L'informatique au service des maths et de son enseignement

sujet 2

Lucile Alys Favero

November 1, 2022

- Section de mathématique - Semestre printemps

Table des matières

Présentation du sujet

Le sujet

Etant donné un triangle $\triangle ABC$ et un point $P \in \triangle ABC$,

Le sujet

Etant donné un triangle $\triangle ABC$ et un point $P \in \triangle ABC$,

- Construire **le triangle** dont les sommets A_P, B_P et C_P sont les **pieds des perpendiculaires** aux côtés de $\triangle ABC$ passant par le point P

Le sujet

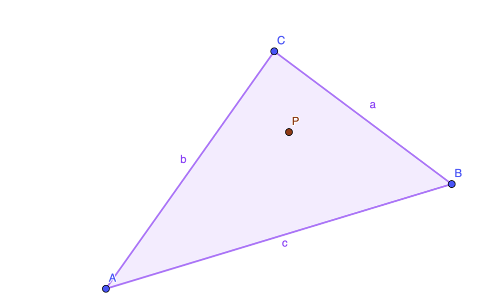
Etant donné un triangle $\triangle ABC$ et un point $P \in \triangle ABC$,

- Construire **le triangle** dont les sommets A_P, B_P et C_P sont les **pieds des perpendiculaires** aux côtés de $\triangle ABC$ passant par le point P

- **Déterminer le point P** formant un triangle $\triangle A_P B_P C_P$ de **périmètre minimal**.

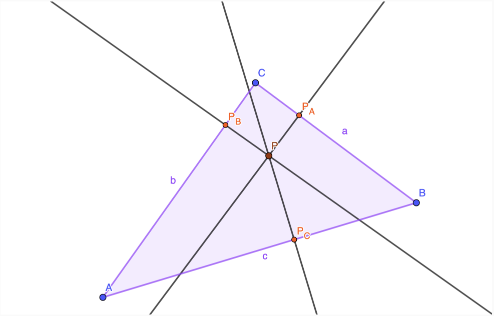
La construction

1. Construction de $\triangle ABC$ et de $P \in \triangle ABC$



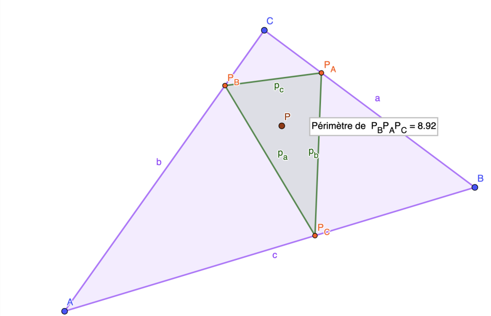
La construction

1. Construction de $\triangle ABC$ et de $P \in \triangle ABC$
2. Construction des sommets A_P, B_P et C_P : les pieds des perpendiculaires aux côtés de $\triangle ABC$ passant par le point P

