CLASE 08

Método de separación de variables

Teorema: Sea $f \in C[0,L]$ con $f(0) = 0 = f(L)$, tal que f' existe salvo en cantidad finita de puntos y $f' \in SC[0,L]$.

$\Rightarrow$ $u(\cdot,\cdot)$ definida en el problema del calor es solución y $u \in C([0,L]\times[0,\infty[) \times C^{\infty}([0,L]\times(0,\infty))$.

Proof:

Dado $\epsilon > 0$, $u \in C^2([0,L]\times[\epsilon,\infty))$.

Note que derivada por sumandos, $\leq C \cdot n^K \cdot \exp\left(\frac{-\alpha^2 n^2 \epsilon}{L^2}\right)$.

y acotada

Lema: Sea I un intervalo y $F \in C([a,b]\times I)$, donde $\frac{\partial F}{\partial y}$ existe y es continua en $[a,b]\times I$.

Sea $f(y) := \int_a^b F(x,y)\,dx$, $y \in I$.

$\Rightarrow$ $f \in C^1(I)$ y $f'(y) = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\,dx$.

Proof:

Dado $y_0 \in I$, considere $\eta > 0$ pequeño, de manera que $J = [y_0 - \eta, y_0 + \eta] \subseteq I$.

$\Rightarrow F \in C([a,b] \times J)$, uniformemente continua.

Dado $\epsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$: $|(x,y) - (\bar{x},\bar{y})| < \delta$

$\Rightarrow |F(x,y) - F(\bar{x},\bar{y})| < \epsilon$.

Así: $|y - y_0| < \delta$, $y \in J$ $\Rightarrow |F(x,y) - F(x,y_0)| < \epsilon$,
$\forall\, x \in [a,b]$.

Ahora $|f(y) - f(y_0)| = \left| \int_a^b F(x,y)\,dx - \int_a^b F(x,y_0)\,dx \right|$

$\leq \int_a^b |F(x,y) - F(x,y_0)|\,dx < \epsilon(b-a)$,

cuando $|y - y_0| < \delta$, e $y \in J$.

Note $\partial F/\partial y \in C([a,b] \times J)$. Dado $\epsilon > 0$, then

existe $\delta > 0$ con $|y - y_0| < \delta \Rightarrow |F_y(x,y) - F_y(x,y_0)| < \epsilon$,

$\forall\, x \in [a,b]$, por continuidad uniforme.

$$\frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} - \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y}(x,y_0)\,dx = \int_a^b \left(\frac{F(x,y) - F(x,y_0)}{y - y_0} - \frac{\partial}{\partial y} F(x,y_0) \right) dx$$

$$\overset{\text{TVM}}{=} \int_a^b \left(F_y(x,y_x) - F_y(x,y_0) \right) dx, \text{ con } |y_x - y_0| < \delta$$

$< \epsilon(b-a)$.

Por último, como $F_y \in C([a,b] \times J)$, su inte_ gral También es continua. Así, $f' \in C^1(I)$. ✓

Unicidad

Integral de energía:

$$E: [0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad E(t) = \int_0^L (u(x,t))^2 dx.$$

Teorema: Si $u \in C([0,L]\times[0,\infty)) \cap C^2([0,L]\times]0,\infty[)$ es solución de EDP I $\Rightarrow$ es la única solución

Proof:

En $t \in [\epsilon,\infty)$, por el lema anterior:

$$E'(t) = \int_0^L 2\,u(x,t)\,u_t(x,t)\,dx = 2\alpha^2 \int_0^L u\,u_{xx}\,dx$$

$$= 2\alpha^2 \left[u u_x \Big|_0^L - \int_0^L (u_x)^2 dx \right] = -2\alpha^2 \int_0^L (u_x)^2 dx \leq 0$$

De $E'(t) \leq 0$: E no es estrictamente creciente

Por continuidad de E: $0 \leq E(t) \leq E(0)$, $\forall t \geq 0$

$$\Rightarrow 0 \leq E(t) \leq \int_0^L (f(x))^2 dx.$$

De ser cero, $E \equiv 0$, por continuidad. ... (□)

Para soluciones u_1, u_2 de la EDP I, $w := u_1 - u_2$

También es solución. De $(\square)$: $u_1 = u_2$ ✓

Ecuación de Laplace

Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^2$.

$$\Delta u := \frac{\partial^2}{\partial x^2} u + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u = 0.$$

Problema de Dirichlet en Ω

- $\Delta u = 0$. • $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$.
- $u|_{\partial\Omega} = f \in C(\partial\Omega)$.

En el rectángulo: $\Omega = (0,a) \times (0,b)$.

EDP 2

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ u \in C(\bar{\Omega}) \times C^2(\Omega) \\ u(x,0) = 0 = u(x,b), \ \forall x \in [0,a] \\ u(0,y) = 0, \ y \in [0,b] \\ u(a,y) = f(y), \ y \in [0,b], \ f \in C[a,b] \end{cases}$$

Lema de EDO:

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ y la EDO $ay'' + by' + cy = 0$.

