La Méthode Spectrale

Analyse de convergence

Lucile Alys Favero

UNIVERSITÉ DE GENÈVE
FACULTÉ DES SCIENCES

Section de Mathématiques

1er novembre 2022

PLAN

But. Démontrer le théorème de convergence spectrale

PLAN

But. Démontrer le théorème de convergence spectrale

1. Rappel : La méthode spectrale basée sur les séries de Fourier

PLAN

But. Démontrer le théorème de convergence spectrale

1. Rappel : La méthode spectrale basée sur les séries de Fourier
2. Théorème d'Aliasing : Quantification de l'erreur quadratique

PLAN

But. Démontrer le théorème de convergence spectrale

1. Rappel : La méthode spectrale basée sur les séries de Fourier
2. Théorème d'Aliasing : Quantification de l'erreur quadratique
3. Théorème de convergence spectrale : Une estimation précise de l'erreur de la méthode

PLAN

But. Démontrer le théorème de convergence spectrale

1. Rappel : La méthode spectrale basée sur les séries de Fourier
2. Théorème d'Aliasing : Quantification de l'erreur quadratique
3. Théorème de convergence spectrale : Une estimation précise de l'erreur de la méthode
4. Interprétation et illustration

1. Rappel : La méthode spectrale basée sur les séries de Fourier

Rappelons-nous les résultats principaux de la première présentation sur ce sujet :

1. Rappel : La méthode spectrale basée sur les séries de Fourier

Rappelons-nous les résultats principaux de la première présentation sur ce sujet :

- Nous avons utilisé des séries de Fourier pour développer la solution d'un problème de Poisson.

$$\begin{cases} u_{xx} = f, \\ u(0) = u(2\pi), \\ u'(0) = u'(2\pi). \end{cases} \qquad \Omega = (0, 2\pi)$$

1. Rappel : La méthode spectrale basée sur les séries de Fourier

Rappelons-nous les résultats principaux de la première présentation sur ce sujet :

- Nous avons utilisé des séries de Fourier pour développer la solution d'un problème de Poisson.

$$\begin{cases} u_{xx} = f, \\ u(0) = u(2\pi), \\ u'(0) = u'(2\pi). \end{cases} \qquad \Omega = (0, 2\pi)$$

- Nous pouvons définir le développement de Fourier sur un maillage, et nous obtenons le développement en séries de Fourier discrètes.

1. Rappel : La méthode spectrale basée sur les séries de Fourier

Rappelons-nous les résultats principaux de la première présentation sur ce sujet :

- Nous avons utilisé des séries de Fourier pour développer la solution d'un problème de Poisson.

$$\begin{cases} u_{xx} = f, \\ u(0) = u(2\pi), \\ u'(0) = u'(2\pi). \end{cases} \qquad \Omega = (0, 2\pi)$$

- Nous pouvons définir le développement de Fourier sur un maillage, et nous obtenons le développement en séries de Fourier discrètes.
- Nous avons calculé explicitement la solution du problème de Poisson en utilisant les transformées de Fourier discrètes.

1. Rappel : La méthode spectrale basée sur les séries de Fourier

Définition. Fonctions à variation bornée

Pour une fonction $u : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ sa variation totale est défini par

$$V_{[0,2\pi]}u := \sup_{n>0} \left(\sup_{0=x_0<\cdots<x_n=2\pi} \left(\sum_{i=0}^{n-1} |u(x_{i+1}) - u(x_i)| \right) \right).$$

La fonction u est *à variation bornée* si $V_{[0,2\pi]}u < \infty$.

