CLASE 01

Esperanza condicional

Fijemos $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y las va's $X: \Omega \to \mathbb{R}$ medibles.

Recordemos,

$$\sigma(Z) = \{ Z^{-1}(A) : A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \}$$
$$= \{ \{ Z \in A \} : A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \}$$
$$= \{ \text{cuestionario de preguntas sobre } Z \}.$$

$$\sigma(Z, W) = \{ \{ (Z, W) \in A \} : A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} \}$$
$$= \sigma(\sigma(Z) \cup \sigma(W)) \quad \text{(EJER)}$$
$$=: \sigma(Z) \vee \sigma(W).$$

Además, dado $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, sub σ-álgebra:

$\sigma(Z) \subseteq \mathcal{G} \iff$ Con la información $\mathcal{G}$, podemos responder todo sobre Z, "intuición" "$Z \in \mathcal{G}$".

$\Leftrightarrow$ Z es $\mathcal{G}$-medible

Obs: Si $Z_1, Z_2, \ldots$ son $\mathcal{G}$-medibles, entonces $\limsup Z_n$ y $\liminf Z_n$ son $\mathcal{G}$-medibles

Lema Sean Z, W integrables. (EJER.)

$$Z \underset{a.s}{\leq} W \Leftrightarrow \int_A Z \leq \int_A W, \ \forall A \in \mathcal{F}.$$

Obs:

- $$\underbrace{\int_A Z = \int_A W, \ \forall A \in \mathcal{F}}_{\text{Basta } A \in \sigma(Z,W).} \Leftrightarrow Z \overset{as}{=} W.$$

Teorema: Dada X integrable y $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ sub σ-álg, existe Z va tal que:

1) Z es $\mathcal{G}$-medible.

2) $\int_A Z = \int_A X, \ \forall A \in \mathcal{G}.$

Adicionalmente, si W integrable cumple 1) y 2), entonces $W \overset{a.s}{=} Z$.

Def Dado X integrable y $\mathcal{G}$ sub σ-alg de $\mathcal{F}$, definimos $E[X|\mathcal{G}]$ como la clase de todas las variables cumpliendo con 1) y 2) del Teorema previo

También diremos "Z es versión de $E[X|\mathcal{G}]$" si Z cumple 1) y 2).

Obs: Es fácil verificar que:

- X es $\mathcal{G}$-medible $\Rightarrow E[X|\mathcal{G}] "=" X$
- $X \perp \mathcal{G}$ ($\sigma(X)$ y $\mathcal{G}$ son independientes) $\Rightarrow E[X|\mathcal{G}] \overset{as}{=} E[X]$
- X, Y son integrables, $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow$
  $E[X+Y|\mathcal{G}] \overset{as}{=} E[X|\mathcal{G}] + E[Y|\mathcal{G}]$,
  $E[\alpha X|\mathcal{G}] \overset{as}{=} \alpha E[X|\mathcal{G}]$
- X, Y integrables y $X \underset{as}{\leq} Y \Rightarrow$
  $E[X|\mathcal{G}] \leq E[Y|\mathcal{G}]$.

- Para X integrable, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$, sub σ-álgebras, vale $E[E[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] \overset{a.s}{=} E[X|\mathcal{H}]$.
(propiedad de la torre)

Teorema de la convergencia monótona:

Suponga $X_n, n \in \mathbb{N}$ son va's tal que $0 \overset{a.s}{\leq} X_1 \overset{a.s}{\leq} X_2 \overset{a.s}{\leq} \cdots$ y X una v.a tal que $X_n \xrightarrow{a.s} X$. Fijemos $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, sub σ-álgebra

Si X es integrable (X_n integrable $\forall n$), entonces $E[X_n|\mathcal{G}] \xrightarrow{a.s} E[X|\mathcal{G}]$.

Proof:

Sabemos $X_n \uparrow X$. Fije $A \in \mathcal{G}$

$\Rightarrow 0 \leq X_n 1_A \uparrow X 1_A$

$\overset{TCM}{\Rightarrow} \int X_n 1_A \to \int X 1_A$

Sean Z_n, Z versión de $E[X_n|\mathcal{G}]$ y $E[X|\mathcal{G}]$, respectivamente

Por otro lado, $Z_1 \overset{as}{\leq} Z_2 \overset{as}{\leq} \cdots$.

Así, $\Omega^* := \bigcap_{k\geq 1} \{Z_k \leq Z_{k+1}\}$ Tiene probabilidad 1.

Luego, podemos definir $\eta := \begin{cases} \lim Z_n, & \text{sobre } \Omega^* \\ 0, & \text{sobre } \Omega \setminus \Omega^* \end{cases}$

$\eta : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ es $\mathcal{G}$-medible.

Para $A \in \mathcal{G}$: $Z_n \cdot 1_A \uparrow \eta \cdot 1_A$

$\Rightarrow \int Z_n \cdot 1_A \to \int \eta \cdot 1_A$.

Como η y Z son $\mathcal{G}$-medibles: $Z \overset{as}{=} \eta$.

(EJER): Sean $X_n, n \in \mathbb{N}$, v.a's y X v.a Tales que $X_n \not\to X$ a.s.. Fije $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ sub. σ-álg

Si X_1 y X son integrables, entonces:

1) X_n es integrable, $\forall n$.

2) $E[X_n | \mathcal{G}] \xrightarrow{a.s} E[X | \mathcal{G}]$

Teorema de convergencia dominada

Fijemos $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, sub. σ-álgebra

Sean X_n va's y Z integrable Tales que $|X_n| \leq Z$ a s.

Si $X_n \xrightarrow{as} X$, entonces (X integrable y X_n integrable $\forall n$) $E[X_n|\mathcal{G}] \xrightarrow{as} E[X|\mathcal{G}]$.

Proof:

Haciendo $n \to \infty$: $|X| \leq Z$, a.s

Tenemos $|E[X_n|\mathcal{G}] - E[X|\mathcal{G}]| =$

$|E[X_n - X|\mathcal{G}]| \underset{as}{\leq} E[\,|X_n - X|\,|\mathcal{G}]$

EJER: U integrable $\Rightarrow |E[U|\mathcal{G}]| \underset{as}{\leq} E[|U|\,|\mathcal{G}]$

Definamos $U_N := \sup\{|X_n - X_m| : n, m \geq N\}$,

medible por ser supremo de cantidad enumerable de medibles.

Como $X_n \xrightarrow{as} X \in \mathbb{R}$: $U_N \downarrow 0$ a s

$\Rightarrow E[U_N|\mathcal{G}] \xrightarrow{as} 0$.

T.C.M E C

Siempre que $N \leq n$: $|X_n - X| \leq U_N$.

$\Rightarrow E[\,|X_n - X|\,|\mathcal{G}] \leq E[U_N|\mathcal{G}]$.

Con N fijo, haciendo $n \to \infty$:

$$\limsup E[\,|X_n - X| \mid \mathcal{G}\,] \le E[\,U_N \mid \mathcal{G}\,]$$

Haciendo $N \to \infty$:

$$\limsup \underbrace{E[\,|X_n - X| \mid \mathcal{G}\,]}_{\nabla} \le 0 \quad \text{a.s.}$$

$$0 \le \liminf \nabla \le \limsup \nabla .$$

$$\therefore \; E[\,|X_n - X| \mid \mathcal{G}\,] \xrightarrow{a.s} 0 .$$

Libros:

- A Course in Prob theory (K.L Chung)
- Prob. theory and Examples (Durrett)
- Measure theory, Prob and Sto. Pro (Le Gall).