Matematički fakultet
Univerzitet u Beogradu

SEMINARSKI RAD

Vojne bitke i zaseda

Bojan Bardžić, Lucija Miličić, Dimitrije Stamenić

Osnove matematičkog modeliranja

26.05.2022.

Profesor:
Dr Milan Dražić

Asistent:
Dr Zorica Dražić

1 Kontinualni model vojne bitke

Neka su u ratu suprotstavljene dve armije, A i B. Označimo brojnosti prve i druge vojske kroz vreme sa $A(t)$ i $B(t)$, a početne veličine tih armija sa A_0 i B_0. Potrebno je pronaći vezu između $A(t)$, $B(t)$, A_0 i B_0 iz koje se dobija uslov pod kojim je bitka neodlučna ili pobeđuje jedna ili druga strana. Ako sa a označimo koeficijent ubojitosti druge vojske, a sa b koeficijent ubojitosti prve, dobijamo sledeći sistem linearnih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima:

$$\frac{dA}{dt} = -aB \tag{1}$$

$$\frac{dB}{dt} = -bA \tag{2}$$

gde je $t \in \mathbb{R}, t \geqslant 0$ proteklo vreme.
Podelimo jednačinu (1) jednačinom (2):

$$\frac{\frac{dA}{dt}}{\frac{dB}{dt}} = \frac{-aB}{-bA}$$

$$\frac{dA}{dB} = \frac{-aB}{-bA}$$

$$-bAdA = -aBdB$$

Integralimo obe strane poslednje jednačine:

$$-b\int AdA = -a\int BdB$$

$$-b\frac{A^2}{2} + c_1 = -a\frac{B^2}{2} + c_2$$

$$a\frac{B^2}{2} - b\frac{A^2}{2} = c$$

gde je $c = c_2 - c_1$ konstanta.
Za $t = t_0 = 0$ je $A(t_0) = A_0, B(t_0) = B_0$, pa mora da važi:

$$a\frac{B_0^2}{2} - b\frac{A_0^2}{2} = c$$

Dobijenu konstantu c vratimo u prethodno dobijenu jednačinu:

$$a\frac{B^2}{2} - b\frac{A^2}{2} = a\frac{B_0^2}{2} - b\frac{A_0^2}{2}$$

$$bA^2 - aB^2 = bA_0^2 - aB_0^2 \tag{3}$$

Iz jednačine (3) možemo da primetimo da ako je $bA_0^2 > aB_0^2$, tada je A uvek pozitivno, pa vojska A ne može da izgubi. Za slučaj $bA_0^2 < aB_0^2$ važi suprotno, a u slučaju $bA_0^2 = aB_0^2$ bitka je neodlučna.

Da bismo dobili rešenje pocetnog sistema, diferenciramo (1) po t i dobijamo :

$$A'' = -aB'$$

Izrazimo B' preko (2):

$$A'' = abA$$

$$A'' - abA = 0$$

Ovako dobijamo linearnu diferencijalnu jednačinu drugog reda sa konstantnim koeficijentima. Rešavamo metodom karakterističnih funkcija: $d^2 - ab = 0$ i dobijamo sopstvene vrednosti:

$$d_1 = \sqrt{ab}, d_2 = -\sqrt{ab}$$

Sada znamo da je $A(t) = c_1 e^{\sqrt{ab}\,t} + c_2 e^{-\sqrt{ab}\,t}$.
Diferenciramo jednačinu po t i dobijamo sledeći sistem:

$$A(t) = c_1 e^{\sqrt{ab}\,t} + c_2 e^{-\sqrt{ab}\,t} \tag{4}$$

$$A'(t) = \sqrt{ab} c_1 e^{\sqrt{ab}\,t} - \sqrt{ab} c_2 e^{-\sqrt{ab}\,t} \tag{5}$$

Kako znamo da je $A(0) = A_0$ i $A'(0) = -aB_0$, rešavamo sistem za t = 0.

$$A_0 = c_1 + c_2$$

$$-aB_0 = \sqrt{ab}\, c_1 - \sqrt{ab}\, c_2$$

Proširivanjem prve jednačine sa $\sqrt{ab}$ i dodavanjem drugoj dobijamo konstantu c_1:

$$\sqrt{ab}\, A_0 - aB_0 = 2\sqrt{ab}\, c_1$$

$$c_1 = \frac{\sqrt{ab}\, A_0 - aB_0}{a\sqrt{ab}}$$

Zamenom c_1 u prvoj jednačini dobijamo i c_2:

$$c_2 = \frac{\sqrt{ab}\, A_0 + aB_0}{a\sqrt{ab}}$$

Vraćanjem dobijenih vrednosti u jednačinu (4) izveli smo $A(t)$:

$$A(t) = \frac{\sqrt{ab}\,A_0 - aB_0}{2\sqrt{ab}} e^{\sqrt{ab}\,t} + \frac{\sqrt{ab}\,A_0 + aB_0}{2\sqrt{ab}} e^{-\sqrt{ab}\,t}$$

Analognnim izvođenjem dobija se i $B(t)$:

$$B(t) = \frac{\sqrt{ab}\,B_0 - bA_0}{2\sqrt{ab}} e^{\sqrt{ab}\,t} + \frac{\sqrt{ab}\,B_0 + bA_0}{2\sqrt{ab}} e^{-\sqrt{ab}\,t}$$

U oba izraza desni sabirak teži ka 0 kada $t \to \infty$, dok levi sabirak teži ka $\pm\infty$ kada $t \to \infty$, pa od znaka koeficijenta u ovom sabirku zavisi ishod bitke.

