INDUKCIJA

Peanovi aksiomi: $\mathbb{N}$ je množica skupaj s pravilom, ki vsakemu naravnemu številu n priredi njegovega naslednika $n^+ \in \mathbb{N}$ in velja

1) za vse $m, n \in \mathbb{N}$ in $m^+ = n^+$ sledi $m = n$
2) obstaja naravno število $1 \in \mathbb{N}$, ki ni naslednik nobenega naravnega števila
3) AKSIOM POPOLNE INDUKCIJE: naj bo $A \subseteq \mathbb{N}$ in naj bo $1 \in A$. Če velja: če za poljuben $n \in A$ sledi tudi $n^+ \in A$, potem je $A = \mathbb{N}$.

Krepka verzija indukcije (ki pa je ekvivalentna):
$1 \in A$ in če za polj. $n \in A$ velja, če je $1, 2, \dots, n \in A$, potem je $n^+ \in A$, potem je $A = \mathbb{N}$.

Z indukcijo dokazujemo, da neka trditev velja za vsa naravna števila. Dokažemo, $\underbrace{\text{da velja za 1}}_{\text{baza indukcije}}$ in da če $\underbrace{\text{velja za } n}_{\text{indukcijska predpostavka}}$, velja tudi za $n+1$.

$n \to n+1$ je indukcijski korak $\Rightarrow$ velja za $\forall n \in \mathbb{N}$

Primer: Dokaži, da je $4^n - 3n + 8$ deljivo z 9 za vsak $n \in \mathbb{N}$.

$n = 1$: $4^1 - 3 \cdot 1 + 8 = 9$ ✓ $n \to n+1$: i.p.: $4^n - 3n + 8 = 9k$, $k \in \mathbb{N}$

$4^{n+1} - 3(n+1) + 8 = 4 \cdot 4^n - 3n - 3 + 8$ $\quad\to 4^n = 9k - 8 + 3n$

$= 4(9k - 8 + 3n) - 3n + 5 = 9 \cdot 4k - 32 + 12n - 3n + 5 = 9(4k + n - 3)$ ✓

OBSEG REALNIH ŠTEVIL, POLNOST

Za + in · je ($\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$) Abelova grupa: asoc., komut., enota, nasprotni element (za · je grupa, če izvzamemo 0). To so aksiomi A1–A8.

A9: 0 in 1 sta različni števili (enota za + in za · sta različni).

A10: Distributivnost $(a+b)\cdot c = ac + bc$

A11: Urejenost → urejen obseg: $a \in A \setminus \{0\} \Rightarrow$ eno od a in $-a$ je pozitivno, eno pa negativno, 0 ni niti pozitivno niti negativno število.

A12: Za $\forall a, b \in A$ velja: če sta a in b pozitivni, sta tudi $a+b$ in $a \cdot b$ poz.

$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n};\ m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$, $\frac{m}{n} = \frac{k}{l} \Leftrightarrow m \cdot l = k \cdot n$

$\mathbb{Q}$ je povsod gosta množica: na vsakem nepraznem odprtem intervalu leži vsaj eno racionalno število.

Samo $\mathbb{Q}$ ima na številski premici luknje: rešitev enačbe $x^2 = 2$, $x > 0$, ni racionalno število ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$). D: Recimo, da je $x = \frac{m}{n}$ okrajšan ulomek. $(\frac{m}{n})^2 = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow m^2$ je sodo in m je sodo, $m = 2l$. $(2l^2) = 2n^2 \Rightarrow 2l^2 = n^2 \Rightarrow n^2$ je sodo $\Rightarrow n$ je sodo $\rightarrow\leftarrow$ $\frac{m}{n}$ je bil okrajšan.

Dedekindov rez: podmnožica $\mathbb{Q}$, $A \neq \emptyset$, $A \neq \mathbb{Q}$, če je $p \in A$, so tudi vsi manjši v A, za vsak $p \in A$ obstaja vsaj eno večje rac. št. $q > p$, ki je v A (ni maksimuma).

A13 (Dedekindov aksiom): Vsaka neprazna navzgor omejena podmnožica ima natančno zgornjo mejo (supremum). A13 ne velja za $\mathbb{Q}$, ← supremum lahko ni v $\mathbb{Q}$, je pa v $\mathbb{R}$. velja pa za množico rezov, ki postane $\mathbb{R}$. **Poln urejen obseg** zadošča aksiomom A1–A13. **$\mathbb{R}$ je poln urejen obseg.**

Arhimedska lastnost: a, b pozitivni realni števili. Obstaja $n \in \mathbb{N}$, da je $n \cdot a > b$.

ŠTEVILSKA ZAPOREDJA

Zaporedje a_n je preslikava iz $\mathbb{N}$ v $\mathbb{R}$. Navzgor omejeno: $\exists M \in \mathbb{R}.\ a_n \leq M\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Zaporedje a_n konvergira proti $a \in \mathbb{R}$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $|a_n - a| < \varepsilon$ za vse $n \geq n_0$. Število a je limita zaporedja, tj. $a = \lim_{n \to \infty} a_n$. Od nekega člena dalje vsi členi ležijo v **ε-okolici** limite, zunaj te okolice jih je končno mnogo.

· Limita je ena sama ali pa je ni (takrat je zaporedje divergentno).

