

CLASE 01

Esperanza condicional

Fijemos (Ω, \mathcal{F}, P) y las var'as
 $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ medibles.

Recordemos,

$$\begin{aligned}\sigma(z) &= \left\{ z^{-1}(A) : A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \right\} \\ &= \left\{ \{z \in A\} : A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \right\} \\ &= \left\{ \text{cuestionario de preguntas} \atop \text{sobre } z \right\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma(z, w) &= \left\{ \{ (z, w) \in A \} : A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} \right\} \\ &= \sigma(\sigma(z) \cup \sigma(w)) \quad (\text{EJER}) \\ &=: \sigma(z) \vee \sigma(w).\end{aligned}$$

Además, dado $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, sub σ-álgebra:

$\sigma(z) \subseteq \mathcal{G} \iff$ Con la información \mathcal{G} , podemos "intuir" responder Todo sobre z , " $z \in \mathcal{G}$ ".

$\Leftrightarrow Z$ es \mathcal{G} -medible

Obs: Si z_1, z_2, \dots son \mathcal{G} -medibles, entonces $\limsup z_n$ y $\liminf z_n$ son \mathcal{G} -medibles

Lema Sean Z, W integrables. (EJER.)

$$Z \leq W \Leftrightarrow \int_A Z \leq \int_A W, \forall A \in \mathcal{F}.$$

Obs:

$$\bullet \int_A Z = \int_A W, \forall A \in \mathcal{F} \Leftrightarrow Z = W \text{ as.}$$

Basta $A \in \sigma(Z, W)$.

Teorema: Dada X integrable y $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ sub σ -alg, existe Z r.a tal que:

1) Z es \mathcal{G} -medible.

$$2) \int_A Z = \int_A X, \forall A \in \mathcal{G}.$$

Adicionalmente, si W integrable cumple
1) y 2), entonces $W \stackrel{a.s}{=} Z$.

Def Dado X integrable y \mathcal{G} sub σ -alg de \mathcal{F} , definimos $E[X|\mathcal{G}]$ como la clase de todas las variables cumpliendo con 1) y 2) del Teorema previo

También diremos " Z es versión de $E[X|\mathcal{G}]$ " si Z cumple 1) y 2).

Obs: Es fácil verificar que

- X es \mathcal{G} -medible $\Rightarrow E[X|\mathcal{G}] = X$
- $X \perp \mathcal{G}$ ($\sigma(X)$ y \mathcal{G} son independientes)
 $\Rightarrow E[X|\mathcal{G}] \stackrel{a.s}{=} E[X]$
- X, Y son integrables, $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow$
 $E[X+Y|\mathcal{G}] \stackrel{a.s}{=} E[X|\mathcal{G}] + E[Y|\mathcal{G}]$,
 $E[\alpha X|\mathcal{G}] \stackrel{a.s}{=} \alpha E[X|\mathcal{G}]$
- X, Y integrables y $X \leq_{a.s} Y \Rightarrow$
 $E[X|\mathcal{G}] \leq E[Y|\mathcal{G}]$.

- Para X integrable, $H \subseteq \mathcal{G}$, sub σ -álgebra, vale $E[E[X|G]|H] \stackrel{a.s}{=} E[X|H]$.
(propiedad de la Torre)

Teorema de la convergencia monótona:

Suponga $X_n, n \in \mathbb{N}$ sucesión's tal que

$0 \leq X_1 \leq X_2 \leq \dots$ y X una v.a. Tal que
 $X_n \xrightarrow{a.s} X$. Fijemos $G \subseteq \mathcal{F}$, sub σ -álgebra

Si X es integrable (X_n integrable $\forall n$), entonces $E[X_n|G] \xrightarrow{a.s} E[X|G]$.

Proof:

Sabemos $X_n \uparrow X$. Fije $A \in G$

$$\Rightarrow 0 \leq X_n 1_A \uparrow X 1_A$$

$$\xrightarrow{\text{TCM}} \int X_n 1_A \rightarrow \int X 1_A$$

Sean Z_n, Z versión de $E[X_n|G]$ y $E[X|G]$, respectivamente

Por otro lado, $Z_1 \leq Z_2 \leq \dots$.

