LA 1
lin. alg.

REALNI TRIRAZSEŽNI VEKTORSKI PROSTOR

Premico (z označeno 0 in 1) identificiramo z $\mathbb{R}$, ravnino z $\mathbb{R}^2$, prostor z $\mathbb{R}^3$.

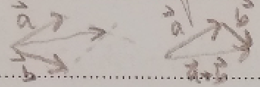
$$d(T_1, T_2) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

Pozitivna usmerjenost x, y, z-osi

Dve operaciji: $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$, $\alpha \cdot (x_1, y_1, z_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$.

Vektor $\vec{a} = (x, y, z)$ je množica vseh usmerjenih daljic, ki jih dobimo z vzporednim premikom krajevnega vektorja $\vec{OA}$, $A(x, y, z)$.

Vsaka točka v $\mathbb{R}^3$ določa en krajevni vektor. Množico vseh vektorjev identificiramo z $\mathbb{R}^3$.

Seštevanje vektorjev  , množenje s skalarjem, $-\vec{a} = (-x, -y, -z)$.

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ $\qquad (\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$

$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ $\qquad \alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$

$\vec{0} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ $\qquad \alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$

$\vec{a} + (-\vec{a}) = -\vec{a} + \vec{a} = \vec{0}$ $\qquad 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ poljubni vektorji, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \dots + \alpha_n\vec{a}_n$ je **linearna kombinacija** vektorjev $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$. Vektorji $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ so **linearno odvisni**, kadar vsaj enega od njih lahko izrazimo kot linearno kombinacijo ostalih. Odvisni: en $\vec{0}$, dva $\vec{b} = \beta\vec{a}$, trije $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Če sta v ravnini dva lin. neodvisna, lahko vsakega tretjega v ravnini zapišemo kot linearno kombinacijo prvih dveh. Analogno je v prostoru vsak četrti lin. komb. treh lin. neodvisnih. α, β, γ so enolično določeni. Baza ravnine oz. prostora. Standardna $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

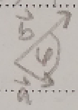
Vektorji $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ so linearno odvisni $\Leftrightarrow$ obstajajo α, β, γ, ne vsi 0, da je $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$. Vektorji $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ so linearno neodvisni, kadar velja sklep: $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$.

SKALARNI, VEKTORSKI IN MEŠANI PRODUKT

Skalarni produkt $(x_1, y_1, z_1)\cdot(x_2, y_2, z_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ (število oz. skalar)

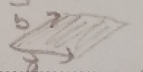
P: $x = \vec{a}\,\vec{i}$, $y = \vec{a}\cdot\vec{j}$, $z = \vec{a}\cdot\vec{k}$ Lastnosti: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$, $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$,

$(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(\alpha\vec{b}) = \alpha\,(\vec{a}\cdot\vec{b})$, $\vec{a}\cdot\vec{a} \geq 0$ in $\vec{a}\cdot\vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$. $\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos\varphi$  (dokaz prek cos. izreka $(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a}) = \vec{a}\vec{a} + \vec{b}\vec{b} - 2\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos\varphi$)

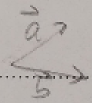
$\varphi \in [0, \pi)$

Vektorski produkt $\underset{\text{vektor}}{\vec{a}\times\vec{b}}$ z lastnostmi $\vec{a} \perp \vec{a}\times\vec{b}$, $\vec{b} \perp \vec{a}\times\vec{b}$,

$\|\vec{a}\times\vec{b}\| = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\sin\varphi$ (velikost ploščina paralelograma ), $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}\times\vec{b}$

je pozitivno urejena trojica – z vrha $\vec{a}\times\vec{b}$ pogledamo ravnino, določimo z $\vec{a}$ in $\vec{b}$ in se lahko $\vec{a}$ pozitivno zavrti v večkratnik $\vec{b}$. $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2,\ -(a_1b_3 - a_3b_1),\ a_1b_2 - a_2b_1)$$

$z = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{k}$  projiciramo na ravnino, ploščina projekcije je $a_1b_2 - a_2b_1$ (glej svoj zvezek Alg 1)

$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$ antikomutativnost, $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$ in $(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{a} = \vec{b}\times\vec{a} + \vec{c}\times\vec{a}$,

$(\alpha\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(\alpha\vec{b}) = \alpha(\vec{a}\times\vec{b})$

Mešani produkt $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ je število.

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)\cdot(c_1, c_2, c_3) = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{matrix}$$

$|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$ je volumen paralelepipeda, določenega z $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

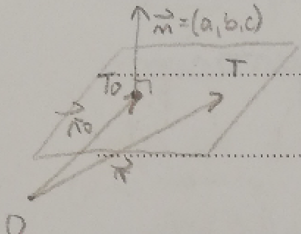
$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}] = -[\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}]$

$\alpha[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\alpha\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \alpha\vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}, \alpha\vec{c}]$

Če so $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linearno odvisni, je mešani produkt enak 0.

RAVNINE IN PREMICE V PROSTORU

Ravnina Na ravnini so točke, ki zadoščajo enačbi $(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{n}=0$

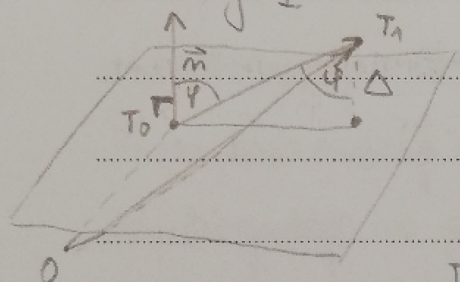


oz. $((x,y,z)-(x_0,y_0,z_0))(a,b,c)=0$ oz. $ax+by+cz+\overset{-ax_0-by_0-cz_0}{d}=0$

Ni enolično določena, normalo lahko še normiramo.

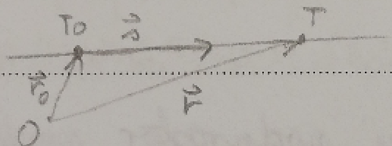
Če imamo podane tri točke na ravnini, je enačba $(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot(\underbrace{(\vec{r}_1-\vec{r}_0)\times(\vec{r}_2-\vec{r}_0)}_{\vec{n}})$

Razdalja točke do ravnine



$\cos\varphi=\frac{\Delta}{|T_0T_1|}$ $\Delta=\frac{|\vec{n}\cdot(\vec{r}_1-\vec{r}_0)|}{|\vec{n}|}=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$\vec{n}\cdot(\vec{r}_1-\vec{r}_0)=|\vec{n}|\,|T_1T_0|\cos\varphi$

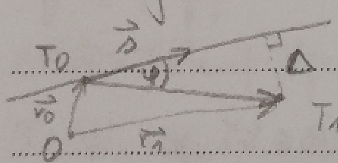


$\vec{s}=(a,b,c)$

Premica $\vec{r}-\vec{r}_0=\lambda\vec{s}$ oz. $\vec{r}=\vec{r}_0+\lambda\vec{s}$

Razpišemo po komponentah in izrazimo $\lambda=\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$; če $a=0$, $x=x_0$

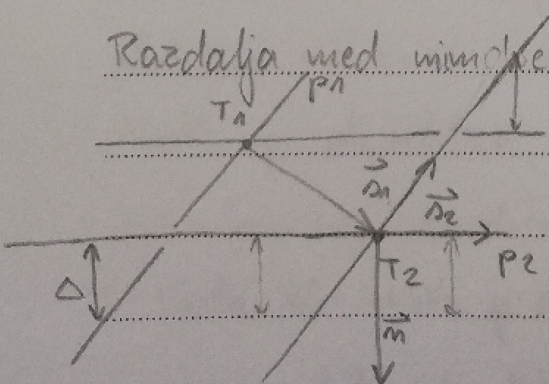
Razdalja točke do premice



$\sin\varphi=\frac{\Delta}{\|\vec{r}_1-\vec{r}_0\|}$ $\Rightarrow\Delta=\frac{|\vec{s}\times(\vec{r}_1-\vec{r}_0)|}{|\vec{s}|}$