Konvergentno zaporedje je omejeno. **Stekališče** zaporedja je število s, če v vsaki okolici s leži neskončno členov zaporedja. → dovolj je en člen, potem zmanjšamo okolico..

(Obstaja bijekcija $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}$ lahko „oštevilčimo", to zaporedje ima ∞ stekališč. → vsak $x \in \mathbb{R}$ je stekališče)

Vsako omejeno zaporedje ima stekališče. **Monotono zaporedje** je bodisi naraščajoče bodisi padajoče. T: Monotono zaporedje je konvergentno natanko tedaj, ko je omejeno.

Če je a_n konvergentno, je konvergentno tudi vsako njegovo podzaporedje.

$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$ (tudi $-$, $\cdot$, λa_n, za $a_n \neq 0$ in $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ tudi $\frac{1}{a_n}$, $\frac{b_n}{a_n}$), pogoj, a_n in b_n sta konvergentni.

Izrek o sendviču: Za zaporedja, $a_n < b_n < c_n$ za $\forall n \in \mathbb{N}$. Če sta a_n in c_n konvergentni zaporedji z isto limito, je tudi b_n konvergentno z isto limito.

1. $[a_n, b_n]$ zaporedje vloženih intervalov, $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. Tedaj je natanko ena točka $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$.

Cauchyjev pogoj: za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vsaka $m, n \geq n_0$ velja $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Zaporedje je Cauchyjevo (izpolnjuje Cauchyjev pogoj) natanko tedaj, ko je konvergentno. (To velja za $a_n \in \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$, ne pa $\mathbb{Q}$, ker ni poln.)

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$; $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =: e$; $\lim \frac{n^\alpha}{q^n} = 0$ za $q > 1, \alpha \in \mathbb{R}$ (eksponentna funkcija narašča hitreje kot vsak polinom).

$\limsup_{n\to\infty} a_n$ je največje stekališče zaporedja a_n.

ŠTEVILSKE VRSTE

Številska vrsta: $a_1+a_2+a_3+\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Zaporedje delnih vsot: $s_1=a_1,\ s_2=a_1+a_2, \ldots, s_n = a_1+\ldots+a_n, \ldots$

Če zaporedje delnih vsot konvergira, vrsta konvergira in $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s = \lim_{n\to\infty} s_n$. Cauchyjev pogoj: Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira $\Leftrightarrow$ za vsak $\varepsilon>0$ obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vsak $n \geq n_0$, $n\in\mathbb{N}$, in vsak $k \in \mathbb{N}$ velja $|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+k}| < \varepsilon$.

· Geometrijska vrsta $\sum_{n=0} aq^n$ konvergira $\Leftrightarrow |q|<1$. Tedaj $\sum_{n=0} aq^n = \frac{a}{1-q}$.

T: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna $\Rightarrow$ a_n konvergentno z $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Za konvergentni vrsti $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergirajo tudi $\sum c\cdot a_n = c\sum a_n$, $+$, $-$. → množenje pa le za abs. konv. vrste

· Harmonična vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira. $1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots \geq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergira za $p>1$, za $p\leq 1$ pa divergira.

Primerjalni kriterij: za vrsti z nenegativnimi členi naj velja $0 \leq a_n \leq b_n$. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira.

Kvocientni, korenski, Raabejev kriterij za vrste s pozitivnimi členi: $d_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, $c_n = \sqrt[n]{a_n}$, $r_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$, izračunamo limito enega od teh zap. Če je $d>1$, $c>1$ ali $R<1$, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira, če $d<1$, $c<1$ ali $R>1$, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira. Pri $\lim = 1$ ne dobimo odgovora.

T: Če $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergira, konvergira tudi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in rečemo, da absolutno konvergira. Def: Če $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, ne pa tudi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv. pogojno.

Leibnizev kriterij za alternirajoče vrste: a_n padajoče zaporedje pozitivnih števil z limito 0 $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergira in $a_m \geq$ vsota "repa" $\left|\sum_{n=m}^{\infty} (-1)^n a_n\right|$.

Absolutno konvergentni vrsti se vsota ne spremeni, če vrstni red členov premešamo.
Pogojno konvergentno vrsto lahko premešamo tako, da dobimo vsoto $-\infty$, ∞ ali karkoli $\in \mathbb{R}$.

ELEMENTARNE FUNKCIJE, ZVEZNOST, LIMITA

$D \subseteq \mathbb{R}$ Realna funkcija realne spremenljivke je preslikava $f: D \to \mathbb{R}$

Za funkcijo moramo podati definicijsko območje in predpis.

Injektivni funkciji f lahko priredimo inverz $f^{-1}: Z_f \to \mathbb{R}$.

$x \in D_f$ je ničla funkcije f, če je $f(x) = 0$.

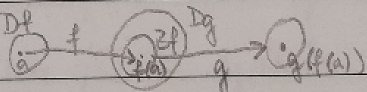
Zveznost: „majhna sprememba x povzroči majhno spremembo $f(x)$".

Funkcija $f: D \to \mathbb{R}$ je zvezna v točki $a \in D$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za vsak $x \in D$, $|x-a| < \delta$ sledi $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Ekvivalentno: če za vsako okolico V točke $f(a)$ obstaja okolica U točke a, da velja $f(U) \subset V$.

