

CLASE 01

Funciones periódicas

Def. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, decimos que f es **periódica** si $\exists T > 0 : f(x + T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$

Def. Sea f una función periódica, se denomina **periodo** al menor valor T (en caso exista) como en la definición previa

Libro del curso:

Análise de Fourier e equações
diferenciais parciais - Djalro Guedes



CLASE 02

Series de Fourier

- PD1 No hay
- Pct1: 6 de setiembre
- Nuevo horario: Martes 9-12.

• Convergencia puntual

$f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$.

$$f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \text{ pointwise} \equiv \forall x \in I : (f_n(x)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (f(x))$$

• Convergencia uniforme

$$f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \equiv \forall \epsilon > 0 : \exists N_0 \in \mathbb{N} / n \geq N_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \forall x \in I.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \sum_{n \geq 1} f_n ;$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} / N \geq N_0 \Rightarrow$$

$$| \sum_{n=1}^N f_n(x) - \sum_{n \geq 1} f_n(x) | < \epsilon, \forall x \in I$$

$$(| \sum_{n \geq N} f_n(x) | < \epsilon, \forall x \in I).$$

- Considera $I = [a, b]$ y f_n continuas en I .

Si $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformemente en I , entonces:

- $\sum_{n \geq 1} f_n$ es continua en I .
- $\int_a^b \left(\sum_{n \geq 1} f_n(x) \right) dx = \sum_{n \geq 1} \int_a^b f_n(x) dx$.

Lema: Sean $n, m \geq 1$.

- $\int_{-L}^L \cos(n\pi x/L) \cos(m\pi x/L) dx = \begin{cases} L, & n=m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$
- $\int_{-L}^L \sin(n\pi x/L) \sin(m\pi x/L) dx = \begin{cases} L, & n=m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$
- $\int_{-L}^L \cos(n\pi x/L) \sin(m\pi x/L) dx = 0.$

Ejemplo: Considera f continua y periódica con periodo $2L$, tal que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right).$$

- $\int_{-L}^L \frac{a_0}{2} dx$ llegas a $a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx$

- $m \geq 1$, por $\cos(\pi m x/L)$, e integraremos \int_{-L}^L

$$\Rightarrow a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{\pi m x}{L}\right) dx, m \geq 0$$

• Análogamente: $b_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin(\pi mx/L) dx, m \geq 1.$

Def: Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de periodo $2L$,
 f integrable y absolutamente integrable
 en cualquier intervalo acotado.

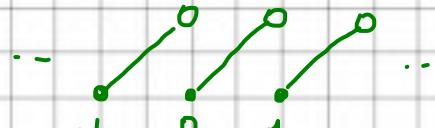
Definimos los coeficientes de Fourier

como: $a_m = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{\pi mx}{L}\right) dx, m \geq 0;$

$b_m = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{\pi mx}{L}\right) dx, m \geq 1.$

Ejemplos:

• $\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

• $f(x) = x - [x]$ 

• $g(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$ extendida con periodo 2π .

Calculemos los coeficientes de Fourier de g:

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(mx) dx / \pi$$

$$\Rightarrow a_0 = \pi / \pi = 1.$$

$$m \neq 0 \Rightarrow a_m = \sin(mx) / (m\pi) \Big|_0^\pi = 0$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx) dx = \int_0^\pi \sin(mx) dx / \pi$$
$$= -\frac{\cos(mx)}{m\pi} \Big|_0^\pi \Rightarrow b_m = \frac{1 - (-1)^m}{\pi m}.$$

Def: Denotamos por

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)).$$

$$\text{o } g(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1 - (-1)^m}{\pi m} \right) \sin(mx).$$

Def: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. f es seccionalmente continua

si para todo intervalo acotado $[a, b]$ si existen $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_k \leq b$ tal que :

- f continua en $]x_i, x_{i+1}[$.
- Existen $\lim_{x \rightarrow x_i^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow x_i^-} f(x)$.