$\|\vec{s}\times(\vec{r}_1-\vec{r}_0)\|=\|\vec{s}\|\,\|\vec{r}_1-\vec{r}_0\|\sin\varphi$

Razdalja med mimobežnima premicama



$\Delta=|$pravokotna projekcija $\overrightarrow{T_1T_2}$ na $\vec{n}|$

$\Delta=|(\vec{r}_2-\vec{r}_1)\cdot(\vec{s}_1\times\vec{s}_2)|\cdot\frac{1}{|\vec{s}_1\times\vec{s}_2|}$

$\Delta=\frac{|[\vec{r}_2-\vec{r}_1,\vec{s}_1,\vec{s}_2]|}{|\vec{s}_1\times\vec{s}_2|}$

VEKTORSKI PROSTORI

npr. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}_p$

Vektorski prostor V nad (komutativnim) obsegom $\mathbb{F}$ je Abelova grupa $(V, +)$ skupaj z zunanjo operacijo $\mathbb{F} \times V \to V$: $(\alpha, v) \to \alpha v$ (množenje s skalarjem), da velja $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$, $(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$, $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$, $1 \cdot v = v$. ← enota v $\mathbb{F}$

- Primeri: $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{F}^n$ z operacijama $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$, $\alpha(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$; prostor funkcij $M \to \mathbb{R}$ z operacijama $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$; prostor polinomov $\mathbb{R}[x]$ za običajno seštevanje polinomov in množenje polinomov z realnim številom.

T:
- $\alpha \cdot 0 = 0$, $0 \cdot v = 0$, $(-1) \cdot v = -v$, če $\alpha \cdot v = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ ali $v = 0$.
- Množica $W \subseteq V$ je vektorski podprostor prostora V, če je $(W, +)$ podgrupa grupe $(V, +)$ in je W zaprta za množenje s skalarjem. → oznaka $W \leq V$
- T: $W \leq V \Leftrightarrow$ W je zaprta za linearne kombinacije, torej za $x_1, \dots, x_n \in W$ je $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \in W$ za polj. $x_1, \dots, x_n \in W$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$
- T: $W \leq V \Leftrightarrow$ za vsaka $x, y \in W$ in vsaka $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ je $\alpha x + \beta y \in W$.

VSOTA IN PRESEK PODPROSTOROV

<u>Presek</u> poljubne družine vektorskih podprostorov danega v. p. V je vektorski podprostor tega prostora.

D: $\{W_j\}_{j \in J}$ družina podpr. ($W_j \leq V$ za $\forall j \in J$), $W = \bigcap_{j \in J} W_j$. Podgrupa je, za množenje s skalarjem je zaprt, saj za $x \in W_j$ velja $\alpha x \in W_j$ (za $\forall j \in J$) in $\bigcap W_j$ vsebuje αx.

V v. p. nad $\mathbb{F}$, $M \subseteq V$ poljubna podmnožica. Obstaja najmanjši vektorski podprostor $W \leq V$, ki vsebuje M. Je enoličen, oznaka $\mathcal{L}in(M)$, imenuje se linearna ogrinjača množice M.

M je **ogrodje** za podprostor $W = \mathcal{L}in(M)$ in M **generira** $\mathcal{L}in(M)$. $\mathcal{L}in(\emptyset) = \{0\}$.

- $\mathcal{L}in(M)$ je enaka množici vseh lin. kombinacij elementov iz M.

Unija vektorskih podprostorov v splošnem ni vektorski prostor.

<u>Vsota</u> podprostorov $W_1 + W_2$ je linearna ogrinjača unije vektorskih podprostorov W_1 in W_2. Tudi $W_1 + \dots + W_n = \mathcal{L}in\left(\bigcup_{i=1}^{n} W_i\right)$.

T: $W_1 + W_2 + \dots + W_n$ je vektorski podprostor. Vsota $W_1 + \dots + W_n$ je enaka množici vseh vektorjev $x \in V$, ki jih lahko zapišemo v obliki $x = x_1 + \dots + x_n$, kjer $x_1 \in W_1, \dots, x_n \in W_n$.

Vsota je direktna, kadar je za vsak $x \in W$ ta zapis $x = x_1 + \dots + x_n$ enoličen. Oznaka $W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_n$.

I: Vsota $W_1 + \dots + W_n$ je direktna $\Leftrightarrow$ za $\forall j = 1, \dots, n$ velja $W_j \cap (W_1 + W_2 + \dots + W_{j-1} + W_{j+1} + \dots + W_n) = \{0\}$.

 P: $W_1 + W_2$ je direktna $\Leftrightarrow W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

PROSTOR LINEARNIH PRESLIKAV

U, V vektorska prostora nad istim obsegom $\mathbb{F}$. Preslikava $A: U \to V$ je linearna preslikava ali homomorfizem vektorskih prostorov, če velja aditivnost $A(x+y) = Ax + Ay$ za $\forall x,y \in U$ in homogenost $A(\alpha x) = \alpha Ax$ za $\forall x \in U$ in $\forall \alpha \in \mathbb{F}$.

- Oznake: $\mathcal{L}(U,V)$ je množica vseh linearnih preslikav iz U v V. $\mathcal{L}(V)$ je množica vseh endomorfizmov prostora V (homomorfizmov iz V vase nazaj). $A: V \to \mathbb{F}$ je linearni funkcional. V^* je množica vseh linearnih funkcionalov.
- Aditivnost in homogenost hkrati: A linearna $\Leftrightarrow$ $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$.
- $\operatorname{im} A$ je zaloga vrednosti preslikave A, $\ker A = \{x \in V;\ Ax = 0\}$. A injektivna $\Leftrightarrow \ker A = \{0\}$.

T: $A: U \to V$ linearna preslikava. Potem je $\ker A \leq U$ in $\operatorname{im} A \leq V$.

$\mathcal{L}(U,V)$ je vektorski prostor z operacijama $+$ in množenje s skalarjem: $(A+B)x = Ax + Bx$, $(\alpha A)x = \alpha \cdot Ax$.

T: Kompozitum linearnih preslikav je linearna preslikava, inverz linearne preslikave je linearna preslikava.

Def: Bijektivna linearna preslikava je izomorfizem vektorskih prostorov. Izomorfnost vektorskih prostorov je ekvivalenčna relacija (inverz izomorfizma in kompozitum izomorfizmov je izomorfizem).

Množica vseh endomorfizmov prostora V, označena $\mathcal{L}(V)$ je kolobar za operaciji $+$ in $\circ$. Ima enoto id_V. Skupaj z množenjem s skalarjem je algebra nad obsegom $\mathbb{F}$.

$(\alpha A) \circ B = A \circ (\alpha B) = \alpha (A \circ B)$

BAZA IN RAZSEŽNOST

$M \subseteq V$ je ogrodje prostora V, kadar je $Lin(M) = V$.

Vsak vektor iz V lahko izrazimo kot končno linearno komb. elementov ogrodja M.

Vektorski prostor je **končnorazsežen**, kadar ima kakšno končno ogrodje.

$\mathbb{R}^n$ so končnorazsežni, polinomi $\mathbb{R}[x]$ so neskončno razsežen vektorski prostor.

$V = Lin(V)$ je sam sebi ogrodje. Iščemo čim manjše ogrodje.

$v_1, \dots, v_n \in V$ so lin. neodvisni, če velja sklep $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

$v_1, \dots, v_n \in V$ so lin odvisni $\Leftrightarrow$ enega lahko zapišemo kot linearno kombinacijo ostalih.

Baza vektorskega prostora V je množica B, ki je hkrati linearno neodvisna in ogrodje.

I: $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ je baza $\Leftrightarrow$ $\forall x \in V$ lahko enolično zapišemo kot $x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$.

