CLASE 01

Funciones periódicas

Def: Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, decimos que f es periódica si $\exists\, T > 0 : f(x+T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$

Def: Sea f una función periódica, se denomina periodo al menor valor T (en caso exista) como en la definición previa.

Libro del curso:

Analise de Fourier e equacoes diferenciais parciais - Djairo Guedes

CLASE 02

Series de Fourier

- PD1: No hay
- Pc1: 6 de setiembre
- **Nuevo horario:** Martes 9-12.

- Convergencia puntual

$f_n : I \to \mathbb{R}$.

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f \text{ pointwise} \equiv \forall x \in I : (f_n(x)) \xrightarrow[n\to\infty]{} (f(x))$$

- Convergencia uniforme

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f \equiv \forall \epsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, n \geq n_0 \Rightarrow$$
$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon,\ \forall x \in I.$$

- $\sum_{n=1}^{N} f_n \xrightarrow[N\to\infty]{} \sum_{n\geq 1} f_n$:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N} : N \geq N_0 \Rightarrow$$
$$\left| \sum_{n=1}^{N} f_n(x) - \sum_{n\geq 1} f_n(x) \right| < \epsilon,\ \forall x \in I$$
$$\left(\left| \sum_{n>N} f_n(x) \right| < \epsilon,\ \forall x \in I \right).$$

- Considere $I = [a; b)$ y f_n continuas en I.

Si $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformemente en I, entonces:

- $\sum_{n\geq 1} f_n$ es continua en I.
- $\int_a^b \left(\sum_{n\geq 1} f_n(x)\right)dx = \sum_{n\geq 1} \int_a^b f_n(x)\,dx$.

Lema: Sean $n, m \geq 1$.

- $\int_{-L}^{L} \cos(n\pi x/L)\cos(m\pi x/L)\,dx = \begin{cases} L, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$

- $\int_{-L}^{L} \sin(n\pi x/L)\sin(m\pi x/L)\,dx = \begin{cases} L, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$

- $\int_{-L}^{L} \cos(n\pi x/L)\sin(m\pi x/L)\,dx = 0$.

Ejemplo: Considere f continua y periódica con periodo $2L$, tal que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right).$$

- $\int_{-L}^{L}$: Llegas a $a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$

- $m \geq 1$, por $\cos(\pi m x/L)$, e integramos $\int_{-L}^{L}$:

$\Rightarrow$ $a_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{\pi m x}{L}\right)dx, \; m \geq 0.$

- Análogamente: $b_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin(\pi m x / L) dx, \ m \geq 1.$

Def: Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de periodo $2L$, f integrable y absolutamente integrable en cualquier intervalo acotado.

Definimos los coeficientes de Fourier como:

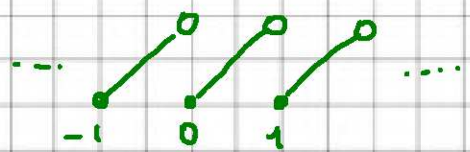
$$a_m = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{\pi m x}{L}\right) dx, \quad m \geq 0 \ ;$$

$$b_m = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^{L} f(x) \sin(\pi m x / L) \, dx, \quad m \geq 1 .$$

Ejemplos:

- $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

- $f(x) = x - [x]$



- $g(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$ extendida con periodo 2π.

Calculemos los coeficientes de Fourier de g:

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx = \int_{0}^{\pi} \cos(mx) dx \ ./ \ \pi$$

$\Rightarrow a_0 = \pi / \pi = 1$.

$m \neq 0 \Rightarrow a_m = \sin(mx)/(m\pi) \Big|_0^\pi = 0$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)dx = \int_0^\pi \sin(mx)dx / \pi$$

$$= -\frac{\cos(mx)}{m\pi}\Big|_0^\pi \Rightarrow b_m = \frac{1-(-1)^m}{\pi m}.$$

Def: Denotamos por

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right).$$

$$\therefore\ g(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^m}{\pi m}\right)\sin(mx).$$

Def: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. f es seccionalmente continua si para todo intervalo acotado $[a;b]$ si existen $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_K \leq b$ tal que:

- f continua en $]x_i ; x_{i+1}[$.
- Existen $\lim_{x \to x_i^+} f(x)$ y $\lim_{x \to x_i^-} f(x)$.

Def: f es seccionalmente diferenciable si f es seccionalmente continua y f' es seccionalmente continua.

Teorema de Fourier: Sea f seccionalmente diferenciable de periodo $2L$, entonces:

$$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m \cos\left(\frac{\pi m x}{L}\right) + b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right), \forall x.$$

Donde $f(x^+) := \lim\limits_{t \to x^+} f(t)$.

Ejemplo:

Para la computación previa de $g(x)$, g es seccionalmente diferenciable.

$$\Rightarrow g(\pi/2) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)} \sin(\pi(2k-1)/2)$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)} (-1)^{k+1}.$$

De $g(\pi/2) = 1$: $\quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$

Ejemplo: $f(x) = \begin{cases} L-x; & 0 \le x \le L \\ L+x; & -L \le x \le 0 \end{cases}$ de periodo $2L$.

$$a_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{\pi m x}{L}\right)dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}(L-|x|)\cos\left(\frac{\pi m x}{L}\right)dx$$

$$a_m = \frac{2}{L}\int_0^L (L-x)\cos\left(\frac{\pi m x}{L}\right)dx \; ; \; b_m = 0.$$

$$\int_0^L (L-x)\cos(\pi m x/L)\,dx = \frac{L}{\pi m}\left[(L-x)\sin\left(\frac{\pi m x}{L}\right)\Big|_0^L \right.$$

$$-\int_0^L (-1) \sin(\pi m x/L)\, dx \Big] = \frac{L}{\pi m} \int_0^L \sin\left(\frac{\pi m x}{L}\right) dx$$

$$= -\left(\frac{L}{\pi m}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi m x}{L}\right)\Big|_0^L = \left(\frac{L}{\pi m}\right)^2 \left(1 - (-1)^m\right)$$

$$\therefore\ a_m = \frac{2L}{\pi^2 m^2} \left(1 - (-1)^m\right),\ m > 0;\quad a_0 = L.$$

Note f es seccional. diferenciable.

$$\Rightarrow f(x) = \frac{L}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2L}{\pi^2 m^2} \left(1 - (-1)^m\right) \cos\left(\frac{\pi m x}{L}\right)$$

$$= \frac{L}{2} + \sum_{K=1}^{\infty} \frac{2L}{\pi^2 (2K-1)^2} \cos\left(\frac{\pi (2K-1) x}{L}\right)$$

Para $x = 0$:

$$L = \frac{L}{2} + \sum_{K \geq 1} \frac{2L}{\pi^2 (2K-1)^2}$$

$$\therefore\ \frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$$

CLASE 03

Sobre los coeficientes de Fourier

Sea $L>0$, defina

$\psi_n(x) = \cos(n\pi x/L)$, $n \geq 0$;

$\varphi_n(x) = \operatorname{Sen}(n\pi x/L)$, $n \geq 1$, con periodo fundamental $2L/n$, y periodo común $2L$.

Sea $f:[-L,L] \to \mathbb{R}$ acotada e integrable.

$$a_n := \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx, \quad n \geq 0 \quad ;$$

$$b_n := \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx, \quad n \geq 1$$

Denotamos $\underbrace{f \sim}_{\text{"}S[f] = \text{"}} \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$.

"$S[f] =$" } es otra notación

Suponga que $S[f](x)$ converge. $\theta := n\pi x/L$.

$$S[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right) + b_n\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right)e^{in\pi x/L} + \left(\frac{a_n+ib_n}{2}\right)e^{-in\pi x/L}$$

$$= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\hat{f}(n)\,e^{\frac{in\pi x}{L}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)\,e^{\frac{in\pi x}{L}},$$

definiendo $\hat{f}(0) = \frac{a_0}{2}$, $\hat{f}(n) = \frac{a_n - i b_n}{2}$, $\hat{f}(-n) = \frac{a_n + i b_n}{2}$.

Note $\hat{f}(n) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) e^{-in\pi x/L} dx$.

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$.
Definimos $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto interno,
que cumple para $x, y, z \in V$; $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$:

1) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$
2) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
3) $\langle x, x \rangle \geq 0$ 4) $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$.

Definimos la norma $\|\cdot\|$ en V como:
1) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, $\alpha \in \mathbb{K}$
2) $\|x\| \geq 0$ 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ 4) $\|x\| = 0 \iff x = 0$

Obs: Dado un p.i, es norma $\|\cdot\| := \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$.

Propiedades:

1) $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ (Cauchy - Schwarz)

2) $\langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2$.

Def: Decimos que f es seccionalmente continua en $[a;b]$ si $\exists\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ tal que:

1) f es continua en (x_i, x_{i+1}), $0 \leq i \leq n-1$.
2) $f(x)$ tiende a un límite finito para x_i y x_{i+1} con $x \in (x_i, x_{i+1})$ para $0 \leq i \leq n-1$.

Def: $S([-L,L])$ es el conjunto de funciones seccionalmente continuas en $[-L,L]$; $L > 0$.

Se cumple $S([-L,L])$ es e.v. real, pero la operación $\langle f, g\rangle := \int_{-L}^{L} f(x)g(x)dx$ falla ser un producto interno en $S([-L,L])$, solo por la condición "$\langle f, f\rangle = 0 \Rightarrow f = 0$".

Def: $\|f\| := \sqrt{\langle f, f\rangle}$ es una seminorma (casi norma, pues solo falla "$\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$").

EJER: Con seminorma, también se cumple Cauchy-S. y el teo. de Pitágoras.

Sea $f \in S([-L,L])$, podemos escribir los Fou. coef. como $a_n = \frac{1}{L}\langle f, \psi_n\rangle, n \geq 0$; $b_n = \frac{1}{L}\langle f, \varphi_n\rangle, n \geq 1$.

CLASE 04

Desigualdad de Bessel y convergencias

Notación para e.v. de funciones seccionalmente continuas en $[-L, L]$, $L>0$: $SC[-L,L]$.

Obs: Si $f \in SC[-L,L] \Rightarrow f$ acotada e integrable en $[-L,L]$.

Recuerde $\psi_n(x) := \cos(n\pi x/L)$; $n \geq 0$, $\varphi(x) := \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, $n \geq 1$.

Dado $f \in SC[-L,L]$ y $S[f] = \frac{a_0 \psi_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n\psi_n + b_n\varphi_n$,

se tiene $a_n = \frac{1}{L}\langle f, \psi_n\rangle$, $n \geq 0$; $b_n = \frac{1}{L}\langle f, \varphi_n\rangle$, $n \geq 1$.

Prop: Si $f \in SC[-L,L]$, $S[f] = \frac{a_0\psi_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n\psi_n + b_n\varphi_n$, entonces, dados $N \geq 0$, $M \geq 1$, se tiene que

$$\left\| f - \left(\frac{a_0\psi_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n\psi_n + \sum_{n=1}^{M} b_n\varphi_n\right)\right\| \leq$$

$$\left\| f - \left(\frac{c_0\psi_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} c_n\psi_n + \sum_{n=1}^{M} d_n\varphi_n\right)\right\|,$$ para todo

$\{c_n\}_{n=1}^{N}$, $\{d_n\}_{n=1}^{M}$; y, la igualdad vale si y solo si $c_n = a_n$, $0 \leq n \leq N$ y $d_m = b_m$, $1 \leq m \leq M$.

