CLASE 03

Submartingala y Supermartingala

Respecto a un e.p $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ filtrado, $(\mathcal{G}_n)_n$.

Def: Decimos que $M_n : \Omega \to \mathbb{R}$, v.a's, $n = 0, 1, \dots$, es una submartingala (supermartingala) si:

1) $(M_n)_n$ es adaptada a $(\mathcal{G}_n)_n$
2) M_n es integrable $\forall n$.
3) $\forall\, 0 \leq n < m$: $E[M_n - M_m \mid \mathcal{G}] \overset{a.s.}{\geq} 0$ $(\leq)$

(EJER.): En la def previa, podemos cambiar 3) por $\int_A M_n \leq \int_A M_m$, $\forall A \in \mathcal{G}_n$; $\forall\, 0 \leq n < m$.

También basta 3) con periodos consecutivos, es decir, $m = n+1$.

Obs: Es claro que:

- (M_n) es superma. $\iff$ $(-M_n)$ es subma.
- (M_n) es mart. $\iff$ (M_n) subma y superma.

- Si (X_n) y (Y_n) subma (superma), entonces $Z_n := X_n + Y_n$ es subma (superma).

- Si (M_n) y (N_n) son martingalas, then $(\alpha M_n + \beta N_n)$ es martingala, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- Si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ es $\mathcal{G}_0$-medible e integrable, then $M_n := X, \forall n$ es una martin.

- Para (X_n) sub (super) mart:

$$E[X_0] \leq (\geq) E[X_1] \leq (\geq) E[X_2] \leq (\geq) \cdots$$

Prop Sea (M_n) una martingala y $\varphi : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ convexa tal que $X_n := \varphi(M_n)$ es integrable $\forall n$, then (X_n) es submart.

Proof. (EJER. usando Jensen)

Prop: Si (X_n) es submartingala y $\varphi\ \mathbb{R} \to [0, \infty[$ es convexa y no decreciente, tal que $Y_n := \varphi(X_n)$ es integrable, $\forall n$, entonces (Y_n) es una submartingala.

Ejemplos: • (X_n) es subm $\Rightarrow X_n^+ := \max\{X_n, 0\}$ es submartingala.

- **Valor de un portafolio:** Supongamos que

M_n es el precio de d stocks en el instante n.

Ahora, usemos Γ_n: Posiciones que adquieres en el instante $n-1$ (y que tiene consecuencia en n), respecto al # unidades de stocks.

Por ejemplo: $\quad M_3 \longrightarrow M_4 \longrightarrow M_5$

$\cdots \quad \Gamma_4 = +2 \quad \Gamma_5 = -3 \quad \cdots$

El valor de (Γ_n) es el proceso

$$V_0^\Gamma := \Gamma_1 \cdot M_0$$ (dinero que me cuesta adquirir la posición Γ_1)

$$V_n^\Gamma = \Gamma_n \cdot M_n, \quad n \geq 1$$ (dinero que tengo por haber adquirido la posición Γ_n)

Entonces, si implemento (Γ_n), ganaré hasta $n = N$:

$$V_N^\Gamma - V_0^\Gamma = \sum_{k=1}^{N} \left(V_k^\Gamma - V_{k-1}^\Gamma\right), \quad \text{donde}$$

$$V_k^\Gamma - V_{k-1}^\Gamma = \underbrace{\Gamma_k \cdot (M_k - M_{k-1})}_{\text{ganancia por la variación del precio del stock.}} + \underbrace{M_{k-1} \cdot (\Gamma_k - \Gamma_{k-1})}_{\text{dinero que inyectamos en } k-1.}$$

Entonces, si la estrategia (Γ_n) es autofinanciada (i.e., $M_{k-1} \cdot \Gamma_k = M_{k-1} \cdot \Gamma_{k-1}$, $\forall k$), then

$$V_N^\Gamma = V_0^\Gamma + \sum_{k=1}^{N} \Gamma_k \cdot (M_k - M_{k-1}) .$$

Def: Dados • $M_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $n = 0, 1, \ldots$,
• $\Gamma_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $n = 1, 2, \ldots$; $M_{n-1} \xrightarrow[\Gamma_n]{} M_n$,

denotemos $\displaystyle {}_0\!\int^N \Gamma dM := \sum_{k=1}^{N} \Gamma_k \cdot (M_k - M_{k-1})$, y,

si (Γ_n) es autofinanciado: $V_N^\Gamma = V_0^\Gamma + {}_0\!\int^N \Gamma dM$.

Integración y martingalas

Prop: Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $(\mathcal{G}_n)$ e.p. filtrado y
• $M_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ d martingalas.
• $\Gamma_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $n = 1, 2, \ldots$ es predecible (i.e., Γ_n es $\mathcal{G}_{n-1}$- medible, $\forall n = 1, 2, \ldots$) y acotado.

Entonces, el proceso ${}_0\!\int^n \Gamma dM : \Omega \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ es una martingala.

Proof: $E\left[\int_0^n \Gamma dM - \int_0^{n-1} \Gamma dM \mid \mathcal{G}_{n-1}\right]$

$= E\left[\Gamma_n \cdot (M_n - M_{n-1}) \mid \mathcal{G}_{n-1}\right]$

$= \Gamma_n \cdot E\left[M_n - M_{n-1} \mid \mathcal{G}_{n-1}\right] = 0$, pues

Γ_n es predecible y M_n martingala.

Prop: Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $(\mathcal{G}_n)$ ep filtrado y

- $X_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $n = 0, 1, 2, \dots$ submartingala (super)
- $\Gamma_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $n = 1, 2, \dots$ predecible y acotado.

Entonces, $\int_0^n \Gamma dX : \Omega \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$ resulta

submartingala (super) si $\Gamma_n \geq 0$, $\forall n$ (por coordenadas).

Proof:

$E\left[\int_0^n \Gamma dx - \int_0^{n-1} \Gamma dx \mid \mathcal{G}_{n-1}\right] = E\left[\Gamma_n \cdot (X_n - X_{n-1}) \mid \mathcal{G}_{n-1}\right)$

$= \underbrace{\Gamma_n}_{\geq 0} \cdot \underbrace{E\left[X_n - X_{n-1} \mid \mathcal{G}_{n-1}\right]}_{\geq 0} \geq 0$.

∎