# CLASE 01

# Esperanza condicional

Fijemos $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y las v.a.'s

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ medibles.

Recordemos,

$$\sigma(Z) = \{ Z^{-1}(A) : A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \}$$

$$= \{ \{ Z \in A \} : A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \}$$

$$= \{ \text{cuestionario de preguntas sobre } Z \}.$$

$$\sigma(Z, W) = \{ \{ (Z, W) \in A \} : A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} \}.$$

$$= \sigma(\sigma(Z) \cup \sigma(W)) \quad \text{(EJER.)}$$

$$=: \sigma(Z) \vee \sigma(W).$$

Además, dado $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, sub. $\sigma$-álgebra:

$\sigma(Z) \subseteq \mathcal{G} \iff$ Con la información $\mathcal{G}$, po "intuición" demos responder Todo sobre $Z$, "$Z \in \mathcal{G}$".

$\Leftrightarrow$ $Z$ es $\mathcal{G}$-medible.

**Obs:** Si $Z_1, Z_2, \ldots$ son $\mathcal{G}$-medibles, entonces $\limsup Z_n$ y $\liminf Z_n$ son $\mathcal{G}$-medibles.

**Lema:** Sean $Z, W$ integrables. (EJER.)

$$Z \underset{a.s}{\leq} W \Leftrightarrow \int_A Z \leq \int_A W, \ \forall A \in \mathcal{F}.$$

**Obs:**

- $$\underbrace{\int_A Z = \int_A W, \ \forall A \in \mathcal{F}}_{\text{Basta } A \in \sigma(Z, W).} \Leftrightarrow Z \overset{a.s}{=} W.$$

**Teorema:** Dada $X$ integrable y $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ sub. $\sigma$-álg., existe $Z$ v.a. tal que:

1) $Z$ es $\mathcal{G}$-medible.

2) $\int_A Z = \int_A X, \ \forall A \in \mathcal{G}.$

Adicionalmente, si $W$ integrable cumple 1) y 2), entonces $W \overset{a.s}{=} Z$.

**Def**: Dado $X$ integrable y $\mathcal{G}$ sub. $\sigma$-alg. de $\mathcal{F}$, definimos $E[X|\mathcal{G}]$ como la clase de todas las variables cumpliendo con 1) y 2) del Teorema previo.

También diremos "$Z$ es versión de $E[X|\mathcal{G}]$" si $Z$ cumple 1) y 2).

**Obs**: Es fácil verificar que:

- $X$ es $\mathcal{G}$-medible $\Rightarrow E[X|\mathcal{G}] \text{ "=" } X$.
- $X \perp \mathcal{G}$ ($\sigma(X)$ y $\mathcal{G}$ son independientes) $\Rightarrow E[X|\mathcal{G}] \overset{a.s.}{=} E[X]$.
- $X, Y$ son integrables, $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow$
  $E[X+Y|\mathcal{G}] \overset{a.s.}{=} E[X|\mathcal{G}] + E[Y|\mathcal{G}]$,
  $E[\alpha X|\mathcal{G}] \overset{a.s}{=} \alpha E[X|\mathcal{G}]$.
- $X, Y$ integrables y $X \underset{a.s.}{\leq} Y \Rightarrow$
  $E[X|\mathcal{G}] \leq E[Y|\mathcal{G}]$.

- Para $X$ integrable, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$, sub. $\sigma$-álgebras, vale $E[E[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] \overset{a.s.}{=} E[X|\mathcal{H}]$.
(propiedad de la torre)

## Teorema de la convergencia monótona:

Suponga $X_n$, $n \in \mathbb{N}$ son v.a.'s tal que $0 \overset{a.s}{\leq} X_1 \overset{a.s}{\leq} X_2 \overset{a.s}{\leq} \cdots$ y $X$ una v.a. tal que $X_n \xrightarrow{a.s.} X$. Fijemos $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, sub. $\sigma$-álgebra. Si $X$ es integrable ($X_n$ integrable $\forall n$), entonces $E[X_n|\mathcal{G}] \xrightarrow{a.s.} E[X|\mathcal{G}]$.

