Concavidad y Optimización

Abelardo Jordán Liza

Maestría en Matemáticas Aplicadas
PUCP

Lima Agosto 31, 2023

Ejemplos

(a) $C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\leq 1\}$ *es tal que* $lin(C)=\{(0,0,z): z\in\mathbb{R}\}$.

(b) $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\leq 1\}$, *entonces* $lin(C)=....$

Teorema

Sea C un conjunto convexo cerrado no vacío y sea $S=lin(C)$, entonces

$$C=S\oplus(C\cap S^{\perp})$$

y el conjunto convexo $C\cap S^{\perp}$ no contiene rectas.

Ejemplos

(a) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ *es tal que* $lin(C) = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$.

(b) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 1\}$, *entonces* $lin(C) = ...$

Teorema

Sea C *un conjunto convexo cerrado no vacío y sea* $S = lin(C)$, *entonces*

$$C = S \oplus (C \cap S^\perp)$$

y el conjunto convexo $C \cap S^\perp$ *no contiene rectas.*

Prueba:
Sea $a \in C$, entonces como $\mathbb{R}^n = S \oplus S^\perp$, se sigue que existen $b \in S$ y $c \in S^\perp$ tales que $a = b + c$ (en forma única), de esto se sigue que $c = a - b = a + (-b) \in C + S = C$, por tanto $c \in C \cap S^\perp$ y en consecuencia $C \subset S \oplus (C \cap S^\perp)$.

Definición

Dado un conjunto finto de vectores $\{a^1, \cdots, a^m\}$, *el cono*

$$cone(\{a^1, \cdots, a^m\}) := \{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a^i : \lambda_1 \geq 0, \cdots, \lambda_m \geq 0\}$$

se denomina un cono finitamente generado por $\{a^1, \cdots, a^m\}$*(también denominado cono poliedral).*

Proposición

Un cono convexo, es finitamente generado, si y solo si, es poliedral.

Dem: $(\rightarrow)$ Suponga que C es un cono convexo finitamente generado, por decir $C = cone(\{a^1, \cdots, a^m\})$, entonces el politopo $co\{0, a^1, \cdots, a^m\}$ puede escribirse como intersección de una colección finita de semiespacios cerrados $S_1, \cdots, S_k$. Sea $A := \bigcap_{i, 0 \in Fr(S_i)} S_i$. Se prueba que $C = A$.

Teorema

Un conjunto de $\mathbb{R}^n$ es poliedral si, y solo si, puede expresarse como una suma Minkowski de un politopo y un cono convexo finitamente generado.

Esto signfica que si P es un conjunto poliedral, entonces existen conjuntos finitos de vectores A y B tales que

$$P = co(A) + cone(B).$$

(A es el conjunto de puntos extremos de P y B es un subconjunto de P_{∞}.).

Teorema

Un conjunto de $\mathbb{R}^n$ es poliedral si, y solo si, puede expresarse como una suma Minkowski de un politopo y un cono convexo finitamente generado.

Esto signfica que si P es un conjunto poliedral, entonces existen conjuntos finitos de vectores A y B tales que

$$P = co(A) + cone(B).$$

(A es el conjunto de puntos extremos de P y B es un subconjunto de P_{∞}.).
Si $A = \{a^1, \cdots, a^m\}$ y $B = \{d^1, \cdots, d^k\}$, entonces

$$P = \{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a^i + \sum_{j=1}^{k} \delta_j d^j : \lambda_i \geq 0, \delta_j \geq 0, \lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1\}$$

Proposición

Sea P un conjunto poliedral no vacío y sin rectas, y $f : P \to \mathbb{R}$ una función lineal que es acotada superiormente en P, entonces el problema

$$\begin{array}{rc} \text{máx} & f(x) \\ & x \in P \end{array}$$

se resuelve en un punto extremo de P.

