CLASE 12

Funciones subarmónicas y Fourier Transform

Help para pc3:
- No habrá EDPs to solve.
- Viene hasta armónicas.
- Pensar en ejemplos de funciones armónicas

Recuerde: $u : \Omega \subseteq \mathbb{C}$ o $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

- Si u es armónica $\Rightarrow$ (-) $u \in C(\Omega)$

$(*)\left\{ (-)\ \forall\ \overline{B(a,r)} \subseteq \Omega \right.$ $\quad u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(a + re^{it})\,dt$

- Si $u \in C(\Omega)$ y $(*)$ $\Rightarrow$ u es armónica en Ω.

Def: Decimos que $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es subarmónica si
- $u \in C(\Omega)$
- $u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(a + re^{it})\,dt$, $\forall\ \overline{B(a,r)} \subseteq \Omega$.

Ejemplos: Si u es armónica en Ω $\Rightarrow$

u, $-u$ y $|u|$ son subarmónicas en Ω.

Ejercicio: Sea $u \in C^2(\Omega)$. Se cumple:

u es subarm. en Ω $\Leftrightarrow$ $\Delta u \geq 0$.

Obs: • No Toda función armónica es C^2.

• Si $f \in \mathcal{O}(\Omega) \Rightarrow |f|$ es subarmónica en Ω

• $f(z) = |z|^p$, $p > 0$ son subarmónicas en $\mathbb{R}^2$.

Principio del módulo máximo

Lema: Si Ω es abierto conexo, $u: \Omega \to \mathbb{R}$ subarmónica alcanza un máximo en Ω, $\Rightarrow u$ es constante.

Proof:

Defina $A = u^{-1}\{M\} = \{a \in \Omega : u(a) = M\}$,

donde $M := \max_{z \in \Omega} u(z)$. Así, $A \neq \phi$.

De $u \in C(\Omega)$, $\{M\}$ cerrado : A es cerrado.

Probemos que A es abierto.

Sea $a \in A \subseteq \Omega$ (open). Así, $a \in \overline{B(a,r)} \subseteq \Omega$ para cierto r.

De u subarm : $M = u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(a + re^{it})dt$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} M = M$$

$$\Rightarrow M = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a+re^{it})\,dt \; ; \; u(a+re^{it}) \leq M, \ \forall -\pi \leq t \leq \pi$$

$$\Rightarrow u(a+re^{it}) = M, \ \forall t \in [-\pi, \pi].$$

Análogamente para cada $0 < \tilde{r} < r$.

$\Rightarrow B(a,r) \subseteq A$. Por conexidad: $A = \Omega$

$\therefore$ u es constante. ✓

<u>Corolario</u>: Sea Ω abierto, acotado, conexo. Sea $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$, $u \in C(\bar{\Omega})$ y subarmónica en Ω, tal que $u(z) \leq 0$, $\forall z \in \partial\Omega$.

$\Rightarrow u(z) \leq 0, \ \forall z \in \bar{\Omega}$.

<u>Corolario</u>: Sea Ω abierto acotado conexo. Sean $u, v : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ continuas con u y v subarmónicas en Ω.

Si $u(z) \leq v(z), \ \forall z \in \partial\Omega \Rightarrow u(z) \leq v(z), \ \forall z \in \bar{\Omega}$.

<u>Obs</u>: Si u_1, u_2 son subarmó. $\Rightarrow$ $\max\{u_1, u_2\}$ es subarmónica.

Transformada de Fourier

$$\mathcal{L}^1 := \left\{ f\ \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ Tal que } f \text{ integrable en cualquier } [-M, M] \text{ con } \|f\|_{\mathcal{L}^1} := \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx = \lim_{M \to \infty} \int_{-M}^{M} |f(x)|\,dx < \infty \right\}$$

Def: Dado $f \in \mathcal{L}^1$, defino la Transformada de Fourier de f como $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\xi x}\,dx$, $\xi \in \mathbb{R}$.

Obs: No siempre $f \in \mathcal{L}^1$ implica $\hat{f} \in \mathcal{L}^1$.

Ejemplo: Definimos $f\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-a, a] \\ 0, & x \notin [-a, a] \end{cases}, \text{ para un } a \in \mathbb{R} \text{ fijo.}$$

$\Rightarrow \hat{f}(0) = 2a/\sqrt{2\pi}$. Para $\xi \neq 0$:

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} 1 \cdot e^{-i\xi x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\frac{e^{-i\xi x}}{-i\xi} \right) \Big|_{-a}^{a}$$

$$\Rightarrow \hat{f}(\xi) = \frac{2 \sin(\xi a)}{\sqrt{2\pi}\,\xi}.$$

Pero: $\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin(\xi a)}{\xi} \right| d\xi = \infty$.