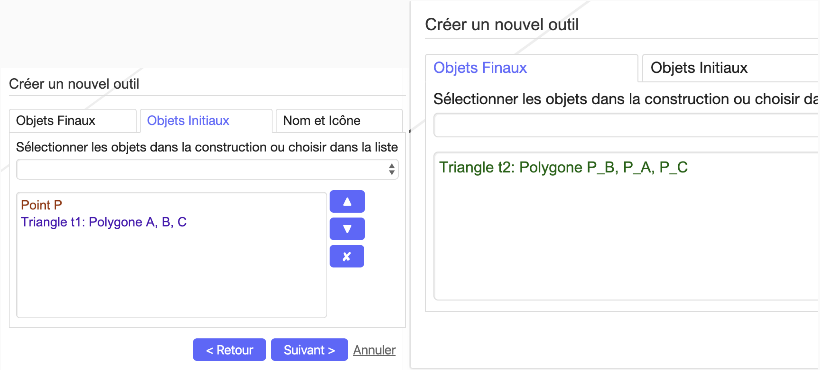


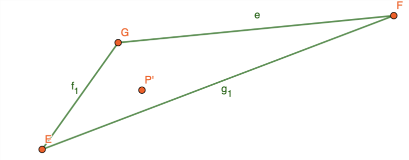
La construction

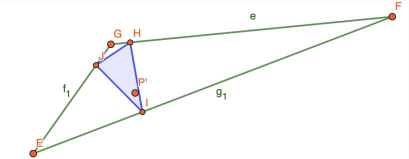
1. Construction de $\triangle ABC$ et de $P \in \triangle ABC$
2. Construction des sommets A_P, B_P et C_P : les pieds des perpendiculaires aux côtés de $\triangle ABC$ passant par le point P
3. Calcul du périmètre de $\triangle A_P B_P C_P$.



Création de l'outil

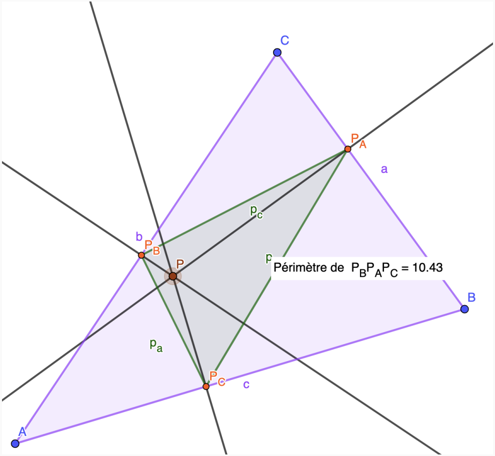



F
e
G
f1
P'
g1
E


F
e
G
H
J
f1
P'
g1
I
E

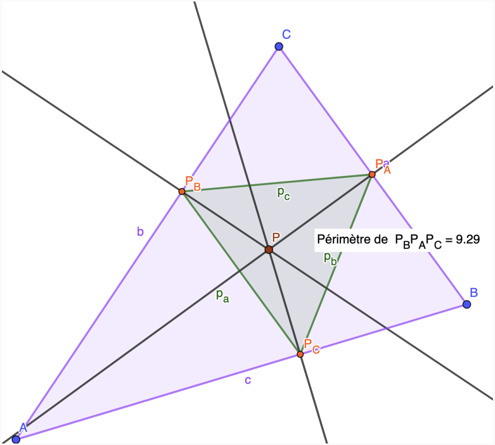
Les tentatives

Tâtonnement géométrique



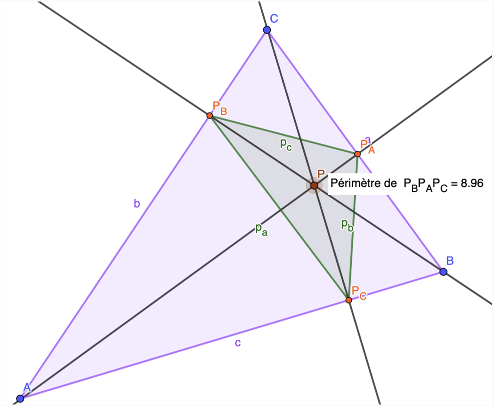
Observation : Quand on fait passer PP_A [ou PP_B ou PP_C] proche de A [ou B ou C], le périmètre diminue.

Tâtonnement géométrique



Observation : Quand on fait passer PP_A [ou PP_B ou PP_C] proche de A [ou B ou C], le périmètre diminue.

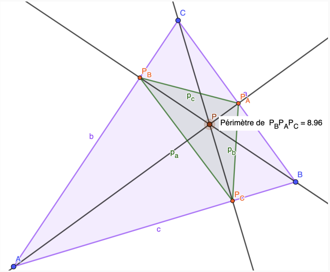
Tâtonnement géométrique



Observation : Quand on fait passer PP_A [ou PP_B ou PP_C] proche de A [ou B ou C], le périmètre diminue.

