CLASE 01

Esperanza condicional

Fijemos $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y las v.a's

$X: \Omega \to \mathbb{R}$ medibles.

Recordemos,

$$\sigma(Z) = \{ Z^{-1}(A) : A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \}$$

$$= \{ \{ Z \in A \} : A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{cuestionario de preguntas} \\ \text{sobre } Z \end{array} \right\}.$$

$$\sigma(Z, W) = \{ \{ (Z, W) \in A \} : A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} \}$$

$$= \sigma(\sigma(Z) \cup \sigma(W)) \quad \underline{(\text{EJER})}$$

$$=: \sigma(Z) \vee \sigma(W).$$

Además, dado $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, sub σ-álgebra:

$\sigma(Z) \subseteq \mathcal{G} \iff$ Con la información $\mathcal{G}$, po "intuición" demos responder Todo sobre Z, "$Z \in \mathcal{G}$".

$\Leftrightarrow$ Z es $\mathcal{G}$-medible

Obs: Si $Z_1, Z_2, \ldots$ son $\mathcal{G}$-medibles, entonces $\limsup Z_n$ y $\liminf Z_n$ son $\mathcal{G}$-medibles

Lema Sean Z, W integrables. (EJER.)

$$Z \underset{a.s}{\leq} W \Leftrightarrow \int_A Z \leq \int_A W, \forall A \in \mathcal{F}.$$

Obs:

- $\underbrace{\int_A Z = \int_A W, \forall A \in \mathcal{F}}_{\text{Basta } A \in \sigma(Z,W).} \Leftrightarrow Z \overset{as}{=} W.$

Teorema: Dada X integrable y $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ sub σ-álg, existe Z va tal que:

1) Z es $\mathcal{G}$-medible.

2) $\int_A Z = \int_A X, \forall A \in \mathcal{G}.$

INSPIRATION HUT - 0.6CM GRID

Adicionalmente, si W integrable cumple 1) y 2), entonces $W \overset{a.s}{=} Z$.

Def Dado X integrable y $\mathcal{G}$ sub σ-alg de $\mathcal{F}$, definimos $E[X|\mathcal{G}]$ como la clase de todas las variables cumpliendo con 1) y 2) del Teorema previo

También diremos "Z es versión de $E[X|\mathcal{G}]$" si Z cumple 1) y 2).

Obs: Es fácil verificar que:

- X es $\mathcal{G}$-medible $\Rightarrow E[X|\mathcal{G}] \text{ "="} X$
- $X \perp \mathcal{G}$ ($\sigma(X)$ y $\mathcal{G}$ son independientes)

  $\Rightarrow E[X|\mathcal{G}] \overset{as}{=} E[X]$
- X, Y son integrables, $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow$

  $E[X+Y|\mathcal{G}] \overset{as}{=} E[X|\mathcal{G}] + E[Y|\mathcal{G}]$,

  $E[\alpha X|\mathcal{G}] \overset{as}{=} \alpha E[X|\mathcal{G}]$
- X, Y integrables y $X \underset{as}{\leq} Y \Rightarrow$

  $E[X|\mathcal{G}] \leq E[Y|\mathcal{G}]$.

- Para X integrable, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$, sub σ-álgebras, vale $E[E[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] \overset{a.s}{=} E[X|\mathcal{H}]$.
(propiedad de la torre)

Teorema de la convergencia monótona:

Suponga X_n, $n \in \mathbb{N}$ son va's tal que $0 \overset{a.s}{\leq} X_1 \overset{a.s}{\leq} X_2 \overset{a.s}{\leq} \cdots$ y X una v.a tal que $X_n \overset{a.s}{\longrightarrow} X$. Fijemos $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, sub σ-álgebra

Si X es integrable (X_n integrable $\forall n$), entonces $E[X_n|\mathcal{G}] \overset{a.s}{\longrightarrow} E[X|\mathcal{G}]$.

Proof:

Sabemos $X_n \uparrow X$. Fije $A \in \mathcal{G}$

$\Rightarrow 0 \leq X_n 1_A \uparrow X 1_A$

$\overset{TCM}{\Rightarrow} \int X_n 1_A \longrightarrow \int X 1_A$

Sean Z_n, Z versión de $E[X_n|\mathcal{G}]$ y $E[X|\mathcal{G}]$, respectivamente

Por otro lado, $Z_1 \overset{a.s}{\leq} Z_2 \overset{a.s}{\leq} \cdots$.

