CLASE 01

Funciones periódicas

Def: Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, decimos que f es periódica si $\exists\, T > 0 : f(x+T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$

Def: Sea f una función periódica, se denomina periodo al menor valor T (en caso exista) como en la definición previa.

Libro del curso:

Analise de Fourier e equacoes diferenciais parciais - Djairo Guedes

CLASE 02

Series de Fourier

- PD1: No hay
- Pc1: 6 de setiembre
- **Nuevo horario:** Martes 9-12.

- Convergencia puntual

$f_n : I \to \mathbb{R}$.

$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ pointwise $\equiv \forall x \in I : (f_n(x)) \xrightarrow[n\to\infty]{} (f(x))$

- Convergencia uniforme

$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f \equiv \forall \epsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} / n \geq n_0 \Rightarrow$
$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \forall x \in I$.

- $\sum_{n=1}^{N} f_n \xrightarrow[N\to\infty]{} \sum_{n\geq 1} f_n$:

$\forall \epsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} : N \geq N_0 \Rightarrow$

$$\left| \sum_{n=1}^{N} f_n(x) - \sum_{n\geq 1} f_n(x) \right| < \epsilon, \forall x \in I$$

$$\left(\left| \sum_{n>N} f_n(x) \right| < \epsilon, \forall x \in I \right).$$

- Considere $I = [a; b)$ y f_n continuas en I.

Si $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformemente en I, entonces:

- $\sum_{n\geq 1} f_n$ es continua en I.
- $\int_a^b \left(\sum_{n\geq 1} f_n(x)\right)dx = \sum_{n\geq 1} \int_a^b f_n(x)\,dx$.

Lema: Sean $n, m \geq 1$.

- $\int_{-L}^{L} \cos(n\pi x/L)\cos(m\pi x/L)\,dx = \begin{cases} L, & n=m \\ 0, & n\neq m \end{cases}$
- $\int_{-L}^{L} \sin(n\pi x/L)\sin(m\pi x/L)\,dx = \begin{cases} L, & n=m \\ 0, & n\neq m \end{cases}$
- $\int_{-L}^{L} \cos(n\pi x/L)\sin(m\pi x/L)\,dx = 0$.

Ejemplo: Considere f continua y periódica con periodo $2L$, tal que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right).$$

- $\int_{-L}^{L}$: Llegas a $a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$
- $m \geq 1$, por $\cos(\pi m x/L)$, e integramos $\int_{-L}^{L}$:

$\Rightarrow$ $a_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{\pi m x}{L}\right)dx, \ m \geq 0.$

- Análogamente: $b_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin(\pi m x / L)\, dx, \; m \geq 1.$

Def: Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de periodo $2L$, f integrable y absolutamente integrable en cualquier intervalo acotado.

Definimos los coeficientes de Fourier como:

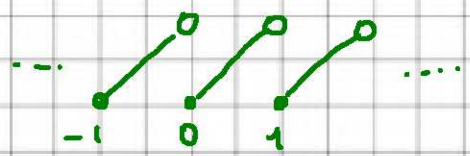
$$a_m = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{\pi m x}{L}\right) dx, \quad m \geq 0 \;;$$

$$b_m = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^{L} f(x) \sin(\pi m x / L)\, dx, \quad m \geq 1 .$$

Ejemplos:

- $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

- $f(x) = x - [x]$



- $g(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$ extendida con periodo 2π.

Calculemos los coeficientes de Fourier de g:

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx)\, dx = \int_{0}^{\pi} \cos(mx)\, dx \;/\; \pi$$

$\Rightarrow a_0 = \pi / \pi = 1$.

$m \neq 0 \Rightarrow a_m = \sin(mx)/(m\pi) \Big|_0^{\pi} = 0$

$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)dx = \int_0^{\pi} \sin(mx)dx / \pi$

$= -\frac{\cos(mx)}{m\pi}\Big|_0^{\pi} \Rightarrow b_m = \frac{1-(-1)^m}{\pi m}$.

