

CLASE 01

Esperanza condicional

Fijemos (Ω, \mathcal{F}, P) y las v.a.'s

$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ medibles.

Recordemos,

$$\sigma(z) = \left\{ \bar{z}^*(A) : A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \right\}$$

$$= \left\{ \{ z \in A \} : A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \right\}$$

= cuestionario de preguntas
sobre z .

$$\sigma(z, w) = \left\{ \{ (z, w) \in A \} : A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} \right\}.$$

$$= \sigma(\sigma(z) \cup \sigma(w)) \quad (\text{EJER.})$$

$$=: \sigma(z) \vee \sigma(w).$$

Además, dado $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, sub. σ -álgebra:

$\sigma(z) \subseteq \mathcal{G} \iff$ Con la información \mathcal{G} , podemos "intuir" responder Todo sobre z , " $z \in \mathcal{G}$ ".

$\Leftrightarrow Z$ es \mathcal{G} -medible.

Obs: Si z_1, z_2, \dots son \mathcal{G} -medibles, entonces $\limsup z_n$ y $\liminf z_n$ son \mathcal{G} -medibles.

Lema: Sean Z, W integrables. (EJER.)

$$Z \leq W \Leftrightarrow \int_A Z \leq \int_A W, \forall A \in \mathcal{F}.$$

Obs:

$$\bullet \int_A Z = \int_A W, \forall A \in \mathcal{F} \stackrel{\text{a.s}}{\Leftrightarrow} Z = W.$$

Basta $A \in \sigma(Z, W)$.

Teorema: Dada X integrable y $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ sub. σ -alg., existe Z v.a. tal que:

1) Z es \mathcal{G} -medible.

2) $\int_A Z = \int_A X, \forall A \in \mathcal{G}.$

Adicionalmente, si W integrable cumple 1) y 2), entonces $W \stackrel{a.s.}{=} Z$.

Def: Dado X integrable y \mathcal{G} sub. σ -alg. de \mathcal{F} , definimos $E[X|\mathcal{G}]$ como la clase de todas las variables cumpliendo con 1) y 2) del Teorema previo.

También diremos " Z es versión de $E[X|\mathcal{G}]$ " si Z cumple 1) y 2).

Obs: Es fácil verificar que:

- X es \mathcal{G} -medible $\Rightarrow E[X|\mathcal{G}] = X$.
- $X \perp \mathcal{G}$ ($\sigma(X)$ y \mathcal{G} son independientes)
 $\Rightarrow E[X|\mathcal{G}] \stackrel{a.s.}{=} E[X]$.
- X, Y son integrables, $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow$
 $E[X+Y|\mathcal{G}] \stackrel{a.s.}{=} E[X|\mathcal{G}] + E[Y|\mathcal{G}]$,
 $E[\alpha X|\mathcal{G}] \stackrel{a.s.}{=} \alpha E[X|\mathcal{G}]$.
- X, Y integrables y $X \leq_{a.s.} Y \Rightarrow$
 $E[X|\mathcal{G}] \leq E[Y|\mathcal{G}]$.

- Para X integrable, $H \subseteq \mathcal{G}$, sub. σ -álgebras, vale $E[E[X|G]|H] \stackrel{a.s.}{=} E[X|H]$.
(propiedad de la torre)

Teorema de la convergencia monótona:

Suponga $X_n, n \in \mathbb{N}$ son v.a.'s Tal que

$0 \leq X_1 \leq X_2 \leq \dots$ y X una v.a. Tal que
 $X_n \xrightarrow{a.s.} X$. Fijemos $G \subseteq \mathcal{F}$, sub. σ -álgebra.

Si X es integrable (X_n integrable $\forall n$), entonces $E[X_n|G] \xrightarrow{a.s.} E[X|G]$.

Proof:

Sabemos $X_n \uparrow X$. Fije $A \in \mathcal{G}$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 0 \leq X_n \cdot 1_A \uparrow X \cdot 1_A \\ &\xrightarrow{\text{TCM}} \int X_n 1_A \rightarrow \int X 1_A. \end{aligned}$$

Sean Z_n, Z versión de $E[X_n|G]$ y $E[X|G]$, respectivamente.

Por otro lado, $Z_1 \leq Z_2 \leq \dots$.

Así, $\Omega^* := \bigcap_{k \geq 1} \{Z_k \leq Z_{k+1}\}$ tiene probabilidad 1.