Réponse empirique

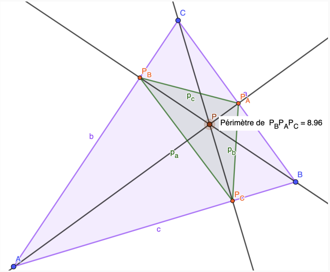
But : **Déterminer le point P** formant un triangle $\triangle A_P B_P C_P$ de **périmètre minimal**.



Réponse empirique : En faisant coïncider PP_A, PP_B et PP_C avec les hauteurs du triangle $\triangle ABC$,

Réponse empirique

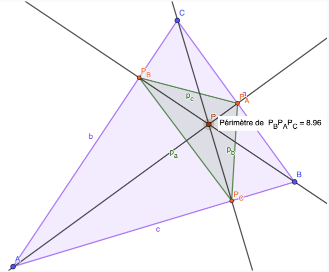
But : **Déterminer le point P** formant un triangle $\triangle A_P B_P C_P$ de **périmètre minimal**.



Réponse empirique : En faisant coïncider PP_A, PP_B et PP_C avec les hauteurs du triangle $\triangle ABC$, ie en placant P à l'intersection des hauteurs issues de A, B et C, (**P est l'orthocentre du triangle** $\triangle ABC$),

Réponse empirique

But : **Déterminer le point P** formant un triangle $\triangle A_P B_P C_P$ de **périmètre minimal**.



Réponse empirique : En faisant coïncider PP_A, PP_B et PP_C avec les hauteurs du triangle $\triangle ABC$, ie en placant P à l'intersection des hauteurs issues de A, B et C, (**P est l'orthocentre du triangle** $\triangle ABC$), $\triangle A_P B_P C_P$ a le périmètre le plus petit.

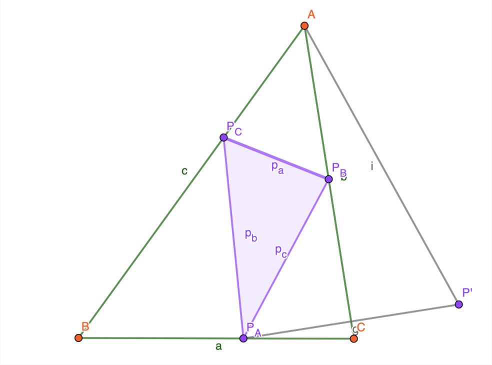
Une preuve

Plan

1. Reformulation du problème
2. Construction d'une solution
3. Unicité de la solution
4. P_B (P_C) pied de la hauteur issue de B (C)

Construction :

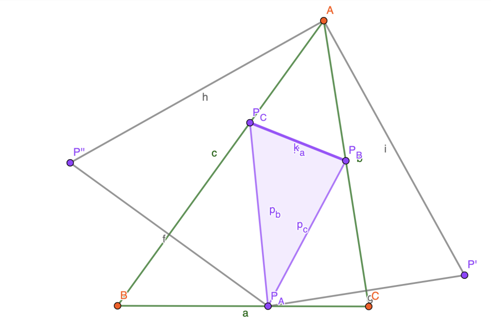
1. Construction de P' à partir de P_A par symétrie axiale par rapport à (AC)



1. Reformulation du problème

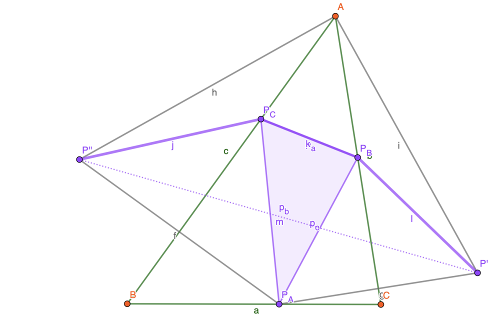
Construction :

