Concavidad y Optimización

Abelardo Jordán Liza

Maestría en Matemáticas Aplicadas
PUCP

Lima Agosto, 2022

Definición

Dados $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, el hiperplano $H(p, \alpha)$ se define como el conjunto

$$H(p, \alpha) := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \langle p, x\rangle = \alpha\} \tag{1}$$

Note que cuando $\alpha = 0$, $H(p, 0)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensión $n - 1$ y $x \in H(p, 0)$ si y solo si, $x \perp p$. En tal caso, se dice que el p es un vector ortogonal al subespacio vectorial $H(0, p)$(comúnmente se dice que p es normal a $H(p, 0)$.)
En general, se dice que el hiperplano $H(p, \alpha)$ es paralelo al subespacio vectorial $H(p, 0)$ y que tiene vector normal p.

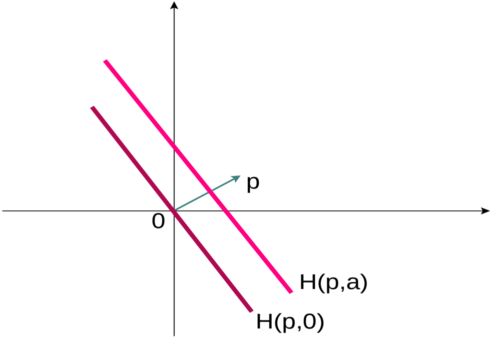


Fig1 Hiperplano $H(p, \alpha)$

Definición

Dado el hiperplano $H(p,\alpha)$, se generan los siguientes subconjuntos:

(a) $H(p,\alpha)^{\leq} := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle p,x\rangle \leq \alpha\}$ *y* $H(p,\alpha)^{\geq} := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle p,x\rangle \geq \alpha\}$ *que se denominan semiespacios cerrados.*

(b) $H(p,\alpha)^{<} := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle p,x\rangle < \alpha\}$ *y* $H(p,\alpha)^{>} := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle p,x\rangle > \alpha\}$ *que se denominan semiespacios abiertos.*

Las denominaciones cerrado y abierto, a la vez concuerdan con la naturaleza topológica de estos conjuntos.

Nota

Dado el hiperplano $H(p,\alpha)$, éste coincide con $H(tp,t\alpha)$ para cualquier $t \in \mathbb{R}$ no nulo. Particularmente, podemos exigir una representación del hiperplano con un vector normal de norma uno o también si $\alpha \neq 0$ podemos imponer que $\alpha = 1$.

Proposición

Sean C_1, C_2 *subconjuntos convexos de los espacios vectoriales* E_1 *y* E_2 *respectivamente, entonces* $C_1 \times C_2$ *es un subconjunto convexo de* $E_1 \times E_2$. *Generalmente, si para cada* $i = \overline{1,p}$, C_i *es un subconjunto convexo del espacio vectorial* E_i, *entonces* $C_1 \times \cdots \times C_p$ *es un subconjunto convexo de* $E_1 \times \cdots \times E_p$.

Proposición

Sean C_1, C_2 subconjuntos convexos de los espacios vectoriales E_1 y E_2 respectivamente, entonces $C_1 \times C_2$ es un subconjunto convexo de $E_1 \times E_2$. Generalmente, si para cada $i = \overline{1,p}$, C_i es un subconjunto convexo del espacio vectorial E_i, entonces $C_1 \times \cdots \times C_p$ es un subconjunto convexo de $E_1 \times \cdots \times E_p$.

Las aplicaciones lineales afines tienen la propiedad de preservar la convexidad de subconjuntos. Formalmente, esto significa lo siguiente:

Proposición

Sean E y F e.v. , $T : E \to F$ una aplicación lineal afín , $C \subset E$ convexo. La imagen $T(C)$ de C respecto a T, es convexo en F.
Además, si D es convexo en F, entonces su imagen inversa respecto a T, $T^{-1}(D) = \{x \in E : T(x) \in D\}$, es convexo en E .

Proposición

Sean C_1, C_2 subconjuntos convexos de los espacios vectoriales E_1 y E_2 respectivamente, entonces $C_1 \times C_2$ es un subconjunto convexo de $E_1 \times E_2$.
Generalmente, si para cada $i = \overline{1,p}$, C_i es un subconjunto convexo del espacio vectorial E_i, entonces $C_1 \times \cdots \times C_p$ es un subconjunto convexo de $E_1 \times \cdots \times E_p$.

Las aplicaciones lineales afines tienen la propiedad de preservar la convexidad de subconjuntos. Formalmente, esto significa lo siguiente:

Proposición

Sean E y F e.v. , $T : E \to F$ una aplicación lineal afín , $C \subset E$ convexo. La imagen $T(C)$ de C respecto a T, es convexo en F.
Además, si D es convexo en F, entonces su imagen inversa respecto a T, $T^{-1}(D) = \{x \in E : T(x) \in D\}$, es convexo en E .

Ejemplos

(i) *Si C es un conjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ y b es un elemento de $\mathbb{R}^n$, entonces $A + b$ es un conjunto convexo de $\mathbb{R}^n$.*

(ii) *Si $A \subset \mathbb{R}^n$ y $B \subset \mathbb{R}^n$ son convexos, entonces el conjunto $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ es también convexo.*

(iii) *Si $C \subset \mathbb{R}^n$ es convexo, entonces los conjuntos $\Pi_i(C)$ (i-ésima proyección) son intervalos en $\mathbb{R}$.*

En esta parte, centramos nuestro estudio en $\mathbb{R}^n$ no solamente como espacio vectorial, sino también como espacio topológico con la topología inducida por su norma.
Como es usual, denotamos por $int(C)$ y $\overline{C}$ al interior y a la clausura de C, respectivamente.

Proposición

Sean $C \subset \mathrm{R}^n$ *convexo,* $x \in int(C), y \in C$*; entonces* $[x, y[\subset int(C)$*. Más aun, si* $x \in int(C), y \in \overline{C}$ *entonces* $[x, y[\subset int(C)$.