I: Vsak netrivialen končnorazsežen vektorski prostor ima bazo.

Izberemo jo lahko iz poljubnega končnega ogrodja (po vrsti odstranjujemo vektorje, ki so lin. komb. prejšnjih).

T: Če imamo ogrodje iz n elementov, potem ima linearno neodvisna množica manj ali enako n elementov (Dokaz je „nadomeščanje" vektorjev v $\{v_1, \dots, v_n\}$ z $\{u_1, \dots, u_m\}$).

Vse baze končnorazsežnega v. p. V imajo isto moč. Moč baze v. p. V je razsežnost ali dimenzija, oznaka $\dim V$.

Pri Algebri 1 smo delali le končnorazs. vekt. prostore.

Vsako lin. neodvisno množico lahko dopolnimo do baze.

Če je $v_1, \dots, v_n$ lin. neodv. in vemo $\dim V = n$, je $\{v_1, \dots, v_n\}$ baza za V.

Če je $W \leq V$, je $\dim W \leq \dim V$ in $\dim W = \dim V$ le v primeru $W = V$.

znanje nas dela velike $\dim(W + U) = \dim W + \dim U - \dim(W \cap U)$

$$\dim(W \oplus U) = \dim W + \dim U$$

• T: $A: U \to V$ linearna preslikava. Če je A injektivna, slika lin. neodvisne množice v lin. neodvisne množice. Če je A surjektivna, je slika ogrodja za U ogrodje za V. Če je A bijektivna, slika bazo v.p. U v bazo v.p. V.

• I: Če je V n-razsežen vektorski prostor nad $\mathbb{F}$, je izomorfen $\mathbb{F}^n$. Končnorazsežna vektorska prostora nad istim obsegom sta izomorfna $\Leftrightarrow$ imata isto razsežnost.

• I: (dimenzijska formula) U in V končnorazsežna v.p. nad $\mathbb{F}$ in $A: U \to V$ linearna preslikava. Velja $\dim(\ker A) + \dim(\operatorname{im} A) = \dim U$.

• Število $\dim(\operatorname{im} A)$ imenujemo **rang** preslikave A.

LINEARNE PRESLIKAVE IN MATRIKE

Na V izberemo bazo $\{v_1, \dots, v_n\}$ in $\overset{\text{lin. preslikava}}{\mathcal{A}: V \to W}$ je za x natančno določena z $\mathcal{A}v_1, \dots, \mathcal{A}v_n$, ker je $x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ enoličen zapis.

> Imamo prostor V z bazo $\{v_1, \dots, v_n\}$ in prostor W z bazo $\{w_1, \dots, w_m\}$, $\mathcal{A}: V \to W$ priredimo $\overset{\text{pravokotna tabela}}{\text{matriko}}$ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{m1} & & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$, kjer smo zapisali: $\mathcal{A}v_1 = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \dots + a_{m1}w_m, \dots, \mathcal{A}v_n = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \dots + a_{mn}w_m$.

Matrika je odvisna od linearne preslikave in baz prostorov V in W.

Množica vseh $m \times n$ matrik s členi iz $\mathbb{F}$ je $\mathbb{F}^{m \times n}$. **$\mathcal{L}(V, W)$ in $\mathbb{F}^{m \times n}$ sta izomorfna vektorska prostora** dimenzije $m \cdot n$, $+$ in množenje s skalarjem je na $\mathbb{F}^{m \times n}$ po točkah $\begin{bmatrix} a_{11} & \dots \\ \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots \\ \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots \\ \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$

Izomorfizem $\Phi: \mathcal{L}(V, W) \to \mathbb{F}^{m \times n}$, $\Phi(\Phi^{-1}(A) + \Phi^{-1}(B)) = \Phi(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = A + B$, $\alpha A = \Phi(\alpha \Phi^{-1}(A))$.

Množenje matrik definiramo tako, da ustreza kompozitumu linearnih preslikav.

${}_p[\;\;]^m \; {}^m[\;\;]_n = {}_p[c_{ij}]_n \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$ = skalarni produkt i-te vrstice in j-tega stolpca.

Produkt matrike s stolpcem ustreza evalvaciji linearne preslikave na vektorju. $\mathcal{A}: U \to V$, $B_U = \{u_1, \dots, u_n\}$, $B_V = \{v_1, \dots, v_m\}$, $x = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$, $\mathcal{A}x = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_m v_m$, torej $A \cdot x = [u_1 \; u_2 \; \dots \; u_n] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}$, $\beta_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} \alpha_i$.

Standardna baza: Če $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ ustreza $\mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$, so stolpci ravno slike baznih vektorjev, saj $\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$.

Množica kvadratnih matrik $\mathbb{F}^{n \times n}$ je **algebra** in $\Phi: \mathcal{L}(V, V) \to \mathbb{F}^{n \times n}$ izomorfizem algeber. $\Phi(id_V) = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} = I_n$ $\overset{\text{identična}}{\text{matrika}}$. Dovolj za obrnljivost A, da velja $AB = I$ ali $BA = I$ (drugo sledi).

DUALNI PROSTOR IN DUALNA PRESLIKAVA

Naj bo V končnorazsežen v. p. nad obsegom $\mathbb{F}$. Prostoru $\mathcal{L}(V, \mathbb{F})$ vseh linearnih funkcionalov na V pravimo **dualni prostor** prostora V, oznaka V^*. Če je $n = \dim V$, je $V \cong \overset{\text{stolpci}}{\mathbb{F}^n} \cong \overset{\text{vrstice}}{\mathbb{F}^{1\times n}} \cong V^*$ in $\dim V^* = \dim V = n$. Naj bo $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ baza za V, dualna baza za V^* je $B_{V^*} = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ in velja $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1; & i = j \\ 0; & i \neq j \end{cases}$ (Kroneckerjev delta). → Dokazali, da vedno obstaja, je enolična in je res baza za V^*.

T: Imamo $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$, $B_{V^*} = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, $x \in V$, $\psi \in V^*$. Potem je

$$\psi(x) = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \varphi_i\right)}_{\psi} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j\right)}_{x} \cong \overbrace{[\beta_1, \dots, \beta_n]}^{b} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}}_{a} = b \cdot a$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathcal{A}"] \arrow[dr, "\varphi \circ \mathcal{A}"'] & W \arrow[d, "\varphi"] \\ & \mathbb{F} \end{tikzcd}$$

$\mathcal{A}^d$

$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, $\varphi \in W^*$, $\varphi: W \to \mathbb{F}$ lin. funkcional

$\varphi \circ \mathcal{A} \in V^*$

Def: $\boxed{\mathcal{A}^d : W^* \to V^*,\ \mathcal{A}^d(\varphi) = \varphi \circ \mathcal{A}}$ se imenuje **dualna preslikava** preslikave $\mathcal{A}$. T: $\mathcal{A}^d \in \mathcal{L}(W^*, V^*)$ D: $\mathcal{A}^d(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha\mathcal{A}^d\varphi + \beta\mathcal{A}^d\psi$

T: $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^d = \mathcal{A}^d + \mathcal{B}^d$, $(\lambda\mathcal{A})^d = \lambda\mathcal{A}^d$, $(\mathcal{C} \circ \mathcal{A})^d = \mathcal{A}^d \circ \mathcal{C}^d$

$[a_{ij}] = [a_{ji}]^T$

Transponirana matrika A^T je zrcaljena A preko diagonale.

I: Če linearni preslikavi $\mathcal{A}: V \to W$ glede na bazi B_V in B_W pripada matrika A, potem dualni preslikavi $\mathcal{A}^d: W^* \to V^*$ glede na dualni bazi baz B_V in B_W pripada matrika A^T.

P: $A, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $C \in \mathbb{F}^{n\times p}$, $\lambda \in \mathbb{F}$. Velja $(A+B)^T = A^T + B^T$, $(\lambda A)^T = \lambda A^T$ in $(AC)^T = C^T A^T$.

