# CLASE 11

# Resolución del parcial

## Problema 2: $f \in C^1(\mathbb{R})$, $2\pi$-periódica,

$\hat{f}(n) = 1/(|n| \log|n|)$, $\forall n \neq 0, 1, -1$, ¿existe?

**Proof:**

Suponga existe tal $f$. Como se cumplen las condiciones de Fourier:

$$f(0) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) = \hat{f}(0) + \hat{f}(1) + \hat{f}(-1)$$
$$+ 2 \lim_{n \to \infty} \sum_{n \geq 2} (n \log n)^{-1}.$$

Note $\displaystyle\sum_{n \geq 3} (n \log n)^{-1} \geq \int_2^{\infty} (t \log t)^{-1} dt = \log(\log t)\Big|_2^{\infty} = \infty.$

$(\Rightarrow\Leftarrow)$

## Problema 4: $f \in SC[-\pi, \pi] \Rightarrow \forall \epsilon > 0 : \exists P$

Tal que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |P(x) - f(x)|^2 dx < \epsilon$.

**Proof:** $|f(x)| \leq B$, $\forall x \in [-\pi, \pi]$.

Dado $\epsilon > 0$, $\exists g \in C[-\pi, \pi]$ : $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |g(x) - f(x)| dx < \epsilon$,

$|g(x)| \leq B$, $\forall -\pi \leq x \leq \pi$.

Para esa $g$, $\exists P \cdot |P(x) - g(x)| < \epsilon, \forall -\pi \leq x \leq \pi$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |P(x) - f(x)|\, dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |P(x) - g(x)|\, dx + \int_{-\pi}^{\pi} |g(x) - f(x)|\, dx$$

$$< 2\pi\epsilon.$$

Note $|P(x)| < \epsilon + |g(x)| < \epsilon + B$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - P(x)|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - P(x)| \underbrace{|f(x) - P(x)|}_{\leq \epsilon + B} dx$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - P(x)|^2 dx \leq (\epsilon + B) \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - P(x)|\, dx$$

$$< (\epsilon + B)(2\pi\epsilon) \checkmark$$

## Principio de Harnack

**Lema:** Sea $\Omega$ abierto. Sea $u_n : \Omega \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones armónicas, y, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ cumple $\lim_{n \to \infty} u_n(x) = u(x)$ uniformemente en compactos de $\Omega$.

**Proof:**

Note $u$ es continua, por la conv uni. con los $u_n$ continuos.

Dado $\overline{B(a,R)} \subseteq \Omega$: Como $u_n$ es armónica:

$$u_n(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_n(a+Re^{it})\,dt$$

lím $n \to \infty$: $$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(a+Re^{it})\,dt,$$

por la conv. uni. en el compacto $\partial(\overline{B(a,r)})$.

✓

**Principio de Harnack:** Sean $u_n: \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto conexo, tal que $u_1 \leq u_2 \leq u_3 \leq \dots$. Entonces, se cumple solo una de las siguientes afirmaciones:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) =: u(x)$ uniformemente en compactos de $\Omega$, con $u: \Omega \to \mathbb{R}$ armónica.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = +\infty$, $\forall x \in \Omega$

INSPIRATION HUT - 0.6CM GRID

**Proof:** (we didn't finish yet)

Considere el problema: $B(0,1) \subseteq \mathbb{C}$, $f \in C(\partial B(0,1))$,
$\Delta u = 0$, $u = f$ en $\partial B(0,1)$.

Similar al problema de Dirichlet, se tiene la solución

$$u(re^{it}) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{(1-r^2)\cdot f(e^{it})}{|re^{i\theta} - e^{it}|^2} dt \ ; \ 0 \leq r < 1. \\ f(e^{it}) \ ; \ r = 1. \end{cases}$$

Para el caso análogo, de dilatación de la bola $B(0,1)$ a $B(0,R)$:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - |z|^2}{|z - Re^{it}|^2} f(Re^{it}) dt, \ \forall z \in B_r(0), \ 0 \leq r < R.$$