Def: f es seccionalmente diferenciable

si f es seccionalmente continua y f' es seccionalmente continua.

Teorema de Fourier: Sea f seccionalmente diferenciable de periodo $2L$, entonces.

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos\left(\frac{\pi mx}{L}\right) + b_m \sin\left(\frac{\pi mx}{L}\right) \right), \forall x.$$

Donde $f(x^\pm) = \lim_{t \rightarrow x^\pm} f(t)$.

Ejemplo:

Para la computación previa de $g(x)$, g es seccionalmente diferenciable.

$$\begin{aligned} \Rightarrow g(\pi/2) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)} \sin\left(\frac{\pi(2k-1)}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)} (-1)^{k+1}. \end{aligned}$$

$$\text{De } g(\pi/2) = 1^\circ \quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Ejemplo: $f(x) = \begin{cases} L-x, & 0 \leq x \leq L \\ L+x, & -L \leq x \leq 0 \end{cases}$ de periodo $2L$.

$$a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{\pi mx}{L}\right) dx = \frac{1}{L} \int_{-L}^L (L-|x|) \cos\left(\frac{\pi mx}{L}\right) dx$$

$$a_m = \frac{2}{L} \int_0^L (L-x) \cos\left(\frac{\pi mx}{L}\right) dx ; \quad b_m = 0.$$

$$\int_0^L (L-x) \cos\left(\frac{\pi mx}{L}\right) dx = \frac{L}{\pi m} \left[(L-x) \sin\left(\frac{\pi mx}{L}\right) \right]_0^L$$

$$-\int_0^L (-1) \sin\left(\frac{\pi mx}{L}\right) dx \Big] = \frac{L}{\pi m} \int_0^L \sin\left(\frac{\pi mx}{L}\right) dx \\ = -\left(\frac{L}{\pi m}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi mx}{L}\right) \Big|_0^L = \left(\frac{L}{\pi m}\right)^2 (1 - (-1)^m)$$

∴ $a_m = \frac{2L}{\pi^2 m^2} (1 - (-1)^m)$, $m > 0$, $a_0 = L$.

Note f es seccional diferenciable.

$$\Rightarrow f(x) = \frac{L}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2L}{\pi^2 m^2} (1 - (-1)^m) \cos\left(\frac{\pi mx}{L}\right) \\ = \frac{L}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2L}{\pi^2 (2k-1)^2} \cos\left(\frac{\pi(2k-1)x}{L}\right)$$

Para $x=0$:

$$L = \frac{L}{2} + \sum_{k \geq 1} \frac{2L}{\pi^2 (2k-1)^2}$$

∴ $\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$



CLASE 03

Sobre los coeficientes de Fourier

Sea $L > 0$, defina

$$\psi_n(x) = \cos(n\pi x/L), n \geq 0,$$

$\varphi_n(x) = \sin(n\pi x/L)$, $n \geq 1$, con periodo

fundamental $2L/n$, y periodo común $2L$.

Sea $f: [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada e integrable.

$$a_n := \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, n \geq 0,$$

$$b_n := \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, n \geq 1$$

Denotamos $f \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$.

" $S[f]$ " es otra notación

Supongamos que $S[f](x)$ converge a $\theta := n\pi x/L$.

$$S[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \left(\frac{e^{i\theta} + \bar{e}^{i\theta}}{2} \right) + b_n \left(\frac{e^{i\theta} - \bar{e}^{i\theta}}{2i} \right)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \left(\frac{a_n - i b_n}{2} \right) e^{in\pi x/L} + \left(\frac{a_n + i b_n}{2} \right) e^{-in\pi x/L}$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{\frac{in\pi x}{L}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{\frac{in\pi x}{L}},$$

definiendo $\hat{f}(0) = \frac{a_0}{2}$, $\hat{f}(n) = \frac{a_n - ib_n}{2}$, $\hat{f}(-n) = \frac{a_n + ib_n}{2}$.

