

Matematički fakultet
Univerzitet u Beogradu

SEMINARSKI RAD

Vojne bitke i zaseda

Bojan Bardžić, Lucija Miličić, Dimitrije Stamenić

Osnove matematičkog modeliranja

26.05.2022.

Profesor:
Dr Milan Dražić

Asistent:
Dr Zorica Dražić

1 Kontinualni model vojne bitke

Neka su u ratu suprotstavljene dve armije, A i B. Označimo brojnosti prve i druge vojske kroz vreme sa $A(t)$ i $B(t)$, a početne veličine tih armija sa A_0 i B_0 . Potrebno je pronaći vezu između $A(t)$, $B(t)$, A_0 i B_0 iz koje se dobija uslov pod kojim je bitka neodlučna ili pobeđuje jedna ili druga strana. Ako sa a označimo koeficijent ubojitosti druge vojske, a sa b koeficijent ubojitosti prve, dobijamo sledeći sistem linearnih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima:

$$\frac{dA}{dt} = -aB \quad (1)$$

$$\frac{dB}{dt} = -bA \quad (2)$$

gde je $t \in \mathbb{R}, t \geq 0$ proteklo vreme.

Podelimo jednačinu (1) jednačinom (2):

$$\frac{\frac{dA}{dt}}{\frac{dB}{dt}} = \frac{-aB}{-bA}$$

$$\frac{dA}{dB} = \frac{-aB}{-bA}$$

$$-bAdA = -aBdB$$

Integralimo obe strane poslednje jednačine:

$$-b \int AdA = -a \int BdB$$

$$-b \frac{A^2}{2} + c_1 = -a \frac{B^2}{2} + c_2$$

$$a \frac{B^2}{2} - b \frac{A^2}{2} = c$$

gde je $c = c_2 - c_1$ konstanta.

Za $t = t_0 = 0$ je $A(t_0) = A_0, B(t_0) = B_0$, pa mora da važi:

$$a \frac{B_0^2}{2} - b \frac{A_0^2}{2} = c$$

Dobijenu konstantu c vratimo u prethodno dobijenu jednačinu:

$$\begin{aligned} a \frac{B^2}{2} - b \frac{A^2}{2} &= a \frac{B_0^2}{2} - b \frac{A_0^2}{2} \\ bA^2 - aB^2 &= bA_0^2 - aB_0^2 \end{aligned} \quad (3)$$

Iz jednačine (3) možemo da primetimo da ako je $bA_0^2 > aB_0^2$, tada je A uvek pozitivno, pa vojska A ne može da izgubi. Za slučaj $bA_0^2 < aB_0^2$ važi suprotno, a u slučaju $bA_0^2 = aB_0^2$ bitka je neodlučna.

Da bismo dobili rešenje pocetnog sistema, diferenciramo (1) po t i dobijamo :

$$A'' = -aB'$$

Izrazimo B' preko (2):

$$A'' = abA$$

$$A'' - abA = 0$$

Ovako dobijamo linearnu diferencijalnu jednačinu drugog reda sa konstantnim koeficijentima. Rešavamo metodom karakterističnih funkcija: $d^2 - ab = 0$ i dobijamo sopstvene vrednosti:

$$d_1 = \sqrt{ab}, d_2 = -\sqrt{ab}$$

Sada znamo da je $A(t) = c_1 e^{\sqrt{ab}t} + c_2 e^{-\sqrt{ab}t}$.

Diferenciramo jednačinu po t i dobijamo sledeći sistem:

$$A(t) = c_1 e^{\sqrt{ab}t} + c_2 e^{-\sqrt{ab}t} \quad (4)$$

$$A'(t) = \sqrt{ab}c_1 e^{\sqrt{ab}t} - \sqrt{ab}c_2 e^{-\sqrt{ab}t} \quad (5)$$

Kako znamo da je $A(0) = A_0$ i $A'(0) = -aB_0$, rešavamo sistem za $t = 0$.

$$A_0 = c_1 + c_2$$

$$-aB_0 = \sqrt{ab}c_1 - \sqrt{ab}c_2$$

Proširivanjem prve jednačine sa \sqrt{ab} i dodavanjem drugoj dobijamo konstantu c_1 :

$$\sqrt{ab}A_0 - aB_0 = 2\sqrt{ab}c_1$$

$$c_1 = \frac{\sqrt{ab}A_0 - aB_0}{2\sqrt{ab}}$$

Zamenom c_1 u prvoj jednačini dobijamo i c_2 :

$$c_2 = \frac{\sqrt{ab}A_0 + aB_0}{2\sqrt{ab}}$$

Vraćanjem dobijenih vrednosti u jednačinu (4) izveli smo $A(t)$:

$$A(t) = \frac{\sqrt{ab} A_0 - aB_0}{2\sqrt{ab}} e^{\sqrt{ab} t} + \frac{\sqrt{ab} A_0 + aB_0}{2\sqrt{ab}} e^{-\sqrt{ab} t}$$