<u>Def</u>: Denotamos por

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right).$$

$$\therefore\ g(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^m}{\pi m}\right)\sin(mx).$$

<u>Def</u>: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. f es seccionalmente continua si para todo intervalo acotado $[a;b]$ si existen $a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_k \leq b$ tal que:

- f continua en $]x_i; x_{i+1}[$.
- Existen $\lim_{x\to x_i^+} f(x)$ y $\lim_{x\to x_i^-} f(x)$.

<u>Def</u>: f es seccionalmente diferenciable si f es seccionalmente continua y f' es seccionalmente continua.

Teorema de Fourier: Sea f seccionalmente diferenciable de periodo $2L$, entonces:

$$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m \cos\left(\frac{\pi m x}{L}\right) + b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right), \forall x.$$

Donde $f(x^+) := \lim_{t \to x^+} f(t)$.

Ejemplo:

Para la computación previa de $g(x)$, g es seccionalmente diferenciable.

$$\Rightarrow g(\pi/2) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)} \sin(\pi(2k-1)/2)$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)} (-1)^{k+1}.$$

De $g(\pi/2) = 1$: $\quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$

Ejemplo: $f(x) = \begin{cases} L-x; & 0 \leq x \leq L \\ L+x; & -L \leq x \leq 0 \end{cases}$ de periodo $2L$.

$$a_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{\pi m x}{L}\right)dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}(L-|x|)\cos\left(\frac{\pi m x}{L}\right)dx$$

$$a_m = \frac{2}{L}\int_0^L (L-x)\cos\left(\frac{\pi m x}{L}\right)dx \; ; \; b_m = 0.$$

$$\int_0^L (L-x)\cos(\pi m x/L)dx = \frac{L}{\pi m}\left[(L-x)\sin\left(\frac{\pi m x}{L}\right)\Big|_0^L \right.$$

$$-\int_0^L (-1)\sin(\pi m x/L)\,dx\Big] = \frac{L}{\pi m}\int_0^L \sin\left(\frac{\pi m x}{L}\right)dx$$

$$= -\left(\frac{L}{\pi m}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi m x}{L}\right)\Big|_0^L = \left(\frac{L}{\pi m}\right)^2\left(1-(-1)^m\right)$$

$$\therefore\ a_m = \frac{2L}{\pi^2 m^2}\left(1-(-1)^m\right),\ m>0;\quad a_0 = L.$$

Note f es seccional. diferenciable.

$$\Rightarrow f(x) = \frac{L}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2L}{\pi^2 m^2}\left(1-(-1)^m\right)\cos\left(\frac{\pi m x}{L}\right))$$

$$= \frac{L}{2} + \sum_{K=1}^{\infty} \frac{2L}{\pi^2(2K-1)^2}\cos\left(\frac{\pi(2K-1)x}{L}\right)$$

Para $x=0$:

$$L = \frac{L}{2} + \sum_{K\geq 1} \frac{2L}{\pi^2(2K-1)^2}$$

$$\therefore\ \frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$$

CLASE 03

Sobre los coeficientes de Fourier

Sea $L>0$, defina

$\psi_n(x) = \cos(n\pi x/L)$, $n \geq 0$;

$\varphi_n(x) = \operatorname{Sen}(n\pi x/L)$, $n \geq 1$, con periodo fundamental $2L/n$, y periodo común $2L$.

Sea $f:[-L,L]\to\mathbb{R}$ acotada e integrable.

$$a_n := \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx, \; n\geq 0 \;;$$

$$b_n := \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx, \; n\geq 1$$

Denotamos $\underbrace{f \sim}_{\text{"}S[f]=\text{"}} \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$.

"$S[f]=$" } es otra notación

Suponga que $S[f](x)$ converge. $\theta := n\pi x/L$.

$$S[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right) + b_n\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right)e^{in\pi x/L} + \left(\frac{a_n+ib_n}{2}\right)e^{-in\pi x/L}$$

$$= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\hat{f}(n)\,e^{\frac{in\pi x}{L}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)\,e^{\frac{in\pi x}{L}},$$

definiendo $\hat{f}(0) = \frac{a_0}{2}$, $\hat{f}(n) = \frac{a_n - i b_n}{2}$, $\hat{f}(-n) = \frac{a_n + i b_n}{2}$.