### Proof:

Sabemos $X_n \uparrow X$. Fije $A \in \mathcal{G}$.

$\Rightarrow 0 \leq X_n \cdot 1_A \uparrow X \cdot 1_A$

$\overset{TCM}{\Rightarrow} \int X_n 1_A \longrightarrow \int X 1_A$.

Sean $Z_n$, $Z$ versión de $E[X_n|\mathcal{G}]$ y $E[X|\mathcal{G}]$, respectivamente.

Por otro lado, $Z_1 \overset{a.s}{\leq} Z_2 \overset{a.s}{\leq} \cdots$.

Así, $\Omega^* := \bigcap_{k\geq 1} \{Z_k \leq Z_{k+1}\}$ Tiene probabilidad 1.

Luego, podemos definir $\eta := \begin{cases} \lim Z_n, & \text{sobre } \Omega^* \\ 0, & \text{sobre } \Omega\setminus\Omega^* \end{cases}$

$\eta : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ es $\mathcal{G}$-medible.

Para $A \in \mathcal{G}$ : $Z_n \cdot 1_A \uparrow \eta \cdot 1_A$

$\Rightarrow \int Z_n \cdot 1_A \to \int \eta \cdot 1_A$.

Como $\eta$ y $Z$ son $\mathcal{G}$-medibles: $Z \overset{a.s.}{=} \eta$. ✓

(EJER.): Sean $X_n, n\in\mathbb{N}$, v.a.'s y $X$ v.a. Tales que $X_n \downarrow X$ a.s.. Fije $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ sub. $\sigma$-álg.. Si $X_1$ y $X$ son integrables, entonces:

1) $X_n$ es integrable, $\forall n$.

2) $E[X_n | \mathcal{G}] \xrightarrow{a.s.} E[X | \mathcal{G}]$.

## Teorema de convergencia dominada

Fijemos $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, sub. $\sigma$-álgebra.
Sean $X_n$ v.a.'s y $Z$ integrable Tales que $|X_n| \leq Z$ a.s.

Si $X_n \xrightarrow{a.s.} X$, entonces ($X$ integrable y $X_n$ integrable $\forall n$) $E[X_n|\mathcal{G}] \xrightarrow{a.s.} E[X|\mathcal{G}]$.

**Proof:**

Haciendo $n \to \infty$: $|X| \leq Z$, a.s.

Tenemos $|E[X_n|\mathcal{G}] - E[X|\mathcal{G}]| =$

$|E[X_n - X|\mathcal{G}]| \underset{a.s.}{\leq} E[|X_n - X| \,|\mathcal{G}]$

**EJER:** $U$ integrable $\Rightarrow |E[U|\mathcal{G}]| \underset{a.s}{\leq} E[|U||\mathcal{G}]$.

Definamos $U_N := \sup\{|X_n - X_m| : n, m \geq N\}$, medible por ser supremo de cantidad enumerable de medibles.

Como $X_n \xrightarrow{a.s.} X \in \mathbb{R}$: $U_N \downarrow 0$ a.s.

$\underset{\text{T.C.M E.C.}}{\Rightarrow}$ $E[U_N|\mathcal{G}] \xrightarrow{a.s.} 0$.

Siempre que $N \leq n$: $|X_n - X| \leq U_N$.

$\Rightarrow E[|X_n - X| \,|\mathcal{G}] \leq E[U_N|\mathcal{G}]$.

Con $N$ fijo, haciendo $n \to \infty$:

$$\limsup E[|X_n - X| \mid \mathcal{G}] \leq E[U_N \mid \mathcal{G}]$$

Haciendo $N \to \infty$:

$$\limsup E[|X_n - X| \mid \mathcal{G}] \leq 0 \quad a.s.$$

$$0 \leq \liminf \nabla \leq \limsup \nabla .$$

$$\therefore \; E[|X_n - X| \mid \mathcal{G}] \xrightarrow{a.s.} 0 .$$

✓

## Libros:

- A Course in Prob. theory (K.L. Chung)
- Prob. theory and Examples (Durrett)
- Measure theory, Prob. and sto. Pro. (Le Gall).