Problema 2

$P \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $Q \in \mathbb{R}^{m \times K}$, $m, n, K \in \mathbb{Z}^+$

$$C := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k : Px + Qy = 1 \}.$$

Parte 1:

Note C puede ser vacío, por ejemplo, si P y Q son matrices nulas.

Así, si $C = \phi$, C es afín, pero no existe su subespacio vectorial asociado.

Luego, suponga $C \neq \phi$ y considere $\mu, v \in C$, con $\mu = (\mu_1, \mu_2)$, $v = (v_1, v_2)$, $\mu, v \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^K$.

$$\Rightarrow P\mu_1 + Q\mu_2 = 1 = Pv_1 + Qv_2. \quad \ldots (1)$$

Fije $t \in \mathbb{R}$.

$$\mu + t(v - \mu) = (\mu_1 + t(v_1 - \mu_1), \mu_2 + t(v_2 - \mu_2)).$$

$$P(\mu_1 + t(v_1 - \mu_1)) + Q(\mu_2 + t(v_2 - \mu_2)) =$$

$$(P\mu_1 + Q\mu_2) + t(P(v_1 - \mu_1) + Q(v_2 - \mu_2)) \overset{\text{de }(1)}{=}$$

INSPIRATION HUT - 0.6CM GRID

$1 + t(Pv_1 + Qv_2 - (Pu_1 + Qu_2)) = 1 + t\cdot 0 = 1.$

$\therefore\ u + t(v-u) \in C,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \forall u, v \in C.$

$\therefore$ C es un conjunto afín.

De la hipótesis, $\exists (x_0, y_0) \in C$.

$\Rightarrow Px_0 + Qy_0 = 1 \ \ldots (2)$, y, el subespacio vectorial E asociado a C es

$$E = C - (x_0, y_0)$$

$$= \{(x - x_0, y - y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k : (x, y) \in C\}$$

$$= \{(x - x_0, y - y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \cdot Px + Qy = 1\}$$

de (2)

$$= \{(x - x_0, y - y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k : P(x - x_0) + Q(y - y_0) = 0\}$$

$$\therefore E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k : Px + Qy = 0\}$$

Parte 2): Hallar C_∞

Como C es afín, es también convexo

Verifiquemos C es cerrado

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k : Px + Qy = 1\}$$

De cumplirse $C = \phi$, se tendría $C_\infty = \phi$.

Suponga entonces $C \neq \phi$. Así, conside $(x, y) \in \overline{C}$ con (x, y) límite de una sucesión (x_n, y_n) en C.

$\Rightarrow \quad P x_n + Q y_n = 1, \ \forall n \geq 1$

Tomando límite cuando $n \to \infty$, y, usando el hecho que las matrices P y Q definen operadores continuos, tenemos

$$P \lim_{n \to \infty} x_n + Q \lim_{n \to \infty} y_n = 1 = Px + Qy,$$

gracias a convergencia por coordenadas.

$\therefore (x, y) \in C$. Así, C es cerrado

Entonces, está bien definido

$$C_\infty = \{ d \in \mathbb{R}^{n+k} : x + td \in C, \forall t \geq 0, \text{ para algún (cualquier) } x \in C \}$$

De la definición de cono de recesión, notamos $0 \in C_\infty$.

Luego, C_∞ es no vacío.

Así, sea $d \in C_\infty$, $(x,y) \in C$, se cumple

$(x,y) + td \in C$, $\forall\, t \geq 0$.

Denote $d = (d_1, d_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$.

$\Rightarrow P(x + td_1) + Q(y + td_2) = 1$.

De $(x,y) \in C$: $t(Pd_1 + Qd_2) = 0$.

De $t \neq 0$: $Pd_1 + Qd_2 = 0$.

$\Rightarrow d \in E$ (subespacio de la parte 1)

$\therefore C_\infty \subseteq E$.

Ahora, considere $d \in E$, $d = (d_1, d_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$.

Fije $t \geq 0$ y considere algún $(x,y) \in C$.

$\Rightarrow P(x + td_1) + Q(y + td_2) =$

$Px + Qy + t(Pd_1 + Qd_2) = 1 + t \cdot 0 = 1$.

$\therefore (x,y) + td \in C$, $\forall\, t \geq 0$.

$\Rightarrow d \in C_\infty$. $\therefore C_\infty = E$.

$\therefore\ C_\infty = E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k : Px + Qy = 0\}$ ∎

Parte 3:

Como $C \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ es un conjunto afín, es suficiente que C posea al menos dos elementos para inferir C no es acotado, y, entonces, no compacto; pues $C \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$.