Funkcija $f: D \to \mathbb{R}$ je zvezna v točki $a \in D$ natanko tedaj, ko za vsako zaporedje x_n v D, ki konvergira proti a, zaporedje $f(x_n)$ konvergira proti $f(a)$.

$f, g: D \to \mathbb{R}$ zvezni v $a \in D$ $\Rightarrow$ v a so zvezne tudi $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, če $g(a) \neq 0$, tudi $\frac{f}{g}$. Č



, f, g zvezni v a oz. $f(a)$ $\Rightarrow$ $g \circ f$ zvezna v a.

Funkcija $f: D \to \mathbb{R}$ je zvezna funkcija, če je zvezna v vsakem $a \in D$.

Funkcija $f: D \to \mathbb{R}$ je **enakomerno zvezna** na D, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za vsaki točki $x, x' \in D$, $|x - x'| < \delta$ velja $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. Isti δ je dober na celem D.

T: Če je $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna, je enakomerno zvezna na $[a,b]$.

Dokaže se prek leme o pokritjih - zaprt interval je kompakten.

Lastnosti zveznih funkcij:

Bisekcija: f zvezna na $[a,b]$, v a in b ima različen predznak ($f(a)f(b)<0$) $\Rightarrow$ obstaja ničla $c \in [a,b]$, $f(c)=0$.

1. Zvezna f je na zaprtem intervalu $[a,b]$ omejena, doseže $\inf_{[a,b]} f$ in $\sup_{[a,b]} f$, torej minimum m in maksimum M, doseže pa tudi vse vrednosti vmes, tj. za vsak $c \in [m, M]$ obstaja $x_c \in [a,b]$, da je $f(x_c)=c$.

Če je f na $[a,b]$ strogo monotona in zvezna, je f^{-1} zvezna funkcija.

Elementarne funkcije so funkcije, ki jih dobimo iz osnovnih tipov funkcij (polinomi, racionalne funkcije, koreni, eksponentne funkcije, trigonometrične funkcije) z uporabo aritmetičnih operacij, komponiranja in invertiranja.

Elementarne funkcije so zvezne, kjer so definirane.

Naj bo $f: (a-r, a+r) \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ (f definirana na prebodeni okolici točke a). **Število L je limita funkcije f, ko gre x proti a, če za vsak $\varepsilon>0$ obstaja $\delta>0$, da za vsak $x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$ velja $|f(x)-L|<\varepsilon$.** Oznaka $L = \lim_{x \to a} f(x)$.

T: f definirana v a. f zvezna v a $\Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ (limita obstaja in je enaka $f(a)$).

Naj bosta f,g: (prebodena okolica točke a) $\to \mathbb{R}$ in obstajata $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a} g(x)$. Obstajajo $\lim_{x\to a}(f+g)(x)$, $-$, $\cdot$ in se „normalno" računa. Če $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$, tudi $\frac{f}{g}$.

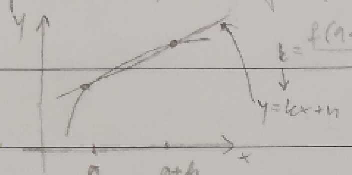
Leva, desna limita, če obstajata in sta enaki, obstaja limita. Limite v ∞...

f: (prebodena okolica a) $\to \mathbb{R}$ izpolnjuje **Cauchyjev pogoj** pri a, če za $\forall \varepsilon>0 \; \exists \delta>0$, da za $\forall x, x' \in (a-\delta, a+\delta)\setminus\{a\}$ velja $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$.

AN1 - 4

ODVOD IN DIFERENCIAL FUNKCIJE

Naj bo funkcija f definirana v okolici točke a. Če obstaja $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, jo imenujemo **odvod** funkcije f v točki a, $f'(a)$, pravimo, da je f odvedljiva v točki a. $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$



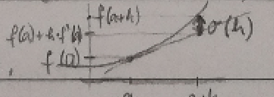
ko gre h proti 0, iz sekante dobimo tangento

1: Če je f v a odvedljiva, je v a zvezna. Obratno ni nujno.

D: $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \left(f(a) + \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)\right) = \lim_{x\to a} f(a) + \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot \lim (x-a) = f(a) + f'(a)\cdot 0$.

Funkcija f je odvedljiva na (a,b), če je odvedljiva v vsaki točki iz (a,b). Odvod kot funkcija: f definirana na intervalu I in odvedljiva v vsaj nekaj točkah: $I' = \{x \in I, f \text{ odvedljiva v } x\}$. Funkcija $f': I' \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$ je **odvod funkcije f.** f zvezno odvedljiva na I pomeni: f odvedljiva na I in f' je zvezna funkcija. $C^1(I)$ je množica vseh zvezno odvedljivih funkcij na I.

Diferencial Funkcija f, definirana v okolici a, je **diferenciabilna** v točki a, če obstaja linearna preslikava $\mathcal{L}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, za katero velja $f(a+h) - f(a) = \mathcal{L}(h) + \sigma(h)$, kjer je $\lim_{h\to 0} \frac{\sigma(h)}{h} = 0$. $\mathcal{L} = df(a)$ je diferencial funkcije f v točki a. f v a „dobro" aproksimiramo s premico („linearno" funkcijo).



