Séminaire : Equations différentielles

projet 2 : Téléscopes

Liliana Canosa Alves, Lucile Alys Favero, Nicolas Schaub

November 1, 2022

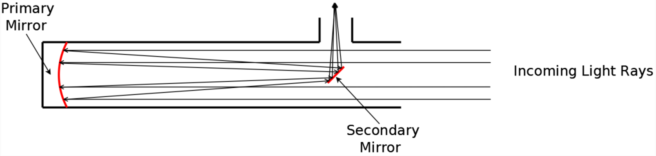
- Section de mathématiques - Semestre automne

Table des matières

Ce projet modélise le test: **"Foucault Knife Edge Test"**
Un test communément utilisé par les astraunomes amateurs pour la construction d'un miroir pour les télescopes réfléchissant.

Comment fonctionne un téléscope ?

Comment fonctionne un téléscope ?

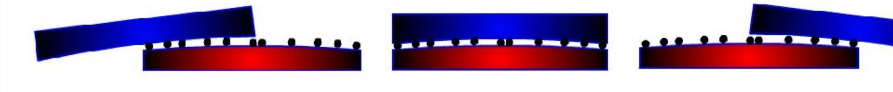


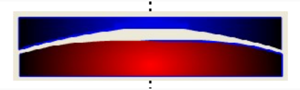
Pour former l'image, le miroir primaire doit être de forme parabolique avec une précision très élevée.

Fabrication d’un des miroirs du téléscope

Fabrication d'un des miroirs du téléscope

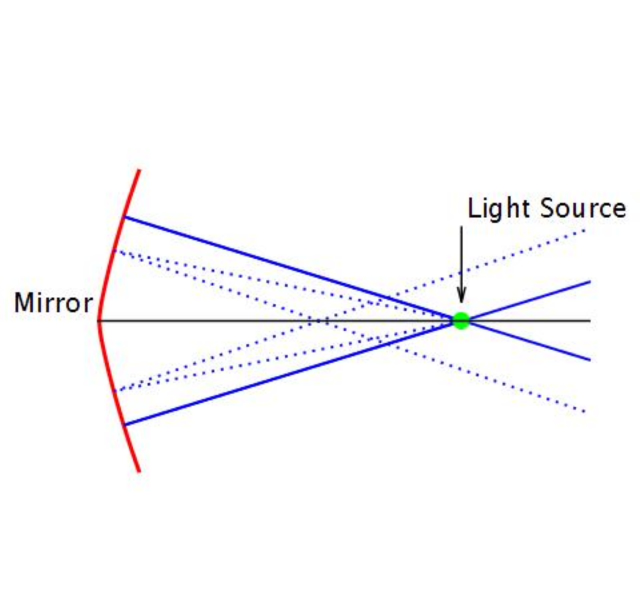
- Deux disques en verres
- Sur une surface immobile
- De l'eau et des grains abrasifs entre les disques
- Mouvements





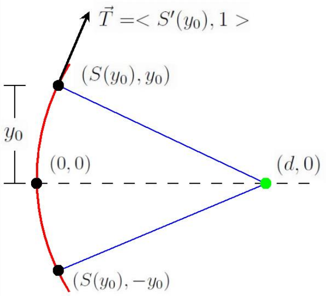
Le test FKET

Le test FKET



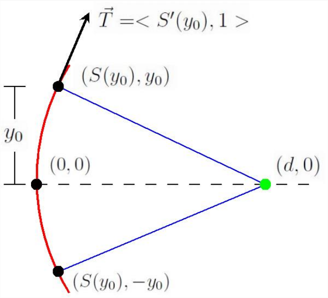
Le test FKET

- $x = S(y), \qquad S(0) = 0$
- $-R < y < R, \qquad R > 0$
- Par hypothèse de symétrie : $S(y) = S(-y)$
- But : Relever les distances d pour tout y



Comment le test permet-il de vérifer la forme du miroir ?

Comment permet-il de vérifer la forme du miroir ?