Proof:

Sean $N \geq 0$, $M \geq 1$.

$S_{N,M} := \langle \{\psi_n\}_{n=0}^{N} \cup \{\varphi_m\}_{m=1}^{M} \rangle$.

$$g := f - \left(\frac{a_0 \psi_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \psi_n + \sum_{m=1}^{M} b_m \varphi_m \right)$$

Lema: • $\langle \psi_n, \varphi_m \rangle = 0, \; n \neq m$ • $\langle \psi_0, \psi_0 \rangle = 2L$

• $\langle \psi_n, \psi_m \rangle = \begin{cases} L, & n = m \; (>0) \\ 0, & n \neq m \end{cases}$

• $\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \{ L$, si $n = m$; o; 0, si $n \neq m$.

Del lema: $g \perp S_{N,M}$.

Dados $\{c_n\}_{n=1}^{N}$, $\{d_m\}_{m=1}^{M}$, definamos

$$h := \left(\frac{a_0}{2} - \frac{c_0}{2} \right) \psi_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n - c_n) \psi_n + \sum_{m=1}^{M} (b_m - c_m) \varphi_m$$

De $h \in S_{N,M}$: $\langle g, h \rangle = 0$.

$\Rightarrow \|g + h\|^2 = \|g\|^2 + \|h\|^2$.

$$\left\| f - \left(c_0 \psi_0 / 2 + \sum_{n=1}^{N} c_n \psi_n + \sum_{m=1}^{M} d_m \varphi_m \right) \right\|^2$$

$$= \left\| f - \left(a_0 \psi_0 / 2 + \sum_{n=1}^{N} a_n \psi_n + \sum_{m=1}^{M} b_m \varphi_m \right) \right\|^2 + \|h\|^2 .$$

Como h es continua, el caso $\|h\|^2 = 0$ implica $a_n = c_n, \; 0 \leq n \leq N$; $b_m = d_m, \; 1 \leq m \leq M$; debido al lema previo. ✓

Prop: $f \in SC[-L, L]$, $S[f] = \frac{a_0 \psi_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \psi_n + \sum b_n \varphi_n$, entonces $\sum_{n \geq 1} a_n^2 < \infty$ y $\sum_{n\geq 1} b_n^2 < \infty$. Más aún, se cumple $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n^2 + \sum_{m=1}^{M} b_m^2 \leq \|f\|^2$; $\forall n, M \geq 1$.

Proof:

Sean $N \geq 0$, $M \geq 0$, enteros.

$$0 \leq \left\| f - \left(\frac{a_0 \psi_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \psi_n + \sum_{m=1}^{M} b_m \varphi_m \right) \right\|$$

De $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ y el lema previo, la expresión eventualmente se reduce a

$$0 \leq \langle f, f \rangle - a_0^2 L - \sum_{n=1}^{N} a_n^2 L - \sum_{m=1}^{M} b_m^2 L + \frac{a_0^2 L}{2} \quad \checkmark$$

Obs: Decimos que $f : [a; b] \to \mathbb{C}$ es seccionalmente continua si $f = u + iv$, con $u, v : [a; b] \to \mathbb{R}$ son seccionalmente continuas.

Asimismo, los coef. de Fou. pueden definirse como coef. Fou. de u, más, i por coe. Fou. de v.

Corolario: Si $f : [-L, L] \to \mathbb{C}$ es sec. cont., entonces $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 \leq \frac{\|f\|^2}{2L}$.

Proof:

$\hat{f}(n) = \hat{u}(n) + i\hat{v}(n), \forall n \in \mathbb{Z}$.

$|\hat{f}(n)|^2 = \hat{f}(n) \cdot \overline{\hat{f}(n)} = (\hat{u}(n) + i\hat{v}(n))(\overline{\hat{u}}(n) - i\overline{\hat{v}}(n))$.

Note $\overline{\hat{u}(n)} = \overline{\left(\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} u(x) e^{-in\pi x/L} dx\right)} = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} u(x) e^{in\pi x/L} dx$

$= \hat{u}(-n)$.

$\Rightarrow |\hat{f}(n)|^2 = |\hat{u}(n)|^2 + |\hat{v}(n)|^2 - i(\hat{u}(n)\hat{v}(-n) - \hat{v}(n)\hat{u}(-n))$

$\sum_{n=-N}^{N} |\hat{f}(n)|^2 = \sum_{n=-N}^{N} |\hat{u}(n)|^2 + \sum_{n=-N}^{N} |\hat{v}(n)|^2, \forall N \in \mathbb{Z}$.

De $\hat{f}(n) = \frac{a_n - ib_n}{2}$: $\hat{u}(n) = \frac{a_n}{2}$, $\hat{v}(n) = \frac{-b_n}{2}$.

De $\hat{f}(-n) = (a_n + ib_n)/2$: $\hat{u}(-n) = \frac{a_n}{2}$; $\hat{v}(-n) = b_n/2$.

$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{4} + \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{4}$

$+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2/4 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2/4 = \frac{1}{2}\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n^2 + \sum_{m \geq 1} b_m^2\right)$

$\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{\|f\|^2}{L}$, debido a la proposición previa. ✓

Sean $f_n : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$.

1) f_n converge puntualmente a f en Ω, si dados $x \in \Omega$, $\epsilon > 0$: $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$

2) f_n converge uniformemente a f en Ω, si dado $\epsilon > 0$: $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ Tal que

$n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \ \forall x \in \Omega.$

Teorema: $f_n \to f$ uniformemente en Ω. Si $f_n \in C(\Omega)$, $\forall n$, entonces se cumple:

- $f \in C(\Omega)$
- Si $\Omega = [a;b]$ y dado $g \in SC[a;b]$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, g(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx.$$

Teorema (M-Test de Weierstrass):

- $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$
- $|f_n(x)| \leq M_n, \ \forall n \geq 1, \ \forall x \in \Omega$
- $\sum_{n\geq 1} M_n < \infty$

Entonces $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge uniformemente en Ω.

Proof:

Dado $\epsilon > 0$, de la convergencia de $\sum_{n\geq 1} M_n$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ Tal que $(\cdots)$.

Dados $M > N \geq N_0$.

$$\left| \sum_{n=1}^{M} f_n(x) - \sum_{n=1}^{N} f_n(x) \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{M} f_n(x) \right| \leq \sum_{n>N}^{M} |f_n(x)|$$

$$\leq \sum_{n>N}^{M} M_n < \epsilon \ ; \ \forall x \in \Omega .$$ ✓

Obs: Sea $f \in SC[-L, L]$. Si $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists! \, k$ Tq $x \in [(2k-1)L, (2k+1)L)$. Así, podemos definir $F(x) := f(x - 2kL)$.

Def: $SC_{PER}(2L)$: Set de funciones $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seccionalmente continuas en any interval $[a; b]$ con periodo $2L$.

$C_{PER}(2L)$: Set de funciones $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas de periodo $2L$.

Teorema: Si se cumplen

1) $f \in SC_{PER}(2L)$ 3) $f' \in SC_{PER}(2L)$

2) f es diferenciable en $(-L, L)$, salvo a finite number of points.

$\{$ Entonces, $\forall x \in \mathbb{R}$: $S[f](x) = \dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$.

$\to (*)$

INSPIRATION HUT - 0.5CM GRID

Lema: Suponga f cumple 1), 2) y 3); además, f es continua y $f(0)=0$. Then, (*) cumple para $x=0$.

Proof del lema:

Defina $g(x) := \begin{cases} f(x)/\left(e^{\frac{i\pi x}{L}}-1\right); & x\neq 0, x\in[-L,L) \\ -iLf'(0^+)/\pi, & x=0 \end{cases}$

, extendida periódicamente.

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{\exp(i\pi x/L)-1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(f(x)-f(0))}{x} \cdot \frac{x}{e^{\frac{i\pi x}{L}}-1}$$

Como f' es seccionalmente continua en $[-L;L]$, es real $\lim_{x\to 0^+} f'(x)$. ... (Δ)

Como f es continua y $f(0)=0$, (Δ) implica

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0^+).$$

$$\therefore \lim_{x\to 0^+} g(x) = -f'(0^+)\left(iL/\pi\right)$$

La prueba es análoga para $g(0^-)$.

$\therefore$ $g \in SC[-L,L]$. ✓

CLASE 07

Tarea: Demostrar la parte b) de la pregunta 4 de PC1, usando método $\neq$ al del profe.

Él supuso $\sum_{n\neq 0} \frac{|\operatorname{sen}(n\theta)|}{|n|}$ converge, usó

$$\sum_{n>0} \frac{1-\cos(2n\theta)}{n} \leq \sum_{n\neq 0} \frac{|\operatorname{sen}(n\theta)|}{|n|}$$, y, usó

uno de los últimos exercises de Lista 1.

Esa prueba $\neq$ valdrá 3 puntos en PC2.

Def: Dado una función $u(x_1, \dots, x_n)$, denotaremos como equivalentes:

- u_{x_1}, $\frac{\partial u}{\partial x_1}$, $D_1 u$.
- $u_{x_1 x_2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}$, $D_2 D_1 u$.
- Ω, abierto de $\mathbb{R}^n$.
- $\overline{\Omega} := \Omega \cup \partial\Omega$.

¿Qué es una EDP?

Dada una función F:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, D_1 u, \dots, \cancel{D_n}\, D_1 D_2 u, \dots, D_k u) = 0.$$

- $\exp(D_1 u + D_2 u) = 0$.
- $D_2 u = D_1 D_3 u$.

__Def:__ • **Orden** de una EDP: Mayor derivada que aparece en la expresión.

• **EDP es lineal**, si es lineal respecto a u y sus derivadas.

• **EDP lineal de primer orden:**

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x)\, D_j u + b(x)\, u + c(x) = 0.$$

• **EDP lineal de segundo orden:**

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, D_i D_j u + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\, D_j u + c(x)\, u + d(x) = 0.$$

• **EDP homogénea:**

- En el primer caso, si $c(x) \equiv 0$.
- En el segundo caso, si $d(x) \equiv 0$.

__Ejemplos:__

• __La ecuación de Poisson__: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = h(x,y)$, (*)

lineal de segundo orden.

- Si $h \equiv 0 \Rightarrow$ (*) no es homogénea.
- Si $h \equiv 0 \Rightarrow$ (*) es homogénea, y, se

denomina ecuación de Laplace.

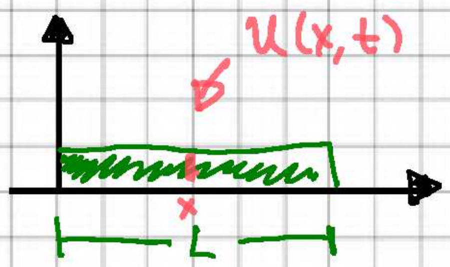
- La ecuación del calor: $u_t = \alpha^2 u_{xx}$, donde $u = u(t,x)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, α^2 constante, además, $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0,+\infty[) \cap C(\mathbb{R} \times [0;\infty[)$.

- La ecuación de la onda: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, donde $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, c constante.

Objetivo: Dado $L > 0$, $\alpha \neq 0$, buscar $u(x,t)$:

1) $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ en $(0,L) \times (0,\infty)$,
2) $u(0,t) = 0 = u(L,t)$, $t \geqslant 0$,
3) $u(x,0) = f(x)$, $x \in [0;L]$,

donde $u \in C^2((0,L) \times (0,\infty)) \cap C([0,L] \times [0,\infty))$.