$\therefore$ Si $|C| > 1$, entonces no es compacto.

Caso contrario, $|C| \leq 1$ implica que C es finito, por lo que sería cerrado y acotado, por ende, compacto de $\mathbb{R}^{n+k}$.

$\therefore$ C es compacto si y solo si C contiene uno o cero elementos. ∎

Pregunta 1

Recuerde que los puntos extremos de un conjunto se preservan tras rotaciones y/o traslaciones. ... (1)

En ese sentido, el análisis inicial sobre los puntos extremos de la región sombreada S en azul, se cumple, por (1), para cada rotación de S generada al rotar tal región alrededor del eje Y.

La región S puede expresarse como

$$S = \underbrace{\bar{B}_1(-2,0)}_{B_1} \cup R \cup \underbrace{\bar{B}_1(2,0)}_{B_2},$$ donde R es el rectángulo $[-2,2]\times[-1,1]$.

Note que $v \in Ext(S)$ implica $v \notin int(R)$, $v \notin int(B_\ell)$, $\ell \in \{1,2\}$:

- Sea $v \in int(R) = (-2,2)\times(-1,1)$, claramente se tiene $v = t v_1 + (1-t) v_2$, para ciertos $v_1, v_2 \in int(R)$, $v_1 \neq v_2$, y $t \in (0,1)$ ... (2)

De $\text{int}(R) \subseteq R \subseteq S$, y, (2),
concluimos $v \notin \text{Ext}(S)$.

- Fije $l \in \{1,2\}$ y considere $v \in \text{int}(B_l)$. Como $\text{int}(B_l)$ es una bola abierta, existen $v_1, v_2 \in \text{int}(B_l)$, $v_1 \neq v_2$, y $t \in (0,1)$ con $v = tv_1 + (1-t)v_2$. ... (3)

  De $\text{int}(B_l) \subseteq B_l \subseteq S$, y (3),
  concluimos $v \notin \text{Ext}(S)$.

$\therefore$ $\text{Ext}(S) \subseteq \text{int}(R)^c \cap \text{int}(B_1)^c \cap \text{int}(B_2)^c$ ... (4).

De $\text{Ext}(S) \subseteq S$ y (4), concluimos
$\text{Ext}(S) \subseteq \partial R \cup \partial B_1 \cup \partial B_2$. ... (5)

Note $B_1 = B_{11} \cup B_{12}$, donde B_{11} es el semicírculo izquierdo ($(-3,0) \in B_{11}$) de B_1, y, B_{12}, el semicírculo derecho.

Así, $\partial B_1 = \partial B_{11} \cup \partial B_{12}$, $\partial B_{12} \subseteq R$. ... (6)

Análogamente, $B_2 = B_{21} \cup B_{22}$ ($(1,0) \in B_{21}$), y $\partial B_{21} \subseteq R$ ... (7).

Asimismo, $\partial R = H \cup (H + (4,0)) \cup V \cup (V + (0,2))$,

donde $H = \{-2\} \times [-1,1]$, $V = [-2,2] \times \{-1\}$,
y se cumple $H \subseteq B_1$, $H + (4,0) \subseteq B_2$ ... (8).

De (5), (6), (7) y (8):

$$\mathrm{Ext}(S) \subseteq \underbrace{\partial B_{11} \cup V \cup (V + (0,2)) \cup \partial B_{22}}_{\partial S}.$$

$\therefore$ $\mathrm{Ext}(S) \subseteq \partial S$. ... $(*)$

Denotamos por S_R al sólido generado tras rotar 360° S alrededor del eje Y.

Fije $p \in \mathrm{Ext}(S_R)$. De $\mathrm{Ext}(S_R) \subseteq S_R$, existe una sección transversal S_θ de S_R, asociado a alguna rotación θ de S, con $\theta \in [0, 2\pi)$, tal que $p \in S_\theta$.

Note $p \notin \mathrm{int}(S_R) = \bigcup\limits_{0 \le \alpha < 2\pi} \mathrm{int}_{\mathrm{aff}(S_\alpha)} S_\alpha$, pues

sino $p \in \mathrm{int}_{\mathrm{aff}(S_\theta)} S_\theta$, lo que, como vimos

hasta (5), implicaría $\exists\, v_1, v_2 \in T$, $v_1 \neq v_2$, $t \in (0,1)$ con $p = t v_1 + (1-t) v_2$, con $T := \mathrm{int}_{\mathrm{aff}(S_\theta)} S_\theta$, que contradiciría $p \in \mathrm{Ext}(S_R)$.