Luego, podemos definir $\eta := \begin{cases} \lim Z_n, & \text{sobre } \Omega^* \\ 0, & \text{sobre } \Omega \setminus \Omega^* \end{cases}$

$\eta : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es \mathcal{G} -medible.

Para $A \in \mathcal{G}$: $Z_n \cdot 1_A \uparrow \eta \cdot 1_A$

$$\Rightarrow \int Z_n \cdot 1_A \rightarrow \int \eta \cdot 1_A.$$

Como η y Z son \mathcal{G} -medibles : $Z = \eta$ a.s. ✓

(EJER.) : Sean $X_n, n \in \mathbb{N}$, v.a.'s y X v.a.

Tales que $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$. Fije $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ sub. σ -alg.

Si X_n y X son integrables, entonces :

1) X_n es integrable, $\forall n$.

2) $E[X_n | \mathcal{G}] \xrightarrow{\text{a.s.}} E[X | \mathcal{G}]$.

Teorema de convergencia dominada

Fijemos $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, sub. σ -álgebra.

Sean X_n v.a.'s y Z integrable Tales que $|X_n| \leq Z$ a.s.

Si $X_n \xrightarrow{a.s.} X$, entonces (X integrable y X_n integrable $\forall n$) $E[X_n|G] \xrightarrow{a.s.} E[X|G]$.

Proof:

Haciendo $n \rightarrow \infty$: $|X| \leq Z$, a.s.

Tenemos $|E[X_n|G] - E[X|G]| =$

$$|E[X_n - X|G]| \stackrel{a.s.}{\leq} E[|X_n - X| |G]$$

EJER: U integrable $\Rightarrow |E[U|G]| \leq E[|U| |G|]$. a.s

Definimos $U_N := \sup \{|X_n - X_m| : n, m \geq N\}$,

medible por ser supremo de cantidad enumerable de medibles.

Como $X_n \xrightarrow{a.s.} X \in \mathbb{R}$; $U_N \downarrow 0$ a.s.

$$\Rightarrow E[U_N | G] \xrightarrow{a.s.} 0$$

T.C.M E.C.

Siempre que $N \leq n$: $|X_n - X| \leq U_N$.

$$\Rightarrow E[|X_n - X| |G] \leq E[U_N | G].$$

Con N fijo, haciendo $n \rightarrow \infty$:

$$\limsup E[|X_n - x| | \mathcal{G}] \leq E[\mathbb{1}_{\mathcal{G}} | \mathcal{G}]$$

Haciendo $N \rightarrow \infty$:

$$\limsup \underbrace{E[|X_n - x| | \mathcal{G}]}_{\geq 0} \leq 0 \text{ a.s.}$$

$$0 \leq \liminf \checkmark \leq \limsup \checkmark$$

$$\therefore E[|X_n - x| | \mathcal{G}] \xrightarrow{\text{a.s.}} 0. \checkmark$$

Libros:

- A Course in Prob. theory (K.L. Chung)
- Prob. theory and Examples (Durrett)
- Measure theory, Prob. and Sto. Pro. (Le Gall).

CLASE 02

Más sobre esperanza condicional

Fijado (Ω, \mathcal{F}, P) .

Lema: Sean X integrable, $G \subseteq \mathcal{F}$ sub. σ -álg. y ξ limitada ($\exists M > 0$ tq $|\xi| \leq_M$ a.s.)

G -medible. Then $E[X \xi | G] \stackrel{a.s}{=} \xi E[X | G]$.

Prueba:

Comenzamos con ξ simple y procedemos de manera usual.

EJER: Para $X: \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ medible positiva, también podemos definir $E[X | G]$ como la clase (identificadas por $\stackrel{a.s}{=}$) de v.a. en $\bar{\mathbb{R}}$, positivas.

Lema (Jensen): Sea X integrable, $G \subseteq \mathcal{F}$ sub. σ -álg. y $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ convexa. Then, $\varphi(E[X | G]) \leq E[\varphi(X) | G]$ a.s. .

Prueba:

Defina $\Delta_\varphi := \{T_{a,b} : T_{a,b}(x) \leq \varphi(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$, donde $T_{a,b} := a \cdot 1 + b$; $a, b \in \mathbb{Q}$.

Como Ψ es convexa, Δ_Ψ es no vacío.

Más aún, $\Psi(x) = \sup_{T \in \Delta_\Psi} T(x)$.