1. Rappel : La méthode spectrale basée sur les séries de Fourier

Lors de la discrétisation de la méthode spectrale, les sources d'erreurs sont :

1. Rappel : La méthode spectrale basée sur les séries de Fourier

Lors de la discrétisation de la méthode spectrale, les sources d'erreurs sont :

- Troncature : l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée tronquée

1. Rappel : La méthode spectrale basée sur les séries de Fourier

Lors de la discrétisation de la méthode spectrale, les sources d'erreurs sont :

- Troncature : l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée tronquée

Théorème.1

Si $u : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ est p-dérivable et $u^{(p)}\big|_{[0,2\pi]}$ est à variation bornée, alors il existe une constante $C > 0$ qui dépend de $u^{(p)}$ mais ne dépend pas de k telle que

$$|u_k| \leq \frac{C}{|k|^{p+1}}$$

1. Rappel : La méthode spectrale basée sur les séries de Fourier

Lors de la discrétisation de la méthode spectrale, les sources d'erreurs sont :

- Troncature : l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée tronquée
- Quadrature : l'erreur résultant de l'évaluation de $_k$ sur les points d'une grille plutôt qu'en évaluant une intégrale

1. Rappel : La méthode spectrale basée sur les séries de Fourier

Lors de la discrétisation de la méthode spectrale, les sources d'erreurs sont :

- Troncature : l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée tronquée
- Quadrature : l'erreur résultant de l'évaluation de $_k$ sur les points d'une grille plutôt qu'en évaluant une intégrale

On a vu dans la première présentation sur la méthode spectrale :

$$\hat{u}_k = \frac{1}{n} \sum_{j=-n/2}^{n/2-1} u(x_j) e^{-ikx_j}.$$

Cette expression est le résultat de l'utilisation d'une quadrature trapézoïdale à la définition de u_k, c'est-à-dire

$$\hat{u}_k = \frac{1}{n} \sum_{j=-n/2}^{n/2-1} u(x_j) e^{-ikx_j} \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x) e^{-ikx} dx = u_k.$$

2. Théorème d'Aliasing : Quantification de l'erreur quadratique

Théorème.4 Aliasing

Soient :

- Les coefficients de la série de Fourier de la fonction 2π-périodique u, définit par :
$u_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x)e^{-ikx}dx.$

2. Théorème d'Aliasing : Quantification de l'erreur quadratique

Théorème.4 Aliasing

Soient :

- Les coefficients de la série de Fourier de la fonction 2π-périodique u, définit par :
$u_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x) e^{-ikx} dx$.
- Les coefficients de la série de Fourier discrets définit par : $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{F}\mathbf{u}$

2. Théorème d'Aliasing : Quantification de l'erreur quadratique

Théorème.4 Aliasing

Soient :
- Les coefficients de la série de Fourier de la fonction 2π-périodique u, définit par :
$u_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x)e^{-ikx}dx.$
- Les coefficients de la série de Fourier discrets définit par : $\mathbf{\hat{u}} = \mathbf{Fu}$

Si la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k$ est absolument convergente alors :

$$\hat{u}_k - u_k = \sum_{l\in\mathbb{Z}\ l\neq 0} u_{k+ln}$$

2. Théorème d'Aliasing : $\hat{u}_k - u_k = \sum_{l \in \mathbb{Z}\ l \neq 0} u_{k+ln}$

PREUVE

On commence avec :

$$\hat{u}_k = \frac{1}{n} \sum_{k=-n/2}^{n/2-1} u(x_j) e^{-ikx_j}$$

2. Théorème d'Aliasing : $\hat{u}_k - u_k = \sum_{l\in\mathbb{Z}\ l\neq 0} u_{k+ln}$

PREUVE
On commence avec :

$$\hat{u}_k = \frac{1}{n}\sum_{k=-n/2}^{n/2-1} u(x_j)e^{-ikx_j}$$

Par l'expression vue dans les rappels :

$$\hat{u}_k = \frac{1}{n}\sum_{k=-n/2}^{n/2-1}\sum_{l=-\infty}^{\infty} u_l e^{ilx_j} e^{-ikx_j}$$

2. Théorème d'Aliasing : $\hat{u}_k - u_k = \sum_{l \in \mathbb{Z}\ l \neq 0} u_{k+ln}$

PREUVE
On commence avec :

$$\hat{u}_k = \frac{1}{n} \sum_{k=-n/2}^{n/2-1} u(x_j) e^{-ikx_j}$$

Par l'expression vue dans les rappels :

$$\hat{u}_k = \frac{1}{n} \sum_{k=-n/2}^{n/2-1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} u_l e^{ilx_j} e^{-ikx_j}$$