Note $\hat{f}(n) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) e^{-in\pi x/L} dx$.

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$.
Definimos $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto interno,
que cumple para $x, y, z \in V$; $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$:

1) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$
2) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
3) $\langle x, x \rangle \geq 0$ 4) $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$.

Definimos la norma $\|\cdot\|$ en V como:
1) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, $\alpha \in \mathbb{K}$
2) $\|x\| \geq 0$ 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ 4) $\|x\| = 0 \iff x = 0$

<u>Obs</u>: Dado un p.i, es norma $\|\cdot\| := \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$.

<u>Propiedades</u>:

1) $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ (Cauchy - Schwarz)

2) $\langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2$.

Def: Decimos que f es seccionalmente continua en $[a;b]$ si $\exists\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ tal que:

1) f es continua en (x_i, x_{i+1}), $0 \leq i \leq n-1$.
2) $f(x)$ tiende a un límite finito para x_i y x_{i+1} con $x \in (x_i, x_{i+1})$ para $0 \leq i \leq n-1$.

Def: $S([-L,L])$ es el conjunto de funciones seccionalmente continuas en $[-L,L]$; $L > 0$.

Se cumple $S([-L,L])$ es e.v. real, pero la operación $\langle f, g \rangle := \int_{-L}^{L} f(x)g(x)\,dx$ falla ser un producto interno en $S([-L,L])$, solo por la condición "$\langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow f = 0$".

Def: $\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}$ es una seminorma (casi norma, pues solo falla "$\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$").

EJER: Con seminorma, también se cumple Cauchy-S. y el teo. de Pitágoras.

Sea $f \in S([-L,L])$, podemos escribir los Fou. coef. como $a_n = \frac{1}{L} \langle f, \psi_n \rangle, n \geq 0$; $b_n = \frac{1}{L} \langle f, \varphi_n \rangle, n \geq 1$.

CLASE 04

Desigualdad de Bessel y convergencias

Notación para e.v. de funciones seccionalmente continuas en $[-L, L]$, $L>0$: $SC[-L,L]$.

Obs: Si $f \in SC[-L,L] \Rightarrow f$ acotada e integrable en $[-L,L]$.

Recuerde $\psi_n(x) := \cos(n\pi x/L)$; $n \geq 0$, $\varphi(x) := \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, $n \geq 1$.

Dado $f \in SC[-L,L]$ y $S[f] = \frac{a_0 \psi_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \psi_n + b_n \varphi_n$,

se tiene $a_n = \frac{1}{L} \langle f, \psi_n \rangle$, $n \geq 0$; $b_n = \frac{1}{L} \langle f, \varphi_n \rangle$, $n \geq 1$.

Prop: Si $f \in SC[-L,L]$, $S[f] = \frac{a_0 \psi_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \psi_n + b_n \varphi_n$,
entonces, dados $N \geq 0$, $M \geq 1$, se tiene que

$$\left\| f - \left(\frac{a_0 \psi_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \psi_n + \sum_{n=1}^{M} b_n \varphi_n \right) \right\| \leq$$

$$\left\| f - \left(\frac{c_0 \psi_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} c_n \psi_n + \sum_{n=1}^{M} d_n \varphi_n \right) \right\|,$$ para todo

$\{c_n\}_{n=1}^{N}$, $\{d_n\}_{n=1}^{M}$; y, la igualdad vale si y solo si $c_n = a_n$, $0 \leq n \leq N$ y $d_m = b_m$, $1 \leq m \leq M$.

Proof:

Sean $N \geq 0$, $M \geq 1$.