LA 6

SPREMEMBA BAZ, EKVIVALENTNOST IN RANG

$\{v_1, \dots, v_n\}$ in $\{v_1', \dots, v_n'\}$

Imamo dve bazi za V, elemente v_i' zapišemo kot lin. komb. baze $\{v_1, \dots, v_n\}$:

isti vektor iz ene baze v drugo

$id(v_1') = p_{11} v_1 + p_{21} v_2 + \dots + p_{n1} v_n, \dots$, dobimo **prehodno matriko**

$P = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & \cdots & \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$, ki vektor, zapisan v bazi $B_V' = \{v_1', \dots, v_n'\}$ preslika v isti vektor, zapisan v bazi $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$. P je prehodna matrika „iz baze B_V v bazo B_V'" (ampak tole poimenovanje je malo nerodno).

- Imamo $\mathcal{A}: V \to W$, bazi B_V in B_V' za V, bazi B_W in B_W' za W, matrika A pripada $\mathcal{A}$ glede na B_V in B_W, matrika A' pa glede na B_V' in B_W'. P prehodna matrika iz B_V v B_V', Q iz B_W v B_W'.

Potem je $A' = Q^{-1} A P$. Matriki A in A' sta **ekvivalentni**, če sta istih dimenzij in obstajata obrnljivi kvadratni P in Q.

Oznaka $A \sim A'$. Ekvivalentnost matrik je ekvivalenčna relacija

T: A in $B \in \mathbb{F}^{m \times n}$ sta ekvivalentni $\Leftrightarrow$ pripadata isti linearni preslikavi (morda glede na različni bazi).

Rang matrike $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ je rang linearne preslikave $\mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$, definirane s predpisom $x \mapsto Ax$.

T: rang A = rang $\mathcal{A}$. Ekvivalentni matriki $\Leftrightarrow$ imata isti rang. Vsaka matrika $\mathbb{F}^{m \times n}$ je ekvivalentna matriki $\begin{bmatrix} \overbrace{1 \ \ddots}^{r} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $r = \operatorname{rang} \mathcal{A} \in \{0, 1, \dots, \min\{m, n\}\}$

$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, rang A = rang A^T = število linearno neodvisnih vrstic matrike A = št. lin. neodv. stolpcev matrike A.

Preslikave, ki jih lahko zapišemo z obrnljivimi matrikami (ne spremenijo ranga):

zamenjava vrstic ali stolpcev $\begin{bmatrix} I & & & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & I & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & & & I \end{bmatrix}$, množenje vrstice/stolpca $\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \alpha & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$ $\alpha \neq 0$, prištevanje večkratnika ene vrstice/stolpca drugi/drugemu $I + \begin{bmatrix} & \alpha \\ & \end{bmatrix}$ nekje mesto

znanje nas dela velike

↳ s temi tremi v končno korakih iz A dobimo $\begin{bmatrix} \overbrace{1 \ \ddots}^{r} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

SISTEMI LINEARNIH ENAČB

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Zanima nas rešljivost in množica rešitev. $A \cdot x = b$

Homogen sistem $b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ je vedno rešitev, množica rešitev homogenega sistema $Ax = 0$ je ravno jedro preslikave $A: \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$, $x \mapsto Ax$, to je vektorski podprostor dimenzije $n - \operatorname{rang} A$.

Nehomogen sistem $Ax = b$, $b \neq 0$ je **neprotisloven**, če ima vsaj eno rešitev, sicer je protisloven (nerešljiv). To je v primeru $\exists x \in \mathbb{F}^m$, da $Ax = b$ oz. $b \in \operatorname{im} A$ oz. $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \hat{A}$, kjer je $\hat{A} = [A \mid b]$.

• T: Naj bo x neka rešitev sistema $Ax = b$ (partikularna rešitev). Množica rešitev je $x + \ker A$ = ena partikularna rešitev + katera koli rešitev homogenega sistema. D: $y \in \ker A \Rightarrow A(x+y) = Ax + Ay = b + 0$

Gaussova eliminacija Formalno to pomeni, da z leve množimo z obrnljivimi matrikami matriko $[A \mid b]$, v praksi vrstice menjamo, množimo s skalarjem, prištevamo drugim vrsticam do oblike

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & & * & \boxed{*} & * \\ & 1 & & & * \\ 0 & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & * \\ 0 & & & \underbrace{0}_{} & \boxed{c} \end{array}\right]$$

, nato rešujemo od spodaj navzgor.

to mora biti 0, da bo sistem rešljiv

neznanke od x_{n-r+1} do x_n so parametri, $n-r$ parametrov

Neznanke od x_1 do x_{n-r} izrazimo kot konst. + lin. komb. parametrov.

LA 7

PODOBNOST MATRIK

Naj bo $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, tj. $\mathcal{A}$ je endomorfizem. Matriko za $\mathcal{A}$ običajno zapišemo tako, da sta domena in kodomena zapisani v isti bazi. Naj bo A matrika za $\mathcal{A}$ v bazi B, A' matrika v bazi B', P pa prehodna matrika. Tedaj $A' = P^{-1}AP$.

Kvadratni matriki ~~sta~~ $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ sta podobni, če obstaja obrnljiva matrika $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$, da je $B = P^{-1}AP$.

Podobnost je ekvivalenčna relacija na $\mathbb{F}^{n \times n}$. $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ sta podobni $\Leftrightarrow$ pripadata istemu endomorfizmu nekega n-razsežnega prostora, morda glede na različni bazi.

- Pozor: Vsaka obrnljiva $n \times n$ matrika je ekvivalentna identiteti I, vendar je le I podobna I (saj $A = P^{-1}IP = I$).
- Endomorfizem $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ se da diagonalizirati, kadar obstaja taka baza prostora V, da glede na to bazo endomorfizmu $\mathcal{A}$ pripada diagonalna matrika. Tedaj

$\mathcal{A} v_1 = a_{11} v_1$ $\quad$ $\mathcal{A}$ slika vsak v_i v večkratnik tega

$\mathcal{A} v_2 = a_{22} v_2$ $\quad$ vektorja. Tak vektor imenujemo

$\vdots \qquad \vdots$

$\mathcal{A} v_n = a_{nn} v_n$ $\quad$ lastni vektor: $v \neq 0$ in obstaja $\lambda \in \mathbb{F}$, da je $\mathcal{A} v = \lambda v$. Skalar λ je lastna vrednost endomorfizma $\mathcal{A}$, ki pripada lastnemu vektorju v. Lastna vrednost je enolična, lastni vektor pa

znanje nas dela velike je poljuben neničelni večkratnik od v.

DETERMINANTE

Determinanta je n-linearen antisimetričen funkcional, tj.
slika je n stolpcev v $\mathbb{F}$ (→ v vsakem stolpcu je linearna) in če dva stolpca zamenjamo, se množi z (-1).

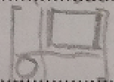
$\det : \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}$, $\det A = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\, a_{\pi(1),1}\, a_{\pi(2),2} \cdots a_{\pi(n),n}$

je vsota po vseh možnostih produkta natanko enega elementa vsake vrstice in vsakega stolpca, pomnoženega z znakom permutacije.

- $\det A = \det A^T$. Če dva stolpca (ali vrstici) zamenjamo, se spremeni predznak, če stolpec (ali vrstico) pomnožimo z α, se det pomnoži z α, če sta dva stolpca (ali vrstici) enaki, je $\det A = -\det A = 0$.

Če stolpcu prištejemo večkratnik drugega stolpca, se det ne spremeni.

