Problema 1

Definen $f(x) = x-1$, $x \in]-1,3]$ .. $(\triangle)$

$g(x) = x^2+5x-6$, $x \in [-5,1]$ .. $(\square)$

a) $\frac{f}{g}$ está bien definida para x real

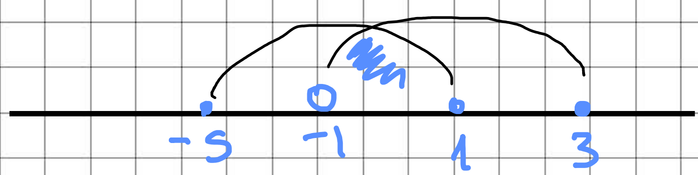
Tal que : 1) $f(x)$ bien definida

2) $g(x)$ bien definida 3) $g(x) \neq 0$
(pues divide)

De $(\triangle)$: 1) equivale a $x \in]-1,3]$

De $(\square)$: 2) equivale a $x \in [-5,1]$

$\Rightarrow x \in]-1,3] \cap [-5,1]$



$\Rightarrow x \in]-1,1]$ ... (4)

De (3): $0 \neq g(x) = x^2+5x-6 = (x+6)(x-1)$

$0 \neq (x+6)(x-1)$, así : $x \neq -6$ y $x \neq 1$

En (4): $]-1,1[$ es el dominio

de la función $\frac{f}{g}$.

$\therefore \left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x-1}{x^2+5x-6}, \ -1 < x < 1.$

---

b) $(g \circ f)(x) := g(f(x))$, así que se debe cumplir:

1) $f(x)$ está bien definida

2) $f(x)$ está en el dominio de g

De (I): 1) equivale a $-1 < x \leq 3$. ... (S)

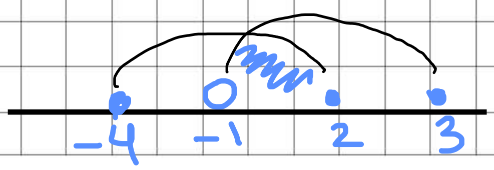
De (II): 2) equivale a $-5 \leq f(x) \leq 1$.

Como $f(x) = x - 1$: $-5 \leq x - 1 \leq 1$

$(+1)$: $-5 + 1 \leq (x-1) + 1 \leq 1 + 1$

$$-4 \leq x \leq 2$$

En (S): $x \in \,]-1, 3]$ y $x \in [-4, 2]$



$\therefore x \in \,]-1, 2]$

∴ Dominio de $g \circ f$: $]-1,2]$

Así,

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)) = g(x-1)$$
$$= (x-1)^2 + 5(x-1) - 6$$
$$= x^2 - 2x + 1 + 5x - 5 - 6$$
$$= \underbrace{x^2 + 3x - 10}_{\text{regla de correspondencia de } g\circ f} = (g \circ f)(x),\ x \in]-1,2].$$

Ejercicio 4

a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2+n+10} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+1)/n^2}{(n^2+n+10)/n^2}$$

(dividimos por el sumando con exponente más grande : n^2)

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2+n+10} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2} + \frac{10}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1 + 1/n^2}{1 + \frac{1}{n} + \frac{10}{n^2}} \quad \ldots (1)$$

Recuerde se cumple: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n^m} = 0$, para cualquier m entero positivo $(m = 1, 2, 3, \ldots)$

Así, en particular:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad , \quad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{10}{n^2} = 10 \cdot 0 = 0 .$$

Luego: $\lim\limits_{n \to \infty} (1 + 1/n^2) = \lim\limits_{n \to \infty} 1 + \lim\limits_{n \to \infty} 1/n^2$

$$= 1 + 0 = 1 \quad \ldots (2)$$

Asimismo:

$$\lim_{\to \infty} (1 + 1/n + 1/n^2) = \lim_{n \to \infty} 1 + \lim_{n \to \infty} 1/n + \lim_{n \to \infty} 10/n^2$$

$$= 1 + 0 + 0 = 1 \quad \ldots (3)$$

Recuerde: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n \to \infty} a_n}{\lim\limits_{n \to \infty} b_n}$, en

caso $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ sean sucesiones convergentes.

Tal es el caso en (1). Entonces, de (2) y (3), en (1):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2+n+10} = \frac{1}{1} = 1.$$

(límite del numerador $(1+1/n^2)$, entre límite del denominador $(1+1/n+10/n^2)$).

b) Recordar este resultado:

"Sea r un número real que cumple $|r|<1$. Entonces, se cumple

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}."$$

(serie geométrica)

Tenemos $L := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{7^{n-1}}$.

Demosle forma de serie geométrica

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{5} \cdot \frac{5^n}{7^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 5 \cdot \frac{5^{n-1}}{7^{n-1}}$$

$$= 5 \sum_{n=1}^{\infty} (5/7)^{n-1}.$$ Denotemos $r := 5/7$

y note $|r| = |5/7| = 5/7 < 1$.

$$\Rightarrow L = 5 \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = 5\left(r^{1-1} + r^{2-1} + r^{3-1} + \dots\right)$$

$$= 5\left(r^0 + r^1 + r^2 + \dots\right) = 5 \sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

$$= 5 \cdot \left(\frac{1}{1-r}\right)$$ (por el resultado previo)

$$= 5 \cdot \left(\frac{1}{1 - 5/7}\right) = 5 \cdot \frac{7}{7-5} = \frac{5 \cdot 7}{2}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} 5^n / 7^{n-1} = 35/2.$$

Problema 5

Se plantea la función

$T(x) = 20 - Ae^{-kx}$, con A, K constantes,

donde $T(x)$ es la temperatura de la bebida (en °C), x minutos más tarde de ser retirada de la refri.

INSPIRATION HUT - 0.6CM GRID

Datos: a) $T(0) = 10$ b) $T(20) = 15$

De a): $10 = 20 - Ae^{-k\cdot 0} = 20 - Ae^{0} = 20 - A$

$\therefore A = 10$

De b): $15 = 20 - 10\cdot e^{-K\cdot 20}$

$\Rightarrow 10e^{-20K} = 5 \Rightarrow e^{-20K} = 5/10 = 1/2$

ln(·): $\underbrace{\ln(e^{-20K})}_{\circ} = \ln(1/2) = \ln(2^{-1}) = -\ln 2$

$-20K = -\ln(2)$

$\therefore K = \ln(2)/20.$