

CLASE 08

Método de separación de variables

Teorema: Sea $f \in C^1[0, L]$ con $f(0) = 0 = f(L)$,
tal que f' existe salvo en cantidad finita de
puntos y $f' \in SC[0; L]$.

$\Rightarrow u(\cdot, \cdot)$ definida en el problema del calor
es solución y $u \in C([0, L] \times [0, \infty[) \times C^\infty([0, L] \times (0, \infty))$.

Proof:

Dado $\epsilon > 0$, $u \in C^2([0, L] \times [\epsilon, \infty))$.

Note que derivada por sumandos, $\leq C \cdot n^k \cdot \exp\left(-\frac{\lambda^2 n^2 \epsilon}{L^2}\right)$.
y acotada.

Lema: Sea I un intervalo y $F \in C([a; b] \times I)$,
donde $\frac{\partial F}{\partial y}$ existe y es continua en $[a; b] \times I$.

Sea $f(y) := \int_a^b F(x, y) dx$, $y \in I$.

$\Rightarrow f \in C^1(I)$ y $f'(y) = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) dx$.

Proof:

Dado $y_0 \in I$, considere $\eta > 0$ pequeño, de manera
que $J := [y_0 - \eta, y_0 + \eta] \subseteq I$.

$\Rightarrow F \in C([a; b] \times J)$, uniformemente continua.

Dado $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0 : |(x, y) - (\bar{x}, \bar{y})| < \delta$
 $\Rightarrow |F(x, y) - F(\bar{x}, \bar{y})| < \epsilon$.

Así: $|y - y_0| < \delta$, $y \in J \Rightarrow |F(x, y) - F(x, y_0)| < \epsilon$,
 $\forall x \in [a; b]$.

Ahora: $|f(y) - f(y_0)| = \left| \int_a^b F(x, y) dx - \int_a^b F(x, y_0) dx \right|$
 $\leq \int_a^b |F(x, y) - F(x, y_0)| dx < \epsilon(b-a)$,
cuando $|y - y_0| < \delta$, e $y \in J$.

Note $\partial F / \partial y \in C([a; b] \times J)$. Dado $\epsilon > 0$, then

existe $\delta > 0$ con $|y - y_0| < \delta \Rightarrow |F_y(x, y) - F_y(x, y_0)| < \epsilon$,
 $\forall x \in [a; b]$, por continuidad uniforme.

$$\frac{f(y) - f(y_0)}{|y - y_0|} - \int_a^b \frac{\partial F(x, y_0)}{\partial y} dx = \int_a^b \left(\frac{F(x, y) - F(x, y_0)}{y - y_0} - \frac{\partial F(x, y_0)}{\partial y} \right) dx$$

TVM $= \int_a^b (F_y(x, y_x) - F_y(x, y_0)) dx$, con $|y_x - y_0| < \delta$
 $< \epsilon(b-a)$.

Por último, como $F_y \in C([a; b] \times \mathbb{R})$, su intc-

gral. También es continua. Así, $f' \in C^1(\mathbb{I})$. ✓

Unicidad

Integral de energía:

$$E: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad E(t) = \int_0^L (u(x, t))^2 dx.$$

Teorema: Si $u \in C([0, L] \times [0, \infty)) \cap C^2([0, L] \times [0, \infty[)$ es solución de EDP I \Rightarrow es la única solución.

Proof:

En $t \in [0, \infty)$, por el teorema anterior:

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_0^L 2u(x, t) u_t(x, t) dx = 2\alpha^2 \int_0^L u u_{xx} dx \\ &= 2\alpha^2 [u u_x]_0^L - \int_0^L (u_x)^2 dx = -2\alpha^2 \int_0^L (u_x)^2 dx \leq 0 \end{aligned}$$

De $E'(t) \leq 0$: E no es estrictamente creciente.

Por continuidad de E: $0 \leq E(t) \leq E(0); \forall t \geq 0$.

$$\Rightarrow 0 \leq E(t) \leq \int_0^L (\underbrace{f(x)}_{u_0})^2 dx.$$

De ser cero, E = 0, por
continuidad. ... (□)

Para soluciones u_1, u_2 de la EDP I, $w := u_1 - u_2$

También es solución. De (D): $u_1 = u_2$ ✓

Ecuación de Laplace

Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^2 .

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Problema de Dirichlet en Ω

- $\Delta u = 0$.
- $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$.
- $u|_{\partial\Omega} = f \in C(\partial\Omega)$.

En el rectángulo: $\Omega = (0, a) \times (0, b)$.

EDP 2

- }
- $u_{xx} + u_{yy} = 0$
 - $u \in C(\bar{\Omega}) \times C^2(\Omega)$
 - $u(x, 0) = 0 = u(x, b), \forall x \in [0, a]$
 - $u(0, y) = 0, y \in [0, b]$
 - $u(a, y) = f(y), y \in [0, b], f \in C([0, b])$

Lema de EDO:

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ y la EDO $ay'' + by' + cy = 0$.

