

CLASE 04

Def: $K \subseteq \mathbb{R}^n$ se denomina **cono** si se cumple $\alpha x \in K, \forall \alpha > 0, \forall x \in K$.

Prop:

- Si C es cono $\Rightarrow \bar{C}, \text{int}(C)$ son conos.
- $\{C_\alpha\}$ familia de conos en $\mathbb{R}^n \Rightarrow \bigcap_{\alpha} C_\alpha$ es cono.

Def: **Cono con punta:** Cono K Tq $K \cap (-K) = \{0\}$.

Def:

- Una **combinación cónica** de elementos x_1, \dots, x_n es de la forma $\sum_{i=1}^n a_i x_i, a_i \geq 0$.

- Sea $\emptyset \neq S$, el conjunto de combinaciones cónicas de elementos de S se denota por

$$\text{cone}(S) = \mathbb{R}^+(\text{co}(S)) = \text{co}(\mathbb{R}^+(S)).$$

\hookrightarrow múltiplos no negativos.

- **Cápsula cónica convexa cerrada** de $S \neq \emptyset$: $\overline{\text{cone}(S)}$.

EJER: Sea $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^n$, compacto Tq $0 \notin S$.
Se cumple $\text{cone}(S)$ es cerrado.

Def: $\emptyset \neq C \subseteq \mathbb{R}^n$. Conjunto polar de C :

$$C^\circ := \{z \in \mathbb{R}^n : \langle z, x \rangle \leq 1, \forall x \in C\}.$$

Resulta C° es siempre convexo y cerrado.

Prop: $\forall \emptyset \neq C \subseteq \mathbb{R}^n : C^\circ = (\bar{C})^\circ = (\text{co}(C))^\circ$.

Prop: Si $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es un cono, entonces

$$C^\circ = \{z \in \mathbb{R}^n : \langle z, x \rangle \leq 0, \forall x \in C\} \text{ y es cono.}$$

Prop:

- Si A y B son conos $\text{tg } A \subseteq B \Rightarrow B^\circ \subseteq A^\circ$.
- Si C es un cono convexo cerrado $\Rightarrow C = \underbrace{(C^\circ)^\circ}_{C^{\circ\circ}}$.
- Sea $V \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces $V^\circ = V^\perp$.

El Teorema de Caratheodory:

Sea $\emptyset \neq C \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces todo elemento de $\text{co}(C)$ es una comb. convexa de $n+1$ o menos elementos de C .

Def: $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es un polítopo si es la

cápsula convexa de un finite set of points.

Prop: Si A, B son polítopos, entonces $A+B$
y αA son polítopos, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Aproximación de un compacto convexo via polítopo

Dados $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}^n$ y $r \geq 0$: $(C)_r := \bigcup_{x \in C} \overline{B}_r(x)$

