CLASE 02

Conjuntos convexos

Sea E un espacio vectorial.

Def: Segmentos de extremos x e y.

$x, y \in E$. $[x, y] := \{ x + t(y-x) : t \in [0,1] \}$,

$[x, y[:= \{ x + t(y-x) : t \in [0, 1[\}$.

Def: Conjunto estrellado en $\bar{x}$

Sean $\bar{x} \in C \subseteq E$. C se denomina estrellado en $\bar{x}$ si se cumple $[\bar{x}, y] \subseteq C$, $\forall y \in C$.

Def: Un conjunto se denomina estrellado si es estrellado en alguno de sus puntos.

Def: C es convexo si $\forall x, y \in C : [x, y] \subseteq C$.

Prop: C convexo $\Rightarrow$ C estrellado en x, $\forall x \in C$.

Def: C es afín si $\forall x, y \in C$, $\forall t \in \mathbb{R}$, se cumple $tx + (1-t)y \in C$.

Prop: • E y $\emptyset$ son convexos y afines.

• $\{C_i\}_{i \in L}$, convexos en $E \Rightarrow \bigcap_{i \in L} C_i$ convexo.

• $\{C_i\}_{i \in L}$, afines en $E \Rightarrow \bigcap_{i \in L} C_i$ afín.

Def: Sea $C \subseteq E$, se dice que $z \in E$ es una combinación convexa (afín) si existen $m \in \mathbb{N}$, $\{x_i\}_1^m \subseteq C$, $\{t_i\}_1^m \subset [0,1]$ $(\mathbb{R})$ tales que $\sum_{i=1}^m t_i x_i = z$ y $\sum_{i=1}^m t_i = 1$.

Prop: $C \subseteq E$ es convexo (afín) $\Leftrightarrow$ C contiene cualquier combinación convexa (afín) de sus propios elementos.

Prop: Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, afín, se cumple $\forall \alpha \in A$ que $V_\alpha := A - \{\alpha\}$ es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

Se define la dimensión de A, como $\dim V_\alpha$.