CLASE 01

Notación: Variables independientes $\Rightarrow$ Var. dependientes.

Var. inde. $x_1, \ldots, x_m \Rightarrow$ Var. depen.

$$y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, y_n = f_n(x_1, \ldots, x_m).$$

Rango de valores de una var. inde.: $C \subseteq \mathbb{R}$, que puede ser $\mathbb{Z}$, $[a;b]$, $(0, \infty[$, etc.

Para el caso de varias var. indep., trataremos el caso en que se relacionen por una o varias relaciones funcionales del tipo $g(x_1, \ldots, x_m) = (\geq \leq) L$.

Tales conjuntos C se denominan "conjuntos de factibilidad para la toma de decisiones".

Para funciones de valor real, $y = f(x_1, \ldots, x_m)$, se dice $L \in \mathbb{R}$ es un nivel alcanzado en C si existe $\tilde{x} \in C$ con $f(\tilde{x}) = L$.

Def: Conjunto de nivel m para f en C

$$L_m(f) = \{ x \in C : f(x) = m \}.$$

Caso general: A, B conjuntos; $f: A \to B$

INSPIRATION HUT - 0.6CM GRID

función. Dado $m \in B$, el contorno de f de nivel m está dado por

$$L_m(f) := \{x \in A : f(x) = m\} = f^{-1}(\{m\}).$$

Notación: Sean A, B conjuntos no vacíos.

$$A^B := \{f : B \to A,\ f \text{ función}\}.$$

Por ejemplo, $\mathbb{R}^{[0;1]}$ es un espacio vectorial.

Por ahora, trabajaremos con espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$, de dimensión finita.

Def: Sea V un espacio vectorial normado, $x \in V$, $r > 0$; se definen:

- Bola abierta de centro x y radio r: $B_r(x)$
- Bola cerrada de centro x y radio r: $\overline{B}_r(x)$
- Esfera de centro x y radio r: $S_r(x)$

CLASE 02

Conjuntos convexos

Sea E un espacio vectorial.

Def: Segmentos de extremos x e y.

$x, y \in E$. $[x,y] := \{x + t(y-x) : t \in [0,1]\}$,

$[x,y[:= \{x + t(y-x) : t \in [0,1[\}$.

Def: Conjunto estrellado en $\bar{x}$

Sean $\bar{x} \in C \subseteq E$. C se denomina estrellado en $\bar{x}$ si se cumple $[\bar{x}, y] \subseteq C$, $\forall y \in C$.

Def: Un conjunto se denomina estrellado si es estrellado en alguno de sus puntos.

Def: C es convexo si $\forall x, y \in C : [x,y] \subseteq C$.

Prop: C convexo $\Rightarrow$ C estrellado en x, $\forall x \in C$.

Def: C es afín si $\forall x, y \in C$, $\forall t \in \mathbb{R}$, se cumple $tx + (1-t)y \in C$.

Prop:
- E y $\emptyset$ son convexos y afines.
- $\{C_i\}_{i\in L}$, convexos en $E \Rightarrow \bigcap_{i\in L} C_i$ convexo.
- $\{C_i\}_{i\in L}$, afines en $E \Rightarrow \bigcap_{i\in L} C_i$ afín.

Def: Sea $C \subseteq E$, se dice que $z \in E$ es una combinación convexa (afín) si existen $m \in \mathbb{N}$, $\{x_i\}_1^m \subseteq C$, $\{t_i\}_1^m \subset [0,1]$ $(\mathbb{R})$ tales que $\sum_{i=1}^m t_i x_i = z$ y $\sum_{i=1}^m t_i = 1$.

Prop: $C \subseteq E$ es convexo (afín) $\Leftrightarrow$ C contiene cualquier combinación convexa (afín) de sus propios elementos.

Prop: Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, afín, se cumple $\forall \alpha \in A$ que $V_\alpha := A - \{\alpha\}$ es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.
Se define la dimensión de A, como $\dim V_\alpha$.

CLASE 03

Def: Dados $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, el hiperplano

$$H(p,\alpha) := \{ x \in \mathbb{R}^n : \langle p, x \rangle = \alpha \}.$$

Prop: $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, then, $\dim_{\mathbb{R}} H(p,0) = n-1$.

Def: Sea $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$H(p,\alpha)^{\leq} := \{ x \in \mathbb{R}^n : \langle p, x \rangle \geqslant \alpha \}$, $H(p,\alpha)^{\geq}$, se define análogamente (semiespacios cerrados).

Asimismo, $H(p,\alpha)^{<}$, $H(p,\alpha)^{>}$, semiespacios abiertos.

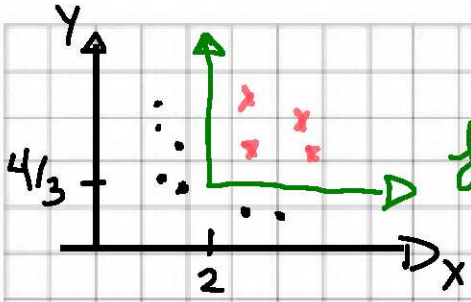
Def: Una noción de hiperplano en $\mathbb{R}^n_+$ (Coord. $\geqslant 0$)

Dado $p \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$ y $\alpha \geqslant 0$ real.

