# CLASE 07

**Tarea:** Demostrar la parte b) de la pregunta 4 de PC1, usando método ≠ al del profe.

Él supuso $\sum_{n\neq 0} \frac{|\operatorname{sen}(n\theta)|}{|n|}$ converge, usó

$$\sum_{n>0} \frac{1-\cos(2n\theta)}{n} \leq \sum_{n\neq 0} \frac{|\operatorname{sen}(n\theta)|}{|n|},$$

y, usó uno de los últimos exercises de Lista 1.

Esa prueba ≠ valdrá 3 puntos en PC2.

**Def:** Dado una función $u(x_1, \dots, x_n)$, denotaremos como equivalentes:

- $u_{x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, D_1 u$.
- $u_{x_1 x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}, D_2 D_1 u$.
- $\Omega$, abierto de $\mathbb{R}^n$.
- $\overline{\Omega} := \Omega \cup \partial\Omega$.

## ¿Qué es una EDP?

Dada una función $F$:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, D_1 u, \dots, D_1 D_2 u, \dots, D_k u) = 0.$$

- $\exp(D_1 u + D_2 u) = 0$.
- $D_2 u = D_1 D_3 u$.

Def: • Orden de una EDP: Mayor derivada que aparece en la expresión.

• EDP es lineal, si es lineal respecto a $u$ y sus derivadas.

• EDP lineal de primer orden:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x) D_j u + b(x) u + c(x) = 0.$$

• EDP lineal de segundo orden:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_i D_j u + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) D_j u + c(x) u + d(x) = 0.$$

• EDP homogénea:

- En el primer caso, si $c(x) \equiv 0$.
- En el segundo caso, si $d(x) \equiv 0$.

Ejemplos:

• La ecuación de Poisson: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = h(x,y)$, (*) lineal de segundo orden.

- Si $h \equiv 0 \Rightarrow$ (*) no es homogénea
- Si $h \equiv 0 \Rightarrow$ (*) es homogénea, y, se

denomina ecuación de Laplace.

- La ecuación del calor: $u_t = \alpha^2 u_{xx}$,
donde $u = u(t,x)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $\alpha^2$ constante,
además, $u \in C^2(\mathbb{R} \times ]0,+\infty[) \cap C(\mathbb{R} \times [0,\infty[)$.

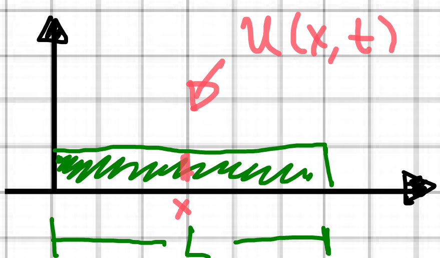
- La ecuación de la onda: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

donde $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $c$ constante.

Objetivo: Dado $L > 0$, $\alpha \neq 0$, buscar $u(x,t)$:

1) $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ en $(0,L) \times (0,\infty)$,
2) $u(0,t) = 0 = u(L,t)$, $t \geq 0$,
3) $u(x,0) = f(x)$, $x \in [0,L]$,

donde $u \in C^2((0,L) \times (0,\infty)) \cap C([0,L] \times [0,\infty))$.




Esto modela cómo se transfiere el calor a lo largo de una barra.

$u(x,t)$: Temperatura en posición $x$, Tiempo $t$.

Búsqueda de soluciones: Usemos el

# método de separación de variables.

$$u(x,t) = \varphi(x)\cdot\psi(t) \quad , \text{ donde :}$$

$$\varphi \in C^2(0,L) \cap C[0,L] \quad , \quad \psi \in C^2(0,\infty) \cap C[0,\infty).$$

En (1): $\varphi(x)\,\psi'(t) = \alpha^2\,\varphi''(x)\,\psi(t)$

$\Rightarrow$ Cuando no se anulan: $\dfrac{1}{\alpha^2}\dfrac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \dfrac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} =: -\lambda$,

con $\lambda$ constante, pues $\psi$ y $\varphi$ son independientes.

$\Rightarrow \psi'(t) = -\lambda\alpha^2\,\psi(t) \quad , \quad \varphi''(x) = -\lambda\,\varphi(x).$

En 2): $\varphi(0)\,\psi(t) = 0,\ t \geq 0 \Rightarrow \varphi(0) = 0.$

Análogamente, $\varphi(L) = 0.$

Probemos $\lambda > 0$:

En $C_{\mathbb{C}}[0,L] = \{ f\ [0,L] \to \mathbb{C}$ continuas $\}$,

se tiene el producto interno:

$f,g \in C_{\mathbb{C}}[0,L]$, $\langle f,g\rangle := \int_0^L f(x)\,\overline{g(x)}\,dx.$