Así, $\Omega^* := \bigcap_{k \geq 1} \{\exists_k \leq \exists_{k+1}\}$ Tiene probabilidad 1.

Luego, podemos definir $\eta := \begin{cases} \lim Z_n, & \text{sobre } \Omega^* \\ 0, & \text{sobre } \Omega \setminus \Omega^* \end{cases}$

$\eta : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es \mathcal{G} -medible.

Para $A \in \mathcal{G}$: $Z_n \cdot 1_A \uparrow \eta \cdot 1_A$

$$\Rightarrow \int Z_n \cdot 1_A \rightarrow \int \eta \cdot 1_A .$$

Como η y Z son \mathcal{G} -medibles : $Z =^{\text{a.s.}} \eta$. ✓

(EJER) : Sean $X_n, n \in \mathbb{N}$, v.a.'s y X v.a.
Tales que $X_n \not\rightarrow X$ a.s.. Fije $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ sub. σ -alg
Si X_n y X son integrables, entonces :

1) X_n es integrable, $\forall n$.

2) $E[X_n | \mathcal{G}] \xrightarrow{\text{a.s.}} E[X | \mathcal{G}]$

Teorema de convergencia dominada

Fijemos $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, sub. σ -álgebra

Sean X_n v.a.'s y Z integrable Tales
que $|X_n| \leq Z$ a.s.

Si $X_n \xrightarrow{a.s} X$, entonces (X integrable y X_n integrable $\forall n$) $E[X_n|G] \xrightarrow{a.s} E[X|G]$.

Proof.

Haciendo $n \rightarrow \infty$: $|X| \leq Z$, a.s

Tenemos $|E[X_n|G] - E[X|G]| =$

$$|E[X_n - X|G]| \xrightarrow{a.s} E[|X_n - X| |G]$$

EJER: U integrable $\Rightarrow |E[U|G]| \leq E[|U| |G|]$

Definamos $U_N := \sup \{|X_n - X_m| : n, m \geq N\}$,

medible por ser supremo de cantidad enumerable de medibles.

Como $X_n \xrightarrow{a.s} X \in \mathbb{R}$; $U_N \downarrow 0$ a.s

$$\Rightarrow E[U_N | G] \xrightarrow{a.s} 0$$

T.C.M $\in C$

Siempre que $N \leq n$: $|X_n - X| \leq U_N$.

$$\Rightarrow E[|X_n - X| |G] \leq E[U_N | G].$$

Con N fijo, haciendo $n \rightarrow \infty$:

$$\limsup E[|X_n - x| | \mathcal{G}] \leq E[\mathbb{1}_{\mathcal{G}} | \mathcal{G}]$$

Haciendo $N \rightarrow \infty$:

$$\limsup \underbrace{E[|X_n - x| | \mathcal{G}]}_{\circ} \leq 0 \text{ as } .$$

$0 \leq \liminf \checkmark \leq \limsup \rightarrow$

$$\therefore E[|X_n - x| | \mathcal{G}] \xrightarrow{\text{as}} 0 . \quad \checkmark$$

Libros:

- A Course in Prob theory (K.L Chung)
- Prob. theory and Examples (Durrett)
- Measure theory , Prob and Sto. Pro (Le Gall).

CLASE 02

Más sobre esperanza condicional

Fixado (Ω, \mathcal{F}, P)

Lema Sean X integrable, $G \subseteq \mathcal{F}$ sub. σ -áls. y ξ limitada ($\exists M > 0$ tq $|\xi| \leq_M$)

G -medible. Then $E[X \xi | G] \stackrel{a.s}{=} \xi E[X | G]$.

Prueba:

Comenzamos con ξ simple y procedemos de manera usual.

EJER: Para $X: \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ medible positiva, también podemos definir $E[X | G]$ como la clase (identificadas por $\stackrel{a.s}{=}$) de v.a en $\bar{\mathbb{R}}$, positivas.

Lema (Jensen): Sea X integrable, $G \subseteq \mathcal{F}$ sub. σ -álg y $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ convexa. Then, $\varphi(E[X | G]) \leq E[\varphi(x) | G]$ a.s. .

