

Procesamiento topológico de señales

Expositor: Lucio Cornejo

Fecha: 07/12/2023

Tabla de contenidos

- 1) Problemática principal
- 2) Contexto topológico
- 3) Contexto algebraico
- 4) Teoría espectral simplicial
- 5) Problemas de optimización

Problemática principal

¿Cómo extraer información de un network/grafo?

- Representaciones vía **grafos** se limitan a **interacciones entre pares**.

Solución: Grafo \implies Hipergrafo

¿Cómo extraer información de un hipergrafo?

- No es evidente qué espacios topológicos construidos a partir de un hipergrafo son más eficientes en capturar la información topológica (**de conexiones**) del hipergrafo.

Solución: Hipergrafo \implies Complejo simplicial

Diferencia principal entre los objetivos de **Análisis Topológico de datos (TDA)** y **Procesamiento Topológico de señales (TSP)**:

- **TDA:** Analizar propiedades del **complejo simplicial** creado a partir de los datos.
- **TSP:** Analizar propiedades de **señales** definidas sobre un complejo simplicial.

Ejemplos de estructuras donde TSP puede aplicarse:

- Network respecto al flujo sanguíneo entre diferentes partes del cerebro (*señal de arista*).
- Network de autores (vértices), donde aristas representan la existencia de una publicación entre dos autores; y, triángulos llenados (**2-simplex**) representan la existencia de una publicación entre los tres autores.
- Tráfico de datos conectados por links de comunicación.

Contexto topológico

Definición: Un k -simplex *geométrico* es la cápsula convexa de un conjunto de $k + 1$ puntos de \mathbb{R}^n afínmente independientes.

Definición Dado un conjunto finito de N puntos $\{v_0, \dots, v_{N-1}\}$, un k -simplex *orientado* se define como $[v_{i_0}, \dots, v_{i_k}]$, donde $0 \leq i_j \leq N - 1$ para $j = 0, \dots, k$, y, $v_{i_j} \neq v_{i_m}$ para cada $i_j \neq i_m$.

Se consideran solo dos posibles orientaciones para cada k -simplex, en base a la equivalencia de orientaciones si se pueden conectar vía un número par de transposiciones.

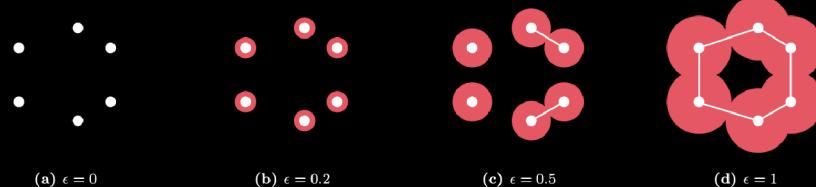
Definición: La dimensión de un k -simplex es uno menos que su cardinalidad. Así, un vértice es un simplex 0-dimensional; una arista, un simplex 1-dimensional.

Definición: Una *cara* del k -simplex $[v_{i_0}, \dots, v_{i_k}]$ es un $(k - 1)$ -simplex de la forma $[v_{i_0}, \dots, v_{i_{j-1}}, v_{i_{j+1}}, \dots, v_{i_k}]$, para algún $0 \leq j \leq k$.

Definición: Un *complejo simplicial abstracto* X es una colección finita de simplices tal que, para cada simplex $\sigma \in X$, todas las caras de σ están en X .

La dimensión de un complejo simplicial abstracto es la **mayor dimensión** de sus simplices.

En ese sentido, un grafo es un complejo simplicial abstracto de dimensión/orden 1.