Proposición

Si C *es convexo, entonces* $int(C)$ *y* $\overline{C}$ *también son conjuntos convexos.*

Note que dado un conjunto convexo C con $int(C) \neq \emptyset$ entonces $aff(C) = \mathbb{R}^n$, no obstante existen conjuntos convexos no vacíos con interior vacío, en tal caso su cápsula afín no es $\mathbb{R}^n$.
En general dado un conjunto convexo C, implementaremos una topología relativa tomando como referencia el conjunto $aff(C)$.

Definición

Dado un conjunto convexo C, se dice que $x \in aff(C)$ es un punto interior relativo de C, si existe $\delta > 0$ tal que

$$(aff(C)) \cap \mathcal{B}_\delta(x) \subset C$$

Note que dado un conjunto convexo C con $int(C) \neq \emptyset$ entonces $aff(C) = \mathbb{R}^n$, no obstante existen conjuntos convexos no vacíos con interior vacío, en tal caso su cápsula afín no es $\mathbb{R}^n$.
En general dado un conjunto convexo C, implementaremos una topología relativa tomando como referencia el conjunto $aff(C)$.

Definición

Dado un conjunto convexo C, se dice que $x \in aff(C)$ es un punto interior relativo de C, si existe $\delta > 0$ tal que

$$(aff(C)) \cap \mathcal{B}_\delta(x) \subset C$$

El conjunto de estos puntos se denomina el interior relativo de C, usualmente denotado por $ri(C)$. Note que si C es convexo y no vacío, entonces $ri(C) \neq \emptyset$.
La frontera relativa de C, es $\overline{C} \setminus ri(C)$.

Definición

Un subconjunto K de $\mathbb{R}^n$ es un cono, si $\forall \alpha > 0, x \in K$ se cumple $\alpha x \in K$.

Son ejemplos de conos: $\{0\}$ y $\mathbb{R}^n$ son conos triviales no vacíos de $\mathbb{R}^n$. Los conjuntos $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 = 0\}$ y $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 \geq 0\}$ son conos en $\mathbb{R}^2$. Todo subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ también es un cono.

Definición

Un subconjunto K de $\mathbb{R}^n$ es un cono, si $\forall \alpha > 0, x \in K$ se cumple $\alpha x \in K$.

Son ejemplos de conos: $\{0\}$ y $\mathbb{R}^n$ son conos triviales no vacíos de $\mathbb{R}^n$. Los conjuntos $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 = 0\}$ y $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 \geq 0\}$ son conos en $\mathbb{R}^2$. Todo subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ también es un cono.

Proposición

(a) *Si C es un cono, entonces $\overline{C}$ e $int(C)$ son también conos.*

(b) *Si $\{C_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ es una familia de conos en $\mathbb{R}^n$, entonces $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} C_i$ también es un cono.*

Definición

Un subconjunto K de $\mathbb{R}^n$ es un cono*, si $\forall \alpha > 0, x \in K$ se cumple $\alpha x \in K$.*

Son ejemplos de conos: $\{0\}$ y $\mathbb{R}^n$ son conos triviales no vacíos de $\mathbb{R}^n$. Los conjuntos $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 = 0\}$ y $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 \geq 0\}$ son conos en $\mathbb{R}^2$. Todo subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ también es un cono.

Proposición

(a) *Si C es un cono, entonces $\overline{C}$ e $int(C)$ son también conos.*

(b) *Si $\{C_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ es una familia de conos en $\mathbb{R}^n$, entonces $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} C_i$ también es un cono.*

Cuando se haga referencia a un cono convexo, naturalmente se trata de un cono que es un conjunto convexo.

Definición

Un subconjunto K de $\mathbb{R}^n$ es un cono, si $\forall \alpha > 0, x \in K$ se cumple $\alpha x \in K$.

Son ejemplos de conos: $\{0\}$ y $\mathbb{R}^n$ son conos triviales no vacíos de $\mathbb{R}^n$. Los conjuntos $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 = 0\}$ y $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 \geq 0\}$ son conos en $\mathbb{R}^2$. Todo subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ también es un cono.

Proposición

(a) *Si C es un cono, entonces $\overline{C}$ e $int(C)$ son también conos.*

(b) *Si $\{C_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ es una familia de conos en $\mathbb{R}^n$, entonces $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} C_i$ también es un cono.*

Cuando se haga referencia a un cono convexo, naturalmente se trata de un cono que es un conjunto convexo.
Son conos convexos:

(i) $\{x \in \mathbb{R}^n : \langle p, x \rangle = 0\}$, $\{x \in \mathbb{R}^n : \langle p, x \rangle \geq 0\}$ y $\{x \in \mathbb{R}^n : \langle p, x \rangle \leq 0\}$.

(ii) Para $p_1, \cdots, p_k$ vectores de $\mathbb{R}^n$, el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : \langle p_i, x \rangle \leq 0, i = 1, \cdots, k\}$.(Este conjunto también puede expresarse en un formato matricial).

(iii) Para $q_1, \cdots, q_m, p_1, \cdots, p_k$ vectores de $\mathbb{R}^n$, el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : \langle q_j, x \rangle = 0, \langle p_i, x \rangle \leq 0, j = 1, \cdots, m; i = 1, \cdots, k\}$.

Son de interés los conos K que son convexos y cerrados, en tal caso $0 \in K$. Cuando $K \cap (-K) = \{0\}$ se dice que K es un cono con punta.

Definición

(a) *Una combinación cónica de los vectores* $x_1, \cdots, x_k$ *es un vector de la forma* $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$ *donde los coeficientes* $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ *son reales no negativos.*

(b) *Para un conjunto no vacío* S*, por* $cone(S)$ *denotamos al conjunto de las combinaciones cónicas de elementos de* S*. Es decir*

$$cone(S) = \mathbb{R}^+(co(S)) = co(\mathbb{R}^+(S))$$

Definición

La cápsula cónica convexa cerrada de un conjunto no vacío S *se define por*

$$\overline{cone}(S) := \overline{cone(S)} = cl\{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i : \alpha_i \geq 0, x_i \in S \text{ para } i = 1, \cdots, m; m \in \mathbb{N} \}$$

(Ejercicio: Sea S un conjunto compacto no vacío tal que $0 \notin S$, pruebe que $\overline{cone}(S) = cone(S)$.)