$f(a+h) = f(a) + h\cdot f'(a) + \sigma(h)$,

$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \to \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - h\cdot f'(a)}{h} = 0$ $\quad \sigma(h) := f(a+h) - f(a) - h\cdot f'(a)$

1: f diferenciabilna v a $\Leftrightarrow$ f odvedljiva v a. Velja $\underbrace{df(a)_{,} h}_{\text{lin. funkcija na argumentu } h} = f'(a)\cdot h$

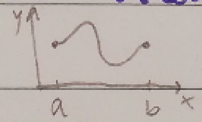
$(x^r)' = r x^{r-1}$, $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $(a^x)' = a^x \ln a$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

Pravila za odvajanje $(+, -, \lambda f$, $(fg)' = f'g + fg'$, $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$, $(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$, $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $f^{-1}(f(x)) = x$ / $'$)

ROLLOV IN LAGRANGEEV IZREK

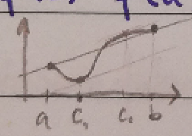
T: V lokalnem ekstremu c odvedljive funkcije f je odvod enak 0. $f'(c)=0$. Def: Če je $f'(c)=0$, je c **stacionarna točka**.

Rollov izrek: Naj bo $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ zvezna funkcija, odvedljiva na (a,b) in $f(a)=f(b)$. Potem obstaja $c\in(a,b)$, da velja $f'(c)=0$.



D: f zvezna na $[a,b]$, zato doseže minimum in maksimum, označimo x_m in x_M točki, kjer sta dosežena. Če $f(x_m)=f(x_M)$, je f konstantna in je $f'(x)=0$ na celem (a,b). Če $f(x_m)\neq f(x_M)$, vsaj ena od x_m, x_M ni krajišče (označimo to točko s c). Tam ima f lok. ekstrem, torej je $f'(c)=0$. ∎

Lagrangev izrek: „Obstaja tangenta, ki je vzporedna sekanti."
Naj bo $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ zvezna funkcija, odvedljiva na (a,b). Potem obstaja taka točka $c\in(a,b)$, da velja
$f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)$. Obstaja c, da je $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$



D: Uporaba Rollovega izreka za $F(x)=f(x)-f(a)+d\cdot(x-a)$.
$F(a)=0$, $F(b)=f(b)-f(a)+d\cdot(x-a)$. Če izberemo $d=-\frac{f(b)-f(a)}{x-a}$, je $F(b)=0$. Obstaja $c\in(a,b)$, da $F'(c)=0$. $F'(x)=f'(x)+d$
$\Rightarrow f'(c)=-d=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ∎

UPORABA ODVODOV PRI ANALIZI FUNKCIJ

Naraščanje/padanje: $f'(x) \geq 0$ na I $\Leftrightarrow$ f je naraščajoča na I

$f'(x) > 0$ na I $\Rightarrow$ f je strogo naraščajoča na I.

Ekstremi: $f'\ -\searrow\nearrow +$ (c) c je minimum, če je pred c $f' \leq 0$, potem $f' \geq 0$

Na $[a,b]$ poiščemo stacionarne točke. Določimo vrednosti v krajiščih a in b in v stac. točkah $\rightsquigarrow$ globalni min. in maks.

(če f ni povsod odvedljiva, dodamo še točke, v katerih ni odv.)

Drugi odvod je v lok. min. pozitiven, v lok. maksimumu pa negativen (za dvakrat odvedljivo f v okolici stac. točk)

Konveksnost / konkavnost x^2 je konveksna funkcija

f na I je konveksna, če za vsaki točki $a,b \in I$ velja $f(x) \leq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)$ za vse $x \in [a,b]$. Geometrijsko: f je konveksna, če graf na $[a,b]$ leži pod daljico skozi $(a,f(a))$, $(b,f(b))$: $(a,f(a))$ $(b,f(b))$

- f konkavna $\Leftrightarrow$ $-f$ konveksna
- f odvedljiva na I: f konveksna $\Leftrightarrow$ f' naraščajoča

  f dvakrat odvedljiva na I: f konveksna $\Leftrightarrow$ $f''(x) \geq 0$ za $\forall x \in I$

Prevoj je taka točka na grafu, da je na eni strani prevoja graf konveksen, na drugi pa konkaven.

Odvod uporabljamo pri risanju grafov funkcij

L'Hopitalovo pravilo Če imamo $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ ali $\frac{\infty}{\infty}$, lahko števec in imenovalec odvajamo in je $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, če le desna limita obstaja in $g'(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ okoli a.

Npr $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{LP}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = 1$

NEDOLOČENI INTEGRAL

Če poznamo f', bi radi dobili f.

Naj bo $f: I \to \mathbb{R}$. **Primitivna funkcija** funkcije f (če obstaja), je taka odvedljiva funkcija $F: I \to \mathbb{R}$, za katero je $F' = f$ na I.

- Če je F primitivna funkcija za f, so natanko $G(x) = F(x) + C$ tudi primitivne funkcije za f. (To velja na intervalu!!! Sicer so lahko različne konstante.)

Nedoločeni integral funkcije f je skupek vseh njenih primitivnih funkcij. Oznaka $\int f(x)dx$.