Esto modela cómo se transfiere el calor a lo largo de una barra.

$u(x,t)$: Temperatura en posición x, tiempo t.

Búsqueda de soluciones: Usemos el

Método de separación de variables.

$u(x,t) = \varphi(x)\cdot\psi(t)$, donde :

$\varphi \in C^2(0,L) \cap C[0;L]$, $\psi \in C^2(0,\infty) \cap C[0,\infty)$.

En (1): $\varphi(x)\,\psi'(t) = \alpha^2\,\varphi''(x)\,\psi(t)$

$\Rightarrow$ Cuando no se anulan : $\dfrac{1}{\alpha^2}\dfrac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \dfrac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} =: -\lambda$,

con λ constante, pues ψ y φ son independientes.

$\Rightarrow \psi'(t) = -\lambda\alpha^2\psi(t)$; $\varphi''(x) = -\lambda\varphi(x)$.

En 2) : $\varphi(0)\,\psi(t) = 0$; $t \geq 0 \Rightarrow \varphi(0) = 0$.

Análogamente, $\varphi(L) = 0$.

Probemos $\lambda > 0$:

En $C_{\mathbb{C}}[0,L] = \{ f : [0,L] \to \mathbb{C}$ continuas $\}$,

se tiene el producto interno :

$f, g \in C_{\mathbb{C}}[0;L]$, $\langle f, g\rangle := \int_0^L f(x)\overline{g(x)}\,dx$.

Así, $\lambda\langle\varphi,\varphi\rangle = \lambda\int_0^L \varphi(x)\overline{\varphi(x)}\,dx$

$$= -\int_0^L \varphi''(x)\,\overline{\varphi(x)}\,dx = -\int_0^L (\varphi')'(x)\,\overline{\varphi(x)}\,dx$$

$$= -\left[\varphi'(x)\,\overline{\varphi(x)}\Big|_0^L - \int_0^L \varphi'(x)\,\overline{\varphi'(x)}\,dx \right]$$

$$= \int_0^L |\varphi'(x)|^2 dx - \left(\lim_{x\to L^-} \varphi'(x)\,\overline{\varphi(x)} - \lim_{x\to 0^+} \varphi'(x)\,\overline{\varphi(x)} \right)$$

... (*)

Verifiquemos poder usar el Teo. funda. de cálculo:

$\lim_{x\to L^-} \varphi''(x) = \lim_{x\to L^-} -\lambda\varphi(x) = -\lambda\varphi(L) = 0$, pues $\varphi \in C[0;L]$.

Por otro lado, dado $x \in (0,L)$:

$$\int_x^L -\lambda\varphi(y)\,dy = \int_x^L \varphi''(y)\,dy = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_x^{L-\epsilon} \varphi''(y)\,dy$$

$$\overset{T.F.C}{=} \lim_{\epsilon\to 0^+} \left(\varphi'(L-\epsilon) - \varphi'(x) \right) = \varphi'(L^-) - \varphi'(x)$$

$\Rightarrow \varphi'(L^-)$ existe; y, $\varphi'(0^+)$, análogamente.

$\therefore\ \lambda \langle \varphi, \varphi \rangle = \int_0^L |\varphi'(x)|^2 dx \geq 0$.

Así $\lambda \leq 0$ implicaría $\varphi \equiv 0$. $\therefore\ \lambda > 0$.

Luego, $\varphi''(x) + \lambda\varphi(x) = 0$; $\varphi(0) = 0 = \varphi(L)$; $\lambda > 0$.

$\overset{EDO}{\Rightarrow}\ \varphi(x) = a\cos(\sqrt{\lambda}\,x) + b\sin(\sqrt{\lambda}\,x)$.

$\varphi(0)=0 \Rightarrow a=0$.

$0=\varphi(L)=b\sin(\sqrt{\lambda}L)$. $\Rightarrow b\neq 0$, sino $\varphi\equiv 0$.

$\Rightarrow \sin(\sqrt{\lambda}L)=0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}L=n\pi$; $n\geq 1$

$\therefore \lambda_n=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$; $n\geq 1$. $\varphi_n(x):=\sin(n\pi x/L)$.

Asimismo: $\psi(t)=K e^{-\lambda\alpha^2 t}$; K cte.

Así, tenemos posibles soluciones de la forma

$$u_n(x,t)=\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\exp(-\alpha^2 n^2\pi^2 t/L^2).$$

Note de 2) y 3): $f(0)=0=f(L)$, $f\in C[0;L]$.

Vamos a buscar $b_n\in\mathbb{R}$ tales que $f(x)=\sum_{n\geq 1} b_n u_n(x,0)$, pues así un candidato a solución es $u(x,t)=\sum_{n\geq 1} b_n \sin(n\pi x/L)\exp(-\alpha^2 n^2\pi^2 t/L^2)$.

Teorema: Sea $f\in C[0,L]$, $f(0)=f(L)=0$, f' existe salvo en finite points, $f'\in SC[0;L]$.

$\Rightarrow$ La ecuación del calor planteada tiene solución en $C^2((0,L)\times(0,\infty))\cap C([0;L]\times[0,\infty))$.

Proof:

Se extiende de manera impar f en $[-L;0)$.

Por Fourier: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x/L)$ converge uniformemente en $[-L, L]$.

Definamos $u(x,t) = \sum_{n\geq 1} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t/L^2}$.

$u(x,0) = f(x) \Rightarrow$ De la conv. uni. via continuas, u es continua en $C([0;L] \times \{0\})$.

Sea $t>0$. $u(x,t)$ converge uniformemente via el Test de Weierstrass.

Esto ya que $\sum_{n\geq 1} e^{-cn^2} < \infty$, $c>0$ y $(b_n)_n$ acotado (Riemann-Lebesgue).

$\Rightarrow u \in C([0;L] \times (t, \infty))$; $\forall t>0$.

De $\sum_{n\geq 1} n^K / e^{cn^2} < \infty$; $c>0$; $K \in \mathbb{Z}^+$,

usando convergencia para derivadas, se tiene $u \in C^{\infty}((0,L) \times (0,\infty))$.

CLASE 08

Método de separación de variables

Teorema: Sea $f \in C[0,L]$ con $f(0) = 0 = f(L)$, tal que f' existe salvo en cantidad finita de puntos y $f' \in SC[0;L]$.

$\Rightarrow$ $u(\cdot,\cdot)$ definida en el problema del calor es solución y $u \in C([0,L] \times [0,\infty[) \times C^{\infty}([0,L] \times (0,\infty))$.

Proof:

Dado $\epsilon > 0$, $u \in C^2([0,L] \times [\epsilon,\infty))$.

Note que derivada por sumandos, $\leq C \cdot n^K \cdot \exp\left(\frac{-\pi^2 n^2 \epsilon}{L^2}\right)$.

y acotada.

Lema: Sea I un intervalo y $F \in C([a;b] \times I)$, donde $\frac{\partial F}{\partial y}$ existe y es continua en $[a;b] \times I$.

Sea $f(y) := \int_a^b F(x,y)\,dx$, $y \in I$.

$\Rightarrow$ $f \in C^1(I)$ y $f'(y) = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\,dx$.

Proof:

Dado $y_0 \in I$, considere $\eta > 0$ pequeño, de manera que $J := [y_0 - \eta, y_0 + \eta] \subseteq I$.

$\Rightarrow F \in C([a;b] \times J)$, uniformemente continua.

Dado $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$: $|(x,y) - (\bar{x}, \bar{y})| < \delta$
$$\Rightarrow |F(x,y) - F(\bar{x},\bar{y})| < \epsilon .$$

Así: $|y - y_0| < \delta$, $y \in J$ $\Rightarrow |F(x,y) - F(x,y_0)| < \epsilon$,
$$\forall x \in [a;b].$$

Ahora: $|f(y) - f(y_0)| = \left| \int_a^b F(x,y)\,dx - \int_a^b F(x,y_0)\,dx \right|$
$$\leq \int_a^b |F(x,y) - F(x,y_0)|\,dx < \epsilon(b-a),$$
cuando $|y - y_0| < \delta$, e $y \in J$.

Note $\partial F/\partial y \in C([a;b] \times J)$. Dado $\epsilon > 0$, then

existe $\delta > 0$ con $|y - y_0| < \delta \Rightarrow |F_y(x,y) - F_y(x,y_0)| < \epsilon$,

$\forall x \in [a;b]$, por continuidad uniforme.

$$\frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} - \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} F(x,y_0)\,dx = \int_a^b \left(\frac{F(x,y) - F(x,y_0)}{y - y_0} - \frac{\partial}{\partial y} F(x,y_0) \right) dx$$

$$\overset{TVM}{=} \int_a^b \left(F_y(x, y_x) - F_y(x, y_0) \right) dx, \text{ con } |y_x - y_0| < \delta$$

$$< \epsilon(b-a).$$

Por último, como $F_y \in C([a;b] \times J)$, su inte_ gral También es continua. Así, $f' \in C^1(I)$. ✓

Unicidad

Integral de energía:

$E: [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $E(t) = \int_0^L (u(x,t))^2 dx$.

Teorema: Si $u \in C([0,L] \times [0,\infty)) \cap C^2([0,L] \times]0,\infty[)$ es solución de EDP I $\Rightarrow$ es la única solución.

Proof:

En $t \in [\epsilon, \infty)$, por el lema anterior:

$$E'(t) = \int_0^L 2\,u(x,t)\, u_t(x,t)\, dx = 2\alpha^2 \int_0^L u\, u_{xx}\, dx$$

$$= 2\alpha^2 \left[u u_x \Big|_0^L - \int_0^L (u_x)^2 dx \right] = -2\alpha^2 \int_0^L (u_x)^2 dx \leq 0$$

De $E'(t) \leq 0$: E no es estrictamente creciente.

Por continuidad de E: $0 \leq E(t) \leq E(0)$; $\forall t \geq 0$.

$\Rightarrow 0 \leq E(t) \leq \int_0^L (f(x))^2 dx$.

De ser cero, $E \equiv 0$, por continuidad. ... (□)

Para soluciones u_1, u_2 de la EDP I, $w := u_1 - u_2$

También es solución. De $(\square)$: $u_1 = u_2$ ✓

Ecuación de Laplace

Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^2$.

$$\Delta u := \frac{\partial^2}{\partial x^2} u + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u = 0.$$

Problema de Dirichlet en Ω

- $\Delta u = 0$. • $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$.
- $u|_{\partial\Omega} = f \in C(\partial\Omega)$.

En el rectángulo: $\Omega = (0,a) \times (0,b)$.

EDP 2
$$\begin{cases} \bullet\ u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ \bullet\ u \in C(\overline{\Omega}) \times C^2(\Omega) \\ \bullet\ u(x,0) = 0 = u(x,b), \ \forall x \in [0,a] \\ \bullet\ u(0,y) = 0, \ y \in [0;b] \\ \bullet\ u(a,y) = f(y), \ y \in [0,b], \ f \in C[a;b]. \end{cases}$$

Lema de EDO:

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ y la EDO $ay'' + by' + cy = 0$.

Considere $ar^2 + br + c = 0$, con raíces r_1, r_2.