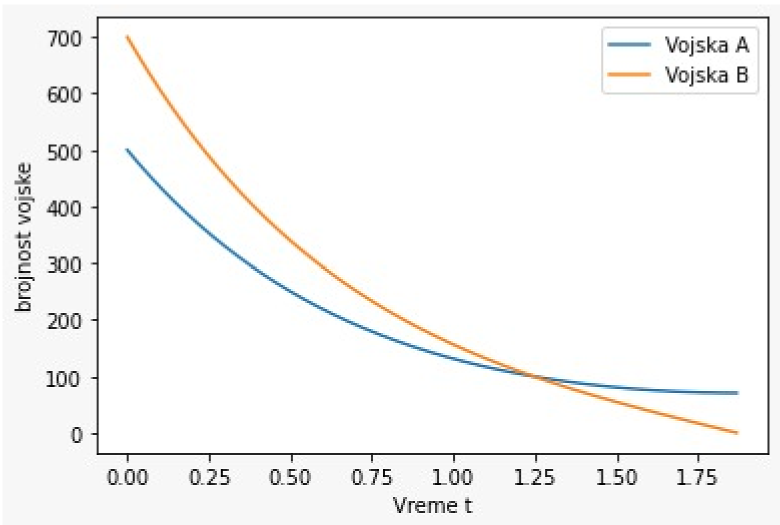
Za početak posmatramo A. Ako je $\sqrt{ab}\,A_0 - aB_0 > 0$, tj. $bA_0^2 > aB_0^2$, onda je koeficijent uz $e^{\sqrt{ab}\,t}$ pozitivan, pa sledi da je A uvek pozitivno. Za B u tom slučaju važi da je $\sqrt{ab}\,B_0 - bA_0 < 0$, pa će u nekom trenutku t_k B_0 postati negativno i zakljucujemo da pobedjuje A.

Za $bA_0^2 < aB_0^2$ važi suprotno i zaključujemo da u tom slučaju pobeđuje B.

Kada je $bA_0^2 = aB_0^2$, tada je koeficijent uz levi sabirak jednak nuli i za $A(t)$ i za $B(t)$, pa će obe funkcije opadati ka nuli za $t \to \infty$ i bitka je neodlučna.

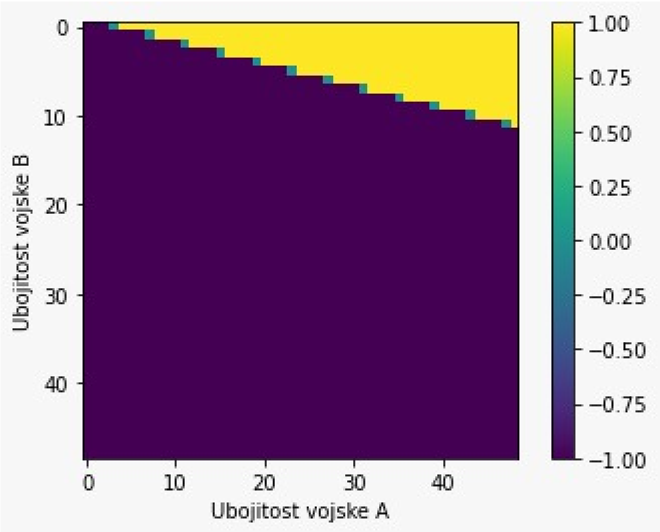
Na sledećim dijagramima se mogu videti ishodi bitke u zavisnosti od različitih vrednosti početnih parametara a, b, A_0, B_0.

