

CLASE 01

Funciones periódicas

Def. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, decimos que f es **periódica** si $\exists T > 0 : f(x + T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$

Def. Sea f una función periódica, se denomina **periodo** al menor valor T (en caso exista) como en la definición previa

Libro del curso:

Análise de Fourier e equações
diferenciais parciais - Djalro Guedes



CLASE 02

Series de Fourier

- PD1 No hay
- Pct1: 6 de setiembre
- Nuevo horario: Martes 9-12.

• Convergencia puntual

$f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$.

$$f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \text{ pointwise} \equiv \forall x \in I : (f_n(x)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (f(x))$$

• Convergencia uniforme

$$f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \equiv \forall \epsilon > 0 : \exists N_0 \in \mathbb{N} / n \geq N_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \forall x \in I.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \sum_{n \geq 1} f_n ;$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} / N \geq N_0 \Rightarrow$$

$$| \sum_{n=1}^N f_n(x) - \sum_{n \geq 1} f_n(x) | < \epsilon, \forall x \in I$$

$$(| \sum_{n \geq N} f_n(x) | < \epsilon, \forall x \in I).$$

- Considera $I = [a, b]$ y f_n continuas en I .

Si $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformemente en I , entonces:

- $\sum_{n \geq 1} f_n$ es continua en I .
- $\int_a^b \left(\sum_{n \geq 1} f_n(x) \right) dx = \sum_{n \geq 1} \int_a^b f_n(x) dx$.

Lema: Sean $n, m \geq 1$.

- $\int_{-L}^L \cos(n\pi x/L) \cos(m\pi x/L) dx = \begin{cases} L, & n=m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$
- $\int_{-L}^L \sin(n\pi x/L) \sin(m\pi x/L) dx = \begin{cases} L, & n=m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$
- $\int_{-L}^L \cos(n\pi x/L) \sin(m\pi x/L) dx = 0.$

Ejemplo: Considera f continua y periódica con periodo $2L$, tal que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right).$$

- $\int_{-L}^L \frac{a_0}{2} dx$ llegas a $a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx$

- $m \geq 1$, por $\cos(\pi m x/L)$, e integraremos \int_{-L}^L

$$\Rightarrow a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{\pi m x}{L}\right) dx, m \geq 0$$

• Análogamente: $b_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin(\pi mx/L) dx, m \geq 1.$

Def: Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de periodo $2L$,
 f integrable y absolutamente integrable
 en cualquier intervalo acotado.

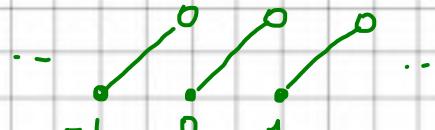
Definimos los coeficientes de Fourier

como: $a_m = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{\pi mx}{L}\right) dx, m \geq 0;$

$b_m = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{\pi mx}{L}\right) dx, m \geq 1.$

Ejemplos:

• $\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

• $f(x) = x - [x]$ 

• $g(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$ extendida con periodo 2π .

Calculemos los coeficientes de Fourier de g:

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(mx) dx / \pi$$

$$\Rightarrow a_0 = \pi / \pi = 1.$$

$$m \neq 0 \Rightarrow a_m = \sin(mx) / (m\pi) \Big|_0^\pi = 0$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx) dx = \int_0^\pi \sin(mx) dx / \pi$$
$$= -\frac{\cos(mx)}{m\pi} \Big|_0^\pi \Rightarrow b_m = \frac{1 - (-1)^m}{\pi m}.$$

Def: Denotamos por

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)).$$

$$\text{o } g(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1 - (-1)^m}{\pi m} \right) \sin(mx).$$

Def: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. f es seccionalmente continua

si para todo intervalo acotado $[a, b]$ si existen $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_k \leq b$ tal que :

- f continua en $]x_i, x_{i+1}[$.
- Existen $\lim_{x \rightarrow x_i^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow x_i^-} f(x)$.

Def: f es seccionalmente diferenciable

si f es seccionalmente continua y f' es seccionalmente continua.

Teorema de Fourier: Sea f seccionalmente diferenciable de periodo $2L$, entonces.

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos\left(\frac{\pi mx}{L}\right) + b_m \sin\left(\frac{\pi mx}{L}\right) \right), \forall x.$$

Donde $f(x^\pm) = \lim_{t \rightarrow x^\pm} f(t)$.

Ejemplo:

Para la computación previa de $g(x)$, g es seccionalmente diferenciable.

$$\begin{aligned} \Rightarrow g(\pi/2) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)} \sin\left(\frac{\pi(2k-1)}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)} (-1)^{k+1}. \end{aligned}$$

$$\text{De } g(\pi/2) = 1^\circ \quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Ejemplo: $f(x) = \begin{cases} L-x, & 0 \leq x \leq L \\ L+x, & -L \leq x \leq 0 \end{cases}$ de periodo $2L$.

$$a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{\pi mx}{L}\right) dx = \frac{1}{L} \int_{-L}^L (L-|x|) \cos\left(\frac{\pi mx}{L}\right) dx$$

$$a_m = \frac{2}{L} \int_0^L (L-x) \cos\left(\frac{\pi mx}{L}\right) dx ; \quad b_m = 0.$$

$$\int_0^L (L-x) \cos\left(\frac{\pi mx}{L}\right) dx = \frac{L}{\pi m} \left[(L-x) \sin\left(\frac{\pi mx}{L}\right) \right]_0^L$$

$$-\int_0^L (-1) \sin\left(\frac{\pi mx}{L}\right) dx \Big] = \frac{L}{\pi m} \int_0^L \sin\left(\frac{\pi mx}{L}\right) dx \\ = -\left(\frac{L}{\pi m}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi mx}{L}\right) \Big|_0^L = \left(\frac{L}{\pi m}\right)^2 (1 - (-1)^m)$$

∴ $a_m = \frac{2L}{\pi^2 m^2} (1 - (-1)^m)$, $m > 0$, $a_0 = L$.

Note f es seccional diferenciable.

$$\Rightarrow f(x) = \frac{L}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2L}{\pi^2 m^2} (1 - (-1)^m) \cos\left(\frac{\pi mx}{L}\right) \\ = \frac{L}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2L}{\pi^2 (2k-1)^2} \cos\left(\frac{\pi(2k-1)x}{L}\right)$$

Para $x=0$:

$$L = \frac{L}{2} + \sum_{k \geq 1} \frac{2L}{\pi^2 (2k-1)^2}$$

∴ $\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$

