Pregunta 1

Sea $\emptyset \neq C \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, convexo.

$f: \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$, $f(x) = \inf \{ w : (x, w) \in C \}$,

donde $x \in \mathbb{R}^n$.

convexo

Pruebe f es función convexa

Fije $x, y \in \mathbb{R}^n$ y considere $t \in]0; 1[$.

Así, t y $1-t$ son positivos.

$\Rightarrow$ Por propiedad de ínfimo:

(A conjunto, $r > 0 \Rightarrow \inf(rA) = r \inf A$)

$$\inf \underbrace{\{ tw : (x, w) \in C \}}_{A} = t f(x) \quad \dots (1)$$

$$\inf \underbrace{\{ (1-t) w : (y, w) \in C \}}_{B} = (1-t) f(y) .$$

Note $\inf A + \inf B \leq a + b$, $\forall (a, b) \in A \times B$.

$\Rightarrow$ Por ínfimo: $\inf A + \inf B \leq \inf (A + B)$

Escrito de otra manera:

INSPIRATION HUT - 0.6CM GRID

De (1): $t\, f(x) + (1-t)\, f(y) \leq$

$$\inf \{ tw + (1-t)w : \{(x,w),(y,w)\} \subseteq C \}$$

$$= \inf \underbrace{\{ w : (x,w) \in C ,\ (y,w) \in C \}}_{D}$$

Considere $w \in D$. Así, $(x,w) \in C$, $(y,w) \in C$

Como C es convexo: $\tilde{t}(x,w) + (1-\tilde{t})(y,w) \in C$

$$\Rightarrow (\tilde{t}x + (1-\tilde{t})y, w) \in C \ ; \ \forall \tilde{t} \in [0,1]$$

$$\therefore D \subseteq \bigcap_{0 \leq \tilde{t} \leq 1} \{ w : (\tilde{t}x + (1-\tilde{t})y, w) \in C \}$$

$$\subseteq \{ w \ \ (px + (1-p)y, w) \in C \}, \forall 0 \leq p \leq 1$$

$$\Rightarrow \inf(D) \geq \inf \{ w : (px + (1-p)y, w) \in C \}, \forall 0 \leq p \leq 1$$

$$\inf(D) \geq f(px + (1-p)y) , \forall 0 \leq p \leq 1$$

Pregunta 2

$a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$, $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$.

$w = (w_1, \dots, w_m) \in \mathbb{R}^m$

$$g(w) := \inf_x \sum_{i=1}^m w_i (a_i' x - b_i)^2 ,$$

$$\mathrm{dom}(g) = \{ w \in \mathbb{R}^m : g(w) > -\infty \} .$$

- **g es una función cóncava**

Como w es un ponderado, los w_i son positivos

$$\Rightarrow g(w) = \inf_x \underbrace{\sum_{i=1}^m \underbrace{w_i}_{\geq 0} \underbrace{(a_i' x - b_i)^2}_{\geq 0}}_{\geq 0}$$

$$\Rightarrow g(w) \geq 0 , \ \forall w \in \mathrm{Dom}(g)$$

Así, $\forall w_1, w_2 \in \mathrm{Dom}(g)$, $t \in [0, 1]$,

$$g(t w_1 + (1-t) w_2) \geq 0 > -\infty$$

$$\Rightarrow t w_1 + (1-t) w_2 \in \mathrm{Dom}(g)$$

$\therefore$ Dom(g) es convexo.

$$g(tw_1 + (1-t)w_2) = \inf_x \sum_{i=1}^{m} (tw_1 + (1-t)w_2)\left((a_i' x - b_i)^2 \right)$$

$$= \inf_x \; t \sum_{i=1}^{m} w_1 (a_i' x - b_i)^2 + (1-t) \sum_{i=1}^{m} w_2 (a_i' x - b_i)^2$$

$$\geq \inf_x \underbrace{t}_{\geq 0} \sum w_1 (a_i' x - b_i)^2 + \inf_x \underbrace{(1-t)}_{\geq 0} \sum_{i=1}^{m} w_2 (a_i' x - b_i)^2$$

$$= t\, g(w_1) + (1-t)\, g(w_2)$$

$\therefore$ $g(tw_1 + (1-t)w_2) \geq t\,g(w_1) + (1-t)\,g(w_2)$

$\therefore$ g es una función cóncava.