Así, $\Omega^* := \bigcap_{k\geq 1} \{Z_k \leq Z_{k+1}\}$ Tiene probabilidad 1.

Luego, podemos definir $\eta := \begin{cases} \lim Z_n, & \text{sobre } \Omega^* \\ 0, & \text{sobre } \Omega \setminus \Omega^* \end{cases}$

$\eta : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ es $\mathcal{G}$-medible.

Para $A \in \mathcal{G}$: $Z_n \cdot 1_A \uparrow \eta \cdot 1_A$

$\Rightarrow \int Z_n \cdot 1_A \to \int \eta \cdot 1_A$.

Como η y Z son $\mathcal{G}$-medibles : $Z \overset{as}{=} \eta$. ✓

(EJER) : Sean $X_n, n \in \mathbb{N}$, v.a's y X v.a Tales que $X_n \uparrow X$ a.s.. Fije $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ sub. σ-álg

Si X_1 y X son integrables, entonces :

1) X_n es integrable, $\forall n$.

2) $E[X_n | \mathcal{G}] \xrightarrow{a.s} E[X | \mathcal{G}]$

Teorema de convergencia dominada

Fijemos $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, sub. σ-álgebra

Sean X_n va's y Z integrable Tales que $|X_n| \leq Z$ a.s.

Si $X_n \xrightarrow{as} X$, entonces (X integrable y X_n integrable $\forall n$) $E[X_n|\mathcal{G}] \xrightarrow{as} E[X|\mathcal{G}]$.

Proof:

Haciendo $n \to \infty$: $|X| \leq Z$, a.s

Tenemos $|E[X_n|\mathcal{G}] - E[X|\mathcal{G}]| =$

$|E[X_n - X|\mathcal{G}]| \underset{as}{\leq} E[|X_n - X| \,|\mathcal{G}]$

EJER: U integrable $\Rightarrow |E[U|\mathcal{G}]| \underset{as}{\leq} E[|U||\mathcal{G}]$

Definamos $U_N := \sup\{|X_n - X_m| : n, m \geq N\}$,

medible por ser supremo de cantidad enumerable de medibles.

Como $X_n \xrightarrow{as} X \in \mathbb{R}$: $U_N \downarrow 0$ as

$\Rightarrow E[U_N|\mathcal{G}] \xrightarrow{as} 0$.

T.C.M E.C

Siempre que $N \leq n$: $|X_n - X| \leq U_N$.

$\Rightarrow E[|X_n - X| \,|\mathcal{G}] \leq E[U_N|\mathcal{G}]$.

Con N fijo, haciendo $n \to \infty$:

$$\limsup E[|X_n - X| \mid \mathcal{G}] \leq E[U_N \mid \mathcal{G}]$$

Haciendo $N \to \infty$:

$$\limsup \underbrace{E[|X_n - X| \mid \mathcal{G}]}_{\heartsuit} \leq 0 \quad a.s.$$

$$0 \leq \liminf \heartsuit \leq \limsup \heartsuit.$$

$$\therefore E[|X_n - X| \mid \mathcal{G}] \xrightarrow{a.s} 0.$$

Libros:

- A Course in Prob theory (K.L Chung)
- Prob. theory and Examples (Durrett)
- Measure theory, Prob and Sto. Pro (Le Gall).

CLASE 02

Más sobre esperanza condicional

Fijado $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Lema Sean X integrable, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ sub. σ-áls. y ξ limitada ($\exists M > 0$ tq $|\xi| \underset{a.s}{\leq} M$) $\mathcal{G}$-medible. then $E[X\xi \mid \mathcal{G}] \overset{a.s}{=} \xi E[X \mid \mathcal{G}]$.

Proof:

Comenzamos con ξ simple y procedemos de manera usual.

EJER: Para $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ medible positiva, también podemos definir $E[X \mid \mathcal{G}]$ como la clase (identificadas por $\overset{a.s}{=}$) de v.a en $\overline{\mathbb{R}}$, positivas.

Lema (Jensen): Sea X integrable, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ sub. σ-alg y $\varphi : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ convexa. Then, $\varphi(E[X \mid \mathcal{G}]) \leq E[\varphi(X) \mid \mathcal{G}]$ a.s.