- Vsaka zvezna funkcija ima primitivno funkcijo. (Dokaz menda kasneje)

funkcija	x^n $n \neq -1$	$\frac{1}{x}$	a^x	e^x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\frac{1}{x^2+1}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}$
primitivna funkcija	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{\ln a} a^x$	e^x	$-\cos x$	$\sin x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\arctan x$	$\arcsin x$	$\ln(x + \sqrt{x^2 \pm 1})$

- $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$, $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$
- $\int F'(x)dx = F(x) + C$

Nova spremenljivka: $\int (f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$, če je F primitivna od f in so definicijska območja ustrezna, je $F \circ g$ primitivna od $(f \circ g) \cdot g'$.

D: $\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int f(t)dt = F(t) + C = F(g(x)) + C$

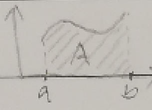
$t = g(x)$ $\quad dt = g'(x)dx$ $\qquad$ oz. $(F \circ g)'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$

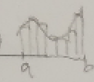
Per partes: $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$ (f, g morata biti odvedljivi na I.) oz $\int u dv = uv - \int v du$

D: $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. V praksi delamo tako, da za dv vzamemo tisto, kar je enostavno integrirati, za u pa tisto, kar se pri odvajanju (po možnosti) poenostavi.

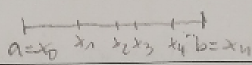
DOLOČENI (RIEMANNOV) INTEGRAL

Uvod

[Ocenjujemo ploščino območja pod grafom. 

Interval $[a,b]$ razdelimo na manjše intervale, na njih pa izberemo x in $f(x)$ 

]

Riemannov integral: Naj bo D delitev intervala $[a,b]$ množica $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ delilnih točk, za katere 

, $n \in \mathbb{N}$. Dolžino i-tega podintervala $[x_{i-1}, x_i]$ označimo z $\delta_i = x_i - x_{i-1}$. Velikost delitve D je dolžina najdaljšega podintervala v delitvi D: $\delta(D) = \max\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$. Na vsakem podintervalu izberemo testno točko $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ in s $T_D = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ označimo nabor testnih točk. Pravimo, da je nabor testnih točk T_D usklajen z delitvijo D, ker smo na vsakem podintervalu delitve D izbrali eno testno točko. **Riemannova vsota** funkcije $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, pridružena delitvi D in usklajeni izbiri testnih točk T_D, je

$$R(f, D, T_D) = \delta_1 \cdot f(t_1) + \delta_2 \cdot f(t_2) + \dots + \delta_n \cdot f(t_n) = \sum_{k=1}^{n} \delta_k \cdot f(t_k).$$

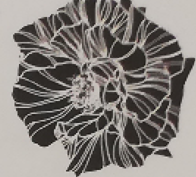
Riemannov ali določeni integral funkcije $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ je limita Riemannovih vsot, kjer limito vzamemo po vseh delitvah D intervala $[a,b]$ in po vseh usklajenih izbirah testnih točk T_D, ko gre velikost delitve $\delta(D)$ proti 0, če ta limita obstaja. Pišemo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{D, T_D, \delta(D) \to 0} R(f, D, T_D).$$

$I = \lim\limits_{D, T_D, \delta(D) \to 0} R(f, D, T_D)$ pomeni, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$ za vse delitve D, za katere velja $\delta(D) < \delta$, in za vsako usklajeno izbiro testnih točk T_D velja $|R(f, D, T_D) - I| < \varepsilon$.

$f(x) = \begin{cases} 0, & rac. \\ 1, & irac \end{cases}$

Obratno ni



T: Če je f Riemannovo integrabilna, je omejena. nujno.

Darbouxove vsote: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ omejena, D delitev, $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, $M_k = \sup f(x)$, $m_k = \inf f(x)$ na $[x_{k-1}, x_k]$, $M = \sup f(x)$, $m = \inf f(x)$ na $[a,b]$. Spodnja Darbouxova vsota je število $s(D) = \sum_{i=1}^{n} m_i \delta_i$, zg. pa $S(D) = \sum_{i=1}^{n} M_i \delta_i$.

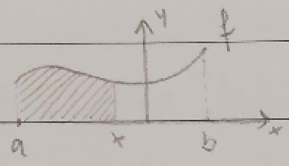
„Isto kot Riemannova vsota, le da testnih točk na podintervalu ne izbiramo poljubno. Izberemo tisto, ki da najmanjši oz. največji $f(x_i)$."

- Velja $s(D) \leq R(f, D, T_D) \leq S(D)$. Če delitvi D dodamo točke, se $s(D)$ poveča, $S(D)$ pa zmanjša (se približata). Vsaka spodnja je manjša od vsake zgornje Darb. vsote. $s = \sup\{s(D), D \text{ delitev}\}$, $S = \inf\{S(D), D \text{ delitev } [a,b]\}$. Velja $s \leq S$. Omejena funkcija $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ je **Darbouxovo integrabilna**, če je $s = S$, $s = S$ je Darbouxov („Derbujev") integral f na $[a,b]$.
- $s = S \Leftrightarrow$ za $\forall \varepsilon > 0$ obstaja delitev D, da $s(D) - S(D) < \varepsilon$. T: Vsaka zvezna $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ je Darb. integrabilna. Tudi monotona f na $[a,b]$, tudi odsekoma zvezna (s končno mnogo točk nezveznosti v katerih je skok) na $[a,b]$.

I: f omejena na $[a,b]$ je Riemannovo integrabilna, natanko tedaj, kadar je Darbouxovo integrabilna. Integrala sta enaka.