Analognim izvođenjem dobija se i $B(t)$:

$$B(t) = \frac{\sqrt{ab} B_0 - bA_0}{2\sqrt{ab}} e^{\sqrt{ab} t} + \frac{\sqrt{ab} B_0 + bA_0}{2\sqrt{ab}} e^{-\sqrt{ab} t}$$

U oba izraza desni sabirak teži ka 0 kada $t \rightarrow \infty$, dok levi sabirak teži ka $\pm\infty$ kada $t \rightarrow \infty$, pa od znaka koeficijenta u ovom sabirku zavisi ishod bitke.

Za početak posmatramo A . Ako je $\sqrt{ab} A_0 - aB_0 > 0$, tj. $bA_0^2 > aB_0^2$, onda je koeficijent uz $e^{\sqrt{ab} t}$ pozitivan, pa sledi da je A uvek pozitivno. Za B u tom slučaju važi da je $\sqrt{ab} B_0 - bA_0 < 0$, pa će u nekom trenutku t_k B_0 postati negativno i zaključujemo da pobeđuje A .

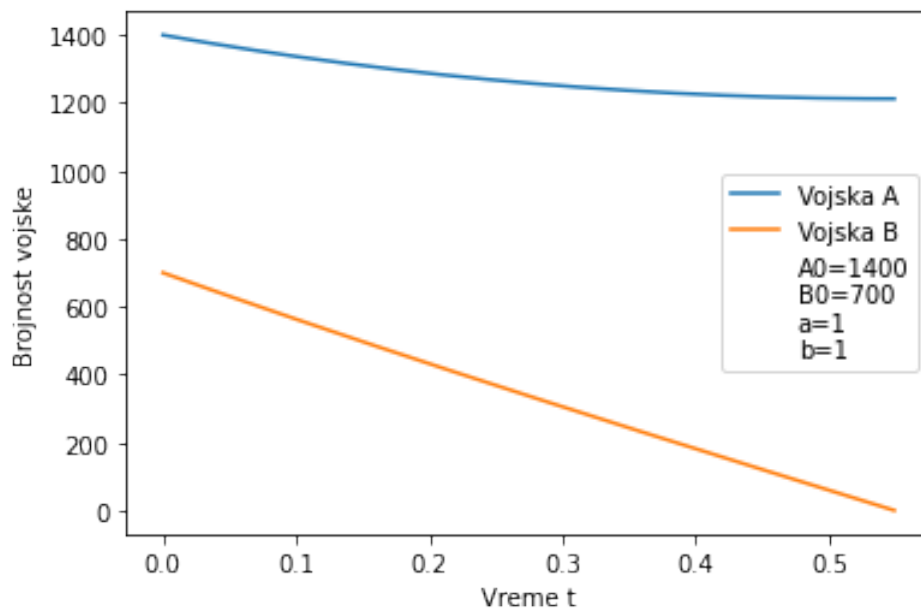
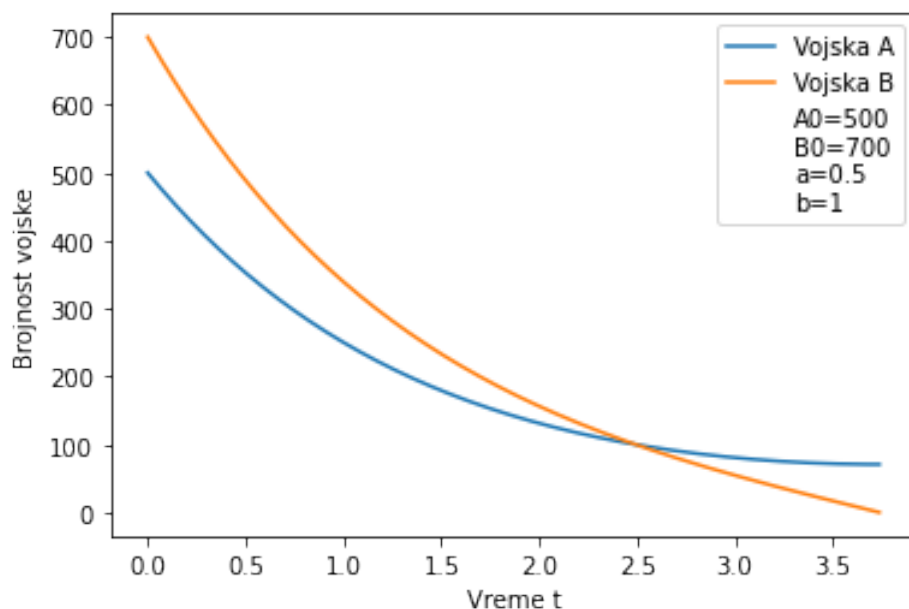
Za $bA_0^2 < aB_0^2$ važi suprotno i zaključujemo da u tom slučaju pobeđuje B .