- Si $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 \neq r_2 \Rightarrow y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$
- Si $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 = r_2 = r \Rightarrow y(x) = (c_1 + c_2 x) e^{rx}$
- Si $r_1, r_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \Rightarrow r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$

  y se cumple $y(x) = e^{\alpha x} \cdot (c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x))$.

Así, cuando $a = 1$, $b = 0$, $y'' - cy = 0$.

- Si $c > 0 \Rightarrow r = \pm\sqrt{c}$, $y(x) = c_1 e^{\sqrt{c}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{c}\,x}$
- Si $c < 0 \Rightarrow r_1 = i\sqrt{-c}$, $r_2 = -i\sqrt{-c}$, y se cumple

  $$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{-c}\,x) + c_2 \sin(\sqrt{-c}\,x).$$

Por método de separación de variables:

$u(x,y) = X(x)\,Y(y)$, así:

$X \in C([0,a]) \times C^2((0,a))$,

$Y \in C([0,b]) \times C^2((0,b))$.

$$X''Y + Y''X = 0 \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{-Y''}{Y} =: \lambda$$

$$\Rightarrow X'' - \lambda X = 0, \quad Y'' + \lambda Y = 0, \quad y \in (0,b).$$

Para evitar la Trivialidad $X \equiv 0$, las condiciones de frontera implican $Y(0) = 0 = Y(b)$.

Probemos existe $\lim\limits_{y \to b^-} Y'(y)$.

$$\lim_{y \to b^-} Y''(y) = \lim_{y \to b^-} -\lambda Y(y) = -\lambda Y(b) \text{ (cont.) } = 0.$$

Así, por el Teo. fund. del Cálculo:

Sea $x \in (0,b)$: $$\underbrace{\int_x^b Y''(y)\,dy}_{\text{real}} = Y'\Big|_x^b = \lim_{y \to b^-} Y'(y) - Y'(x)$$

$\therefore$ Existe $\lim\limits_{y \to b^-} Y'(y)$.

Luego, $$\lambda \int_0^b (Y(y))^2 dy = -\int_0^b Y(y)\, Y''(y)\,dy$$
$$= -\left[\underbrace{Y(y)\, Y'(y)}\Big|_0^b - \int_0^b (Y'(y))^2 dy \right]$$

Análogamente se prueba existe $\lim\limits_{y \to 0^+} Y'(y)$.

$$= 0 + \int_0^b (Y'(y))^2 dy$$

$\Rightarrow \lambda \geq 0$.

Si $\lambda = 0$, $Y' \equiv 0$ (por continuidad), así $Y \equiv 0$, por $Y(0)=0$; ergo, $u\equiv 0$ (Trivial).

$\therefore$ λ es una constante positiva.

$\Rightarrow Y(y) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}\, y) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}\, y)$

De $Y(0)=0$: $c_1 = 0$. Así: $Y(y) = c_2 \sin(\sqrt{\lambda}\, y)$.

De $Y(b)=0$, y, evitando $u\equiv 0$ si $c_2=0$;

$\sin(\sqrt{\lambda}\, b) = 0$. $\therefore$ $\lambda = (k\pi/b)^2$; $k \in \mathbb{Z}^+$.

$\therefore$ $Y_k(y) = C_k \sin\left(\frac{k\pi y}{b}\right)$, $k \in \mathbb{Z}^+$.

De $\lambda > 0$ y $X'' - \lambda X = 0$:

$X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\, x}$. Note $X(0)=0$.

$\Rightarrow X(x) = -c_2\left(e^{\sqrt{\lambda}\, x} - e^{-\sqrt{\lambda}\, x}\right) = -2c_2 \sinh(\sqrt{\lambda}\, x)$

$\therefore$ $X_k(x) = F_k \cdot \sinh\left(\frac{\pi k x}{b}\right)$; $k \in \mathbb{Z}^+$

$\therefore$ $u_k(x,y) = D_k \cdot \sinh\left(\frac{\pi k x}{b}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi k y}{b}\right)$, $k \in \mathbb{Z}^+$.

Queremos: (*)

- $u(x,y) = \sum_{k\geq 1} D_k \sinh\left(\frac{\pi k x}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi k y}{b}\right)$.

- $f(y) = u(a,y) = \sum_{k\geq 1} \left(D_k \sinh\left(\frac{\pi k a}{b}\right)\right) \sin\left(\frac{\pi k x}{b}\right)$.

- $D_k \sinh\left(\frac{\pi k a}{b}\right) = \frac{2}{b} \int_0^b f(t) \sin\left(\frac{\pi k t}{b}\right) dt = b_k$

Teorema: Sea $f \in C[0;b]$, $f(0) = 0 = f(b)$, f diferenciable salvo en cantidad finita de puntos, $f' \in SC[0;b]$. $\Rightarrow$ $u(\cdot,\cdot)$ definido en $(*)$ es solución de la EDP 2.

Además: $u \in C([0,a]\times[0,b]) \cap C^{\infty}([0,a[\times[0,b])$.

Proof:

Para $x \in [0,a]$: $0 \leq \dfrac{\sinh(\pi k \frac{x}{b})}{\sinh(\pi k \frac{a}{b})} \leq 1$.

En $[0,a]\times[0,b]$:

$$\Rightarrow \sum \left| b_k \frac{\sinh(\pi k x/b)}{\sinh(\pi k a/b)} \sin\left(\frac{\pi k y}{b}\right)\right| \leq \sum |b_k|$$

converge absolutamente $\Rightarrow$ Por el Test-Weierstrass, la serie converge uniformemente.

$\Rightarrow u \in C([0,a]\times[0,b])$.

Para probar diferenciabilidad:

Dado $\epsilon > 0$, $x \in [0, a-\epsilon]$.

$$\frac{\cosh(\pi k x/b)}{\sinh(\pi k a/b)} = \frac{e^{k\bar{x}} + e^{-k\bar{x}}}{e^{k\bar{a}} - e^{-k\bar{a}}} = \frac{e^{k\bar{x}} \overbrace{\left(1 + e^{-2k\bar{x}}\right)}^{\leq 2}}{e^{k\bar{a}}\left(1 - e^{-2k\bar{a}}\right)}$$

$$\leq e^{k(\bar{x}-\bar{a})} \cdot 2 \Big/ \left(1 - e^{-2\bar{a}}\right) = e^{k\frac{\pi}{b}(x-a)} \cdot \underbrace{M_1}_{\text{cte}}.$$

$$\leq e^{-k\frac{\pi}{b}\epsilon} \cdot M_1.$$

También se logra acotar $\dfrac{\sinh(\pi k x/b)}{\sinh(\pi k a/b)}$

con $e^{-k\frac{\pi}{b}\epsilon} \cdot M_2$.

Así, por el Test-Weierstrass y teorema de dirigida sobre convergencia de series de derivadas: $u \in C^{\infty}([0,a[\times [0,b])$. ✓

Problema de Dirichlet en el círculo

$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$

- $\Delta u = 0$
- $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$
- $u|_{\partial\Omega} = f \in C(\partial\Omega)$.

Considere el cambio de variables $u(x,y)=V(r,\theta)$

$x = r\cos\theta\,,\quad y = r\sin\theta\,;$

$r = (x^2+y^2)^{1/2}\,,\quad \theta = \arctan(y/x)\,,\ x\neq 0\,,$

$r\in\,]0,1[\,,\quad \theta\in\,]0,2\pi[\,.$

Regla de la cadena: (Suponga $r>0$)

$$u_x = V_r\cdot r_x + V_\theta\cdot\theta_x\,.$$

$$r_x = x/r = \cos\theta\,,\quad \theta_x = -y/r^2 = -\operatorname{sen}\theta/r$$

$$\Rightarrow u_x = V_r\cdot\cos\theta - V_\theta\cdot\frac{\sin\theta}{r}$$

$$u_{xx} = (V_r)_x\cos\theta + V_r(\cos\theta)_x - (V_\theta)_x\frac{\sin\theta}{r} - V_\theta(\sin\theta/r)_x$$

$$= (V_{rr}r_x + V_{\theta r}\cdot\theta_x)\cos\theta + V_r(-\sin\theta)\theta_x - (V_{r\theta}r_x + V_{\theta\theta}\theta_x)\frac{\sin\theta}{r} - V_\theta\left(\frac{\cos\theta\,\theta_x r - r_x\sin\theta}{r^2}\right)$$

$$u_{xx} = V_{rr}\cos^2\theta - 2V_{\theta r}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r} + V_r\frac{\sin^2\theta}{r} + V_{\theta\theta}\frac{\sin^2\theta}{r^2} + 2V_\theta\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\,.$$

Asimismo: $r_y = \sin\theta$, $\theta_y = \cos\theta / r$

$$u_y = V_r \cdot r_y + V_\theta \cdot \theta_y$$

$$= V_r \sin\theta + V_\theta \cos\theta / r .$$

$$\Rightarrow u_{yy} = (V_{rr} r_y + V_{\theta r} \theta_y) \sin\theta + V_r \cos\theta\, \theta_y$$

$$+ (V_{r\theta} r_y + V_{\theta\theta} \theta_y) \cos\theta / r$$

$$+ V_\theta (-\sin\theta\, \theta_y r - r_y \cos\theta) / r^2 .$$

$$\therefore u_{yy} = V_{rr} \sin^2\theta + 2V_{\theta r} \frac{\sin\theta \cos\theta}{r} + V_r \frac{\cos^2\theta}{r}$$

$$+ V_{\theta\theta} \frac{\cos^2\theta}{r^2} - 2 V_\theta \frac{\sin\theta \cos\theta}{r^2} .$$

<u>De $u_{xx} + u_{yy} = 0$:</u>

$$V_{rr} + \frac{1}{r} V_r + \frac{1}{r^2} V_{\theta\theta} = 0 .$$

CLASE 09

PC2 : • Pregunta 2

$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f \in C^2([0, 2\pi])$, $f''(x) \geq 0$, $0 \leq x \leq 2\pi$.

Prove $\hat{f}(k) + \hat{f}(-k) \geq 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$.

Fije $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$. $\hat{f}(k) + \hat{f}(-k) \sim \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx)\,dx$

$= -\int_0^{2\pi} f'(x) (\sin(kx)/k)\,dx = \ \ldots$ Finish

• Pregunta 4

$$D_N(\theta) = \sum_{n=-N}^{N} e^{in\theta}.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(\theta)|\,d\theta = 2\int_0^{\pi} \left| \sin((N+1/2)\theta)/\sin(\theta/2) \right| d\theta.$$

Note $f(x) := \begin{cases} x/\sin x & ; x \in]0, \pi/2] \\ 1 & ; x = 0 \end{cases}$ es

continua en el compacto $[0, \pi/2]$, y, no se anula.

$\Rightarrow \exists\, c > 0 : |x/\sin x| \geq c$, $\forall x \in]0, \pi/2]$.

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(\theta)|\,d\theta \geq 4\int_0^{\pi} \frac{|\sin((N+1/2)\theta)|}{\theta}\,d\theta = 4\int_0^{\pi(N+1/2)} \frac{|\sin w|}{w}\,dw$$

$$\geq 4\sum_{j=0}^{N-1} \int_{j\pi}^{(j+1)\pi} |\sin w|/w\,dw = 4\sum_{j=0}^{N-1} \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{\ }$$ Finish

Ecuación de Dirichlet en el disco y Funciones armónicas

$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$. Buscamos:

"3"

1) $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$

2) $\Delta u = 0$

3) $u|_{\partial\Omega} = f \in C(\partial\Omega)$

Para emplear separación de variables, empleamos coordenadas polares:

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$; $r \in [0,1[$, $\theta \in [0,2\pi[$.

