La méthode spectrale basée sur les séries de Fourier discrètes

Présentation : Pablo Lucero
Rédaction : Lucile Favero

31 mars 2020

Pour pouvoir obtenir une méthode numérique réelle, nous devons approximer l'intégrale présente dans l'évaluation des coefficients de Fourier. Il convient d'utiliser dans ce but les séries de Fourier discrètes.

1 La méthode spectrale basée sur les séries de Fourier discrète

1.1 Transformée de Fourier discrète

Nous allons maintenant nous interesser aux séries de Fourier discrète. Pour cela faire, prenons une fonction 2π-périodique et un maillage avec les points

$$x_j = jh, \qquad h = \frac{2\pi}{n}, \qquad \text{pour } n \text{ pair.}$$

Supposons que l'on ne connaîsse que les valeurs de la fonction $u(x_j)$ dans l'ensemble des points du maillage, de telle sort que

$$u(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k e^{ikx}.$$

Il est alors clair que nous ne pouvons pas déterminer $u(x)$ de façon unique car enfin nous avons une infinité de valeurs u_k à déterminer avec une quantité finie de données $\{u(x_j)\}_{j=0}^{n-1}$.

Pour avoir unicité du système d'équations il convient de choisir

$$u(x_j) = \sum_{k=-n/2}^{n/2} \hat{u}_k e^{ikx_j}, \qquad j = 0, \dots, n-1. \tag{1}$$

On peut écrire cette expression sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} u(x_0) \\ \vdots \\ u(x_{n-1}) \end{pmatrix} = \sum_{k=-n/2}^{n/2} \hat{u}_k \begin{pmatrix} e^{ikx_0} \\ \vdots \\ e^{ikx_{n-1}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u(x_0) \\ \vdots \\ u(x_{n-1}) \end{pmatrix} = \hat{u}_{-n/2} \begin{pmatrix} e^{i(-n/2)x_0} \\ \vdots \\ e^{i(-n/2)x_{n-1}} \end{pmatrix} + \cdots + \hat{u}_{n/2} \begin{pmatrix} e^{i(n/2)x_0} \\ \vdots \\ e^{i(n/2)x_{n-1}} \end{pmatrix},$$

et en réarrangeant les termes on a

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u(x_0) \\ \vdots \\ u(x_{n-1}) \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}} = \underbrace{\begin{pmatrix} e^{i(-n/2)x_0} & \dots & e^{i(n/2)x_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{i(-n/2)x_{n-1}} & \dots & e^{i(n/2)x_{n-1}} \end{pmatrix}}_{\mathbf{F^{-1}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{u}_{-n/2} \\ \vdots \\ \hat{u}_{n/2} \end{pmatrix}}_{\hat{\mathbf{u}}}.$$

Ainsi à partir de $u(x_j) = \sum_{k=-n/2}^{n/2} \hat{u}_k e^{ikx_j}$, on trouve $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{F}\mathbf{u}$, où $\mathbf{F}$ est la transformée de Fourier discrète.

1.2 Orthogonalité discrète

Définissons l'orthogonalité discrète

$$\sum_{j=-n/2}^{n/2-1} e^{ikx_j} e^{-ilx_j} \underbrace{=}_{\left(x_j = \frac{2\pi}{n} j\right)} \sum_{j=-n/2}^{n/2-1} e^{i(k-l)\frac{2\pi}{n} j}$$

$$\sum_{j=-n/2}^{n/2-1} e^{ikx_j} e^{-ilx_j} = \sum_{j=-n/2}^{n/2-1} e^{i(k-l)\frac{2\pi}{n} j} = e^{-i(k-l)\pi} \sum_{j=0}^{n-1} e^{i(k-l)\frac{2\pi}{n} j}.$$

En utilisant la formule de la somme partielle des séries géométriques, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{j=-n/2}^{n/2-1} e^{ikx_j} e^{-ilx_j} &= \sum_{j=-n/2}^{n/2-1} e^{i(k-l)\frac{2\pi}{n} j} = e^{-i(k-l)\pi} \sum_{j=0}^{n-1} e^{i(k-l)\frac{2\pi}{n} j} \\ &= \begin{cases} e^{-i(k-l)\pi} \frac{\overbrace{1 - e^{i(k-l)2\pi}}^{=0}}{1 - e^{i(k-l)\frac{2\pi}{n}}} = 0 & \text{si } k \neq l \bmod n. \\ n & \text{si } k = l \bmod n. \end{cases} \end{aligned}$$

