CLASE 01

Esperanza condicional

Fijemos $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y las v.a.'s

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ medibles.

Recordemos,

$$\sigma(Z) = \{ Z^{-1}(A) : A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \}$$

$$= \{ \{ Z \in A \} : A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \}$$

$$= \{ \text{cuestionario de preguntas sobre } Z \}.$$

$$\sigma(Z, W) = \{ \{ (Z, W) \in A \} : A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} \}.$$

$$= \sigma(\sigma(Z) \cup \sigma(W)) \quad \text{(EJER.)}$$

$$=: \sigma(Z) \vee \sigma(W).$$

Además, dado $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, sub. σ-álgebra:

$\sigma(Z) \subseteq \mathcal{G} \iff$ Con la información $\mathcal{G}$, por "intuición" podemos responder Todo sobre Z, "$Z \in \mathcal{G}$".

$\Leftrightarrow$ Z es $\mathcal{G}$ - medible.

Obs: Si $Z_1, Z_2, \ldots$ son $\mathcal{G}$ - medibles, entonces $\limsup Z_n$ y $\liminf Z_n$ son $\mathcal{G}$ - medibles.

Lema: Sean Z, W integrables. (EJER.)

$$Z \underset{a.s}{\leq} W \Leftrightarrow \int_A Z \leq \int_A W, \forall A \in \mathcal{F}.$$

Obs:

- $$\underbrace{\int_A Z = \int_A W, \forall A \in \mathcal{F}}_{\text{Basta } A \in \sigma(Z, W).} \Leftrightarrow Z \overset{a.s}{=} W.$$

Teorema: Dada X integrable y $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ sub. σ-álg., existe Z v.a. tal que:

1) Z es $\mathcal{G}$ - medible.

2) $\int_A Z = \int_A X, \forall A \in \mathcal{G}$.

Adicionalmente, si W integrable cumple 1) y 2), entonces $W \overset{a.s}{=} Z$.

Def: Dado X integrable y $\mathcal{G}$ sub. σ-alg. de $\mathcal{F}$, definimos $E[X|\mathcal{G}]$ como la clase de todas las variables cumpliendo con 1) y 2) del Teorema previo.

También diremos "Z es versión de $E[X|\mathcal{G}]$" si Z cumple 1) y 2).

Obs: Es fácil verificar que:

- X es $\mathcal{G}$-medible $\Rightarrow E[X|\mathcal{G}] \text{ "}=\text{" } X$.
- $X \perp \mathcal{G}$ ($\sigma(X)$ y $\mathcal{G}$ son independientes) $\Rightarrow E[X|\mathcal{G}] \overset{a.s.}{=} E[X]$.
- X, Y son integrables, $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow$ $E[X+Y|\mathcal{G}] \overset{a.s.}{=} E[X|\mathcal{G}] + E[Y|\mathcal{G}]$, $E[\alpha X|\mathcal{G}] \overset{a.s}{=} \alpha E[X|\mathcal{G}]$.
- X, Y integrables y $X \underset{a.s.}{\leq} Y \Rightarrow$ $E[X|\mathcal{G}] \leq E[Y|\mathcal{G}]$.

- Para X integrable, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$, sub. σ-álgebras, vale $E[E[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] \overset{a.s.}{=} E[X|\mathcal{H}]$.

(propiedad de la torre)

Teorema de la convergencia monótona:

Suponga X_n, $n \in \mathbb{N}$ son v.a.'s tal que $0 \overset{a.s}{\leq} X_1 \overset{a.s}{\leq} X_2 \overset{a.s}{\leq} \cdots$ y X una v.a. tal que $X_n \xrightarrow{a.s.} X$. Fijemos $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, sub. σ-álgebra.

Si X es integrable (X_n integrable $\forall n$), entonces $E[X_n|\mathcal{G}] \xrightarrow{a.s.} E[X|\mathcal{G}]$.

Proof:

Sabemos $X_n \uparrow X$. Fije $A \in \mathcal{G}$.