Proposición

Sea P un conjunto poliedral no vacío y sin rectas, y $f : P \to \mathbb{R}$ una función lineal que es acotada superiormente en P, entonces el problema

$$\begin{array}{ll} \max & f(x) \\ & x \in P \end{array}$$

se resuelve en un punto extremo de P.
Dem:

Dado un espacio métrico (X,d) y un subconjunto cerrado y no vacío C de X, se define la distancia de un punto $x \in X$ al conjunto C por

$$d(x,C) := \min\{d(x,y) \ : \ y \in C\} \tag{1}$$

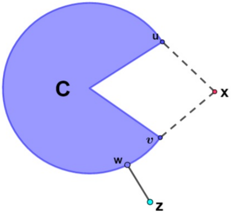
Esto genera una función $d_C : X \to [0 \ , \ +\infty)$ mediante $d_C(x) := d(x,C)$. Esta función se denomina " función distancia al conjunto C"

Dado un espacio métrico (X, d) y un subconjunto cerrado y no vacío C de X, se define la distancia de un punto $x \in X$ al conjunto C por

$$d(x, C) := \min\{d(x, y) \ : \ y \in C\} \tag{1}$$

Esto genera una función $d_C : X \to [0 \ , \ +\infty)$ mediante $d_C(x) := d(x, C)$. Esta función se denomina " función distancia al conjunto C"

El conjunto de puntos de C donde se alcanza el mínimo de (1), se denomina "Proyección de x en C ".

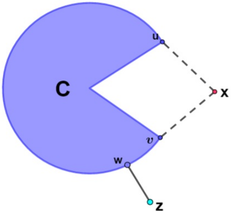


$P_C(x) = \{u, \ v\}$
$P_C(z) = \ \{ \ w \ \}$

Dado un espacio métrico (X, d) y un subconjunto cerrado y no vacío C de X, se define la distancia de un punto $x \in X$ al conjunto C por

$$d(x, C) := \min\{d(x, y) \ : \ y \in C\} \tag{1}$$

Esto genera una función $d_C : X \to [0\ ,\ +\infty)$ mediante $d_C(x) := d(x, C)$. Esta función se denomina " función distancia al conjunto C"
El conjunto de puntos de C donde se alcanza el mínimo de (1), se denomina "Proyección de x en C ".



$P_C(x) = \{u,\ v\}$
$P_C(z) = \{\ w\ \}$

Se ha visto en el curso de Fundamentos de Análisis, que en un Espacio de Hilbert X (como es el caso de $\mathbb{R}^n$ con la norma euclidiana), dado un conjunto convexo cerrado no vacío C, el conjunto $P_C(x)$ es unitario y esto da lugar a la función Proyección en C.

Recuerde que :

(i) $d(x, C) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{C}$.

(ii) Si C es cerrado no vacío y $x \notin C$ entonces $d(x, C) > 0$.

Proposición

Sea A una matriz de orden $m \times n$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Suponga que el $C \subset \mathbb{R}^n$ conjunto solución del sistema $Ax \leq b$ es no vacío, entonces $C_\infty = \{d \in \mathbb{R}^n : Ad \leq 0\}$.

Nota

La idea geométrica de separación (separación lineal de conjuntos) de dos conjuntos C_1 *y* C_2 *en* $\mathbb{R}^n$ *es que podamos trazar un hiperplano* H *de modo que* C_1 *esté incluída en un semiespacio cerrado determinado por* H*, y* C_2 *en el otro semiespacio cerrado. Note que si esto es posible con* C_1 *y* C_2*, también es posible con* $co(C_1)$ *y* $co(C_2)$*. Presentaremos tres conceptos fundamentales de separación para conjuntos convexos.*

Sean C_1 y C_2 subconjuntos convexos no vacíos de R^n, y $H = H(a, \alpha)$ un hiperplano.

[1] Cuando mencionemos simplemente semiespacios, nos estamos refiriendo a semiespacios cerrados.

Sean C_1 y C_2 subconjuntos convexos no vacíos de R^n, y $H = H(a, \alpha)$ un hiperplano. Se dice que H:

(a) **separa $\mathbf{C_1}$ y $\mathbf{C_2}$** si C_1 está contenido en uno de los semiespacios[1] determinados por H y C_2 en el otro semiespacio. Es decir, si

$$\langle a, x\rangle \leq \alpha \leq \langle a, y\rangle, \quad \forall x \in C_1, y \in C_2.$$

ó

$$\langle a, x\rangle \geq \alpha \geq \langle a, y\rangle, \quad \forall x \in C_1, y \in C_2.$$

[1] Cuando mencionemos simplemente semiespacios, nos estamos refiriendo a semiespacios cerrados.

