# CLASE 06

# Integrabilidad uniforme y convergencia

Recordemos : $(X_n)$ y $X$, r.a.'s

Algunos tipos de convergencia:

$$\begin{tikzcd} X_n \xrightarrow{a.s.} X \arrow[rr, Rightarrow, "\text{`` T.C.D ''}"] \arrow[dr, Rightarrow] & & X_n \xrightarrow{L^1} X \arrow[dl, Rightarrow] \\ & X_n \xrightarrow{prob} X \arrow[ul, Rightarrow, bend left, "\text{``}"] \arrow[ur, Rightarrow, bend right, "\text{``}"'] & \end{tikzcd}$$

¿Qué le falta para regresar?

$\Rightarrow \exists\ X_{n_k}$ Tq $X_{n_k} \xrightarrow{a.s.} X$ .

Sabemos por el T.C.D que

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ X_n \xrightarrow{a.s.} X \\ \bullet\ |X_n| \leq Z \text{ integrable} \end{array}\right\} \Rightarrow X_n \xrightarrow{L^1} X .$$

Pidiendo menos para ambas hipótesis, se logra:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ X_n \xrightarrow{prob} X \\ \bullet\ \text{Integrable uniforme} \\ \quad \text{de } (X_n) \end{array}\right\} \Rightarrow X_n \xrightarrow{L_1} X .$$

**Def**: Dada $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, diremos que es uniformemente integrable cuando

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} \int_{\{|X_\lambda|>t\}} |X_\lambda| \longrightarrow 0, \text{ cuando } t \to +\infty.$$

**Obs**:

- Si $\Lambda$ es finito y cada $X_\lambda$ es integrable, entonces $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es uni. integrable.
- Si $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, $(Y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ satisfacen $|X_\lambda| \leq |Y_\lambda|$, $\forall \lambda$; entonces, si $(Y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es uni. inte. $\Rightarrow (X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es uni. int.
- Si $|X_\lambda| \leq Z$ integrable, $\forall \lambda\in\Lambda$, entonces $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es unif. integrable.
- Que $(X_\lambda)$ sea uni. inte. depende de ley de $X_\lambda$, $\forall \lambda\in\Lambda$.

**Prop**: $(X_\lambda)$ es uni. inte. si y solo si se cumplen

A) $E[|X_\lambda|] \leq \mathcal{C}$, $\forall \lambda\in\Lambda$

B) $\forall \epsilon > 0$, $\exists$ $\delta > 0$ Tal que:

$$P(A) < \delta \Rightarrow \int_A |X_\lambda| < \epsilon \quad , \forall \lambda \in \Lambda.$$

<u>Proof:</u>

Suponsamos que $(X_\lambda)$ es unif. integrable.

$$E[|X_\lambda|] = \int_{\{|X_\lambda| \geq t\}} |X_\lambda| + \int_{\{|X_\lambda| < t\}} |X_\lambda| \quad , \forall t \in \mathbb{R}.$$

Como $\sup_\lambda \int_{\{|X_\lambda| > t\}} |X_\lambda| \longrightarrow 0$, $t \to +\infty$,

podemos desir $t_*$ suficientemente grande de modo que $\sup_\lambda \int_{\{|X_\lambda| > t_*\}} |X_\lambda| \leq 1$.

Luego, para todo $\lambda \in \Lambda$:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \displaystyle\int_{\{|X_\lambda| \leq t_*\}} |X_\lambda| \leq t_* \\ \\ \bullet \displaystyle\int_{\{|X_\lambda| > t_*\}} |X_\lambda| \leq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow E[|X_\lambda|] \leq 1 + t_*. \checkmark$$

Ahora, fijemos $\epsilon > 0$. Elegimos un $t$ tal que

$$\int_{\{|X_\lambda| > t\}} |X_\lambda| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall \lambda \in \Lambda .$$

Luego, elegimos $\delta = \dfrac{\epsilon}{2t}$. Así, para $\lambda \in \Lambda$:

$$\int_A |X_\lambda| = \int_{A \cap \{|X_\lambda| > t\}} |X_\lambda| + \int_{A \cap \{|X_\lambda| \leq t\}} |X_\lambda|$$

$$\leq \int_{\{|X_\lambda| > t\}} |X_\lambda| + t \cdot P(A) < \epsilon . \quad ✓$$

Ahora, supongamos A) y B). Fije $\epsilon > 0$.
Por B), sé que $\exists\, \delta > 0$ tal que

$$P(A) < \delta \Rightarrow \int_A |X_\lambda| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall \lambda .$$

Por A) y Markov: $P\{|X_\lambda > t\} \leq \dfrac{E[|X_\lambda|]}{t} < \dfrac{C}{t}$.