On échange les deux sommes. Possible car par hypothèse, les séries convergent absolument.

$$\hat{u}_k = \frac{1}{n} \sum_{l=-\infty}^{\infty} u_l \sum_{k=-n/2}^{n/2-1} e^{i(l-k)x_j}$$

2. Théorème d'Aliasing : $\hat{u}_k - u_k = \sum_{l\in\mathbb{Z}\ l\neq 0} u_{k+ln}$

$$\hat{u}_k = \frac{1}{n}\sum_{l=-\infty}^{\infty} u_l \sum_{j=-n/2}^{n/2-1} e^{i(l-k)x_j} = \sum_{l\in\mathbb{Z}} u_{k+ln}$$

En utilisant la relation d'orthogonalité discrète vu dans la présentation précédente :

$$\sum_{j=-n/2}^{n/2-1} e^{ikx_j} e^{-ilx_j} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq l \bmod n, \\ n & \text{si } k = l \bmod n, \end{cases}$$

2. Théorème d'Aliasing : $\hat{u}_k - u_k = \sum_{l\in\mathbb{Z}\ l\neq 0} u_{k+ln}$

On a donc :

$$\hat{u}_k = \sum_{l\in\mathbb{Z}} u_{k+ln}$$

Et en soustrayant u_k à cette expression, on a le résultat voulu :

$$\hat{u}_k - u_k = \sum_{l\in\mathbb{Z}\ l\neq 0} u_{k+ln}$$

Ce qui termine la preuve.

3. Théorème de convergence spectrale : Une estimation précise de l'erreur de la méthode

Théorème.5 Convergence spectrale

3. Théorème de convergence spectrale : Une estimation précise de l'erreur de la méthode

Théorème.5 Convergence spectrale

Soients :
- $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ 2π-périodique, et $p \geq 1$ fois différenciable avec $f^{(p)}|_{[0,2\pi]}$ à variation bornée.

3. Théorème de convergence spectrale : Une estimation précise de l'erreur de la méthode

Théorème.5 Convergence spectrale

Soient :

- $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ 2π-périodique, et $p \geq 1$ fois différenciable avec $f^{(p)}|_{[0,2\pi]}$ à variation bornée.
- $\mathbf{u}$ la solution exacte discrète de l'équation de poisson, sur la grille $x_j = jh$, $h = \frac{2\pi}{n}$ avec $n \geq 4$ pair.

Théorème.5 Convergence spectrale

Soient :

- $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ 2π-périodique, et $p \geq 1$ fois différenciable avec $f^{(p)}|_{[0,2\pi]}$ à variation bornée.
- $\mathbf{u}$ la solution exacte discrète de l'équation de poisson, sur la grille $x_j = jh$, $h = \frac{2\pi}{n}$ avec $n \geq 4$ pair.

$$\begin{cases} u_{xx} = f, \\ u(0) = u(2\pi), \\ u'(0) = u'(2\pi). \end{cases} \qquad \Omega = (0, 2\pi)$$

3. Théorème de convergence spectrale : Une estimation précise de l'erreur de la méthode

Théorème.5 Convergence spectrale

Soient :
- $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ 2π-périodique, et $p \geq 1$ fois différenciable avec $f^{(p)}|_{[0,2\pi]}$ à variation bornée.
- $\mathbf{u}$ la solution exacte discrète de l'équation de poisson, sur la grille $x_j = jh$, $h = \frac{2\pi}{n}$ avec $n \geq 4$ pair.

Si $\mathbf{u_h}$ est la solution approximée obtenue par la méthode spectrale discrète de Fourier, alors il satisfait l'erreur d'estimation :

$$||\mathbf{u} - \mathbf{u_h}||_2 \leq \frac{C}{n^{p+1}}$$

avec C constant.