- $\vec{v} = (S(y_0) - d, y_0)$
- $\vec{T} = (S'(y_0), 1)$

$$\vec{v} \perp \vec{T} \iff \begin{pmatrix} S(y) - d(y) \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S'(y) \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$
$$\iff (S(y) - d(y))S'(y) + y = 0$$
$$\iff S'(y) = \frac{-y}{S(y) - d(y)} = \frac{y}{d(y) - S(y)}$$

Trois exemples théoriques

Un exemple simple

Un exemple avec $d(y) = 1.5, \quad \forall y.$

La résolution devient :

$$
\begin{aligned}
S'(y) = \frac{y}{d - S(y)} &\iff \frac{dS(y)}{dy} = \frac{y}{d - S(y)} \\
&\iff dS(y)\big(d - S(y)\big) = ydy \\
&\iff \int dS(y)\big(d - S(y)\big) = \int ydy \\
&\iff dS(y) - \frac{S(y)^2}{2} = \frac{y}{2} + c \\
&\iff -\frac{S(y)^2}{2} dS(y) - \frac{y}{2} - c = 0
\end{aligned}
$$

Un exemple simple

$$\Delta = d^2 - 4\Big(-\frac{1}{2}\Big)\Big(-\frac{S(y)^2}{2} - c\Big) = d^2 - y^2 - 2c = d^2 - y^2 - c'$$

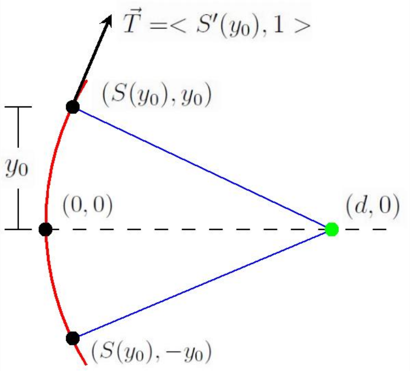
$$\Rightarrow S(y)_{1,2} = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 - y^2 + c'}}{2\Big(-\frac{1}{2}\Big)} = d \pm \sqrt{d^2 - y^2 + c'}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S(0) = 0 \Rightarrow & S_1(0) = d + \sqrt{d^2 + c'} = 0 \\ & S_2(0) = d - \sqrt{d^2 + c'} = 0 \Rightarrow c' = 0 \end{aligned}$$

Donc $S(y) = d - \sqrt{d^2 - y^2}$ avec $d(y) = 1.5 \qquad \forall y$

Forme sphérique du miroir

Explication géométrique



Existence et unicité

Supposons que $d(y)$ est une fonction raisonnable
ie. continûment différentiable et $d(y) \geq M > 0$ M constant.

Il est possible alors d'affirmer que l'équation différentielle
$S'(y) = \frac{-y}{S(y)-d(y)} = \frac{y}{d(y)-S(y)}$ possède une unique solution avec $S(0)$

Théorème existence et unicité

Théorème. Soit $f(x, y)$ une fonction à valeur réelle continue sur le rectangle

$$R = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}.$$

Supposons que f a une dérivée partielle par rapport à y et que cette dérivée partielle $\partial f / \partial y$ est également continue sur le rectangle R. Il existe alors un intervalle

$$I = [x_0 - h, x_0 + h] \text{ (avec } h \leq a)$$

de telle sorte que le problème de la valeur initiale

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

a une solution unique $y(x)$ définie sur l'intervalle I.

Deuxième exemple théorique

Supposons maintenant que : $d(y) = \frac{1}{2} + y^2$.
On va trouver des approximations numériques et la solution exacte.

Approximations numériques

Rappelons trois méthodes pour approximer la solution d'une équation différentielle de la forme :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

- **Méthode d'Euler**
- **Méthode Euler améliorée**
- **Méthode Runge-Kutta du quatrième ordre**

Marche à suivre

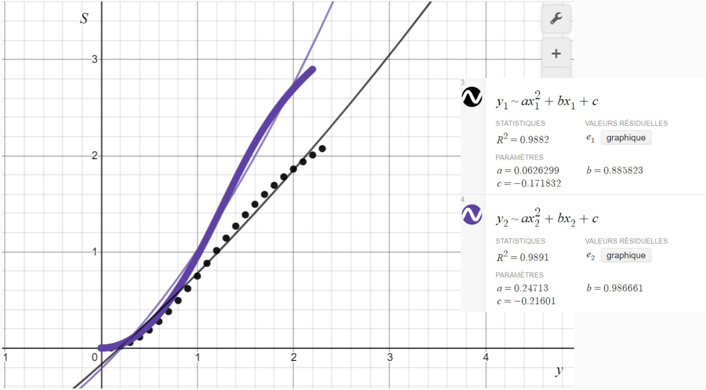
- Implémentation sur Excel
- Tracer les points obtenus sur Desmos
- Analyse de régression parabolique sur Desmos : trouver les paramètres de la parabole qui correspondent le mieux aux données

Méthode d'Euler

$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad n = 0, 1, 2, \ldots \quad$ où $h > 0$ est la taille du pas.