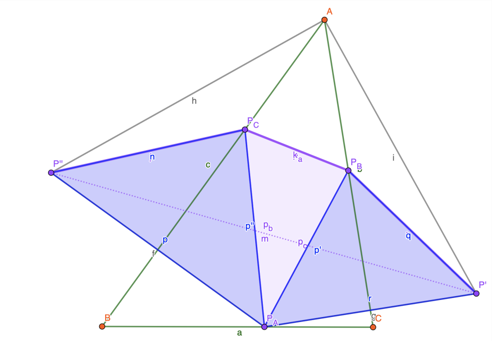
1. Construction de P' à partir de P_A par symétrie axiale par rapport à (AC)
2. Construction de P'' à partir de P_A par symétrie axiale par rapport à (AB)



Construction :

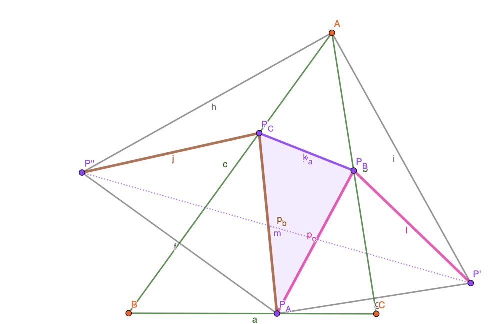
1. Construction de P' à partir de P_A par symétrie axiale par rapport à (AC)
2. Construction de P'' à partir de P_A par symétrie axiale par rapport à (AB)
3. Relier P'' à P_C et P' à P_B





Observation :

Comme P' et P'' sont issus de symétries axiales, $\triangle P_A P_B P'$ et $\triangle P_A P_C P''$ (triangles bleus) sont isocèles.

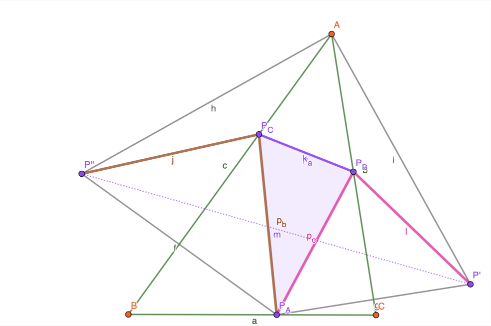


Observation :

Comme P' et P'' sont issus de symétries axiales, $\triangle P_A P_B P'$ et $\triangle P_A P_C P''$ (triangles bleus) sont isocèles.

Donc $P_C P'' = P_A P_C$ (en brun) et $P_A P_B = P_A P'$ (en rose)

1. Reformulation du problème



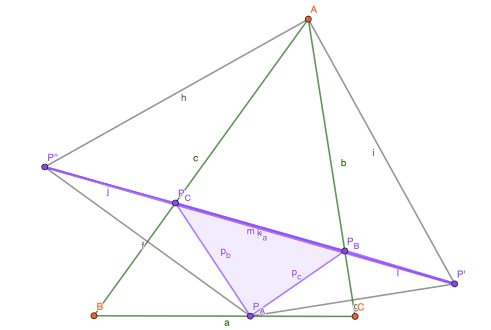
Observation :

Comme P' et P'' sont issus de symétries axiales, $\triangle P_A P_B P'$ et $\triangle P_A P_C P''$ (triangles bleus) sont isocèles.

Donc $P_C P'' = P_A P_C$ (en brun) et $P_A P_B = P_A P'$ (en rose)

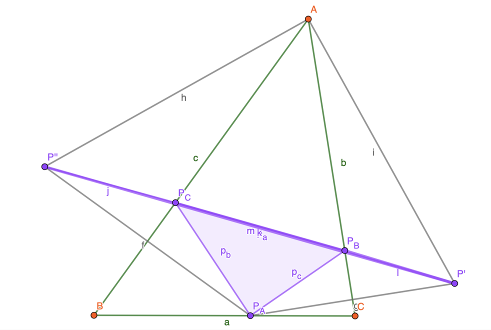
Ainsi, **le problème de minimisation du périmètre de $\triangle A_P B_P C_P$, devient un problème de minimisation de la longueur de la ligne brisée** $P'' P_C P_C P_B P_B P'$