$\det(AB) = \det A \cdot \det B$ sledi tudi $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

- Podobni matriki imata enako determinanto.
- Determinanta endomorfizma $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ je det. poljubne matrike za $\mathcal{A}$.
- Razvoj: Lahko gremo razvijati po enem stolpcu ali vrstici in množimo elemente s poddeterminantami  predznak!!.
- Zgornje ali spodnje trikotna matrika: det je produkt diagonalnih elementov, vse ostalo je 0.
- T: A obrnljiva $\Leftrightarrow \det A \neq 0$ (saj $\operatorname{rang} A = n$ in lahko z Gaussovimi transf. pridemo do zg. trik. matrike brez 0 na diagonali).
- Cramerjeva formula: $Ax = b$ je enolično rešljiv $\Leftrightarrow \det A \neq 0$ in velja $x_j = \dfrac{\det(A^{(1)}, \dots, A^{(j-1)}, b, A^{(j+1)}, \dots, A^{(n)})}{\det A}$

znanje nas dela velike

velja $A \cdot \tilde{A}^T = \tilde{A}^T \cdot A = \det A \cdot I$ in $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}^T$

$\det A = a_{i1}\tilde{a}_{i1} + a_{i2}\tilde{a}_{i2} + \dots + a_{in}\tilde{a}_{in}$, kjer je $\boxed{\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det A_{ij}}$ in A_{ij} podmatrika A brez i-te vrstice in j-tega stolpca

LA 8

LASTNE VREDNOSTI

Neničelni vektor $v \in V$ je lastni vektor endomorfizma $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, kadar obstaja $\lambda \in \mathbb{F}$, da je $\mathcal{A}v = \lambda v$. Potem je λ lastna vrednost endomorfizma $\mathcal{A}$, ki pripada lastnemu vekt. v.

Množica $\{$lastni vektorji za lastno vrednost $\lambda\} \cup \{0\}$ je vekt. podprostor. Razsežnost tega podprostora je **geometrična večkratnost** lastne vrednosti λ. $\{v \in V \mid \mathcal{A}v = \lambda v\} = \ker(\mathcal{A} - \lambda I)$ identični endomorfizem id

T: $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ se da diagonalizirati $\Leftrightarrow$ obstaja baza iz lastnih vektorjev.

$D = P^{-1}AP$

Tedaj je $A = PDP^{-1}$ in P ima za stolpce lastne vektorje. $A(Pe_i) = PDP^{-1}Pe_i = PDe_i = P\lambda_i e_i = \lambda_i Pe_i$ ($De_i = \lambda_i e_i$)

T: Če so lastne vrednosti $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ različne, so pripadajoči lastni vektorji $v_1, \dots, v_m$ linearno neodvisni.

P: Če $\dim V = n$ in $\mathcal{A}$ ima n paroma različnih lastnih vrednosti $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ se da diagonalizirati.

KARAKTERISTIČNI IN MINIMALNI POLINOM

Za λ obstaja lastni vektor $\Leftrightarrow \ker(A - \lambda I) \neq \{0\} \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$ ($A - \lambda I$ ni obrnljiva)

$\Delta_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ je karakteristični polinom matrike A.

Ima stopnjo $n = \dim A$, vodilni koeficient $(-1)^n$. Ničle $\Delta_A(\lambda)$ so natanko lastne vrednosti endomorfizma $\mathcal{A}$. Definicija je dobra, ker imata podobni matriki (pripadata istemu $\mathcal{A}$) enak

karakteristični polinom.

Odslej gledamo $V=\mathbb{C}$, ker ima po **osnovnem izreku algebre** vsak nekonstanten polinom s kompleksnimi koef. ničlo v $\mathbb{C}$.

$\Delta_A(\lambda) = a_n(\lambda-\lambda_1)^{k_1}\cdot(\lambda-\lambda_2)^{k_2}\cdots(\lambda-\lambda_m)^{k_m}$, $\lambda_1,\dots,\lambda_m \in \mathbb{C}$ vse različne lastne vrednosti za A. $\sigma(A)=\{\lambda_1,\dots,\lambda_m\}$ je **spekter** matrike A.

Število k_i je red ničle oz. **algebraična večkratnost** l. vr. λ_i.

Vsaj za eno lastno vrednost sta geometrična in algebraična večkratnost različni $\Leftrightarrow$ A se ne da diagonalizirati.

Cayley-Hamilton: Vsaka kvadratna matrika je ničla svojega karakterističnega polinoma: $\Delta_A(A)=0$. — matrika samih ničel

Torej za vsako matriko A obstaja vsaj en polinom, katerega ničla je A.

Med njimi poiščemo tistega, ki je najmanjše možne stopnje in ima vodilni koeficient enak 1, to je **minimalni polinom, $m_A(x)$.**

T: $m_A(x)$ je za matriko A enolično določen. Č je $p(A)=0$, potem $m_A(x)$ deli $p(x)$, tj. minimalni polinom deli vse polinome, katerih ničla je A. Zato $m_A(x) \mid \Delta_A(x)$.

T: Podobni matriki imata enak minimalni polinom.

Vse ničle minimalnega polinoma so ničle Δ_A, saj $m_A \mid \Delta_A$. Pa tudi:

T: Vsaka ničla karakterističnega polinoma je tudi ničla minimalnega polinoma matrike A.

$m_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{l_1}(\lambda-\lambda_2)^{l_2}\cdots(\lambda-\lambda_m)^{l_m}$, kjer $1\le l_i\le k_i$ ← pri $\Delta_A(\lambda)$

JORDANOVA MATRIKA ENDOMORFIZMA

Imamo $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\Delta_{\mathcal{A}}(\lambda) = (-1)^n (\lambda-\lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda-\lambda_k)^{n_k}$ in $m_{\mathcal{A}}(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda-\lambda_k)^{m_k}$, $1 \le m_j \le n_j$.

Vektorski podprostor $W \le V$ je **invarianten** za $\mathcal{A}$, če za vsak $x \in W$ velja $\mathcal{A}x \in W$. Vedno sta invariantna $\{0\}$ in cel V. Invarianten je tudi vsak **korenski podprostor** endomorfizma $\mathcal{A}$, tj. $W_i = \ker(\mathcal{A}-\lambda_i I)^{m_i}$. W_i je jedro preslikave, zato je res vektorski podprostor, vsebuje lastni podprostor za lastno vrednost λ_i in velja $(\mathcal{A}-\lambda_i I)^{m_i} x = 0 \Rightarrow (\mathcal{A}-\lambda_i I)^{m_i} \mathcal{A}x = \mathcal{A}(\mathcal{A}-\lambda_i I)^{m_i} x = \mathcal{A}0 = 0$, torej je invarianten.

Z dolgim dokazom se pokaže, da je $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_k$ (direktna vsota). $W_i \cap W_j = \{0\}\ \forall i,j$. Obstaja taka baza prostora V, da lahko $\mathcal{A}$ zapišemo kot $\begin{bmatrix} \boxed{A_1} & & & 0 \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \boxed{A_3} & \\ 0 & & & \ddots\ \boxed{A_k} \end{bmatrix}$.
To je bločno diagonalna matrika, zdaj pa pogledamo en posamezen blok, ki pripada lastni vrednosti λ_i. Baza za A je torej unija baz za A_i. Tudi Δ_A in m_A se „razcepita", ker je $\det A = \det A_1 \cdots \det A_k$. Zato $\Delta_{A_i}(\lambda) = (-1)^{n_i}(\lambda-\lambda_i)^{n_i}$, $m_{A_i}(\lambda) = (\lambda-\lambda_i)^{m_i}$, $A_i \in \mathbb{C}^{n_i \times n_i}$

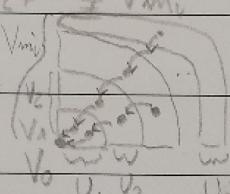
Zdaj pogledamo blok A_i z lastno vrednostjo λ_i in $m_{A_i}(\lambda) = (\lambda-\lambda_i)^{m_i}$. Oznaka $B = \mathcal{A}_i - \lambda_i I$. B je **nilpotent** z indeksom m_i, to pomeni, da $B^{m_i} = 0$ in $B^{m_i-1} \neq 0$ (primer $m_i = 1$ smo izvzeli, ker je tedaj vsak vektor baze za W_i lastni vektor in je $\mathcal{A}_i$ diagonalna $\begin{bmatrix} \lambda_i & & \\ & \lambda_i & \\ & & \ddots\ \lambda_i \end{bmatrix}^{n_i}$)
možno zapisati kot
v bazi lastnih vektorjev

Res je $B^{m_i}=0$, saj je A_i ničla svojega minimalnega polinoma $m_{A_i}(\lambda)=(\lambda-\lambda_i)^{m_i}$ in $m_{A_i}(A_i)=(A_i-\lambda_i I)^{m_i}=B^{m_i}=0$.