Proof:

Defina $\Lambda_\varphi := \{ T_{a,b} : T_{a,b}(x) \leq \varphi(x), \forall x \in \mathbb{R} \}$, donde $T_{a,b} := a(\cdot) + b$; $a, b \in \mathbb{Q}$.

Como φ es convexa, Λ_φ es no vacío

Más aún, $\varphi(x) = \sup\limits_{T \in \Lambda_\varphi} T(x)$.

Luego, para cada $T \in \Lambda_\varphi$: $T(x) \leq \varphi(x)$

$\Rightarrow \underbrace{E[T(x) \mid \mathcal{G}]} \overset{as}{\leq} E[\varphi(x) \mid \mathcal{G}] =: W$

$T(\underbrace{E[x \mid \mathcal{G}]}_{Z}) \overset{as}{\leq} W$, por ser T ope lineal

Es decir, existe medible Ω_T con proba. 1 en el cual $W(\omega) \geq T(Z(\omega))$, $\forall \omega \in \Omega_T$.

Así, tenemos una cantidad enumerable de medibles Ω_T, $\forall T \in \Lambda_\varphi$, con proba. 1.

Considere $\omega \in \bigcap\limits_{T \in \Lambda_\varphi} \Omega_T =: \Omega^*$, $P(\Omega^*) = 1$.

$\Rightarrow W(\omega) \geq T(Z(\omega))$, $\forall T \in \Lambda_\varphi$.

$\Rightarrow W(\omega) \geq \left(\sup\limits_{T \in \Lambda_\varphi} T\right)(Z(\omega)) = \varphi(Z(\omega))$ ✓

Martingalas (introducción)

Def: Dada $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y $M_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ (puede variar), y

$\{\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}$, sub σ-álgebras.

$\hookrightarrow$ filtración

Es decir, $(M_n, \mathcal{G}_n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, es una martingala si:

1) M_n es $\mathcal{G}_n$-medible ((M_n) está adaptada a $(\mathcal{G}_n)$), $\forall n$

2) M_n es integrable, $\forall n$.

3) $\forall n, m$ tq $1 \leq n < m$, se tiene

$$M_n = E[M_m \mid \mathcal{G}_n].$$

Obs: Para verificar 3), basta se cumpla $M_n = E[M_{n+1} \mid \mathcal{G}_n]$ $\forall n$. En efecto,

$$E[M_m \mid \mathcal{G}_n] = E[\cdots E\{\underbrace{\underbrace{E[M_m \mid \mathcal{G}_{m-1}]}_{M_{m-1}} \mid \mathcal{G}_{m-2}\}}_{M_{m-2}} \cdots \mid \mathcal{G}_n]$$

$$= M_n.$$

Además, recordemos que $M_n = E[M_m \mid \mathcal{G}_n]$ equivale a:

$\forall A \in \mathcal{G}_n$: $E[M_n 1_A] = E[M_m 1_A]$, o sea,

$$E[(M_m - M_n) \cdot 1_A] = 0, \ \forall A \in \mathcal{G}_n.$$

Esto podemos denotarlo como $M_m - M_n \perp \mathcal{G}_n$.

<u>Ejemplos</u>: Si $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\xi_n\ \Omega \to \mathbb{R}$, $n=1,2,\dots$ son independientes, integrables y de media cero, entonces:

- $S_n := \sum_{i=1}^{n} \xi_i$, $n=1,2,\dots$
- $\mathcal{G}_n := \sigma(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$

$(S_n, \mathcal{G}_n)$ es una martingala En efecto, para $A \in \mathcal{G}_n$:

$$E[(S_m - S_n)\cdot 1_A] = E[\underbrace{\sum_{j=n+1}^{m} \xi_j}_{\text{independiente de } \mathcal{G}_n} \cdot 1_A]$$

$= E[\sum_{j=n+1}^{m} \xi_j] E[1_A] = 0 \cdot E[1_A]$, pues cada ξ_j tiene media cero.

Si por ejemplo $\xi_j \to \begin{cases} +1, & \text{con prob } 1/2 \\ -1, & \text{"} \quad \text{"} \end{cases}$,

entonces $S_n := \sum_{j=1}^{n} \xi_j$, $n \geq 1$, es una martingala

Además, $P\{S_n \text{ converja a un real}\} = 0$.