3. Théorème de convergence spectrale : $||\mathbf{u} - \mathbf{u_h}||_2 \leq \frac{C}{n^{p+1}}$

PREUVE

Pour simplifier les notations, définissons l'ensemble utilisé pour la troncature
$K := \{-\frac{n}{2}, -\frac{n}{2} + 1, ..., -\frac{n}{2} - 1\}$

3. Théorème de convergence spectrale : $||\mathbf{u} - \mathbf{u_h}||_2 \leq \frac{C}{n^{p+1}}$

PREUVE

Pour simplifier les notations, définissons l'ensemble utilisé pour la troncature
$K := \{-\frac{n}{2}, -\frac{n}{2} + 1, ..., -\frac{n}{2} - 1\}$
Dans cette démonstration, nous utiliserons les résultats suivants :

3. Théorème de convergence spectrale : $||\mathbf{u}-\mathbf{u_h}||_2 \leq \frac{C}{n^{p+1}}$

PREUVE
Pour simplifier les notations, définissons l'ensemble utilisé pour la troncature
$K := \{-\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}+1, ..., -\frac{n}{2}-1\}$
Dans cette démonstration, nous utiliserons les résultats suivants :

1. L'indentité de Parseval-Plancherel que nous ne démontrerons pas : $\|u\|_2^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |u_k|^2$

3. Théorème de convergence spectrale : $||\mathbf{u} - \mathbf{u_h}||_2 \leq \frac{C}{n^{p+1}}$

PREUVE

Pour simplifier les notations, définissons l'ensemble utilisé pour la troncature
$K := \{-\frac{n}{2}, -\frac{n}{2} + 1, ..., -\frac{n}{2} - 1\}$
Dans cette démonstration, nous utiliserons les résultats suivants :

1. L'indentité de Parseval-Plancherel que nous ne démontrerons pas : $\|u\|_2^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |u_k|^2$
2. L'expression vue dans la présentation précédente : $-l^2 u_l = f_l$

3. Théorème de convergence spectrale : $||\mathbf{u} - \mathbf{u_h}||_2 \leq \frac{C}{n^{p+1}}$

PREUVE

Pour simplifier les notations, définissons l'ensemble utilisé pour la troncature
$K := \{-\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}+1, ..., -\frac{n}{2}-1\}$
Dans cette démonstration, nous utiliserons les résultats suivants :

1. L'indentité de Parseval-Plancherel que nous ne démontrerons pas : $\|u\|_2^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |u_k|^2$
2. L'expression vue dans la présentation précédente : $-l^2 u_l = f_l$
3. Le théorème 4 : $\hat{u}_k - u_k = \sum_{l\in\mathbb{Z}\ l\neq 0} u_{k+ln}$

3. Théorème de convergence spectrale : $||\mathbf{u} - \mathbf{u_h}||_2 \leq \frac{C}{n^{p+1}}$

PREUVE
Pour simplifier les notations, définissons l'ensemble utilisé pour la troncature
$K := \{-\frac{n}{2}, -\frac{n}{2} + 1, ..., -\frac{n}{2} - 1\}$
Dans cette démonstration, nous utiliserons les résultats suivants :

1. L'indentité de Parseval-Plancherel que nous ne démontrerons pas : $\|u\|_2^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |u_k|^2$
2. L'expression vue dans la présentation précédente : $-l^2 u_l = f_l$
3. Le théorème 4 : $\hat{u}_k - u_k = \sum_{l \in \mathbb{Z} \ l \neq 0} u_{k+ln}$
4. Le théorème 1, vu dans les rappels :

Théorème

Si $u : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ est p-dérivable et $u^{(p)}\big|_{[0,2\pi]}$ est à variation bornée, alors il existe une constante $C > 0$ qui dépend de $u^{(p)}$ mais ne dépend pas de k telle que

$$|u_k| \leq \frac{C}{|k|^{p+1}} \tag{1}$$

3. Théorème de convergence spectrale : $||\mathbf{u} - \mathbf{u_h}||_2 \leq \frac{C}{n^{p+1}}$

Par l'indentité de Parseval-Plancherel :

$$||\mathbf{u} - \mathbf{u_h}||_2^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |u_k - \hat{u_k}|^2$$