## Harnack inequality for the ball:

Sea $u: B(0,R) \to \mathbb{R}$ armónica con $u \geq 0$ en $B(0,R)$.
Then, $\forall z \in B(0,R)$:

$$\frac{R-|z|}{R+|z|} \cdot u(0) \leq u(z) \leq \frac{R+|z|}{R-|z|} \cdot u(0)$$

**Proof:**

Sea $z \in B(0,R)$, considere $z \in \overline{B(0,r)} \subseteq B(0,R)$,

y note $u$ es armónica en $B(0,r)$,

$u = u|_{\partial B(0,r)}$ en $\partial B(0,r)$.

$$\Rightarrow u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - |z|^2}{|z - re^{it}|^2} u(re^{it})\, dt.$$

Note $(r + |z|) \geq |z - re^{it}| \geq r - |z| \geq 0$

$$u(z) \leq \frac{r^2 - |z|^2}{(r - |z|)^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{it})\, dt = \frac{r + |z|}{r - |z|} \cdot u(0)$$

Tomando lím $r \to R$: $u(z) \leq \dfrac{R + |z|}{R - |z|} \cdot u(0)$

Similar para la otra desigualdad. ✓

**Corolario:** Sea $u$ $B(a,R) \to \mathbb{R}$ armónica con $u \geq 0$ en $B(a,R)$. Then, $\forall z \in B(a,R)$:

$$\frac{R - |z-a|}{R + |z-a|} \cdot u(a) \leq u(z) \leq \frac{R + |z-a|}{R - |z-a|} \cdot u(a).$$

**En particular:** $u: B(a,R) \to \mathbb{R}$ armónica

Tal que $u \geq 0$ en $B(a,R)$.

Then, $\forall z \in \overline{B(a,r)} \subseteq B(a,R)$:

$$\frac{R-r}{R+r} \cdot u(a) \leq u(z) \leq \frac{R+r}{R-r} \cdot u(a).$$

Harnack's inequality: Sea $\Omega$ abierto conexo y $K \subseteq \Omega$ compacto. then, $\exists\, C_K > 1$:

$$\frac{1}{C} \leq \frac{u(y)}{u(x)} \leq C, \quad \forall x, y \in K, \quad \forall u: \Omega \to \mathbb{R}$$

armónica con $u > 0$ en $\Omega$.

Proof:

Dado $(x,y) \in \Omega \times \Omega$, definir

$$S(x,y) := \sup \left\{ \frac{u(x)}{u(y)} : u: \Omega \to \mathbb{R} \text{ armónica con } u > 0 \text{ en } \Omega \right\}$$

Por ahora, supongamos $S(x,y) < \infty$, $\forall (x,y) \in \Omega^2$.

Dado $K \subseteq \Omega$, compacto.
Sea $(a,b) \in K \times K \Rightarrow a \in K \subseteq \Omega \Rightarrow \exists\, r > 0$ con $a \in B_{2r}(a) \subseteq \Omega$.

INSPIRATION HUT - 0.6CM GRID

Sea $u: \Omega \to \mathbb{R}$ armónica y estric. positiva

Dado $x \in \overline{B_r(a)} \subseteq B_{2r}(a)$ : $\dfrac{u(x)}{u(a)} \leq \dfrac{2r+r}{2r-r} = 3$

$b \in B_{2r}(b) \subseteq \Omega$.

Dado $y \in \overline{B_r(b)} \subseteq B_{2r}(b)$ : $\dfrac{u(b)}{u(y)} \leq \dfrac{2r+r}{2r-r} = 3$

Así, $(x,y) \in B_r(a) \times B_r(b)$ implica $\dfrac{u(x)}{u(y)} \leq 9\dfrac{u(a)}{u(b)} \leq 9S(a,b)$.

Para cada $(a,b) \in K \times K$, $\exists\, V_{a,b} = B_r(a) \times B_r(b)$ donde $u(x)/u(y) \leq C_{a,b}$, $\forall (x,y) \in V_{a,b}$.

$K \times K$, compacto, es cubierto por los $V_{a,b}$

$\Rightarrow \exists\, V_{a_1,b_1}, \ldots, V_{a_n,b_n}$ con

$\forall (x,y) \in K \times K$ : $u(x)/u(y) \leq \sum_{m=1}^{n} C_{a_m,b_m} =: \tilde{c}$,

constante que solo depende de $K$; $\tilde{c} > 0$.