Definición

Sea C un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^n$, entonces el **conjunto polar** *de C, denotado por C° se define por*

$$C^\circ := \{z \in \mathbb{R}^n : \langle z, x \rangle \leq 1, \ \forall x \in C\}$$

Este conjunto resulta ser un conjunto convexo y cerrado.

Definición

Sea C un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^n$, entonces el **conjunto polar** *de C, denotado por C° se define por*

$$C^\circ := \{z \in \mathbb{R}^n : \langle z, x\rangle \leq 1,\ \forall x \in C\}$$

Este conjunto resulta ser un conjunto convexo y cerrado.

Ejemplos:

(i) Si $C = [0,1] \subset \mathbb{R}^n$ entonces $C^\circ = (-\infty, 1]$

(ii) Si $C = (-\infty\,,\ 1] \subset \mathbb{R}$ entonces $C^\circ = [0,1]$.

(iii) Si $C = \{(1,0); (0,1); (-1,0); (0,-1)\} \subset \mathbb{R}^2$ entonces $C^\circ = [-1,1] \times [-1 \times 1]$.

Definición

Sea C un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^n$, entonces el **conjunto polar** *de C, denotado por C° se define por*

$$C^\circ := \{z \in \mathbb{R}^n : \langle z, x\rangle \leq 1,\ \forall x \in C\}$$

Este conjunto resulta ser un conjunto convexo y cerrado.

Ejemplos:

(i) Si $C = [0,1] \subset \mathbb{R}^n$ entonces $C^\circ = (-\infty, 1]$

(ii) Si $C = (-\infty\,,\,1] \subset \mathbb{R}$ entonces $C^\circ = [0,1]$.

(iii) Si $C = \{(1,0);(0,1);(-1,0);(0,-1)\} \subset \mathbb{R}^2$ entonces $C^\circ = [-1,1] \times [-1 \times 1]$.

En general, se cumple: Para cualquier subconjunto no vacío $C \subset \mathbb{R}^n$:

$$C^\circ = (\overline{C})^\circ = (co(C))^\circ$$

Particularmente si C es un cono de $\mathbb{R}^n$, entonces resulta
$C^\circ = \{z \in \mathbb{R}^n :\ z.x \leq 0,\ \forall x \in C\}$.

En este caso, C° resulta ser un cono convexo cerrado.

Particularmente si C es un cono de $\mathbb{R}^n$, entonces resulta
$C^\circ = \{z \in \mathbb{R}^n : \ z.x \leq 0, \ \forall x \in C\}$.

En este caso, C° resulta ser un cono convexo cerrado.
Ejemplos:

(i) Para $C = \mathbb{R}^n_+$, $C^\circ = \mathbb{R}^n_-$.

(ii) Si $C = \{0\}$ entonces $C^\circ = \mathbb{R}^n$.

(iii) Si H es un hiperplano de normal p de modo que $0 \in H$, entonces $H^\circ = \{tp : \ t \in \mathbb{R}\}$.

(iv) Si $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ : x_1 - x_2 < 0\}$ entonces $C^\circ = \{\cdots\}$

Proposición

(i) *Si* A *y* B *son conos tales que* $A \subset B$ *entonces* $B^\circ \subset A^\circ$.

(ii) *Si* C *es un cono convexo cerrado, entonces* $C = C^{\circ\circ}$.

(iii) *Si* C *es un subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^n$, *entonces* $C^\circ = C^\perp$.

Proposición

(i) *Si* A *y* B *son conos tales que* $A \subset B$ *entonces* $B^\circ \subset A^\circ$.

(ii) *Si* C *es un cono convexo cerrado, entonces* $C = C^{\circ\circ}$.

(iii) *Si* C *es un subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^n$, *entonces* $C^\circ = C^\perp$.

Considere el conjunto $S = \{z_1, \cdots, z_m\}$ y

$K = cone(S) = \{\sum_{j=1}^{m} \alpha_j z_j \ : \alpha_j \geq 0, j = 1, \cdots, m\}$ entonces

$K^\circ = \{y \in \mathbb{R}^n : \ \langle y, z_j \rangle \leq 0 \, , j = 1, \cdots, m\}$.

Antes, requerimos del siguiente lema:

Lema

Sea $D = \{x_0, x_1, \cdots, x_k\}$ una colección de $k+1$ elementos de $\mathbb{R}^n$ con $k > n$, entonces existen $\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_k$ números reales tales que

$$\sum_{i=0}^{k} \beta_i = 0, \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^{k} \beta_i x_i = 0$$

con algún $\beta_i > 0$.

Prueba:
El conjunto $D := \{x_1 - x_0, \cdots, x_k - x_0\}$ tiene más de n elementos, por tanto es linealmente dependiente. En consecuencia, existen números reales $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ no todos nulos tales que

$$\alpha_1(x_1 - x_0)) + \cdots + \alpha_k(x_k - x_0) = 0$$

es decir $(-\alpha_1 - \cdots - \alpha_k)x_0 + \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k = 0$. Basta tomar

$\beta_0 = -\sum_{j=1}^{k} \alpha_j$ y $\beta_i = \alpha_i$ para $i = 1, \cdots, k$.

Teorema

Sea C un conjunto no vacío de $\mathbb{R}^n$, entonces todo elemento de $co(C)$ es una combinación convexa de $n+1$ elementos de C.

Note que el enunciado también puede presentarse en la última parte con "a lo más $n+1$ elementos", pues si hay menos de $n+1$ elementos, se completan con otros con coeficientes cero.

Prueba del teorema:

Sea $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \in co(C)$ con $k > n+1$, podemos asumir que todos los α_i son positivos. Por el lema anterior, existen $\beta_1, \cdots, \beta_k$ con al menos uno de ellos positivo, tales que $\sum_{i=1}^{k} \beta_i x_i = 0$ y $\sum_{i=1}^{k} \beta_i = 0$.

