CLASE 04

$M_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $\Gamma_n \ \Omega \to \mathbb{R}^d$, $V_n^\Gamma = V_0^\Gamma + \int_0^n \Gamma dM$.

Cuando $M_n = (1, S_n)$, entonces $\Gamma_{n+1} \cdot M_n = \Gamma_n \cdot M_n$ (caso autofinanciado) y $V_n^\Gamma = V_0^\Gamma + \int_0^n \beta dS$, donde $\Gamma_n = (\alpha_n, \beta_n)$.

Se tiene $\int_0^n \beta dS := \sum_{k=1}^n \beta_k (S_k - S_{k-1})$, donde β_k es $\mathcal{G}_{k-1}$-medible (la variable β se escoge antes de la variación de S).

Recordemos, dados $M_n \ \Omega \to \mathbb{R}$, $n = 0, 1, \ldots$, $\Gamma_n \ \Omega \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, denotamos $\int_0^n \Gamma dM := \sum_{k=1}^n \Gamma_k (M_k - M_{k-1})$. Vimos que

- (M_n) es martingala
- (Γ_n) es acotado y predecible (Γ_k es $\mathcal{G}_{k-1}$-medible)

$\Big\} \Rightarrow \left(\int_0^n \Gamma dM\right)$ es martingala.

EJER: Si $\forall (\Gamma_n)$ predecible acotado se tiene $E\left[\int_0^n \Gamma dM\right] = 0$, $\forall n$, entonces (M_n) es martingala.

(esta propiedad caracteriza a las martingalas.

También vimos que:

- (X_n) es sub (super) martingala
- (V_n) es acotado, predecible y positivo (≥ 0),

entonces $\left(\int_0^n V\,dX\right)$ es sub (super) martingala.

Teorema de convergencia de martingala

Note que para procesos con liminf y limsup; α, β, respectivamente, al ser compuestos con $\varphi(x) = \left(\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^+$ los liminf y limsup se convierten en 0 y 1, respectivamente.

Lema Sea (X_n) una submart. positiva, vale

$$E\left[\begin{array}{l}\#\text{ upcrossings de } X, \\ \text{entre } 0 \text{ y } 1, \text{ hasta } n\end{array}\right] \leq E[X_n - X_0].$$

Proof:

Definamos $\tau_0 = 0$.

$\tau_1 := \min\{n \geq \tau_0 : X_n = 0\}$,

$\tau_2 := \min\{n \geq \tau_1 \quad X_n \geq 1\}$,

$\tau_3 := \min\{n \geq \tau_2 : X_n = 0\}$, ...

(τ_n definido como ∞, de no existir mínimo).

Como (X_n) es $(\mathcal{G}_n)$-adaptada, entonces:
$\forall k : \{\tau_k \leq n\} \in \mathcal{G}_n$, $\forall n$.

Definimos ahora: $$r_{n+1} := \begin{cases} 0 , & \tau_0 \leq n < \tau_1 \\ 1 , & \tau_1 \leq n < \tau_2 \\ 0 , & \tau_2 \leq n < \tau_3 \\ \vdots & \vdots \end{cases} , \quad n = 0, 1, \ldots$$

Note $\{\tau_k \leq n < \tau_{k+1}\} = \{\tau_k \leq n\} \cap \{\tau_{k+1} \leq n\}^c$, intersección de elementos de $\mathcal{G}_n$, $\forall k = 0, 1, \ldots$, $\forall n$.

$\therefore$ r_{n+1} es $\mathcal{G}_n$-medible.

Sea $U_n :=$ #upcrossings entre 0 y 1, hasta n.

$\Rightarrow U_n \leq \int_0^n r \, dX$, $\forall n$.

Pero, $X_n - X_0 = \int_0^n r \, dX + \int_0^n (1-r) \, dX$.

$\Rightarrow E[X_n - X_0] = E[\int_0^n r \, dX] + E[\int_0^n (1-r) \, dX]$.

$E[\int_0^n (1-r) \, dX] \geq E[\int_0^0 (1-r) \, dX] = 0$.

$\Rightarrow E[U_n] \leq E[\int_0^n (1-r) \, dX] \leq E[X_n - X_0]$, $\forall n$.

Prop: Para (X_n) submar., $\alpha < \beta$ reales, Tenemos

$$(\beta - \alpha) E[U_n^{\alpha,\beta}] \leq E[(X_n - \alpha)^+] - E[(X_0 - \alpha)^+], \forall n.$$

Proof: Use lema para $\tilde{X}_n := \left(\frac{X_n - \alpha}{\alpha - \beta}\right)^+$.

$\blacksquare$