Luego, para cada $T \in \Delta_\Psi$: $T(x) \leq \Psi(x)$.

$$\Rightarrow \underbrace{\mathbb{E}[T(x) | \mathcal{G}]}_{T(\mathbb{E}[x | \mathcal{G}])} \stackrel{\text{a.s.}}{\leq} \mathbb{E}[\Psi(x) | \mathcal{G}] =: W$$
$$T(\underbrace{\mathbb{E}[x | \mathcal{G}]}_z) \stackrel{\text{a.s.}}{\leq} W, \text{ por ser } T \text{ ope. lineal.}$$

Es decir, existe medible S_T con proba. 1 en el cual $W(w) \geq T(z(w))$, $\forall w \in S_T$.

Así, tenemos una cantidad enumerable de medibles S_T , $\forall T \in \Delta_\Psi$, con proba. 1.

Considera $w \in \bigcap_{T \in \Delta_\Psi} S_T =: S^*$, $P(S^*) = 1$.

$$\Rightarrow W(w) \geq T(z(w)), \forall T \in \Delta_\Psi.$$

$$\Rightarrow W(w) \geq \left(\sup_{T \in \Delta_\Psi} T \right) (z(w)) = \Psi(z(w)) \quad \checkmark$$

Martingalas (introducción)

Def: Dada (Ω, \mathcal{F}, P) y $M_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$,
 $n = 1, 2, 3, \dots$ (puede variar), y

$\{G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}\}$, sub. σ -álgebras.
→ filtración

Es decir, (M_n, G_n) , $n=1, 2, 3, \dots$, es una martingala si:

1) M_n es G_n -medible ((M_n) está adaptada a (G_n)), $\forall n$.

2) M_n es integrable, $\forall n$.

3) $\forall n, m$ tq $1 \leq n < m$, se tiene

$$M_n = E[M_m | G_n].$$

Obs: Para verificar 3), basta se cumpla $M_n = E[M_{n+1} | G_n] \quad \forall n$. En efecto,

$$\begin{aligned} E[M_m | G_n] &= E[-\underbrace{E\{E[M_m | G_{m-1}] | G_{m-2}\}}_{M_{m-1}} \dots | G_n] \\ &= M_n. \end{aligned}$$

Además, recordemos que $M_n = E[M_m | G_n]$ equivale a:

$$\forall A \in G_n : E[M_n \cdot 1_A] = E[M_m \cdot 1_A], \text{ o sea,}$$

$$E[(M_m - M_n) \cdot 1_A] = 0, \forall A \in G_n.$$

Esto podemos denotarlo como $M_m - M_n \perp G_n$.

Ejemplos: Si (Ω, \mathcal{F}, P) , $\xi_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $n=1, 2, \dots$ son independientes, integrables y de media cero, entonces:

- $S_n := \sum_{i=1}^n \xi_i$, $n=1, 2, \dots$
- $G_n := \sigma(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$

(S_n, G_n) es una martingala. En efecto, para $A \in G_n$:

$$E[(S_m - S_n) \cdot 1_A] = E \left[\underbrace{\sum_{j=n+1}^m \xi_j}_{\text{independiente de } G_n} \cdot 1_A \right]$$

$$= E \left[\sum_{j=n+1}^m \xi_j \right] E[1_A] = 0 \cdot E[1_A], \text{ pues cada } \xi_j \text{ tiene media cero.}$$

Si por ejemplo $\xi_j \xrightarrow{\text{+1}} \xrightarrow{\text{-1}}$, con prob $\frac{1}{2}$ " ", "

entonces $S_n := \sum_{j=1}^n \xi_j$, $n \geq 1$, es una martingala.

Además, $P\{S_n \text{ converge a un real}\} = 0$.

De hecho, $P\{\limsup S_n = +\infty\} = 1 = P(\liminf S_n = -\infty)$

so $P\{\limsup S_n = +\infty, \liminf S_n = -\infty\} = 1$,

EJER: Si ξ_1, ξ_2, \dots indepen. integrables, de $E[\xi_j] = 1$, $\forall j$; entonces:

- $M_n := \xi_1 + \dots + \xi_n$
 - $G_n := \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$
- $\Rightarrow (M_n, G_n)$ es una martingala.

Ejemplo: Fijemos una medida de probabilidad μ en $\{0, 1, 2, \dots\}$. Branching process, o, Proceso de Galton-Watson.