Sea $t^* := \text{máx}\{t \geq 0 : \alpha_i - t\beta_i \geq 0, \text{ para } i = 1, \cdots, k\} = \displaystyle\min_{\beta_j > 0} \frac{\alpha_j}{\beta_j}$ y se definen $\gamma_i := \alpha_i - t^*\beta_i$ para $i = 1, \cdots, k$, los cuales resultan no-negativos.Además, $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \gamma_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i - t^* \sum_{i=1}^{k} \beta_i = 1 - t^*(0) = 1$ y por definición de t^* algún γ_i resulta cero, y $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \gamma_i x_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = x$. Si $k - 1 = n+1$ la prueba ha terminado, caso contrario el proceso se repite.

Un subconjunto S de $\mathbb{R}^n$ es un politopo si es la cápsula convexa de un número finito de puntos de $\mathbb{R}^n$. Si $dim(aff(S)) = r$ entonces se dice que S es un $r-$politopo.

Proposición

Si A y B son politopos y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $A + B$ y αA son politopos.

Prueba de la primera parte:
Supongamos que $A = co\{a_1, \cdots, a_p\}$ y $B = co\{b_1, \cdots, b_q\}$. Si $C := \{a_i + b_j : i = 1, \cdots, p; j = 1, \cdots, q\}$, se prueba que $A + B = co(C)$, pues $C \subset A + B$ y $co(C) \subset A + B$; por otro lado para $x \in A + B$, existen escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ y $\beta_1, \cdots, \beta_q$ no negativos tales que $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1$ y $\sum_{j=1}^{q} \beta_q = 1$, y

$$x = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_p a_p + \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_q b_q = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \alpha_i \beta_j (a_i + b_j)$$

Dados un conjunto no vacío C de $\mathbb{R}^n$ y un número no negativo r, se define el conjunto C_r por

$$(C)_r := \bigcup_{x \in C} \overline{\mathcal{B}}_r(x)$$

Definición

Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de conjuntos compactos no vacíos de $\mathbb{R}^n$, en $\mathcal{C}$ se define una distancia por

$$h(A, B) := \inf\{\lambda > 0 : \; A \subset (B)_\lambda, B \subset (A)_\lambda\} \tag{2}$$

Ejemplo

Sean $A = \overline{\mathcal{B}}_r(a)$ y $B = \overline{\mathcal{B}}_s(b)$, entonces $h(A, B) = \|a - b\| + |r - s|$

Supongamos que $r \leq s$, entonces $B = A + (b - a) + (s - r)U \subset (A)_{\|a-b\|+s-r}$, por tanto $h(A, B) \leq \|a - b\| + s - r$.

La aplicación h define una métrica en $\mathcal{C}$.

Proposición

Para todo $A, B, C \in \mathcal{C}$, h *satisface:*

(a) $h(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$.

(b) $h(A, B) = h(B, A)$.

(c) $h(A, C) \leq h(A, B) + h(B, C)$.

Teorema

Sean A, B, C subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ tales que A es no vacío y acotado, C es no vacío, convexo y cerrado, y satisfacen $A + B \subset A + C$. Entonces $B \subset C$.

Prueba:
Si B es vacío, la conclusión es válida.
Supongamos $b \in B$, entonces existe $a_0 \in A$ tal que $a_0 + b \in A + B \subset A + C$, lo que implica que existen $a_1 \in A, c_1 \in C$ tales que

$$a_0 + b = a_1 + c_1$$

Teorema

Sean A, B, C subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ tales que A es no vacío y acotado, C es no vacío, convexo y cerrado, y satisfacen $A + B \subset A + C$. Entonces $B \subset C$.

Prueba:
Si B es vacío, la conclusión es válida.
Supongamos $b \in B$, entonces existe $a_0 \in A$ tal que $a_0 + b \in A + B \subset A + C$, lo que implica que existen $a_1 \in A, c_1 \in C$ tales que

$$a_0 + b = a_1 + c_1$$

Del mismo modo para $a_1 + b$ existen $a_2 \in A, c_2 \in C$ tales que $a_1 + b = a_2 + c_2$, continuando con este proceso, tenemos que existen $a_1, \cdots, a_k \in A$ y $c_1, \cdots, c_k \in C$ tales que

$$a_0 + b = a_1 + c_1; a_1 + b = a_2 + c_2, \cdots, a_{k-1} + b = a_k + c_k$$

lo que genera:

$a_0 + a_1 + \cdots + a_{k-1} + kb = a_1 + \cdots + a_k + c_1 + \cdots + c_k$

Teorema

Sean A, B, C subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ tales que A es no vacío y acotado, C es no vacío, convexo y cerrado, y satisfacen $A + B \subset A + C$. Entonces $B \subset C$.

Prueba:
Si B es vacío, la conclusión es válida.
Supongamos $b \in B$, entonces existe $a_0 \in A$ tal que $a_0 + b \in A + B \subset A + C$, lo que implica que existen $a_1 \in A, c_1 \in C$ tales que

$$a_0 + b = a_1 + c_1$$

Del mismo modo para $a_1 + b$ existen $a_2 \in A, c_2 \in C$ tales que $a_1 + b = a_2 + c_2$, continuando con este proceso, tenemos que existen $a_1, \cdots, a_k \in A$ y $c_1, \cdots, c_k \in C$ tales que

$$a_0 + b = a_1 + c_1; a_1 + b = a_2 + c_2, \cdots, a_{k-1} + b = a_k + c_k$$

lo que genera:

$a_0 + a_1 + \cdots + a_{k-1} + kb = a_1 + \cdots + a_k + c_1 + \cdots + c_k$y si $x_k := \dfrac{1}{k}(c_1 + \cdots + c_k)$ que resulta ser un elemento de C,

Teorema

Sean A, B, C subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ tales que A es no vacío y acotado, C es no vacío, convexo y cerrado, y satisfacen $A + B \subset A + C$. Entonces $B \subset C$.