$u(x,y) = V(r,\theta)$, $f(\cos\theta, \sin\theta) = g(\theta)$.

1) $V \in C^2([0,1[\times\mathbb{R}) \cap C([0,1]\times\mathbb{R})$

2) $r^2 V_{rr} + rV_r + V_{\theta\theta} = 0$, $r \in [0,1[$, $\theta \in \mathbb{R}$

4) $V(r,\theta) = V(r,\theta+2\pi)$, $r \in [0,1]$, $\theta \in \mathbb{R}$

3) $V(1,\theta) = g(\theta)$

Por separación de variables: $V(r,\theta) = \varphi(r)\cdot\psi(\theta)$

De (2): $r^2\varphi''(r)\psi(\theta) + r\varphi'(r)\psi(\theta) + \varphi(r)\psi''(\theta) = 0$

$$\Rightarrow \frac{r^2\varphi''(r) + r\varphi'(r)}{\varphi(r)} = -\frac{\psi''(\theta)}{\psi(\theta)} = \lambda \quad (\text{cte}).$$

- $\varphi \in C^2(]0,1[) \cap C([0,1])$; $r^2\varphi''(r) + r\varphi'(r) - \lambda\varphi(r) = 0$
- $\psi \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi(\theta+2\pi) = \psi(\theta), \forall\theta\in\mathbb{R}$; $\psi''(\theta) + \lambda\psi(\theta) = 0$

$$\lambda\int_0^{2\pi}(\psi(\theta))^2 d\theta = -\int_0^{2\pi}\psi(\theta)\psi''(\theta)\,d\theta = -\left(-\int_0^{2\pi}(\psi'(\theta))^2 d\theta\right),$$

por periodicidad e integración por partes.

$$\Rightarrow \lambda\int_0^{2\pi}\psi^2(\theta)\,d\theta = \int_0^{2\pi}(\psi'(\theta))^2 d\theta \quad \Rightarrow \lambda \geq 0.$$

Obs: Si $\lambda = 0 \Rightarrow \psi = \text{cte}$

Suponga entonces $\lambda > 0$.

$$\Rightarrow \psi_\lambda(\theta) = A_\lambda\cos(\sqrt{\lambda}\,\theta) + B_\lambda\sin(\sqrt{\lambda}\,\theta) \;.\;\ldots\; (\Delta)$$

Tarea: De (Δ) y porque ψ tiene período 2π,

$\Rightarrow \sqrt{\lambda} = k \in \mathbb{N}$.

$\therefore\ \lambda = k^2,\ k\in\mathbb{N}$.

$$\psi_k(\theta) = A_k\cos(k\theta) + B_k\sin(k\theta) \;,\; k\in\mathbb{Z}^+ .$$

INSPIRATION HUT - 0.5CM GRID

Note Ψ_K cubre el caso $\lambda = 0$, si $K = 0$.

$\therefore$ $\Psi_K(\theta) = A_K \cos(K\theta) + B_K \sin(K\theta)$; $K \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Ahora, respecto a φ:

$$r^2 \varphi''(r) + r\varphi'(r) - K^2 \varphi(r) = 0$$

1) Si $K = 0 \Rightarrow r^2 \varphi''(r) + r\varphi'(r) = 0$

$$(r\varphi'(r))' = 0 \Rightarrow \varphi'(r) = A/r \Rightarrow \varphi(r) = A\ln(r) + B. \quad \ldots(1)$$

2) Si $K \in \mathbb{N} \Rightarrow$ Supongamos $\varphi(r) = r^{\alpha}$; $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow r^2 \alpha(\alpha-1) r^{\alpha-2} + r\alpha r^{\alpha-1} - K^2 r^{\alpha} = 0$$

$$\alpha(\alpha-1) + \alpha - K^2 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = K^2 \Rightarrow \alpha = \pm K$$

$$\Rightarrow \varphi(r) = C_K r^K + D_K r^{-K}. \quad \ldots(2)$$

Para tener compatibilidad entre las soluciones $\varphi(r)$ de (1) y (2); consideramos $A = \underbrace{0 = D_K}_{\text{evitar singularidad}}$.

$\therefore$ $\varphi_K(r) = C_K r^K$, $K \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

$$\Rightarrow V(r,\theta) = \sum_{K=0}^{\infty} \left(A_K^* \cos(K\theta) + B_K^* \sin(K\theta)\right) r^K$$

$$= \sum_{K \in \mathbb{Z}} C_K e^{iK\theta} r^{|K|} \quad \text{(suponiendo conve. uniforme).}$$

De 3), sería bonito si: $C_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t) e^{-ikt}\, dt$

$$V(r,\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t) e^{-ikt}\, dt\right) e^{ik\theta} r^{|k|}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t) \underbrace{\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ik(\theta-t)} r^{|k|}\right)}_{P_r(\theta-t)} dt$$

$$\Rightarrow V(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t) P_r(\theta-t)\, dt = (g * P_r)(\theta),$$

donde $P_r(\theta) = P(r,\theta) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ik\theta} r^{|k|}$.

Poisson kernel: $P(r,\theta)$, $r<1$.

Por test-Weierstrass, converge absolutamente; y uniformemente en $\mathbb{R}$ $(r\neq 0)$.

$0\leq r<1$; $\theta\in\mathbb{R}$.

$$P_r(\theta) = 1 + \sum_{k\geq 1} (e^{i\theta} r)^k + \sum_{k\geq 1} (e^{-i\theta} r)^k$$

$$= 1 + e^{i\theta} r/(1-e^{i\theta} r) + e^{-i\theta} r/(1-e^{-i\theta} r).$$

Simplificando: $$P(r,\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2}.$$

Theorem: Defina $g(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta)$ y

$V(r,\theta) = (g * P_r)(\theta)$, $0 \le r < 1$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Entonces, $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ definida por

$$u(x,y) = \begin{cases} V(r,\theta) : x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta, \\ \qquad\qquad 0 \le r < 1,\ \theta \in \mathbb{R}. \\ f(x,y) : x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

es solución de EDP "3".

Proof:

1) $P(\cdot,\cdot) \in C^{\infty}([0,1[\times \mathbb{R})$

2) $P_{rr} + \frac{1}{r} P_r + \frac{1}{r^2} P_{\theta\theta} = 0$ en $]0,1[\times \mathbb{R}$.

3) $r \in [0,1[$, $\theta \in \mathbb{R}$

$$V(r,\theta) = (g * P_r(\theta)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) P(r, \theta - t)\, dt$$

Por Feynman's integral Trick, 1) implica también $V \in C^{\infty}([0,1[\times \mathbb{R})$.

En Ω ($r \in]0,1[$):

$$\Delta u = V_{rr} + \frac{1}{r} V_r + \frac{1}{r^2} V_{\theta\theta} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \Big(P_{rr}(r, \theta - t) +$$

$\frac{1}{r} P_r(r, \theta - t) + \frac{1}{r^2} P_{\theta\theta}(r, \theta - t) \Big) dt = 0$

$\Rightarrow \Delta u = 0$ en Ω.

- $V(r,\theta) \longrightarrow g(\theta)$ uniformemente en $\mathbb{R}$, cuando $r \to 1^-$.

Dado $\epsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$: $0 < 1 - r < \delta \Rightarrow \forall\, \theta \in \mathbb{R}$:

$$|V(r,\theta) - g(\theta)| < \epsilon.$$

$$V(r,\theta) - g(\theta) = (g * P_r)(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(t)\,(g(\theta - t) - g(\theta))\,dt$$

(por periodo 2π)

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)\,(g(\theta - t) - g(\theta))\,dt \quad \ldots (*)$$

Recuerde g es continua y periódica en $[0; 2\pi]$; así, su extensión en $\mathbb{R}$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

$\exists\, \eta_\epsilon > 0$: $|z - y| < \eta_\epsilon$; $z, y \in \mathbb{R} \Rightarrow |g(z) - g(y)| < \epsilon$

Así: $|\theta - t - \theta| < \eta_\epsilon \Rightarrow |g(\theta - t) - g(\theta)| < \epsilon$

$|t| < \eta_\epsilon \Rightarrow |g(\theta - t) - g(\theta)| < \epsilon$.

Asimismo: $\exists\, B > 0$: $|g(\theta)| \leq B$; $\forall\, \theta \in \mathbb{R}$.

<u>En $(*)$:</u>

$$|V(r,\theta) - g(\theta)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t|<\eta_\epsilon} |P_r(t)|\,|g(\theta-t) - g(\theta)|\,dt$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{\eta_\epsilon \leq |t| \leq \pi} |P_r(t)|\,|g(\theta-t) - g(\theta)|\,dt$$

$$\leq \frac{\epsilon}{2\pi} \int_{|t|<\eta_\epsilon} P_r(t)\,dt + \frac{2B}{2\pi} \int_{\eta_\epsilon \leq |t| \leq \pi} |P_r(t)|\,dt$$

$$< \epsilon + \frac{2B}{\pi} \int_{\eta_\epsilon \leq |t| \leq \pi} P_r(t)\,dt \leq \epsilon + \frac{2B}{\pi} P_r(\eta_\epsilon) \cdot (\pi - \eta_\epsilon)$$

$< \epsilon + 2B P_r(\eta_\epsilon)$. Basta notar $P_r(\eta_\epsilon)$ Tiende a cero, cuando $r \to 1^-$.

Funciones armónicas

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, abierto.

$u : \Omega \to \mathbb{R}$ es armónica si $u \in C^2(\Omega)$ y $\Delta u = 0$.

Recordemos el concepto de función holomorfa:

$f \in \mathcal{O}(\Omega)$ (holomorfa en Ω) si existe

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0), \ \forall z_0 \in \Omega.$$

Considere $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $f(z) = f(x+iy) = f(x,y)$,

$z_0 = x_0 + iy_0$.

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + iy_0 + h) - f(x_0 + iy_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = f_x(z_0)$$

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + iy_0 + ih) - f(x_0 + iy_0)}{ih}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{ih} = \frac{1}{i} f_y(z_0)$$

$$\Rightarrow \quad f_x(z_0) = -i f_y(z_0).$$

$f = u + iv$; $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$

$f_x = u_x + iv_x$, $f_y = u_y + iv_y$

$f_x = -f_y$ implica $u_x + iv_x = -i(u_y + iv_y)$

$\Rightarrow u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ (ecuaciones de Cauchy-Riemann)

Notación: Definimos operadores:

- $\dfrac{\partial}{\partial z} := \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$

- $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} := \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$

En análisis complejo, se demuestra:

$$f \in \mathcal{O}(\Omega) \iff f \in C^1(\Omega) \wedge \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0}_{\text{ecu. Cauchy-Rie.}} .$$

$\blacksquare$

CLASE 10

Principio del máximo y funciones armónicas

Principio del máximo: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ open y acotado.
Sea $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ continua tq $u \in C^2(\Omega)$ y $\Delta u = 0$.

$$\Rightarrow \max_{(x,y)\in\overline{\Omega}} u(x,y) = \max_{(x,y)\in\partial\Omega} u(x,y).$$

Proof: Denote $M = \max_{\overline{\Omega}} u$, $m = \max_{\partial\Omega} u$.