Označimo podprostore $V_j=\ker B^j$, torej $V_0=\{0\}$, $V_1=\{$lastni podprostor za l. vr. $\lambda_i\}, \dots, V_{m_i}=W_i$. Če je $x\in V_j$, je $Bx\in V_{j-1}$.

T: Naj bo $\{v_1,\dots,v_k\}$ lin. neodv. v V_j in $\mathrm{Lin}\{v_1,\dots,v_k\}\cap V_{j-1}=\{0\}$, tj. $v_1,\dots,v_k$ se z B^{j-1} ne slikajo v 0, z B^j pa se. Sedaj je $\{Bv_1,\dots,Bv_k\}$ lin. neodv. podmn. V_{j-1} in $\mathrm{Lin}\{Bv_1,\dots,Bv_k\}\cap V_{j-2}=\{0\}$, tj. Bv_1 se z B^{j-2} ne slika v 0 (saj se v_1 z B^{j-1} tudi ne).

P: $\{0\}=V_0\subsetneq V_1\subsetneq V_2\subsetneq\dots\subsetneq V_{m_i}=W_i$. To zaporedje podprostorov res strogo narašča.



Posamezen „pas" na sliki imenujemo U_j in dobimo $W_i=U_1\oplus U_2\oplus\dots\oplus U_{m_i}$. Unija baz za U_j-je je baza W_i. Uredimo jo tako, da je najprej lastni vektor $v_1^{(1)}$, potem vektor $v_1^{(2)}$, ki ga B preslika v $v_1^{(1)}$, ..., vektor $v_1^{(m_i)}$, ki ga B^{m_i-1} slika v $v_1^{(1)}$, nato lastni vektor $v_2^{(1)}, \dots$

$\{0\} \xleftarrow{B} v_1^{(1)} \xleftarrow{B} v_1^{(2)} \xleftarrow{B} \dots \xleftarrow{B} v_1^{(m_i)}$

itd. V tej bazi zapišemo matriko za B takole $\longrightarrow$

$$\begin{bmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{matrix} & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{matrix}} & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & 0 \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

Spomnimo se $B=A_i-\lambda_i I$, zato $A_i=B+\lambda_i I$, torej

$$J(A_i)=\begin{bmatrix} \begin{matrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{matrix} & & \\ & \boxed{\begin{matrix} \lambda_i & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & \lambda_i \end{matrix}} & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{} \end{bmatrix},$$

kar je Jordanov blok za A_i. Jordanova celica je blok z lastno vrednostjo λ_i na diagonali in 1 na „naddiagonali". Celice po dogovoru razvrstimo padajoče po velikosti. Jordanova kanonična forma je

$$\begin{bmatrix} \boxed{J(A_1)} & & & & \\ & \boxed{J(A_2)} & & & \\ & & \boxed{J(A_3)} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \boxed{J(A_k)} \end{bmatrix}$$

, za vsako l. vr. en $J(A_i)$, v posameznem $J(A_i)$ je toliko celic, kot je lastnih vektorjev za l. vr. λ_i. Velikost največje celice je m_i je večkratnost ničle λ_i v minimalnem polinomu $m_A(\lambda)$.

za vsak $A\in\mathcal{L}(V)$ obstaja in je enolična do vrstnega reda blokov $J(A_i)$.

SKALARNI PRODUKT IN NORMA

Skalarni produkt $V \times V \to \mathbb{F}$ ($\mathbb{F}$ je $\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$), $(x,y) \mapsto \langle x,y \rangle$ z lastnostmi $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x,z \rangle + \beta \langle y,z \rangle$, $\langle x,x \rangle \geq 0$ in $\langle x,x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $\langle x,y \rangle = \overline{\langle y,x \rangle}$. T: $\langle x,0 \rangle = \langle 0,x \rangle = 0$, $\langle x, y+z \rangle = \langle x,y \rangle + \langle x,z \rangle$, $\langle x, \alpha y \rangle = \bar{\alpha} \langle x,y \rangle$. $\mathbb{R}$ s skalarnim produktom je **evklidski** prostor, $\mathbb{C}$ s skal. prod. pa **unitaren** prostor.

Primer: $\langle x,y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$, $\langle f,g \rangle = \int_a^b f(x) g(x)\, dx$, $\langle x,y \rangle = x_1 \bar{y}_1 + \dots + x_n \bar{y}_n$ na $\mathbb{C}^n$.

trik. neen

Norma $\|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle}$. $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Pitagorov izrek: če $\langle x,y \rangle = 0$, je $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+y\|^2$.

Razdalja $d(x,y) = \|x-y\|$. $d(x,y) \geq 0$ in $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, $d(x,y) = d(y,x)$, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Cauchy, Schwartz, Bunjakovski: $|\langle x,y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, enakost $\Leftrightarrow$ x, y sta lin. odvisna

D: $\langle \alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y \rangle = \alpha \bar{\alpha} \langle x,x \rangle + \alpha \bar{\beta} \langle x,y \rangle + \beta \bar{\alpha} \langle y,x \rangle + \beta \bar{\beta} \langle y,y \rangle =$

$\alpha = \langle y,y \rangle$, $\beta = -\langle x,y \rangle$ $\quad = \langle y,y \rangle \langle y,y \rangle \langle x,x \rangle - \langle x,y \rangle \langle y,y \rangle \langle y,x \rangle = \langle y,y \rangle (\|x\|^2 \|y\|^2 - |\langle x,y \rangle|^2)$

in to je več ali enako 0. Vemo $\|y\| \geq 0$, zato je $\|y\| = 0$ ali $|\langle x,y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, kar pa drži tudi v primeru $\|y\| = 0$.

- Nad $\mathbb{R}$ iz CBS sledi $-1 \leq \frac{\langle x,y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1$, zato obstaja enoličen $\varphi \in [0, \pi]$, da je $\cos \varphi = \frac{\langle x,y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$, kar je usklajeno z $\langle x,y \rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos \varphi$.

x in y sta pravokotna, kadar $\langle x,y \rangle = 0$. $M \subseteq V$ je **ortogonalna** množica, če za vsak $x, y \in M$ velja $x \perp y$, če

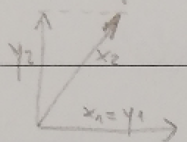
$\leftarrow$ pravokotna kadarkoli

ne vsebuje vektorja 0, je linearno neodvisna. $M \subseteq V$ je **ortonormirana**, kadar je ortogonalna in so vsi vektorji v njej dolgi 1, tj. $\|x\| = 1$. V n-razsežnem v.p. V je lahko moči največ n.

GRAM-SCHMIDTOVA ORTOGONALIZACIJA

Iz množice $\{x_1, \dots, x_m\}$ linearno neodvisnih vektorjev delamo množico $\{y_1, \dots, y_m\}$, kjer so vsi y_i med sabo pravokotni. To se dela postopno.

$$y_k = x_k - \alpha_1 y_1 - \alpha_2 y_2 - \dots - \alpha_{k-1} y_{k-1}$$



$$y_2 = x_2 - \alpha y_1 \quad / \langle \cdot, y_1 \rangle$$

$$\overbrace{\langle y_2, y_1 \rangle}^{0} = \langle x_2, y_1 \rangle - \alpha \langle y_1, y_1 \rangle$$

$$\alpha = \frac{\langle x_2, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle}$$

$$\boxed{y_k = x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle x_k, y_j \rangle}{\langle y_j, y_j \rangle} y_j}$$

Res za $\forall i,j$ $y_i \perp y_j$. Velja $\mathrm{Lin}\{x_1, \dots, x_m\} = \mathrm{Lin}\{y_1, \dots, y_m\}$. D: vsak x_i je lin. komb. vektorjev y_i in obratno.