Prueba:
Si B es vacío, la conclusión es válida.
Supongamos $b \in B$, entonces existe $a_0 \in A$ tal que $a_0 + b \in A + B \subset A + C$, lo que implica que existen $a_1 \in A, c_1 \in C$ tales que

$$a_0 + b = a_1 + c_1$$

Del mismo modo para $a_1 + b$ existen $a_2 \in A, c_2 \in C$ tales que $a_1 + b = a_2 + c_2$, continuando con este proceso, tenemos que existen $a_1, \cdots, a_k \in A$ y $c_1, \cdots, c_k \in C$ tales que

$$a_0 + b = a_1 + c_1; a_1 + b = a_2 + c_2, \cdots, a_{k-1} + b = a_k + c_k$$

lo que genera:

$a_0 + a_1 + \cdots + a_{k-1} + kb = a_1 + \cdots + a_k + c_1 + \cdots + c_k$y si $x_k := \dfrac{1}{k}(c_1 + \cdots + c_k)$ que resulta ser un elemento de C, entonces

$$\|x_k - b\| = \frac{1}{k}\|a_0 - a_k\|$$

cuando $k \to +\infty$ se concluye que $x_k \to b$, por tanto $b \in C$.

Corolario

Sean A, B, C *subconjuntos de* $\mathbb{R}^n$ *tales que* A *es no vacío y acotado,* B *y* C *no vacíos, convexos y cerrados, y satisfacen* $A + B = A + C$. *Entonces* $B = C$.

Teorema

Sea A un subconjunto compacto y convexo de $\mathbb{R}^n$, y $\epsilon > 0$, entonces existen politopos P y Q en $\mathbb{R}^n$ tales que $P \subset A \subset Q$ y $h(P, A) \leq \epsilon$ y $h(A, Q) \leq \epsilon$.

Prueba:
Fijamos $\epsilon > 0$. Se garantiza que existe un subconjunto finito F de A tal que $F \subset A \subset (F)_\epsilon$. Sea el politopo $P := co(F)$, entonces $P \subset A \subset (P)_\epsilon$ y se verifica $h(A, P) \leq \epsilon$.

[1] U denota la bola unitaria cerrada

Teorema

Sea A un subconjunto compacto y convexo de $\mathbb{R}^n$, y $\epsilon > 0$, entonces existen politopos P y Q en $\mathbb{R}^n$ tales que $P \subset A \subset Q$ y $h(P, A) \leq \epsilon$ y $h(A, Q) \leq \epsilon$.

Prueba:
Fijamos $\epsilon > 0$. Se garantiza que existe un subconjunto finito F de A tal que $F \subset A \subset (F)_\epsilon$. Sea el politopo $P := co(F)$, entonces $P \subset A \subset (P)_\epsilon$ y se verifica $h(A, P) \leq \epsilon$.
Como $(A)_\epsilon$ también es compacto, y convexo no vacío, aplicamos el razonamiento anterior para $(A)_\epsilon$ en lugar de A, lo que significa que existe un politopo Q tal que

$$Q \subset (A)_\epsilon \subset (Q)_\epsilon \tag{3}$$

[1] U denota la bola unitaria cerrada

Teorema

Sea A un subconjunto compacto y convexo de $\mathbb{R}^n$, y $\epsilon > 0$, entonces existen politopos P y Q en $\mathbb{R}^n$ tales que $P \subset A \subset Q$ y $h(P, A) \leq \epsilon$ y $h(A, Q) \leq \epsilon$.

Prueba:
Fijamos $\epsilon > 0$. Se garantiza que existe un subconjunto finito F de A tal que $F \subset A \subset (F)_\epsilon$. Sea el politopo $P := co(F)$, entonces $P \subset A \subset (P)_\epsilon$ y se verifica $h(A, P) \leq \epsilon$.
Como $(A)_\epsilon$ también es compacto, y convexo no vacío, aplicamos el razonamiento anterior para $(A)_\epsilon$ en lugar de A, lo que significa que existe un politopo Q tal que

$$Q \subset (A)_\epsilon \subset (Q)_\epsilon \tag{3}$$

La última inclusión dice que[1]

$$A + \epsilon U \subset Q + \epsilon U$$

[1] U denota la bola unitaria cerrada

Teorema

Sea A un subconjunto compacto y convexo de $\mathbb{R}^n$, y $\epsilon > 0$, entonces existen politopos P y Q en $\mathbb{R}^n$ tales que $P \subset A \subset Q$ y $h(P, A) \leq \epsilon$ y $h(A, Q) \leq \epsilon$.

Prueba:
Fijamos $\epsilon > 0$. Se garantiza que existe un subconjunto finito F de A tal que $F \subset A \subset (F)_\epsilon$. Sea el politopo $P := co(F)$, entonces $P \subset A \subset (P)_\epsilon$ y se verifica $h(A, P) \leq \epsilon$.
Como $(A)_\epsilon$ también es compacto, y convexo no vacío, aplicamos el razonamiento anterior para $(A)_\epsilon$ en lugar de A, lo que significa que existe un politopo Q tal que

$$Q \subset (A)_\epsilon \subset (Q)_\epsilon \tag{3}$$

La última inclusión dice que[1]

$$A + \epsilon U \subset Q + \epsilon U$$

Aplicando la cancelación del teorema previo, se concluye que $A \subset Q$ y por la primera inclusión de (3), se concluye $h(A, Q) \leq \epsilon$.

[1] U denota la bola unitaria cerrada

Problema:

Sea A un subconjunto convexo y compacto no vacío, pruebe que existen sucesiones $\{P_k\}$ y $\{Q_k\}$ de politopos no vacíos tales que $P_k \subset A \subset Q_k$ para $k = 1, 2, \cdots$ y satisfacen $P_k \to A$ y $Q_k \to A$.

(La convergencia se establece en el espacio métrico $(\mathcal{C}, h)$).

Definición

Sea la colección finita $(s_1, \alpha_1), \cdots, (s_m, \alpha_m)$ *de vectores de* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ *con cada* $s_i \neq 0$. *El conjunto*

$$P := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle s_i, x \rangle \leq \alpha_i \,,\, i = 1, \cdots, m\}$$

se denomina un conjunto poliedral convexo y cerrado.