INSPIRATION HUT - 0.6CM GRID

Considere $ar^2 + br + c = 0$, con raíces r_1, r_2.

- Si $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 \neq r_2 \Rightarrow y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$
- Si $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 = r_2 = r \Rightarrow y(x) = (c_1 + c_2 x)\, e^{rx}$
- Si $r_1, r_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \Rightarrow r_1 = \alpha + iB$, $r_2 = \alpha - iB$
  y se cumple $y(x) = e^{\alpha x} \cdot (c_1 \cos(Bx) + c_2 \sin(Bx))$

Así, cuando $a = 1$, $b = 0$, $y'' - cy = 0$.

- Si $c > 0 \Rightarrow r = \pm\sqrt{c}$, $y(x) = c_1 e^{\sqrt{c}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{c}\, x}$
- Si $c < 0 \Rightarrow r_1 = i\sqrt{-c}$, $r_2 = -i\sqrt{-c}$, y se cumple
  $y(x) = c_1 \cos(\sqrt{-c}\, x) + c_2 \sin(\sqrt{-c}\, x)$.

Por método de separación de variables:

$U(x, y) = X(x)\, Y(y)$, así

$X \in C([0,a]) \times C^2((0,a))$,
$Y \in C([0,b]) \times C^2((0,b))$.

$$X'' Y + Y'' X = 0 \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{-Y''}{Y} =: \lambda$$

$$\Rightarrow X'' - \lambda X = 0, \quad Y'' + \lambda Y = 0, \quad y \in (0, b)$$

Para evitar la Trivialidad $X \equiv 0$, las condiciones de frontera implican $Y(0) = 0 = Y(b)$.

Probemos existe $\lim_{y \to b^-} Y'(y)$.

$$\lim_{y \to b^-} Y''(y) = \lim_{y \to b^-} -\lambda Y(y) = -\lambda Y(b) \text{ (cont) } = 0$$

Así, por el Teo fund del Cálculo:

Sea $x \in (0,b)$: $\underbrace{\int_x^b Y''(y)\,dy}_{\text{real}} = Y'\Big|_x^b = \lim_{y \to b^-} Y'(y) - Y'(x)$

$\therefore$ Existe $\lim_{y \to b^-} Y'(y)$.

Luego, $\lambda \int_0^b (Y(y))^2\,dy = -\int_0^b Y(y)\,Y''(y)\,dy$

$$= -\left[\underbrace{Y(y)\,Y'(y)\Big|_0^b} - \int_0^b (Y'(y))^2\,dy \right]$$

Análogamente se prueba existe $\lim_{y \to 0^+} Y'(y)$.

$$= 0 + \int_0^b (Y'(y))^2\,dy$$

$\Rightarrow \lambda \geq 0$.

Si $\lambda = 0$, $Y' \equiv 0$ (por continuidad), así $Y \equiv 0$,

INSPIRATION HUT - 0.6CM GRID

por $Y(0)=0$, ergo, $u\equiv 0$ (Trivial)

$\therefore$ λ es una constante positiva.

$\Rightarrow Y(y) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}\, y) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}\, y)$

De $Y(0)=0$: $c_1 = 0$. Así: $Y(y) = c_2 \sin(\sqrt{\lambda}\, y)$

De $Y(b)=0$, y, evitando $u\equiv 0$ si $c_2 = 0$:

$\sin(\sqrt{\lambda}\, b) = 0$. $\therefore$ $\lambda = (k\pi/b)^2$, $k \in \mathbb{Z}^+$.

$\therefore$ $Y_k(y) = C_k \sin\left(\frac{k\pi y}{b}\right)$, $k \in \mathbb{Z}^+$.

De $\lambda > 0$ y $X'' - \lambda X = 0$:

$X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\, x}$. Note $X(0)=0$.

$\Rightarrow X(x) = -c_2\left(e^{\sqrt{\lambda}\, x} - e^{-\sqrt{\lambda}\, x}\right) = -2c_2 \sinh(\sqrt{\lambda}\, x)$

$\therefore$ $X_k(x) = F_k \sinh\left(\frac{\pi k x}{b}\right)$, $k \in \mathbb{Z}^+$

$\therefore$ $u_k(x,y) = D_k \sinh\left(\frac{\pi k x}{b}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi k y}{b}\right)$, $k \in \mathbb{Z}^+$.

Queremos: $(*)$

- $u(x,y) = \sum_{k\geq 1} D_k \sinh\left(\frac{\pi k x}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi k y}{b}\right)$

- $f(y) = u(a,y) = \sum_{k\geq 1} \left(D_k \sinh\left(\frac{\pi k a}{b}\right)\right) \sin\left(\frac{\pi k x}{b}\right)$

- $D_k \sinh\left(\frac{\pi k a}{b}\right) = \frac{2}{b} \int_0^b f(t) \sin\left(\frac{\pi k t}{b}\right) dt = b_k$

Teorema: Sea $f \in C[0,b]$, $f(0) = 0 = f(b)$, f diferenciable salvo en cantidad finita de puntos, $f' \in SC[0,b]$. $\Rightarrow$ $u(\cdot,\cdot)$ definido en $(*)$ es solución de la EDP 2.