2. Construction d'une solution

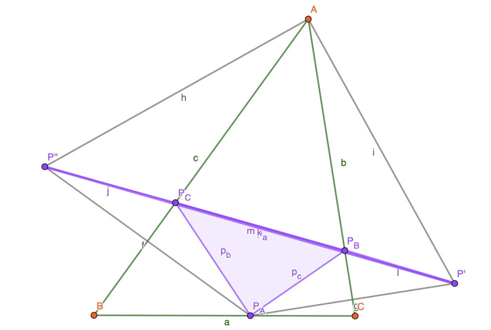


1. Fixons P_A

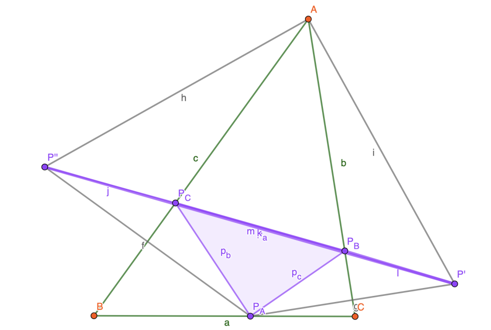
2. Construction d'une solution



1. Fixons P_A
2. Le minimum de la longueur d'une ligne brisée est la ligne droite
3. Laissons P_B et P_C bouger le long de AC et AB (respectivement), jusqu'à ce qu'il soient sur $P'P''$

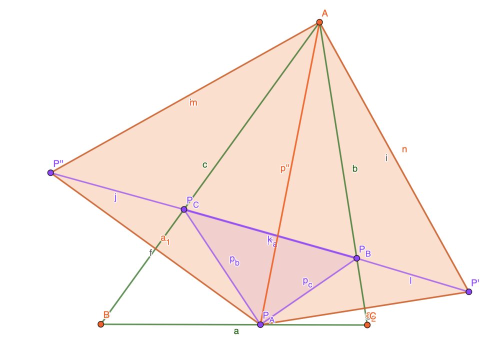


1. Fixons P_A
2. Le minimum de la longueur d'une ligne brisée est la ligne droite
3. Laissons P_B et P_C bouger le long de AC et AB (respectivement), jusqu'à ce qu'il soient sur $P'P''$
4. Alors le périmètre de $\triangle A_P B_P C_P$ est $P'P''$



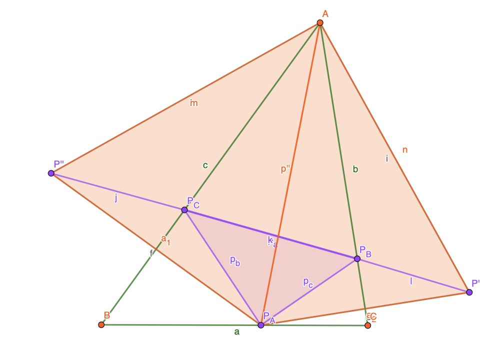
1. Fixons P_A
2. Le minimum de la longueur d'une ligne brisée est la ligne droite
3. Laissons P_B et P_C bouger le long de AC et AB (respectivement), jusqu'à ce qu'il soient sur $P'P''$
4. Alors le périmètre de $\triangle A_P B_P C_P$ est $P'P''$**on cherche à minimiser ce segment**

2. Construction d'une solution



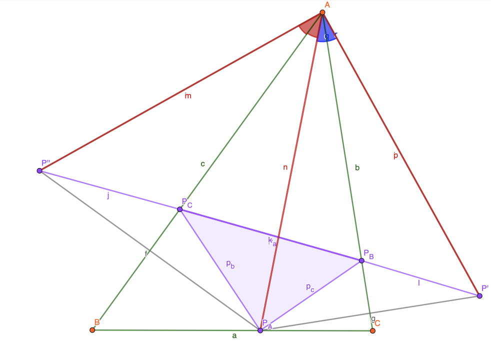
Observation :
Comme P' et P'' sont issus de symétries axiales, $\triangle P_A A P'$ et $\triangle P_A A P''$ (triangles oranges) sont isocèles.