Definición

Sea la colección finita $(s_1, \alpha_1), \cdots, (s_m, \alpha_m)$ *de vectores de* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ *con cada* $s_i \neq 0$. *El conjunto*

$$P := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle s_i, x \rangle \leq \alpha_i \, , \, i = 1, \cdots, m\}$$

se denomina un conjunto poliedral convexo y cerrado.

(Considerando los vectores de $\mathbb{R}^n$, vectores columna)También podemos expresar $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq \alpha\}$,
donde A tiene por filas a los vectores $s_1, \cdots, s_m$, mientras que α tiene componentes $\alpha_1, \cdots,$ y α_m.
En el caso que $\alpha = 0$, resulta que P es un cono poliedral.

Observación

En la definición previa, podemos incorporar relaciones del tipo "$\geq$*.º* $=$ *.*

Definición

Sea C un conjunto convexo, se dice que $x \in C$ es un punto extremo de C si no existen dos puntos diferentes x_1 y x_2 de C tales que $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$.

Equivalentemente: x de C es punto extremo de C, si y solo si, cualquiera de las afirmaciones:

(i) $(x = tx_1 + (1-t)x_2, x_1 \in C, x_2 \in C, 0 < t < 1) \Rightarrow x = x_1 = x_2$.

(ii) $C \backslash \{x\}$ es convexo.

Denotamos por $Ext(C)$ al conjunto de puntos extremos de C.

Definición

Sea C un conjunto convexo, se dice que $x \in C$ es un punto extremo de C si no existen dos puntos diferentes x_1 y x_2 de C tales que $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$.

Equivalentemente: x de C es punto extremo de C, si y solo si, cualquiera de las afirmaciones:

(i) $(x = tx_1 + (1-t)x_2, x_1 \in C, x_2 \in C, 0 < t < 1) \Rightarrow x = x_1 = x_2$.

(ii) $C \backslash \{x\}$ es convexo.

Denotamos por $Ext(C)$ al conjunto de puntos extremos de C.
Ejemplos:
*) $C = \mathbb{R}^n$ no tiene puntos extremos.
*) $C = \mathbb{R}^n_+$ tiene el único punto extremo cero.
*) La bola unitaria cerrada $\overline{B}_1(0)$ es tal que $Ext(\overline{B}_1(0))$ depende de la métrica asignada a $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio

Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una t.l. y $C \subset \mathbb{R}^n$ tal que $Ext(C)$ es no vacío, ¿cuál es la relación entre $T(Ext(C))$ y $Ext(T(C))$? ¿Qué ocurre si T es biyectiva?

Teorema

Si $C \subset \mathbb{R}^n$ es convexo, compacto y no vacío, entonces $Ext(C) \neq \emptyset$

Prueba: Supongamos que $\mathbb{R}^n$ está dotado de la norma euclidiana, la cual satisface la Ley del paralelogramo

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \tag{4}$$

La función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \|x\|^2$ es continua, y por tanto el problema $\max\limits_{x \in C} f(x)$ tiene solución, es decir $\exists\, \overline{x} \in C$ tal que $\|x\|^2 \leq \|\overline{x}^2\|$, $\forall x \in C$. Afirmamos que $\overline{x}$ es punto extremo de C, pues caso contrario, existen x_1 y x_2 elementos diferentes de C tales que $\overline{x} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$. En consecuencia:

$$\begin{aligned} \|\overline{x}\|^2 \quad = \|\tfrac{1}{2}(x_1+x_2)\|^2 \quad &= \tfrac{1}{4}(2(\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2) - \|x_1 - x_2\|^2) \\ &< \tfrac{1}{2}(\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2) \\ &\leq \tfrac{1}{2}(\|\overline{x}\|^2 + \|\overline{x}\|^2) \\ &= \|\overline{x}\|^2 \end{aligned}$$

El presente teorema fue probado para espacios finito dimensional por Minkowski(1911), mientras que para espacios vectoriales localmente convexos por Krein-Milman (1940).

Teorema

Si $\emptyset \neq C \subset \mathbb{R}^n$ *es convexo y compacto, entonces* $C = co(Ext(C)) \neq \emptyset$.

Prueba: Se procede por inducción matemática sobre la dimensión de $\mathbb{R}^n$.
Para $n = 1$, $C = [a, b] \subset \mathbb{R}$, todo elemento de C es combinación convexa de a y $b(Ext(C) = \{a, b\})$.
Supongamos que el teorema es válido para toda dimensión $\leq n$.
Se probará para $n + 1$, si la dimensión de C es menor que $n + 1$, podemos considerar a C como subconjunto de $\mathbb{R}^n$, por lo que podemos asumir que C tiene dimensión $n + 1$ y esto implica que $int(C) \neq \emptyset$.
Sea $x \in C$ y $x_0 \in int(C)$ con $x_0 \neq x$, sea $d = x - x_0$ y la recta $\ell : y = x_0 + td$, $t \in \mathbb{R}$, entonces se garantiza que existen $t_1 > 0$ y $t_2 < 0$ tales que $x_1 = x_0 + t_1 d$ y $x_2 = x_0 + t_2 d$ pertenecen a la Fr(C). Note que $x \in C \cap \ell$ y es combinación convexa de x_1 y x_2. Bastará probar que x_1 y x_2 son combinaciones convexas de elementos de $Ext(C)$.

Fijados x_0 y d vectores de $\mathbb{R}^n$, el conjunto $\{x_0 + td : \ t \geq 0\}$ se denomina una semi-recta (que se degenera cuando $d = 0$). El vector d se denomina dirección de la semi-recta.

Proposición

Si C es un conjunto convexo cerrado no acotado,entonces C contiene una semi-recta. Además, si C contiene alguna semi-recta con dirección d, entonces contiene cada semi-recta con dirección d y punto inicial en C.

