CLASE 04

$M_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $r_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $V_n^r = V_0^r + \int_0^n r\,dM$.

Cuando $M_n = (1, S_n)$, entonces $r_{n+1} \cdot M_n = r_n \cdot M_n$ (caso autofinanciado) y $V_n^r = V_0^r + \int_0^n \beta\,dS$, donde $r_n = (\alpha_n, \beta_n)$.

Se tiene $\int_0^n \beta\,dS := \sum_{k=1}^n \beta_k (S_k - S_{k-1})$, donde β_k es $\mathcal{G}_{k-1}$-medible (la variable β se escoge antes de la variación de S).

Recordemos, dados $M_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $n = 0, 1, \ldots$; $r_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$; denotamos $\int_0^n r\,dM := \sum_{k=1}^n r_k (M_k - M_{k-1})$. Vimos que

- (M_n) es martingala
- (r_n) es acotado y predecible (r_k es $\mathcal{G}_{k-1}$-medible)

$\Rightarrow \left(\int_0^n r\,dM\right)$ es martingala.

EJER: Si $\forall\, (r_n)$ predecible acotado se tiene $E\left[\int_0^n r\,dM\right] = 0$, $\forall n$; entonces (M_n) es martingala.

(esta propiedad caracteriza a las martingalas.

También vimos que:

- (X_n) es sub (super) martingala
- (V_n) es acotado, predecible y positivo (≥ 0),

entonces $\left(\int_0^n V\,dX\right)$ es sub (super) martingala.

Teorema de convergencia de martingala

Note que para procesos con liminf y limsup; α, β; respectivamente, al ser compuestos con $\varphi(x) = \left(\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^+$ los liminf y limsup se convierten en 0 y 1, respectivamente.

Lema: Sea (X_n) una submart. positiva, vale

$$E\begin{bmatrix} \#\text{ upcrossings de } X, \\ \text{entre } 0 \text{ y } 1, \text{ hasta } n \end{bmatrix} \leq E[X_n - X_0].$$

Proof:

Definamos $\tau_0 = 0$.

$\tau_1 := \min\{n \geq \tau_0 : X_n = 0\}$,

$\tau_2 := \min\{n \geq \tau_1 : X_n \geq 1\}$,

$\tau_3 := \min\{n \geq \tau_2 : X_n = 0\}$, ...

(τ_n definido como ∞, de no existir mínimo).

Como (X_n) es $(\mathcal{G}_n)$-adaptada, entonces:
$\forall k$: $\{\tau_k \leq n\} \in \mathcal{G}_n$, $\forall n$.

Defino ahora: $$r_{n+1} := \begin{cases} 0, & \tau_0 \leq n < \tau_1 \\ 1, & \tau_1 \leq n < \tau_2 \\ 0, & \tau_2 \leq n < \tau_3 \\ \vdots & \vdots \end{cases}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Note $\{\tau_k \leq n < \tau_{k+1}\} = \{\tau_k \leq n\} \cap \{\tau_{k+1} \leq n\}^c$,
intersección de elementos de $\mathcal{G}_n$, $\forall k = 0, 1, \ldots, \forall n$.

$\therefore$ r_{n+1} es $\mathcal{G}_n$-medible.

Sea $U_n :=$ # upcrossings entre 0 y 1, hasta n.

$\Rightarrow U_n \leq \int_0^n r\, dX, \ \forall n$.

Pero, $X_n - X_0 = \int_0^n r\, dX + \int_0^n (1-r)\, dX$.

$\Rightarrow E[X_n - X_0] = E[\int_0^n r\, dX] + E[\int_0^n (1-r)\, dX]$.

$E[\int_0^n (1-r)\, dX] \geq E[\int_0^0 (1-r)\, dX] = 0$.

$\Rightarrow E[U_n] \leq E[\int_0^n (1-r)\, dX] \leq E[X_n - X_0], \forall n$.

Prop: Para (X_n) submar.; $\alpha < \beta$ reales, Tenemos

$$(\beta-\alpha)\, E[\, U_n^{\alpha,\beta}\,] \leq E[\,(X_n-\alpha)^+\,] - E[\,(X_0-\alpha)^+\,],\ \forall n.$$

Proof: Use lema para $\tilde{X}_n := \left(\dfrac{X_n-\alpha}{\alpha-\beta}\right)^+$.

$\blacksquare$