Note $\hat{f}(n) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-inx/L} dx$.

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$.

Definimos $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto interno, que cumple para $x, y, z \in V$; $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$:

$$1) \langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$$

$$2) \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

$$3) \langle x, x \rangle \geq 0 \quad 4) \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$$

Definimos la norma $\| \cdot \|$ en V como:

$$1) \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \alpha \in \mathbb{K}$$

$$2) \|x\| \geq 0 \quad 3) \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad 4) \|x\| = 0 \iff x = 0$$

Obs. Dado un ρ , es norma $\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$.

Propiedades:

$$1) |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \quad (\text{Cauchy-Schwarz})$$

$$2) \langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+y\|^2.$$

Def: Decimos que f es **seccionalmente continua** en $[a; b]$ si $\exists \alpha = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ tal que:

- 1) f es continua en (x_l, x_{l+1}) , $0 \leq l \leq n-1$.
- 2) $f(x)$ tiende a un límite finito para x_l y x_{l+1} con $x \in (x_l, x_{l+1})$ para $0 \leq l \leq n-1$.

Def: $S(-L, L)$ es el conjunto de funciones seccionalmente continuas en $[-L, L]$, $L > 0$.

Se cumple $S(-L, L)$ es ev real, pero la operación $\langle f, g \rangle := \int_{-L}^L f(x)g(x)dx$ falla ser un producto interno en $S(-L, L)$, solo por la condición " $\langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow f = 0$ ".

Def: $\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}$ es una **seminorma** (casi norma, pues solo falla " $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ ").

EJER: Con seminorma, también se cumple Cauchy-S. y el teo. de Pitágoras

Sea $f \in S(-L, L)$, podemos escribir los Fou. con como $a_n = \frac{1}{L} \langle f, \psi_n \rangle$, $n \geq 0$, $b_n = \frac{1}{L} \langle f, \varphi_n \rangle$, $n \geq 1$.



CLASE 04

Desigualdad de Bessel y convergencias

Notación para el espacio de funciones seccionalmente continuas en $[-L, L]$, $L > 0$: $SC[-L, L]$.

Obs: Si $f \in SC[-L, L]$ $\Rightarrow f$ acotada e integrable en $[-L, L]$.

Recuerde $\Psi_n(x) := \cos(n\pi x/L)$, $n \geq 0$, $\varphi(x) := \sin(n\pi x/L)$, $n \geq 1$.

Dado $f \in SC[-L, L]$ y $S[f] = \frac{a_0 \Psi_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \Psi_n + b_n \varphi_n$,

se tiene $a_n = \frac{1}{L} \langle f, \Psi_n \rangle$, $n \geq 0$, $b_n = \frac{1}{L} \langle f, \varphi_n \rangle$, $n \geq 1$.

Prop Si $f \in SC[-L, L]$, $S[f] = \frac{a_0 \Psi_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \Psi_n + b_n \varphi_n$,

entonces, dados $N \geq 0$, $M \geq 1$, se tiene que

$$\|f - \left(\frac{a_0 \Psi_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \Psi_n + \sum_{n=1}^M b_n \varphi_n\right)\| \leq$$

$$\|f - \left(\frac{c_0 \Psi_0}{2} + \sum_{n=1}^N c_n \Psi_n + \sum_{n=1}^M d_n \varphi_n\right)\|, \text{ para Todo}$$

$\{c_n\}_{n=1}^N$, $\{d_n\}_{n=1}^M$; y, la igualdad vale si y solo

si $c_n = a_n$, $0 \leq n \leq N$ y $d_m = b_m$, $1 \leq m \leq M$.