$\Rightarrow 0 \leq X_n \cdot 1_A \uparrow X \cdot 1_A$

$\overset{TCM}{\Longrightarrow} \int X_n 1_A \longrightarrow \int X 1_A$.

Sean Z_n, Z versión de $E[X_n|\mathcal{G}]$ y $E[X|\mathcal{G}]$, respectivamente.

Por otro lado, $Z_1 \overset{a.s}{\leq} Z_2 \overset{a.s}{\leq} \cdots$.

Así, $\Omega^* := \bigcap_{k\geq 1} \{Z_k \leq Z_{k+1}\}$ Tiene probabilidad 1.

Luego, podemos definir $\eta := \begin{cases} \lim Z_n, & \text{sobre } \Omega^* \\ 0, & \text{sobre } \Omega \setminus \Omega^* \end{cases}$

$\eta : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ es $\mathcal{G}$-medible.

Para $A \in \mathcal{G}$: $Z_n \cdot 1_A \uparrow \eta \cdot 1_A$

$\Rightarrow \int Z_n \cdot 1_A \to \int \eta \cdot 1_A$.

Como η y Z son $\mathcal{G}$-medibles: $Z \overset{a.s.}{=} \eta$. ✓

(EJER.): Sean $X_n, n \in \mathbb{N}$, v.a.'s y X v.a.
Tales que $X_n \downarrow X$ a.s.. Fije $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ sub. σ-álg..
Si X_1 y X son integrables, entonces:

1) X_n es integrable, $\forall n$.

2) $E[X_n | \mathcal{G}] \xrightarrow{a.s.} E[X | \mathcal{G}]$.

Teorema de convergencia dominada

Fijemos $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, sub. σ-álgebra.
Sean X_n v.a.'s y Z integrable Tales que $|X_n| \leq Z$ a.s.

Si $X_n \xrightarrow{a.s.} X$, entonces (X integrable y X_n integrable $\forall n$) $E[X_n|\mathcal{G}] \xrightarrow{a.s.} E[X|\mathcal{G}]$.

Proof:

Haciendo $n \to \infty$: $|X| \leq Z$, a.s.

Tenemos $|E[X_n|\mathcal{G}] - E[X|\mathcal{G}]| =$

$|E[X_n - X|\mathcal{G}]| \underset{a.s.}{\leq} E[|X_n - X| \,|\mathcal{G}]$

EJER: U integrable $\Rightarrow |E[U|\mathcal{G}]| \underset{a.s}{\leq} E[|U||\mathcal{G}]$.

Definamos $U_N := \sup\{|X_n - X_m| : n, m \geq N\}$,

medible por ser supremo de cantidad enumerable de medibles.

Como $X_n \xrightarrow{a.s.} X \in \mathbb{R}$: $U_N \downarrow 0$ a.s.

$\underset{\text{T.C.M E.C.}}{\Rightarrow} E[U_N|\mathcal{G}] \xrightarrow{a.s.} 0$.

Siempre que $N \leq n$: $|X_n - X| \leq U_N$.

$\Rightarrow E[|X_n - X| \,|\mathcal{G}] \leq E[U_N|\mathcal{G}]$.

Con N fijo, haciendo $n \to \infty$:

$$\limsup E[\,|X_n - X| \mid \mathcal{G}\,] \le E[\,U_N \mid \mathcal{G}\,]$$

Haciendo $N \to \infty$:

$$\limsup \underbrace{E[\,|X_n - X| \mid \mathcal{G}\,]}_{\triangledown} \le 0 \quad \text{a.s.}$$

$$0 \le \liminf \triangledown \le \limsup \triangledown .$$

$$\therefore\ E[\,|X_n - X| \mid \mathcal{G}\,] \xrightarrow{a.s.} 0 .$$

Libros:

- A Course in Prob. theory (K. L. Chung)
- Prob. theory and Examples (Durrett)
- Measure theory, Prob. and sto. Pro. (Le Gall).