CLASE 06

Integrabilidad uniforme y convergencia

Recordemos: (X_n) y X, v.a's

Algunos tipos de convergencia:

$$\begin{tikzcd} X_n \xrightarrow{as} X \arrow[r, Rightarrow, "\text{“}T.C.D\text{”}"] \arrow[dr] & X_n \xrightarrow{L^1} X \arrow[dl] \\ & X_n \xrightarrow{prob} X \arrow[ul, Rightarrow, "\text{“ ”}"] \arrow[ur, Rightarrow, "\text{“ ”}"'] \end{tikzcd}$$

¿Qué le falta para regresar?

$\Rightarrow \exists\, X_{n_k}$ Tq $X_{n_k} \xrightarrow{as} X$.

Sabemos por el TCD que

- $X_n \xrightarrow{as} X$
- $|X_n| \leq Z$ integrable

$\Big\} \Rightarrow X_n \xrightarrow{L^1} X$.

Pidiendo menos para ambas hipótesis, se logra:

- $X_n \xrightarrow{prob} X$
- Integrable uniforme de (X_n)

$\Big\} \Rightarrow X_n \xrightarrow{L^1} X$.

Def: Dada $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, diremos que es uniformemente integrable cuando

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} \int_{\{|X_\lambda|>t\}} |X_\lambda| \longrightarrow 0, \text{ cuando } t \to +\infty.$$

Obs:

- Si Λ es finito y cada X_λ es integrable, entonces $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es uni integrable.
- Si $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, $(Y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ satisfacen $|X_\lambda| \leq |Y_\lambda|$, $\forall \lambda$; entonces, si $(Y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es uni. inte $\Rightarrow$ $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es uni. int.
- Si $|X_\lambda| \leq Z$ integrable, $\forall \lambda\in\Lambda$, entonces $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es unif. integrable.
- Que (X_λ) sea uni inte depende de ley de X_λ, $\forall \lambda\in\Lambda$.

Prop: (X_λ) es uni. inte. si y solo si se cumplen

A) $E[|X_\lambda|] \leq C$, $\forall \lambda\in\Lambda$

B) $\forall \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ Tal que:

$$P(A) < \delta \Rightarrow \int_A |X_\lambda| < \epsilon \,, \ \forall \lambda \in \Lambda .$$

<u>Proof:</u>

Suponsamos que (X_λ) es unif. integrable.

$$E[|X_\lambda|] = \int_{\{|X_\lambda| \geq t\}} |X_\lambda| + \int_{\{|X_\lambda| < t\}} |X_\lambda| \,, \ \forall t \in \mathbb{R} .$$

Como $\sup_\lambda \int_{\{|X_\lambda| > t\}} |X_\lambda| \longrightarrow 0, \ t \to +\infty$,

podemos desir t_* suficientemente grande de modo que $\sup_\lambda \int_{\{|X_\lambda| > t_*\}} |X_\lambda| \leq 1$.

Luego, para todo $\lambda \in \Lambda$:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \ \displaystyle\int_{\{|X_\lambda| \leq t_*\}} |X_\lambda| \leq t_* \\[2em] \bullet \ \displaystyle\int_{\{|X_\lambda| > t_*\}} |X_\lambda| \leq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow E[|X_\lambda|] \leq 1 + t_* . \ \checkmark$$

Ahora, fijemos $\epsilon > 0$. Elegimos un t tal que

$$\int_{\{|X_\lambda| > t\}} |X_\lambda| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

Luego, elegimos $\delta = \dfrac{\epsilon}{2t}$. Así, para $\lambda \in \Lambda$:

$$\int_A |X_\lambda| = \int_{A \cap \{|X_\lambda| > t\}} |X_\lambda| + \int_{A \cap \{|X_\lambda| \leq t\}} |X_\lambda|$$

$$\leq \int_{\{|X_\lambda| > t\}} |X_\lambda| + t \cdot P(A) < \epsilon. \quad ✓$$

Ahora, supongamos A) y B). Fije $\epsilon > 0$.
Por B), sé que $\exists\, \delta > 0$ tal que

$$P(A) < \delta \Rightarrow \int_A |X_\lambda| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall \lambda.$$

Por A) y Markov: $P\{|X_\lambda > t\} \leq \dfrac{E[|X_\lambda|]}{t} < \dfrac{\mathcal{C}}{t}$.