Así, $\lambda\langle \varphi,\varphi\rangle = \lambda\int_0^L \varphi(x)\,\overline{\varphi(x)}\,dx$

INSPIRATION HUT - 0.6CM GRID

$$= -\int_0^L \varphi''(x)\,\overline{\varphi(x)}\,dx = -\int_0^L (\varphi')'(x)\,\overline{\varphi(x)}\,dx$$

$$= -\left[ \varphi'(x)\,\overline{\varphi(x)}\Big|_0^L - \int_0^L \varphi'(x)\,\overline{\varphi'(x)}\,dx \right]$$

$$= \int_0^L |\varphi'(x)|^2 dx - \left( \lim_{x\to L^-} \varphi'(x)\,\overline{\varphi(x)} - \lim_{x\to 0^+} \varphi'(x)\,\overline{\varphi(x)} \right) \quad \dots (*)$$

Verifiquemos poder usar el Teo. funda. de cálculo:

$$\lim_{x\to L^-} \varphi''(x) = \lim_{x\to L^-} -\lambda\varphi(x) = -\lambda\varphi(L) = 0, \text{ pues}$$

$$\varphi \in C[0,L].$$

Por otro lado, dado $x \in (0,L)$ :

$$\int_x^L -\lambda\varphi(y)\,dy = \int_x^L \varphi''(y)\,dy = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_x^{L-\epsilon} \varphi''(y)\,dy$$

$$\overset{T.F.C}{=} \lim_{\epsilon\to 0^+} \left( \varphi'(L-\epsilon) - \varphi'(x) \right) = \varphi'(L^-) - \varphi'(x)$$

$\Rightarrow \varphi'(L^-)$ existe, y, $\varphi'(0^+)$, análogamente.

$$\therefore\ \lambda\langle\varphi,\varphi\rangle = \int_0^L |\varphi'(x)|^2 dx \geq 0.$$

Así $\lambda \leq 0$ implicaría $\varphi \equiv 0$. $\therefore\ \lambda > 0$.

Luego, $\varphi''(x) + \lambda\varphi(x) = 0$, $\varphi(0) = 0 = \varphi(L)$, $\lambda > 0$

$$\overset{EDO}{\Rightarrow} \varphi(x) = a\cos(\sqrt{\lambda}\,x) + b\sin(\sqrt{\lambda}\,x).$$

$\varphi(0) = 0 \Rightarrow a = 0$

$0 = \varphi(L) = b\sin(\sqrt{\lambda}L) . \Rightarrow b \neq 0$, sino $\varphi \equiv 0$.

$\Rightarrow \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}L = n\pi, \ n \geq 1$

$\therefore \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \ n \geq 1 .$ $\quad \varphi_n(x) := \sin(n\pi x/L)$.

Asimismo: $\psi(t) = K e^{-\lambda\alpha^2 t}$, $K$ cte.

Así, tenemos posibles soluciones de la forma

$$u_n(x,t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\exp(-\alpha^2 n^2 \pi^2 t / L^2) .$$

Note de 2) y 3): $f(0) = 0 = f(L)$, $f \in C[0,L]$.

Vamos a buscar $b_n \in \mathbb{R}$ tales que $f(x) = \sum_{n\geq 1} b_n u_n(x,0)$, pues así un candidato a solución

es $u(x,t) = \sum_{n \geq 1} b_n \sin(n\pi x/L)\exp(-\alpha^2 n^2 \pi^2 t / L^2)$.

<u>Teorema</u>. Sea $f \in C[0,L]$, $f(0) = f(L) = 0$, $f'$ existe salvo en finite points, $f' \in SC[0,L]$.

$\Rightarrow$ La ecuación del calor planteada tiene solución en $C^2((0,L)\times(0,\infty)) \cap C([0,L]\times[0,\infty))$.

<u>Proof:</u>

Se extiende de manera impar $f$ en $[-L,0)$.

Por Fourier: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x/L)$ converge

uniformemente en $[-L,L]$.

Definamos $u(x,t) = \sum_{n\geq 1} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t/L^2}$.

$u(x,0) = f(x) \Rightarrow$ De la conv uni. via continuas,

$u$ es continua en $C([0,L]\times\{0\})$.

Sea $t>0$. $u(x,t)$ converge uniformemente

via el Test de Weierstrass.

Esto ya que $\sum_{n\geq 1} e^{-cn^2} < \infty$, $c>0$

y $(b_n)_n$ acotado (Riemann-Lebesgue).

$\Rightarrow u \in C([0,L]\times(t,\infty))$, $\forall t>0$.

De $\sum_{n\geq 1} n^k / e^{cn^2} < \infty$, $c>0$, $k\in\mathbb{Z}^+$,

usando convergencia para derivadas, se

Tiene $u \in C^{\infty}((0,L)\times(0,\infty))$.