LISTA DE EJERCICIOS

1. **Ejercicio 1**

   Una empresa registra la productividad semanal (Y_{it}, en unidades producidas) de 20 trabajadores durante 12 semanas consecutivas. Cada trabajador pertenece a uno de dos turnos: *Día* o *Noche*.

   (a) Suponga que la varianza de los errores puede ser diferente entre los turnos (por ejemplo, el turno Noche presenta mayor variabilidad que el turno Día). Escriba el modelo de regresión lineal, especificando la estructura de varianza

   (b) Existe autocorrelación AR(1) en los errores de cada trabajador, ya que la productividad semanal puede depender de la semana anterior. Escriba el modelo de regresión lineal, especificando la estructura de varianza

   (c) Interprete los coeficientes del modelo.

2. **Ejercicio 2**

   Una empresa registra la productividad semanal (Indice) de 5 trabajadores durante 4 semanas consecutivas. Cada trabajador pertenece a uno de dos turnos (*Mañana* o *Noche*). Los datos se muestran en la siguiente tabla:

Trabajador	Semana	Turno	Indice	Trabajador	Semana	Turno	Indice
1	1	Día	51	3	3	Noche	68
1	2	Día	54	3	4	Noche	65
1	3	Día	59	4	1	Noche	58
1	4	Día	58	4	2	Noche	59
2	1	Día	52	4	3	Noche	58
2	2	Día	56	4	4	Noche	74
2	3	Día	57	5	1	Día	52
2	4	Día	55	5	2	Día	51
3	1	Noche	55	5	3	Día	57
3	2	Noche	57	5	4	Día	57

   (a) Estime un modelo lineal. Aplique una prueba para verificar si la varianza de los errores depende del turno. Interprete el resultado.

   (b) Para el mismo modelo, realice la prueba de para verificar si existe autocorrelación AR(1) en los errores dentro de cada trabajador. Comente la interpretación.

   (c) Estime los modelos: por MCO clásico, con heterocedasticidad (usando WLS o errores estándar robustos) y el modelo corrigiendo la autocorrelación AR(1) si la prueba resulta significativa.

   (d) Compare los modelos estimados usando un criterio apropiado. Indique cuál es preferible.

(e) Grafique los residuos del modelo que considere mejor ajustado. Compare visualmente estos residuos con los del modelo MCO clásico y comente las diferencias observadas.

3. **Ejercicio 3**

Se considera el siguiente modelo de regresión simple sin intercepto:

$$Y_i = \beta x_i + \epsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

(a) Suponga que los $\epsilon_i \sim N(0, \sigma_i^2)$, pero independientes. Encuentre el estimador para β.

(b) ¿El estimador de β es insesgado?

(c) Se propone una estructura funcional para la varianza: $\sigma_i^2 = \sigma^2 x_i$. Esto es común cuando la dispersión crece proporcional a la media. Encuentre su estimador.

(d) Se propone una estructura funcional para la varianza: $\sigma_i^2 = \sigma^2(1 + \theta x_i)$. Útil cuando la variabilidad se incrementa con el cuadrado de la variable explicativa. Encuentre su estimador.

(e) Suponga que los errores ϵ_i siguen un proceso AR(1). Explique qué impacto tendría esto en la estimación de β usando MCO para este modelo sin intercepto.

4. **Ejercicio 4**

Considere el modelo de regresión lineal múltiple:

$$Y = X\beta + \varepsilon, \quad \text{con} \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I_n).$$

(a) Muestre que el estimador de **Ridge**, es un estimador sesgado para $\lambda > 0$.

(b) Si el modelo fuera con una sola covariable (regresión lineal simple) sin intercepto, compare las varianzas del estimador MCO y de Ridge.

(c) Si el modelo fuera con una sola covariable (regresión lineal simple) sin intercepto, compare los ECM de MCO y Ridge.

5. **Ejercicio 5**

Una investigación experimental evalúa el efecto de 2 tratamientos (A y B) sobre el rendimiento de una planta (en gramos). Se obtienen las siguientes observaciones:

Tratamiento	Rendimiento (g)
A	15
A	17
A	14
B	20
B	22

(a) Plantee el modelo estadístico para este experimento bajo el esquema de Diseño Completamente Aleatorizado (DCA). Indique claramente los componentes del modelo (efecto general, efecto de tratamiento y error).

(b) Obtenga la expresión del estimador de máxima verosimilitud para los parámetros. Luego, calcule el valor observado usando los datos.

(c) ¿Cuál es la producción promedio estimada de una planta si se le aplica el tratamiento B?

6. **Ejercicio 6**

Un investigador aplica dos tipos de riego (R1 y R2) y dos tipos de fertilizante (A y B) a parcelas experimentales. Registra los rendimientos de cada parcela:

Parcela	Riego	Fertilizante	Rendimiento
1	R1	A	15
2	R1	A	17
3	R1	A	14
4	R2	B	20
5	R2	B	22

- Plantee formalmente el modelo estadístico considerando *Riego* como factor principal y *Fertilizante* como covariable categórica.
- Estime el nuevo modelo e interprete los resultados.