Note, en particular para $(x,y) \in K^2$:

$\dfrac{u(x)}{u(y)} \leq \tilde{c}$, $\dfrac{u(y)}{u(x)} \leq \tilde{c}$ $\Rightarrow 1 \leq \tilde{c}^2 \Rightarrow \tilde{c} \geq 1$

Para $c = \tilde{c} + 1$, $c > 1$.

INSPIRATION HUT - 0.6CM GRID

Tenemos : $\frac{1}{c} \leq \frac{u(x)}{u(y)} \leq c$, $\forall (x,y) \in K^2$,

$\forall\, u : \Omega \to \mathbb{R}$ armónica estrictamente positivo.

Ahora mostramos lo pendiente sobre $S(x,y)$.

Dado $x \in \Omega$. $S_x := \{ y \in \Omega : S(x,y) < +\infty \}$

Note $x \in S_x$, así $S_x$ no es vacío.

Dado $y \in S_x$. $y \in \Omega$. $\Rightarrow y \in B_{2r}(y) \subseteq \Omega$

Veamos que $B_r(y) \subseteq S_x$.

$z \in \overline{B_r(y)} \subseteq B_{2r}(y)$ implica $\frac{1}{3} \leq \frac{u(z)}{u(y)} \leq 3$,

para cualquier armónica $u$ estric. posi.

De $y \in S_x$ : $\exists M > 0$ : $\frac{u(x)}{u(y)} \leq M$, $\forall u$ armó. posi.

$\Rightarrow u(x)/u(z) \leq 3M \Rightarrow z \in S_x$. $\therefore S_x$ es open.

Sea $y \in \Omega$ con $z_n \to y$, $z_n \in S_x$.

Veamos que $y \in S_x$.

Como $y \in \Omega$, $\exists\, y \in B_{8R}(y) \subseteq \Omega$.

De $z_n \to y$ : $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ con $y \in \underset{2r}{B}(z_{n_0}) \subseteq \underset{3r}{B}(z_{n_0})$.

$$\Rightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{u(y)}{u(z_{n_0})} \leq 5 .$$

Como $z_{n_0} \in S_x \Rightarrow u(x)/u(z_{n_0}) \leq M_2$ (no depende de $u$)

$\Rightarrow u(x)/u(y) \leq M_3$ (constante que no depende de $u$)

$\Rightarrow y \in S_x$. $\therefore$ $S_x$ es cerrado.

De $\phi \neq S_x \subseteq \Omega$ clopen $\Rightarrow$ conexo : $S_x = \Omega$. ✓

Continuación de la prueba de Harnack's principle:

Defina $\tilde{u}_n := u_n - u_1 + 1$, armónica estric. positiva.

Note $\tilde{u}_1 \leq \tilde{u}_2 \leq \cdots$, $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{u}_n(x) = (u - u_1 + 1)(x) =: \tilde{u}(x)$.

- Suponga $\tilde{u}(x) < \infty$, $\forall x \in \Omega$.

Dado $K \subseteq \Omega$ compacto. Fije $x \in K$.

Considere $m > n$, naturales.

$\Rightarrow 0 \leq \tilde{u}_m(y) - \tilde{u}_n(y) \leq c(\tilde{u}_m(x) - \tilde{u}_n(x))$,

$\forall y \in K$ (por la desi. de Harnack).

Dado $\epsilon > 0$ : $\exists N_0$ : $m > n > N_0 \Rightarrow$

$$|\tilde{u}_m(y) - \tilde{u}_n(y)| < \epsilon, \quad \forall y \in K.$$

Por conv. uni. en compactos :

$$|\tilde{u}(y) - \tilde{u}_n(y)| < \epsilon, \forall y \in K$$

$$|u(y) - u_1(y) + 1 - u_n(y) + u_1(y) - 1| < \epsilon$$

$$|u(y) - u_n(y)| < \epsilon, \forall y \in K. \checkmark$$

- Suponga que $\exists x_0 \in \Omega$ : $\tilde{u}(x_0) = \infty$.

Dado $y \in \Omega$, considere $K = \{x_0, y\}$.

$$\tilde{u}_n(x_0) / \tilde{u}_n(y) \leq C_K \quad \text{(Harnack's inequality)}$$

$$\tilde{u}_n(x_0) \leq C_K \tilde{u}_n(y) \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \tilde{u}_n(y) = \infty$$

$$\Rightarrow \tilde{u}(y) = \infty \Rightarrow u(y) = +\infty.$$