De hecho, $P\{\limsup S_n = +\infty\} = 1 = P(\liminf S_n = -\infty\}$

$\therefore P\{\limsup S_n = +\infty, \liminf S_n = -\infty\} = 1.$

EJER: Si $\xi_1, \xi_2, \ldots$ indepen integrables, de $E[\xi_j] = 1, \forall j$, entonces:

- $M_n := \xi_1 \cdot (\ldots) \cdot \xi_n$
- $\mathcal{G}_n := \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$

$\Rightarrow (M_n, \mathcal{G}_n)$ es una martingala.

Ejemplo: Fijemos una medida de probabilidad μ en $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Branching process, o, Proceso de Galton-Watson.

Fijemos una familia de variables $\{\xi_{jk} : j = 1, 2, \ldots, k = 1, 2, \ldots\}$ definidas sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, independientes, con $\xi_{jk} \sim \mu, \forall j, k$. Ahora, definimos el proceso:

- $Z_0 = 1$
- $Z_1 = \xi_{1,1}$
- $Z_2 = \sum_{k=1}^{Z_1} \xi_{2k}$ (o, $Z_2 = 0$ cuando $Z_1 = 0$)
- $Z_3 = \sum_{k=1}^{Z_2} \xi_{3k}$ (o, $Z_3 = 0$ cuando $Z_2 = 0$)

μ se denomina offspring distribution.

Vemos que $\{Z_1 = 0\} \subseteq \{Z_2 = 0\} \subseteq \{Z_3 = 0\} \subseteq \cdots$.

Así, $\{Z_n = 0\} \uparrow \{\text{extinción}\}$.

Problema: $P(\{\text{extinción}\}) = ?$

Defina $m = \sum_{i=0}^{\infty} i\mu(i)$.

EJER:

- $m < 1 \Rightarrow P\{\text{extinción}\} = 1$.
- $m > 1 \Rightarrow P\{\text{extinción}\} < 1$.
- $m = 1 \Rightarrow (Z_n)$ es martingala.

$\blacksquare$

CLASE 03

Submartingala y Supermartingala

Respecto a un e.p $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ filtrado, $(\mathcal{G}_n)_n$.

Def: Decimos que $M_n : \Omega \to \mathbb{R}$, v.a's, $n = 0, 1, \dots$, es una submartingala (supermartingala) si:

1) $(M_n)_n$ es adaptada a $(\mathcal{G}_n)_n$
2) M_n es integrable $\forall n$.
3) $\forall\, 0 \leq n < m$: $E[M_n - M_m \mid \mathcal{G}] \overset{a.s.}{\geq} 0$ $(\leq)$

(EJER.): En la def previa, podemos cambiar 3) por $\int_A M_n \leq \int_A M_m$, $\forall A \in \mathcal{G}_n$; $\forall\, 0 \leq n < m$.

También basta 3) con periodos consecutivos, es decir, $m = n+1$.

Obs: Es claro que:

- (M_n) es superma. $\iff$ (M_n) es subma.
- (M_n) es mart. $\iff$ (M_n) subma y superma.

- Si (X_n) y (Y_n) subma (superma), entonces $Z_n := X_n + Y_n$ es subma (superma).

- Si (M_n) y (N_n) son martingalas, then $(\alpha M_n + \beta N_n)$ es martingala, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- Si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ es $\mathcal{G}_0$-medible e integrable, then $M_n := X$, $\forall n$ es una martin.

- Para (X_n) sub (super) mart:

$$E[X_0] \leq (\geq) E[X_1] \leq (\geq) E[X_2] \leq (\geq) \cdots$$

Prop Sea (M_n) una martingala y $\varphi : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ convexa tal que $X_n := \varphi(M_n)$ es integrable $\forall n$, then (X_n) es submart.

Proof. (EJER. usando Jensen)

Prop: Si (X_n) es submartingala y $\varphi\ \mathbb{R} \to [0, \infty[$ es convexa y no decreciente, tal que $Y_n := \varphi(X_n)$ es integrable, $\forall n$, entonces (Y_n) es una submartingala.

Ejemplos: • (X_n) es subm $\Rightarrow X_n^+ := \max\{X_n, 0\}$ es submartingala.

- **Valor de un portafolio:** Supongamos que

M_n es el precio de d stocks en el instante n.

Ahora, usemos Γ_n: Posiciones que adquieres en el instante $n-1$ (y que tiene consecuencia en n), respecto al # unidades de stocks.