Si elegimos $t_0 = \mathcal{C}/\delta$, aseguramos que

$$t > t_0 \Rightarrow P\{|X_\lambda| > t\} < \delta.$$

$$\Rightarrow \int_{\{|X_\lambda| > t\}} |X_\lambda| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall \lambda$$

Así, $t > t_0$ implica $\sup_\lambda \int_{\{|X_\lambda| > t\}} |X_\lambda| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$. ✓

Obs: Si $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ y $(Y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ son unif inte, entonces $(X_\lambda + Y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es unif inte.

Corolario: Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es uni. int. y $P(A_n) \to 0$, entonces $\int_{A_n} |X_n| \to 0$.

Lema: Si $E[X_\lambda^2] \leq \mathcal{C}, \forall \lambda \in \Lambda$, entonces $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es unif integrable.

Proof:

Para $t > 0$. $\{|X_\lambda| > t\} \subseteq \{|X_\lambda|/t > 1\}$

$$\Rightarrow \int_{\{|X_\lambda| > t\}} |X_\lambda| \leq \int_{\{|X_\lambda| > t\}} |X_\lambda| \cdot \frac{|X_\lambda|}{t}$$

$$= \frac{1}{t} \int_{\{|X_\lambda| > t\}} X_\lambda^2 \leq \frac{\mathcal{C}}{t}. \quad ✓$$

Ejercicio: De hecho, podemos usar

$E[|X_\lambda|^p] \leq \mathcal{C}, \forall \lambda \in \Lambda$, para algún $p > 1$.

Teorema: Suponga $X_n \xrightarrow{prob} X$. Resultan equivalentes:

1) (X_n) es uniformemente integrable.

2) $X_n \xrightarrow{L^1} X$

Proof:

1) ⟹ 2):

Por A): $E[|X_n|] \leq \mathcal{C}, \forall n$

$\Rightarrow X_n \in L^1, \forall n$.

Sabemos que $\exists (X_{n_k})$ con $X_{n_k} \xrightarrow{a.s} X$.

Como $|\cdot|$ es continuo: $|X_{n_k}| \xrightarrow{a.s} |X|$

Por Fatou: $E[|X|] \leq \underline{\lim} E[|X_{n_k}|] \leq \mathcal{C}$

$\therefore X \in L^1$.

Ahora, $|X_n - X| \leq \underbrace{\underbrace{|X_n|}_{\text{uni}} + \underbrace{|X|}_{\text{uni}}}_{\text{uni}}, \forall n$

$\Rightarrow (|X_n - X|)_n$ es unif. integrable ...($\triangle$)

Como $X_n \xrightarrow{prob} X$: $\forall \epsilon > 0$: $P\{|X_n - X| > \epsilon\} \to 0$.

Luego, $\forall \epsilon > 0$:

$$\int |X_n - X| = \int_{\{|X_n - X| \leq \epsilon\}} |X_n - X| + \int_{\{|X_n - X| > \epsilon\}} |X_n - X|$$

$$\leq \epsilon + \underbrace{\int_{\{|X_n - X| > \epsilon\}} |X_n - X|}_{\to 0} \quad \text{(por el corolario)}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \limsup \int |X_n - X| \leq \epsilon, \ \forall \epsilon > 0$$

$$\therefore \limsup \int |X_n - X| = 0.$$

2) $\Rightarrow$ 1):

$E[|X_n|] \to E[|X|]$.

En particular, $\exists\, \mathcal{C}$: $E[|X_n|] \leq \mathcal{C}$, $\forall n$

Probemos B) por contradicción.

$\exists\, \epsilon_0 > 0$ tq ningún $\delta > 0$ funciona.

Hagamos $\delta = 1/k$.

Para cada $k = 1, 2, \ldots$:

$\exists\, A_k$ con $P(A_k) < 1/k$, y

$\exists \ X_{n_k}$ con $\int_{A_k} |X_{n_k}| \geq \varepsilon_0$ ... $(\square)$

Como $\{n_k : k = 1, 2, \}$ es infinito (sino se contradice la hipótesis que (X_n) no es uni int), tomando una subsucesión de $(A_k)_k$ podemos suponer que (X_{n_k}) es subsucesión de (X_n).

Ahora,

$$\int_{A_k} |X_{n_k}| \leq \int_{A_k} |X_{n_k} - X| + \int_{A_k} |X|$$

$$\leq \underbrace{E[|X_{n_k} - X|]}_{\to 0} + \underbrace{\int_{A_k} |X|}_{\to 0}$$

Contradicción, debido a $(\square)$. ✓