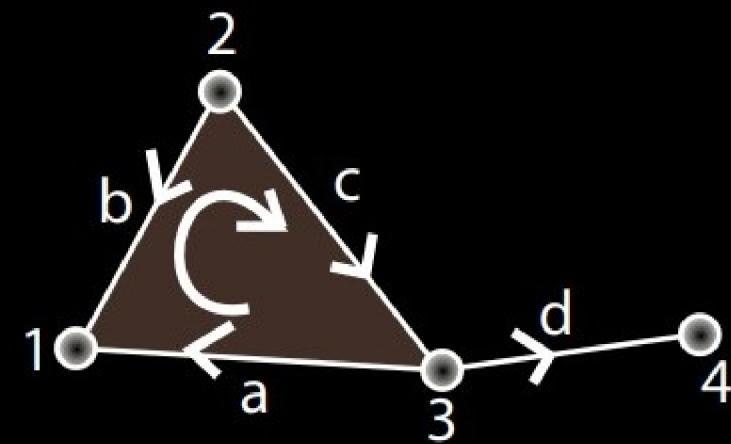


(a) $\epsilon = 0$

(b) $\epsilon = 0.2$

(c) $\epsilon = 0.5$

(d) $\epsilon = 1$



Definición: Dos k -símplices de un mismo complejo simplicial X se denominan *adyacentes superiores* si ambos son la cara de algún $(k + 1)$ -simplex en X .

Definición: Dos k -símplices de un mismo complejo simplicial X se denominan *adyacentes inferiores* si poseen una cara común en X , de dimensión $k - 1$.

Definición: Una cara σ_j^{k-1} de un k -simplex σ_j^k se denomina una *elemento frontera* de σ_j^k . Aquello lo denotamos por $\sigma_j^{k-1} \subset \sigma_j^k$.

Definición: Dado $\sigma_j^{k-1} \subset \sigma_j^k$, denotamos $\sigma_j^{k-1} \sim \sigma_j^k$ si ambos símplices poseen la misma orientación; $\sigma_j^{k-1} \not\sim \sigma_j^k$; caso contrario.

Definición: Dados $\sigma_1^k, \dots, \sigma_{n_k}^k$, simplices en X , una k -cadena τ_k se define como la combinación lineal $\sum_{i=1}^{n_k} \alpha_i \sigma_i^k$ con coeficientes en \mathbb{R} .

Definición: $C_k(X, \mathbb{R})$ denota el *espacio vectorial* formado por las k -cadenas de X .

Definición: El *operador frontera* $\partial_k : C_k(X, \mathbb{R}) \rightarrow C_{k-1}(X, \mathbb{R})$ se define como

$$\partial_k [v_{i_0}, \dots, v_{i_k}] = \sum_{j=0}^k (-1)^j [v_{i_0}, \dots, v_{i_{j-1}}, v_{i_{j+1}}, \dots, v_{i_k}].$$

Proposición: Para todo k entero positivo, se cumple $\partial_k \circ \partial_{k+1} \equiv 0$.

Contexto algebraico

La estructura de un complejo simplicial X de dimensión K es completamente descrita por sus *matrices de incidencia* $B_1, \dots, B_k, \dots, B_K$.

La matriz de incidencia B_k es la representación matricial del operador de frontera. Por lo tanto, se cumple

$$B_k(i, j) = \begin{cases} 0, & \text{si } \sigma_i^{k-1} \not\subset \sigma_j^k \\ 1, & \text{si } \sigma_i^{k-1} \subset \sigma_j^k \quad \text{y} \quad \sigma_i^{k-1} \sim \sigma_j^k \\ -1, & \text{si } \sigma_i^{k-1} \subset \sigma_j^k \quad \text{y} \quad \sigma_i^{k-1} \not\sim \sigma_j^k \end{cases}$$

Propiedad: Debido a la propiedad fundamental del operador frontera, se cumple $B_k B_{k+1} \equiv 0$.

Propiedad: La estructura de un K-complejo simplicial es completamente descrita por sus *matrices Laplacianas combinatorias*.

$$L_0 = B_1 B_1^T$$

$$L_k = B_k^T B_k + B_{k+1} B_{k+1}^T, \quad k = 1, \dots, K-1$$

$$L_K = B_K^T B_K$$

Teoría espectral simplicial

En el estudio de grafos, los **autovectores** asociados a los autovalores más pequeños de L_0 son muy útiles para la **identificación de clusters**.

Enfoquémonos en el caso de simplices de orden a lo más 2, pese a que esta teoría es más general.