Por ejemplo:

$$\cdots \quad M_3 \xrightarrow{\Gamma_4 = +2} M_4 \xrightarrow{\Gamma_5 = -3} M_5 \quad \cdots$$

El valor de (Γ_n) es el proceso

$V_0^{\Gamma} := \Gamma_1 \cdot M_0$ (dinero que me cuesta adquirir la posición Γ_1)

$V_n^{\Gamma} = \Gamma_n \cdot M_n$, $n \geq 1$ (dinero que tengo por haber adquirido la posición Γ_n)

Entonces, si implemento (Γ_n), ganaré hasta $n = N$:

$$V_N^{\Gamma} - V_0^{\Gamma} = \sum_{k=1}^{N} (V_k^{\Gamma} - V_{k-1}^{\Gamma}), \text{ donde}$$

$$V_k^{\Gamma} - V_{k-1}^{\Gamma} = \underbrace{\Gamma_k \cdot (M_k - M_{k-1})}_{\substack{\text{ganancia por} \\ \text{la variación del} \\ \text{precio del stock.}}} + \underbrace{M_{k-1} \cdot (\Gamma_k - \Gamma_{k-1})}_{\substack{\text{dinero que} \\ \text{inyectamos} \\ \text{en } k-1.}}$$

Entonces, si la estrategia (Γ_n) es autofinanciada (i.e., $M_{k-1}\cdot\Gamma_k = M_{k-1}\cdot\Gamma_{k-1}$, $\forall k$), then

$$V_N^{\Gamma} = V_0^{\Gamma} + \sum_{k=1}^{N} \Gamma_k\cdot(M_k - M_{k-1}) .$$

Def: Dados • $M_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $n=0,1,$,

• $\Gamma_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $n=1,2,\ldots$; $M_{n-1} \xrightarrow[\Gamma_n]{} M_n$,

denotemos $\int_0^N \Gamma dM := \sum_{k=1}^{N} \Gamma_k\cdot(M_k - M_{k-1})$, y,

si (Γ_n) es autofinanciado: $V_N^{\Gamma} = V_0^{\Gamma} + \int_0^N \Gamma dM$.

Integración y martingalas

Prop: Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $(\mathcal{G}_n)$ e.p. filtrado y

• $M_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $n=0,1,2,\ldots$ d martingalas.

• $\Gamma_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $n=1,2,\ldots$ es predecible (i.e., Γ_n es $\mathcal{G}_{n-1}$-medible, $\forall n=1,2,\ldots$) y acotado.

Entonces, el proceso $\int_0^n \Gamma dM : \Omega \to \mathbb{R}$, $n=1,2,\ldots$ es una martingala.

Proof: $E\left[\int_0^n \Gamma dM - \int_0^{n-1} \Gamma dM \mid \mathcal{G}_{n-1}\right]$

$= E\left[\Gamma_n \cdot (M_n - M_{n-1}) \mid \mathcal{G}_{n-1}\right]$

$= \Gamma_n \cdot E\left[M_n - M_{n-1} \mid \mathcal{G}_{n-1}\right] = 0$, pues

Γ_n es predecible y M_n martingala.

Prop: Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $(\mathcal{G}_n)$ ep filtrado y

- $X_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ submartingala (super)
- $\Gamma_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $n = 1, 2, \ldots$ predecible y acotado.

Entonces, $\int_0^n \Gamma dX : \Omega \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ resulta

submartingala (super) si $\Gamma_n \geq 0$, $\forall n$ (por coordenadas).

Proof.

$E\left[\int_0^n \Gamma dx - \int_0^{n-1} \Gamma dx \mid \mathcal{G}_{n-1}\right] = E\left[\Gamma_n \cdot (X_n - X_{n-1}) \mid \mathcal{G}_{n-1}\right]$

$= \underbrace{\Gamma_n}_{\geq 0} \cdot \underbrace{E\left[X_n - X_{n-1} \mid \mathcal{G}_{n-1}\right]}_{\geq 0} \geq 0$.

■

CLASE 04

$M_n: \Omega \to \mathbb{R}^d$, $\Gamma_n\ \Omega \to \mathbb{R}^d$, $V_n^\Gamma = V_0^\Gamma + \int_0^n \Gamma \, dM$.

Cuando $M_n = (1, S_n)$, entonces $\Gamma_{n+1} \cdot M_n = \Gamma_n \cdot M_n$ (caso autofinanciado) y $V_n^\Gamma = V_0^\Gamma + \int_0^n \beta \, dS$, donde $\Gamma_n = (\alpha_n, \beta_n)$.