Fijemos una familia de variables

$\{\xi_{jk} : j = 1, 2, \dots; k = 1, 2, \dots\}$ definidas

sobre (Ω, \mathcal{F}, P) , independientes, con

$\xi_{jk} \sim \mu$, $\forall j, k$. Ahora, definimos el

proceso:

- $Z_0 = 1$
- $Z_1 = \xi_{1,1}$
- $Z_2 = \sum_{k=1}^{Z_1} \xi_{2,k}$ ($0, Z_2 = 0$ cuando $Z_1 = 0$)
- $Z_3 = \sum_{k=1}^{Z_2} \xi_{3,k}$ ($0, Z_3 = 0$ cuando $Z_2 = 0$)

μ se denomina offspring distribution.

Vemos que $\{z_1=0\} \subseteq \{z_2=0\} \subseteq \{z_3=0\} \subseteq \dots$.

Así, $\{z_n=0\}$ ↑ extinción.

Problema: $P(\text{extinción}) = ?$

Defina $m = \sum_{i=0}^{\infty} i \mu(i)$.

EJER:

- $m < 1 \Rightarrow P(\text{extinción}) = 1$.
- $m > 1 \Rightarrow P(\text{extinción}) < 1$.
- $m = 1 \Rightarrow (z_n)$ es martingala.



CLASE 03

Submartingala y Supermartingala

Respecto a un e.p. (Ω, \mathcal{F}, P) filtrado, $(G_n)_n$.

Def: Decimos que $M_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, v.a.'s, $n=0, 1, \dots$, es una **submartingala** (**supermartingala**) si :

1) $(M_n)_n$ es adaptada a $(G_n)_n$.

2) M_n es integrable $\forall n$.

3) $\forall 0 \leq n < m : E[M_n - M_m | G] \stackrel{\text{a.s.}}{\geq} 0$.
 (\leq)

(EJER): En la def. previa, podemos cambiar

3) por $\int_M M_n \leq \int_A M_m, \forall A \in G_n ; \forall 0 \leq n < m$.

También basta 3) con períodos consecutivos, es decir, $m = n+1$.

Obs: Es claro que :

- (M_n) es superma. $\Leftrightarrow (M_n)$ es subma.
- (M_n) es mart. $\Leftrightarrow (M_n)$ subma. y superma.

- Si (X_n) y (Y_n) subma. (superma.), entonces $Z_n := X_n + Y_n$ es subma. (superma.).
- Si (M_n) y (N_n) son martingalas, then $(\alpha M_n + \beta N_n)$ es martingala, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- Si $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es \mathcal{G}_0 -medible e integrable, then $M_n := X, \forall n$ es una marting.
- Para (X_n) sub (super)mart. :
$$E[X_0] \leq (\geq) E[X_1] \leq (\geq) E[X_2] \leq (\geq) \dots$$

Prop.: Sea (M_n) una martingala y $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ convexa Tal que $X_n := \varphi(M_n)$ es integrable $\forall n$, then (X_n) es submart.

Proof: (EJER. usando Jensen)

Prop: Si (X_n) es submartingala y $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ es convexa y no decreciente, Tal que $Y_n := \varphi(X_n)$ es integrable, $\forall n$, entonces (Y_n) es una submartingala.

Ejemplos: • (X_n) es subm. $\Rightarrow X_n^+ := \max\{X_n, 0\}$ es submartingala.

- Valor de mi portafolio: Supongamos que M_n es el precio de d stocks en el instante n . Ahora, usemos r_n : Posiciones que adquieres en el instante $n-1$ (y que tiene consecuencia en n), respecto al # unidades de stocks.

Por ejemplo:

$$M_3 \xrightarrow{} M_4 \xrightarrow{} M_5 \\ \dots r_4 = +2 \quad r_5 = -3 \dots$$

El valor de (r_n) es el proceso

$V_0^r := r_1 \cdot M_0$ (dinero que me cuesta adquirir la posición r_1)

$V_n^r := r_n \cdot M_n$, $n \geq 1$ (dinero que tengo por haber adquirido la posición r_n)

Entonces, si implemento (r_n) , ganaré hasta $n=N$:

$$V_N^r - V_0^r = \sum_{k=1}^N (V_k^r - V_{k-1}^r) \text{ , donde}$$

$$V_k^r - V_{k-1}^r = \underbrace{r_k \cdot (M_k - M_{k-1})}_{\text{ganancia por la variación del precio del stock.}} + \underbrace{M_{k-1} \cdot (r_k - r_{k-1})}_{\text{dinero que inyectamos en k-1}}$$

ganancia por la variación del precio del stock. dinero que inyectamos en $k-1$.

