{r}_C|$ na dva načina (ciklično menjamo A, B, C)

Zakaj so kar stranice v kotnih funkcijah – na enotski sferi je dolžina loka na glavnem krogelnem krogu enaka središčnemu kotu (v radianih)

D: Poenostavimo —kosinusnega. $C(0,0,1)$, $B(\sin a, 0, \cos a)$



$A(\sin b \cos \gamma, -\sin b \sin \gamma, \cos b)$

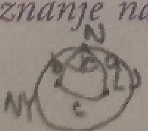


$$\cos c = \frac{\vec{r}_A \cdot \vec{r}_B}{|\vec{r}_A| \cdot |\vec{r}_B|} = \frac{\sin a \sin b \cos \gamma + 0 + \cos a \cos b}{1 \cdot 1}$$

LJ: 46° S 14° V, NY: 40° S 74° Z $R = 6400$ km

znanje nas dela velike

$\gamma = 88°$ $\cos \frac{c}{R} = \cos(90° - 46°) \cos(90° - 40°) + \sin(90° - 46°) \sin(90° - 40°) \cos 88°$



$\frac{c}{R} \doteq 61,..° = \frac{61}{180}\pi$ [rd] $c \doteq 6800$ km

HILBERTOVI AKSIOMI ZA NEVTRALNO RAVNINO

AKSIOMI VSEBOVANOSTI:

V1 Za poljubni različni točki A in B obstaja natanko ena premica p, ki vsebuje A in B.

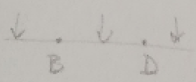
V2 Na vsaki premici ležita vsaj dve različni točki.

V3 Obstajajo tri različne nekolinearne točke.

AKSIOMI VMESNOSTI:

$A * B * C$
$C * B * A$

M1 Če velja $A * B * C$, potem so A, B in C različne kolinearne točke in velja tudi $C * B * A$.



M2 Za poljubni različni točki B in D obstajajo točke A, C in E na premici $\overleftrightarrow{BD}$, da velja $A * B * D$, $B * C * D$ in $B * D * E$.

M3 Če so A, B in C tri različne kolinearne točke, potem natanko ena od teh točk leži med preostalima.

bregovi

M4 Za poljubno premico p in poljubne točke A, B in C, ki ne ležijo na p, velja:

(i) če sta A in B na istem bregu p ter B in C na istem bregu p, potem sta tudi A in C na istem bregu p.

(ii) Če sta A in B na različnih bregovih p ter B in C na različnih bregovih p, potem sta A in C na istem bregu p.

AKSIOMI SKLADNOSTI:

S1 Če sta A in B različni točki in A' poljubna točka, potem na poljubnem poltraku r z začetkom v A' obstaja natanko ena točka B', da velja $B' \neq A'$ in $AB \cong A'B'$. skladni daljici

S2 Skladnost daljic je ekvivalenčna relacija.

S3 Če velja $A * B * C$, $A' * B' * C'$, $AB \cong A'B'$ in $BC \cong B'C'$, potem je $AC \cong A'C'$. seštevanje razdalj

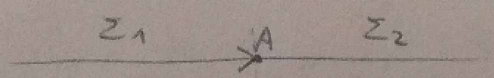
S4 Za dani kot $\angle CAB$ in dani poltrak $\overrightarrow{A'B'}$ obstaja natanko en poltrak $\overrightarrow{A'C'}$ na izbranem bregu $\overleftrightarrow{A'B'}$, da velja $\angle C'A'B' \cong \angle CAB$. skladna kota

S5 Skladnost kotov je ekvivalenčna relacija.

S6 Če sta stranici in vmesni kot enega trikotnika skladni s stranicama in vmesnim kotom drugega trikotnika, potem sta trikotnika skladna. SKS

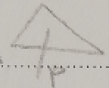
AKSIOM ZVEZNOSTI:

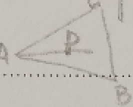
D Naj bo množica točk na premici p disjunktna unija dveh nepraznih podmnožic Σ_1 in Σ_2, za kateri velja: nobena točka v $\Sigma_1(\Sigma_2)$ ne leži med dvema točkama v $\Sigma_2(\Sigma_1)$. Potem obstaja natanko ena točka A na p, da je ena od množic Σ_1 in Σ_2 enaka enemu od poltrakov na p z začetkom v A, druga pa je komplement tega poltraka.