Se tiene $\int_0^n \beta \, dS := \sum_{k=1}^n \beta_k (S_k - S_{k-1})$, donde β_k es $\mathcal{G}_{k-1}$-medible (la variable β se escoge antes de la variación de S).

Recordemos, dados $M_n\ \Omega \to \mathbb{R}$, $n = 0, 1, \ldots$, $\Gamma_n\ \Omega \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, denotamos

$\int_0^n \Gamma \, dM := \sum_{k=1}^n \Gamma_k (M_k - M_{k-1})$. Vimos que

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ (M_n) \text{ es martingala} \\ \bullet\ (\Gamma_n) \text{ es acotado y predecible } (\Gamma_k \text{ es } \mathcal{G}_{k-1}\text{-medible}) \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\int_0^n \Gamma \, dM\right) \text{ es martingala.}$$

EJER: Si $\forall (\Gamma_n)$ predecible acotado se tiene $E[\int_0^n \Gamma \, dM] = 0$, $\forall n$, entonces (M_n) es martingala.

(esta propiedad caracteriza a las martingalas.

También vimos que:

- (X_n) es sub (super) martingala
- (V_n) es acotado, predecible y positivo (≥ 0),

entonces $\left(\int_0^n V\,dX\right)$ es sub (super) martingala.

Teorema de convergencia de martingala

Note que para procesos con liminf y limsup; α, β, respectivamente, al ser compuestos con $\varphi(x) = \left(\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^+$ los liminf y limsup se convierten en 0 y 1, respectivamente.

Lema Sea (X_n) una submart. positiva, vale

$$E\begin{bmatrix} \#\text{ upcrossings de } X, \\ \text{entre } 0 \text{ y } 1, \text{ hasta } n \end{bmatrix} \leq E[X_n - X_0].$$

Proof:

Definamos $\tau_0 = 0$.

$\tau_1 := \min\{n \geq \tau_0 : X_n = 0\}$,

$\tau_2 := \min\{n \geq \tau_1 \quad X_n \geq 1\}$,

$\tau_3 := \min\{n \geq \tau_2 : X_n = 0\}, \ldots$

(τ_n definido como ∞, de no existir mínimo).

Como (X_n) es $(\mathcal{G}_n)$-adaptada, entonces:
$\forall k : \{\tau_k \leq n\} \in \mathcal{G}_n, \forall n.$

Defino ahora: $$r_{n+1} := \begin{cases} 0, & \tau_0 \leq n < \tau_1 \\ 1, & \tau_1 \leq n < \tau_2 \\ 0, & \tau_2 \leq n < \tau_3 \\ \vdots & \vdots \end{cases}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Note $\{\tau_k \leq n < \tau_{k+1}\} = \{\tau_k \leq n\} \cap \{\tau_{k+1} \leq n\}^c$,
intersección de elementos de $\mathcal{G}_n$, $\forall k = 0, 1, \ldots, \forall n$.

$\therefore$ r_{n+1} es $\mathcal{G}_n$-medible.

Sea $U_n :=$ #upcrossings entre 0 y 1, hasta n.

$\Rightarrow U_n \leq \int_0^n r \, dX, \forall n.$

Pero, $X_n - X_0 = \int_0^n r \, dX + \int_0^n (1-r) \, dX$.

$\Rightarrow E[X_n - X_0] = E[\int_0^n r \, dX] + E[\int_0^n (1-r) \, dX]$.

$E[\int_0^n (1-r) \, dX] \geq E[\int_0^0 (1-r) \, dX] = 0.$

$\Rightarrow E[U_n] \leq E[\int_0^n (1-r) \, dX] \leq E[X_n - X_0], \forall n.$

INSPIRATION HUT - 0.5CM GRID

Prop: Para (X_n) submar., $\alpha < \beta$ reales, Tenemos

$$(\beta - \alpha) E[U_n^{\alpha,\beta}] \leq E[(X_n - \alpha)^+] - E[(X_0 - \alpha)^+], \forall n.$$

Proof: Use lema para $\tilde{X}_n := \left(\frac{X_n - \alpha}{\alpha - \beta}\right)^+$.