1.3 Coefficients de la série de Fourier discrète

Procédons comme précedement pour déterminer les coefficients de la série de Fourier

$$\sum_{j=-n/2}^{n/2-1} u(x_j)e^{-ilx_j} = \sum_{j=-n/2}^{n/2-1} \left(\sum_{k=-n/2}^{n/2} \hat{u}_k e^{ikx_j} \right) e^{-ilx_j} = \sum_{k=-n/2}^{n/2} \hat{u}_k \underbrace{\left(\sum_{j=-n/2}^{n/2-1} e^{ikx_j} e^{-ilx_j} \right)}_{=\begin{cases} 0 & \text{si } k \neq l \bmod n. \\ n & \text{si } k = l \bmod n. \end{cases}} .$$

Ainsi on a

$$\hat{u}_k = \frac{1}{n} \sum_{j=-n/2}^{n/2-1} u(x_j)e^{-ikx_j},$$

et par définition de la quadrature trapézoïdale on obtient

$$\hat{u}_k = \frac{1}{n} \sum_{j=-n/2}^{n/2-1} u(x_j)e^{-ikx_j} \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x)e^{-ikx}dx = u_k.$$

D'autre part calculons $u'(x)$. On a

$$u'(x) = \partial_x \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k e^{ikx} \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} iku_k e^{ikx},$$

et en écriture matricielle

$$u'(x_j) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} ik\hat{u}_k e^{ikx_j} \iff \begin{pmatrix} u'(x_0) \\ \vdots \\ u'(x_{n-1}) \end{pmatrix} = \sum_{k=-n/2}^{n/2} ik\hat{u}_k \begin{pmatrix} e^{ikx_0} \\ \vdots \\ e^{ikx_{n-1}} \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} u'(x_0) \\ \vdots \\ u'(x_{n-1}) \end{pmatrix} = \hat{u}_{-n/2} i(-n/2) \begin{pmatrix} e^{i(-n/2)x_0} \\ \vdots \\ e^{i(-n/2)x_{n-1}} \end{pmatrix} + \cdots + \hat{u}_{n/2} i(n/2) \begin{pmatrix} e^{i(n/2)x_0} \\ \vdots \\ e^{i(n/2)x_{n-1}} \end{pmatrix}$$

$$\iff \underbrace{\begin{pmatrix} u'(x_0) \\ \vdots \\ u'(x_{n-1}) \end{pmatrix}}_{\mathbf{u'}} = \underbrace{\begin{pmatrix} e^{i(-n/2)x_0} & \ldots & e^{i(n/2)x_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{i(-n/2)x_{n-1}} & \ldots & e^{i(n/2)x_{n-1}} \end{pmatrix}}_{\mathbf{F^{-1}}} \underbrace{\begin{pmatrix} -i(n/2) & & \\ & \ddots & \\ & & i(n/2) \end{pmatrix}}_{\hat{\mathbf{D}}_{\mathbf{F}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{u}_{-n/2} \\ \vdots \\ \hat{u}_{n/2} \end{pmatrix}}_{\hat{\mathbf{u}}}.$$

Remarque. *Sur MATLAB on utilise un algorithme plus efficace, la transformation de Fourier rapide, où la série de Fourier discrète tronquée est définit comme* $u(x_j) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \tilde{u}_k e^{ikx_j}$ *, où* $\hat{u}_{-n/2+l} = \frac{1}{n}\tilde{u}_{n/2+l}$, $\hat{u}_l = \frac{1}{n}\tilde{u}_l$ *pour* $l = 0, 1, \ldots, n/2-1$.

2 Conclusion

- Nous avons utilisé des séries de Fourier pour développer la solution d'un problème de Poisson.
- Ceci peut être fait aussi avec des autres fonctions de base.
- Les coefficients de la série de Fourier décroissent comme $|k|^{-p-1}$, où p est la plus haute dérivée de la solution qui montre une variation bornée.
- La convergence de ces méthodes est $\mathcal{O}\left(h^{p+\frac{1}{2}}\right)$, elle ne dépend que de la régularité de la solution.
- Nous pouvons définir le développement de Fourier sur un maillage, et nous obtenons le développement en séries de Fourier discrètes.
- Nous avons calculé explicitement la solution du problème de Poisson en utilisant les transformées de Fourier discrètes.