CLASE 10

Principio del máximo y funciones armónicas

Principio del máximo: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ open y acotado.
Sea $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ continua tq $u \in C^2(\Omega)$ y $\Delta u = 0$,

$$\Rightarrow \max_{(x,y)\in\bar{\Omega}} u(x,y) = \max_{(x,y)\in\partial\Omega} u(x,y).$$

Proof: Denote $M = \max_{\bar{\Omega}} u$, $m = \max_{\partial\Omega} u$.

De $\partial\Omega \subseteq \bar{\Omega}$: $m \le M$. Supponga $m < M$.

$\Rightarrow \exists (x_0, y_0) \in \Omega$ $M = u(x_0, y_0)$, $(x_0, y_0) \notin \partial\Omega$.

Defina $d := \operatorname{diam}\Omega = \sup\{ \|\vec{x} - \vec{y}\| : \vec{x}, \vec{y} \in \Omega \}$.

$$V(x,y) := u(x,y) + \frac{(M-m)}{2d^2}\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right),$$

con $V \in C^2(\Omega)$.

Sea $(x,y) \in \partial\Omega$

$$V(x,y) \le m + \frac{(M-m)}{2d^2}(d^2) = \frac{M+m}{2} < M.$$

$$\max_{\bar{\Omega}} V(x,y) = V(x_1,y_1), \quad (x_1,y_1) \in \Omega \setminus \partial\Omega.$$

$\Rightarrow V_x(x_1,y_1)=0 \;,\; V_y(x_1,y_1)=0 \quad (\nabla V(x_1,y_1)=0)$

Suponga $V_{xx}(x_1,y_1)>0$.

$\Rightarrow \exists$ Bola abierta $B_\delta(x_1,y_1)$:

$$V_{xx}(x,y)>0 \;,\; \forall (x,y)\in B_\delta(x_1,y_1).$$

$$\Rightarrow \underbrace{V_{xx}(x,y_1)}>0 \;,\; |x-x_1|<\delta$$

$\frac{\partial}{\partial x}\left(V_x(x,y_1)\right) \Rightarrow V_x(\cdot,y_1)$ es estrictamente creciente.

$\Rightarrow x_1<x<x_1+\delta$ implica $V_x(x,y_1)>V_x(x_1,y_1)$ $(\Rightarrow\Leftarrow)$

$\therefore V_{xx}(x_1,y_1)\le 0$

Análogamente : $V_{yy}(x_1,y_1)\le 0$.

$\Rightarrow \Delta V(x_1,y_1)\le 0$.

Pero $\Delta V = \Delta u + \frac{(M-m)}{2d^2}\cdot 4$.

$\Rightarrow \Delta V(x_1,y_1) = 0 + \frac{2(M-m)}{d^2} > 0 \quad (\Rightarrow\Leftarrow)$

$\therefore m=M.$ ✓

Principio del mínimo: Bajo las mismas condiciones: $\min\limits_{\Omega} u = \min\limits_{\partial\Omega} u$.

INSPIRATION HUT - 0.6CM GRID

Teorema: Sea Ω open acotado, define el sistema

- $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$
- $\Delta u = 0$ • $u|_{\partial\Omega} = f \in C(\partial\Omega)$

$\Rightarrow$ Si existe solución única.

Proof:

Note resta de soluciones es solución u, con $u|_{\partial\Omega} = 0$.

Del principio de mín. y máx. $\therefore u = 0$

$\therefore$ La solución es única. ✓

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, abierto. Decimos que u es armónica si $u \in C^2(\Omega)$ y $\Delta u = 0$.

Para $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, denotemos por abuso de notación $f(z) = f(x,y)$, con x, y componentes reales.

Recuerde $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $f = u + iv$, partes reales, implica $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$.

Teorema: $f \in \mathcal{O}(\Omega) \Rightarrow \text{Re}(f), \text{Im}(f)$ son armónicas

Proof:

Recuerde $f' \in \mathcal{O}(\Omega)$, por ser analítica.

$f' = u_x + i v_y = u_x + i(-u_y)$

Por Eq Cau. - Rie, para f':

$$(u_x)_x = (-u_y)_y \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Similar para v ✓

Note no siempre se cumple la otra dirección:

$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $u(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) = \log|z|$.