Kada je $bA_0^2 = aB_0^2$, tada je koeficijent uz levi sabirak jednak nuli i za $A(t)$ i za $B(t)$, pa će obe funkcije opadati ka nuli za $t \rightarrow \infty$ i bitka je neodlučna.

Na sledećim dijagramima se mogu videti ishodi bitke u zavisnosti od različitih vrednosti početnih parametara a, b, A_0, B_0 .

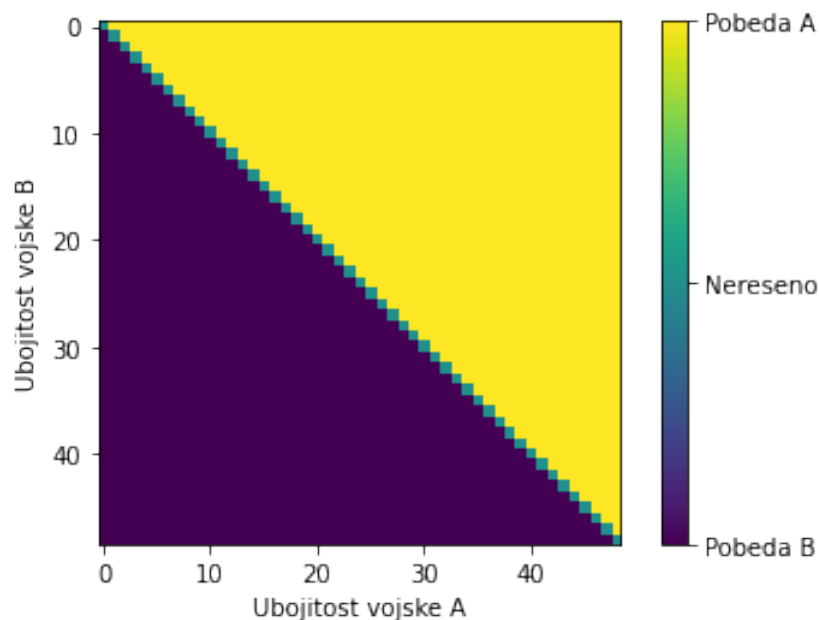
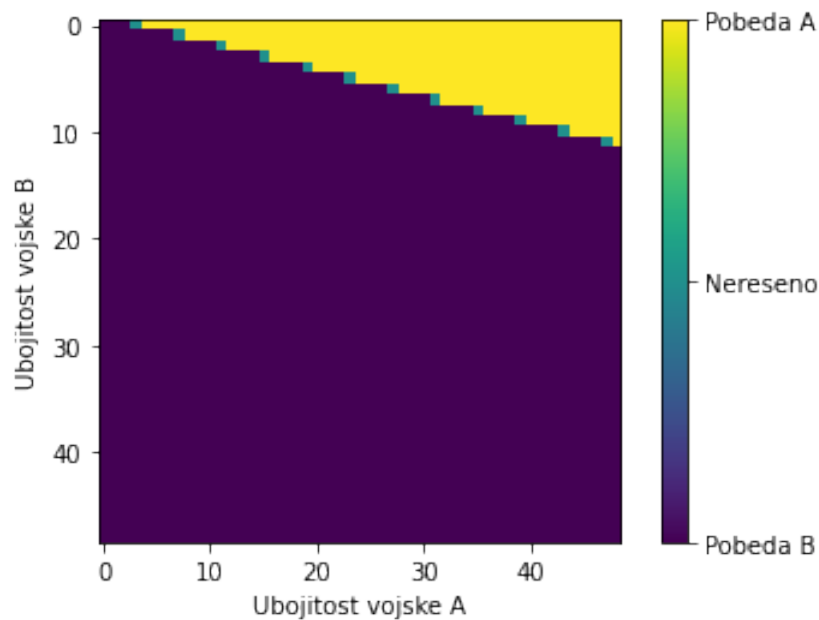
Prvi dijagram prikazuje da iako vojska A ima manju početnu brojnost, na kraju pobeđuje jer ima duplo veći koeficijent ubojitosti.

Drugi dijagram pokazuje značaj početne brojnosti vojske u slučaju jednakih koeficijenata ubojitosti.



Sledeća dva dijagrama prikazuju raspodelu ishoda bitke u zavisnosti od koeficijenata ubojitosti, gde žuta polja predstavljaju pobedu armije A, a ljubičasta armije B.

Prvi od ovih dijagrama prikazuje ishode za situaciju u kojoj armija A ima duplo manje vojnika, konkretno $A_0 = 500, B_0 = 1000$, dok je drugi dijagram za slučaj u kom je početni broj vojnika obe armije jednak 500.