Ici, on a : $y \longrightarrow S(y)$ et $x \longrightarrow y$

$$S_{n+1} = S_n + h\frac{y_n}{d - S_n}$$

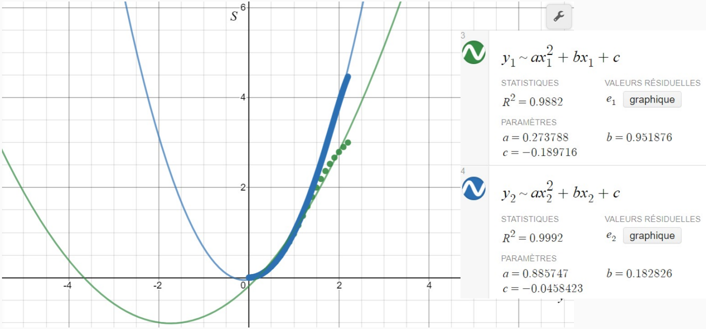


Méthode d'Euler améliorée

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))\right]$$

Ici :

$$S_{n+1} = S_n + \frac{h}{2}\left(\frac{y_n}{d - S_n} + \frac{y_n + h}{d - \left(S_n + h\frac{y_n}{d - S_n}\right)}\right)$$



Méthode Runge-Kutta du quatrième ordre

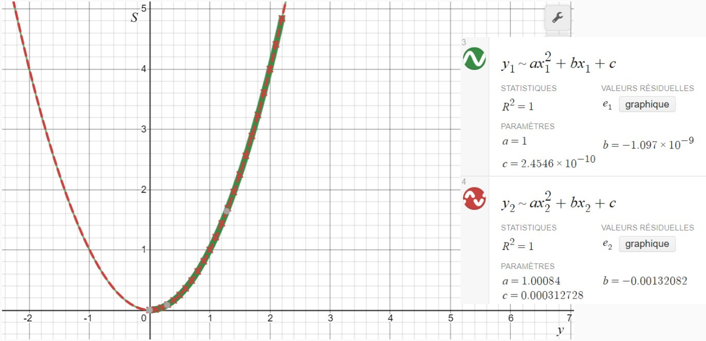
$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) \\
k_1 &= hf(x_n, y_n), \\
k_2 &= hf(x_n + h/2, y_n + k_1/2), \\
k_3 &= hf(x_n + h/2, y_n + k_2/2), \\
k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3)\,.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Méthode Runge-Kutta du quatrième ordre

Ici :

$$
\begin{aligned}
S_{n+1} &= S_n + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) \\
k_1 &= h\frac{y_n}{d - S_n}, \\
k_2 &= h\frac{y_n + \frac{h}{2}}{d - \left(S_n + \frac{k_1}{2}\right)}, \\
k_3 &= h\frac{y_n + \frac{h}{2}}{d - \left(S_n + \frac{k_2}{2}\right)}, \\
k_4 &= h\frac{y_n + h}{d - \left(S_n + k_3\right)} .
\end{aligned}
$$

Méthode Runge-Kutta du quatrième ordre



Confrontation des méthodes

La méthode de Runge-Kutta est la plus précise. On obtient approximativement : $S(y) = y^2$