- T: f integrabilna na $[a,b]$, $Z_f = [m, M]$, g zvezna na $[m, M]$ $\Rightarrow g \circ f$ integrabilna na $[a,b]$.
- Lastnosti določenega integrala: $+, -$, množenje s skalarjem normalno, f, g integrabilni $\Rightarrow f \cdot g$ tudi, $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ (monotonost določenega integrala), $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$, aditivnost domene: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, $\int_a^a f(x)dx = 0$. Povprečna vrednost $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

OSNOVNI IZREK ANALIZE, OSNOVNI IZREK INTEGRALNEGA RAČUNA - LEIBNIZEVA FORMULA



Naj bo $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija. **Integral kot funkcija zgornje meje** je funkcija $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ s predpisom $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

Osnovni izrek analize: 1) Naj bo $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija. Tedaj je $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ zvezna na $[a,b]$.

2) Če je f zvezna funkcija v točki $x \in (a,b)$, je F v točki x odvedljiva in $F'(x) = f(x)$.

D: 1) f integrabilna, esto omejena: $|f(x)| \leq M$. $x, x' \in [a,b]$. $F(x) - F(x') = \int_a^x f(t)dt - \int_a^{x'} f(t)dt = \int_{x}^{x'} f(t)dt$ (recimo $x > x'$): $|F(x) - F(x')| = \left|\int_{x'}^{x} f(t)dt\right| \leq \int_{x'}^{x} |f(t)|\,dt \leq \int_{x'}^{x} M\,dt = M(x-x') < \varepsilon$ če $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ (podobno $x < x'$). Dobimo celo enakomerno zv., če $|x-x'| < \frac{\varepsilon}{M}$. ($\uparrow$ globalen M)

2) Naj bo f zvezna v x. $\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$ pocigavimo $= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)dt + \underbrace{\frac{1}{h}\int_x^{x+h}(f(t) - f(x))dt}_{\circledast} = f(x)\frac{1}{h}\int_x^{x+h} dt + \circledast = f(x)\frac{1}{h}\cdot h + \circledast$. $\circledast$ hočemo, da gre v 0, ko gre $h \to 0$. $|\circledast| \leq \frac{1}{|h|}\int_x^{x+h} \underbrace{|f(t) - f(x)|}_{<\varepsilon\text{, saj } t \text{ med } x \text{ in } x+h\text{, kar je } <\delta} dt \leq \frac{1}{|h|}\int_x^{x+h} \varepsilon\,dt = \frac{1}{h}\varepsilon h = \varepsilon$ ■

P: Vsaka zvezna funkcija na $[a,b]$ ima primitivno funkcijo na $[a,b]$. Natančneje: $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ je odvedljiva in $F'(x) = f(x)$, tj. F je primitivna funkcija od f.

Opomba: Nima pa vsaka integrabilna funkcija primitivne funkcije. Npr. funkcija, ki ima skok.

Osnovni izrek integralnega računa - Leibnizeva formula

Naj bo f taka integrabilna funkcija na $[a,b]$, ki ima na $[a,b]$ primitivno funkcijo F, tj. $F' = f$ na $[a,b]$. Potem velja Leibnizeva formula $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

D: • Če je f zvezna, je $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ njena primitivna funkcija. Potem je $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt - 0$. Če pa je G katerakoli druga primitivna funkcija, je $G(b) - G(a) = F(b) + \cancel{C} - (F(a) + \cancel{C}) = \int_a^b f(t)\,dt$

• V splošnem (f ni nujno zvezna): D delitev $[a,b]$, po Lagrangeevem izreku med x_{i-1} in x_i obstaja c_i, da velja $F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i)(x_i - x_{i-1}) \overset{F'=f}{=} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$. Pridelamo Riemannovo vsoto: $F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) = R(f, D, T_D)$

Velikost delitve pošljemo proti 0, $\delta(D) \to 0$ in $F(b) - F(a) \to I = \int_a^b f(x)\,dx$. ■

(Pri uvedbi nove spremenljivke v določen integral moramo spremeniti tudi meje: $\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt$

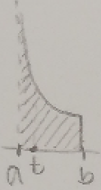
$t = \varphi(x)$ $\quad dt = \varphi'(x)\,dx$ $\quad t_a = \varphi(a)$, $t_b = \varphi(b)$

Pogoji: φ zvezno odvedljiva in f zvezna

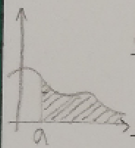
ali φ zvezno odvedljiva naraščajoča in f integrabilna na $[\varphi(a), \varphi(b)]$.

·Per partes: $\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = (f(x)g(x))\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$)

POSPLOŠENI INTEGRAL, OBSTOJ INTEGRALA

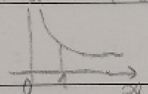


Pri polu: Funkcija $f: (a,b] \to \mathbb{R}$ naj bo integrabilna na vsakem intervalu $[t,b]$ za vsak $t \in (a,b)$. **Posplošeni integral** funkcije f na $[a,b]$ je $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \downarrow a} \int_t^b f(x)dx$, če ta limita obstaja (končna).