Sean C_1 y C_2 subconjuntos convexos no vacíos de R^n, y $H = H(a, \alpha)$ un hiperplano. Se dice que H:

(a) **separa $\mathbf{C_1}$ y $\mathbf{C_2}$** si C_1 está contenido en uno de los semiespacios[1] determinados por H y C_2 en el otro semiespacio. Es decir, si

$$\langle a, x\rangle \leq \alpha \leq \langle a, y\rangle, \quad \forall x \in C_1, y \in C_2.$$

ó

$$\langle a, x\rangle \geq \alpha \geq \langle a, y\rangle, \quad \forall x \in C_1, y \in C_2.$$

(b) **separa propiamente $\mathbf{C_1}$ y $\mathbf{C_2}$** si H separa C_1 y C_2 y al menos uno de los C_i no está contenido en H.

[1] Cuando mencionemos simplemente semiespacios, nos estamos refiriendo a semiespacios cerrados.

Sean C_1 y C_2 subconjuntos convexos no vacíos de $\mathbb{R}^n$, y $H = H(a, \alpha)$ un hiperplano. Se dice que H:

(a) **separa $\mathbf{C_1}$ y $\mathbf{C_2}$** si C_1 está contenido en uno de los semiespacios[1] determinados por H y C_2 en el otro semiespacio. Es decir, si

$$\langle a, x\rangle \leq \alpha \leq \langle a, y\rangle, \quad \forall x \in C_1, y \in C_2.$$

ó

$$\langle a, x\rangle \geq \alpha \geq \langle a, y\rangle, \quad \forall x \in C_1, y \in C_2.$$

(b) **separa propiamente $\mathbf{C_1}$ y $\mathbf{C_2}$** si H separa C_1 y C_2 y al menos uno de los C_i no está contenido en H.

(c) **separa estrictamente $\mathbf{C_1}$ y $\mathbf{C_2}$** si H separa C_1 y C_2 y existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\langle a, x\rangle + \epsilon \leq \alpha \leq \langle a, y\rangle - \epsilon, \quad \forall x \in C_1, y \in C_2$$

[1] Cuando mencionemos simplemente semiespacios, nos estamos refiriendo a semiespacios cerrados.

Sean C_1 y C_2 subconjuntos convexos no vacíos de R^n, y $H = H(a, \alpha)$ un hiperplano. Se dice que H:

(a) **separa $\mathbf{C_1}$ y $\mathbf{C_2}$** si C_1 está contenido en uno de los semiespacios[1] determinados por H y C_2 en el otro semiespacio. Es decir, si

$$\langle a, x\rangle \leq \alpha \leq \langle a, y\rangle, \quad \forall x \in C_1, y \in C_2.$$

ó

$$\langle a, x\rangle \geq \alpha \geq \langle a, y\rangle, \quad \forall x \in C_1, y \in C_2.$$

(b) **separa propiamente $\mathbf{C_1}$ y $\mathbf{C_2}$** si H separa C_1 y C_2 y al menos uno de los C_i no está contenido en H.

(c) **separa estrictamente $\mathbf{C_1}$ y $\mathbf{C_2}$** si H separa C_1 y C_2 y existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\langle a, x\rangle + \epsilon \leq \alpha \leq \langle a, y\rangle - \epsilon, \quad \forall x \in C_1, y \in C_2$$

Ejemplo

1. *Sean C_1 la bola unitaria cerrada de $\mathbb{R}^n$ y $C_2 = \{p\}$ donde p es un punto de $\mathbb{S}^{n-1}$. Entonces el hiperplano tangente a C_1 en p, separa C_1 y C_2.*

[1] Cuando mencionemos simplemente semiespacios, nos estamos refiriendo a semiespacios cerrados.

Sean C_1 y C_2 subconjuntos convexos no vacíos de R^n, y $H = H(a, \alpha)$ un hiperplano. Se dice que H:

(a) **separa $\mathbf{C_1}$ y $\mathbf{C_2}$** si C_1 está contenido en uno de los semiespacios[1] determinados por H y C_2 en el otro semiespacio. Es decir, si

$$\langle a, x\rangle \leq \alpha \leq \langle a, y\rangle, \quad \forall x \in C_1, y \in C_2.$$

ó

$$\langle a, x\rangle \geq \alpha \geq \langle a, y\rangle, \quad \forall x \in C_1, y \in C_2.$$

(b) **separa propiamente $\mathbf{C_1}$ y $\mathbf{C_2}$** si H separa C_1 y C_2 y al menos uno de los C_i no está contenido en H.