Prueba:

Defina $\Delta_\varphi := \{T_{a,b} : T_{a,b}(x) \leq \varphi(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$, donde $T_{a,b} = a \cdot 1 + b$; $a, b \in \mathbb{Q}$.

Como Ψ es convexa, Δ_Ψ es no vacío

Más aún, $\Psi(x) = \sup_{T \in \Delta_\Psi} T(x)$.

Luego, para cada $T \in \Delta_\Psi$: $T(x) \leq \Psi(x)$

$$\Rightarrow \underbrace{\mathbb{E}[T(x) | G]}_{T(\mathbb{E}[x | G])} \stackrel{\text{as}}{\leq} \mathbb{E}[\Psi(x) | G] = W$$
$$T(\underbrace{\mathbb{E}[x | G]}_z) \stackrel{\text{as}}{\leq} W, \text{ por ser } T \text{ ope lineal}$$

Es decir, existe medible Ω_T con proba. 1 en el cual $W(w) \geq T(z(w))$, $\forall w \in \Omega_T$.

Así, tenemos una cantidad enumerable de medibles Ω_T , $\forall T \in \Delta_\Psi$, con proba. 1.

Considera $w \in \bigcap_{T \in \Delta_\Psi} \Omega_T = \Omega^*$, $P(\Omega^*) = 1$.

$$\Rightarrow W(w) \geq T(z(w)), \forall T \in \Delta_\Psi.$$

$$\Rightarrow W(w) \geq \left(\sup_{T \in \Delta_\Psi} T \right) (z(w)) = \Psi(z(w)) \quad \checkmark$$

Martingalias (introducción)

Def : Dada (Ω, \mathcal{F}, P) y $M_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$,
 $n = 1, 2, 3, \dots$ (puede variar), y

$\{G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}\}$, sub σ -álgebras.

→ filtración

Es decir, (M_n, G_n) , $n=1, 2, 3, \dots$, es una martingala si:

1) M_n es G_n -medible ((M_n) está adaptada a (G_n)), $\forall n$

2) M_n es integrable, $\forall n$.

3) $\forall n, m$ tq $1 \leq n < m$, se tiene

$$M_n = E[M_m | G_n].$$

Obs: Para verificar 3), basta se cumpla $M_n = E[M_{n+1} | G_n]$ $\forall n$. En efecto,

$$\begin{aligned} E[M_m | G_n] &= E[-E\{\underbrace{E[M_m | G_{m-1}]}_{M_{m-1}}\} | G_{m-2} \dots | G_n] \\ &= M_n. \end{aligned}$$

Además, recordemos que $M_n = E[M_m | G_n]$ equivale a:

$\forall A \in G_n$: $E[M_n 1_A] = E[M_m 1_A]$, o sea,

$$E[(M_m - M_n) \cdot 1_A] = 0, \forall A \in G_n.$$

ESTO podemos denotarlo como $M_m - M_n \perp G_n$.

Ejemplos: Si (Ω, \mathcal{F}, P) , $\xi_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $n=1, 2, \dots$ son independientes, integrables y de media cero, entonces:

- $S_n := \sum_{i=1}^n \xi_i$, $n=1, 2, \dots$
- $G_n := \sigma(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$

(S_n, G_n) es una martingala en efecto, para $A \in G_n$:

$$E[(S_m - S_n) \cdot 1_A] = E \left[\underbrace{\sum_{j=n+1}^m \xi_j}_{\text{independiente de } G_n} \cdot 1_A \right]$$

$$= E \left[\sum_{j=n+1}^m \xi_j \right] E[1_A] = 0 \cdot E[1_A], \text{ pues cada } \xi_j \text{ tiene media cero.}$$

Si por ejemplo $\xi_j \xrightarrow{\quad} +1$, con prob $\frac{1}{2}$
 $\xrightarrow{\quad} -1$, "

entonces $S_n := \sum_{j=1}^n \xi_j$, $n \geq 1$, es una martingala

Además, $P\{S_n \text{ converge a un real}\} = 0$.

De hecho, $P\{\limsup S_n = +\infty\} = 1 = P(\liminf S_n = -\infty)$

Entonces $P\{\limsup S_n = +\infty, \liminf S_n = -\infty\} = 1$.