2. Construction d'une solution



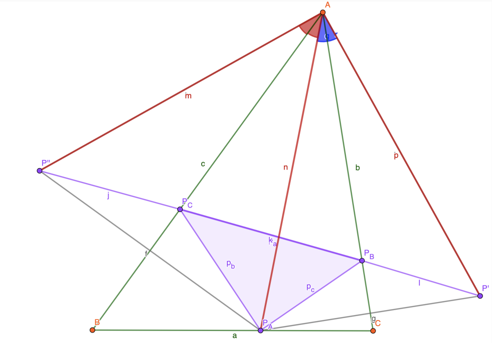
Observation :

Comme P' et P'' sont issus de symétries axiales, $\triangle P_A A P'$ et $\triangle P_A A P''$ (triangles oranges) sont isocèles. Donc $AP' = AP_A = AP$''



De plus, par propriété de conservation des angles de la symétrie axiale :

- AB est la bissectrice de l'angle $\angle P''AP_A$
- AC est la bissectrice de l'angle $\angle P'AP_A$

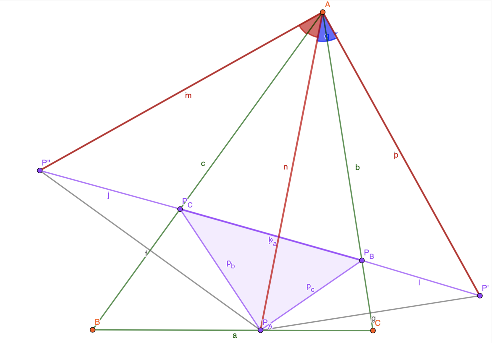


De plus, par propriété de conservation des angles de la symétrie axiale :

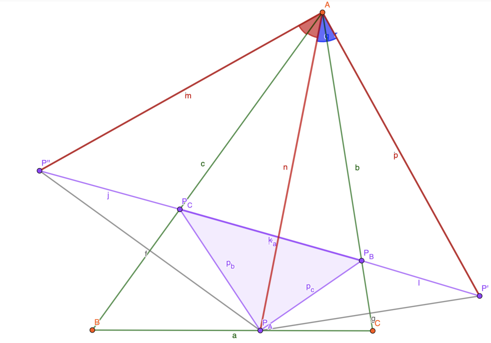
- AB est la bissectrice de l'angle $\angle P''AP_A$
- AC est la bissectrice de l'angle $\angle P'AP_A$

Donc : $\angle P"AP' = 2\angle BAC$, l'angle $\angle P"AP'$ ne dépend pas de la position de P_A

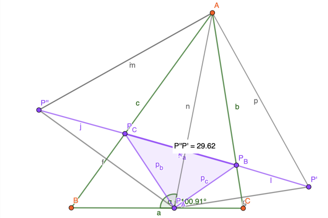
2. Construction d'une solution

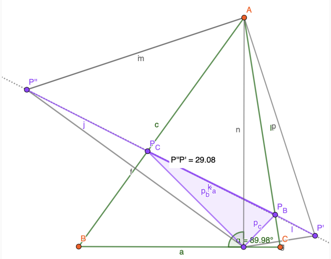


L'unique manière de diminuer la longueur de $P''P'$ est de diminuer les longueurs AP' et AP'',



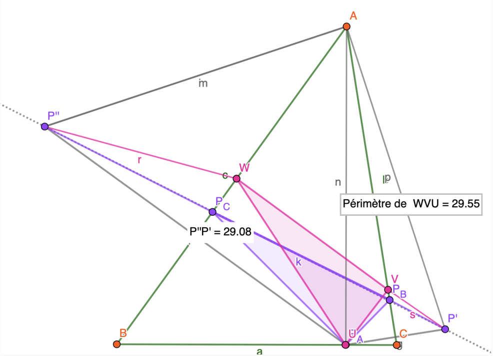
L'unique manière de diminuer la longueur de $P''P'$ est de diminuer les longueurs AP' et AP", c'est à dire de trouver où placer P_A de telle manière que AP_A soit minimal.



