

# **CLASE 01**

## Esperanza condicional

Fijemos  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  y las var'as  
 $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  medibles.

Recordemos,

$$\begin{aligned}\sigma(z) &= \left\{ z^{-1}(A) : A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \right\} \\ &= \left\{ \{z \in A\} : A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \right\} \\ &= \left\{ \text{cuestionario de preguntas} \atop \text{sobre } z \right\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma(z, w) &= \left\{ \{ (z, w) \in A \} : A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} \right\} \\ &= \sigma(\sigma(z) \cup \sigma(w)) \quad (\text{EJER}) \\ &=: \sigma(z) \vee \sigma(w).\end{aligned}$$

Además, dado  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ , sub σ-álgebra:

$\sigma(z) \subseteq \mathcal{G} \iff$  Con la información  $\mathcal{G}$ , podemos "intuir" responder Todo sobre  $z$ , " $z \in \mathcal{G}$ ".

$\Leftrightarrow Z$  es  $\mathcal{G}$ -medible

Obs: Si  $z_1, z_2, \dots$  son  $\mathcal{G}$ -medibles, entonces  $\limsup z_n$  y  $\liminf z_n$  son  $\mathcal{G}$ -medibles

Lema Sean  $Z, W$  integrables. (EJER.)

$$Z \leq W \Leftrightarrow \int_A Z \leq \int_A W, \forall A \in \mathcal{F}.$$

Obs:

$$\bullet \int_A Z = \int_A W, \forall A \in \mathcal{F} \Leftrightarrow Z = W \text{ as.}$$

Basta  $A \in \sigma(Z, W)$ .

Teorema: Dada  $X$  integrable y  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$  sub  $\sigma$ -alg, existe  $Z$  r.a tal que:

1)  $Z$  es  $\mathcal{G}$ -medible.

$$2) \int_A Z = \int_A X, \forall A \in \mathcal{G}.$$

Adicionalmente, si  $W$  integrable cumple  
1) y 2), entonces  $W \stackrel{a.s}{=} Z$ .

Def Dado  $X$  integrable y  $\mathcal{G}$  sub  $\sigma$ -alg de  $\mathcal{F}$ , definimos  $E[X|\mathcal{G}]$  como la clase de todas las variables cumpliendo con 1) y 2) del Teorema previo

También diremos " $Z$  es versión de  $E[X|\mathcal{G}]$ " si  $Z$  cumple 1) y 2).

Obs: Es fácil verificar que

- $X$  es  $\mathcal{G}$ -medible  $\Rightarrow E[X|\mathcal{G}] = X$
- $X \perp \mathcal{G}$  ( $\sigma(X)$  y  $\mathcal{G}$  son independientes)  
 $\Rightarrow E[X|\mathcal{G}] \stackrel{a.s}{=} E[X]$
- $X, Y$  son integrables,  $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow$   
 $E[X+Y|\mathcal{G}] \stackrel{a.s}{=} E[X|\mathcal{G}] + E[Y|\mathcal{G}]$ ,  
 $E[\alpha X|\mathcal{G}] \stackrel{a.s}{=} \alpha E[X|\mathcal{G}]$
- $X, Y$  integrables y  $X \leq_{a.s} Y \Rightarrow$   
 $E[X|\mathcal{G}] \leq E[Y|\mathcal{G}]$ .

- Para  $X$  integrable,  $H \subseteq \mathcal{G}$ , sub  $\sigma$ -álgebra, vale  $E[E[X|G]|H] \stackrel{a.s}{=} E[X|H]$ .  
(propiedad de la Torre)

## Teorema de la convergencia monótona:

Suponga  $X_n, n \in \mathbb{N}$  son v.a's tal que

$0 \leq X_1 \leq X_2 \leq \dots$  y  $X$  una v.a Tal que  
 $X_n \xrightarrow{a.s} X$ . Fijemos  $G \subseteq \mathcal{F}$ , sub  $\sigma$ -álgebra

Si  $X$  es integrable ( $X_n$  integrable  $\forall n$ ), entonces  $E[X_n|G] \xrightarrow{a.s} E[X|G]$ .

Proof:

Sabemos  $X_n \uparrow X$ . Fije  $A \in G$

$$\Rightarrow 0 \leq X_n 1_A \uparrow X 1_A$$

$$\xrightarrow{\text{TCM}} \int X_n 1_A \rightarrow \int X 1_A$$

Sean  $Z_n, Z$  versión de  $E[X_n|G]$  y  $E[X|G]$ , respectivamente

Por otro lado,  $Z_1 \leq Z_2 \leq \dots$ .

Así,  $\Omega^* := \bigcap_{k \geq 1} \{\exists_k \leq \exists_{k+1}\}$  Tiene probabilidad 1.

Luego, podemos definir  $\eta := \begin{cases} \lim Z_n, & \text{sobre } \Omega^* \\ 0, & \text{sobre } \Omega \setminus \Omega^* \end{cases}$

$\eta : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  es  $\mathcal{G}$ -medible.