3. Théorème de convergence spectrale : $||\mathbf{u} - \mathbf{u_h}||_2 \leq \frac{C}{n^{p+1}}$

Par l'indentité de Parseval-Plancherel :

$$||\mathbf{u} - \mathbf{u_h}||_2^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |u_k - \hat{u_k}|^2$$

En introduisant la notation K :

$$= 2\pi \left(\sum_{k \in K} |u_k - \hat{u_k}|^2 + \sum_{k \notin K} |u_k|^2 \right) = 2\pi \left(\frac{1}{k^4} \sum_{k \in K \setminus 0} |f_k - \hat{f_k}|^2 + \frac{1}{k^4} \sum_{k \notin K} |f_k|^2 \right)$$

La dernière égalité par : $-l^2 u_l = f_l$

3. Théorème de convergence spectrale : $||\mathbf{u} - \mathbf{u_h}||_2 \leq \frac{C}{n^{p+1}}$

Estimons la première somme, grâce aux théorèmes 1 et 4 :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k^4} \sum_{k \in K \setminus 0} |f_k - \hat{f}_k|^2 &= \sum_{k \in K \setminus 0} \frac{1}{k^4} | \sum_{j \neq 0} f_{k+jn}|^2 \\
&\leq \sum_{k \in K \setminus 0} \frac{1}{k^4} \left(\sum_{j \neq 0} \frac{C}{|k+jn|^{p+1}} \right)^2 \\
&\leq \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{C^2}{k^4} \left(\sum_{j \geq 1} \frac{1}{|k+jn|^{p+1}} + \frac{1}{|k-jn|^{p+1}} \right)^2 + \sum_{k=-\frac{n}{2}}^{-1} \frac{C^2}{k^4} \left(\sum_{j \geq 1} \frac{1}{|k+jn|^{p+1}} + \frac{1}{|k-jn|^{p+1}} \right)
\end{aligned}$$

On peut majorer la première somme en remplacant les termes aux dénominateurs par des bornes inférieures :

$$\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{C^2}{k^4} \left(\sum_{j \geq 1} \frac{1}{|k+jn|^{p+1}} + \frac{1}{|k-jn|^{p+1}} \right)^2 \leq \frac{C^2}{n^{2p+2}} \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{1}{k^4} \left(\sum_{j \geq 1} \frac{1}{|\frac{k}{n}+j|^{p+1}} + \frac{1}{|\frac{k}{n}-j|^{p+1}} \right)^2$$

$$\leq \frac{C^2}{n^{2p+2}} \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{1}{k^4} \left(\sum_{j \geq 1} \frac{1}{j^{p+1}} + \frac{1}{|j-\frac{1}{2}|^{p+1}} \right)^2$$

La somme sur j converge pour $p \geq 1$, donc la somme sur k est bornée. Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{C^2}{k^4} \left(\sum_{j \geq 1} \frac{1}{|k+jn|^{p+1}} + \frac{1}{|k-jn|^{p+1}} \right)^2 \leq \frac{C'}{n^{2p+2}}$$

Avec C' une certaine constante.

3. Théorème de convergence spectrale : $||\mathbf{u} - \mathbf{u_h}||_2 \leq \frac{C}{n^{p+1}}$

On fait la même chose pour la seconde somme : majoration en remplacant les termes aux dénominateurs par des bornes inférieures :

$$\sum_{k=-\frac{n}{2}}^{-1} \frac{C^2}{k^4} \left(\sum_{j \geq 1} \frac{1}{|k+jn|^{p+1}} + \frac{1}{|k-jn|^{p+1}} \right)^2 \leq \frac{C^2}{n^{2p+2}} \sum_{k=-\frac{n}{2}}^{-1} \frac{1}{k^4} \left(\sum_{j \geq 1} \frac{1}{|\frac{k}{n}+j|^{p+1}} + \frac{1}{|\frac{k}{n}-j|^{p+1}} \right)^2$$

$$\leq \frac{C^2}{n^{2p+2}} \sum_{k=-\frac{n}{2}}^{-1} \frac{1}{k^4} \left(\sum_{j \geq 1} \frac{1}{j^{p+1}} + \frac{1}{|j-\frac{1}{2}|^{p+1}} \right)^2$$

La somme sur j converge pour $p \geq 1$, donc la somme sur k est bornée. Ainsi :

$$\sum_{k=-\frac{n}{2}}^{-1} \frac{C^2}{k^4} \left(\sum_{j \geq 1} \frac{1}{|k+jn|^{p+1}} + \frac{1}{|k-jn|^{p+1}} \right)^2 \leq \frac{C''}{n^{2p+2}}$$

Avec C'' une constante.