Dado un conjunto de vértices, \mathcal{V} ; aristas, \mathcal{E} ; y triángulos, \mathcal{T} , de cardinalidades respectivas V , E y T , se tiene un complejo simplicial asociado $X = \mathcal{X}(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{T})$.

Las **señales** de orden k sobre cada k -simplex ($k = 0, 1, 2$) se definen, respectivamente, como los mapas $s^0 : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^V$, $s^1 : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^E$, $s^2 : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^T$.

Descomposición de Hodge: Dada cualquier señal s^k de orden k , siempre existen tres señales $s^{k-1}, s_H^k \in \ker(L_k), s^{k+1}$ de orden $k - 1, k$, y $k + 1$, respectivamente, tales que la señal original s^k pueda expresarse como la suma de tres componentes ortogonales $s^k = B_k^T s^{k-1} + s_H^k + B_{k+1} s^{k+1}$.

Propiedad: La dimensión de $\ker(L_k)$ es el k -número de Betti del k -complejo simplicial asociado.

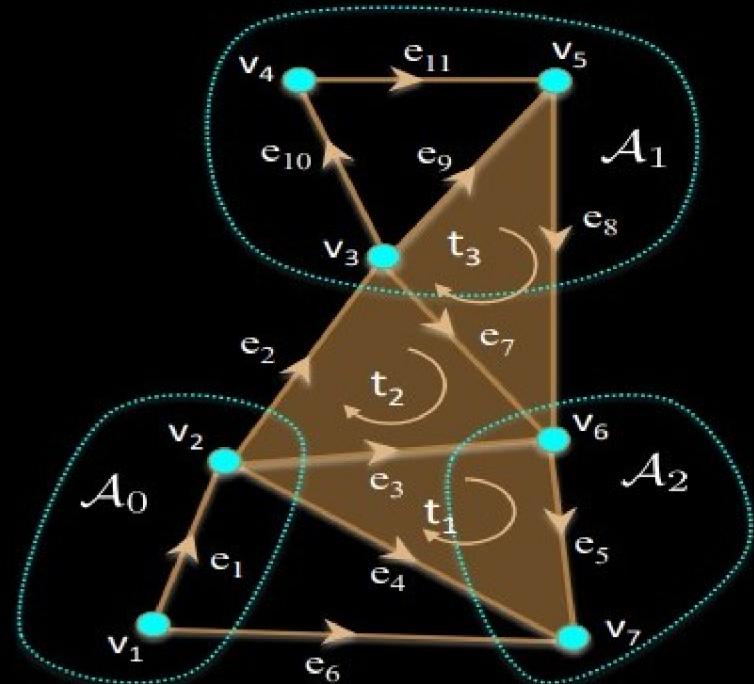


Fig. 1: Cut of order 1.

Considere $s^1 = [e_1, \dots, e_{11}]^T$. La i-ésima entrada de $\text{curl}(s^1) := B_2^T s^1$ mide el ***flujo circulando sobre los ejes*** del i-ésimo triángulo.

$$\text{curl}(s^1) = [e_3 - e_4 + e_5, e_2 - e_3 + e_7, -e_7 + e_8 + e_9]^T$$

Análogamente, la i-ésima entrada de $\text{div}(s^1) = B_1 s^1$ representa el ***flujo neto del vértice*** i-ésimo.

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

so that $\text{div}(\mathbf{s}^1) = [-e_1 - e_6, e_1 - e_2 - e_3 - e_4, e_2 - e_7 - e_9 - e_{10}, e_{10} - e_{11}, -e_8 + e_9 + e_{11}, e_3 - e_5 + e_7 + e_8, e_4 + e_5 + e_6]^T$.

Problemas de optimización

- 1) Encontrar una base (vectorial) unitaria vía la cual analizar señales en aristas donde que presentan un comportamiento rotacional.
- 2) Estimación de una señal con ruido.
- 3) Detección de vértices con señales anómalas.

Referencias

- Topological Signal Processing over Simplicial Complexes
- Combinatorial Laplacians of Simplicial Complexes