Proof:

Sean $N \geq 0$, $M \geq 1$.

$$S_{N,M} := \left\langle \Psi_n \Big|_{n=0}^N \cup \varphi_m \Big|_{m=1}^M \right\rangle.$$

$$g := f - \left(\frac{a_0 \Psi_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \Psi_n + \sum_{m=1}^M b_m \Psi_m \right)$$

Lema: • $\langle \Psi_n, \Psi_m \rangle = 0, n \neq m$ • $\langle \Psi_0, \Psi_0 \rangle = 2L$

- $\langle \Psi_n, \Psi_m \rangle = \begin{cases} L, & n=m (>0) \\ 0, & n \neq m \end{cases}$

- $\langle \Psi_n, \Psi_m \rangle = \begin{cases} L, & \text{si } n=m ; 0, & \text{si } n \neq m. \end{cases}$

Del lema: $g \perp S_{N,M}$.

Dados $\{c_n\}_{n=1}^N$, $\{d_m\}_{m=1}^M$, definamos

$$h = \left(\frac{a_0}{2} - \frac{c_0}{2} \right) \Psi_0 + \sum_{n=1}^N (a_n - c_n) \Psi_n + \sum_{m=1}^M (b_m - d_m) \Psi_m$$

De $h \in S_{N,M}$ ⇒ $\langle g, h \rangle = 0$.

$$\Rightarrow \|g + h\|^2 = \|g\|^2 + \|h\|^2.$$

$$\begin{aligned} & \|f - \left(\frac{a_0 \Psi_0}{2} + \sum_{n=1}^N c_n \Psi_n + \sum_{m=1}^M d_m \Psi_m \right)\|^2 \\ &= \|f - \left(\frac{a_0 \Psi_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \Psi_n + \sum_{m=1}^M b_m \Psi_m \right)\|^2 + \|h\|^2. \end{aligned}$$

Como h es continua, el caso $\|h\|^2 = 0$

implica $a_n = c_n, 0 \leq n \leq N$, $b_m = d_m, 1 \leq m \leq M$, debido al lema previo. ✓

Prop: $f \in SC[-L, L]$, $S[f] = \frac{a_0 \psi_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \varphi_m$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$ y $\sum_{m=1}^{\infty} b_m^2 < \infty$. Más aún,

se cumple $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N a_n^2 + \sum_{m=1}^M b_m^2 \leq \|f\|^2$, $\forall N, M \geq 1$.

Proof

Sean $N \geq 0$, $M \geq 0$, enteros.

$$0 \leq \|f - \left(\frac{a_0 \psi_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \psi_n + \sum_{m=1}^M b_m \varphi_m \right)\|$$

De $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ y el lema previo, la expresión eventualmente se reduce a

$$0 \leq \langle f, f \rangle - \frac{a_0^2}{2} - \sum_{n=1}^N a_n^2 - \sum_{m=1}^M b_m^2 + \frac{a_0^2}{2} \quad \checkmark$$

Obs: Decimos que $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es seccionalmente continua si $f = U + iV$, con $U, V: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son seccionalmente continuas.

Asimismo, los coef de Fou. pueden definirse como coef Fou de U , más, i por coe. Fou de V .

Corolario: Si $f: [-L, L] \rightarrow \mathbb{C}$ es sec. cont.,

entonces $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 \leq \frac{\|f\|^2}{2L}$.

Proof:

$$\hat{f}(n) = \hat{u}(n) + i\hat{v}(n), \forall n \in \mathbb{Z}.$$

$$|\hat{f}(n)|^2 = \hat{f}(n) \cdot \overline{\hat{f}(n)} = (\hat{u}(n) + i\hat{v}(n))(\bar{\hat{u}}(n) - i\bar{\hat{v}}(n)).$$

Note $\hat{u}(n) = \left(\frac{1}{2L} \int_{-L}^L u(x) e^{inx/L} dx \right) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L u(x) e^{inx/L} dx$

$$= \hat{u}(-n).$$

$$\Rightarrow |\hat{f}(n)|^2 = |\hat{u}(n)|^2 + |\hat{v}(n)|^2 - i(\hat{u}(n)\hat{v}(-n) - \hat{v}(n)\hat{u}(-n))$$

$$\sum_{n=-N}^N |\hat{f}(n)|^2 = \sum_{n=-N}^N |\hat{u}(n)|^2 + \sum_{n=-N}^N |\hat{v}(n)|^2, \forall N \in \mathbb{Z}.$$

De $\hat{f}(n) = \frac{a_n - ib_n}{2}$: $\hat{u}(n) = \frac{a_n}{2}$, $\hat{v}(n) = -\frac{b_n}{2}$.