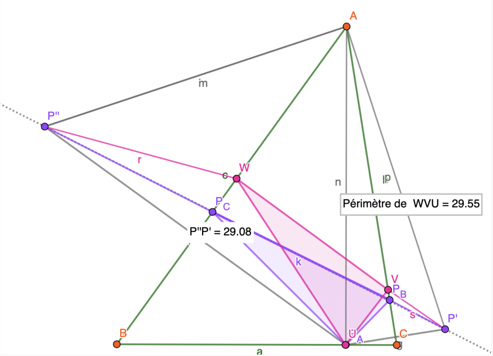


On fait bouger P_A le long de BC pour trouver cette position.
Pour que le segment AP_A soit minimal il faut que ce soit **la hauteur de** BC **passant par A.**

3. Unicité de la solution



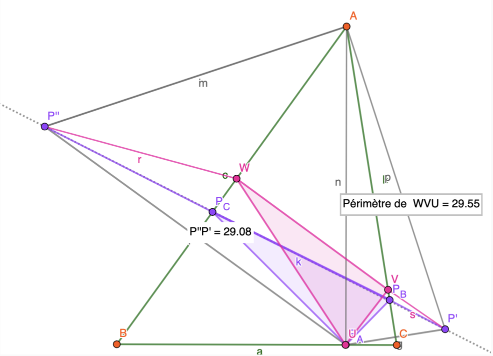
Soit UVW, un autre triangle avec le périmètre minimal.



Soit UVW, un autre triangle avec le périmètre minimal. Soit $U = P_A$

1. Alors soit $V \neq P_B$, soit $W \neq P_C$, (ou les deux)

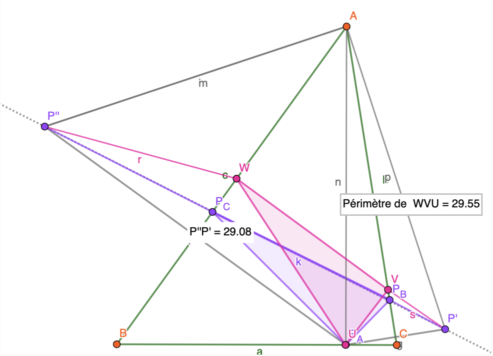
3. Unicité de la solution



Soit UVW, un autre triangle avec le périmètre minimal. Soit $U = P_A$

1. Alors soit $V \neq P_B$, soit $W \neq P_C$, (ou les deux)
2. Le périmètre à minimiser devient une ligne brisée

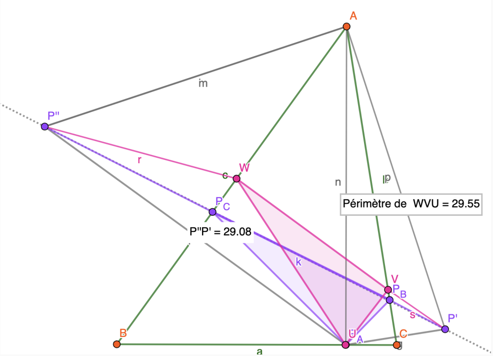
3. Unicité de la solution



Soit UVW, un autre triangle avec le périmètre minimal. Soit $U = P_A$

1. Alors soit $V \neq P_B$, soit $W \neq P_C$, (ou les deux)
2. Le périmètre à minimiser devient une ligne brisée
3. Or la ligne brisée $P''WVP'$ est plus longue que le segment $P''P'$