Consideremos $ar^2 + br + c = 0$, con raíces r_1, r_2 .

- Si $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 \neq r_2 \Rightarrow y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
- Si $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 = r_2 = r \Rightarrow y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{rx}$
- Si $r_1, r_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \Rightarrow r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$
y se cumple $y(x) = e^{\alpha x} \cdot (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$.

Así, cuando $a=1$, $b=0$, $y'' - cy = 0$.

- Si $c > 0 \Rightarrow r = \pm \sqrt{c}$, $y(x) = C_1 e^{\sqrt{c}x} + C_2 e^{-\sqrt{c}x}$
- Si $c < 0 \Rightarrow r_1 = i\sqrt{-c}$, $r_2 = -i\sqrt{-c}$, y se cumple
 $y(x) = C_1 \cos(\sqrt{-c}x) + C_2 \sin(\sqrt{-c}x)$.

Por métodos de separación de variables:

$$U(x, y) = X(x) Y(y), \text{ así:}$$

$$X \in C([t_0, a]) \times C^2((0, a)),$$

$$Y \in C([t_0, b]) \times C^2((0, b)).$$

$$X'' Y + Y'' X = 0 \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{-Y''}{Y} =: \lambda$$

$$\Rightarrow X'' - \lambda X = 0, \quad Y'' + \lambda Y = 0, \quad y \in (0, b).$$

Para evitar la trivialidad $\chi \equiv 0$, las condiciones de frontera implican $\gamma(0) = 0 = \gamma(b)$.

Probaremos existe $\lim_{y \rightarrow b^-} \gamma'(y)$.

$$\lim_{y \rightarrow b^-} \gamma''(y) = \lim_{y \rightarrow b^-} -\lambda \gamma(y) = -\lambda \gamma(b) \quad (\text{cont.}) = 0.$$

Así, por el Teo. fund. del Cálculo:

$$\text{Sea } \chi \in (0, b) : \underbrace{\int_x^b \gamma''(y) dy}_{\text{real}} = \gamma' \Big|_x^b = \lim_{y \rightarrow b^-} \gamma'(y) - \gamma'(x)$$

\therefore Existe $\lim_{y \rightarrow b^-} \gamma'(y)$.

$$\text{Luego, } \lambda \int_0^b (\gamma(y))^2 dy = - \int_0^b \gamma(y) \gamma''(y) dy$$

$$= - \left[\underbrace{\gamma(y) \gamma'(y)}_{\text{real}} \Big|_0^b - \int_0^b (\gamma'(y))^2 dy \right]$$

Análogamente se prueba existe $\lim_{y \rightarrow 0^+} \gamma'(y)$.

$$= 0 + \int_0^b (\gamma'(y))^2 dy$$

$$\Rightarrow \lambda \geq 0.$$

Si $\lambda = 0$, $\gamma' \equiv 0$ (por continuidad), así $\gamma \equiv 0$,

por $y(0) = 0$, ergo, $U \equiv 0$ (trivial).

• λ es una constante positiva.

$$\Rightarrow Y(y) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda} y) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda} y)$$

De $y(0) = 0$: $C_1 = 0$. Así: $Y(y) = C_2 \sin(\sqrt{\lambda} y)$.

De $y(b) = 0$, y, evitando $U \equiv 0$ si $C_2 = 0$:

$$\sin(\sqrt{\lambda} b) = 0. \quad \therefore \lambda = (k\pi/b)^2; k \in \mathbb{Z}^+.$$

$$\therefore Y_k(y) = C_k \sin\left(\frac{k\pi y}{b}\right), k \in \mathbb{Z}^+.$$

De $\lambda > 0$ y $X'' - \lambda X = 0$:

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda} x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda} x}. \text{ Note } X(0) = 0.$$

$$\Rightarrow X(x) = -C_2 (e^{\sqrt{\lambda} x} - e^{-\sqrt{\lambda} x}) = -2C_2 \sinh(\sqrt{\lambda} x)$$

$$\therefore X_k(x) = F_k \cdot \sinh\left(\frac{\pi k x}{b}\right); k \in \mathbb{Z}^+$$

$$\therefore U_k(x, y) = D_k \cdot \sinh\left(\frac{\pi k x}{b}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi k y}{b}\right), k \in \mathbb{Z}^+.$$

Queremos: (*)

$$\bullet U(x, y) = \sum_{k \geq 1} D_k \sinh\left(\frac{\pi k x}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi k y}{b}\right).$$

$$\bullet f(y) = U(a, y) = \sum_{k \geq 1} (D_k \sinh(\frac{\pi k a}{b})) \sin(\frac{\pi k x}{b}).$$

$$\bullet D_k \sinh\left(\frac{\pi k a}{b}\right) = \frac{2}{b} \int_0^b f(t) \sin\left(\frac{\pi k t}{b}\right) dt = b_k$$

Teorema: Sea $f \in C[0, b]$, $f(0) = 0 = f(b)$, f diferenciable salvo en cantidad finita de puntos, $f' \in SC[0, b]$. $\Rightarrow U(\cdot, \cdot)$ definido en (*) es solución de la EDP 2.