$\Delta u = 0$. Suponga u es parte real de algún $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

$$g(z) := e^{f(z)} \Rightarrow |g(z)| = e^{\mathrm{Re}(f)} = e^{u} = e^{\log|z|}$$

$$\Rightarrow |e^{f(z)}| = |z|, \ \forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

$$\Rightarrow \left|\frac{e^{f(z)}}{z}\right| = 1, \ \forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

Por la versión compleja del principio de módulo máximo:

$$\frac{e^{f(z)}}{z} = cte = e^{f(1)} \Rightarrow z = e^{f(z)-f(1)}.$$

$\Rightarrow$ Existe un logaritmo holomorfo para z en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ $(\Rightarrow\Leftarrow)$

Recuerde: Si $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ cumple las ec. de Cauchy-Riemman y $\varphi \in C^1(\Omega) \Rightarrow \varphi \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Teorema: Si u es armónica y Ω simplemente conexo, entonces $\exists f \in \mathcal{O}(\Omega) : Re(f) = u$.

Proof

Sea $\varphi := u_x + i(-u_y)$

- $(Re\,\varphi)_x - (Im\,\varphi)_y = u_{xx} - (-u_y)_y = u_{xx} + u_{yy} = 0$

$\Rightarrow (Re\,\varphi)_x = (Im\,\varphi)_y$

- $(Re\,\varphi)_y + (Im\,\varphi)_x = (u_x)_y + (-u_y)_x = u_{xy} - u_{yx} = 0$

$\Rightarrow (Re\,\varphi)_y = -(Im\,\varphi)_x$

$\Rightarrow \varphi$ cumple las ec de Cauchy-Riemman

Note $\varphi_x, \varphi_y \in C(\Omega)$. $\Rightarrow \varphi \in C^1(\Omega)$.

$\therefore \varphi \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Como Ω es simplemente conexo:

$\exists f_0 \in \mathcal{O}(\Omega) : f_0' = \varphi$.

Sea $f_0 = u_0 + i v_0$

$\Rightarrow f_0' = (u_0)_x - i(v_0)_y = \varphi = u_x - i u_y$

$\Rightarrow (u_0)_x = u_x \;,\; (v_0)_y = u_y$

Defino $w := u_0 - u$. $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \cdot\ w_x = 0 \\ \cdot\ w_y = 0 \end{array}\right\}$ w es constante, pues Ω es conexo.

$\Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R} : w = u_0 - u = c \Rightarrow u = u_0 - c$

$\therefore f := f_0 - c$ cumple lo requerido. ✓

<u>Teorema</u>: $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ armónica, acotada superiormente. $\Rightarrow$ u es cte.

<u>Proof</u>:

$\mathbb{R}^2$ es simplemente conexo

$\Rightarrow \exists\, f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) : \operatorname{Re}(f) = u$

Defina $g(z) = e^{f(z)}$.

cota superior de u.

$|g(z)| = |e^{f(z)}| = e^{\operatorname{Re}(f)} = e^{u} \leq e^{M}$

$\Rightarrow g$ entera y acotada.

Por Liouville: $g =$ cte

$\Rightarrow$ cte $= |g(z)| = e^{u} \Rightarrow u$ constante. ✓

Teorema: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto. $u: \Omega \to \mathbb{R}$ armónica. $\forall\, a \in \Omega$, $\overline{B(a,r)} \subseteq \Omega$, se cumple $u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(a + re^{it})\, dt$.

Proof:

Sea $R>0$ tal que $\overline{B(a,r)} \subseteq B(a,R) \subseteq \Omega$

$\Rightarrow \exists\, f \in \mathcal{O}(B(a,R)) : u = \mathrm{Re}(f)$

Complejo
$\Rightarrow f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(a + re^{it})\, dt$

$\mathrm{Re}(\cdot)$
$\Rightarrow u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(a + re^{it})\, dt$. ✓

Teorema: Sea $u: \Omega \xrightarrow{} \mathbb{R}$ (open) continua tal que $\forall a \in \Omega$, $\overline{B(a,r)} \subseteq \Omega$: $u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(a + re^{it})\, dt$.

$\Rightarrow u$ es armónica.

Proof:

Dado $a \in \Omega$, $\overline{B(a,R)} \subseteq \Omega$.

Considere $\cdot$ v