De $\partial\Omega \subseteq \overline{\Omega}$: $m \leq M$. Suponga $m < M$.

$\Rightarrow \exists (x_0, y_0) \in \Omega : M = u(x_0, y_0)$, $(x_0, y_0) \notin \partial\Omega$.

Defina $d := \text{diam}\,\Omega = \sup\{ \|\vec{x} - \vec{y}\| : \vec{x}, \vec{y} \in \Omega \}$.

$$V(x,y) := u(x,y) + \frac{(M-m)}{2d^2}\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right),$$

con $V \in C^2(\Omega)$.

Sea $(x,y) \in \partial\Omega$.

$$V(x,y) \leq m + \frac{(M-m)}{2d^2}(d^2) = \frac{M+m}{2} < M.$$

$$\max_{\overline{\Omega}} V(x,y) = V(x_1,y_1), \quad (x_1,y_1) \in \Omega \setminus \partial\Omega.$$

$\Rightarrow V_x(x_1,y_1)=0 \;,\; V_y(x_1,y_1)=0 \quad (\nabla V(x_1,y_1)=0)$

Suponga $V_{xx}(x_1,y_1)>0$:

$\Rightarrow \exists$ Bola abierta $B_\delta(x_1,y_1)$:

$$V_{xx}(x,y)>0 \;,\; \forall (x,y) \in B_\delta(x_1,y_1).$$

$\Rightarrow \underbrace{V_{xx}(x,y_1)}_{} > 0 \;,\; |x-x_1|<\delta$

$\frac{\partial}{\partial x}\left(V_x(x,y_1)\right) \Rightarrow V_x(\cdot,y_1)$ es estrictamente creciente.

$\Rightarrow x_1 < x < x_1+\delta$ implica $V_x(x,y_1) > V_x(x_1,y_1)$

$(\Rightarrow\Leftarrow)$

$\therefore V_{xx}(x_1,y_1)\le 0$

Análogamente : $V_{yy}(x_1,y_1)\le 0.$

$\Rightarrow \Delta V(x_1,y_1)\le 0.$

Pero: $\Delta V = \Delta u + \frac{(M-m)}{2d^2}\cdot 4$.

$\Rightarrow \Delta V(x_1,y_1) = 0 + \frac{2(M-m)}{d^2} > 0 \quad (\Rightarrow\Leftarrow)$

$\therefore m=M.$ ✓

Principio del mínimo: Bajo las mismas condiciones : $\min\limits_{\bar\Omega} u = \min\limits_{\partial\Omega} u$.

INSPIRATION HUT - 0.5CM GRID

Teorema: Sea Ω open acotado, defina el sistema
- $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$
- $\Delta u = 0$ • $u|_{\partial\Omega} = f \in C(\partial\Omega)$.

$\Rightarrow$ Sí existe solución única.

Proof:

Note resta de soluciones es solución u, con $u|_{\partial\Omega} = 0$.

Del principio de mín. y máx. : $u = 0$.

$\therefore$ La solución es única. ✓

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, abierto. Decimos que u es armónica si $u \in C^2(\Omega)$ y $\Delta u = 0$.

Para $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, denotemos por abuso de notación $f(z) = f(x,y)$, con x, y componentes reales.

Recuerde $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $f = u + iv$, partes reales, implica $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$.

Teorema: $f \in \mathcal{O}(\Omega) \Rightarrow \mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f)$ son armónicas.

Proof:

Recuerde $f' \in \mathcal{O}(\Omega)$, por ser analítica.

$$f' = U_x + iV_y = U_x + i(-U_y)$$

Por Eq. Cau.-Rie., para f':

$$(U_x)_x = (-U_y)_y \Rightarrow U_{xx} + U_{yy} = 0.$$

Similar para V. ✓

Note no siempre se cumple la otra dirección:

$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$; $u(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) = \log|z|$.

$\Delta u = 0$. Suponga u es parte real de algún $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

$$g(z) := e^{f(z)} \Rightarrow |g(z)| = e^{Re(f)} = e^{u} = e^{\log|z|}$$

$$\Rightarrow |e^{f(z)}| = |z|, \ \forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

$$\Rightarrow \left|\frac{e^{f(z)}}{z}\right| = 1, \ \forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

Por la versión compleja del principio de módulo máximo:

$$\frac{e^{f(z)}}{z} = cte = e^{f(1)} \Rightarrow z = e^{f(z)-f(1)}.$$

$\Rightarrow$ Existe un logaritmo holomorfo para z en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ $(\Rightarrow\Leftarrow)$

Recuerde: Si $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ cumple las ec. de Cauchy - Riemman y $\varphi \in C^1(\Omega) \Rightarrow \varphi \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Teorema: Si u es armónica y Ω simplemente conexo, entonces $\exists f \in \mathcal{O}(\Omega) : \operatorname{Re}(f) = u$.

Proof:

Sea $\varphi := u_x + i(-u_y)$

- $(\operatorname{Re}\varphi)_x - (\operatorname{Im}\varphi)_y = u_{xx} - (-u_y)_y = u_{xx} + u_{yy} = 0$
  $\Rightarrow (\operatorname{Re}\varphi)_x = (\operatorname{Im}\varphi)_y$

- $(\operatorname{Re}\varphi)_y + (\operatorname{Im}\varphi)_x = (u_x)_y + (-u_y)_x = u_{xy} - u_{yx} = 0$
  $\Rightarrow (\operatorname{Re}\varphi)_y = -(\operatorname{Im}\varphi)_x$

$\Rightarrow \varphi$ cumple las ec. de Cauchy - Riemman

Note $\varphi_x, \varphi_y \in C(\Omega)$. $\Rightarrow \varphi \in C^1(\Omega)$.

$\therefore \varphi \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Como Ω es simplemente conexo:

$\exists f_0 \in \mathcal{O}(\Omega) : f_0' = \varphi$.

Sea $f_0 = u_0 + i V_0$

INSPIRATION HUT - 0.5CM GRID

$\Rightarrow f_0' = (u_0)_x - i(v_0)_y = \varphi = u_x - i u_y$

$\Rightarrow (u_0)_x = u_x \ , \ (v_0)_y = u_y$

Defino $w := u_0 - u$. $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \bullet\ w_x = 0 \\ \bullet\ w_y = 0 \end{array}\right\}$ w es

constante, pues Ω es conexo.

$\Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R} : \ w = u_0 - u = c \Rightarrow u = u_0 - c$

$\therefore\ f := f_0 - c$ cumple lo requerido. ✓

Teorema: $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ armónica, acotada superiormente. $\Rightarrow u$ es cte.

Proof:

$\mathbb{R}^2$ es simplemente conexo.

$\Rightarrow \exists\, f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) : \mathrm{Re}(f) = u$.

Defina $g(z) = e^{f(z)}$.

$$|g(z)| = |e^{f(z)}| = e^{\mathrm{Re}(f)} = e^{u} \leq e^{\overset{\text{cota superior de } u.}{M}}$$

$\Rightarrow g$ entera y acotada.

Por Liouville: $g = \text{cte}$

$\Rightarrow cte = |g(z)| = e^{u} \Rightarrow u$ constante. ✓

Teorema: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto. $u: \Omega \to \mathbb{R}$ armónica. $\forall\, a \in \Omega$, $\overline{B(a,r)} \subseteq \Omega$, se cumple $u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a+re^{it})\,dt$.

Proof:

Sea $R>0$ tal que $\overline{B(a,r)} \subseteq B(a,R) \subseteq \Omega$.

$\Rightarrow \exists\, f \in \mathcal{O}(B(a,R)) : u = Re(f)$

$\overset{\text{Complejo}}{\Rightarrow} f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(a+re^{it})\,dt$

$\overset{Re(\cdot)}{\Rightarrow} u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a+re^{it})\,dt$. ✓

Teorema: Sea $u: \overset{\text{open}}{\Omega} \to \mathbb{R}$ continua tal que $\forall a \in \Omega$, $\overline{B(a,r)} \subseteq \Omega$: $u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a+re^{it})\,dt$.

$\Rightarrow u$ es armónica.

Proof:

Dado $a \in \Omega$, $\overline{B(a,R)} \subseteq \Omega$.

Considere . V

CLASE 11

Resolución del parcial

Problema 2: $f \in C^1(\mathbb{R})$, 2π-periódica,

$\hat{f}(n) = 1/(|n| \log|n|)$, $\forall n \neq 0, 1, -1$; ¿existe?

Proof:

Suponga existe tal f. Como se cumplen las condiciones de Fourier:

$$f(0) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) = \hat{f}(0) + \hat{f}(1) + \hat{f}(-1)$$
$$+ 2 \lim_{n \to \infty} \sum_{n \geq 2} (n \log n)^{-1}.$$

Note $\sum_{n \geq 3} (n \log n)^{-1} \geq \int_2^{\infty} (t \log t)^{-1} dt = \log(\log t)\Big|_2^{\infty} = \infty.$

$(\Rightarrow \Leftarrow)$

Problema 4: $f \in SC[-\pi, \pi] \Rightarrow \forall \epsilon > 0 : \exists P$

Tal que $\int_{-\pi}^{\pi} |P(x) - f(x)|^2 dx < \epsilon$.

Proof: $|f(x)| \leq B$, $\forall x \in [-\pi, \pi]$.

Dado $\epsilon > 0$, $\exists g \in C[-\pi, \pi] : \int_{-\pi}^{\pi} |g(x) - f(x)| dx < \epsilon$,

$|g(x)| \leq B$, $\forall -\pi \leq x \leq \pi$.

Para esa g, $\exists P : |P(x) - g(x)| < \epsilon, \forall -\pi \le x \le \pi$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |P(x) - f(x)|\, dx \le \int_{-\pi}^{\pi} |P(x) - g(x)|\, dx + \int_{-\pi}^{\pi} |g(x) - f(x)|\, dx$$

$$< 2\pi\epsilon .$$

Note $|P(x)| < \epsilon + |g(x)| < \epsilon + B$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - P(x)|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - P(x)| \underbrace{|f(x) - P(x)|}_{\le \epsilon + B} dx$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - P(x)|^2 dx \le (\epsilon + B) \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - P(x)|\, dx$$

$$< (\epsilon + B)(2\pi\epsilon) \checkmark$$

Principio de Harnack

Lema: sea Ω abierto. Sea $u_n : \Omega \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones armónicas, y, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ cumple $\lim_{n \to \infty} u_n(x) = u(x)$ uniformemente en compactos de Ω.

Proof:

Note u es continua, por la conv. uni. con los u_n continuos.

Dado $\overline{B(a,R)} \subseteq \Omega$: Como u_n es armónica:

$$u_n(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_n(a+Re^{it})\,dt$$

lím $n\to\infty$: $u(a) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} u(a+Re^{it})\,dt$,

por la conv. uni. en el compacto $\partial(\overline{B(a,r)})$. ✓

Principio de Harnack: Sean $u_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto conexo, tal que $u_1 \leq u_2 \leq u_3 \leq \dots$. Entonces, se cumple solo una de las siguientes afirmaciones:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) =: u(x)$ uniformemente en compactos de Ω, con $u : \Omega \to \mathbb{R}$ armónica.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = +\infty$, $\forall x \in \Omega$.

