CLASE 03

Sobre los coeficientes de Fourier

Sea $L > 0$, defina

$$\psi_n(x) = \cos(n\pi x/L),\ n \geq 0\ ;$$

$$\varphi_n(x) = \operatorname{sen}(n\pi x/L),\ n \geq 1,$$ con periodo fundamental $2L/n$, y periodo común $2L$.

Sea $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ acotada e integrable.

$$a_n := \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx,\ n \geq 0\ ;$$

$$b_n := \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx,\ n \geq 1$$

Denotamos $$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

"$S[f] =$" } es otra notación

Suponga que $S[f](x)$ converge. $\theta := n\pi x/L$.

$$S[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n\left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right) + b_n\left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \lim_{N \to \infty}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right)e^{in\pi x/L} + \left(\frac{a_n + ib_n}{2}\right)e^{-in\pi x/L}$$

$$= \lim_{N \to \infty}\sum_{n=-N}^{N}\hat{f}(n)\,e^{\frac{in\pi x}{L}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)\,e^{\frac{in\pi x}{L}},$$

definiendo $\hat{f}(0) = \frac{a_0}{2}$, $\hat{f}(n) = \frac{a_n - ib_n}{2}$, $\hat{f}(-n) = \frac{a_n + ib_n}{2}$.

Note $\hat{f}(n) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\, e^{-in\pi x/L}\, dx$.

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$.
Definimos $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto interno,
que cumple para $x, y, z \in V$; $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$:

1) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$
2) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
3) $\langle x, x \rangle \geq 0$ 4) $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$.

Definimos la norma $\|\cdot\|$ en V como:
1) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, $\alpha \in \mathbb{K}$
2) $\|x\| \geq 0$ 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ 4) $\|x\| = 0 \iff x = 0$

Obs: Dado un p.i, es norma $\|\cdot\| := \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$.

Propiedades:

1) $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ (Cauchy - Schwarz)

2) $\langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2$.

Def: Decimos que f es seccionalmente continua en $[a;b]$ si $\exists\, a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ tal que:

1) f es continua en (x_i, x_{i+1}), $0 \leq i \leq n-1$.
2) $f(x)$ tiende a un límite finito para x_i y x_{i+1} con $x \in (x_i, x_{i+1})$ para $0 \leq i \leq n-1$.

Def: $S([-L, L])$ es el conjunto de funciones seccionalmente continuas en $[-L, L]$; $L > 0$.

Se cumple $S([-L, L])$ es e.v. real, pero la operación $\langle f, g \rangle := \int_{-L}^{L} f(x)g(x)dx$ falla ser un producto interno en $S([-L, L])$, solo por la condición "$\langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow f = 0$".

Def: $\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}$ es una seminorma (casi norma, pues solo falla "$\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$").

EJER: Con seminorma, también se cumple Cauchy-S. y el teo. de Pitágoras.

Sea $f \in S([-L, L])$, podemos escribir los Fou. coef. como $a_n = \frac{1}{L}\langle f, \psi_n \rangle$, $n \geq 0$; $b_n = \frac{1}{L}\langle f, \varphi_n \rangle$, $n \geq 1$.