Na neomejenem intervalu: Naj bo $f: [a,\infty) \to \mathbb{R}$ integrabilna na vsakem $[a,s]$ za vsak $s>a$. Posplošeni integral funkcije f na $[a,\infty)$ je $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{s \to \infty} \int_a^s f(x)dx$, če ta limita (končna) obstaja.

I: Naj bo f integrabilna na $[a,t]$ za $\forall t \in (a,b)$. Če obstaja posplošeni integral $\int_a^b |f(x)|dx$, obstaja tudi $\int_a^b f(x)dx$. Absolutno popl. integrabilna $\Rightarrow$ popl. integrabilna.
Isto za f integrabilna na $[a,s]$ za $\forall s>a$. Če $\exists \int_a^\infty |f(x)|dx$, tudi $\int_a^\infty f(x)dx$.

- Konvergenca $\frac{1}{x^p}$  : $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ konvergira $\Leftrightarrow p>1$, $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ konvergira $\Leftrightarrow p<1$. Pri $p=1$ ne konvergira noben del.

D: $\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx = \lim_{t\downarrow 0} \int_t^1 \frac{1}{x^p}dx = \lim_{t\downarrow 0} \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_t^1 = \lim_{t\downarrow 0}\left(\frac{1}{1-p} - \frac{t^{1-p}}{1-p}\right) = \begin{cases} \frac{1}{1-p} ; & 1-p>0 \quad p<1 \\ \infty ; & 1-p<0 \quad p>1 \end{cases}$

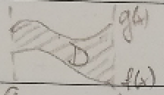
P: $\int_a^b \frac{f(x)}{(x-a)^s}dx$ konvergira za $s<1$. Če $s>1$ in je $f(x)$ stran od 0 pri a (da je s res „stopnja pola"), ta integral divergira. Podobno
za velika števila $\to \infty$
$\int_a^\infty \frac{g(x)}{x^\alpha}dx$ konvergira za $\alpha>1$ in divergira za $\alpha \leq 1$ in $g(x)$ stran od 0.

Integralski kriterij za konvergenco vrst: Naj bo $f:[1,\infty) \to \mathbb{R}$ monotono padajoča in nenegativna. Integral $\int_1^\infty f(x)dx$ konvergira natanko tedaj, ko konvergira $\sum_{n=1}^\infty f(n)$. 

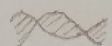
UPORABA INTEGRALA

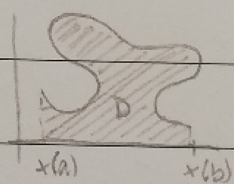
Dolžina poti: $t \in [a,b]$, $t \mapsto (x(t), y(t))$ je $l = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt$

Dolžina grafa $(x, f(x))$ je $\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$

Ploščina lika med grafoma 

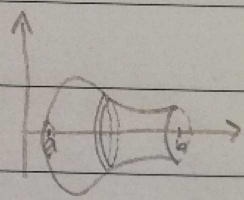
$pl(D) = \int_a^b (g(x) - f(x))\, dx$.

Č se grafa križata  $\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$ (moramo izračunati presečišča)

Ploščina območja, ki je dano s krivuljo 

$F: [a,b] \to \mathbb{R}^2$, t teče po $[a,b]$

$pl(D) = \int_a^b y(t)\, \dot{x}(t)\, dt$

Vrtenine (telo) in rotacijske ploskve (ploskev) 

Prostornina vrtenine $V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$

Površina rotacijske ploskve $P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$

AN1 - 9

FUNKCIJSKA ZAPOREDJA IN VRSTE, ENAKOMERNA KONVERGENCA

Funkcijsko zaporedje je $f_n: D \to \mathbb{R}$, f_n funkcija za vsak $n \in \mathbb{N}$, funkcijska vrsta je $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, kjer je u_n funkcijsko zaporedje.

Funkcijsko zaporedje f_n konvergira na D, če za $\forall x \in D$ konvergira številsko zaporedje $f_n(x)$, limitna funkcija: $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, tj. za vsak $x \in D$ in vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da za $\forall n \geq n_0$ velja $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Enakomerna konvergenca: „isti n_0 je dober za vse $x \in D$":
f_n konv. enakomerno na D proti f, če za $\forall \varepsilon > 0$ obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vsak $n \geq n_0$ velja $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ za vse $x \in D$. „To je strožje."

Naj bo $M_n = \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ enakom. na D $\Leftrightarrow$ M_n konv. proti 0. (številsko zap.)

$M_n < \varepsilon \Leftrightarrow$ graf funkcije f_n leži v ε pasu okrog grafa f.

- f_n enakomerno konvergentno $\Leftrightarrow$ enakomerno Cauchyjevo: za $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, da za vse $n, m \geq n_0$ in $\forall x \in D$ velja $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

I: $D \subseteq \mathbb{R}$, $\{f_n : D \to \mathbb{R}\}$. Če so f_n zvezne na D in $\{f_n\}$ enakomerno konvergentno na D proti f, je limitna funkcija f zvezna.

Primer $f_n(x) = x^n$ na $D = [0, 1]$  Navadna konvergenca ni dovolj.

Tudi glede integralov, lahko so integrali f_n vsi enaki A, integral f pa ne.

Konvergenca funkcijskih vrst: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konvergira po točkah, če za vsak $x \in D$ konvergira številska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ (zaporedje delnih vsot konv. po točkah).