Method	CPU Time (s)
Improved Euler	8×10^{-6}
Midpoint	8×10^{-6}
RK4	0.00001

Solution exacte

1. Wolfram : $-\frac{1}{2}W\left(\alpha e^{2y^2+c_1}\right)+y^2$ avec :
   - $\alpha = -0.367879$
   - W : La fonction transcendantale de Lambert
   - Réciproque de $f(\omega) = \omega e^{\omega}$
   - $W(z) = \omega$ tel que $z = \omega e^{\omega}$
2. $S(y) = y^2$ est une solution particulière
3. Par unicité de la solution, en mettant à égalité les deux solutions :

$$W\left(\alpha e^{2y^2+c_1}\right) = 0$$

4. Trouver c_1:

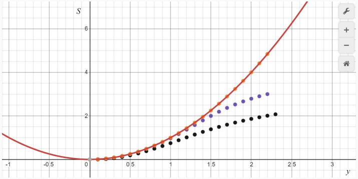
$$W(z)e^{\omega} = \omega e^{\omega} = z = 0 \Rightarrow z = 0 \qquad \alpha e^{2y^2+c_1} = 0 \Rightarrow c_1 = -\infty$$

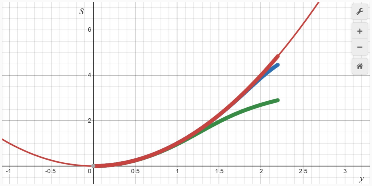
Comparaison : méthodes numériques et solution exacte

Graphique des différentes méthodes numériques avec la solution exacte $S(y) = y^2$

Comparaison : méthodes numériques et solution exacte

Graphique des différentes méthodes numériques avec la solution exacte $S(y) = y^2$





La **méthode de Runge-Kutta d'ordre 4** est la meilleure car ses points approximent le mieux la parabole.

Cas plus complexe

Supposons maintenant que : $d(y) = \frac{1}{4} + y^2$

1. Solution Wolfram :

$$S(y) = -0.5W\big(- 0.303265e^{2y^2}\big) + y^2 - 0.25,$$

avec : $W(z) = \omega$ tel que $z = \omega e^{\omega}$ (Réciproque de $f(\omega) = \omega e^{\omega}$)

Cas plus complexe

Supposons maintenant que : $d(y) = \frac{1}{4} + y^2$

1. Solution Wolfram :

$$S(y) = -0.5W\big(-0.303265e^{2y^2}\big) + y^2 - 0.25,$$

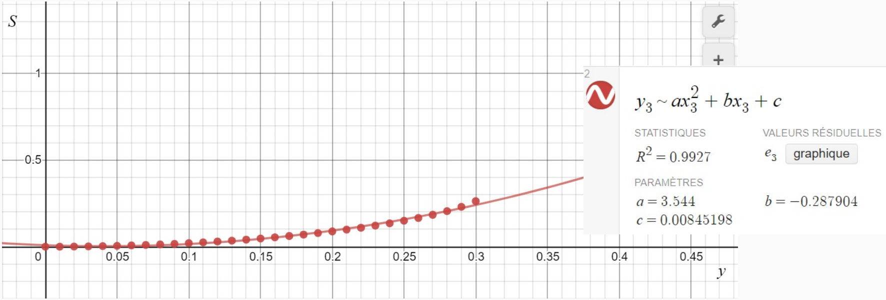
   avec : $W(z) = \omega$ tel que $z = \omega e^{\omega}$ (Réciproque de $f(\omega) = \omega e^{\omega}$)

2. Utilisons la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 pour trouver une bonne approximation :

   - **Implémentation** de la méthode sur Excel
   - **Tracer les points** obtenus sur Desmos
   - **Analyse de régression** sur Desmos : trouver les paramètres qui correspondent le mieux aux données

Cas plus complexe

- Approximation numérique avec **la méthode de Runge-Kutta**
- **Régression parabolique** de la forme : ax^2
- Précision de $R^2 = 0.9927$
- **Le miroir a une forme parabolique**



Cas plus complexe

REMARQUE

- Quand $y > 0.31076$, la méthode ne fonctionne plus.
- Pourquoi ?

$$S(y) = -0.5W\big(-0.303265e^{2y^2}\big) + y^2 - 0.25$$

avec: $W(z) = \omega$ tel que $z = \omega e^{\omega}$ (Réciproque de $f(\omega) = \omega e^{\omega}$)