Proof: (we didn't finish yet)

Considere el problema: $B(0,1) \subseteq \mathbb{C}$, $f \in C(\partial B(0,1))$,
$\Delta u = 0$, $u = f$ en $\partial B(0,1)$.

Similar al problema de Dirichlet, se tiene la solución

$$u(re^{it}) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2) \cdot f(e^{it})}{|re^{i0} - e^{it}|^2} dt \, ; & 0 \leq r < 1 . \\ f(e^{it}) \; ; & r = 1 . \end{cases}$$

Para el caso análogo, de dilatación de la bola $B(0,1)$ a $B(0,R)$:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - |z|^2}{|z - Re^{it}|^2} f(Re^{it}) dt \, , \quad \forall z \in B_r(0), \; 0 \leq r < R .$$

Harnack inequality for the ball:

Sea $u : B(0,R) \to \mathbb{R}$ armónica con $u \geq 0$ en $B(0,R)$.
Then, $\forall z \in B(0,R)$:

$$\frac{R - |z|}{R + |z|} \cdot u(0) \leq u(z) \leq \frac{R + |z|}{R - |z|} \cdot u(0)$$

Proof:

Sea $z \in B(0,R)$, considere $z \in \overline{B(0,r)} \subseteq B(0,R)$,

y note u es armónica en $B(0,r)$,

$u = u|_{\partial B(0,r)}$ en $\partial B(0,r)$.

$$\Rightarrow u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - |z|^2}{|z - re^{it}|^2} u(re^{it})\, dt.$$

Note $(r + |z|) \geq |z - re^{it}| \geq r - |z| \geq 0$

$$u(z) \leq \frac{r^2 - |z|^2}{(r - |z|)^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{it})\, dt = \frac{r + |z|}{r - |z|} \cdot u(0)$$

Tomando lím $r \to R$: $u(z) \leq \dfrac{R + |z|}{R - |z|} \cdot u(0)$

Similar para la otra desigualdad. ✓

Corolario: Sea $u: B(a,R) \to \mathbb{R}$ armónica con $u \geq 0$ en $B(a,R)$. Then, $\forall z \in B(a,R)$:

$$\frac{R - |z-a|}{R + |z-a|} \cdot u(a) \leq u(z) \leq \frac{R + |z-a|}{R - |z-a|} \cdot u(a).$$

En particular: $u: B(a,R) \to \mathbb{R}$ armónica

Tal que $u \geq 0$ en $B(a,R)$.

Then, $\forall z \in \overline{B(a,r)} \subseteq B(a,R)$:

$$\frac{R-r}{R+r} \cdot u(a) \leq u(z) \leq \frac{R+r}{R-r} \cdot u(a).$$

Harnack's inequality: Sea Ω abierto conexo y $K \subseteq \Omega$ compacto. then, $\exists\, C_K > 1$:

$$\frac{1}{C} \leq \frac{u(y)}{u(x)} \leq C, \quad \forall x, y \in K, \quad \forall u: \Omega \to \mathbb{R}$$

armónica con $u > 0$ en Ω.

Proof:

Dado $(x,y) \in \Omega \times \Omega$, definir

$$S(x,y) := \sup \left\{ \frac{u(x)}{u(y)} : \begin{array}{l} u: \Omega \to \mathbb{R} \text{ armónica} \\ \text{con } u > 0 \text{ en } \Omega \end{array} \right\}$$

Por ahora, supongamos $S(x,y) < \infty$, $\forall (x,y) \in \Omega^2$.

Dado $K \subseteq \Omega$, compacto.
Sea $(a,b) \in K \times K \Rightarrow a \in K \subseteq \Omega \Rightarrow \exists\, r > 0$ con $a \in B_{2r}(a) \subseteq \Omega$.

Sea $u : \Omega \to \mathbb{R}$ armónica y estric. positiva.

Dado $x \in \overline{B_r(a)} \subseteq B_{2r}(a)$: $\dfrac{u(x)}{u(a)} \leq \dfrac{2r+r}{2r-r} = 3$

$b \in B_{2r}(b) \subseteq \Omega$.

Dado $y \in \overline{B_r(b)} \subseteq B_{2r}(b)$: $\dfrac{u(b)}{u(y)} \leq \dfrac{2r+r}{2r-r} = 3$

Así, $(x,y) \in B_r(a) \times B_r(b)$ implica $\dfrac{u(x)}{u(y)} \leq \dfrac{9u(a)}{u(b)} \leq 9S(a,b)$.

Para cada $(a,b) \in K \times K$, $\exists\, V_{a,b} := B_r(a) \times B_r(b)$ donde $u(x)/u(y) \leq C_{a,b}$, $\forall (x,y) \in V_{a,b}$.

$K \times K$, compacto, es cubierto por los $V_{a,b}$.

$\Rightarrow \exists\, V_{a_1,b_1}, \dots, V_{a_n,b_n}$ con

$\forall (x,y) \in K \times K$: $u(x)/u(y) \leq \sum_{m=1}^{n} C_{a_m,b_m} =: \tilde{C}$,

constante que solo depende de K; $\tilde{C} > 0$.

Note, en particular para $(x,y) \in K^2$:

$\dfrac{u(x)}{u(y)} \leq \tilde{C}$, $\dfrac{u(y)}{u(x)} \leq \tilde{C}$ $\Rightarrow 1 \leq \tilde{C}^2 \Rightarrow \tilde{C} \geq 1$

Para $c := \tilde{c} + 1$, $c > 1$.

Tenemos : $\frac{1}{c} \leq \frac{u(x)}{u(y)} \leq c$, $\forall (x,y) \in K^2$,

$\forall\, u : \Omega \to \mathbb{R}$ armónica estrictamente positivo.

Ahora mostramos lo pendiente sobre $S(x,y)$.

Dado $x \in \Omega$. $S_x := \{ y \in \Omega : S(x,y) < +\infty \}$

Note $x \in S_x$, así S_x no es vacío.

Dado $y \in S_x$. $y \in \Omega$. $\Rightarrow y \in B_{2r}(y) \subseteq \Omega$

Veamos que $B_r(y) \subseteq S_x$.

$z \in \overline{B_r(y)} \subseteq B_{2r}(y)$ implica $\frac{1}{3} \leq \frac{u(z)}{u(y)} \leq 3$,

para cualquier armónica u estric. posi. .

De $y \in S_x$: $\exists M > 0$: $\frac{u(x)}{u(y)} \leq M$, $\forall u$ armó. posi. .

$\Rightarrow u(x)/u(z) \leq 3M \Rightarrow z \in S_x$. $\therefore S_x$ es open.

Sea $y \in \Omega$ con $z_n \to y$, $z_n \in S_x$.

Veamos que $y \in S_x$.

Como $y \in \Omega$, $\exists\, y \in B_{8R}(y) \subseteq \Omega$.

De $z_n \to y$: $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ con $y \in B_{2r}(z_{n_0}) \subseteq B_{3r}(z_{n_0})$.

$$\Rightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{u(y)}{u(z_{n_0})} \leq 5 .$$

Como $z_{n_0} \in S_x \Rightarrow u(x)/u(z_{n_0}) \leq M_2$ (no depende de u)

$\Rightarrow u(x)/u(y) \leq M_3$ (constante que no depende de u)

$\Rightarrow y \in S_x$. $\therefore$ S_x es cerrado.

De $\emptyset \neq S_x \subseteq \Omega$ clopen $\Rightarrow$ conexo : $S_x = \Omega$. ✓

Continuación de la prueba de Harnack's principle:

Defina $\tilde{u}_n := u_n - u_1 + 1$, armónica estric. positiva.

Note $\tilde{u}_1 \leq \tilde{u}_2 \leq \cdots$, $\lim_{n\to\infty} \tilde{u}_n(x) = (u - u_1 + 1)(x) =: \tilde{u}(x)$.

• Suponga $\tilde{u}(x) < \infty$, $\forall x \in \Omega$.

Dado $K \subseteq \Omega$ compacto. Fije $x \in K$.

Considere $m > n$, naturales.

$$\Rightarrow 0 \leq \tilde{u}_m(y) - \tilde{u}_n(y) \leq c\,(\tilde{u}_m(x) - \tilde{u}_n(x)),$$

$\forall y \in K$ (por la desi. de Harnack).

Dado $\epsilon > 0$: $\exists N_0$: $m > n > N_0 \Rightarrow$

$$|\tilde{u}_m(y) - \tilde{u}_n(y)| < \epsilon, \quad \forall y \in K.$$

Por conv. uni. en compactos:

$$|\tilde{u}(y) - \tilde{u}_n(y)| < \epsilon, \forall y \in K$$

$$|u(y) - u_1(y) + 1 - u_n(y) + u_1(y) - 1| < \epsilon$$

$$|u(y) - u_n(y)| < \epsilon, \forall y \in K. \checkmark$$

- Suponga que $\exists x_0 \in \Omega$: $\tilde{u}(x_0) = \infty$.

Dado $y \in \Omega$, considere $K = \{x_0, y\}$.

$\tilde{u}_n(x_0) / \tilde{u}_n(y) \leq C_K$ (Harnack's inequality)

$$\tilde{u}_n(x_0) \leq C_K \tilde{u}_n(y) \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \tilde{u}_n(y) = \infty$$

$$\Rightarrow \tilde{u}(y) = \infty \Rightarrow u(y) = +\infty.$$

CLASE 12

Funciones subarmónicas y Fourier Transform

Help para pc3: • No habrá EDPs to solve. • Pensar en ejemplos de funciones armónicas
• Viene hasta armónicas.

Recuerde: $u: \Omega \subseteq \mathbb{C}$ o $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

• Si u es armónica $\Rightarrow$ (-) $u \in C(\Omega)$

(*) { (-) $\forall\ \overline{B(a,r)} \subseteq \Omega$: $u(a) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} u(a+re^{it})\,dt$

• Si $u \in C(\Omega)$ y (*) $\Rightarrow$ u es armónica en Ω.

Def: Decimos que $u: \Omega \to \mathbb{R}$ es subarmónica si • $u \in C(\Omega)$ • $u(a) \leq \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} u(a+re^{it})\,dt$,

$\forall\ \overline{B(a,r)} \subseteq \Omega$.

Ejemplos: Si u es armónica en Ω $\Rightarrow$

$u, -u$ y $|u|$ son subarmónicas en Ω.

Ejercicio: Sea $u \in C^2(\Omega)$. Se cumple:

u es subarm. en $\Omega \Leftrightarrow \Delta u \geq 0$.

Obs: • No toda función armónica es C^2.

• Si $f \in \mathcal{O}(\Omega) \Rightarrow |f|$ es subarmónica en Ω.

• $f(z) = |z|^p$, $p > 0$ son subarmónicas en $\mathbb{R}^2$.

Principio del módulo máximo

Lema: Si Ω es abierto conexo, $u: \Omega \to \mathbb{R}$ subarmónica alcanza un máximo en Ω, $\Rightarrow u$ es constante.

Proof:

Defina $A = u^{-1}\{M\} = \{a \in \Omega : u(a) = M\}$,

donde $M := \max\limits_{z \in \Omega} u(z)$. Así, $A \neq \emptyset$.

De $u \in C(\Omega)$, $\{M\}$ cerrado $\therefore$ A es cerrado.

Probemos que A es abierto.