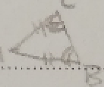
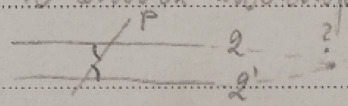


NEVTRALNA GEOMETRIJA IN AKSIOM O VZPOREDNICI

↳ evklidska in hiperbolična (sferična pa ne)

- Velja Hilbertov sistem aksiomov incidenčnosti, vmesnosti, skladnosti, zveznosti.
- Paschev izrek: A  B če gre p noter, gre tudi ven. Če seka AB, v notranjosti, seka AC ali BC

⇕ Izrek o prečnici: A  Če $\vec{AD}$ leži med $\vec{AB}$ in $\vec{AC}$, $\vec{AD}$ seka BC.

- SKS, Pons Asinorum: Če v $\triangle ABC$ velja $AB \cong AC$, je $\sphericalangle B \cong \sphericalangle C$: A , KSK
- Skladna kota ⇒ skladna suplementarna kota.
- Za poljubno premico p in točko A obstaja premica skozi A, pravokotna na p.
- Vsi pravi koti so skladni.
- Izmenični notranji koti: Če premica p seka q in q', $q \neq q'$, tako, da s q in q' oklepa skladna izmenična notranja kota, potem sta q in q' vzporedni. 

Posl: Skozi $A \notin p$ poteka vsaj ena vzporednica k p. Pravokotnica na p skozi A je ena sama.

- Zunanji kot trikotnika je večji od katerega koli nasprotnega notranjega.
- V $\triangle$ večji kot leži nasproti večje stranice in obratno.
- Legendre-Saccheri: $\alpha + \beta + \gamma \leq \pi$. Defekt $:= \delta(\triangle ABC) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$
- Obstaja $\triangle$ z $\delta = 0$ ⇒ obstaja pravokotnik. Obstaja pravokotnik ⇒ vsi $\triangle$ imajo $\delta = 0$. To da evklidsko ravnino.

E5: Če za $p \neq q$ obstaja prečnica t, da je vsota notranjih kotov na eni strani manjša kot π, se p in q sekata na tej strani.

Hilbertov aksiom o vzporednicah: Za vsako premico p in vsako točko $A \notin p$ obstaja natanko ena vzporednica k p skozi A.

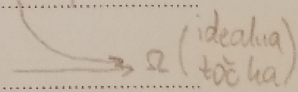
Hiperbolični: Obstaja p in $A \notin p$, da skozi A potekata VSAJ DVE vzp. k p.

HIPERBOLIČNA RAVNINA

Hiperbolični aksiom ⇒ vsi △ imajo $\delta > 0$ (vsota notranjih kotov je strogo manjša kot π). Ne obstajajo pravokotniki. Kriterij kkk za skladnost.

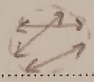
ZGO: prva objavila Lobačevski (1829) in Bolyai mlajši (1831).

- Dve vrsti vzporednic: s skupno pravokotnico (simetrično na obe smeri), asimptotične vzporednice → Ω (idealna točka)



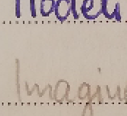
Izrek: Obstajata enolično določena poltraka, da $\vec{AC}$ in $\vec{AC'}$ ne sekata p, $\vec{AD}$ pa seka p ⇔ D leži znotraj $\measuredangle CAC'$

⇝ kot vzporednosti $\Pi(A,p) = |\measuredangle BAC| = |\measuredangle BAC'| \in (0, \frac{\pi}{2})$ odvisen je od oddaljenosti A od p.

Modeli: Beltrami-Kleinov  komplicirano merjenje dolžin in kotov. Imaginarna sfera v prostoru Minkovskega nekaj z $ds^2 = dx^2 + dy^2 - dt^2$.

Poincaréjev model na disku ⇝ $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ preslika Poincaréjev model na zgornji polravnini v → tu so premice navpični poltraki in polkrožnice s središčem na osi x

→ $\mathcal{K} = S(0,r)$, točke na $\mathcal{K}$ so idealne točke, premice so preseki krožnice $\mathcal{K}$ in krožni loki, ki so v krajiščih pravokotni na $\mathcal{K}$. Kote merimo evklidsko. Razdalja $d(AB) = |\ln(AB, \Omega\Sigma)| = \ln \frac{|A\Omega||B\Sigma|}{|A\Sigma||B\Omega|}$, to so navadne evklidske razdalje, vrstni red Σ in Ω ni pomemben.



Če je $\tilde{\mathcal{K}}$ krožnica, na kateri leži P-premica, inverzija v $\tilde{\mathcal{K}}$ preslika Poincaréjev disk samega vase in $d(AB') = d(AB)$. To je P-zrcaljenje.

znanje nas dela velike