Prueba:
Como C no es acotado, existe una sucesión $\{a_k\}$ en C tal que $\|a_k\| \to +\infty$. Podemos asumir que $a_k \neq 0$ y de esta manera la sucesión $t_k := \frac{1}{\|a_k\|} \to 0$ y la sucesión $b_k := \frac{a_k}{\|a_k\|}$ tiene una subsucesión convergente, por decir converge a $d \in S^{n-1}$(esta subsucesión la seguimos denotando por $\{b_k\}$). Fijamos $t > 0$, entonces para k suficientemente grande $0 \leq tt_k \leq 1$ y fijado $a_0 \in C$ se cumple:

$$(1 - tt_k)a_0 + tb_k = (1 - tt_k)a_0 + tt_k a_k \in C$$

Haciendo $k \to +\infty$, se concluye que $a_0 + td \in C$(por la cerradura de C).

Fijados x_0 y d vectores de $\mathbb{R}^n$, el conjunto $\{x_0 + td : \ t \geq 0\}$ se denomina una semi-recta (que se degenera cuando $d = 0$). El vector d se denomina dirección de la semi-recta.

Proposición

Si C es un conjunto convexo cerrado no acotado,entonces C contiene una semi-recta. Además, si C contiene alguna semi-recta con dirección d, entonces contiene cada semi-recta con dirección d y punto inicial en C.

Prueba:
Como C no es acotado, existe una sucesión $\{a_k\}$ en C tal que $\|a_k\| \to +\infty$. Podemos asumir que $a_k \neq 0$ y de esta manera la sucesión $t_k := \frac{1}{\|a_k\|} \to 0$ y la sucesión $b_k := \frac{a_k}{\|a_k\|}$ tiene una subsucesión convergente, por decir converge a $d \in S^{n-1}$(esta subsucesión la seguimos denotando por $\{b_k\}$). Fijamos $t > 0$, entonces para k suficientemente grande $0 \leq tt_k \leq 1$ y fijado $a_0 \in C$ se cumple:

$$(1 - tt_k)a_0 + tb_k = (1 - tt_k)a_0 + tt_k a_k \in C$$

Haciendo $k \to +\infty$, se concluye que $a_0 + td \in C$(por la cerradura de C).
Nota: Si C no es cerrado la última parte de la proposición no necesariamente es cierta, por ejemplo considere $C = \mathbb{R}^2_{++} \cup \{(0,0)\}$.

Definición

Sea C un conjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ y $x \in C$. El conjunto

$$C_\infty(x) := \{d \in \mathbb{R}^n : \ x + td \in C, \forall t \geq 0\} \tag{5}$$

se denomina cono de recesión de C desde el punto x.

Propiedades:

(a) $0 \in C_\infty(x)$ y $C_\infty(x)$ es un cono.

(b) $C_\infty(x)$ es convexo.

(c) $C_\infty(x)$ es cerrado.

De acuerdo a la proposición anterior, tenemos que si C es además cerrado, entonces $C_\infty(x)$ no depende de $x \in C$, lo que da lugar a la siguiente definición.

Definición

Sea C un conjunto convexo cerrado, el cono de recesión o cono asintótico de C está definido por

$$C_\infty = \{\, d \in \mathbb{R}^n : \ x + td \in C, \forall t \geq 0, \ \textit{algún } x \in C \,\}$$

Los elementos de C_∞ se denominan direcciones de recesión de C.

Corolario

Sea C un conjunto convexo no acotado de $\mathbb{R}^n$. Entonces $ri(C)$ contiene al menos una semi-recta. Además, si $cl(C)$ tiene la dirección de recesión d, entonces $ri(C)$ contiene cualquier semi-recta con dirección d y punto inicial en $ri(C)$.

Prueba(de la primera parte): $cl(C)$ es un conjunto convexo no acotado, aplicamos la proposición anterior para garantizar que $cl(C)$ contiene a una semirecta, es decir tiene una dirección de recesión d. Sea $b_0 \in ri(C) = ri(cl(C))$, entonces para todo $t > 0$ se cumple $b_0 + 2td \in cl(C)$. Por un resultado de ri, se concluye que $b_0 + td \in ri(C)$.

Corolario

Sea C un conjunto convexo no acotado de $\mathbb{R}^n$. Entonces $ri(C)$ contiene al menos una semi-recta. Además, si $cl(C)$ tiene la dirección de recesión d, entonces $ri(C)$ contiene cualquier semi-recta con dirección d y punto inicial en $ri(C)$.

Prueba(de la primera parte): $cl(C)$ es un conjunto convexo no acotado, aplicamos la proposición anterior para garantizar que $cl(C)$ contiene a una semirecta, es decir tiene una dirección de recesión d. Sea $b_0 \in ri(C) = ri(cl(C))$, entonces para todo $t > 0$ se cumple $b_0 + 2td \in cl(C)$. Por un resultado de ri, se concluye que $b_0 + td \in ri(C)$.

Ejercicios:

(1) Probar que: Un conjunto C convexo cerrado y no vacío, es compacto $\Leftrightarrow C_\infty = \{0\}$.

(ii) Si C es un conjunto convexo cerrado y $x \in C$, probar $C_\infty = \displaystyle\bigcap_{t>0} \frac{C - x}{t}$.

Definición

Dado un conjunto convexo no vacío C, el conjunto

$$lin(C) := \{d \in \mathbb{R}^n : td + x \in C,\ \text{para } x \in C, t \in \mathbb{R}\}$$

se denomina "subespacio de linealidad de C..^{Es}te conjunto es realmente un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

Proposición

Sea C convexo no vacío y cerrado. Entonces

(a) $lin(C) = \{d \in \mathbb{R}^n : \pm d + C \subset C\} = \{d \in \mathbb{R}^n : d + C = C\}$

(b) $lin(C)$ *es el más grande subespacio vectorial S tal que $S + C = C$.*

(c) $lin(C) = C_\infty \cap (-C_\infty)$.

Ejemplos

(a) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ *es tal que* $lin(C) = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$.

(b) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 1\}$, *entonces* $lin(C) = \ldots.$

Teorema

Sea C un conjunto convexo cerrado no vacío y sea $S = lin(C)$, entonces

$$C = S \oplus (C \cap S^{\perp})$$

y el conjunto convexo $C \cap S^{\perp}$ no contiene rectas.

