CLASE 04

Desigualdad de Bessel y convergencias

Notación para e.v. de funciones seccionalmente continuas en $[-L, L]$, $L>0$: $SC[-L,L]$.

<u>Obs</u>: Si $f \in SC[-L,L] \Rightarrow f$ acotada e integrable en $[-L,L]$.

Recuerde $\psi_n(x) := \cos(n\pi x/L)$; $n \geq 0$, $\varphi(x) := \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, $n \geq 1$.
Dado $f \in SC[-L,L]$ y $S[f] = \frac{a_0 \psi_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \psi_n + b_n \varphi_n$,

se tiene $a_n = \frac{1}{L}\langle f, \psi_n \rangle$, $n \geq 0$; $b_n = \frac{1}{L}\langle f, \varphi_n\rangle$, $n \geq 1$.

<u>Prop</u>: Si $f \in SC[-L,L]$, $S[f] = \frac{a_0\psi_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n\psi_n + b_n\varphi_n$, entonces, dados $N \geq 0$, $M \geq 1$, se tiene que

$$\left\| f - \left(\frac{a_0\psi_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n\psi_n + \sum_{n=1}^{M} b_n\varphi_n\right)\right\| \leq$$

$$\left\| f - \left(\frac{c_0\psi_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} c_n\psi_n + \sum_{n=1}^{M} d_n\varphi_n\right)\right\|,$$ para todo

$\{c_n\}_{n=1}^{N}$, $\{d_n\}_{n=1}^{M}$; y, la igualdad vale si y solo si $c_n = a_n$, $0 \leq n \leq N$ y $d_m = b_m$, $1 \leq m \leq M$.

<u>Proof</u>:

Sean $N \geq 0$, $M \geq 1$.

$S_{N,M} := \langle \{\psi_n\}_{n=0}^{N} \cup \{\varphi_m\}_{m=1}^{M} \rangle$.

$$g := f - \left(\frac{a_0 \psi_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \psi_n + \sum_{m=1}^{M} b_m \varphi_m \right)$$

Lema: • $\langle \psi_n, \varphi_m \rangle = 0$, $n \neq m$ • $\langle \psi_0, \psi_0 \rangle = 2L$

• $\langle \psi_n, \psi_m \rangle = \begin{cases} L, & n = m \ (>0) \\ 0, & n \neq m \end{cases}$

• $\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \{ L$, si $n = m$; o; 0, si $n \neq m$.

Del lema: $g \perp S_{N,M}$.

Dados $\{c_n\}_{n=1}^{N}$, $\{d_m\}_{m=1}^{M}$, definamos

$$h := \left(\frac{a_0}{2} - \frac{c_0}{2} \right) \psi_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n - c_n) \psi_n + \sum_{m=1}^{M} (b_m - c_m) \varphi_m$$

De $h \in S_{N,M}$: $\langle g, h \rangle = 0$.

$\Rightarrow \| g + h \|^2 = \| g \|^2 + \| h \|^2$.

$$\left\| f - \left(c_0 \psi_0 / 2 + \sum_{n=1}^{N} c_n \psi_n + \sum_{m=1}^{M} d_m \varphi_m \right) \right\|^2$$

$$= \left\| f - \left(a_0 \psi_0 / 2 + \sum_{n=1}^{N} a_n \psi_n + \sum_{m=1}^{M} b_m \varphi_m \right) \right\|^2 + \| h \|^2 .$$

Como h es continua, el caso $\|h\|^2 = 0$ implica $a_n = c_n$, $0 \leq n \leq N$; $b_m = d_m$, $1 \leq m \leq M$; debido al lema previo. ✓

Prop: $f \in SC[-L, L]$, $S[f] = \frac{a_0 \psi_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \psi_n + \sum b_n \varphi_n$, entonces $\sum_{n\geq 1} a_n^2 < \infty$ y $\sum_{n\geq 1} b_n^2 < \infty$. Más aún, se cumple $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n^2 + \sum_{m=1}^{M} b_m^2 \leq \|f\|^2 ; \forall n, M \geq 1$.

Proof:

Sean $N \geq 0$, $M \geq 0$, enteros.

$$0 \leq \| f - \left(\frac{a_0 \psi_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \psi_n + \sum_{m=1}^{M} b_m \varphi_m \right) \|$$

De $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ y el lema previo, la expresión eventualmente se reduce a

$$0 \leq \langle f, f \rangle - a_0^2 L - \sum_{n=1}^{N} a_n^2 L - \sum_{m=1}^{M} b_m^2 L + \frac{a_0^2 L}{2} \checkmark$$

Obs: Decimos que $f: [a; b] \to \mathbb{C}$ es seccionalmente continua si $f = u + iv$, con $u, v : [a; b] \to \mathbb{R}$ son seccionalmente continuas.

Asimismo, los coef. de Fou. pueden definirse como coef. Fou. de u, más, i por coe. Fou. de v.

Corolario: Si $f: [-L, L] \to \mathbb{C}$ es sec. cont., entonces $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 \leq \frac{\|f\|^2}{2L}$.

