

CLASE 01

Notación: Variables independientes \Rightarrow Var. dependientes.

Var. inde $x_1, \dots, x_m \Rightarrow$ Var depen.

$$y_1 = f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, y_n = f_n(x_1, \dots, x_m)$$

Rango de valores de una var. inde. $\because C \subseteq \mathbb{R}$, que puede ser $\mathbb{Z}, [a; b], (0, \infty],$ etc

Para el caso de varias var. indep., Tratemos el caso en que se relacionen por una o varias relaciones funcionales del tipo $g(x_1, \dots, x_m) = (o \leq) L.$

Tales conjuntos C se denominan "conjuntos de factibilidad para la toma de decisiones".

Para funciones de valor real, $y = f(x_1, \dots, x_m)$, se dice $L \in \mathbb{R}$ es un nivel alcanzado en C si existe $\tilde{x} \in C$ con $f(\tilde{x}) = L.$

Def: Conjunto de nivel m para f en C

$$L_m(f) = \{x \in C : f(x) = m\}.$$

Caso general: A, B conjuntos, $f: A \rightarrow B$

función. Dado $m \in \mathbb{B}$, el **contorno** de f de nivel m estará dado por

$$L_m(f) := \{x \in A : f(x) = m\} = \bar{f}^{-1}(m)$$

Notación: Sean A, B conjuntos no vacíos.

$$A^B := \{f : B \rightarrow A, f \text{ función}\}.$$

Por ejemplo, $\mathbb{R}^{[0,1]}$ es un espacio vectorial.

Por ahora, trabajaremos con espacios vectoriales sobre \mathbb{R} , de dimensión finita.

Def: Sea V un espacio vectorial normado, $x \in V$, $r > 0$; se definen:

- Bola abierta de centro x y radio r : $B_r(x)$
- Bola cerrada de centro x y radio r : $\bar{B}_r(x)$
- Esfera de centro x y radio r : $S_r(x)$

CLASE 02

Conjuntos convexos

Sea E un espacio vectorial

Def: Segmentos de extremos x e y .

$$x, y \in E \quad [x, y] := \{x + t(y-x) : t \in [0, 1]\},$$

$$[x, y] := \{x + t(y-x) : t \in [0, 1]\}.$$

Def: Conjunto estrellado en \bar{x}

Sean $\bar{x} \in C \subseteq E$. C se denomina **estrellado** en \bar{x} si se cumple $[\bar{x}, y] \subseteq C, \forall y \in C$.

Def: Un conjunto se denomina **estrellado** si es estrellado en alguno de sus puntos.

Def: C es **convexo** si $\forall x, y \in C : [x, y] \subseteq C$.

Prop: C convexo $\Rightarrow C$ estrellado en $x, \forall x \in C$.

Def: C es **afín** si $\forall x, y \in C, \forall t \in \mathbb{R}$, se cumple $t x + (1-t)y \in C$.

Prop: • E y ϕ son convexos y afines.

- $\{C_i\}_{i \in L}$, convexos en $E \Rightarrow \bigcap_{i \in L} C_i$ convexo.
- $\{C_i\}_{i \in L}$, afines en $E \Rightarrow \bigcap_{i \in L} C_i$ afín.

Def: Sea $C \subseteq E$, se dice que $z \in \bar{E}$ es una combinación convexa (afín) si existen $m \in \mathbb{N}$,

$\{x_i\}_1^m \subseteq C$, $\{t_i\}_1^m \subset [0, 1] (\mathbb{R})$ tales que

$$\sum_{i=1}^m t_i x_i = z \quad y \quad \sum_{i=1}^m t_i = 1$$

Prop: $C \subseteq E$ es convexo (afín) $\Leftrightarrow C$ contiene

en cualquier combinación convexa (afín)
de sus propios elementos.

Prop: Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, afín, se cumple $\forall \alpha \in A$
que $V_\alpha := A - \{\alpha\}$ es subespacio vectorial de \mathbb{R}^n .
Se define la dimensión de A , como $\dim V_\alpha$.

CLASE 03

Def: Dados $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, el hiperplano $H(p, \alpha) := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle p, x \rangle = \alpha\}$.

Prop: $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. then, $\dim_{\mathbb{R}} H(p, 0) = n-1$.

Def: Sea $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$H(p, \alpha)^{\leq} := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle p, x \rangle \geq \alpha\}$, $H(p, \alpha)^>$,
se define análogamente (**semiespacios cerrados**).

Asimismo, $H(p, \alpha)^<$, $H(p, \alpha)^>$, **semiespacios abiertos**.

