CLASE 04

Def: $K \subseteq \mathbb{R}^n$ se denomina **cono** si se cumple $\alpha x \in K$, $\forall \alpha > 0$, $\forall x \in K$.

Prop:
- Si C es cono $\Rightarrow$ $\bar{C}$, $\mathrm{int}(C)$ son conos.
- $\{C_\ell\}$ familia de conos en $\mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ $\bigcap_\ell C_\ell$ es cono.

Def: **Cono con punta**: Cono K tq $K \cap (-K) = \{0\}$.

Def:
- Una **combinación cónica** de elementos $x_1, \dots, x_n$ es de la forma $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$, $a_i \geq 0$.
- Sea $\emptyset \neq S$, el conjunto de combinaciones cónicas de elementos de S se denota por

$$\mathrm{cone}(S) = \mathbb{R}^+(\mathrm{co}(S)) = \mathrm{co}(\mathbb{R}^+(S)).$$

  $\hookrightarrow$ múltiplos no negativos.

- **Cápsula cónica convexa cerrada** de $S \neq \emptyset$: $\overline{\mathrm{cone}(S)}$.

EJER: Sea $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^n$, compacto tq $0 \notin S$. Se cumple $\mathrm{cone}(S)$ es cerrado.

Def $\emptyset \neq C \subseteq \mathbb{R}^n$ Conjunto polar de C:

$$C^\circ := \{ z \in \mathbb{R}^n : \langle z, x \rangle \leq 1, \forall x \in C \}.$$

Resulta C° es siempre convexo y cerrado.

Prop: $\forall \emptyset \neq C \subseteq \mathbb{R}^n$ $C^\circ = (\overline{C})^\circ = (co(C))^\circ$.

Prop: Si $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es un cono, entonces

$$C^\circ = \{ z \in \mathbb{R}^n : \langle z, x \rangle \leq 0, \forall x \in C \}$$ y es cono.

Prop:

- Si A y B son conos tq $A \subseteq B \Rightarrow B^\circ \subseteq A^\circ$.
- Si C es un cono convexo cerrado $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} C = \underbrace{(C^\circ)^\circ}_{C^{\circ\circ}}$.
- Sea $V \leq \mathbb{R}^n$, entonces $V^\circ = V^\perp$.

El Teorema de Caratheodory:

Sea $\emptyset \neq C \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces todo elemento de $co(C)$ es una comb. convexa de $n+1$ elementos de C.

Def: $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es un politopo si es la cápsula convexa de un finite set of points.

Prop: Si A, B son politopos, entonces $A+B$ y αA son politopos, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Aproximación de un compacto convexo vía politopo

Dados $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}^n$ y $r \geq 0$: $(C)_r := \bigcup_{x \in C} \overline{B}_r(x)$