Además: $u \in C([0,a]\times[0,b]) \cap C^\infty([0,a[\times[0,b])$.

Proof:

Para $x \in [0,a]$: $0 \leq \dfrac{\sinh\left(\pi k \frac{x}{b}\right)}{\sinh\left(\pi k \frac{a}{b}\right)} \leq 1$.

En $[0,a]\times[0,b]$:

$$\Rightarrow \sum \left| b_k \frac{\sinh(\pi k x/b)}{\sinh(\pi k a/b)} \sin\left(\frac{\pi k y}{b}\right)\right| \leq \sum |b_k|$$

converge absolutamente $\Rightarrow$ Por el Test-Weierstrass, la serie converge uniformemente

$\Rightarrow u \in C([0,a]\times[0,b])$.

Para probar diferenciabilidad:

Dado $\epsilon > 0$, $x \in [0, a-\epsilon]$.

$$\frac{\cosh(\pi k x/b)}{\sinh(\pi k a/b)} = \frac{e^{k\bar{x}} + e^{-k\bar{x}}}{e^{k\bar{a}} - e^{-k\bar{a}}} = \frac{e^{k\bar{x}}\overbrace{(1+e^{-2k\bar{x}})}^{\leq 2}}{e^{k\bar{a}}(1-e^{-2k\bar{a}})}$$

$$\leq e^{k(\bar{x}-\bar{a})} \cdot 2 \Big/ \left(1 - e^{-2\bar{a}}\right) = e^{k\frac{\pi}{b}(x-a)} \cdot \underbrace{M_1}_{\text{cte}} .$$

$$\leq e^{-k\frac{\pi}{b}\epsilon} \cdot M_1 .$$

También se logra acotar $\dfrac{\sinh(\pi k x/b)}{\sinh(\pi k a/b)}$

con $e^{-k\frac{\pi}{b}\epsilon} \cdot M_2$.

Así, por el Test-Weierstrass y teorema de dirigida sobre convergencia de series de derivadas: $u \in C^{\infty}([0,a[\times [0,b])$. ✓

Problema de Dirichlet en el círculo

$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$

- $\Delta u = 0$
- $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$
- $u|_{\partial\Omega} = f \in C(\partial\Omega)$.

Considere el cambio de variables $U(x,y) = V(r,\theta)$

$x = r\cos\theta\,, \quad y = r\sin\theta\,,$

$r = (x^2+y^2)^{1/2}\,, \quad \theta = \arctan(y/x)\,, \quad x \neq 0\,,$

$r \in [0,1[\,, \quad \theta \in [0,2\pi[\,.$

Regla de la cadena: (Suponga $r>0$)

$$U_x = V_r\, r_x + V_\theta \cdot \theta_x\,.$$

$$r_x = x/r = \cos\theta\,, \quad \theta_x = -y/r^2 = -\operatorname{Sen}\theta/r$$

$$\Rightarrow U_x = V_r \cos\theta - V_\theta \cdot \frac{\sin\theta}{r}$$

$$U_{xx} = (V_r)_x \cos\theta + V_r(\cos\theta)_x - (V_\theta)_x \frac{\sin\theta}{r} - V_\theta(\sin\theta/r)_x$$

$$= (V_{rr}\, r_x + V_{\theta r} \cdot \theta_x)\cos\theta + V_r(-\sin\theta)\theta_x - (V_{r\theta}\, r_x + V_{\theta\theta}\theta_x)\frac{\sin\theta}{r} - V_\theta\left(\frac{\cos\theta\,\theta_x\, r - r_x \sin\theta}{r^2}\right)$$

$$U_{xx} = V_{rr}\cos^2\theta - 2V_{\theta r}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r} + V_r\frac{\sin^2\theta}{r} + V_{\theta\theta}\frac{\sin^2\theta}{r^2} + 2V_\theta\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\,.$$

Asimismo: $r_y = \sin\theta$, $\theta_y = \cos\theta / r$

$$u_y = V_r \, r_y + V_\theta \, \theta_y$$
$$= V_r \sin\theta + V_\theta \cos\theta / r \, .$$

$$\Rightarrow u_{yy} = (V_{rr} r_y + V_{\theta r} \theta_y) \sin\theta + V_r \cos\theta \, \theta_y$$
$$+ (V_{r\theta} r_y + V_{\theta\theta} \theta_y) \cos\theta / r$$
$$+ V_\theta (-\sin\theta \, \theta_y r - r_y \cos\theta) / r^2$$

$$\cdot \; u_{yy} = V_{rr} \sin^2\theta + 2 V_{\theta r} \frac{\sin\theta \cos\theta}{r} + V_r \frac{\cos^2\theta}{r}$$
$$+ V_{\theta\theta} \frac{\cos^2\theta}{r^2} - 2 V_\theta \frac{\sin\theta \cos\theta}{r^2} \, .$$

De $u_{xx} + u_{yy} = 0$:

$$V_{rr} + \frac{1}{r} V_r + \frac{1}{r^2} V_{\theta\theta} = 0 \, .$$