MAT243 - Álgebra 3

Lucio Cornejo

2022-04-08

Table of contents

About

Apuntes del curso **Álgebra 3**, dictado en la *Pontificia Universidad Católica del Perú.*

Clases

Semana

1 Permutaciones

Prop:
S_n no es abeliano, para todo n >= 3.

Def:
Ciclo de orden r: (i_1 i_2 … i_r)
con r elementos distintos.

Prop:
Todo ciclo de orden r tiene orden r como elemento de S_n .

Def:
Full cycle en S_n es un ciclo de orden n.

Def:
Transposición es un ciclo de orden 2.
Hay n * (n-1) * 0.5 transposiciones en S_n .

Prop:
Para i_1, … i_r distintos, se cumple
(i_1 i_2 … i_r) = (i_1 i_r)(i_1 i_{r-1})…(i_1 i_3)(i_1 i_2)

Prop:
Toda permutación puede escribirse como un producto de transposiciones.

Def:
Sea v una permutación de S_n .
fix(v) = {i: v(i) = i} (fixed set of v)
supp(v) = {i: v(i) != i} (support of v)

Prop:
i en supp(v) implica i != v(i) en supp(v) .

Def:
Permutaciones se dicen **disjuntas** si sus supports son disjuntos.

Prop:
Todo par de permutaciones disjuntas conmutan.

Prop:
Toda permutación es producto de ciclos disjuntos.

2 Grupo alternante A_n

Def:
Permutación se dice par si puede escribirse como producto de una cantidad **par** de transposiciones.

Def:
sgn: S_n -> {-1, 1}
sgn(v) = 1; si v es par.
sgn(v) = -1; si v es impar.
A_n es el kernel de sgn.

Semana

3 Conjugación

Prop:
Sea phi en S_n, se cumple (phi(i_1) phi(i_2) .. phi(i_n)) = phi (i_1 i_2 ... i_n) phi^(-1)

Prop:
Dos permutaciones son conjugadas si y solo si poseen la misma estructura.

Def:
Sea phi en S_n, N_r(phi) se define como el numero de r-cycles presentes en la descomposición de phi como producto de ciclos disjuntos.

Prop:
sum_{i=1}^{n}(i * N_i(r)) = n, para todo r en S_n .

Prop:
El orden de una permutación coincide con el mínimo común múltiple de los {k en [1, ..., n] : N_k != 0} .

Prop:
Elementos en A_n pueden ser conjugados en S_n, sin ser conjugados en A_n .

Prop:
A_n es simple, para n >= 5.

4 Teoría de Galois básica

Prop:
Todo morfismo de anillos entre cuerpos, o es nulo, o es inyectivo.

Def:
Fields **incompatibles** se dice a aquellos que no admiten ring homomorphism no trivial entre ellos.

Def:
Torre de extensiones: Q R C

Prop:
Sea F un subcuerpo de K, con alpha en K.
F[alpha] := {p(alpha) : p en F[x]} es el menor subanillo de K que contiene a F y a alpha.
F(alpha) := {p(alpha)/q(alpha) : p,q en F[x] y q(alpha) != 0} es el menor subcuerpo de K que contiene a F y a alpha.

Prop:
Para F cuerpo, el anillo F[x] es un dominio euclidiano, con la norma siendo el grado del polinomio.

Prop:
La derivación no siempre reduce **en 1** al grado de un polinomio; podría reducirse en más.

Prop:
Las únicas unidades en F[x] son las unidades del cuerpo F.

Semana

Prop:
Sea p en F[x], polinomio de grado n, con F un cuerpo. Entonces, en el anillo cociente F[x] / (p) = {a_0 + a_1[x] + … a_{n-1}[x]^(n-1): a_i en F} todas esas clases son **no** equivalentes.

Teorema de Kronecker
Dado un polinomio no nulo p en F[x]. Existe una extensión de cuerpo K donde se anule p para algún elemento alpha de K.
Asimismo, no existe subcuerpo propio de F[x]/(p) que contenga solución de p(x) = 0.

Def:
La mínima extensión donde un polinomio se descompone en factores lineales se denomina su **splitting field**.

Prop:
Sea p irreducible en F[x]. Sea alpha una solución de p(x) = 0 en alguna extensión K de F. Entonces, se cumple
F[x] / (p) ~ F(alpha) = F[alpha], donde ~ representa isomorfismo.

Prop:
Sea p irreducible en F[x], con una raíz alpha en algún cuerpo de extensión de F. Entonces, p(x)=0 no puede resolverse en ningún cuerpo intermediario entre (exclusivo) F y F(alpha) .

Def:
El **minimal polynomial** de alpha en el cuerpo F es el único polinomio mónico de menor grado y con coeficientes en F, tal que alpha es ráiz del polinomio.

5 Extensiones algebraicas o trascendentales

Def:
Sean F K cuerpos. Un elemento alpha en K se denomina **algebraico sobre F** si existe p en F[x] con p(alpha) = 0.
Elementos no algebraicos se denominan **trascendentales**.

Prop:
Todo elemento del cuerpo finito F_{p^n} es algebraico sobre el cuerpo F_p .

Def:
Una extensión F K se denomina **extensión algebraica** si cada elemento de K es algebraico sobre F.

Prop:
La extensión algebraica de una extensión algebraica, es una extensión algebraica.

Def:
Una extensión F K se denomina **simple** si existe alpha en K con K = F(alpha) .

Semana

6 Espacios vectoriales

Prop:
Todo espacio vectorial admite una base.

7 Aplicación

Prop:
Toda extensión finita de cuerpos es también una extensión algebraica.

Def:
Sea F K una extensión, escribiremos [K : F] para representar dim_{F} K .

Prop:
Sea F K L una extensión (arbitraria) de cuerpos, entonces se cumple
[L : F] = [L : K] [K : F] .

Semana

Semana 03/21

Martes 22

Resolviendo ecuaciones de grado 2, 3 y 4

lorem ipsum

Semana 03/21

Martes 22

Resolviendo ecuaciones de grado 2, 3 y 4

lorem ipsum

Semana 03/21

Martes 22

Resolviendo ecuaciones de grado 2, 3 y 4

lorem ipsum

Tareas

References