Cas plus complexe

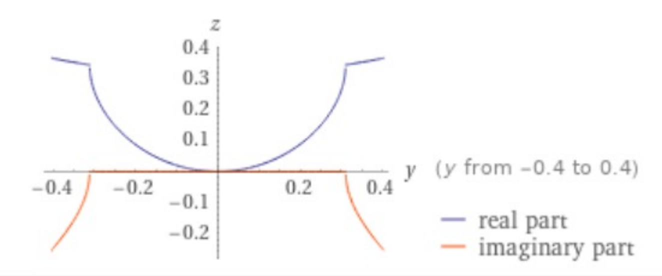
REMARQUE

- Quand $y > 0.31076$, la méthode ne fonctionne plus.
- Pourquoi ?

$$S(y) = -0.5W\left(-0.303265e^{2y^2}\right) + y^2 - 0.25$$

avec: $W(z) = \omega$ tel que $z = \omega e^{\omega}$ (Réciproque de $f(\omega) = \omega e^{\omega}$)

- Car la partie imaginaire de la solution est alors non-nulle.



Problème pratique

Difficulté pratique

Dans la pratique, on ne peut pas mesurer $d(y)$ pour chaque y.

Marche à suivre :

1. **Mesurer plusieurs valeurs de** y entre 0 et R
2. **Interpoler ces données** pour former une fonction $d_p(y)$
3. **Résoudre numériquement** l'EDO $S'(y) = \frac{y}{d(y)-S(y)}, \quad S(0) = 0$ en utilisant $d_p(y)$ à la place de $d(y)$.

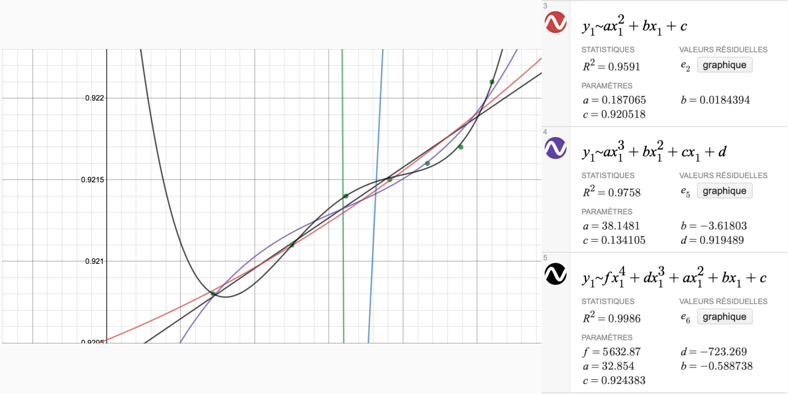
Exemple pratique

- Voici plusieurs valeurs de y d'un miroir de hauteur $0,054$ mètre

y (mètres)	$d(y)$ (mètres)
1.44×10^{-2}	0.9208
2.50×10^{-2}	0.9211
3.23×10^{-2}	0.9214
3.82×10^{-2}	0.9215
4.33×10^{-2}	0.9216
4.78×10^{-2}	0.9217
5.20×10^{-2}	0.9221

Exemple pratique

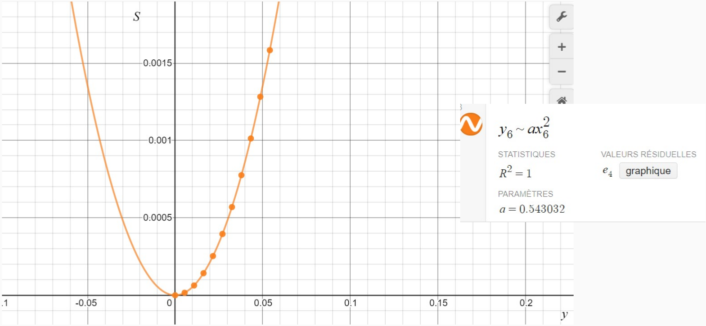
- **Interpoler ces données** pour former une fonction $d_p(y)$



- $d_p(y) \approx 5632x^4 - 723.3x^3 + 0.9243x^2 - 0.5887x + 0.9243$
- Précision de $R^2 = 0.998$

Exemple pratique

- **Résoudre numériquement l'EDO** en utilisant $d_p(y)$ à la place de $d(y)$. On utilise Runge-Kutta d'ordre 4.



- **Régression parabolique** de la forme : ax^2
- Précision de $R^2 = 1$
- **Le miroir a une forme parabolique**