(c) **separa estrictamente $\mathbf{C_1}$ y $\mathbf{C_2}$** si H separa C_1 y C_2 y existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\langle a, x\rangle + \epsilon \leq \alpha \leq \langle a, y\rangle - \epsilon, \quad \forall x \in C_1, y \in C_2$$

Ejemplo

1. *Sean C_1 la bola unitaria cerrada de $\mathbb{R}^n$ y $C_2 = \{p\}$ donde p es un punto de $\mathbb{S}^{n-1}$. Entonces el hiperplano tangente a C_1 en p, separa C_1 y C_2.*
2. *Sean $C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_{++} : xy \geq 1\}$ y $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$, entonces el hiperplano $H = \{(x, y) \ : y = 0\}$ separa propiamente a estos conjuntos, mas no los separa estrictamente.*

[1] Cuando mencionemos simplemente semiespacios, nos estamos refiriendo a semiespacios cerrados.

Sean C_1 y C_2 subconjuntos convexos no vacíos de R^n, y $H = H(a, \alpha)$ un hiperplano. Se dice que H:

(a) **separa $\mathbf{C_1}$ y $\mathbf{C_2}$** si C_1 está contenido en uno de los semiespacios[1] determinados por H y C_2 en el otro semiespacio. Es decir, si

$$\langle a, x\rangle \leq \alpha \leq \langle a, y\rangle, \quad \forall x \in C_1, y \in C_2.$$

ó

$$\langle a, x\rangle \geq \alpha \geq \langle a, y\rangle, \quad \forall x \in C_1, y \in C_2.$$

(b) **separa propiamente $\mathbf{C_1}$ y $\mathbf{C_2}$** si H separa C_1 y C_2 y al menos uno de los C_i no está contenido en H.

(c) **separa estrictamente $\mathbf{C_1}$ y $\mathbf{C_2}$** si H separa C_1 y C_2 y existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\langle a, x\rangle + \epsilon \leq \alpha \leq \langle a, y\rangle - \epsilon, \quad \forall x \in C_1, y \in C_2$$

Ejemplo

1. *Sean C_1 la bola unitaria cerrada de $\mathbb{R}^n$ y $C_2 = \{p\}$ donde p es un punto de $\mathbb{S}^{n-1}$. Entonces el hiperplano tangente a C_1 en p, separa C_1 y C_2.*
2. *Sean $C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_{++} : xy \geq 1\}$ y $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$, entonces el hiperplano $H = \{(x, y) \ : y = 0\}$ separa propiamente a estos conjuntos, mas no los separa estrictamente.*
3. *Si en el ejemplo, previo modificamos C_1 por el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2_{++} : x \leq 1, xy \geq 1\}$, se garantiza la separación estricta de C_1 y C_2.*

[1] Cuando mencionemos simplemente semiespacios, nos estamos refiriendo a semiespacios cerrados.

Proposición

Sean $C \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto no vacío, convexo y cerrado, y* $\overline{x} \notin C$. *Entonces, existe* $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$ *tal que*

$$\max_{x \in C} \langle a, x \rangle < \langle a, \overline{x} \rangle \tag{2}$$

Proposición

Sean $C \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto no vacío, convexo y cerrado, y* $\overline{x} \notin C$. *Entonces, existe* $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$ *tal que*

$$\max_{x \in C} \langle a, x \rangle < \langle a, \overline{x} \rangle \tag{2}$$

Si en (2) se hubiera presentado la desigualdad

$$\min_{x \in C} \langle a, x \rangle > \langle a, \overline{x} \rangle$$

la construcción de a cambia (cambio de signo).

Proposición

Sean $C \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto no vacío, convexo y cerrado, y* $\overline{x} \notin C$. *Entonces, existe* $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$ *tal que*

$$\max_{x \in C} \langle a, x \rangle < \langle a, \overline{x} \rangle \tag{2}$$

Si en (2) se hubiera presentado la desigualdad

$$\min_{x \in C} \langle a, x \rangle > \langle a, \overline{x} \rangle$$

la construcción de a cambia (cambio de signo).