EJER: Si ξ_1, ξ_2, \dots independientes integrables, de $E[\xi_j] = 1, \forall j$, entonces:

- $M_n := \xi_1 + \dots + \xi_n$
 - $G_n := \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$
- $\Rightarrow (M_n, G_n)$ es una martingala.

Ejemplo: Fijemos una medida de probabilidad μ en $\{0, 1, 2, \dots\}$. Branching process, o, Proceso de Galton-Watson.

Fijemos una familia de variables $\{\xi_{jk} : j = 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots\}$ definidas sobre (Ω, \mathcal{F}, P) , independientes, con $\xi_{jk} \sim \mu, \forall j, k$. Ahora, definimos el proceso:

- $Z_0 = 1$
- $Z_1 = \xi_{1,1}$
- $Z_2 = \sum_{k=1}^{Z_1} \xi_{2k} \quad (\text{y, } Z_2 = 0 \text{ cuando } Z_1 = 0)$
- $Z_3 = \sum_{k=1}^{Z_2} \xi_{3k} \quad (\text{y, } Z_3 = 0 \text{ cuando } Z_2 = 0)$

μ se denomina offspring distribution.

Vemos que $\{z_1=0\} \subseteq \{z_2=0\} \subseteq \{z_3=0\} \subseteq \dots$.

Así, $\{z_n=0\}$ ↑ extinción.

Problema: $P(\text{extinción}) = ?$

Defina $m = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \mu(c_i)$.

EJER:

- $m < 1 \Rightarrow P(\text{extinción}) = 1$.
- $m > 1 \Rightarrow P(\text{extinción}) < 1$.
- $m = 1 \Rightarrow (z_n)$ es martingala.



CLASE 03

Submartingala y Supermartingala

Respecto a un e.p. $(\mathcal{S}, \mathcal{F}, P)$ filtrado, $(G_n)_n$.

Def. Decimos que $M_n : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$, v.a's, $n=0, 1, -$, es una submartingala (supermartingala) si.

1) $(M_n)_n$ es adaptada a $(G_n)_n$

2) M_n es integrable $\forall n$.

3) $\forall 0 \leq n < m$: $E[M_n - M_m | \mathcal{G}] \stackrel{\text{a.s.}}{\geq} 0$
 (\leq)

(EJER.) En la def previa, podemos cambiar

3) por $\int_A M_n \leq \int_A M_m$, $\forall A \in \mathcal{G}_n$; $\forall 0 \leq n < m$.

También basta 3) con periodos consecutivos, es decir, $m = n+1$.

Obs. Es claro que :

- (M_n) es superma. $\Leftrightarrow (M_n)$ es subma.
- (M_n) es mart. $\Leftrightarrow (M_n)$ subma y superma.

- Si (X_n) y (Y_n) subma (superma), entonces $Z_n := X_n + Y_n$ es subma (superma).
- Si (M_n) y (N_n) son martingalas, then $(\alpha M_n + \beta N_n)$ es martingala, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- Si $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es \mathcal{G}_0 -medible e integrable, Then $M_n := X, \forall n$ es una martingala.
- Para (X_n) sub (super)martingala:
$$\mathbb{E}[X_0] \leq (\geq) \mathbb{E}[X_1] \leq (\geq) \mathbb{E}[X_2] \leq (\geq) \dots$$

Prop Sea (M_n) una martingala y $\ell : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ convexa Tal que $X_n := \ell(M_n)$ es integrable $\forall n$, then (X_n) es submartingala.

Proof. (EJER. usando Jensen)

Prop: Si (X_n) es submartingala y $\ell : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ es convexa y no decreciente, Tal que $Y_n := \ell(X_n)$ es integrable, $\forall n$, entonces (Y_n) es una submartingala.

Ejemplos: • (X_n) es subm $\Rightarrow X_n^+ = \max\{X_n, 0\}$ es submartingala.

- Valor de mi portafolio: Supongamos que M_n es el precio de d stocks en el instante n . Ahora, usemos r_n : Posiciones que adquieres en el instante $n-1$ (y que tiene consecuencia en n), respecto al # unidades de stocks.