3. Théorème de convergence spectrale : $||\mathbf{u}-\mathbf{u_h}||_2 \leq \frac{C}{n^{p+1}}$

En remplacant ces bornes dans l'expression de départ, on a une majoration de la première somme :

$$||\mathbf{u}-\mathbf{u_h}||_2^2 = 2\pi \left(\frac{1}{k^4} \sum_{k \in K \setminus 0} |f_k - \hat{f}_k|^2 + \frac{1}{k^4} \sum_{k \notin K} |f_k|^2 \right)$$

Avec :

$$\frac{1}{k^4} \sum_{k \in K \setminus 0} |f_k - \hat{f}_k|^2 \leq \frac{C_1}{n^{2p+2}}$$

Il ne reste plus qu'à majorer la deuxième somme : $\frac{1}{k^4} \sum_{k \notin K} |f_k|^2$

3. Théorème de convergence spectrale : $||\mathbf{u} - \mathbf{u_h}||_2 \leq \frac{C}{n^{p+1}}$

Pour cela faire, appliquons d'abord le théorème 1 :

$$\sum_{k \notin K} \frac{1}{k^4} |f_k|^2 \leq \sum_{k \notin K} \frac{C^2}{|k|^{2p+6}}$$

Puis nous utilisons une intégrale pour estimer la somme obtenue :

$$\begin{aligned} \sum_{k \notin K} \frac{C^2}{|k|^{2p+6}} &\leq 2C^2 \int_{\frac{n}{2}-1}^{\infty} \frac{1}{k^{2p+6}} dk \\ &= \frac{2C^2}{2p+5} \frac{1}{(\frac{n}{2}-1)^{2p+5}} = \frac{2C^2}{2p+5} \frac{1}{(\frac{1}{2}-\frac{1}{n})^{2p+5}} \frac{1}{n^{2p+5}} \end{aligned}$$

3. Théorème de convergence spectrale : $||\mathbf{u} - \mathbf{u_h}||_2 \leq \frac{C}{n^{p+1}}$

Pour cela faire, appliquons d'abord le théorème 1 :

$$\sum_{k \notin K} \frac{1}{k^4} |f_k|^2 \leq \sum_{k \notin K} \frac{C^2}{|k|^{2p+6}}$$

Puis nous utilisons une intégrale pour estimer la somme obtenue :

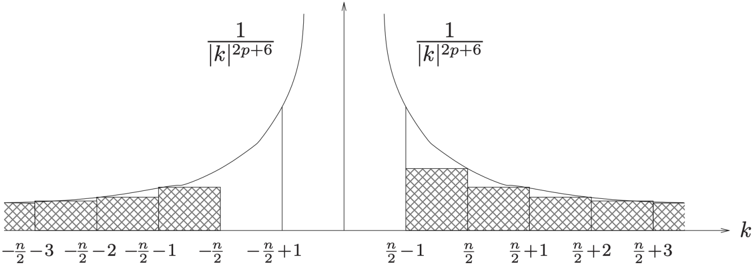
$$\sum_{k \notin K} \frac{C^2}{|k|^{2p+6}} \leq 2C^2 \int_{\frac{n}{2}-1}^{\infty} \frac{1}{k^{2p+6}} dk$$
$$= \frac{2C^2}{2p+5} \frac{1}{(\frac{n}{2}-1)^{2p+5}} = \frac{2C^2}{2p+5} \frac{1}{(\frac{1}{2}-\frac{1}{n})^{2p+5}} \frac{1}{n^{2p+5}}$$

Majoration en remplacant les termes aux dénominateurs par une borne inférieure, en utilisant que $n \geq 4$:

$$\leq \frac{2C^2}{(2p+5)(\frac{1}{4})^{2p+5}} \frac{1}{n^{2p+5}} \leq \frac{C_2}{n^{2p+5}}$$

Avec C_2 une constante.