- <u>Forma de $g(w)$</u>

Defina la matriz A con filas $a_1, \ldots, a_m$.

$W := \text{diag}(w)$, con $A'WA$ positiva definida.

Pregunta 3

Por demostrar: $\inf\limits_{x \in co(X)} c^T x = \inf\limits_{x \in X} c^T x$.

Sea $\phi \neq X \subseteq \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$, fijos.

Defina $A := \{ c^T x : x \in X \}$

De $X \subseteq co(X)$: $\inf\limits_{x \in X} c^T x \geq \inf\limits_{x \in co(X)} c^T x$. ... (0)

Suponga $\inf\limits_{x \in X} c^T x > \inf\limits_{x \in co(X)} c^T x =: I$

$\Rightarrow \exists\, y \in co(X) : I \leq c^T y < \inf\limits_{x \in X} c^T x$. ... (1)

$\Rightarrow y \in co(X) \setminus X$ (claramente suponemos X no es conjunto convexo).

$\Rightarrow \exists\, x_1, \ldots, x_m \in X$, $t_1, \ldots, t_m \in [0,1]$,

con $y = \sum\limits_{i=1}^{m} t_i x_i$, $\sum\limits_{i=1}^{m} t_i = 1$.

$$c^T y = \sum_{i=1}^{m} t_i c^T x_i \overset{(1)}{<} c^T x_j, \ \forall\, 1 \leq j \leq m.$$

... (2)

Podemos suponer $t_j > 0, \; \forall 1 \leq j \leq m$, sino, basta no considerar su respectivo x_j en la expresión de y.

<u>En (2)</u>: $t_j c^T y < t_j c^T x_j \; , \; \forall 1 \leq j \leq m$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{m} t_j c^T y < \sum_{j=1}^{m} t_j c^T x_j$$

<u>De (1)</u>: $c^T y < c^T y \quad (\Rightarrow\Leftarrow)$

<u>De (0)</u>: $\inf_{x \in X} c^T x = \inf_{x \in co(X)} c^T x$ . ... (4)

- Probar que si el mínimo se alcanza en un lado, también se alcanza en el otro lado.

Suponga $\exists \tilde{x} \in co(X) : c^T \tilde{x} = \inf_{x \in co(X)} c^T x$

Por demostrar $\exists \hat{x} \in X$ con $c^T \hat{x} = c^T \tilde{x}$.

Suponga lo contrario: $\forall \hat{x} \in X : c^T \hat{x} \neq c^T \tilde{x}$

<u>De (4)</u>: $c^T \tilde{x} < c^T \hat{x} \; , \; \forall \hat{x} \in X$. ... (5)

De $\tilde{x} \in co(X)$: $\exists\, x_1, \ldots, x_m \in X$, $t_1, \ldots, t_m$ en $]0;1]$ con $\sum_{i=1}^{m} t_i = 1$ y $\tilde{x} = \sum_{i=1}^{m} t_i x_i$

En (5) $\quad t_i c^T \tilde{x} < t_i c^T x_i$, $\forall\, 1 \leq i \leq m$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} t_i c^T \tilde{x} < \sum_{i=1}^{m} t_i c^T x_i$$

$$c^T \tilde{x} < c^T \tilde{x} \quad (\Rightarrow \Leftarrow)$$

$\therefore$ El mínimo también se alcanza en X.

Por otro lado, suponga el mínimo se alcanza en X.

$$\Rightarrow \exists\, \tilde{x} \in X : c^T \tilde{x} = \inf_{x \in X} c^T x$$

De $X \subseteq co(X)$ y (4): $\tilde{x} \in co(X)$, $c^T \tilde{x} = \inf_{x \in co(X)} c^T x$

$\therefore$ El mínimo también se alcanza en $co(X)$.

- Igualdad para el caso supremo

$$\sup \{ c^T x : x \in X \} = \inf \{ -c^T x : x \in X \}$$

$$= \inf \{ \underbrace{(-c)^T}_{\text{También es función lineal}} x : x \in X \} \overset{(4)}{=} \inf \{ (-c)^T x : x \in co(X) \}$$

$$= \sup \{ -((-c)^T x) : x \in co(X) \}$$

$$= \sup \{ c^T x : x \in co(X) \}$$

$$\therefore \sup_{x \in X} c^T x = \sup_{x \in co(X)} c^T x \;.$$