Defina $l(x) = \min\limits_{\substack{1 \leq i \leq n \\ p_i \neq 0}} \{ p_i x_i \}$ y le asociamos el "hiperplano" $\mathcal{H}(p,\alpha) = \{ x \in \mathbb{R}^n_+ : l(x) = \alpha \}$.

Tarea: En $\mathbb{R}^2$, considerar máx en vez de mín para definir $l(\cdot)$, y mostrar un ejemplo de ese tipo de "hiperplano".

Por ejemplo, con $l(\cdot)$ usando mín:



$\mathcal{H}((2,3),4)$ Permite otro tipo de frontera de clasificación, que con el hiperplano usual.

Prop: Producto cartesiano finito de conjuntos convexos, es un conjunto convexo.

Prop: Sea T una aplicación lineal afín (lineal + traslación). Entonces imagen y preimagen de convexos, respecto a T, son conjuntos convexos.

Prop:

- Traslación de convexos es convexo.
- Suma de convexos es convexo.
- Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Si C es convexo $\Rightarrow$ / $\not\Leftarrow$ sus n proyecciones son convexas
- en $\mathbb{R}$ (son intervalos).

Reescalamiento de convexo es convexo.

Prop: Interior y clausura de convexo es convexo.

Obs: Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo. Si $\operatorname{int}(C) \neq \emptyset$, entonces $\operatorname{aff}(C) = \mathbb{R}^n$.

Def: Dado C convexo, se dice que $x \in C$ es un punto interior relativo de C, si $\exists\, \delta > 0 : (\operatorname{aff}(C)) \cap B_\delta(x) \subseteq C$.

- $\operatorname{ri}(C) :=$ interior relativo de C.
- $\bar{C} \setminus \operatorname{ri}(C) :=$ frontera relativa de C.

Obs: Sea $C \neq \emptyset$. Si C convexo $\Rightarrow \operatorname{ri}(C) \neq \emptyset$.

Def: $K \subseteq \mathbb{R}^n$ se denomina cono si se cumple $\forall \alpha > 0, x \in K : \alpha x \in K$.

CLASE 04

Def: $K \subseteq \mathbb{R}^n$ se denomina cono si se cumple $\alpha x \in K, \forall \alpha > 0, \forall x \in K$.

Prop:

- Si C es cono $\Rightarrow \bar{C}$, $\text{int}(C)$ son conos.
- $\{C_\ell\}$ familia de conos en $\mathbb{R}^n$ $\Rightarrow \bigcap_\ell C_\ell$ es cono.

Def: Cono con punta: Cono K Tq $K \cap (-K) = \{0\}$.

Def:

- Una combinación cónica de elementos $x_1, \dots, x_n$ es de la forma $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$, $a_i \geq 0$.

- Sea $\phi \neq S$, el conjunto de combinaciones cónicas de elementos de S se denota por

$$\text{cone}(S) = \mathbb{R}^+(\text{co}(S)) = \text{co}(\mathbb{R}^+(S)).$$

↳ múltiplos no negativos.

- Cápsula cónica convexa cerrada de $S \neq \phi$: $\overline{\text{cone}(S)}$.

EJER: Sea $\phi \neq S \subseteq \mathbb{R}^n$, compacto Tq $0 \notin S$. Se cumple $\text{cone}(S)$ es cerrado.

Def: $\phi \neq C \subseteq \mathbb{R}^n$. Conjunto polar de C:

$$C^\circ := \{ z \in \mathbb{R}^n : \langle z, x \rangle \leq 1, \forall x \in C \}.$$

Resulta C° es siempre convexo y cerrado.

Prop: $\forall \phi \neq C \subseteq \mathbb{R}^n$: $C^\circ = (\overline{C})^\circ = (co(C))^\circ$.

Prop: Si $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es un cono, entonces

$$C^\circ = \{ z \in \mathbb{R}^n : \langle z, x \rangle \leq 0, \forall x \in C \}$$ y es cono.

Prop:

- Si A y B son conos tq $A \subseteq B \Rightarrow B^\circ \subseteq A^\circ$.
- Si C es un cono convexo cerrado $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $C = \underbrace{(C^\circ)^\circ}_{C^{\circ\circ}}$.
- Sea $V \leq \mathbb{R}^n$, entonces $V^\circ = V^\perp$.

El Teorema de Caratheodory:

Sea $\phi \neq C \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces todo elemento de $co(C)$ es una comb. convexa de $n+1$ o menos elementos de C.

Def: $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es un politopo si es la cápsula convexa de un finite set of points.

Prop: Si A, B son politopos, entonces $A+B$ y αA son politopos, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Aproximación de un compacto convexo via politopo

Dados $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}^n$ y $r \geq 0$: $(C)_r := \bigcup_{x \in C} \overline{B}_r(x)$