Entonces, si la estrategia (f_n) es autofinanciada (i.e., $M_{k-1} \cdot f_k = M_{k-1} \cdot f_{k-1}$, $\forall k$), then

$$V_N^r = V_0^r + \sum_{k=1}^N f_k \cdot (M_k - M_{k-1}) .$$

Def: Dados • $M_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n=0, 1, \dots$,

• $f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n=1, 2, \dots$; $M_{n-1} \xrightarrow{f_n} M_n$,

denotemos

$$\int_0^N f dM := \sum_{k=1}^N f_k \cdot (M_k - M_{k-1}) , \quad y ,$$

si (f_n) es autofinanciado $\circ V_N^r = V_0^r + \int_0^N f dM$.

Integración y martingalas

Prop: Sea (Ω, \mathcal{F}, P) , (S_n) e.p. filtrado y

- $M_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n=0, 1, 2, \dots$ d martingalas.
- $f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n=1, 2, \dots$ es predecible (i.e., f_n es \mathcal{G}_{n-1} -medible, $\forall n=1, 2, \dots$) y acotado.

Entonces, el proceso $\int_0^N f dM: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $n=1, 2, \dots$ es una martingala.

$$\text{Proof: } E \left[\int_0^n r dM - \int_0^{n-1} r dM \mid \mathcal{G}_{n-1} \right]$$

$$= E \left[\Gamma_n \cdot (M_n - M_{n-1}) \mid \mathcal{G}_{n-1} \right]$$

$$= \Gamma_n \cdot E [M_n - M_{n-1} \mid \mathcal{G}_{n-1}] = 0, \text{ pues}$$

Γ_n es predecible y M_n martingala.

Prop: Sea (Ω, \mathcal{F}, P) , (G_n) e.p. filtrado y

- $X_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n=0,1,2,\dots$ submartingala (super)
- $\Gamma_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n=1,2,\dots$ predecible y acotado.

Entonces, $\int_0^n \Gamma_n dX: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $n=1,2,\dots$ resulta

submartingala si $\Gamma_n \geq 0$, $\forall n$ (por coordenadas).
(super)

Proof:

$$E \left[\int_0^n \Gamma_n dX - \int_0^{n-1} \Gamma_n dX \mid \mathcal{G}_{n-1} \right] = E \left[\Gamma_n \cdot (X_n - X_{n-1}) \mid \mathcal{G}_{n-1} \right]$$

$$= \underbrace{\Gamma_n}_{\geq 0} \cdot \underbrace{E[X_n - X_{n-1} \mid \mathcal{G}_{n-1}]}_{\geq 0} \geq 0.$$



CLASE 04

$$M_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d, R_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d, V_n^r = V_0^r + \int_0^n R_s dM_s.$$

Cuando $M_n = (1, S_n)$, entonces $R_{n+1} \cdot M_n = R_n \cdot M_n$
(caso autofinanciado) y $V_n^r = V_0^r + \int_0^n \beta ds$,
donde $R_n = (\alpha_n, \beta_n)$.

Se Tiene $\int_0^n \beta ds := \sum_{k=1}^n \beta_k (S_k - S_{k-1})$, donde

β_k es \mathcal{G}_{k-1} -medible (la variable β se escoge antes de la variación de S).

Recordemos, dados $M_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $n=0, 1, \dots$;
 $R_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $n=1, 2, \dots$; denotamos

$$\int_0^n R_s dM_s := \sum_{k=1}^n R_k (M_k - M_{k-1}). \quad \text{Vimos que}$$

- (M_n) es martingala
 - (R_n) es acotado y predecible (R_k es \mathcal{G}_{k-1} -medible)
- $\Rightarrow \left(\int_0^n R_s dM_s \right)$ es martingala.

EJER: Si $\forall (R_n)$ predecible acotado se Tiene

$E[\int_0^n R_s dM_s] = 0, \forall n$; entonces (M_n) es martingala.

(esta propiedad caracteriza a las martingalas.)

También vimos que :

- (X_n) es sub (super) martingala
- (Y_n) es acotado, predecible y positivo (>0), entonces $\left(\int_0^n Y_t dX_t\right)$ es sub (super) martingala.