Ejemplos

(a) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ *es tal que* $lin(C) = \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$.

(b) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 1\}$, *entonces* $lin(C) = \ldots$.

Teorema

Sea C un conjunto convexo cerrado no vacío y sea $S = lin(C)$, entonces

$$C = S \oplus (C \cap S^{\perp})$$

y el conjunto convexo $C \cap S^{\perp}$ no contiene rectas.

Prueba:
Sea $a \in C$, entonces como $\mathbb{R}^n = S \oplus S^{\perp}$, se sigue que existen $b \in S$ y $c \in S^{\perp}$ tales que $a = b + c$ (en forma única), de esto se sigue que $c = a - b = a + (-b) \in C + S = C$, por tanto $c \in C \cap S^{\perp}$ y en consecuencia $C \subset S \oplus (C \cap S^{\perp})$.

Definición

Dado un conjunto finto de vectores $\{a^1, \cdots, a^m\}$, *el cono*

$$cone(\{a^1, \cdots, a^m\}) := \{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a^i : \lambda_1 \geq 0, \cdots, \lambda_m \geq 0\}$$

se denomina un cono finitamente generado por $\{a^1, \cdots, a^m\}$*(también denominado cono poliedral).*

Proposición

Un cono convexo, es finitamente generado, si y solo si, es poliedral.

Dem: $(\rightarrow)$ Suponga que C es un cono convexo finitamente generado, por decir $C = cone(\{a^1, \cdots, a^m\})$, entonces el politopo $co\{0, a^1, \cdots, a^m\}$ puede escribirse como intersección de una colección finita de semiespacios cerrados $S_1, \cdots, S_k$.
Sea $A := \bigcap_{i, 0 \in Fr(S_i)} S_i$. Se prueba que $C = A$.

Teorema

Un conjunto de $\mathbb{R}^n$ es poliedral si, y solo si, puede expresarse como una suma Minkowski de un politopo y un cono convexo finitamente generado.

Esto signfica que si P es un conjunto poliedral, entonces existen conjuntos finitos de vectores A y B tales que

$$P = co(A) + cone(B).$$

(A es el conjunto de puntos extremos de P y B es un subconjunto de $P_{\infty.}$).

Teorema

Un conjunto de $\mathbb{R}^n$ es poliedral si, y solo si, puede expresarse como una suma Minkowski de un politopo y un cono convexo finitamente generado.

Esto signfica que si P es un conjunto poliedral, entonces existen conjuntos finitos de vectores A y B tales que

$$P = co(A) + cone(B).$$

(A es el conjunto de puntos extremos de P y B es un subconjunto de P_{∞}.).
Si $A = \{a^1, \cdots, a^m\}$ y $B = \{d^1, \cdots, d^k\}$, entonces

$$P = \{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a^i + \sum_{j=1}^{k} \delta_j d^j : \lambda_i \geq 0, \delta_j \geq 0, \lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1\}$$

Proposición

Sea P un conjunto poliedral no vacío y sin rectas, y $f : P \to \mathbb{R}$ una función lineal que es acotada superiormente en P, entonces el problema

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & f(x) \\ & x \in P \end{array}$$

se resuelve en un punto extremo de P.

Proposición

Sea P un conjunto poliedral no vacío y sin rectas, y $f : P \to \mathbb{R}$ una función lineal que es acotada superiormente en P, entonces el problema

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & f(x) \\ & x \in P \end{array}$$

se resuelve en un punto extremo de P.
Dem:

La función proyección

Dado un espacio métrico (X, d) y un subconjunto cerrado y no vacío C de X, se define la distancia de un punto $x \in X$ al conjunto C por

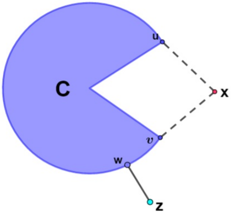
$$d(x, C) := \min\{d(x, y) \ : \ y \in C\} \tag{6}$$

Esto genera una función $d_C : X \to [0\ ,\ +\infty)$ mediante $d_C(x) := d(x, C)$. Esta función se denomina " función distancia al conjunto C"

Dado un espacio métrico (X, d) y un subconjunto cerrado y no vacío C de X, se define la distancia de un punto $x \in X$ al conjunto C por

$$d(x, C) := \min\{d(x, y) \ : \ y \in C\} \tag{6}$$

Esto genera una función $d_C : X \to [0 \ , \ +\infty)$ mediante $d_C(x) := d(x, C)$. Esta función se denomina " función distancia al conjunto C"
El conjunto de puntos de C donde se alcanza el mínimo de (6), se denomina "Proyección de x en C ".

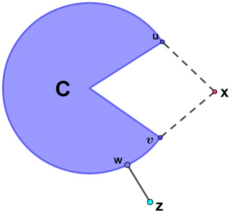


$P_C(x) = \{u, \ v\}$
$P_C(z) = \{ \ w \ \}$

Dado un espacio métrico (X, d) y un subconjunto cerrado y no vacío C de X, se define la distancia de un punto $x \in X$ al conjunto C por

$$d(x, C) := \min\{d(x, y) \ : \ y \in C\} \tag{6}$$

Esto genera una función $d_C : X \to [0\ ,\ +\infty)$ mediante $d_C(x) := d(x, C)$. Esta función se denomina " función distancia al conjunto C"
El conjunto de puntos de C donde se alcanza el mínimo de (6), se denomina "Proyección de x en C ".



$P_C(x) = \{u,\ v\}$
$P_C(z) = \{\ w\ \}$

Se ha visto en el curso de Fundamentos de Análisis, que en un Espacio de Hilbert X (como es el caso de $\mathbb{R}^n$ con la norma euclidiana), dado un conjunto convexo cerrado no vacío C, el conjunto $P_C(x)$ es unitario y esto da lugar a la función Proyección en C.

Recuerde que :

(i) $d(x, C) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{C}$.

(ii) Si C es cerrado no vacío y $x \notin C$ entonces $d(x, C) > 0$.