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konv. enakom. na D (proti s), če funkcijsko zap. delnih vsot $s_k = \sum_{n=1}^{k} u_n$ konv. enakom. (proti s) na D.

Če so $u_n : D \to \mathbb{R}$ zvezne za $\forall n \in \mathbb{N}$ in $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konv. enakom. proti s, je s zvezna funkcija na D.

OBRNI

Weierstrasov M-test za enakomerno konvergenco funkcijskih vrst Imamo funkcijsko zaporedje u_n in številsko zaporedje c_n. Če je $|u_n(x)| \leq c_n$ za vsak $x \in D$ in je $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergentna številska vrsta, je enakomerno konvergentna na D tudi funkcijska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Če so u_n zvezne, je tudi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ zvezna na D.

ODVAJANJE IN INTEGRIRANJE FUNKCIJSKIH ZAPOREDIJ IN VRST

Pogoj za $\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b (\lim_{n \to \infty} f_n(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ je, da $\{f_n\}$ na $[a,b]$ proti f konvergira enakomerno.

Enakomerno konvergentno funkcijsko vrsto lahko členoma integriramo: u_n zvezne, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ enakomerno konvergentna

$$\Rightarrow \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b u_n(x)\,dx \right)$$

Pogoj za menjavo odvoda in limite: f_n odvedljive funkcije, $\{f_n'\}$ na $[a,b]$ enakomerno konv. k g in „konstante so dobro izbrane" $\rightarrow$ za en $c \in [a,b]$ konvergira zaporedje $\{f_n(c)\}$. Potem $\{f_n\}$ konv. enakomerno k f in velja $f'(x) = \lim_{n \to \infty} f_n'(x)$, vemo $f'(x) = (\lim_{n \to \infty} f_n(x))'$.

Kontraprimer: Zaporedje $f_n(x) = n$ ne konv., zaporedje odvodov $f_n'(x) = 0$ pa ja.

$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ za $\forall x \in [a,b]$ in $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konvergira enakomerno na $[a,b]$ pod pogoji: u_n zvezno odvedljive na $[a,b]$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'$ konvergira enakomerno na $[a,b]$, obstaja $c \in [a,b]$, da konv. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(c)$.

POTENČNE VRSTE

Potenčna vrsta s središčem $c \in \mathbb{R}$ je funkcijska vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$, kjer je a_n številsko zaporedje.

I: Obstaja $R \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$, da $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ konvergira in absolutno konvergira za vse x, ki so na $(c-R, c+R)$, če je $0<r<R$, pa na $[c-r, c+r]$ konvergira enakomerno. R je **konvergenčni polmer**. Na robu ne vemo, kako je s konvergenco.

Možnosti za izračun R: $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, če limiti obstajata, $\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ največje stekališče vedno obstaja. Tudi $\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}}$, $\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|}$

I: Naj bo $R>0$ konvergenčni polmer za $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$. Na $(c-R, c+R)$ je vsota te potenčne vrste zvezna, lahko jo členoma integriramo in členoma odvajamo in se R ohrani, in celo neskončnokrat odvedljiva.

$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n (x-c)^{n-1}$, $\int_c^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-c)^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-c)^{n+1}$

Taylorjeve vrste osnovnih funkcij

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ e^x, $\sin x$, $\cos x$ konv. na $\mathbb{R}$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^k$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$

$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n + \dots$ konv. na $|x|<1$, $\ln$ na $(0,2)$

$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots$ konv. na $|x|<1$

TAYLORJEVA FORMULA

Imamo polinom p, ki ga zapišemo v spremenljivki h: $p(a+h)=A_0+A_1h+A_2h^2+\dots+A_nh^n$. Izračunamo koeficiente tako, da bo v $h=0$ enak $p(a)$ in jih izrazimo z vrednostmi odvodov v točki a: $p(a)=A_0$, $p'(a)=A_1$, $p''(a)=2\cdot A_2 \Rightarrow A_2=\frac{p''(a)}{2}$, $p'''(a)=3\cdot 2\cdot A_3 \Rightarrow A_3=\frac{p^{(3)}(a)}{3!}$ ... $p(a+h)=p(a)+p'(a)h+\frac{p''(a)}{2!}h^2+\dots$

Želimo $p(x)$, $x=a+h \rightsquigarrow h=x-a$

$$p(x)=p(a)+p'(a)(x-a)+\frac{p''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{p^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3+\dots+\frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

n-ti Taylorjev polinom n-krat odvedljive funkcije f v okolici točke a je $T_{n,a}(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ in je $\approx f(x)$ blizu a, $f(x)=T_{n,a}(x)+R_{n,a}(x)$ = Tayl. polinom + ostanek

Taylorjev izrek: f (n+1)-krat odvedljiva na $\overset{odp}{I}$, $a\in I$. Za vsak $x\in I$ obstaja c med a in x, da velja $R_{n,a}(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$. Za izračun ostanka moramo torej malo stran od a pogledati (n+1)-ti odvod.

Taylorjeva vrsta: Če je f neskončnokrat odvedljiva, naredimo „neskončni polinom" vrsto $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ za tiste x, za katere vrsta konvergira (konvergenčno območje). Tudi, če konvergira, ni nujno enaka f. **Realno analitična funkcija** – njena Taylorjeva vrsta konvergira na I in je enaka f: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ za $x\in I$.

OBRNI