Sea $a \in A \subseteq \Omega$ (open). Así, $a \in \overline{B(a,r)} \subseteq \Omega$ para cierto r.

De u subarm. $\therefore$ $M = u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(a + re^{it})\,dt$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} M = M$$

$$\Rightarrow M = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(a+re^{it})\,dt \ ; \ u(a+re^{it}) \leq M, \ \forall -\pi \leq t \leq \pi$$

$$\Rightarrow u(a+re^{it}) = M, \ \forall t \in [-\pi, \pi].$$

Análogamente para cada $0 < \tilde{r} < r$.

$\Rightarrow B(a, r) \subseteq A$. Por conexidad: $A = \Omega$

$\therefore$ u es constante. ✓

Corolario: Sea Ω abierto, acotado, conexo. Sea $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, $u \in C(\overline{\Omega})$ y subarmónica en Ω, tal que $u(z) \leq 0$, $\forall z \in \partial\Omega$.

$\Rightarrow u(z) \leq 0, \ \forall z \in \overline{\Omega}$.

Corolario: Sea Ω abierto acotado conexo. Sean $u, v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ continuas con u y v subarmónicas en Ω.

Si $u(z) \leq v(z), \ \forall z \in \partial\Omega \Rightarrow u(z) \leq v(z), \ \forall z \in \overline{\Omega}$.

Obs: Si u_1, u_2 son subarmó. $\Rightarrow$ máx$\{u_1, u_2\}$ es subarmónica.

Transformada de Fourier

$$\mathcal{L}^1 := \left\{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ Tal que } f \text{ integrable en cualquier } [-M, M] \text{ con } \|f\|_{\mathcal{L}^1} := \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx = \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} |f(x)|\,dx < \infty \right\}$$

Def: Dado $f \in \mathcal{L}^1$, defino la Transformada de Fourier de f como $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\xi x}\, dx$, $\xi \in \mathbb{R}$.

Obs: No siempre $f \in \mathcal{L}^1$ implica $\hat{f} \in \mathcal{L}^1$.

Ejemplo: Definimos $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-a, a] \\ 0, & x \notin [-a, a] \end{cases}$$, para un $a \in \mathbb{R}$ fijo.

$\Rightarrow \hat{f}(0) = 2a/\sqrt{2\pi}$. Para $\xi \neq 0$:

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} 1 \cdot e^{-i\xi x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\frac{e^{-i\xi x}}{-i\xi} \right) \Bigg|_{-a}^{a}$$

$\Rightarrow \hat{f}(\xi) = \dfrac{2 \sin(\xi a)}{\sqrt{2\pi}\, \xi}$. Pero: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin(\xi a)}{\xi} \right| d\xi = \infty$.

Ejemplo: Dado $a>0$. $f(x) := e^{-a|x|}$

- **$f \in \mathcal{L}^1$:** $\int_{-M}^{M} |f(x)|\,dx = \int_{-M}^{M} e^{-a|x|}\,dx = 2\int_0^M e^{-ax}\,dx$

$$= 2\left(\frac{e^{-ax}}{-a}\right)\Bigg|_0^M = \frac{2e^{-aM}}{-a} + \frac{2}{a}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx = 2/a \,.$$

- **$\hat{f} \in \mathcal{L}^1$:** $\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-a|x|} e^{-i\xi x}\,dx$

$$= (2\pi)^{-1/2}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{(a-i\xi)x}\,dx + \int_0^{\infty} e^{-(a+i\xi)x}\,dx\right]$$

$$= (2\pi)^{-1/2} \cdot \left[\frac{e^{(a-i\xi)x}}{a-i\xi}\Bigg|_{-\infty}^{0} + \frac{e^{-(a+i\xi)x}}{-(a+i\xi)}\Bigg|_0^{\infty}\right]$$

$$= (2\pi)^{-1/2} \cdot \left[(a-i\xi)^{-1} + (a+i\xi)^{-1}\right]$$

$$\therefore\ \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2a}{a^2+\xi^2} \,. \quad \therefore\ \hat{f} \in \mathcal{L}^1 .$$

Proposition: Sean $f, g \in \mathcal{L}_1$:

1) $f + \lambda g \in \mathcal{L}_1$, $\widehat{f+\lambda g}(\xi) = \hat{f}(\xi) + \lambda \hat{g}(\xi)$

2) $\overline{f} \in \mathcal{L}_1$, $\quad \widehat{\overline{f}}(\xi) = \overline{\hat{f}(-\xi)}$, $\xi \in \mathbb{R}$

↳ Conjugado complejo

3) $(\tau_y(f))(x) := f(x-y)$. Así, $\tau_y(f) \in \mathcal{L}^1$,

Fijado $y \in \mathbb{R}$ y $\widehat{\tau_y(f)}(\xi) = e^{-i\xi y}\hat{f}(\xi)$.

4) $(D_\delta(f))(x) := f(\delta x)$, fijado $\delta > 0$.

Así, $D_\delta(f) \in \mathcal{L}^1$ y

5) $|\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1 / \sqrt{2\pi}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$.

Proof:

2) $$\widehat{\overline{f}}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)}\, e^{-i\xi x} dx = (\cdot) \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)\, e^{i\xi x}}\, dx$$

$$= (\cdot) \overline{\int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{i\xi x} dx} = \overline{\hat{f}(-\xi)}.$$

3) $$\widehat{\tau_y(f)}(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} (\tau_y(f))(x)\, e^{-i\xi x} dx$$

$$= (\cdot) \int_{\mathbb{R}} f(w)\, e^{-i\xi w} e^{-i\xi y} dx, \quad w := x-y.$$

$$= e^{-i\xi y} \hat{f}(\xi).$$

INSPIRATION HUT - 0.5CM GRID

4) $\widehat{D_\delta(f)} = (\cdot) \int_{\mathbb{R}} f(w)\, e^{-i\xi w/\delta}\, dw/\delta \; ; \; w := \delta x$

$$= \delta^{-1} \cdot \hat{f}(\xi/\delta).$$

5) $|\hat{f}(\xi)| \leq (\cdot) \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx \right| \leq (\cdot) \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx = \frac{\|f\|_1}{\sqrt{2\pi}}.$

Esta es la mejor constante sharp, pues si $f \in \mathcal{L}^1$ es positiva en cero, $\hat{f}(0)$ coincide con la cota.

Theorem: Si $f \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow \hat{f}$ es unifor. continua en $\mathbb{R}$.

Proof:

Dado $\xi \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}$.

$$|\hat{f}(\xi+h) - \hat{f}(\xi)| = (\cdot) \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} (e^{-ihx} - 1) dx \right|$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| |e^{-ihx} - 1| dx \quad \ldots (*)$$

Como $f \in \mathcal{L}^1$: $\lim_{M \to \infty} \int_{-M}^{M} |f(x)| dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx$

$$\Rightarrow \lim_{M \to \infty} \int_{|x| \geq M} |f(x)| dx = 0.$$

Luego, $\exists M_0 \in \mathbb{R} : \int_{|x| \geq M_0} |f(x)|\, dx < \frac{\sqrt{2\pi}\,\epsilon}{4}$

<u>En (*)</u> : $$|\hat{f}(\xi+h) - \hat{f}(\xi)| \leq (\cdot)\int_{|x|\leq M_0} |f(x)|\,|e^{-ihx}-1|\,dx$$

$$+ (\cdot)\int_{|x|\geq M_0} |f(x)|\,|e^{-ihx}-1|\,dx$$

$$\leq (\cdot)\int_{|x|\leq M_0} |f(x)|\,|e^{-ihx}-1|\,dx + \underbrace{\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}\cdot\epsilon}{4}}_{\epsilon/2}$$

Fije $\theta \in \mathbb{R}$.

$$|e^{i\theta}-1|^2 = |\cos\theta - 1 + i\,\mathrm{Sen}\,\theta|^2 = (\cos\theta-1)^2 + \mathrm{sen}^2\theta$$

$$\Rightarrow |e^{i\theta}-1| = 2\,|\mathrm{Sen}(\theta/2)|.$$

Note $\sin(x) = \int_0^x \cos t\, dt$ (TFCálculo)

$$\Rightarrow |\sin(x)| \leq \int_0^x |\cos t|\,dt \leq \int_0^x dt = x \leq |x|,\ x \in \mathbb{R}.$$

$$\therefore\ |e^{i\theta}-1| \leq |\theta|,\ \theta\in\mathbb{R}.$$

$$\int_{|x|\leq M_0} |f(x)|\,|e^{-ihx}-1|\,dx \leq \int_{|x|\leq M_0} |f(x)|\,|hx|\,dx \leq |hM_0|\int_{|x|\leq M_0}|f(x)|\,dx$$

$$\leq |hM_0|\,\|f\|_1.$$

Lema de Riemann-Lebesgue:

Si $f \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow \lim\limits_{|\xi| \to \infty} \hat{f}(\xi) = 0$.

Proof: Probemos para $f \in C(\mathbb{R})$.

Defina $w := x - \pi/\xi$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x-\pi/\xi)\, e^{-i\xi x}\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(w)\, e^{-i\xi(w+\pi/\xi)}\, dw$$

$$= -\int_{\mathbb{R}} f(w)\, e^{-i\xi w}\, dw.$$

$$\Rightarrow (2\sqrt{2\pi})\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x}\, dx + \int_{\mathbb{R}} f(w)\, e^{-i\xi w}\, dw.$$

Dado $\epsilon > 0$, $\exists\, M_0 \in \mathbb{R}^+ : \displaystyle\int_{|x| \geq M_0} |f(x)|\, dx < \epsilon$.

Como $|\xi| \to +\infty$, suponga $|\xi| \geq \pi$.

$$2\sqrt{2\pi}\, |\hat{f}(\xi)| \leq \left| \int_{|x| \geq M_0+2} \left(f(x) - f(x-\pi/\xi)\right) e^{-i\xi x}\, dx \right|$$

$$+ \left| \int_{|x| \leq M_0+2} \left(f(x) - f(x-\pi/\xi)\right) e^{-i\xi x}\, dx \right|$$

$$\leq \int_{|x| \geq M_0+2} |f(x) - f(x-\pi/\xi)|\, dx + \int_{|x| \leq M_0+2} |f(x) - f(x-\pi/\xi)|\, dx$$

$$\leq \int_{|x|\geq M_0+2} |f(x)|\,dx + \int_{|x|\geq M_0+2} |f(x-\pi/\xi)|\,dx + \int_{|x|\leq M_0+2} |f(x)-f(x-\tfrac{\pi}{\xi})|\,dx$$

$$< \epsilon \qquad\qquad < \epsilon$$

$$|x-\pi/\xi| \geq |x| - |\pi/\xi| \geq |x| - 1 \geq M_0 + 1 \geq M_0$$

Para $(x-\pi/\xi)$, con $|x| \leq M_0+2$, basta considerar $|y| \leq M_0+3$, intervalo compacto donde f es uniformemente continua, pues es continua.

$\Rightarrow \exists\, \delta > 0 : |y-z| < \delta \Rightarrow |f(y)-f(z)| < \dfrac{\epsilon}{2(M_0+2)}$

$|x-(x-\pi/\xi)| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x-\pi/\xi)| < \dfrac{\epsilon}{2(M_0+2)}$

Así, cuando $|\xi| > \max\{\pi/\delta, \pi\}$,

se tiene $|\hat{f}(\xi)|$ suficientemente pequeño. ✓

■