3. Théorème de convergence spectrale : $||\mathbf{u}-\mathbf{u_h}||_2 \leq \frac{C}{n^{p+1}}$



Estimation de $\sum_{k\notin K} \frac{1}{|k|^{2p+6}}$ par l'intégrale $2\int_{\frac{n}{2}-1}^{\infty} \frac{1}{k^{2p+6}}dk$

3. Théorème de convergence spectrale : $||\mathbf{u}-\mathbf{u_h}||_2 \leq \frac{C}{n^{p+1}}$

En remplacant ces bornes dans l'expression de départ :

$$||\mathbf{u}-\mathbf{u_h}||_2^2 = 2\pi \left(\frac{1}{k^4} \sum_{k \in K \setminus 0} |f_k - \hat{f}_k|^2 + \frac{1}{k^4} \sum_{k \notin K} |f_k|^2 \right)$$

3. Théorème de convergence spectrale : $||\mathbf{u}-\mathbf{u_h}||_2 \leq \frac{C}{n^{p+1}}$

En remplacant ces bornes dans l'expression de départ :

$$||\mathbf{u}-\mathbf{u_h}||_2^2 = 2\pi \left(\frac{1}{k^4} \sum_{k \in K \setminus 0} |f_k - \hat{f}_k|^2 + \frac{1}{k^4} \sum_{k \notin K} |f_k|^2 \right)$$

Avec :

$$\frac{1}{k^4} \sum_{k \in K \setminus 0} |f_k - \hat{f}_k|^2 \leq \frac{C_1}{n^{2p+2}}, \qquad \sum_{k \notin K} \frac{1}{k^4} |f_k|^2 \leq \frac{C_2}{n^{2p+5}}$$

3. Théorème de convergence spectrale : $||\mathbf{u} - \mathbf{u_h}||_2 \leq \frac{C}{n^{p+1}}$

En remplacant ces bornes dans l'expression de départ :

$$||\mathbf{u} - \mathbf{u_h}||_2^2 = 2\pi \left(\frac{1}{k^4} \sum_{k \in K \setminus 0} |f_k - \hat{f}_k|^2 + \frac{1}{k^4} \sum_{k \notin K} |f_k|^2 \right)$$

Avec :

$$\frac{1}{k^4} \sum_{k \in K \setminus 0} |f_k - \hat{f}_k|^2 \leq \frac{C_1}{n^{2p+2}}, \qquad \sum_{k \notin K} \frac{1}{k^4} |f_k|^2 \leq \frac{C_2}{n^{2p+5}}$$

D'où :

$$\begin{aligned} ||\mathbf{u} - \mathbf{u_h}||_2^2 &\leq 2\pi \left(\frac{C_1}{n^{2p+2}} + \frac{C_2}{n^{2p+5}} \right) \\ &\leq \frac{2\pi(C_1 + C_2)}{n^{2p+2}} \end{aligned}$$

Et en prenant la racine des deux côtés de l'inégalité, on arrive à ce que l'on voulait démontrer : $||\mathbf{u} - \mathbf{u_h}||_2 \leq \frac{C}{n^{p+1}}$ avec C une constante.

4. Interprétation et illustration

1. Même si u est deux fois plus dérivable que f, la méthode spectrale converge seulement comme si u avait la même régularité que f.