Ejemplo: Dado $a > 0$. $f(x) := e^{-a|x|}$

• **$f \in \mathcal{L}^1$:** $\int_{-M}^{M} |f(x)|\,dx = \int_{-M}^{M} e^{-a|x|}\,dx = 2\int_0^M e^{-ax}\,dx$

$$= 2\left(\frac{e^{-ax}}{-a}\right)\Bigg|_0^M = \frac{2e^{-aM}}{-a} + \frac{2}{a}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx = 2/a.$$

• **$\hat{f} \in \mathcal{L}^1$:** $\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-a|x|} e^{-i\xi x}\,dx$

$$= (2\pi)^{-1/2}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{(a-i\xi)x}\,dx + \int_0^{\infty} e^{-(a+i\xi)x}\,dx\right]$$

$$= (2\pi)^{-1/2} \cdot \left[\frac{e^{(a-i\xi)x}}{a-i\xi}\Bigg|_{-\infty}^{0} + \frac{e^{-(a+i\xi)x}}{-(a+i\xi)}\Bigg|_0^{\infty}\right]$$

$$= (2\pi)^{-1/2} \cdot \left[(a-i\xi)^{-1} + (a+i\xi)^{-1}\right]$$

$$\therefore \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2a}{a^2+\xi^2}. \quad \therefore \hat{f} \in \mathcal{L}^1.$$

Proposition: Sean $f, g \in \mathcal{L}_1$:

1) $f + \lambda g \in \mathcal{L}_1$, $\widehat{f+\lambda g}(\xi) = \hat{f}(\xi) + \lambda\hat{g}(\xi)$

2) $\overline{f} \in \mathcal{L}_1$, $\widehat{\overline{f}}(\xi) = \overline{\hat{f}(-\xi)}$, $\xi \in \mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Conjugado complejo

3) $(\tau_y(f))(x) := f(x-y)$. Así, $\tau_y(f) \in \mathcal{L}^1$,

Fijado $y \in \mathbb{R}$

y $\widehat{\tau_y(f)}(\xi) = e^{-i\xi y}\hat{f}(\xi)$.

4) $(D_\delta(f))(x) := f(\delta x)$, fijado $\delta > 0$.

Así, $D_\delta(f) \in \mathcal{L}^1$ y

5) $|\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1 / \sqrt{2\pi}$, $\forall\ \xi \in \mathbb{R}$.

Proof:

2) $$\widehat{\overline{f}}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)}\, e^{-i\xi x} dx = (\cdot) \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)\, e^{i\xi x}}\, dx$$

$$= (\cdot) \overline{\int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{i\xi x} dx} = \overline{\hat{f}(-\xi)}.$$

3) $$\widehat{\tau_y(f)}(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} (\tau_y(f))(x)\, e^{-i\xi x} dx$$

$$= (\cdot) \int_{\mathbb{R}} f(w)\, e^{-i\xi w} e^{-i\xi y} dx, \quad w := x-y$$

$$= e^{-i\xi y}\hat{f}(\xi).$$

4) $\widehat{D_\delta(f)} = (\cdot) \int_{\mathbb{R}} f(w)\, e^{-i\xi w/\delta}\, dw/\delta \,, \quad w := \delta x$

$$= \delta^{-1} \cdot \hat{f}(\xi/\delta).$$

5) $|\hat{f}(\xi)| \leq (\cdot) \left| \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-i\xi x} dx \right| \leq (\cdot) \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx = \frac{\|f\|_1}{\sqrt{2\pi}}.$

Esta es la mejor constante sharp, pues si $f \in \mathcal{L}^1$ es positiva en cero, $\hat{f}(0)$ coincide con la cota.

Theorem: Si $f \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow \hat{f}$ es unifor. continua en $\mathbb{R}$.

Proof:

Dado $\xi \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}$.

$$|\hat{f}(\xi+h) - \hat{f}(\xi)| = (\cdot) \left| \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-i\xi x} (e^{-ihx} - 1)\, dx \right|$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, |e^{-ihx} - 1|\, dx \quad \dots (*)$$

Como $f \in \mathcal{L}^1$: $\lim_{M \to \infty} \int_{-M}^{M} |f(x)|\, dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx$

$$\Rightarrow \lim_{M \to \infty} \int_{|x| \geq M} |f(x)|\, dx = 0.$$

Luego, $\exists\, M_0 \in \mathbb{R} : \displaystyle\int_{|x|\geq M_0} |f(x)|\,dx < \frac{\sqrt{2\pi}\,\epsilon}{4}$