Por ejemplo:

$$M_3 \xrightarrow{r_4} M_4 \xrightarrow{r_5} M_5$$

$\dots r_4 = +2 \quad r_5 = -3 \dots$

El valor de (r_n) es el proceso

$$V_0^r := r_1 \cdot M_0 \quad (\text{dinero que me cuesta adquirir la posición } r_1)$$

$$V_n^r = r_n \cdot M_n, \quad n \geq 1 \quad (\text{dinero que tengo por haber adquirido la posición } r_n)$$

Entonces, si implemento (r_n) , ganaré hasta $n=N$:

$$V_N^r - V_0^r = \sum_{k=1}^N (V_k^r - V_{k-1}^r), \quad \text{donde}$$

$$V_k^r - V_{k-1}^r = \underbrace{r_k \cdot (M_k - M_{k-1})}_{\text{ganancia por la variación del precio del stock.}} + \underbrace{M_{k-1} \cdot (r_k - r_{k-1})}_{\text{dinero que inyectamos en } k-1.}$$

ganancia por la variación del precio del stock. dinero que inyectamos en $k-1$.

Entonces, si la estrategia (Γ_n) es autofinanciada (i.e., $M_{k-1} \cdot \Gamma_k = M_{k-1} \cdot \Gamma_{k-1}$, $\forall k$), then

$$V_N^{\Gamma} = V_0^{\Gamma} + \sum_{k=1}^N \Gamma_k \cdot (M_k - M_{k-1}) .$$

Def: Dados • $M_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n=0, 1, \dots$,
• $\Gamma_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n=1, 2, \dots$; $M_{n-1} \xrightarrow{P} M_n$,
denotemos $\int_0^N \Gamma dM := \sum_{k=1}^N \Gamma_k \cdot (M_k - M_{k-1})$, y,
si (Γ_n) es autofinanciado : $V_N^{\Gamma} = V_0^{\Gamma} + \int_0^N \Gamma dM$.

Integración y martingalas

Prop: Sea (Ω, \mathcal{F}, P) , (S_n) e.p. filtrado y
• $M_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n=0, 1, 2, \dots$ d martingalas.
• $\Gamma_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n=1, 2, \dots$ es predecible (i.e.,
 Γ_n es \mathcal{G}_{n-1} -medible, $\forall n=1, 2, \dots$) y acotado.

Entonces, el proceso $\int_0^n \Gamma dM: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $n=1, 2, \dots$
es una martingala.

$$\underline{\text{Proof}}: E \left[\int_0^n r dM - \int_0^{n-1} r dM \mid \mathcal{G}_{n-1} \right]$$

$$= E \left[\Gamma_n \cdot (M_n - M_{n-1}) \mid \mathcal{G}_{n-1} \right]$$

$$= \Gamma_n \cdot E [M_n - M_{n-1} \mid \mathcal{G}_{n-1}] = 0, \text{ pues}$$

Γ_n es predecible y M_n martingala.

Prop: Sea (Ω, \mathcal{F}, P) , (G_n) ep filtrado y

- $X_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n=0,1,2,\dots$ submartingala (super)
- $\Gamma_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n=1,2,\dots$ predecible y acotado.

Entonces, $\int_0^n r dX: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $n=1,2,\dots$ resulta

submartingala si $\Gamma_n \geq 0$, $\forall n$ (por coordenadas).
(super)

Proof.

$$E \left[\int_0^n r dx - \int_0^{n-1} r dx \mid \mathcal{G}_{n-1} \right] = E \left[\Gamma_n \cdot (X_n - X_{n-1}) \mid \mathcal{G}_{n-1} \right]$$

$$= \underbrace{\Gamma_n}_{\geq 0} \cdot \underbrace{E[X_n - X_{n-1} \mid \mathcal{G}_{n-1}]}_{\geq 0} \geq 0.$$



CLASE 04

$$M_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d, R_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d, V_n^r = V_0^r + \int_0^n R_s dM_s.$$

Cuando $M_n = (1, S_n)$, entonces $R_{n+1} \cdot M_n = R_n \cdot M_n$
(caso auto-financiado) y $V_n^r = V_0^r + \int_0^n \beta ds$,
donde $R_n = (\alpha_n, \beta_n)$.