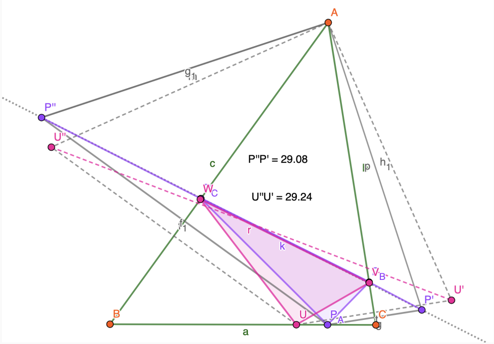
3. Unicité de la solution



Soit UVW, un autre triangle avec le périmètre minimal. Soit $U = P_A$

1. Alors soit $V \neq P_B$, soit $W \neq P_C$, (ou les deux)
2. Le périmètre à minimiser devient une ligne brisée
3. Or la ligne brisée $P''WVP'$ est plus longue que le segment $P''P'$
4. Donc UVW n'a pas le périmètre minimal

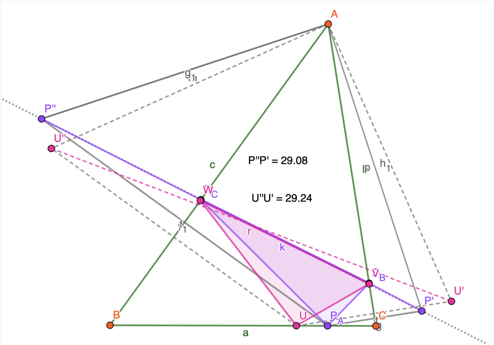
3. Unicité de la solution



Soit $U \neq P_A$, et $U''U'$ le segment représentant le périmètre de UVW.

1. Alors $UA > P_A A$

3. Unicité de la solution

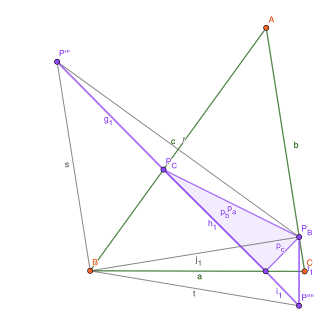


Soit $U \neq P_A$, et $U''U'$ le segment représentant le périmètre de UVW.

1. Alors $UA > P_A A$
2. $U''U' > P''P'$
3. Donc UVW n'a pas le périmètre minimal

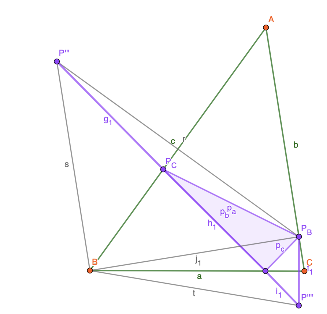
Ainsi on a unicité de la construction.

4. P_B (P_C) pied de la hauteur issue de B (C)



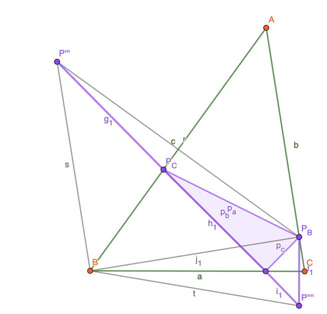
On fait la même construction à partir du sommet B puis du C.

4. P_B (P_C) pied de la hauteur issue de B (C)



On fait la même construction à partir du sommet B puis du C. Ainsi P_B et P_C sont les pieds des hauteurs passant par B et C.

4. P_B (P_C) pied de la hauteur issue de B (C)



On fait la même construction à partir du sommet B puis du C. Ainsi P_B et P_C sont les pieds des hauteurs passant par B et C.
Donc en placant P à l'intersection des hauteurs issues de A, B et C, $\triangle A_P B_P C_P$ a le périmètre le plus petit.