Vsak končnorazsežen v. pr. V s skalarnim produktom ima ortonormirano bazo.

$W^\perp = \{x \in V;\ x \perp y \text{ za } \forall y \in W\}$ ortogonalni komplement množice W

Če je W podprostor, je $V = W \boxplus W^\perp$ direktna ortogonalna vsota.

Če je $x = x_1 + x_2$, kjer je $x_1 \in W$ in $x_2 \in W^\perp$, je x_1 **pravokotna projekcija** vektorja x na podprostor W, je enolična (direktnost vsote).

T: Če je $\{v_1, \dots, v_n\}$ ortonormirana baza prostora V in $x \in V$, $y \in V$, je $x = \underbrace{\langle x, v_1 \rangle}_{\alpha_1} v_1 + \underbrace{\langle x, v_2 \rangle}_{\alpha_2} v_2 + \dots + \underbrace{\langle x, v_n \rangle}_{\alpha_n} v_n$ in $\langle x, y \rangle = \langle x, v_1 \rangle \cdot \overline{\langle y, v_1 \rangle} + \dots + \langle x, v_n \rangle \overline{\langle y, v_n \rangle}$, saj $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \quad / \langle \cdot, v_k \rangle \rightarrow \langle x, v_k \rangle = \alpha_k$.

- P je **projektor** na W vzdolž $W^\perp$ oz. pravokotni projektor, če je $P: V \rightarrow V$, $x \mapsto \sum_{i=1}^{m} \langle x, v_i \rangle v_i$, pri čemer je $\{v_1, \dots, v_m\}$ ONB za W in $\{v_{m+1}, \dots, v_n\}$ ONB za $W^\perp$. $\mathrm{im}\, P = W$, $\ker P = W^\perp$, $P^2 = P$, $P \in \mathcal{L}(V)$.

ADJUNGIRANA PRESLIKAVA

Znamo linearne funkcionale $\varphi_y : V \to \mathbb{F}$, $\varphi_y(x) = \langle x, y \rangle$, torej $\varphi_y \in V^*$.
Velja $\varphi_y = \varphi_z \Leftrightarrow y = z$.

Rieszov izrek o reprezentaciji: Za vsak $\varphi \in V^*$ obstaja natanko en $y \in V$, da je $\varphi = \varphi_y$: $\varphi(x) = \langle x, y \rangle$ za $\forall x \in V$.

D: $\{v_1, \dots, v_n\}$ ON baza, torej $x = \sum_{j=1}^{n} \langle x, v_j \rangle v_j$. $\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} \langle x, v_j \rangle v_j\right) =$
$= \sum_{j=1}^{n} \langle x, v_j \rangle \varphi(v_j) = \sum_{j=1}^{n} \langle x, v_j \cdot \overline{\varphi(v_j)} \rangle = \langle x, \sum_{j=1}^{n} v_j \overline{\varphi(v_j)} \rangle \Rightarrow y = \sum_{j=1}^{n} \overline{\varphi(v_j)} v_j$.

• Zdaj si pa zamislimo endomorfizem $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ in funkcional $\varphi(x) = \langle \mathcal{A}x, y \rangle$ za neki $y \in V$. Kako bi to zapisali kot $\langle x, z \rangle$?
z je neka funkcija vektorja y; označimo jo $\mathcal{A}^*$, torej $\varphi(x) = \langle x, \mathcal{A}^* y \rangle$.
$\mathcal{A}^* \in \mathcal{L}(V)$, saj $\langle x, \mathcal{A}^*(y_1 + y_2) \rangle = \langle \mathcal{A}x, y_1 \rangle + \langle \mathcal{A}x, y_2 \rangle = \langle x, \mathcal{A}^* y_1 \rangle + \langle x, \mathcal{A}^* y_2 \rangle$
in $\langle x, \mathcal{A}^* \alpha y \rangle = \langle \mathcal{A}x, \alpha y \rangle = \bar{\alpha} \langle \mathcal{A}x, y \rangle = \bar{\alpha} \langle x, \mathcal{A}^* y \rangle = \langle x, \alpha \mathcal{A}^* y \rangle$.

$\langle \mathcal{A}x, y \rangle = \langle x, \mathcal{A}^* y \rangle$, $\mathcal{A}^*$ je hermitsko adjungirani endomorfizem endomorfizma $\mathcal{A}$.

Lastnosti: $\langle x, \mathcal{A}y \rangle = \langle \mathcal{A}^* x, y \rangle$, $\mathcal{A}^{**} = (\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$, $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$,
$(\alpha \mathcal{A})^* = \bar{\alpha} \mathcal{A}^*$, $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^* \mathcal{A}^*$, $\mathcal{O}^* = \mathcal{O}$, $\mathcal{I}^* = \mathcal{I}$. $\langle \mathcal{E}_1 x, y \rangle = \langle \mathcal{E}_2 x, y \rangle \Rightarrow \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$.

Kako dobimo matriko za $\mathcal{A}^*$ v ONB $\{v_1, \dots, v_n\}$, če je $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$ za $\mathcal{A}$: Zapišemo $\mathcal{A}v_j = a_{1j} v_1 + \dots + a_{nj} v_n$, to skalarno množimo z v_i: $\langle \mathcal{A}v_j, v_i \rangle = a_{1j} \underbrace{\langle v_1, v_i \rangle}_{=0 \text{ če } 1 \neq i} + \dots + a_{nj} \langle v_n, v_i \rangle = a_{ij} \cdot \underbrace{1}_{= \langle v_i, v_i \rangle}$
Torej $\langle \mathcal{A}v_j, v_i \rangle = a_{ij}$. $b_{ij} = \langle \mathcal{A}^* v_j, v_i \rangle = \langle v_j, \mathcal{A}v_i \rangle = \overline{\langle \mathcal{A}v_i, v_j \rangle} = \overline{a_{ji}}$.
Matrika za $\mathcal{A}^*$ je $\bar{A}^T = A^H$, kar imenujemo **hermitska transponiranka** (transponiranje in konjugiranje).

NORMALNI, (SEBIADJUNGIRANI) IN UNITARNI ENDOMORFIZMI

$\mathcal{A}$ **normalen:** $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$ $\overset{\Longleftrightarrow}{\text{oz.}}$ $\langle \mathcal{A}x, \mathcal{A}x \rangle = \langle \mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*x \rangle$.

Lastnosti: $\|\mathcal{A}x\| = \|\mathcal{A}^*x\|$, $\ker \mathcal{A} = \ker \mathcal{A}^*$, $\mathcal{A} - \lambda I$ je normalen za $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ oz. $\mathbb{C}$, $\mathcal{A}x = \lambda x \Leftrightarrow \mathcal{A}^*x = \bar{\lambda}x$, če $\mathcal{A}x = \lambda x$ in $\mathcal{A}y = \mu y$ za $\lambda \neq \mu$, je $\langle x, y \rangle = 0$.

T: Lastni podprostori za različne lastne vrednosti so si med seboj pravokotni.

I: Naj bo $\mathcal{A}$ normalen endomorfizem na V. Če je V kompleksen ali če je realen in ima $\Delta_{\mathcal{A}}(\lambda)$ vse ničle realne, se da $\mathcal{A}$ diagonalizirati v ON-bazi. T: $U \leq V$ invarianten za $\mathcal{A} \Leftrightarrow U^{\perp} \in V$ invarianten za $\mathcal{A}^*$.