De $\hat{f}(-n) = (a_n + ib_n)/2$: $\hat{u}(-n) = \frac{a_n}{2}$, $\hat{v}(-n) = b_n/2$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{4} + \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{4} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^2}{4} = \frac{1}{2} \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{\|f\|^2}{L}, \text{ debido a la proposición previa.} \end{aligned}$$

Sean $f_n: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$.

- 1) f_n converge puntualmente a f en Ω , si dados $x \in \Omega$, $\epsilon > 0$: $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

2) f_n converge uniformemente a f en \mathbb{R} , si dado $\epsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N}$ Tal que
 $n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \forall x \in \mathbb{R}.$

Teorema: $f_n \rightarrow f$ uniformemente en \mathbb{R} .

Si $f_n \in C(\mathbb{R})$, $\forall n$, entonces se cumple:

- $f \in C(\mathbb{R})$
 - Si $\mathbb{R} = [a, b]$ y dado $g \in SC[a, b]$, entonces
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) g(x) dx = \int_a^b f(x) g(x) dx.$$

Teorema (M-Test de Weierstrass):

- $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$
 - $|f_n(x)| \leq M_n, \forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$
 - $\sum_{n \geq 1} M_n < \infty$
- Entonces $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge uniformemente en \mathbb{R} .

Prueba:

Dado $\epsilon > 0$, de la convergencia de $\sum_{n \geq 1} M_n$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ Tal que (...).

Dados $M > N \geq N_0$.

$$\left| \sum_{n=1}^M f_n(x) - \sum_{n=1}^N f_n(x) \right| = \left| \sum_{n=N+1}^M f_n(x) \right| \leq \sum_{n>N} |f_n(x)|$$
$$\leq \sum_{n>N} M_n < \epsilon, \quad \forall x \in \Omega. \quad \checkmark$$

Obs: Sea $f \in SC[-L, L]$. Si $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Q}$
 $x \in [(2k-1)L, (2k+1)L]$. Así, podemos definir
 $F(x) := f(x - 2kL)$.

Def: $SC_{PER}(2L)$: Set de funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seccionalmente continuas en any interval $[a, b]$ con periodo $2L$.

$C_{PER}(2L)$: Set de funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuas de periodo $2L$.

Teorema: Si se cumplen

$$1) f \in SC_{PER}(2L) \quad 3) f' \in SC_{PER}(2L)$$

2) f es diferenciable en $(-L, L)$, salvo a finite number of points.

$$\begin{cases} \text{Entonces, } \forall x \in \mathbb{R}: S[f](x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2} \\ D(*) \end{cases}$$

Lema: Suponga f cumple 1), 2) y 3), además, f es continua y $f(0) = 0$. Then, (*) cumple para $x = 0$.

Prueba del lema:

$$\text{Defina } g(x) := \begin{cases} f(x) / (e^{\frac{i\pi x}{L}} - 1) ; & x \neq 0, x \in [-L, L] \\ -iL f'(0^+) / \pi ; & x = 0 \end{cases}$$

, extendida periódicamente.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{e^{i\pi x/L} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(f(x) - f(0))}{x} \cdot \frac{x}{e^{i\pi x/L} - 1}$$

Como f' es seccionalmente continua en $[-L, L]$, es real $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) \dots (\Delta)$

Como f es continua y $f(0) = 0$, (Δ) implica

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0^+) .$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -f'(0^+) \left(\frac{iL}{\pi} \right)$$

La prueba es análoga para $g(0^-)$.

∴ $g \in SC[-L, L]$. ✓