Proof:

$$\hat{f}(n) = \hat{u}(n) + i\hat{v}(n), \forall n \in \mathbb{Z}.$$

$$|\hat{f}(n)|^2 = \hat{f}(n) \cdot \overline{\hat{f}(n)} = (\hat{u}(n) + i\hat{v}(n))(\bar{\hat{u}}(n) - i\bar{\hat{v}}(n)).$$

Note $\overline{\hat{u}(n)} = \overline{\left(\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} u(x) e^{-in\pi x/L} dx\right)} = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} u(x) e^{in\pi x/L} dx$

$= \hat{u}(-n).$

$$\Rightarrow |\hat{f}(n)|^2 = |\hat{u}(n)|^2 + |\hat{v}(n)|^2 - i(\hat{u}(n)\hat{v}(-n) - \hat{v}(n)\hat{u}(-n))$$

$$\sum_{n=-N}^{N} |\hat{f}(n)|^2 = \sum_{n=-N}^{N} |\hat{u}(n)|^2 + \sum_{n=-N}^{N} |\hat{v}(n)|^2, \forall N \in \mathbb{Z}.$$

De $\hat{f}(n) = \frac{a_n - ib_n}{2}$: $\hat{u}(n) = \frac{a_n}{2}$, $\hat{v}(n) = \frac{-b_n}{2}$.

De $\hat{f}(-n) = (a_n + ib_n)/2$: $\hat{u}(-n) = \frac{a_n}{2}$; $\hat{v}(-n) = b_n/2$.

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{4} + \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{4}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2/4 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2/4 = \frac{1}{2}\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n^2 + \sum_{m\geq 1} b_m^2\right)$$

$\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{\|f\|^2}{L}$, debido a la proposición previa. ✓

Sean $f_n : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$.

1) f_n converge puntualmente a f en Ω, si dados $x \in \Omega$, $\epsilon > 0$: $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$

2) f_n converge uniformemente a f en Ω, si dado $\epsilon > 0$: $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ Tal que

$n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \ \forall x \in \Omega.$

Teorema: $f_n \to f$ uniformemente en Ω. Si $f_n \in C(\Omega)$, $\forall n$, entonces se cumple:

- $f \in C(\Omega)$
- Si $\Omega = [a;b]$ y dado $g \in SC[a;b]$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, g(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx.$$

Teorema (M-Test de Weierstrass):

- $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$
- $|f_n(x)| \leq M_n, \ \forall n \geq 1, \ \forall x \in \Omega$
- $\sum_{n\geq 1} M_n < \infty$

Entonces $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge uniformemente en Ω.

Proof:

Dado $\epsilon > 0$, de la conversencia de $\sum_{n\geq 1} M_n$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ Tal que $(\cdots)$.

Dados $M > N \geq N_0$.

$$\left| \sum_{n=1}^{M} f_n(x) - \sum_{n=1}^{N} f_n(x) \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{M} f_n(x) \right| \leq \sum_{n>N}^{M} |f_n(x)|$$

$$\leq \sum_{n>N}^{M} M_n < \epsilon \quad ; \quad \forall x \in \Omega .$$ ✓

Obs: Sea $f \in SC[-L, L]$. Si $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists! \, k$ Tq $x \in [(2k-1)L, (2k+1)L)$. Así, podemos definir $F(x) := f(x - 2kL)$.

Def: $SC_{PER}(2L)$: Set de funciones $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seccionalmente continuas en any interval $[a;b]$ con periodo $2L$.

$C_{PER}(2L)$: Set de funciones $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas de periodo $2L$.

Teorema: Si se cumplen

1) $f \in SC_{PER}(2L)$
3) $f' \in SC_{PER}(2L)$
2) f es diferenciable en $(-L, L)$, salvo a finite number of points.

{Entonces, $\forall x \in \mathbb{R}$: $S[f](x) = \dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$.

$\hookrightarrow (*)$

Lema: Suponga f cumple 1), 2) y 3); además, f es continua y $f(0)=0$. Then, $(*)$ cumple para $x=0$.

Proof del lema:

Defina $g(x) := \begin{cases} f(x)/\left(e^{\frac{i\pi x}{L}}-1\right) ; & x\neq 0, x\in[-L,L) \\ -iLf'(0^+)/\pi , & x=0 \end{cases}$

, extendida periódicamente.

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{\exp(i\pi x/L)-1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(f(x)-f(0))}{x} \cdot \frac{x}{e^{\frac{i\pi x}{L}}-1}$$

Como f' es seccionalmente continua en $[-L;L]$, es real $\lim_{x\to 0^+} f'(x)$. ... (Δ)

Como f es continua y $f(0)=0$, (Δ) implica

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0^+).$$

$$\therefore \lim_{x\to 0^+} g(x) = -f'(0^+)\left(iL/\pi\right)$$

La prueba es análoga para $g(0^-)$.

$\therefore$ $g \in SC[-L,L]$. ✓