2 Modifikovani model za slučaj zasede

Vojska B je koncentrisana na malom prostoru, pa je efikasnost paljbe vojske A proporcionalna i gustini neprijatelja B na tom malom prostoru, odnosno brojnosti vojske B.

$$\frac{dA}{dt} = -aB \quad (1)$$

$$\frac{dB}{dt} = -bAB \quad (2)$$

Iz jednačine (1) izrazimo B i uvrstimo u (2):

$$B = -\frac{1}{a}A'$$

$$B' = -bA\left(-\frac{1}{a}A'\right)$$

$$B' = \frac{b}{a}AA'$$

Diferenciranjem (1) po t i zamenom dobijenog izraza za B' dobijamo homogenu linearnu jednačinu drugog reda sa konstantnim koeficijentima:

$$\begin{aligned} A'' &= -aB' = -a\frac{b}{a}AA' \\ A'' + bAA' &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Ovu jednačinu resavamo uvođenjem smene: $u(A) = A'$, pa je

$$A'' = (u(A))' = u'(A)A' = u'(A)u$$

Zamenom u (3) dalje dobijamo:

$$u'u + bAu = 0$$

Delimo jednačinu sa u i koristimo $u' = \frac{du}{dA}$:

$$u' + bA = 0$$

$$u' = -bA$$

$$\frac{du}{dA} = -bA$$

$$du = -bAdA$$

Sada integralimo dobijenu jednačinu i zatim vraćamo smenu.

$$\int du = -b \int AdA$$

$$u = -b\frac{A^2}{2} + c_1$$

$$A' = -b\frac{A^2}{2} + c_1$$

Na ovaj način smo dobili diferencijalnu jednačinu prvog reda koju je dalje potrebno rešiti. Korišćenjem $A' = \frac{dA}{dt}$ i sređivanjem izraza dobijamo:

$$2\frac{dA}{dt} = 2c_1 - bA^2$$

$$2dA = (2c_1 - bA^2)dt$$

$$-\frac{dA}{bA^2 - 2c_1} = \frac{dt}{2}$$

Integralimo prethodnu jednačinu:

$$\int -\frac{dA}{bA^2 - 2c_1} = \int \frac{dt}{2}$$

Rešavanjem ovog integrala dobijamo :

$$-\frac{\ln\left(\frac{A - \sqrt{\frac{2c_1}{b}}}{A + \sqrt{\frac{2c_1}{b}}}\right)}{2\sqrt{\frac{2c_1}{b}}b} = \frac{t}{2} + c_2$$

Sređivanjem ovog izraza dobijamo jednačinu za $A(t)$:

$$A = \frac{2\sqrt{\frac{2c_1}{b}}}{c_2 e^{\sqrt{2c_1 b} t} - 1} + \sqrt{\frac{2c_1}{b}}$$

Označimo $\sqrt{\frac{2c_1}{b}}$ novom konstantom d_1 , tada je:

$$A = \frac{2d_1}{c_2 e^{d_1 b t} - 1} + d_1$$

Potrebno je još odrediti jednačinu za $B(t)$, a to možemo uraditi tako što ćemo diferencirati dobijeni izraz za A i zameniti ga u jednačini (1).

$$A' = -\frac{2bc_2 d_1^2 e^{d_1 b t}}{(c_2 e^{d_1 b t} - 1)^2}$$

$$B = \frac{2bc_2 d_1^2 e^{d_1 b t}}{a(c_2 e^{d_1 b t} - 1)^2}$$

Kako je $A(0) = A_0$ i $B(0) = B_0$, potrebno je rešiti sistem za $t = 0$.

$$A_0 = \frac{2d_1}{c_2 - 1} + d_1 = d_1 \frac{c_2 + 1}{c_2 - 1}$$

$$B_0 = \frac{2bc_2d_1^2}{a(c_2 - 1)^2}$$

Iz prve jednačine ovog sistema mozemo da izrazimo d_1 i zamenimo u drugoj jednačini.

$$B_0 = \frac{2bc_2\left(\frac{c_2-1}{c_2+1}\right)^2 A_0^2}{a(c_2 - 1)^2}$$

Skraćivanjem izraza se dobija:

$$B_0 = \frac{2bc_2 A_0^2}{a(c_2 + 1)^2}$$

Na ovaj način smo dobili jednačinu sa jednom nepoznatom koja se može rešiti za konkretne vrednosti početnih parametara:

$$B_0 c_2^2 + 2\left(B_0 - \frac{b}{a} A_0^2\right) c_2 + B_0 = 0$$

Zamenom nekih konkretnih vrednosti parametara, a zatim resavanjem jednačine dobijeni su sledeći dijagrami.