Se tiene $\int_0^n \beta ds = \sum_{k=1}^n \beta_k (S_k - S_{k-1})$, donde

β_k es \mathcal{G}_{k-1} -medible (la variable β se escoge antes de la variación de S).

Recordemos, dados $M_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $n=0, 1, \dots$,
 $R_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $n=1, 2, \dots$, denotamos

$$\int_0^n R_s dM_s := \sum_{k=1}^n R_k (M_{k-1} - M_k). \quad \text{Vimos que}$$

- (M_n) es martingala
 - (R_n) es acotado y predecible (R_k es \mathcal{G}_{k-1} -medible)
- $\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\int_0^n R_s dM_s \right)$ es martingala.

EJER: Si $\forall (R_n)$ predecible acotado se tiene

$$E \left[\int_0^n R_s dM_s \right] = 0, \forall n, \text{ entonces } (M_n) \text{ es martingala.}$$

(esta propiedad caracteriza a las martingalas.)

También vimos que :

- (X_n) es sub (super) martingala
- (Y_n) es acotado, predecible y positivo (≥ 0), entonces $(\int_0^n Y_t dX_t)$ es sub (super) martingala.

Teorema de convergencia de martingala

Note que para procesos con \liminf y \limsup , α, β , respectivamente, al ser compuestos con $\ell(x) = (\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha})^+$ los \liminf y \limsup se convierten en 0 y 1, respectivamente

Lema Sea (X_n) una submart. positiva, vale

$$E \left[\# \text{ up crossings de } X, \text{ entre } 0 \text{ y } 1, \text{ hasta } n \right] \leq E[X_n - X_0].$$

Proof:

Definamos $\gamma_0 = 0$.

$$\gamma_1 := \min \{ n \geq \gamma_0 : X_n = 0 \},$$

$$\gamma_2 := \min \{ n \geq \gamma_1 : X_n \geq 1 \},$$

$$\tilde{\tau}_3 := \min \{ n \geq \tilde{\tau}_2 : X_n = 0 \}, \dots$$

($\tilde{\tau}_n$ definido como ∞ , de no existir mínimo).

Como (X_n) es (G_n) -adaptada, entonces :

$$\forall k : \{ \tilde{\tau}_k \leq n \} \in G_n, \forall n.$$

$$\text{Defino ahora: } \Gamma_{n+1} := \begin{cases} 0, & \tilde{\tau}_0 \leq n < \tilde{\tau}_1 \\ 1, & \tilde{\tau}_1 \leq n < \tilde{\tau}_2 \\ 0, & \tilde{\tau}_2 \leq n < \tilde{\tau}_3 \\ \vdots & \vdots \end{cases}, \quad n=0,1,\dots$$

Note $\{ \tilde{\tau}_k \leq n < \tilde{\tau}_{k+1} \} = \{ \tilde{\tau}_k \leq n \} \cap \{ \tilde{\tau}_{k+1} \leq n \}^c$, intersección de elementos de G_n , $\forall k=0,1,\dots, \forall n$.

∴ Γ_{n+1} es G_n -medible.

Sea $U_n := \# \text{upcrossings entre } 0 \text{ y } 1, \text{ hasta } n$.

$$\Rightarrow U_n \leq \int_0^n r dx, \quad \forall n.$$

$$\text{Pero, } X_n - X_0 = \int_0^n r dx + \int_0^n (1-r) dx.$$

$$\Rightarrow E[X_n - X_0] = E[\int_0^n r dx] + E[\int_0^n (1-r) dx].$$

$$E[\int_0^n (1-r) dx] \geq E[\int_0^n (1-r) dx] = 0.$$

$$\Rightarrow E[U_n] \leq E[\int_0^n (1-r) dx] \leq E[X_n - X_0], \quad \forall n.$$

Prop: Para (X_n) submáx., $\alpha < \beta$ reales, Tenemos

$$(\beta - \alpha) E[U_n^{\alpha/\beta}] \leq E[(X_n - \alpha)^+] - E[(X_0 - \alpha)^+], \forall n.$$

Proof: Use lema para $\tilde{X}_n := \left(\frac{X_n - \alpha}{\beta - \alpha} \right)^+$.