Para  $A \in \mathcal{G}$  :  $Z_n \cdot 1_A \uparrow \eta \cdot 1_A$

$$\Rightarrow \int Z_n \cdot 1_A \rightarrow \int \eta \cdot 1_A .$$

Como  $\eta$  y  $Z$  son  $\mathcal{G}$ -medibles :  $Z =^{\text{a.s.}} \eta$ . ✓

**(EJER)** : Sean  $X_n, n \in \mathbb{N}$ , v.a.'s y  $X$  v.a.  
Tales que  $X_n \not\rightarrow X$  a.s.. Fije  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$  sub.  $\sigma$ -alg  
Si  $X_n$  y  $X$  son integrables, entonces :

1)  $X_n$  es integrable,  $\forall n$ .

2)  $E[X_n | \mathcal{G}] \xrightarrow{\text{a.s.}} E[X | \mathcal{G}]$

## Teorema de convergencia dominada

Fijemos  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ , sub.  $\sigma$ -álgebra

Sean  $X_n$  v.a.'s y  $Z$  integrable Tales  
que  $|X_n| \leq Z$  a.s.

Si  $X_n \xrightarrow{a.s} X$ , entonces ( $X$  integrable y  $X_n$  integrable  $\forall n$ )  $E[X_n|G] \xrightarrow{a.s} E[X|G]$ .

### Proof.

Haciendo  $n \rightarrow \infty$ :  $|X| \leq Z$ , a.s

Tenemos  $|E[X_n|G] - E[X|G]| =$

$$|E[X_n - X|G]| \xrightarrow{a.s} E[|X_n - X| |G]$$

EJER:  $U$  integrable  $\Rightarrow |E[U|G]| \leq E[|U| |G|]$

Definamos  $U_N := \sup \{|X_n - X_m| : n, m \geq N\}$ ,

medible por ser supremo de cantidad enumerable de medibles.

Como  $X_n \xrightarrow{a.s} X \in \mathbb{R}$ ;  $U_N \downarrow 0$  a.s

$$\Rightarrow E[U_N | G] \xrightarrow{a.s} 0$$

T.C.M  $\in C$

Siempre que  $N \leq n$ :  $|X_n - X| \leq U_N$ .

$$\Rightarrow E[|X_n - X| |G] \leq E[U_N | G].$$

Con  $N$  fijo, haciendo  $n \rightarrow \infty$ :

$$\limsup E[|X_n - x| | \mathcal{G}] \leq E[\mathbb{1}_{\mathcal{G}} | \mathcal{G}]$$

Haciendo  $N \rightarrow \infty$ :

$$\limsup \underbrace{E[|X_n - x| | \mathcal{G}]}_{\circ} \leq 0 \text{ as } .$$

$0 \leq \liminf \checkmark \leq \limsup \rightarrow$

$$\therefore E[|X_n - x| | \mathcal{G}] \xrightarrow{\text{as}} 0 . \quad \checkmark$$

### Libros:

- A Course in Prob theory (K.L Chung)
- Prob. theory and Examples (Durrett)
- Measure theory , Prob and Sto. Pro (Le Gall).

# **CLASE 02**

## Más sobre esperanza condicional

Fixado  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Lema Sean  $X$  integrable,  $G \subseteq \mathcal{F}$  sub.  $\sigma$ -áls. y  $\xi$  limitada ( $\exists M > 0$  tq  $|\xi| \leq_M$ )

$G$ -medible. Then  $E[X \xi | G] \stackrel{a.s}{=} \xi E[X | G]$ .

Prueba:

Comenzamos con  $\xi$  simple y procedemos de manera usual.

EJER: Para  $X: \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  medible positiva, también podemos definir  $E[X | G]$  como la clase (identificadas por  $\stackrel{a.s}{=}$ ) de v.a en  $\bar{\mathbb{R}}$ , positivas.

Lema (Jensen): Sea  $X$  integrable,  $G \subseteq \mathcal{F}$  sub.  $\sigma$ -álg y  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$  convexa. Then,  $\varphi(E[X | G]) \leq E[\varphi(x) | G]$  a.s. .

Prueba:

Defina  $\Delta_\varphi := \{T_{a,b} : T_{a,b}(x) \leq \varphi(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$ , donde  $T_{a,b} = a \cdot 1 + b$ ;  $a, b \in \mathbb{Q}$ .

Como  $\Psi$  es convexa,  $\Delta_\Psi$  es no vacío

Más aún,  $\Psi(x) = \sup_{T \in \Delta_\Psi} T(x)$ .

Luego, para cada  $T \in \Delta_\Psi$  :  $T(x) \leq \Psi(x)$

$$\Rightarrow \underbrace{\mathbb{E}[T(x) | G]}_{T(\mathbb{E}[x | G])} \stackrel{\text{as}}{\leq} \mathbb{E}[\Psi(x) | G] = W$$
$$T(\underbrace{\mathbb{E}[x | G]}_z) \stackrel{\text{as}}{\leq} W, \text{ por ser } T \text{ ope lineal}$$

Es decir, existe medible  $\Omega_T$  con proba. 1 en el cual  $W(w) \geq T(z(w))$ ,  $\forall w \in \Omega_T$ .