Así, similar a (*), pero considerando fronteras relativas de los S_θ, respecto a $\operatorname{aff}(S_\theta)$, obtenemos $\operatorname{Ext}(S_R) \subseteq \partial S_R$, donde, como S_R es un sólido de rotación, se cumple

$$\partial S_R = \bigcup_{0 \leq \theta < 2\pi} \partial_{\operatorname{aff}(S_\theta)} S_\theta ,$$

siendo cada una de esas fronteras relativas, una rotación de la unión de fronteras mostrada en (*) ... (**).

Note que, tras rotar S, se obtiene un cilindro unido con un toroide, sólidos. Así, de (*) y (**), ∂S_R es las bases circulares del cilindro generado tras rotar R, unido con la frontera del toroide sólido generado tras rotar B_1.

<u>Afirmación:</u> $\operatorname{Ext}(S) = \partial S$, $\operatorname{Ext}(S_R) = \partial S_R$

Pregunta 3

$C \subseteq \mathbb{R}^n$, convexo cerrado, $x_1, \dots, x_k \in \partial C \subseteq C$, pues C es cerrado.

$\forall i = 1, \dots, k$: • $C \subseteq H_{\leq}(a_i, a_i^T x_i)$. ... (1)

• $H(a_i, a_i^T x_i)$ es un hiperplano de soporte en x_i. ... (2)

Defina $A = co\{x_1, \dots, x_k\}$, $B = \{x : a_i^T(x - x_i) \leq 0, \forall i\}$

Sabemos $\{x_1, \dots, x_k\} \subseteq C$.

$\Rightarrow co\{x_1, \dots, x_k\} \subseteq co(C) = C$, convexo

$\therefore A \subseteq C$.

Fije $x \in C$, e, $i \in \{1, \dots, k\}$.

<u>De $x \in C$ y (1)</u>: $\langle x, a_i \rangle \leq a_i^T x_i = \langle x_i, a_i \rangle$

$\Rightarrow 0 \geq \langle x - x_i, a_i \rangle = \langle a_i, x - x_i \rangle = a_i^T(x - x_i)$, por ser un producto interno con imagen en $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow \forall x \in C$: $a_i^T(x - x_i) \leq 0$, $\forall i = 1, \dots, k$.

$\therefore C \subseteq B$ $\qquad$ $\therefore A \subseteq C \subseteq B$

Pregunta 4

En el libro de Jan Brinkhuis presentan el lema de Shapley-Folkman:

Sean $m, n \in \mathbb{Z}^+$, $m \geq n$; $\phi \neq S_\ell \subseteq \mathbb{R}^n$, con $\ell = 1, \dots, m$. $S := S_1 + \dots + S_m$ cumple que cada $x \in co(S)$ satisface $x = x_1 + \dots + x_m$, con $x_\ell \in co(S_\ell)$, $\forall\, \ell = 1, \dots, m$; y, $x_\ell \in S_\ell$ para al menos $(m-n)$ índices ℓ.

Considere $\phi \neq S \subseteq \mathbb{R}^n$, con S acotado.

$\Rightarrow \exists\, r > 0 : \|x\| < r, \forall x \in S.$

Defina $S_m := (\underbrace{S + S + \dots + S}_{\text{"m" Términos } S})$, $m \in \mathbb{Z}^+$.

Probaremos que la sucesión $\left(\frac{1}{m} \cdot S_m\right)_{m \geq 1}$ converge a $co(S)$, respecto a la métrica de Hausdorff, d.

Como se definió d para conjuntos no vacíos compactos de $\mathbb{R}^n$, supongamos S es cerrado.

Así, S es compacto.

Fije $m \in \mathbb{Z}^+$

$$d(S_m, co(S)) = \inf\{\lambda > 0 : S_m \subseteq (co(S))_\lambda, \; co(S) \subseteq (S_m)_\lambda\},$$

donde $(C)_r := \bigcup_{x \in C} \bar{B}_r(x)$, $r > 0$, C compacto.

Es decir, queremos mostrar:

$$\underbrace{\inf\{\lambda > 0 : S_m \subseteq (co(S))_\lambda, \; co(S) \subseteq (S_m)_\lambda\}}_{d_m} \xrightarrow{m \to \infty} 0.$$

Note $d_m \geq 0$, $\forall m \in \mathbb{Z}^+$.