<u>En (*)</u>: $\displaystyle |\hat{f}(\xi+h)-\hat{f}(\xi)| \leq (\cdot)\int_{|x|\leq M_0} |f(x)|\,|e^{-ihx}-1|\,dx$

$\displaystyle + (\cdot)\int_{|x|\geq M_0} |f(x)|\,|e^{-ihx}-1|\,dx$

$$\leq (\cdot)\int_{|x|\leq M_0} |f(x)|\,|e^{-ihx}-1|\,dx + \underbrace{\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\sqrt{2\pi}\cdot\epsilon}{4}}_{\epsilon/2}$$

Fije $\theta \in \mathbb{R}$.

$$|e^{i\theta}-1|^2 = |\cos\theta - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta|^2 = (\cos\theta-1)^2 + \mathrm{sen}^2\theta$$

$$\Rightarrow |e^{i\theta}-1| = 2\,|\mathrm{sen}(\theta/2)|.$$

Note $\displaystyle \sin(x) = \int_0^x \cos t\,dt$ (TFCálculo)

$$\Rightarrow |\sin(x)| \leq \int_0^x |\cos t|\,dt \leq \int_0^x dt = x \leq |x|,\ x\in\mathbb{R}$$

$$\therefore\ |e^{i\theta}-1| \leq |\theta|,\ \theta\in\mathbb{R}.$$

$$\int_{|x|\leq M_0} |f(x)|\,|e^{-ihx}-1|\,dx \leq \int_{|x|\leq M_0} |f(x)|\,|hx|\,dx \leq |hM_0| \int_{|x|\leq M_0} |f(x)|\,dx$$

$$\leq |hM_0|\,\|f\|_1.$$

Lema de Riemann-Lebesgue:

Si $f \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow \lim\limits_{|\xi| \to \infty} \hat{f}(\xi) = 0$.

Proof: Probemos para $f \in C(\mathbb{R})$.

Defina $w := x - \pi/\xi$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x-\pi/\xi)\, e^{-i\xi x}\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(w)\, e^{-i\xi(w+\pi/\xi)}\, dw$$

$$= -\int_{\mathbb{R}} f(w)\, e^{-i\xi w}\, dw.$$

$$\Rightarrow (2\sqrt{2\pi})\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{i\xi x} dx + \int_{\mathbb{R}} f(w)\, e^{-i\xi w}\, dw$$

Dado $\epsilon > 0$, $\exists\, M_0 \in \mathbb{R}^+ : \int_{|x| \geq M_0} |f(x)|\, dx < \epsilon$

Como $|\xi| \to +\infty$, suponga $|\xi| \geq \pi$.

$$2\sqrt{2\pi}\, |\hat{f}(\xi)| \leq \left| \int_{|x| \geq M_0 + 2} (f(x) - f(x-\pi/\xi))\, e^{-i\xi x}\, dx \right|$$

$$+ \left| \int_{|x| \leq M_0+2} (f(x) - f(x-\pi/\xi))\, e^{-i\xi x}\, dx \right|$$

$$\leq \int_{|x| \geq M_0+2} |f(x) - f(x-\pi/\xi)|\, dx + \int_{|x| \leq M_0+2} |f(x) - f(x-\pi/\xi)|\, dx$$

$$\leq \int_{|x|\geq M_0+2} |f(x)|\,dx + \int_{|x|\geq M_0+2} |f(x-\pi/\xi)|\,dx + \int_{|x|\leq M_0+2} |f(x)-f(x-\tfrac{\pi}{\xi})|\,dx$$

$$\underbrace{}_{<\epsilon} \qquad \underbrace{}_{<\epsilon}$$

$$|x-\pi/\xi| \geq |x| - |\pi/\xi| \geq |x|-1 \geq M_0+1 \geq M_0$$

Para $(x-\pi/\xi)$, con $|x|\leq M_0+2$, basta considerar $|y|\leq M_0+3$, intervalo compacto donde f es uniformemente continua, pues es continua.

$$\Rightarrow \exists\, \delta>0 \cdot |y-z|<\delta \Rightarrow |f(y)-f(z)| < \frac{\epsilon}{2(M_0+2)}$$

$$|x-(x-\pi/\xi)|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x-\pi/\xi)| < \frac{\epsilon}{2(M_0+2)}$$

Así, cuando $|\xi| > \text{máx}\{\pi/\delta, \pi\}$,

se tiene $|\hat{f}(\xi)|$ suficientemente pequeño ✓

■

INSPIRATION HUT - 0.5CM GRID