L'équation de la chaleur : introduction

Présentation: Liliana Canosa Alves
Rédaction : Lucile Favero

25 Février 2020

1 But

Nous cherchons à déterminer la variation dans le temps de la température d'un corps grâce à une équation aux dérivées partielles.

2 Variation homogène

2.1 La loi de refroidissement de Newton

La loi de refroidissement de Newton permet de décrire une variation homogène de la température dans un corps u :

$$u_t = l(\tilde{u} - u) \tag{1}$$

où :

- l est une constante de proportionalité qui dépend de la matière constituant le corps.
- $\tilde{u}$ est la température ambiante.
- u est la température du corps considéré.

2.2 Limitation

Cette représentation est assez restrictive étant donné que l'on considère un corps simple, chauffant uniformément. En pratique, ce n'est pas toujours le cas.

2.3 Solution

Nous allons introduire un maillage sur le corps, et utiliser des volumes différentielles (infiniments petits), dans lesquels la variation de température sera considérée comme quasiment uniforme.

3 Flux de chaleur

Soit le corps étudié Ω, un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^3$. La quantité de chaleur de ce corps est représentée par l'équation :

$$\int_\Omega u(x,t)dx \tag{2}$$

avec $u(x,t)$, la température du corps au point $x \in \mathbb{R}^3$ et au temps t.

En dérivant par rapport au temps, on obtient la variation de la température dans le corps :

$$c\rho\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega u(x,t)dx \tag{3}$$

où

- c et ρ sont des constantes qui dépendent de la matière constituant le corps.
- u(x,t) désigne la température au point x et au temps t.

L'équation (3) peut s'écrire comme la somme de la variation de la température sur le bord du corps et à l'intérieur.

- Le flux de chaleur qui entre ou sort du domaine par les bords est donné par:

  $$\int_{\partial\Omega} -F(x(s),t)n(s)ds \tag{4}$$

  où:

  - $F(x,t)$ décrit le flux de chaleur qui entre ou sort du domaine par le bord.
  - $n(x)$ est l'unité différentielle sur le bord. C'est le vecteur normal perpendiculaire au plan tangent au point x.

  Remarque. *Le signe moins est une convention.*

- Le flux de chaleur à l'intérieur du domaine est donné par :

  $$\int_\Omega \tilde{f}(x,t)dx \tag{5}$$

  où

  - $\tilde{f}(x,t)$ décrit la quantité de chaleur ajoutée (source) ou enlevée (puits).

Ainsi, le flux de chaleur du corps est donné par l'expression suivante :

$$c\rho\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega u(x,t)dx = \int_{\partial\Omega} F(x(s),t)n(s)ds + \int_\Omega \tilde{f}(x,t)dx \tag{6}$$

Remarque. *Le flux tangent ne contribut pas.*

4 Developpement

Dans cette section, nous allons developper l'équation (6) pour pouvoir trouver une EDP.

4.1 Rappels

- Pour une fonction $u : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, le *gradient* est défini par :

$$\nabla u := \begin{pmatrix} u_{x_1} \\ \vdots \\ u_{x_d} \end{pmatrix} \tag{7}$$

- Pour une fonction $\mathbf{u} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$, la *divergence* est définie par :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} := \partial_{x_1} \mathbf{u}_1 + ... + \partial_{x_d} \mathbf{u}_d \tag{8}$$

- *Théorème de la divergence*

$$\int_V \nabla \cdot F dV = \int_S F n dS \tag{9}$$

où $S = \partial V$

4.2 La loi de Fourier

La loi de Fourier sur le flux de chaleur est donnée par l'expression suivante :

$$F = -k \nabla u \tag{10}$$

où

- F est le champ de vecteur décrivant le flot de température en $[J/m^2 s]$.
- k est une constante qui dépend de la matière constituant le corps en $[J/smK]$.
- ∇u est le gradient de la température en $[K/m]$.

4.3 Equation de la chaleur

En utilisant l'expression de F donnée par (10) dans (6), puis le théorème de la divergence, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega u(x,t) dx &= \frac{1}{c\rho} \int_{\partial\Omega} k \nabla u n(s) ds + \int_\Omega \tilde{f}(x,t) dx \\ &= \frac{1}{c\rho} \int_\Omega \nabla \cdot k \nabla u n(s) ds + \int_\Omega \tilde{f}(x,t) dx \\ &= \int_\Omega \nabla \cdot a \nabla u n(s) ds + \int_\Omega \tilde{f}(x,t) dx \end{aligned} \tag{11}$$

avec $a := \frac{k}{c\rho}$ constante indépendante de la température.
Etant donné que le domaine est choisit arbitrairement et de manière indépendante de la température, nous pouvons échanger l'ordre de l'intégrale et de la dérivée partielle dans l'équation (11), et ainsi nous avons :

$$(11) \iff \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) - \nabla \cdot a \nabla u - \tilde{f}(x,t) dx = 0 \tag{12}$$

Ce qui nous donne l'EDP de la chaleur :

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \nabla \cdot a \nabla u + \tilde{f}(x,t) \tag{13}$$

5 EDP parabolique

Rappel 5.1. ***classification des EDP***
Une EDP de la forme :

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_y = f(x, y, u, u_x, u_y)$$

est parabolique si $b^2 = 4ac$

L'équation de la chaleur est une EDP parabolique. En effet, $a = 0, b = 0$ donc on a bien: $b^2 = 4ac$