Matrike: A normalna $\Leftrightarrow AA^H = A^HA$. Vsaka normalna kompleksna matrika je unitarno podobna diagonalni. Če je realna in so vse lastne vrednosti realne, je ortogonalno podobna diagonalni:

$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$; $\{P^{(1)}, \dots, P^{(n)}\}$ je ON-baza v $\mathbb{C}$ oz. $\mathbb{R}$.

Ker je ON, velja $\langle P^{(i)}, P^{(j)} \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0; & i \neq j \\ 1; & i = j \end{cases}$, zato $P^HP = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} = I = PP^H$, P unitarna oz. v $\mathbb{R}$ z realnimi ničlami $\Delta_A(\lambda)$ $P^TP = PP^T = I$, P ortogonalna matrika.

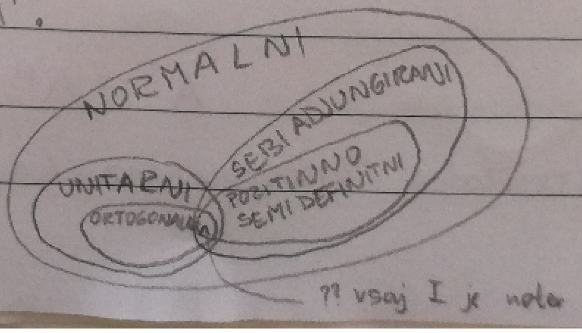
$\mathcal{A}$ **unitaren:** $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A} = id$ oz. ekvivalentno $\langle \mathcal{A}x, \mathcal{A}y \rangle = \langle x, y \rangle$.

Zato je $\mathcal{A}$ izometrija: $\|\mathcal{A}x\| = \|x\|$, vse lastne vrednosti imajo $|\lambda| = 1$.

Primeri v $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$: zasuki, zrcaljenja. Za ON bazo $\{v_1, \dots, v_n\}$ je tudi $\{\mathcal{A}v_1, \dots, \mathcal{A}v_n\}$ ON-baza. Matrike $AA^H = A^HA = I$ in $A^{-1} = A^H$ oz. $A^TA = AA^T = I$ oz. $A^{-1} = A^T$.

$\langle \mathcal{A}x, \mathcal{A}y \rangle = \langle x, y \rangle$

$\mathcal{A}$ avtomorfizem V, ohranja dolžine in kote. Unitarni endomorfizmi tvorijo grupo za kompozitum.



$\mathcal{A}$ sebi adjungiran: $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$ oz. dv. $\langle \mathcal{A}x, y\rangle = \langle x, \mathcal{A}y\rangle$.

$\Rightarrow$ Lastne vrednosti so realne, vse ničle $\Delta_{\mathcal{A}}(\lambda)$ so realne.

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$: če $A = A^H$, je A **hermitska** matrika.

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$: če $A = A^T$, je A **simetrična** matrika.

I: Sebi adjungiran endomorfizem se da diagonalizirati v ONB, hermitska matrika je unitarno podobna diagonalni, realna simetrična matrika je ortogonalno podobna diagonalni. (to dvoje sledi iz tega, da velja za vse normalne, torej tudi za sebi adj.).

POZITIVNO DEFINITNI ENDOMORFIZMI IN MATRIKE

$\mathcal{A}$ pozitivno semidefiniten: $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ in $\langle \mathcal{A}x, x\rangle \geq 0$ za $\forall x \in V$

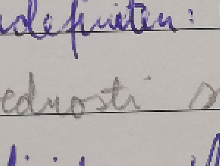
$\Leftrightarrow$ oz. vse lastne vrednosti so nenegativne ($\operatorname{sp} A \subset [0, \infty)$).

$\mathcal{A}$ pozitivno definiten: $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ in $\langle \mathcal{A}x, x\rangle > 0$ za $\forall x \in V \setminus \{0\}$

$\Leftrightarrow$ oz. vse lastne vrednosti so pozitivne ($\operatorname{sp} A \subset (0, \infty)$).

Pogoji, da je simetrična matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pozitivno definitna:

- vse lastne vrednosti so pozitivne
- $\Delta_A(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + (-1)^n\lambda^n = (-1)^n(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\dots(\lambda-\lambda_n) =$
  $= (-1)^n\left(\lambda^n - (\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)\lambda^{n-1} + \left(\sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j\right)\lambda^{n-2} - \dots + (-1)^n\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n\right)$

  pogoj: $a_0, a_1, \dots, a_n$ alternirajo po predznaku, tudi $(-1)^k a_k > 0$.
- $\det A > 0$ in 

$\det A_k > 0$ za vsak k

Opomba: $\mathcal{A}$ je negativno (semi)definiten, če je $-\mathcal{A}$ pozitivno (semi)definiten.
$\langle \mathcal{A}x, x\rangle (\leq) < 0$

BILINEARNI IN KVADRATNI FUNKCIONALI

$B: V \times W \to \mathcal{F}$ je **bilinearen funkcional**, kadar velja $B(\lambda x + \mu y, z) = \lambda B(x,z) + \mu B(y,z)$ in $B(x, \lambda z + \mu w) = \lambda B(x,z) + \mu B(x,w)$.

Tu se ukvarjamo le s primerom $\mathcal{F} = \mathbb{R}$. Bazi za V in W: $\{e_1, \dots, e_n\}$, $\{f_1, \dots, f_m\}$. Lahko zapišemo $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ in $y = \sum_{j=1}^{m} y_j f_j$. Potem je $B(x,y) = B(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{m} y_j f_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j B(e_i, f_j)$, označimo $B(e_i, f_j) = a_{ij} \rightsquigarrow A \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$\rightsquigarrow B(x,y) = [x_1, \dots, x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_m \end{bmatrix} = x^T A y$ oz. $B(x,y) = \langle x, Ay \rangle = \langle A^T x, y \rangle$.

B zožimo na $K: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, obakrat vzamemo isti x in dobimo:

Kvadratni funkcional ali **kvadratna forma** je preslikava $K(x) = B(x,x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Vedno lahko najdemo tako matriko A, da je $B(x) = \langle Ax, x \rangle$ in je A simetrična.

D: $K(x) = B(x,x) = x^T A x$ in $\langle \frac{1}{2}(A + A^T)x, x \rangle = \frac{1}{2}\langle Ax, x \rangle + \frac{1}{2}\langle A^T x, x \rangle =$
$= \frac{1}{2}\langle Ax, x \rangle + \frac{1}{2}\langle x, Ax \rangle \overset{\text{v } \mathbb{R}}{=} \langle Ax, x \rangle$. Za vsak A je $\frac{1}{2}(A + A^T)$ simetrična.

Drug zapis kvadratne forme: $K(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j$

Simetrična matrika je podobna diagonalni $Q^T A Q = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, kjer je Q ortogonalna. $y = Q^T x$, $x = Qy$: $K_A(x) = \langle AQy, Qy \rangle = \langle Q^T A Q y, y \rangle = K_D(y) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$.

Dodamo še $R = \text{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}}, -\frac{1}{\sqrt{\lambda_{p+1}}}, \dots, -\frac{1}{\sqrt{\lambda_{p+q}}}, 1, \dots, 1\right)$, p št. pozitivnih lastnih vr., q št. negativnih l. vr.

$\underbrace{R^T Q^T}_{P^T} A \underbrace{Q R}_{P} = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0)$, če smo v D lastne vrednosti razporedili, da so najprej pozitivne, potem negativne, potem 0.

Def: Matrika $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je **kongruentna** matriki $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, kadar obstaja taka obrnljiva $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, da je $B = P^T A P$. **Sylvestrov izrek:**

Vsaka realna simetrična matrika je kongruentna matriki oblike
$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & -1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$ p je št. pozitivnih l. vr., q pa negativnih.
Tedaj $y = P^T x$ in $K(y) = y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_{p+q}^2 + 0 + \dots + 0$