Teorema de convergencia de martingala

Note que para procesos con \liminf y \limsup , α, β ; respectivamente, al ser compuestos con $\ell(x) = (\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha})^+$ los \liminf y \limsup se convierten en 0 y 1, respectivamente.

Lema: Sea (X_n) una submart. positiva, vale

$$E \left[\# \text{ up crossings de } X, \text{ entre } 0 \text{ y } 1, \text{ hasta } n \right] \leq E[X_n - X_0].$$

Proof:

Definamos $\gamma_0 = 0$.

$$\gamma_1 := \min \{ n \geq \gamma_0 : X_n = 0 \},$$

$$\gamma_2 := \min \{ n \geq \gamma_1 : X_n \geq 1 \},$$

$$\zeta_3 := \min \{ n \geq \zeta_2 : X_n = 0 \}, \dots$$

(ζ_n definido como ∞ , de no existir mínimo).

Como (X_n) es (G_n) -adaptada, entonces:

$$\forall k : \{ \zeta_k \leq n \} \in G_n, \forall n.$$

Defino ahora: $r_{n+1} := \begin{cases} 0, & \zeta_0 \leq n < \zeta_1 \\ 1, & \zeta_1 \leq n < \zeta_2 \\ 0, & \zeta_2 \leq n < \zeta_3 \\ \vdots & \vdots \end{cases}, n=0,1,\dots$

Note $\{ \zeta_k \leq n < \zeta_{k+1} \} = \{ \zeta_k \leq n \} \cap \{ \zeta_{k+1} \leq n \}^c$, intersección de elementos de G_n , $\forall k=0,1,\dots,n$.

∴ r_{n+1} es G_n -medible.

Sea $U_n := \# \text{upcrossings entre } 0 \text{ y } 1, \text{ hasta } n$.

$$\Rightarrow U_n \leq \int_0^n r dx, \forall n.$$

Pero, $X_n - X_0 = \int_0^n r dx + \int_0^n (1-r) dx$.

$$\Rightarrow E[X_n - X_0] = E[\int_0^n r dx] + E[\int_0^n (1-r) dx].$$

$$E[\int_0^n (1-r) dx] \geq E[\int_0^n (1-r) dx] = 0.$$

$$\Rightarrow E[U_n] \leq E[\int_0^n (1-r) dx] \leq E[X_n - X_0], \forall n.$$

Prop: Para (X_n) submarg.; $\alpha < \beta$ reales, Tenemos

$$(\beta - \alpha) E[U_n^{\alpha/\beta}] \leq E[(X_n - \alpha)^+] - E[(X_0 - \alpha)^+], \forall n.$$

Proof: Use lema para $\tilde{X}_n := \left(\frac{X_n - \alpha}{\alpha - \beta} \right)^+$.

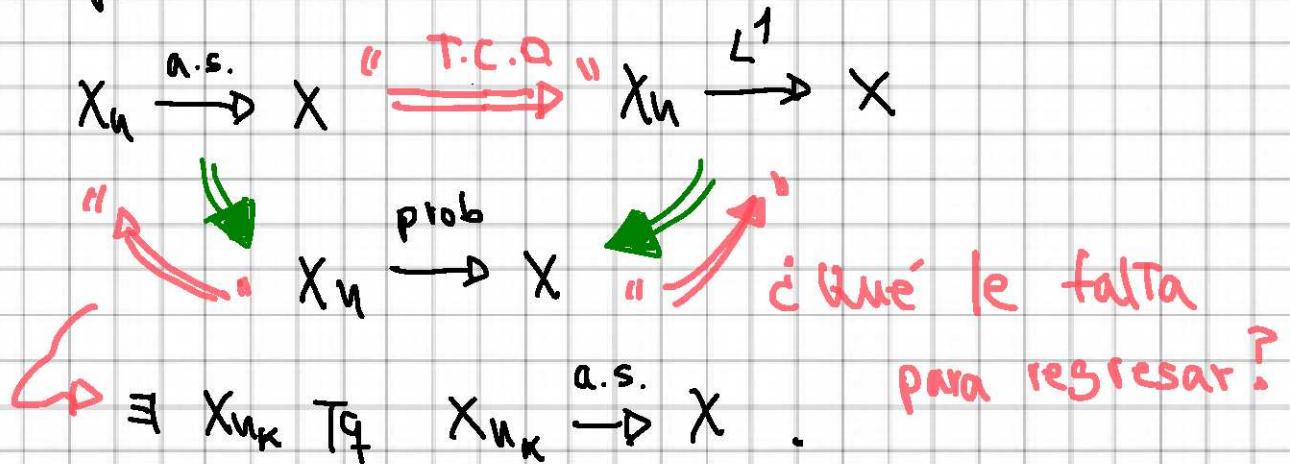


CLASE 06

Integrabilidad uniforme y convergencia

Recordemos : (X_n) y X , r.a.'s

Algunos tipos de convergencia:



Sabemos por el T.C.D que

$$\begin{array}{l} \cdot X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X \\ \cdot |X_n| \leq Z \text{ integrable} \end{array} \left. \right\} \Rightarrow X_n \xrightarrow{L^1} X .$$

Pidiendo menos para ambas hipótesis, se logra :

$$\begin{array}{l} \cdot X_n \xrightarrow{\text{prob}} X \\ \cdot \text{Integrable Uniforme de } (X_n) \end{array} \left. \right\} \Rightarrow X_n \xrightarrow{L^1} X .$$

Def: Dada $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, diremos que es **uniformemente integrable** cuando

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \int_{\{ |X_\lambda| > t \}} |X_\lambda| \rightarrow 0, \text{ cuando } t \rightarrow +\infty.$$

Obs:

- Si Λ es finito y cada X_λ es integrable, entonces $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es uni. integrable.
- Si $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, $(Y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ satisfacen $|X_\lambda| \leq |Y_\lambda|, \forall \lambda$; entonces, si $(Y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es uni. int. $\Rightarrow (X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es uni. int.
- Si $|X_\lambda| \leq Z$ integrable, $\forall \lambda \in \Lambda$, entonces $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es uni. integrable.
- Que (X_λ) sea uni. int. depende de la ley de X_λ , $\forall \lambda \in \Lambda$.

Prop: (X_λ) es uni. int. si y solo si se cumplen

A) $E[|X_\lambda|] \leq C, \forall \lambda \in \Lambda$

B) $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ Tal que :

$$P(A) < \delta \Rightarrow \int_A |X_\lambda| < \epsilon, \forall \lambda \in \Lambda.$$

Proof:

Supongamos que (X_λ) es unif. integrable.

$$E[|X_\lambda|] = \int_{\{|X_\lambda| \geq t\}} |X_\lambda| + \int_{\{|X_\lambda| < t\}} |X_\lambda|, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Como $\sup_{\lambda} \int_{\{|X_\lambda| > t\}} |X_\lambda| \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty$,

podemos desir t_* suficientemente grande de modo que $\sup_{\lambda} \int_{\{|X_\lambda| > t_*\}} |X_\lambda| \leq 1$.

Luego, para todo $\lambda \in \Lambda$:

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \int_{\{|X_\lambda| \leq t_*\}} |X_\lambda| \leq t_* \\ \bullet \int_{\{|X_\lambda| > t_*\}} |X_\lambda| \leq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow E[|X_\lambda|] \leq 1 + t_* . \checkmark$$

Ahora, fijemos $\epsilon > 0$. Elegimos un t tal que

$$\int_{\{|X_x| > t\}} |X_x| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall x \in \Delta.$$

Luego, elegimos $\delta = \frac{\epsilon}{2t}$. Así, para $x \in \Delta$:

$$\begin{aligned} \int_A |X_x| &= \int_{\{|X_x| > t\}} |X_x| + \int_{\{|X_x| \leq t\}} |X_x| \\ &\quad \text{An} \{ |X_x| > t \} \quad \text{An} \{ |X_x| \leq t \} \end{aligned}$$

$$\leq \int_{\{|X_x| > t\}} |X_x| + t \cdot P(A) < \epsilon. \quad \checkmark$$

Ahora, supongamos A) y B). Fije $\epsilon > 0$.

Por B), sé que $\exists \delta > 0$ Tal que

$$P(A) < \delta \Rightarrow \int_A |X_x| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall x.$$

Por A) y Markov: $P\{|X_x| > t\} \leq \frac{E[|X_x|]}{t} < \frac{\epsilon}{t}$.

