

CLASE 02

Conjuntos convexos

Sea E un espacio vectorial.

Def: Segmentos de extremos x e y .

$$x, y \in E. \quad [x, y] := \{x + t(y-x) : t \in [0, 1]\},$$

$$[x, y[:= \{x + t(y-x) : t \in [0, 1[\}.$$

Def: Conjunto estrellado en \bar{x}

Sea $\bar{x} \in C \subseteq E$. C se denomina **estrellado** en \bar{x} si se cumple $[\bar{x}, y] \subseteq C, \forall y \in C$.

Def: Un conjunto se denomina **estrellado** si es estrellado en alguno de sus puntos.

Def: C es **convexo** si $\forall x, y \in C : [x, y] \subseteq C$.

Prop: C convexo $\Rightarrow C$ estrellado en $x, \forall x \in C$.

Def: C es **afín** si $\forall x, y \in C, \forall t \in \mathbb{R}$, se cumple $tx + (1-t)y \in C$.

Prop: • E y \emptyset son convexos y afines.

- $\{C_i\}_{i \in L}$, convexos en $E \Rightarrow \bigcap_{i \in L} C_i$ convexo.
- $\{C_i\}_{i \in L}$, afines en $E \Rightarrow \bigcap_{i \in L} C_i$ afín.

Def: Sea $C \subseteq E$, se dice que $z \in E$ es una combinación convexa (afín) si existen $m \in \mathbb{N}$,

$\{x_i\}_{i=1}^m \subseteq C$, $\{t_i\}_{i=1}^m \subset [0, 1]$ (\mathbb{R}) Tales que

$$\sum_{i=1}^m t_i x_i = z \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^m t_i = 1.$$

Prop: $C \subseteq E$ es convexo (afín) $\Leftrightarrow C$ contiene cualquier combinación convexa (afín) de sus propios elementos.

Prop: Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, afín, se cumple $\forall \alpha \in A$ que $V_\alpha := A - \{\alpha\}$ es subespacio vectorial de \mathbb{R}^n . Se define la **dimensión** de A , como $\dim V_\alpha$.