4. Interprétation et illustration

1. Même si u est deux fois plus dérivable que f, la méthode spectrale converge seulement comme si u avait la même régularité que f.
2. On peut réécire le résultat du théorème précédent sous la forme : $||\mathbf{u} - \mathbf{u_h}||_2 = O(h^{p+1})$

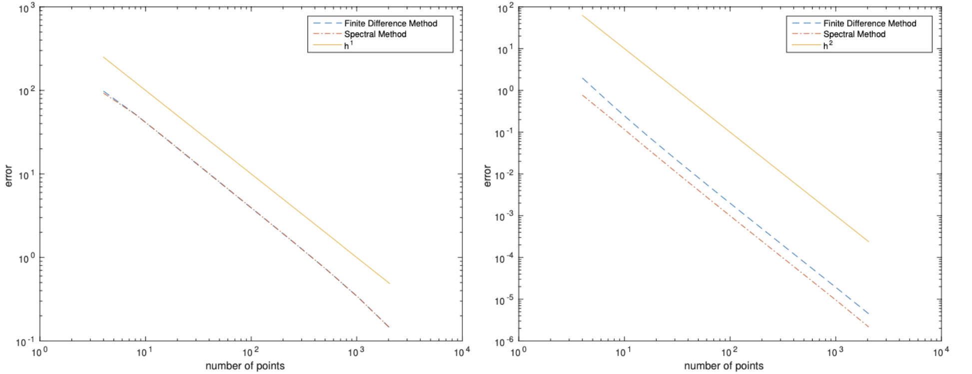
4. Interprétation et illustration

1. Même si u est deux fois plus dérivable que f, la méthode spectrale converge seulement comme si u avait la même régularité que f.
2. On peut réécire le résultat du théorème précédent sous la forme : $||\mathbf{u} - \mathbf{u_h}||_2 = O(h^{p+1})$
3. Seule la régularité de f détermine la vitesse de convergence de la méthode.

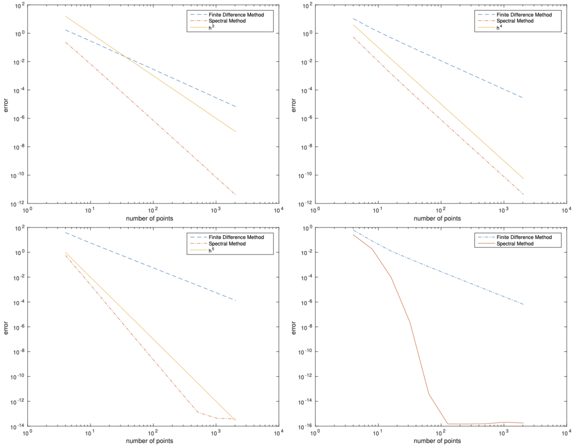
4. Interprétation et illustration

1. Même si u est deux fois plus dérivable que f, la méthode spectrale converge seulement comme si u avait la même régularité que f.
2. On peut rééecire le résultat du théorème précédent sous la forme : $||\mathbf{u} - \mathbf{u_h}||_2 = O(h^{p+1})$
3. Seule la régularité de f détermine la vitesse de convergence de la méthode.
4. Si f est infiniment différentiable, la méthode convergera toujours plus vite que $O(h^p)$, pour tout p. On appelle ce type de convergence : exponentielle ou spectrale.

4. Interprétation et illustration



4. Interprétation et illustration



```
p=10;
for j=1:6
  nmax=2^(p+3); [ur,x0]=FFPoisson1d(f{j},0,2*pi,nmax);     % reference solution
  n=2*2.^(1:p);
  for i=1:p,
    [u,x]=FDPoisson1d(f{j},0,2*pi,n(i));                    % finite difference
    errfd(i)=1/sqrt(n(i))*norm(ur(1:nmax/n(i):nmax+1)-u); % solutions
  end;
  for i=1:p;
    [u,x]=FFPoisson1d(f{j},0,2*pi,n(i));                    % discrete spectral
    errff(i)=1/sqrt(nd(i))*norm(ur(1:nmax/n(i):nmax+1)-u);% solutions
  end;
  if j<6
    loglog(nd,errfd,'--',n,errff,'-.',n,1000./n.^j,'-');
    legend('Finite Difference Method','Spectral Method',['h^' num2str(j)])
  else
    loglog(nd,errfd,'-.',n,errff,'-');
    legend('Finite Difference Method','Spectral Method')
  end
  xlabel('number of points'); ylabel('error');
end
```