$S_{N,M} := \langle \{\psi_n\}_{n=0}^{N} \cup \{\varphi_m\}_{m=1}^{M} \rangle$.

$$g := f - \left(\frac{a_0 \psi_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \psi_n + \sum_{m=1}^{M} b_m \varphi_m \right)$$

Lema: • $\langle \psi_n, \varphi_m \rangle = 0,\ n \neq m$ • $\langle \psi_0, \psi_0 \rangle = 2L$

• $\langle \psi_n, \psi_m \rangle = \begin{cases} L, & n = m \ (>0) \\ 0, & n \neq m \end{cases}$

• $\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \{ L$, si $n = m$; o; 0, si $n \neq m$.

Del lema: $g \perp S_{N,M}$.

Dados $\{c_n\}_{n=1}^{N}$, $\{d_m\}_{m=1}^{M}$, definamos

$$h := \left(\frac{a_0}{2} - \frac{c_0}{2} \right) \psi_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n - c_n) \psi_n + \sum_{m=1}^{M} (b_m - c_m) \varphi_m$$

De $h \in S_{N,M}$: $\langle g, h \rangle = 0$.

$\Rightarrow \|g + h\|^2 = \|g\|^2 + \|h\|^2$.

$$\left\| f - \left(c_0 \psi_0 / 2 + \sum_{n=1}^{N} c_n \psi_n + \sum_{m=1}^{M} d_m \varphi_m \right) \right\|^2$$

$$= \left\| f - \left(a_0 \psi_0 / 2 + \sum_{n=1}^{N} a_n \psi_n + \sum_{m=1}^{M} b_m \varphi_m \right) \right\|^2 + \|h\|^2 .$$

Como h es continua, el caso $\|h\|^2 = 0$ implica $a_n = c_n$, $0 \leq n \leq N$; $b_m = d_m$, $1 \leq m \leq M$; debido al lema previo. ✓

Prop: $f \in SC[-L,L]$, $S[f] = \frac{a_0 \psi_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \psi_n + \sum b_n \varphi_n$, entonces $\sum_{n\geq 1} a_n^2 < \infty$ y $\sum_{n\geq 1} b_n^2 < \infty$. Más aún, se cumple $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n^2 + \sum_{m=1}^{M} b_m^2 \leq \|f\|^2$; $\forall n, M \geq 1$.

Proof:

Sean $N \geq 0$, $M \geq 0$, enteros.

$$0 \leq \| f - (\frac{a_0 \psi_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \psi_n + \sum_{m=1}^{M} b_m \varphi_m) \|$$

De $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ y el lema previo, la expresión eventualmente se reduce a

$$0 \leq \langle f, f \rangle - a_0^2 L - \sum_{n=1}^{N} a_n^2 L - \sum_{m=1}^{M} b_m^2 L + \frac{a_0^2 L}{2}$$ ✓

Obs: Decimos que $f: [a;b] \to \mathbb{C}$ es seccionalmente continua si $f = u + iv$, con $u, v: [a;b] \to \mathbb{R}$ son seccionalmente continuas.

Asimismo, los coef. de Fou. pueden definirse como coef. Fou. de u, más, i por coe. Fou. de v.

Corolario: Si $f: [-L, L] \to \mathbb{C}$ es sec. cont., entonces $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 \leq \frac{\|f\|^2}{2L}$.

Proof:

$\hat{f}(n) = \hat{u}(n) + i\hat{v}(n), \forall n \in \mathbb{Z}$.

$|\hat{f}(n)|^2 = \hat{f}(n) \cdot \overline{\hat{f}(n)} = (\hat{u}(n) + i\hat{v}(n))(\bar{\hat{u}}(n) - i\bar{\hat{v}}(n))$.

Note $\overline{\hat{u}(n)} = \overline{\left(\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} u(x) e^{-in\pi x/L} dx\right)} = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} u(x) e^{in\pi x/L} dx$

$= \hat{u}(-n)$.