Def: Una noción de hiperplano en \mathbb{R}_+^n (Coord ≥ 0)

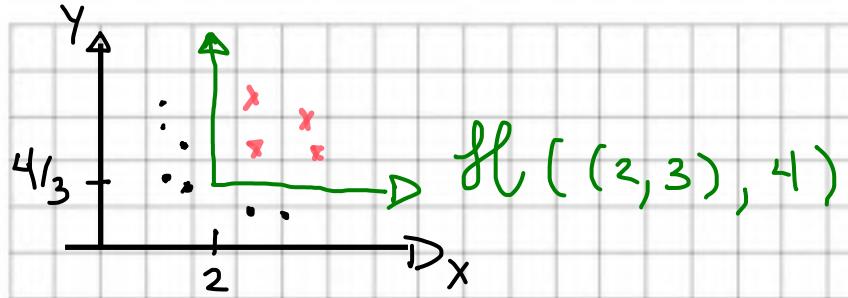
Dado $p \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$ y $\alpha > 0$ real

Defina $l(x) = \min_{\substack{1 \leq i \leq n \\ p_i \neq 0}} \langle p, x_i \rangle$ y le asocia

mos el "hiperplano" $fl(p, \alpha) = \{x \in \mathbb{R}_+^n : l(x) = \alpha\}$.

Tarea: En \mathbb{R}^2 , considerar máx en vez de min para definir $l(\cdot)$, y mostrar un ejemplo de ese tipo de "hiperplano".

Por ejemplo, con $l(\cdot)$ usando min :



Permite otro tipo de frontera de clasificación, que con el hiperplano usual.

Prop: Producto cartesiano finito de conjuntos convexos, es un conjunto convexo.

Prop: Sea T una aplicación lineal afín (lineal + Traslación). Entonces imagen y preimagen de conjuntos convexos, respecto a T , son conjuntos convexos.

Prop

- Traslación de conjuntos es convexo.
- Suma de conjuntos es convexo.
- Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Si C es convexo \Rightarrow sus n proyecciones son convexas \Leftarrow
- en \mathbb{R} (son intervalos).

Reescalamiento de convexo es convexo.

Prop: Interior y clausura de convexo es convexo.

Obs: Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo. Si $\text{int}(C) \neq \emptyset$, entonces $\text{aff}(C) = \mathbb{R}^n$.

Def: Dado C convexo, se dice que $x \in C$ es un punto interior relativo de C , si $\exists \delta > 0 : (\text{aff}(C)) \cap B_\delta(x) \subseteq C$.

- $r_i(C) :=$ interior relativo de C .
- $\bar{C} \setminus r_i(C) :=$ frontera relativa de C .

Obs: Sea $C \neq \emptyset$. Si C convexo $\Rightarrow r_i(C) \neq \emptyset$.

Def: $K \subseteq \mathbb{R}^n$ se denomina cono si se cumple $\forall \alpha > 0, x \in K : \alpha x \in K$.



CLASE 04

Def: $K \subseteq \mathbb{R}^n$ se denomina **cono** si se cumple
 $\forall x \in K, \forall \alpha > 0, \forall \lambda \in K.$

Prop:

- Si C es cono $\Rightarrow \bar{C}, \text{int}(C)$ son conos.
- $\{C_\ell\}$ familia de conos en $\mathbb{R}^n \Rightarrow \bigcap_{\ell} C_\ell$ es cono.

Def: Cono con punta: Cono K tq $K \cap (-K) = \{0\}$.

Def:

- Una **combinación cónica** de elementos x_1, \dots, x_n es de la forma $\sum_{i=1}^n a_i x_i$, $a_i \geq 0$.
- Sea $\emptyset \neq S$, el conjunto de combinaciones cónicas de elementos de S se denota por
 $\text{cone}(S) = \mathbb{R}^+ (\omega(S)) = \text{co}(\mathbb{R}^+(S)).$
 \hookrightarrow múltiplos no negativos.
- **Cápsula cónica convexa cerrada** de $S \neq \emptyset$: $\overline{\text{cone}(S)}$.

EJER: Sea $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^n$, compacto tq $0 \notin S$.
Se cumple $\text{cone}(S)$ es cerrado.

Def $\phi \neq C \subseteq \mathbb{R}^n$ Conjunto polar de C :

$$C^\circ = \{z \in \mathbb{R}^n : \langle z, x \rangle \leq 1, \forall x \in C\}.$$

Resulta C° es siempre convexo y cerrado.

Prop: $\forall \phi \neq C \subseteq \mathbb{R}^n \quad C^\circ = (\bar{C})^\circ = (\text{co}(C))^\circ$.

Prop: Si $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es un cono, entonces

$$C^\circ = \{z \in \mathbb{R}^n : \langle z, x \rangle \leq 0, \forall x \in C\} \text{ y es cono.}$$

Prop:

- Si A y B son conos tq $A \subseteq B \Rightarrow B^\circ \subseteq A^\circ$.
- Si C es un cono convexo cerrado $\Rightarrow C = \underbrace{(C^\circ)^\circ}_{C^{\circ\circ}}$.
- Sea $V \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces $V^\circ = V^\perp$.

El Teorema de Caratheodory:

Sea $\phi \neq C \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces todo elemento de $\text{co}(C)$ es una comb. convexa de $n+1$ o menos elementos de C .

Def: $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es un **polítopo** si es la

cápsula convexa de un finito set of points.

Prop: Si A, B son polítopos, entonces $A+B$ y αA son polítopos, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Aproximación de un compacto convexo vía polítopo

Dados $\neq X \subseteq \mathbb{R}^n$ y $r > 0$: $(C)_r := \bigcup_{x \in C} \overline{B}_r(x)$