$\blacksquare$

CLASE 06

Integrabilidad uniforme y convergencia

Recordemos: (X_n) y X, v.a's

Algunos tipos de convergencia:

$$\begin{tikzcd}
X_n \xrightarrow{as} X \arrow[rr, Rightarrow, "\text{“TCD”}"] \arrow[dr] & & X_n \xrightarrow{L^1} X \arrow[dl] \\
& X_n \xrightarrow{prob} X \arrow[ul, Rightarrow, bend left, "\text{“}"] \arrow[ur, Rightarrow, bend right, "\text{“}"'] &
\end{tikzcd}$$

¿Qué le falta para regresar?

$\Rightarrow \exists\, X_{n_k}$ tq $X_{n_k} \xrightarrow{as} X$.

Sabemos por el TCD que

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ X_n \xrightarrow{as} X \\ \bullet\ |X_n| \leq Z \text{ integrable} \end{array}\right\} \Rightarrow X_n \xrightarrow{L^1} X.$$

Pidiendo menos para ambas hipótesis, se logra:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ X_n \xrightarrow{prob} X \\ \bullet\ \text{Integrable uniforme} \\ \quad \text{de } (X_n) \end{array}\right\} \Rightarrow X_n \xrightarrow{L_1} X.$$

Def: Dada $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, diremos que es uniformemente integrable cuando

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} \int_{\{|X_\lambda|>t\}} |X_\lambda| \longrightarrow 0, \text{ cuando } t\to+\infty.$$

Obs:

- Si Λ es finito y cada X_λ es integrable, entonces $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es uni integrable.
- Si $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, $(Y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ satisfacen $|X_\lambda|\leq|Y_\lambda|$, $\forall\lambda$; entonces, si $(Y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es uni. inte $\Rightarrow (X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es uni. int.
- Si $|X_\lambda|\leq Z$ integrable, $\forall\lambda\in\Lambda$, entonces $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es unif. integrable.
- Que (X_λ) sea uni inte depende de ley de X_λ, $\forall\lambda\in\Lambda$.

Prop: (X_λ) es uni. inte. si y solo si se cumplen

A) $E[|X_\lambda|]\leq C$, $\forall\lambda\in\Lambda$

B) $\forall \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ Tal que:

$$P(A) < \delta \Rightarrow \int_A |X_\lambda| < \epsilon \,, \ \forall \lambda \in \Lambda .$$

<u>Proof:</u>

Suponsamos que (X_λ) es unif. integrable.

$$E[|X_\lambda|] = \int_{\{|X_\lambda| \geq t\}} |X_\lambda| + \int_{\{|X_\lambda| < t\}} |X_\lambda| \,, \ \forall t \in \mathbb{R} .$$

Como $\sup_\lambda \int_{\{|X_\lambda| > t\}} |X_\lambda| \to 0, \ t \to +\infty$,

podemos desir t_* suficientemente grande de modo que $\sup_\lambda \int_{\{|X_\lambda| > t_*\}} |X_\lambda| \leq 1$.

Luego, para todo $\lambda \in \Lambda$:

- $\int_{\{|X_\lambda| \leq t_*\}} |X_\lambda| \leq t_*$
- $\int_{\{|X_\lambda| > t_*\}} |X_\lambda| \leq 1$

$\Rightarrow E[|X_\lambda|] \leq 1 + t_*$. ✓

Ahora, fijemos $\epsilon > 0$. Elegimos un t tal que

$$\int_{\{|X_\lambda| > t\}} |X_\lambda| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

Luego, elegimos $\delta = \frac{\epsilon}{2t}$. Así, para $\lambda \in \Lambda$:

$$\int_A |X_\lambda| = \int_{A \cap \{|X_\lambda| > t\}} |X_\lambda| + \int_{A \cap \{|X_\lambda| \leq t\}} |X_\lambda|$$

$$\leq \int_{\{|X_\lambda| > t\}} |X_\lambda| + t \cdot P(A) < \epsilon. \checkmark$$

Ahora, supongamos A) y B). Fije $\epsilon > 0$.
Por B), sé que $\exists \, \delta > 0$ tal que

$$P(A) < \delta \Rightarrow \int_A |X_\lambda| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall \lambda.$$

Por A) y Markov: $P\{|X_\lambda| > t\} \leq \frac{E[|X_\lambda|]}{t} < \frac{C}{t}$.