$\Rightarrow |\hat{f}(n)|^2 = |\hat{u}(n)|^2 + |\hat{v}(n)|^2 - i(\hat{u}(n)\hat{v}(-n) - \hat{v}(n)\hat{u}(-n))$

$$\sum_{n=-N}^{N} |\hat{f}(n)|^2 = \sum_{n=-N}^{N} |\hat{u}(n)|^2 + \sum_{n=-N}^{N} |\hat{v}(n)|^2, \forall N \in \mathbb{Z}.$$

De $\hat{f}(n) = \frac{a_n - ib_n}{2}$: $\hat{u}(n) = \frac{a_n}{2}$, $\hat{v}(n) = \frac{-b_n}{2}$.

De $\hat{f}(-n) = (a_n + ib_n)/2$: $\hat{u}(-n) = \frac{a_n}{2}$; $\hat{v}(-n) = b_n/2$.

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{4} + \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{4}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2/4 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2/4 = \frac{1}{2}\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n^2 + \sum_{m\geq 1} b_m^2\right)$$

$\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{\|f\|^2}{L}$, debido a la proposición previa. ✓

Sean $f_n : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$.

1) f_n converge puntualmente a f en Ω, si dados $x \in \Omega$, $\epsilon > 0$: $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$

2) f_n converge uniformemente a f en Ω, si dado $\epsilon > 0$: $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ Tal que

$n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \ \forall x \in \Omega.$

Teorema: $f_n \to f$ uniformemente en Ω.

Si $f_n \in C(\Omega)$, $\forall n$, entonces se cumple:

- $f \in C(\Omega)$
- Si $\Omega = [a;b]$ y dado $g \in SC[a;b]$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, g(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx.$$

Teorema (M-Test de Weierstrass):

- $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$
- $|f_n(x)| \leq M_n, \ \forall n \geq 1, \ \forall x \in \Omega$
- $\sum_{n\geq 1} M_n < \infty$

Entonces $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge uniformemente en Ω.

Proof:

Dado $\epsilon > 0$, de la convergencia de $\sum_{n\geq 1} M_n$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ Tal que $(\cdots)$.

Dados $M > N \geq N_0$.

$$\left| \sum_{n=1}^{M} f_n(x) - \sum_{n=1}^{N} f_n(x) \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{M} f_n(x) \right| \leq \sum_{n>N}^{M} |f_n(x)|$$

$$\leq \sum_{n>N}^{M} M_n < \epsilon \quad ; \quad \forall x \in \Omega .$$ ✓

Obs: Sea $f \in SC[-L, L]$. Si $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists! \, k$ Tq $x \in [(2k-1)L, (2k+1)L)$. Así, podemos definir $F(x) := f(x - 2kL)$.

Def: $SC_{PER}(2L)$: Set de funciones $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seccionalmente continuas en any interval $[a; b]$ con periodo $2L$.

$C_{PER}(2L)$: Set de funciones $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas de periodo $2L$.

Teorema: Si se cumplen

1) $f \in SC_{PER}(2L)$ 3) $f' \in SC_{PER}(2L)$

2) f es diferenciable en $(-L, L)$, salvo a finite number of points.

Entonces, $\forall x \in \mathbb{R}$: $S[f](x) = \dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$.

$\hookrightarrow$ $(*)$

INSPIRATION HUT - 0.5CM GRID

Lema: Suponga f cumple 1), 2) y 3); además, f es continua y $f(0)=0$. Then, $(*)$ cumple para $x=0$.

Proof del lema:

Defina $g(x) := \begin{cases} f(x)/\left(e^{\frac{i\pi x}{L}}-1\right) ; & x\neq 0, x\in[-L,L) \\ -iLf'(0^+)/\pi , & x=0 \end{cases}$

, extendida periódicamente.

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{\exp(i\pi x/L)-1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(f(x)-f(0))}{x}\cdot\frac{x}{e^{\frac{i\pi x}{L}}-1}$$

Como f' es seccionalmente continua en $[-L;L]$, es real $\lim_{x\to 0^+} f'(x)$. ... (Δ)

Como f es continua y $f(0)=0$, (Δ) implica

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0^+).$$

$$\therefore \lim_{x\to 0^+} g(x) = -f'(0^+)(iL/\pi)$$

La prueba es análoga para $g(0^-)$.

$\therefore g\in SC[-L,L]$. ✓