Así, tenemos una cantidad enumerable de medibles  $\Omega_T$ ,  $\forall T \in \Delta_\Psi$ , con proba. 1.

Considera  $w \in \bigcap_{T \in \Delta_\Psi} \Omega_T = \Omega^*$ ,  $P(\Omega^*) = 1$ .

$$\Rightarrow W(w) \geq T(z(w)), \forall T \in \Delta_\Psi.$$

$$\Rightarrow W(w) \geq \left( \sup_{T \in \Delta_\Psi} T \right) (z(w)) = \Psi(z(w)) \quad \checkmark$$

## Martingalias (introducción)

Def : Dada  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  y  $M_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  
 $n = 1, 2, 3, \dots$  (puede variar), y

$\{G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}\}$ , sub  $\sigma$ -álgebras.

→ filtración

Es decir,  $(M_n, G_n)$ ,  $n=1, 2, 3, \dots$ , es una martingala si:

1)  $M_n$  es  $G_n$ -medible ( $(M_n)$  está adaptada a  $(G_n)$ ),  $\forall n$

2)  $M_n$  es integrable,  $\forall n$ .

3)  $\forall n, m$  tq  $1 \leq n < m$ , se tiene

$$M_n = E[M_m | G_n].$$

Obs: Para verificar 3), basta se cumpla  $M_n = E[M_{n+1} | G_n]$   $\forall n$ . En efecto,

$$\begin{aligned} E[M_m | G_n] &= E[-E\{\underbrace{E[M_m | G_{m-1}]}_{M_{m-1}}\}_{m-2} \dots | G_n] \\ &= M_n. \end{aligned}$$

Además, recordemos que  $M_n = E[M_m | G_n]$  equivale a:

$\forall A \in G_n$ :  $E[M_n 1_A] = E[M_m 1_A]$ , o sea,

$$E[(M_m - M_n) \cdot 1_A] = 0, \forall A \in G_n.$$

ESTO podemos denotarlo como  $M_m - M_n \perp G_n$ .

Ejemplos: Si  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ,  $\xi_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n=1, 2, \dots$  son independientes, integrables y de media cero, entonces:

- $S_n := \sum_{i=1}^n \xi_i$ ,  $n=1, 2, \dots$
- $G_n := \sigma(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$

$(S_n, G_n)$  es una martingala en efecto, para  $A \in G_n$ :

$$E[(S_m - S_n) \cdot 1_A] = E \left[ \underbrace{\sum_{j=n+1}^m \xi_j}_{\text{independiente de } G_n} \cdot 1_A \right]$$

$$= E \left[ \sum_{j=n+1}^m \xi_j \right] E[1_A] = 0 \cdot E[1_A], \text{ pues cada } \xi_j \text{ tiene media cero.}$$

Si por ejemplo  $\xi_j \xrightarrow{\quad} +1$ , con prob  $\frac{1}{2}$   
 $\xrightarrow{\quad} -1$ , "

entonces  $S_n := \sum_{j=1}^n \xi_j$ ,  $n \geq 1$ , es una martingala

Además,  $P\{S_n \text{ converge a un real}\} = 0$ .

De hecho,  $P\{\limsup S_n = +\infty\} = 1 = P(\liminf S_n = -\infty)$

Entonces  $P\{\limsup S_n = +\infty, \liminf S_n = -\infty\} = 1$ .

EJER: Si  $\xi_1, \xi_2, \dots$  independientes integrables, de  $E[\xi_j] = 1, \forall j$ , entonces:

- $M_n := \xi_1 + \dots + \xi_n$
  - $G_n := \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$
- $\Rightarrow (M_n, G_n)$  es una martingala.

Ejemplo: Fijemos una medida de probabilidad  $\mu$  en  $\{0, 1, 2, \dots\}$ . Branching process, o, Proceso de Galton-Watson.

Fijemos una familia de variables  $\{\xi_{jk} : j = 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots\}$  definidas sobre  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , independientes, con  $\xi_{jk} \sim \mu, \forall j, k$ . Ahora, definimos el proceso:

- $Z_0 = 1$
- $Z_1 = \xi_{1,1}$
- $Z_2 = \sum_{k=1}^{Z_1} \xi_{2k} \quad (\text{y, } Z_2 = 0 \text{ cuando } Z_1 = 0)$
- $Z_3 = \sum_{k=1}^{Z_2} \xi_{3k} \quad (\text{y, } Z_3 = 0 \text{ cuando } Z_2 = 0)$

$\mu$  se denomina offspring distribution.

Vemos que  $\{z_1=0\} \subseteq \{z_2=0\} \subseteq \{z_3=0\} \subseteq \dots$ .

Así,  $\{z_n=0\}$  ↑ extinción.

Problema:  $P(\text{extinción}) = ?$

Defina  $m = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \mu(c_i)$ .

EJER:

- $m < 1 \Rightarrow P(\text{extinción}) = 1$ .
- $m > 1 \Rightarrow P(\text{extinción}) < 1$ .
- $m = 1 \Rightarrow (z_n)$  es martingala.