Además: $U \in C([0, a] \times [0, b]) \cap C^\infty([0, a] \times [0, b])$.

Proof:

$$\text{Para } x \in [0, a]: 0 \leq \frac{\sinh(\frac{\pi k x}{b})}{\sinh(\frac{\pi k a}{b})} \leq 1.$$

En $[0, a] \times [0, b]$:

$$\Rightarrow \sum |b_k| \frac{\sinh(\pi k x/b)}{\sinh(\pi k a/b)} \sin(\frac{\pi k y}{b}) \leq \underbrace{\sum |b_k|}$$

converge absolutamente

por el TEST-Weierstrass, la serie converge uniformemente.

$$\Rightarrow U \in C([0, a] \times [0, b]).$$

Para probar diferenciabilidad:

Dado $\epsilon > 0$, $x \in [0, a - \epsilon]$.

$$\cosh(\pi kx/b) = \frac{e^{k\bar{x}} + e^{-k\bar{x}}}{e^{k\bar{a}} - e^{-k\bar{a}}} = \underbrace{\frac{e^{k\bar{x}}}{e^{k\bar{a}}}}_{\leq 2} \cdot \frac{(1 + e^{-2k\bar{x}})}{(1 - e^{-2k\bar{a}})}$$

$$\leq e^{k(\bar{x}-\bar{a})} \cdot 2 / (1 - e^{-2\bar{a}}) = e^{\frac{k\pi}{b}(x-a)} \cdot \underbrace{M_1}_{\text{cte}}$$

$$\leq e^{-k\frac{\pi}{b}\epsilon} \cdot M_1.$$

También se logra acotar

$$\frac{\sinh(\pi kx/b)}{\sinh(\pi ka/b)}$$

$$\text{con } e^{-k\frac{\pi}{b}\epsilon} \cdot M_2.$$

Así, por el Teorema de Weierstrass y Teorema de dirigida sobre convergencia de series de derivadas: $u \in C^\infty([0, a] \times [0, b])$. ✓

Problema de Dirichlet en el círculo

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

- $\Delta u = 0$
- $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$
- $u|_{\partial\Omega} = f \in C(\partial\Omega)$

Consideremos el cambio de variables $U(x, y) = V(r, \theta)$

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta;$$

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad \theta = \arctan(y/x), \quad x \neq 0,$$

$$r \in [0, 1], \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Regla de la cadena: (Supongamos $r > 0$)

$$U_x = V_r \cdot r_x + V_\theta \cdot \theta_x.$$

$$r_x = x/r = \cos \theta, \quad \theta_x = -y/r^2 = -\sin \theta/r$$

$$\Rightarrow U_x = V_r \cdot \cos \theta - V_\theta \cdot \frac{\sin \theta}{r}$$

$$U_{xx} = (V_r)_x \cos \theta + V_r (\cos \theta)_x$$

$$- (V_\theta)_x \frac{\sin \theta}{r} - V_\theta (\sin \theta/r)_x$$

$$= (V_{rr} r_x + V_{r\theta} \cdot \theta_x) \cos \theta + V_r (-\sin \theta) \theta_x$$

$$- (V_{r\theta} r_x + V_{\theta\theta} \theta_x) \frac{\sin \theta}{r} - V_\theta \left(\frac{\cos \theta_x r - r_x \sin \theta}{r^2} \right)$$

$$U_{xx} = V_{rr} \cos^2 \theta - 2V_{r\theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} + V_r \frac{\sin^2 \theta}{r}$$

$$+ V_{\theta\theta} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} + 2V_\theta \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2}.$$

$$\text{Asimis MO: } r_y = \sin\theta, \theta_y = \cos\theta/r$$

$$u_y = V_r \cdot r_y + V_\theta \cdot \theta_y \\ = V_r \sin\theta + V_\theta \cos\theta/r.$$

$$\Rightarrow u_{yy} = (V_{rr} r_y + V_r r \theta_y) \sin\theta + V_r \cos\theta \theta_y \\ + (V_{r\theta} r_y + V_\theta \theta_y) \cos\theta/r \\ + V_\theta (-\sin\theta \theta_y r - r_y \cos\theta)/r^2.$$

$$\therefore u_{yy} = V_{rr} \sin^2\theta + 2V_r r \frac{\sin\theta \cos\theta}{r} + V_r \frac{\cos^2\theta}{r} \\ + V_{r\theta} \frac{\cos^2\theta}{r^2} - 2V_\theta \frac{\sin\theta \cos\theta}{r^2}.$$

$$\text{De } u_{xx} + u_{yy} = 0:$$

$$V_{rr} + \frac{1}{r} V_r + \frac{1}{r^2} V_{\theta\theta} = 0.$$