Si elegimos $t_0 = C/\delta$, aseguramos que

$$t > t_0 \Rightarrow P\{|X_\lambda| > t\} < \delta.$$

$$\Rightarrow \int_{\{|X_\lambda| > t\}} |X_\lambda| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall \lambda$$

INSPIRATION HUT - 0.5CM GRID

Así, $t > t_0$ implica $\sup_\lambda \int_{\{|X_\lambda| > t\}} |X_\lambda| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$. ✓

Obs: Si $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ y $(Y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ son unif inte, entonces $(X_\lambda + Y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es unif inte.

Corolario: Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uni. int. y $P(A_n) \to 0$, entonces $\int_{A_n} |X_n| \to 0$.

Lema: Si $E[X_\lambda^2] \leq C$, $\forall \lambda \in \Lambda$, entonces $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es unif integrable.

Proof:

Para $t > 0$. $\{|X_\lambda| > t\} \subseteq \{|X_\lambda|/t > 1\}$

$$\Rightarrow \int_{\{|X_\lambda| > t\}} |X_\lambda| \leq \int_{\{|X_\lambda| > t\}} |X_\lambda| \cdot \frac{|X_\lambda|}{t}$$

$$= \frac{1}{t} \int_{\{|X_\lambda| > t\}} X_\lambda^2 \leq \frac{C}{t}. \quad ✓$$

Ejercicio: De hecho, podemos usar $E[|X_\lambda|^p] \leq C$, $\forall \lambda \in \Lambda$, para algún $p > 1$.

Teorema: Suponga $X_n \xrightarrow{prob} X$. Resultan equivalentes:

1) (X_n) es uniformemente integrable.

2) $X_n \xrightarrow{L^1} X$

Proof:

1) ⟹ 2):

Por A): $E[|X_n|] \leq \mathscr{C}, \forall n$

$\Rightarrow X_n \in L^1, \forall n$.

Sabemos que $\exists (X_{n_k})$ con $X_{n_k} \xrightarrow{a.s} X$.

Como $|\cdot|$ es continuo $\therefore |X_{n_k}| \xrightarrow{a.s} |X|$

Por Fatou: $E[|X|] \leq \underline{\lim} E[|X_{n_k}|] \leq \mathscr{C}$

$\therefore X \in L^1$.

Ahora, $|X_n - X| \leq \underbrace{\underbrace{|X_n|}_{uni} + \underbrace{|X|}_{uni}}_{uni}, \forall n$

$\Rightarrow (|X_n - X|)_n$ es unif. integrable ...(Δ)

Como $X_n \xrightarrow{prob} X \cdot \forall \epsilon > 0 \cdot P\{|X_n - X| > \epsilon\} \to 0$.

Luego, $\forall \epsilon > 0$:

$$\int |X_n - X| = \int_{\{|X_n - X| \leq \epsilon\}} |X_n - X| + \int_{\{|X_n - X| > \epsilon\}} |X_n - X|$$

$$\leq \epsilon + \underbrace{\int_{\{|X_n - X| > \epsilon\}} |X_n - X|}_{\to 0}$$ (por el corolario)

$$\Rightarrow 0 \leq \limsup \int |X_n - X| \leq \epsilon, \ \forall \epsilon > 0$$

$$\therefore \limsup \int |X_n - X| = 0.$$

2) $\Rightarrow$ 1):

$E[|X_n|] \to E[|X|]$.

En particular, $\exists\, \mathcal{C} : E[|X_n|] \leq \mathcal{C}, \forall n$

Probemos B) por contradicción.

$\exists\, \epsilon_0 > 0$ Tq ningún $\delta > 0$ funciona.

Hagamos $\delta = 1/k$.

Para cada $k = 1, 2, \ldots$:

$\exists\, A_k$ con $P(A_k) < 1/k$, y

$\exists \; X_{n_k}$ con $\int_{A_k} |X_{n_k}| \geq \epsilon_0$ ... $(\square)$

Como $\{n_k : k = 1, 2, \ldots\}$ es infinito (sino se contradice la hipótesis que (X_n) no es uni int), tomando una subsucesión de $(A_k)_k$ podemos suponer que (X_{n_k}) es subsucesión de (X_n).

Ahora,

$$\int_{A_k} |X_{n_k}| \leq \int_{A_k} |X_{n_k} - X| + \int_{A_k} |X|$$

$$\leq \underbrace{E[|X_{n_k} - X|]}_{\to 0} + \underbrace{\int_{A_k} |X|}_{\to 0}$$

Contradicción, debido a $(\square)$. ✓