Si elegimos $t_0 = \frac{\epsilon}{\delta}$, asegurarnos que

$$t \geq t_0 \Rightarrow P\{|X_x| > t\} < \delta.$$

$$\Rightarrow \int_{\{|X_x| > t\}} |X_x| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall x$$

$$\{ |X_x| > t \}$$

Así, $t > t_0$ implica $\sup_x \int_{\{|X_x| > t\}} |X_x| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$. ✓

Obs: Si $(X_x)_{x \in \Delta}$ y $(Y_x)_{x \in \Delta}$ son uni. int., entonces $(X_x + Y_x)_{x \in \Delta}$ es uni. int. .

Corolario: Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es uni. int. y $P(A_n) \rightarrow 0$, entonces $\int_{A_n} |X_n| \rightarrow 0$.

Lema: Si $E[X_x^2] \leq C, \forall x \in \Delta$, entonces $(X_x)_{x \in \Delta}$ es uni. integrable.

Proof:

Para $t > 0$. $\{|X_x| > t\} \subseteq \{|X_x|/t > 1\}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{\{|X_x| > t\}} |X_x| &\leq \int_{\{|X_x| > t\}} |X_x| \cdot \frac{|X_x|}{t} \\ &= \frac{1}{t} \int_{\{|X_x| > t\}} X_x^2 \leq \frac{C}{t} \cdot \quad \checkmark \end{aligned}$$

Ejercicio: De hecho, podemos usar

$E[|X_x|^p] \leq C, \forall x \in \Delta$; para algún $p > 1$.

Teorema: Suponga $X_n \xrightarrow{\text{prob}} X$, Resultan equivalentes:

1) (X_n) es uniformemente integrable.

2) $X_n \xrightarrow{L^1} X$

Proof:

1) \Rightarrow 2):

Por A): $E[|X_n|] \leq C, \forall n$.

$\Rightarrow X_n \in L^1, \forall n$.

Sabemos que $\exists (X_{n_k})$ con $X_{n_k} \xrightarrow{\text{a.s.}} X$.

Como $| \cdot |$ es continuo: $|X_{n_k}| \xrightarrow{\text{a.s.}} |X|$

Por Fatou: $E[|X|] \leq \liminf E[|X_{n_k}|] \leq C$.

$\therefore X \in L^1$.

Ahora, $|X_n - X| \leq \underbrace{|X_n|}_{\text{uni.}} + \underbrace{|X|}_{\text{uni.}} + \underbrace{\text{uni.}}_{\text{uni}}$, $\forall n$

$\Rightarrow (|X_n - X|)_n$ es unif. integrable ... (Δ)

Como $X_n \xrightarrow{\text{prob}} X$: $\forall \epsilon > 0 : P\{|X_n - X| > \epsilon\} \rightarrow 0$.

Luego, $\forall \epsilon > 0$:

$$\int |x_n - x| = \int_{\{|x_n - x| \leq \epsilon\}} |x_n - x| + \int_{\{|x_n - x| > \epsilon\}} |x_n - x|$$

$$\leq \epsilon + \underbrace{\int_{\{|x_n - x| > \epsilon\}} |x_n - x|}_{\rightarrow 0 \text{ (por el corolario)}}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \limsup \int |x_n - x| \leq \epsilon ; \forall \epsilon > 0$$

$$\therefore \limsup \int |x_n - x| = 0.$$

2) \Rightarrow 1):

$$E[|x_n|] \rightarrow E[|x|].$$

En particular, $\exists C : E[|x_n|] \leq C, \forall n$.

Probemos B) por contradicción.

$\exists \epsilon_0 > 0$ tq ningún $\delta > 0$ funciona.

Hagamos $\delta = 1/k$.

Para cada $k = 1, 2, \dots$:

$\exists A_k$ con $P(A_k) < 1/k$, y

$\exists X_{n_k}$ con $\sum_{A_k} |X_{n_k}| \geq \epsilon_0$ (□)

Como $\{n_k : k=1, 2, \dots\}$ es infinito (sino se contradice la hipótesis que (x_n) no es uni. int.) , tomando una subsucesión de $(A_k)_k$ podemos suponer que (X_{n_k}) es subsucesión de (x_n) .

Ahora,

$$\begin{aligned}\sum_{A_k} |X_{n_k}| &\leq \sum_{A_k} |X_{n_k} - x| + \sum_{A_k} |x| \\ &\leq \underbrace{\epsilon [|X_{n_k} - x|]}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\sum_{A_k} |x|}_{\rightarrow 0}\end{aligned}$$

Contradicción, debido a (□). ✓