Si elegimos $t_0 = C/\delta$, aseguramos que

$$t > t_0 \Rightarrow P\{|X_\lambda| > t\} < \delta .$$

$$\Rightarrow \int_{\{|X_\lambda| > t\}} |X_\lambda| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall \lambda$$

Así, $t > t_0$ implica $\sup\limits_{\lambda} \int_{\{|X_\lambda| > t\}} |X_\lambda| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$. ✓

**Obs**: Si $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ y $(Y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ son unif. inte., entonces $(X_\lambda + Y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es unif. inte.

**Corolario**: Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es uni. int. y $P(A_n) \to 0$, entonces $\int_{A_n} |X_n| \to 0$.

**Lema**: Si $E[X_\lambda^2] \leq \mathcal{C}, \forall \lambda \in \Lambda$, entonces $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es unif. integrable.

Proof:

Para $t > 0$. $\{|X_\lambda| > t\} \subseteq \{|X_\lambda|/t > 1\}$

$$\Rightarrow \int_{\{|X_\lambda| > t\}} |X_\lambda| \leq \int_{\{|X_\lambda| > t\}} |X_\lambda| \cdot \frac{|X_\lambda|}{t}$$

$$= \frac{1}{t} \int_{\{|X_\lambda| > t\}} X_\lambda^2 \leq \frac{\mathcal{C}}{t}. \quad ✓$$

**Ejercicio**: De hecho, podemos usar

$E[|X_\lambda|^p] \leq \mathcal{C}, \forall \lambda \in \Lambda$; para algún $p > 1$.

**Teorema**: Suponga $X_n \xrightarrow{prob} X$. Resultan equivalentes:

1) $(X_n)$ es uniformemente integrable.

2) $X_n \xrightarrow{L^1} X$

**Proof**:

**1) ⇒ 2)**:

Por A): $E[|X_n|] \le \mathcal{C}$, $\forall n$.

$\Rightarrow X_n \in L^1$, $\forall n$.

Sabemos que $\exists\ (X_{n_k})$ con $X_{n_k} \xrightarrow{a.s.} X$.

Como $|\cdot|$ es continuo: $|X_{n_k}| \xrightarrow{a.s.} |X|$

Por Fatou: $E[|X|] \le \underline{\lim}\ E[|X_{n_k}|] \le \mathcal{C}$.

$\therefore X \in L^1$.

Ahora, $|X_n - X| \le \underbrace{\underbrace{|X_n|}_{uni.} + \underbrace{|X|}_{uni.}}_{uni}$, $\forall n$

$\Rightarrow (|X_n - X|)_n$ es unif. integrable ... $(\Delta)$

Como $X_n \xrightarrow{prob} X$: $\forall \epsilon > 0$: $P\{|X_n - X| > \epsilon\} \to 0$.

Luego, $\forall \epsilon > 0$:

$$\int |X_n - X| = \int_{\{|X_n - X| \leq \epsilon\}} |X_n - X| + \int_{\{|X_n - X| > \epsilon\}} |X_n - X|$$

$$\leq \epsilon + \underbrace{\int_{\{|X_n - X| > \epsilon\}} |X_n - X|}_{\to 0} \quad \text{(por el corolario)}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \limsup \int |X_n - X| \leq \epsilon \, ; \; \forall \epsilon > 0$$

$$\therefore \limsup \int |X_n - X| = 0 .$$

<u>2) $\Rightarrow$ 1):</u>

$E[|X_n|] \to E[|X|]$.

En particular, $\exists\, \mathcal{C}$ : $E[|X_n|] \leq \mathcal{C}$, $\forall n$.

Probemos B) por contradicción.

$\exists\, \epsilon_0 > 0$ Tq ningún $\delta > 0$ funciona.

Hagamos $\delta = 1/K$.

Para cada $K = 1, 2, \ldots$:

$\exists\, A_K$ con $P(A_K) < 1/K$, y

$\exists\ X_{n_k}$ con $\int_{A_k} |X_{n_k}| \geq \epsilon_0$. ... $(\square)$

Como $\{n_k : k = 1, 2, \ldots\}$ es infinito (sino se contradice la hipótesis que $(X_n)$ no es uni. int.), tomando una subsucesión de $(A_k)_k$ podemos suponer que $(X_{n_k})$ es subsucesión de $(X_n)$.

Ahora,

$$\int_{A_k} |X_{n_k}| \leq \int_{A_k} |X_{n_k} - X| + \int_{A_k} |X|$$

$$\leq \underbrace{E[|X_{n_k} - X|]}_{\to 0} + \underbrace{\int_{A_k} |X|}_{\to 0}$$

Contradicción, debido a $(\square)$. ✓