CLASE 02

Más sobre esperanza condicional

Fijado $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Lema Sean X integrable, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ sub. σ-áls. y ξ limitada ($\exists\, M > 0$ tq $|\xi| \underset{a.s}{\leq} M$) $\mathcal{G}$-medible. then $E[X\xi \mid \mathcal{G}] \overset{a.s}{=} \xi E[X \mid \mathcal{G}]$.

Proof:

Comenzamos con ξ simple y procedemos de manera usual.

EJER: Para $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ medible positiva, también podemos definir $E[X \mid \mathcal{G}]$ como la clase (identificadas por $\overset{a.s}{=}$) de v.a en $\overline{\mathbb{R}}$, positivas.

Lema (Jensen): Sea X integrable, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ sub. σ-álg y $\varphi : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ convexa. Then, $\varphi(E[X \mid \mathcal{G}]) \leq E[\varphi(X) \mid \mathcal{G}]$ a.s.

Proof:

Defina $\Lambda_\varphi := \{ T_{a,b} : T_{a,b}(x) \leq \varphi(x), \forall x \in \mathbb{R} \}$, donde $T_{a,b} := a(\cdot) + b$; $a, b \in \mathbb{Q}$.

Como φ es convexa, Δ_φ es no vacío

Más aún, $\varphi(x) = \sup\limits_{T \in \Delta_\varphi} T(x)$.

Luego, para cada $T \in \Delta_\varphi$: $T(x) \leq \varphi(x)$

$$\Rightarrow \underbrace{E[T(x) \mid \mathcal{G}]} \overset{as}{\leq} E[\varphi(x) \mid \mathcal{G}] =: W$$

$$T(\underbrace{E[x \mid \mathcal{G}]}_{Z}) \overset{as}{\leq} W, \text{ por ser } T \text{ ope lineal}$$

Es decir, existe medible Ω_T con proba. 1 en el cual $W(\omega) \geq T(Z(\omega))$, $\forall \omega \in \Omega_T$.

Así, tenemos una cantidad enumerable de medibles Ω_T, $\forall T \in \Delta_\varphi$, con proba. 1.

Considere $\omega \in \bigcap\limits_{T \in \Delta_\varphi} \Omega_T =: \Omega^*$, $P(\Omega^*) = 1$.

$$\Rightarrow W(\omega) \geq T(Z(\omega)), \forall T \in \Delta_\varphi.$$

$$\Rightarrow W(\omega) \geq \left(\sup_{T \in \Delta_\varphi} T\right)(Z(\omega)) = \varphi(Z(\omega))$$ ✓

Martingalas (introducción)

Def: Dada $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y $M_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ (puede variar), y

$\{\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}\}$, sub σ-álgebras.

$\hookrightarrow$ filtración

Es decir, $(M_n, \mathcal{G}_n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, es una martingala si:

1) M_n es $\mathcal{G}_n$-medible ((M_n) está adaptada a $(\mathcal{G}_n)$), $\forall n$

2) M_n es integrable, $\forall n$.

3) $\forall n, m$ tq $1 \leq n < m$, se tiene

$$M_n = E[M_m \mid \mathcal{G}_n].$$

Obs: Para verificar 3), basta se cumpla $M_n = E[M_{n+1} \mid \mathcal{G}_n]$ $\forall n$. En efecto,

$$E[M_m \mid \mathcal{G}_n] = E[\cdots E\{\underbrace{\underbrace{E[M_m \mid \mathcal{G}_{m-1}]}_{M_{m-1}} \mid \mathcal{G}_{m-2}}_{M_{m-2}}\}\cdots \mid \mathcal{G}_n]$$
$$= M_n.$$

Además, recordemos que $M_n = E[M_m \mid \mathcal{G}_n]$ equivale a:

$\forall A \in \mathcal{G}_n$: $E[M_n 1_A] = E[M_m 1_A]$, o sea,

$$E[(M_m - M_n) \cdot 1_A] = 0, \ \forall A \in \mathcal{G}_n.$$

Esto podemos denotarlo como $M_m - M_n \perp \mathcal{G}_n$.

Ejemplos: Si $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\xi_n \; \Omega \to \mathbb{R}$, $n=1,2,\dots$ son independientes, integrables y de media cero, entonces:

- $S_n := \sum_{i=1}^{n} \xi_i$, $n=1,2,\dots$
- $\mathcal{G}_n := \sigma(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$

$(S_n, \mathcal{G}_n)$ es una martingala. En efecto, para $A \in \mathcal{G}_n$:

$$E[(S_m - S_n)\cdot 1_A] = E[\underbrace{\sum_{j=n+1}^{m} \xi_j}_{\text{independiente de } \mathcal{G}_n} \cdot 1_A]$$

$$= E[\sum_{j=n+1}^{m} \xi_j]\, E[1_A] = 0 \cdot E[1_A]$$, pues cada ξ_j tiene media cero.

Si por ejemplo $\xi_j \to +1$, con prob $1/2$, $\to -1$, " " ,

entonces $S_n := \sum_{j=1}^{n} \xi_j$, $n \geq 1$, es una martingala.

Además, $P\{S_n \text{ converja a un real}\} = 0$.

De hecho, $P\{\limsup S_n = +\infty\} = 1 = P(\liminf S_n = -\infty\}$

$\therefore P\{\limsup S_n = +\infty, \liminf S_n = -\infty\} = 1$.

EJER: Si $\xi_1, \xi_2, \dots$ indepen integrables, de $E[\xi_j] = 1$, $\forall j$, entonces:

- $M_n := \xi_1 \cdot (\dots) \cdot \xi_n$
- $\mathcal{G}_n := \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$

$\Rightarrow (M_n, \mathcal{G}_n)$ es una martingala.

Ejemplo: Fijemos una medida de probabilidad μ en $\{0, 1, 2, \dots\}$. Branching process, o, Proceso de Galton-Watson.

Fijemos una familia de variables $\{\xi_{jk} : j = 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots\}$ definidas sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, independientes, con $\xi_{jk} \sim \mu$, $\forall j, k$. Ahora, definimos el proceso:

- $Z_0 = 1$
- $Z_1 = \xi_{1,1}$
- $Z_2 = \sum_{k=1}^{Z_1} \xi_{2k}$ (o, $Z_2 = 0$ cuando $Z_1 = 0$)
- $Z_3 = \sum_{k=1}^{Z_2} \xi_{3k}$ (o, $Z_3 = 0$ cuando $Z_2 = 0$)

μ se denomina offspring distribution.

Vemos que $\{Z_1=0\} \subseteq \{Z_2=0\} \subseteq \{Z_3=0\} \subseteq \cdots$.

Así, $\{Z_n=0\} \uparrow \{\text{extinción}\}$.

<u>Problema</u>: $P(\{\text{extinción}\}) = ?$

Defina $m = \sum_{i=0}^{\infty} i\mu(i)$.

<u>EJER</u>:

- $m < 1 \Rightarrow P\{\text{extinción}\} = 1$.
- $m > 1 \Rightarrow P\{\text{extinción}\} < 1$.
- $m = 1 \Rightarrow (Z_n)$ es martingala.