Corolario

Sean $C \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto no vacío, convexo y cerrado, y* $\overline{x} \notin C$. *Entonces, existe un hiperplano que los separa estrictamente.*

Proposición

Sean $C \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto no vacío, convexo y cerrado, y* $\overline{x} \notin C$*. Entonces, existe* $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$ *tal que*

$$\max_{x \in C} \langle a, x \rangle < \langle a, \overline{x} \rangle \tag{2}$$

Si en (2) se hubiera presentado la desigualdad

$$\min_{x \in C} \langle a, x \rangle > \langle a, \overline{x} \rangle$$

la construcción de a cambia (cambio de signo).

Corolario

Sean $C \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto no vacío, convexo y cerrado, y* $\overline{x} \notin C$*. Entonces, existe un hiperplano que los separa estrictamente.*

Proposición

Sean $C \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto no vacío, convexo y cerrado, y* $\overline{x} \notin C$. *Entonces, existe* $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$ *tal que*

$$\max_{x \in C} \langle a, x \rangle < \langle a, \overline{x} \rangle \tag{2}$$

Si en (2) se hubiera presentado la desigualdad

$$\min_{x \in C} \langle a, x \rangle > \langle a, \overline{x} \rangle$$

la construcción de a cambia (cambio de signo).

Corolario

Sean $C \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto no vacío, convexo y cerrado, y* $\overline{x} \notin C$. *Entonces, existe un hiperplano que los separa estrictamente.*

Problema: ¿Si en la proposición, respecto a C solamente se hubiera dicho que es convexo no vacío, qué conclusión sobre separación se garantiza?

Proposición

Sean C_1 y C_2 conjuntos convexos, disjuntos y no vacíos, tales que C_1 es cerrado y C_2 es compacto, entonces existe un hiperplano que los separa estrictamente.

Proposición

Sean C_1 y C_2 conjuntos convexos, disjuntos y no vacíos, tales que C_1 es cerrado y C_2 es compacto, entonces existe un hiperplano que los separa estrictamente.

Prueba: La función $d_{C_1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua, y por tanto el problema

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & d_{C_1}(x) \\ s.a. & x \in C_2 \end{array}$$

tiene solución,

Proposición

Sean C_1 y C_2 conjuntos convexos, disjuntos y no vacíos, tales que C_1 es cerrado y C_2 es compacto, entonces existe un hiperplano que los separa estrictamente.

Prueba: La función $d_{C_1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua, y por tanto el problema

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & d_{C_1}(x) \\ s.a. & x \in C_2 \end{array}$$

tiene solución,es decir existe $a \in C_2$ tal que $d(a, C_1) \leq d(x, C_1), \ \forall x \in C_2$

Proposición

Sean C_1 y C_2 conjuntos convexos, disjuntos y no vacíos, tales que C_1 es cerrado y C_2 es compacto, entonces existe un hiperplano que los separa estrictamente.

Prueba: La función $d_{C_1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua, y por tanto el problema

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & d_{C_1}(x) \\ s.a. & x \in C_2 \end{array}$$

tiene solución,es decir existe $a \in C_2$ tal que $d(a, C_1) \leq d(x, C_1),\ \forall x \in C_2$ y por la cerradura de C_1, existe $b \in C_1$ tal que es el elemento más próximo de C_1 a a.

Proposición

Sean C_1 y C_2 conjuntos convexos, disjuntos y no vacíos, tales que C_1 es cerrado y C_2 es compacto, entonces existe un hiperplano que los separa estrictamente.

Prueba: La función $d_{C_1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua, y por tanto el problema

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & d_{C_1}(x) \\ s.a. & x \in C_2 \end{array}$$

tiene solución,es decir existe $a \in C_2$ tal que $d(a, C_1) \leq d(x, C_1),\ \forall x \in C_2$ y por la cerradura de C_1, existe $b \in C_1$ tal que es el elemento más próximo de C_1 a a.

Por la convexidad de los conjuntos, se cumplen:

$$\langle a - b, x - b\rangle \leq 0,\ \forall x \in C_1 \quad \text{y} \quad \langle b - a, y - a\rangle \leq 0,\ \forall y \in C_2$$

De la primera desigualdad, se tiene:

$$\begin{aligned} \langle b - a, x\rangle &\geq \langle b - a, b\rangle \\ &= \tfrac{1}{2}(\|b\|^2 - \|a\|^2 + \|b - a\|^2) \\ &= \tfrac{1}{2}(\|b\|^2 - \|a\|^2 - \|b - a\|^2) + \|b - a\|^2 \\ &= \langle b - a, a\rangle + \|b - a\|^2 \\ &\geq \langle b - a, y\rangle + \|b - a\|^2 \end{aligned}$$

La última desigualdad es válida $\forall y \in C_2$.