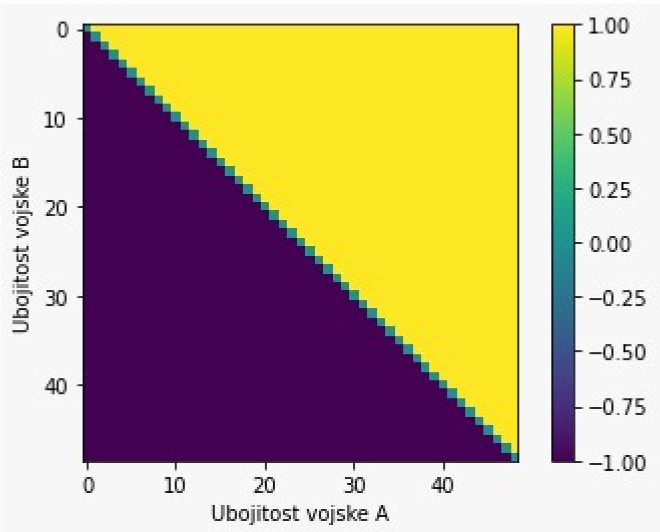
Prvi dijagram prikazuje da iako vojska A ima manju pocetnu brojnost, na kraju pobeđuje jer ima duplo veći koeficijent ubojitosti.



Sledeća dva dijagrama prikazuju raspodelu ishoda bitke u zavisnosti od koeficijenata ubojitosti, gde žuta polja predstavljaju pobedu armije A, a ljubičasta armije B.

Prvi od ovih dijagrama prikazuje ishode za situaciju u kojoj armija A ima duplo manje vojnika, konkretno $A_0 = 500, B_0 = 1000$, dok je drugi dijagram za slučaj u kom je početni broj vojnika obe armije jednak 500.





2 Modifikovani model za slučaj zasede

Vojska B je koncentrisana na malom prostoru, pa je efikasnost paljbe vojske A proporcionalna i gustini neprijatelja B na tom malom prostoru, odnosno brojnosti vojske B.

$$\frac{dA}{dt} = -aB \tag{1}$$

$$\frac{dB}{dt} = -bAB \tag{2}$$

Iz jednačine (1) izrazimo B i uvrstimo u (2):

$$B = -\frac{1}{a}A'$$

$$B' = -bA(-\frac{1}{a}A')$$

$$B' = \frac{b}{a}AA'$$

Diferenciranjem (1) po t i zamenom dobijenog izraza za B' dobijamo homogenu linearnu jednačinu drugog reda sa konstantnim koeficijentima:

$$A'' = -aB' = -a\frac{b}{a}AA'$$

$$A'' + bAA' = 0 \tag{3}$$

Ovu jednačinu resavamo uvođenjem smene: $u(A) = A'$, pa je

$$A'' = (u(A))' = u'(A)A' = u'(A)u$$

Zamenom u (3) dalje dobijamo:

$$u'u + bAu = 0$$

Delimo jednačinu sa u i koristimo $u' = \frac{du}{dA}$:

$$u' + bA = 0$$

$$u' = -bA$$

$$\frac{du}{dA} = -bA$$

$$du = -bAdA$$

Sada integralimo dobijenu jednačinu i zatim vraćamo smenu.

$$\int du = -b\int AdA$$

$$u = -b\frac{A^2}{2} + c_1$$

$$A' = -b\frac{A^2}{2} + c_1$$

Na ovaj način smo dobili diferencijalnu jednacinu prvog reda koju je dalje potrebno rešiti. Korišćenjem $A' = \frac{dA}{dt}$ i sređivanjem izraza dobijamo:

$$2\frac{dA}{dt} = 2c_1 - bA^2$$

$$2dA = (2c_1 - bA^2)dt$$

$$-\frac{dA}{bA^2 - 2c_1} = \frac{dt}{2}$$

Integralimo prethodnu jednačinu:

$$\int -\frac{dA}{bA^2 - 2c_1} = \int \frac{dt}{2}$$

Rešavanjem ovog integrala dobijamo :

$$-\frac{ln(\frac{A-\sqrt{\frac{2c_1}{b}}}{A+\sqrt{\frac{2c_1}{b}}})}{2\sqrt{\frac{2c_1}{b}}\,b} = \frac{t}{2} + c_2$$

Sređivanjem ovog izraza dobijamo jednačinu za $A(t)$:

$$A = \frac{2\sqrt{\frac{2c_1}{b}}}{c_2 e^{\sqrt{2c_1 b}\,t} - 1} + \sqrt{\frac{2c_1}{b}}$$

Potrebno je još odrediti jednačinu za $B(t)$, a to možemo uraditi tako što ćemo diferencirati dobijeni izraz za A i zameniti ga u jednačini (1).

$$A' = -\frac{4c_1 c_2 e^{\sqrt{2bc_1}\,t}}{(c_2 e^{\sqrt{2bc_1}} - 1)^2}$$

$$B = \frac{4c_1 c_2 e^{\sqrt{2bc_1}\,t}}{a(c_2 e^{\sqrt{2bc_1}} - 1)^2}$$

Kako je $A(0) = A_0$ i $B(0) = B_0$, potrebno je rešiti sistem za t = 0.

$$A_0 = \frac{2\sqrt{\frac{2c_1}{b}}}{c_2 - 1} + \sqrt{\frac{2c_1}{b}}$$

$$B_0 = \frac{4c_1 c_2}{a(c_2 e^{\sqrt{2bc_1}} - 1)^2}$$