Definición

Dado $\emptyset \neq C$ un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Se dice que el hiperplano H soporta a C en $\overline{x} \in \overline{C}$, si H separa C y $\{\overline{x}\}$.

La existencia de un hiperplano soporte a C en $\overline{x} \in \overline{C}$, equivale a garantizar la existencia de un vector $a \neq 0$ tal que

$$\langle a, \overline{x} \rangle \leq \langle a, x \rangle, \quad \forall x \in C. \tag{3}$$

o lo que es lo mismo

$$\langle a, \overline{x} \rangle = \operatorname*{\acute{i}nf}_{x \in C} \langle a, x \rangle.$$

Teorema

Sean $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo no vacío, y $\overline{x} \notin int(C)$. Entonces, existe un hiperplano que pasa por $\overline{x}$ que separa C y $\overline{x}$, es decir, existe un vector $a \neq 0$ tal que

$$\langle a, \overline{x} \rangle \leq \langle a, x \rangle, \quad \forall x \in C \tag{4}$$

Definición

Sea $\emptyset \neq C \subset E$ *un conjunto convexo y* $f : C \to \mathrm{R}$ *una función. Se dice que:*

(a) f *es* **cóncava** *en* C, *si* $\forall x, y \in C$, $\forall t \in [0,1]$, *se cumple*

$$f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y) \tag{5}$$

(b) f *es* **estrictamente cóncava** *en* C, *si* $\forall x, y \in C$,*con* $x \neq y$, $\forall t \in]0,1[$, *se cumple*

$$f(tx + (1-t)y) > tf(x) + (1-t)f(y) \tag{6}$$

(c) f *es* **convexa** *en* C, *si* $\forall x, y \in C$, $\forall t \in [0,1]$, *se cumple*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \tag{7}$$

(d) f *es* **estrictamente convexa** *en* C, *si* $\forall x, y \in C$,*con* $x \neq y$, $\forall t \in]0,1[$, *se cumple*

$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y) \tag{8}$$

Las definiciones que siguen, se dan para funciones definidas en C un subconjunto convexo no vacío, en particular en $\mathbb{R}$.

Definición

Una función $f : C \to \mathbb{R}$, se llama:

(a) **casicóncava**, *si*

$$x, y \in C, t \in [0,1] \Rightarrow f(tx + (1-t)y) \geq \text{mín}\{f(x), f(y)\} \tag{9}$$

(b) **casiconvexa**, *si*

$$x, y \in C, t \in [0,1] \Rightarrow f(tx + (1-t)y) \leq \text{máx}\{f(x), f(y)\} \tag{10}$$

(c) **estrictamente casicóncava**, *si*

$$x, y \in C, x \neq y, t \in]0,1[\Rightarrow f(tx + (1-t)y) > \text{mín}\{f(x), f(y)\} \tag{11}$$

(d) **estrictamente casiconvexa**, *si*

$$x, y \in C, x \neq y, t \in]0,1[\Rightarrow f(tx + (1-t)y) < \text{máx}\{f(x), f(y)\} \tag{12}$$

Particularmente, las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que son monótonas, son ejemplos de funciones que son tanto casicóncavas como casiconvexas. Es fácil probar que toda función cóncava es casicóncava y que toda función convexa es casiconvexa, mas lo recíproco en general no es cierto. Además, , si f es casicóncava, entonces $-f$ es casiconvexa, y viceversa.

Dados un subconjunto no vacío C de $\mathbb{R}^n$ y una función $f : C \to \mathbb{R}$, y un número real λ. se definen los conjuntos:

Definición

$$L_\lambda(f) := \{x \in C : f(x) = \lambda\} \tag{13}$$

"conjunto de nivel λ de f".

$$S_\lambda(f) := \{x \in C : f(x) \leq \lambda\} \tag{14}$$

"conjunto de nivel inferior λ de f".

$$S^\lambda(f) := \{x \in C : f(x) \geq \lambda\} \tag{15}$$

"conjunto de nivel superior λ de f".